Abiturprüfung 2017

Mecklenburg-Vorpommern

Wahlaufgaben mit CAS

Zuerst nur die Prüfungsaufgaben,
dann die sehr ausführlichen Musterlösungen
mit Hintergrundwissen
zum Trainieren

Datei Nr. 75171

Stand 30. September 2017

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.schule

Vorwort

Es wurden zwei Gruppen von Aufgaben gestellt A und B

Teil A ist von **<u>allen</u>** Prüfungsteilnehmern zu bearbeiten.

Aufgabe A0 ist ohne Zuhilfenahme von Tafelwerk oder Taschenrechner zu bearbeiten. Bearbeitungsdauer 45 Minuten.
Zusätzlich ist von den Aufgaben A1, A2 und A3 sind **zwei** auszuwählen

Teil B ist für Prüfungsteilnehmen, die die Prüfung unter <u>erhöhten Anforderungen</u> (LK-Niveau) ablegen.

Diese Schüler müssen die **Pflichtaufgabe B0** ohne Hilfsmittel bearbeiten und zusätzlich aus den Aufgaben B1 und B2 **eine** auswählen.

Dieser Aufgabensatz enthält Aufgaben, die mit CAS zu bearbeiten sind.

Inhalt:

Hinweis: Aufgabe B2 wurde nicht verwendet, sondern durch B3 ersetzt, die dann auch die Nummer B2 trug.

A1 Analysis

Die folgenden Daten zeigen den anfänglichen Verlauf der Grippewelle 2014/15 in Deutschland.

w	1	3	5	7	9	11	13
g	41	175	153	1157	4203	9652	14630

Die Variable w steht für die Woche seit Beginn der Grippewelle.
Die Variable g gibt die in der entsprechenden Woche labortechnisch nachgewiesenen Grippefälle an, das heißt die Anzahl der neu an Grippe erkrankten Personen.

1.1 Der Zusammenhang zwischen g und w kann durch Funktionen näherungsweise beschrieben werden. Bestimmen Sie Gleichungen geeigneter Funktionen, indem Sie folgende Regressionen durchführen. 9 BE

$g = f_1(w)$ lineare Regression

$g = f_2(w)$ exponentielle Regression

$g = f_3(w)$ Potenz- bzw. Powerregression

Beurteilen Sie die ermittelten Funktionen hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit den Sachverhalt zu beschreiben.

1.2 Peter behauptet, dass der anfängliche Verlauf der Grippewelle auch durch die Funktion 4 BE

$g = f(w) = \dfrac{17500}{1+1800\cdot e^{-0{,}7\cdot w}}$ näherungsweise beschrieben werden kann.

Ermitteln Sie mithilfe dieser Funktion für die Wochen mit den Nummern 7, 10 und 13 die Anzahl der Neuerkrankungen und nehmen Sie anhand dieser Ergebnisse zu Peters Behauptung Stellung.

1.3 Anhand der bis zur 13. Woche vorliegenden Daten wurde eine reelle Funktion h mit 3 BE

$h(w) = e^{1{,}39\cdot w - 0{,}05\cdot w^2}$ ermittelt, mit deren Hilfe auch der weitere Verlauf der Grippewelle bis zu ihrem Abklingen modelliert wird.

1.3.1 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h im Intervall $0 \le w \le 30$ in ein geeignetes Koordinatensystem.

1.3.2 Treffen Sie rechnerisch mithilfe der Funktion h Voraussagen über 10 BE

- die Höchstzahl der Neuerkrankungen pro Woche,
- die Woche des stärksten Rückgangs der Neuerkrankungen.

Bestimmen Sie grafisch die Woche, ab der die Anzahl der Neuerkrankungen unter 250 liegt.

1.3.3 Tatsächlich gab es im weiteren Verlauf der Grippewelle 2014/15 in Deutschland jedoch folgende Daten: 9 BE

w	15	17	19	21	23	25	27
g	8618	4076	1235	671	187	58	35

Stellen Sie die Wertepaare aus beiden Tabellen in dem schon vorhandenen Koordinatensystem dar.

Vergleichen Sie Modell und Wirklichkeit für den erfassten Zeitraum der Grippewelle anhand der graphischen Darstellung.

Argumentieren Sie mithilfe zweier möglicher Sachverhalte, wie aus Ihrer Sicht die Unterschiede zwischen Modell und Wirklichkeit zu erklären sind.

A2 Analytische Geometrie

Von einem Prisma ABCDEF mit der Grundfläche ABC und der Kante AD sind die Punkte A(10 | 10 | 0), B(90 | 70 | 0), C(-50 | 90 | 0) und D(10 | 10 | 70) bekannt.
Ein Aquarium hat die Form dieses Prismas. Die Dicke der Glasscheiben wird vernachlässigt.
Eine Längeneinheit entspricht einem Zentimeter.

2.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte E und F. 13 BE
Stellen Sie das Prisma grafisch dar.
Zeigen Sie, dass die Grundfläche ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck ist.
Überprüfen Sie, ob es sich bei dem Prisma um ein gerades Prisma handelt.

2.2 Es gibt eine Faustregel, die besagt, dass einem Fisch im Aquarium pro Zentimeter Körperlänge etwa 3 Liter Wasser zur Verfügung stehen sollen. Im Aquarium sollen Guppys gehalten werden. Diese Fische können bis zu 6 cm lang werden. 5 BE

Bestimmen Sie, wie viele Guppys man in diesem Aquarium unter der Beachtung der Faustregel höchstens halten könnte, wenn das Wasser bis 5 cm unter der Aquariumoberkante steht.

2.3 Auf den Boden des Aquariums wird Sand mit einer Dichte von $1{,}6\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ eingebracht. 7 BE

Die Oberfläche des Sandes ist eben aber zur Grundfläche ABC geneigt. Der Aquariensand steht an den Kanten BE und CF jeweils 5 cm, an der Kante AD 10 cm hoch.

Ermitteln Sie, wie viel Kilogramm Sand benötigt werden.

2.4 Ein gerader Stab berührt den Boden im Punkt P, ragt im Punkt Q(-10 | 70 | 6) aus dem Sand und lehnt im Punkt R(-35 | 70 | 60) an der Wand ACFD des Aquariums. 10 BE

Erstellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene ACFD.

Bestimmen Sie die Gesamtlänge des Stabes und unter welchem Winkel er gegen die Wand gelehnt ist.

A3 Stochastik und Analysis

Seilparks sind sehr beliebt, da sie Bewegung und Nervenkitzel bieten. An Masten oder Bäumen sind Plattformen installiert, zwischen denen sich die Benutzer an Seilen gesichert bewegen.
In Deutschland gibt es 480 Seilparks, in der Schweiz 60.

3.1 Langfristige Untersuchungen haben ergeben, dass Mängel in den Seilparks entsprechend folgender Tabelle auftreten. 7 BE

Getesteter Sicherheitsbereich	Anlegen und Benutzen der Kletterausrüstung	Zustand der Seile	Korrekte Einweisung und Beaufsichtigung
Anteil geprüfter Parks mit Mängeln	60%	20%	70%

Ist ein Seilpark in allen drei Bereichen mängelfrei, kann er zertifiziert werden.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

(A) Ein Seilpark zeigt Mängel in allen Bereichen.

(B) Ein Seilpark weist genau in einem Bereich Mängel auf.

Ermitteln Sie die Anzahl an zertifizierbaren Parks, die in Deutschland zu erwarten wären.

3.2 Der Seilpark „luftige Höhe" bietet Parcours in drei Schwierigkeitsstufen: 12 BE
leicht (l), mittel (M) und schwer (S).
Man weiß, dass etwa 22 % der Besucher S-Parcours klettern. In einer bestimmten Woche hat dieser Park 550 Besucher.
Begründen Sie, dass die Anzahl der S-Kletterer als binomialverteilt angenommen werden kann.
Berechnen Sie für folgende Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten:

(C) Genau 137 Besucher klettern S-Parcours.

(D) Höchstens ein Viertel der Besucher absolvieren S-Parcours.

Ermitteln Sie, wie viele Personen mindestens zu einem Kletterteam gehören müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95 % mindestens einer aus diesem Team einen S-Parcours klettert.

In der Hauptsaison rechnet der Seilparkbetreiber wöchentlich mit 750 Besuchern.
Wenn insgesamt 1000 Kletterer einen der S-Parcours genutzt haben, sollen die S-Parcours eine sicherheitstechnische Intensivprüfung erhalten.

Bestimmen Sie ein sinnvolles Zeitintervall für diese Prüfung.

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

3.3 Das letzte Element im schwersten Parcours des Seilparks „luftige Höhe" ist eine Seilrutsche. Der Verlauf des Seils über dem Erdboden kann in einem Koordinatensystem näherungsweise beschrieben werden durch die Funktion h mit der Gleichung 16 BE

$h(x)=-0{,}0000149\,x^3+0{,}00334\,x^2-0{,}07991x+6$ und $x\in\mathbb{R},\ 0\le x\le 90$.

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

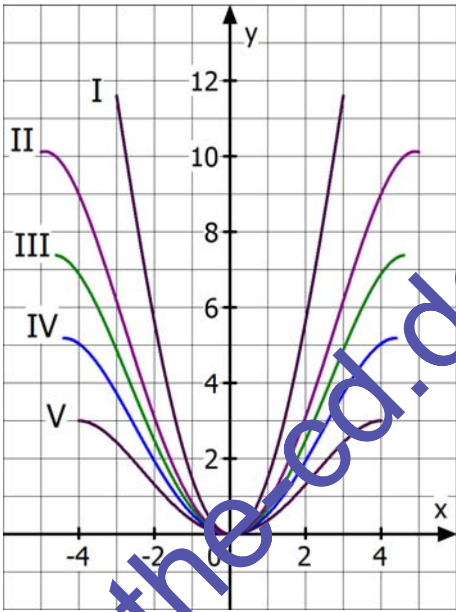
Das Stahlseil ist in den Punkten S(90 | 15) und Z(0 | 6) an zwei Masten befestigt, die senkrecht auf dem Erdboden stehen.

Weil das Seil durchhängt, ist es 0,3 % länger als die Strecke $\overline{SZ}$.
Berechnen Sie die Länge des Seils.

Aus Sicherheitsgründen darf das Seil vom Startpunkt S aus nicht zu steil nach unten verlaufen. Deshalb muss der Winkel zwischen Seil und Mast dort mindestens 67° betragen.
Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

Der zeitliche Ablauf der Abfahrt vom Startpunkt S bis zum tiefsten Seilpunkt kann durch die Funktion $s = 0{,}6\,t^2$ beschrieben werden, dabei ist s die Maßzahl der horizontalen Entfernung vom Start und t die Maßzahl der Zeit (Entfernung in Metern und Zeit in Sekunden).
An der tiefsten Seilstelle wird die größte lokale Änderungsrate von s (Momentangeschwindigkeit) erreicht, danach wird die Fahrt durch ein Bremssystem automatisch verlangsamt.
Der Seilparkbetreiber behauptet, dass auf der Seilrutsche maximal eine Geschwindigkeit von $15\,\frac{m}{s}$ erreicht wird. Untersuchen Sie, ob dies zutrifft.

B1 Analysis



Die Abbildung zeigt Längsschnitte von fünf Gläsern einer Glas-Serie; Füße und Stiele der Gläser sind nicht abgebildet. Die Gläser sind rotationssymmetrisch, d. h. jeder zur Rotationsachse senkrechte Querschnitt durch ein Glas ist kreisförmig.
Im eingezeichneten Koordinatensystem werden die Rotationsachsen der Gläser durch die y-Achse dargestellt; eine Längeneinheit entspricht 1 cm in der Wirklichkeit.
Die Formen der Gläser sind so gewählt, dass jeder der fünf Längsschnitte modellhaft mithilfe einer der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit

$$f_k(x) = -\frac{3}{512}k \cdot x^4 + \frac{3}{32}k^2 \cdot x^2 \quad \text{und} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

beschrieben werden kann. Dabei gehört die Funktion f_2 zum Likörglas der Serie, die Funktion f_3 zum Cocktailglas. Das Sektglas hat eine Höhe von 12 cm, sein Rand einen Durchmesser von 6 cm. Die Materialstärke der Gläser soll vernachlässigt werden.

1.1 Ordnen Sie dem Likörglas und dem Cocktailglas jeweils den zugehörigen Graphen aus der Abbildung zu. 2 BE

1.2 Bestimmen Sie für das Sektglas den zugehörigen Wert von k. 2 BE

1.3 Begründen Sie, dass der Graph von f_k für jedes $k \in \mathbb{R}^+$ symmetrisch zur y-Achse ist. 2 BE

1.4 Bestimmen Sie Lage und Art der Extremstellen von f_k. 5 BE

1.5 Weisen Sie für die Schar der Graphen von f_k nach, dass alle Extrempunkte mit positiver x-Koordinate auf dem Graphen einer Funktion mit der Gleichung $y = \frac{3}{4096}x^6$ liegen. 3 BE

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

1.6 Betrachtet wird nun das Cocktailglas, dessen Längsschnitt für $-2\sqrt{6} \le x \le 2\sqrt{6}$ durch f_3 beschrieben wird.

1.6.1 Um das Glas verläuft 2 cm unterhalb des Randes eine eingeschliffene Linie. Berechnen Sie deren Länge. 5 BE

1.6.2 Im Glas steht ein 20 cm langer Strohhalm, dessen Durchmesser vernachlässigt werden soll. Der Strohhalm hat mit seinem unteren Endpunkt Kontakt zum Glas. 4 BE
Der untere Endpunkt des Strohhalms wird im Modell durch $P(-1 \mid f_3(-1))$ dargestellt, der Punkt, in dem er das Glas berührt, durch $Q\,(u \mid f_3(u))$ mit $u > 0$.
Bestimmen Sie den Wert von u.

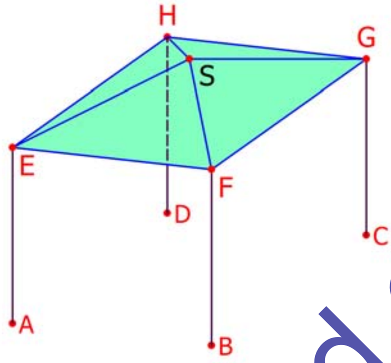
1.7 Der Längsschnitt des Likörglases soll für $0 \le x \le 4$ mithilfe zweier in $\mathbb{R}$ definierter quadratischer Funktionen p_1 und p_2 beschrieben werden, die folgende Eigenschaften besitzen: 7 BE

Die Scheitelpunkte der Graphen von p_1 und p_2 sollen im Tiefpunkt bzw. im Hochpunkt des Graphen von f_2 liegen.

Die Graphen von p_1 und p_2 sollen ohne Knick ineinander übergehen. Der Punkt, in dem die beiden Graphen ineinander übergehen, hat die gleiche x-Koordinate wie der Wendepunkt des Graphen von f_2.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen von p_1 und p_2.

B2 Analytische Geometrie und Stochastik



Ein Turm auf einem Spielplatz besteht aus vier 4,50 m langen, vertikal stehenden Pfosten, vier horizontalen Balken und einem Dach in Form einer geraden Pyramide. Die Abbildung zeigt den Turm schematisch. Die Dicke der Bauteile des Turms soll vernachlässigt werden.
In einem kartesischen Koordinatensystem können die Enden der Pfosten für einen Wert von z mit $z \in \mathbb{R}$ modellhaft durch die Punkte A(2 | -3 | z), B, C und D(-3 | -2 | z) sowie E(2 | -3 | 4), F(3 | 2 | 4), G(-2 | 3 | 4) und H dargestellt werden, die Spitze des Daches durch den Punkt S(0 | 0 | 5). Dabei beschreibt die xy-Ebene den Untergrund; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit.

2.1 Geben Sie an, wie tief die Pfosten in den Untergrund hineinreichen. 1 BE

2.2 Geben Sie die Koordinaten des Punktes H an. 5 BE
Weisen Sie nach, dass das Viereck EFGH ein Quadrat ist.

2.3 Begründen Sie, dass die Pyramide EFGHS symmetrisch zur z-Achse ist. 3 BE

2.4 Die Punkte E, F und S liegen in einer Ebene L. 3 BE
Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.

2.5 An der Spitze des Daches ist eine gerade Stange befestigt, deren oberer Endpunkt im Modell durch einen Punkt T dargestellt wird. Auf den Turm treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ beschreiben. Der Schatten der Stange liegt vollständig auf der Dachfläche, die durch das Dreieck EFS beschrieben wird. 4 BE
Beschreiben Sie, wie man die Länge dieses Schattens berechnen kann, wenn die Koordinaten von T und $\vec{v}$ bekannt sind.

2.6 Zur Stabilisierung des Turms wurden zusätzliche Balken mit einer Länge von 2.10 m verwendet. Ein solcher Balken ist mit einem Ende in einer Höhe von 3,50 m über dem Untergrund an einem der vertikal stehenden Pfosten befestigt, mit dem anderen Ende an einem der beiden darauf liegenden horizontalen Balken. Der obere Befestigungspunkt teilt den horizontalen Balken in zwei Abschnitte. 4 BE
Bestimmen Sie das Verhältnis der Längen der beiden Abschnitte

Die Aufgabenstellung wird auf der nächsten Seite fortgesetzt.

2.7 Um die Nutzung des Spielplatzes mit dem Turm auch für die Zukunft zu belegen, soll festgestellt werden, wie viele Kinder den Spielplatz zukünftig nutzen werden.
Die Tabelle zeigt prozentuale Anteile von Haushalten unterschiedlicher Größe an der Gesamtzahl der Haushalte im Jahr 2013 in Deutschland, die für diese Untersuchung zugrunde gelegt werden.

1 – Personen-Haushalte	40,5%
2 – Personen-Haushalte	34,5%
3 – Personen-Haushalte	12,5%
4 – Personen-Haushalte	9,2%
Haushalte mit mindestens 5 Personen	3,3%

2.7.1 Ermitteln Sie, wie viele Haushalte man im Jahr 2013 mindestens hätte zufällig auswählen müssen, damit darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mehr als zwanzig 2-Personen-Haushalte sind. 4 BE

2.7.2 Im Jahr 2014 wurde vermutet, dass der tatsächliche Anteil der 1-Personen-Haushalte größer als im Jahr 2013 ist. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob diese Vermutung zutrifft, sollte auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Haushalten und einem Signifikanzniveau von 5 % ein Test durchgeführt werden. Dabei sollte möglichst vermieden werden, irrtümlich davon auszugehen, dass die Vermutung zutrifft. 6 BE

Geben Sie die passende Nullhypothese an und bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

B3 Analytische Geometrie und Stochastik

Auf einer ehemaligen Bergbauhalde in Bottrop (Ruhrgebiet) steht seit 1995 ein Aussichtsturm in Form eines Tetraeders, dessen Begrenzungsflächen gleichseitige Dreiecke sind. Das Tetraeder hat eine Höhe von 50 m und steht mit seiner Grundfläche auf vier 10 m hohen Betonpfeilern. Im Turm befinden sich drei Aussichtsplattformen, von denen die oberste gegenüber der Horizontalen geneigt ist.

2.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass die Kantenlänge des „Bottroper Tetraeders" rund 61 m beträgt. 3 BE

2.2 In einer vereinfachten Modellierung wird der Aussichtsturm in einem kartesischen Koordinatensystem durch das Tetraeder ABCD mit A (0 | 0 | 10), B (60 | 0 | 10), $C\left(30 \mid 30\sqrt{3} \mid 10\right)$, $D\left(30 \mid 10\sqrt{3} \mid 20\sqrt{6}+10\right)$ hinreichend genau beschrieben. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter. Die Erdoberfläche liegt in der xy-Ebene. Die Punkte E(30 | 15 | 37,5), F(30 | 20 | 38) und G(28 | 18 | 38) sind Eckpunkte der geneigten Plattform.

2.2.1 Stellen Sie den Körper ABCD in einem Koordinatensystem dar. 7 BE
Berechnen Sie den Neigungswinkel der Plattform bezüglich der Erdoberfläche.

2.2.2 Im „Bottroper Tetraeder" ist nachts an der Spitze eine Lichtskulptur „Fraktal" beleuchtet. 6 BE
Ein Künstler plant neue Beleuchtungsfiguren im Tetraeder.
Ein Entwurf sieht vor, dass vom Mittelpunkt des Tetraeders $M\left(30 \mid 10\sqrt{3} \mid 5\sqrt{6}+10\right)$ gleich lange Leuchtstreben senkrecht zu allen Seitenkanten führen sollen.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes der Kante BD, in dem die betreffende Strebe endet.
Berechnen Sie die Gesamtlänge aller Leuchtstreben.

2.2.3 Ein anderer Entwurf soll beleuchtete Rechteckformen erzeugen. Dazu wird das Tetraeder durch die Ebene E geschnitten. Vier Körperkanten durchstoßen die Ebene E in den Punkten $P\left(-5\sqrt{6}+60 \mid 5\sqrt{2} \mid 30\right)$, $Q\left(-5\sqrt{6}+60 \mid 15\sqrt{2} \mid 10\right)$, $R\left(5\sqrt{6} \mid 15\sqrt{2} \mid 10\right)$ und S. Der Punkt S liegt auf der Kante AD. 7 BE
Weisen Sie nach, dass das Viereck PQRS ein Rechteck ist.

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

2.3 Ein Hersteller beschichteter Rohre, wie sie auch für den Bau dieses Aussichtsturms verwendet wurden, wirbt damit, dass höchstens 3% seiner Rohre minimale Beschichtungsfehler aufweisen. Es besteht der Verdacht, dass dieser Wert höher ist. Daher werden 150 Rohre der laufenden Produktion entnommen und auf Beschichtungsfehler untersucht. 7 BE

Begründen Sie, dass man die Anzahl der Rohre mit Beschichtungsfehlern als binomialverteilt annehmen kann.

Formulieren Sie für ein Signifikanzniveau von 5% eine Entscheidungsregel.

LÖSUNGEN

Lösung: A1 Analysis

Die folgenden Daten zeigen den anfänglichen Verlauf der Grippewelle 2014/15 in Deutschland.

w	1	3	5	7	9	11	13
g	41	175	153	1157	4203	9652	14630

Die Variable w steht für die Woche seit Beginn der Grippewelle.

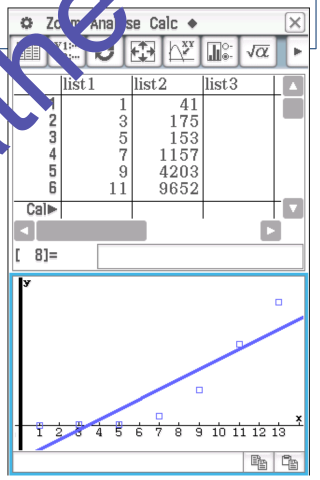
Die Variable g gibt die in der entsprechenden Woche labortechnisch nachgewiesenen Grippefälle an, das heißt die Anzahl der neu an Grippe erkrankten Personen.

1.1 Der Zusammenhang zwischen g und w kann durch Funktionen näherungsweise beschrieben werden. Bestimmen Sie Gleichungen geeigneter Funktionen, indem Sie folgende Regressionen durchführen:

$g = f_1(w)$ lineare Regression

$g = f_2(w)$ exponentielle Regression

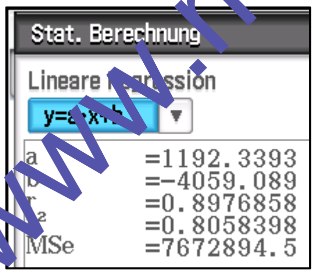
$g = f_3(w)$ Potenz- bzw. Powerregression



Lösung mit CASIO ClassPad:

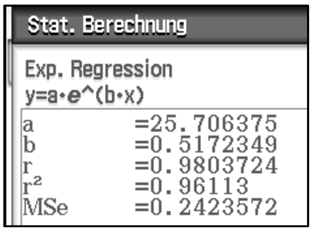
Lineare Regression:

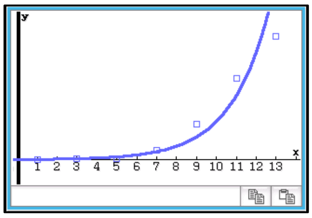
$$g = f_1(w) \approx 1192 \cdot w - 4059$$



Exponentielle Regression:

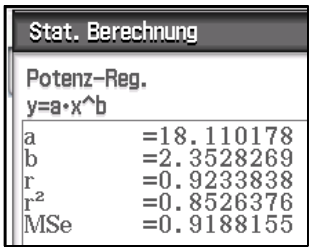
$$g = f_2(w) \approx 25{,}7 \cdot e^{0{,}52 \cdot w}$$

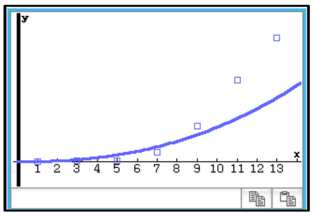




Potenz-Regression:

$$g = f_3(w) = 18{,}1 \cdot x^{2{,}35}$$



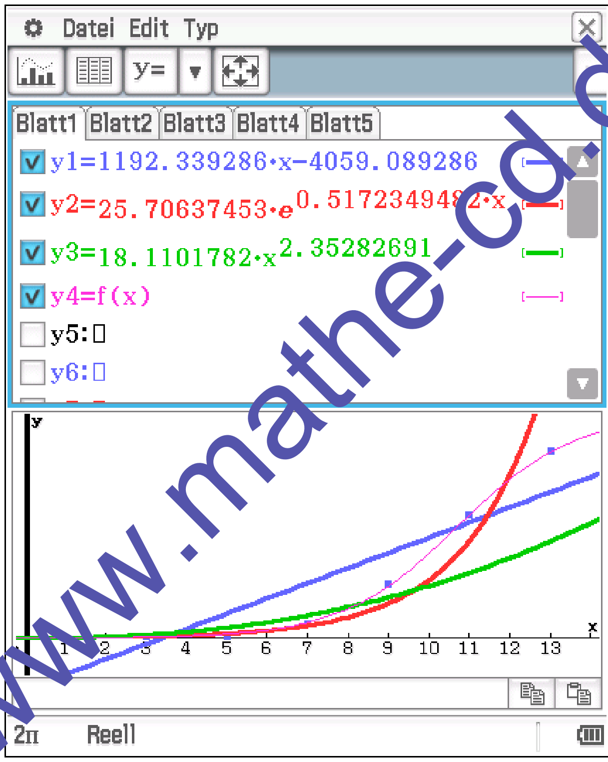


Beurteilen Sie die ermittelten Funktionen hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit den Sachverhalt zu beschreiben.

Die Güte der Regression wird durch den Korrelationskoeffizienten r bestimmt. Im günstigen Fall sollte er etwa 1 sein. Das ist bei der exponentiellen Regression gut erfüllt. Sie beschreibt am besten die starke Zunahme nach den Anfangswerten. Die lineare Regression berücksichtigt das zu wenig, ebenso die Potenzregression, da dort der Einfluss der Anfangswerte die Kurve zu flach werden lässt.

1.2 Peter behauptet, dass der anfängliche Verlauf der Grippewelle auch durch die Funktion $g = f(w) = \dfrac{17500}{1+1800 \cdot e^{-0{,}7\cdot w}}$ näherungsweise beschrieben werden kann.
Ermitteln Sie mithilfe dieser Funktion für die Wochen mit den Nummern 7, 10 und 13 die Anzahl der Neuerkrankungen und nehmen Sie anhand dieser Ergebnisse zu Peters Behauptung Stellung.

```
Define f(x)=17500/(1+1800*e^(-0.7x))
                                  done
f(7)
                           1214.952986
f(10)
                           6625.305734
f(13)
                           14571.20942
```



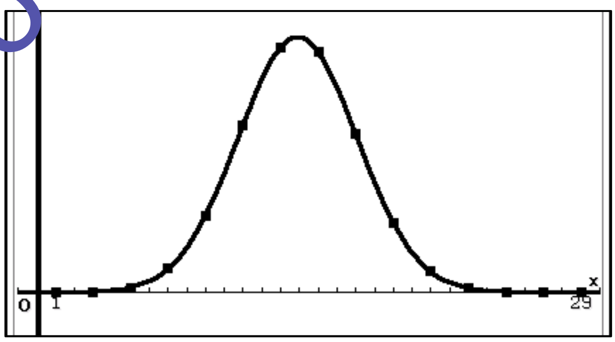
Zuerst der Hinweis, dass diese Screenshots nicht zur Abiturlösung gehören können. Sie sollen dem Leser nur Hintergründe veranschaulichen.

Rechts gehört die dünne Kurve zu Peters Funktion. Wie man erkennt trifft sie ziemlich genau die Punkte, die zu den Messwerten gehören.

1.3 Anhand der bis zur 13. Woche vorliegenden Daten wurde eine reelle Funktion h mit $h(w) = e^{1{,}39\cdot w - 0{,}05\cdot w^2}$ ermittelt, mit deren Hilfe auch der weitere Verlauf der Grippewelle bis zu ihrem Abklingen modelliert wird.

1.3.1 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h im Intervall $0 \le w \le 30$ in ein geeignetes Koordinatensystem.

Der Screenshot des Rechners zeigt, wie der Graph aussehen soll.

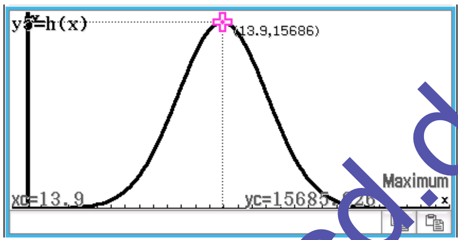


x	y5
1	3.8190
3	41.264
5	298.86
7	1450.9
9	4722.0
11	10301.
13	15063.
15	14764.
17	9701.1
19	4272.6
21	1261.4
23	249.63
25	33.115
27	2.9446
29	0.1755

1.3.2 Treffen Sie <u>rechnerisch</u> mithilfe der Funktion h Voraussagen über

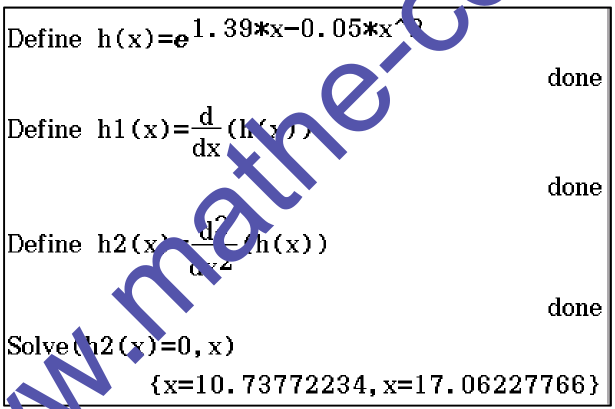
- die Höchstzahl der Neuerkrankungen pro Woche,
- die Woche des stärksten Rückgangs der Neuerkrankungen.

Bestimmen Sie grafisch die Woche, ab der die Anzahl der Neuerkrankungen unter 250 liegt.



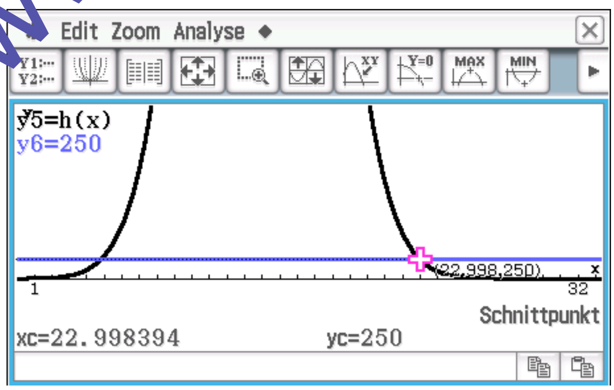
<u>Die graphische Lösung</u> des Rechners ergibt, dass das Maximum der Neuerkrankungen bei $x = 13{,}9$ liegt, das entspricht der 14. Woche (k = 14). Sie beträgt gerundet 15686 Neuerkrankungen pro Woche.

<u>Rechnerische Lösung</u>:



Das stärkste Gefälle hat die Kurve am rechten Wendepunkt.
Die CAS-Rechnung liefert dafür x = 10,73, also die 17. Woche (k=17).

(In der 11. Woche gibt es den stärksten Zuwachs.)



Die graphische Lösung für die Schnittpunkte des Graphen mit der Geraden y = 250 sind 4,8 und 23.

Ab der 23. Woche liegen dann die Neuerkrankungen pro Woche unter 250.

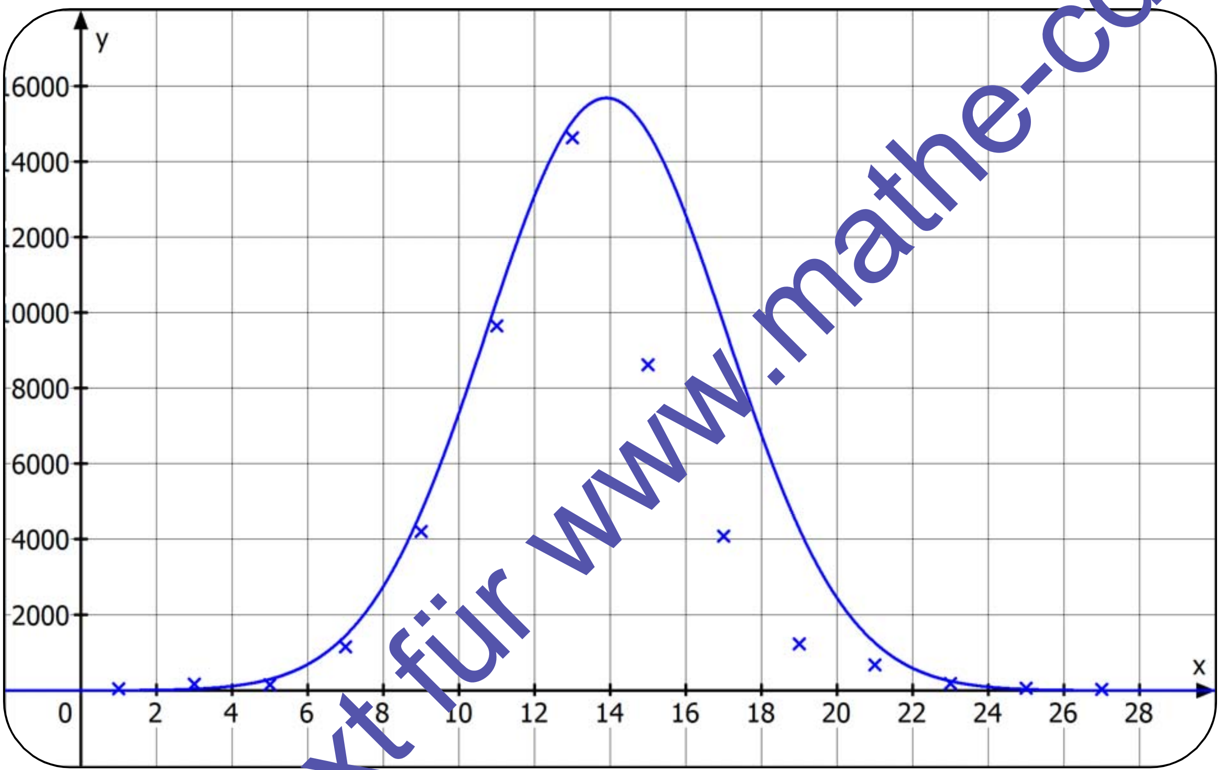
1.3.3 Tatsächlich gab es im weiteren Verlauf der Grippewelle 2014/15 in Deutschland jedoch folgende Daten:

w	15	17	19	21	23	25	27
g	8618	4076	1235	671	187	58	35

Stellen Sie die Wertepaare aus beiden Tabellen in dem schon vorhandenen Koordinatensystem dar.

Vergleichen Sie Modell und Wirklichkeit für den erfassten Zeitraum der Grippewelle anhand der graphischen Darstellung.

Argumentieren Sie mithilfe zweier möglicher Sachverhalte, wie aus Ihrer Sicht die Unterschiede zwischen Modell und Wirklichkeit zu erklären sind.



Der charakteristische Kurvenverlauft stimmt mit der Wirklichkeit überein, allerdings wird das Zurückgehen der Neuerkrankungen im Bereich der 13. bis etwa 21. Woche um etwa 2 Tage vorgezogen.

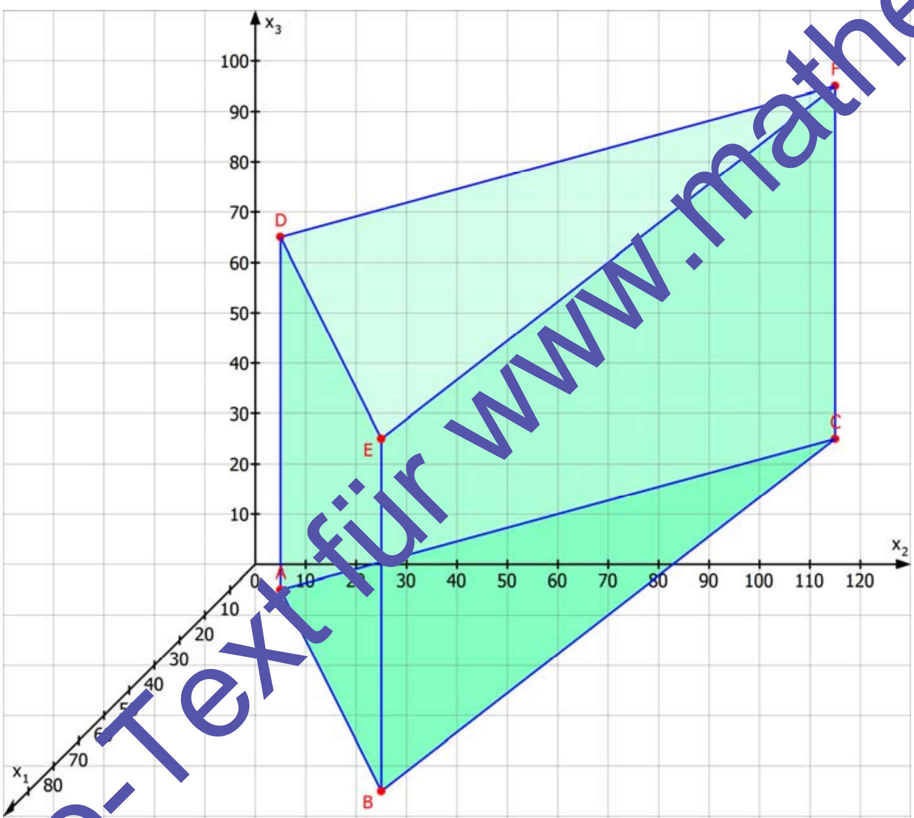
Mögliche Erklärungen für die Abweichung: Die Daten wurden verzögert übermittelt, oder aber weil es schwierig ist, manche Erkrankungen noch als Grippefälle einzustufen, oder nur noch als Erkältungen. Oder aber: Die Funktionsgleichung sollte angepasst werden.

Lösung: A2 Analytische Geometrie

Von einem Prisma ABCDEF mit der Grundfläche ABC und der Kante AD sind die Punkte A(10 | 10 | 0), B(90 | 70 | 0), C(-50 | 90 | 0) und D(10 | 10 | 70) bekannt.
Ein Aquarium hat die Form dieses Prismas. Die Dicke der Glasscheiben wird vernachlässigt.
Eine Längeneinheit entspricht einem Zentimeter.

2.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte E und F.
Stellen Sie das Prisma grafisch dar.

$E(90\,|\,70\,|\,70)$, $F(-50\,|\,90\,|\,70)$ .denn die Grundfläche ABC liegt in der xy-Ebene, D um 70 LE senkrecht über A. Dies gilt dann entsprechend für E über B und F über C.



Zeigen Sie, dass die Grundfläche ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck ist.

Aus A(10 | 10 | 0), B(90 | 70 | 0), C(-50 | 90 | 0) folgt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -140 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -60 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 10 \cdot \left|\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 10\sqrt{64+36+0} = 10 \cdot 10 = 100 \text{ cm}, \quad \left|\overrightarrow{AC}\right| = 10 \cdot \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 100 \text{ cm} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.$$

Also ist das Dreieck gleichschenklig.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -80 \cdot 60 + 80 \cdot 60 = 0$ Also liegt bei A ein rechter Winkel.
AB und AC sind die Katheten.

Überprüfen Sie, ob es sich bei dem Prisma um ein gerades Prisma handelt.

Aus A(10 | 10 | 0) und D(10 | 10 | 70) folgt $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 70 \end{pmatrix}$.

Dieser Vektor hat die Richtung der z-Achse, ABC liegt in der xy-Ebene (weil die z-Koordinaten alle 0 sind). Also steht AD senkrecht auf ABC. Das gilt dann auch für BE und DF, weil ein Prisma die Eigenschaft hat, dass die Kanten parallel sind.
Es handelt sich um ein gerades Prisma.

2.2 Es gibt eine Faustregel, die besagt, dass einem Fisch im Aquarium pro Zentimeter Körperlänge etwa 3 Liter Wasser zur Verfügung stehen sollen. Im Aquarium sollen Guppys gehalten werden. Diese Fische können bis zu 6 cm lang werden.

Bestimmen Sie, wie viele Guppys man in diesem Aquarium unter der Beachtung der Faustregel höchstens halten könnte, wenn das Wasser bis 5 cm unter der Aquariumoberkante steht.

Man muss das Volumen der Wassermenge berechnen. Dieses hat ebenfalls die Form eines Prismas und zwar mit der Höhe 65 cm.

Dreiecksgrundfläche: $G = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 100 = 5000 \text{ cm}^2$

Wasservolumen: $V = G \cdot h = 5000 \cdot 65 \text{ cm}^3 = 325.000 \text{ cm}^3 = 325 \text{ dm}^3 = 325 \text{ l}$

Pro Fisch benötigte Wassermenge: $V_F = 3 \frac{\text{Liter}}{\text{cm}} \cdot 6 \text{ cm} = 18 \text{ Liter}$.

Anzahl der möglichen Fische: $z = \frac{V}{V_F} = \frac{325}{18} \approx 18$

2.3 Auf den Boden des Aquariums wird Sand mit einer Dichte von $1{,}6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ eingebracht.
Die Oberfläche des Sandes ist eben aber zur Grundfläche ABC geneigt. Der Aquariensand steht an den Kanten BE und CF jeweils 5 cm, an der Kante AD 10 cm hoch.
Ermitteln Sie, wie viel Kilogramm Sand benötigt werden.

Die Sandmenge bildet nun einen Körper, den man sich zusammengesetzt vorstellen kann, und zwar aus einem Prisma der Höhe 5 cm mit der Grundfläche ABC und einer Pyramide, dessen Grundfläche die Deckfläche des unteren Prismas ist, und dessen Spitze 5 cm darüber liegt, und zwar 10 cm über A.

Volumen des unteren Sandprismas: $V_1 = G \cdot 5 \text{ cm}$

Volumen der Sandpyramide: $V_2 = \frac{1}{3} \cdot G \cdot 5 \text{ cm}$

Gesamtvolumen: $V_{Sand} = G \cdot 5 \text{ cm} + \frac{1}{3} \cdot G \cdot 5 \text{ cm} = \frac{4}{3} \cdot G \cdot 5 \text{ cm} = \frac{4}{3} \cdot 5000 \cdot 5 \text{ cm}^3 = \frac{100.000}{3} \text{ cm}^3$

Gegeben ist die Dichte $1{,}6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Aus der Maßeinheit kann man die Formel für die Dichte ablesen:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad m = \rho \cdot V = 1{,}6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{100.000}{3} \text{cm}^3 = 53.333 \text{ g} \approx 53{,}3 \text{ kg}$$

2.4 Ein gerader Stab berührt den Boden im Punkt P, ragt im Punkt Q(-10 | 70 | 6) aus dem Sand und lehnt im Punkt R(-35 | 70 | 60) an der Wand ACFD des Aquariums.
Erstellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene ACFD.

Aus den Richtungsvektoren $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -60 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 70 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Ebene kann man einen **Normalenvektor berechnen**.

1. Methode: mit dem Vektorprodukt (Kreuzprodukt):

$$\vec{n} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} -6 & 0 \\ 8 & 0 \\ 0 & 1 \\ -6 & 0 \\ 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

2. Methode; mit dem Skalarprodukt:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ ist orthogonal zu $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -60 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 70 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Also gelten diese Gleichungen:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6n_1 + 8n_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_2 = \tfrac{6}{8} n_1 = \tfrac{3}{4} n_1$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = n_3 = 0$$

Wählt man $n_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad n_2 = 3$.

Damit ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene ACFD.

Die Normalengleichung von E heißt dann: $\vec{n} \cdot \vec{x} = k \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 3y = k$

Die Punktprobe mit $A(10\,|\,10\,|\,0)$ liefert: $k = 70$

Ergebnis: $4x + 3y = 70$

Bestimmen Sie die Gesamtlänge des Stabes.

Q(-10 | 70 | 6) und R(-35 | 70 | 60) sind Punkte auf der Geraden g, auf der der Stab „liegt".

Gleichung von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -35 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ 0 \\ 54 \end{pmatrix}$ mit $\vec{m} = \begin{pmatrix} -25 \\ 0 \\ 54 \end{pmatrix}$

Das untere Ende des Stabes ist ein Punkt U in der xy-Ebene. Man erhält ihn über die Bedingung:

$$z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 60 + 54r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = -\tfrac{60}{54} = -\tfrac{10}{9}$$

$$\overrightarrow{OU} = \begin{pmatrix} -35 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix} - \tfrac{10}{9} \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ 0 \\ 54 \end{pmatrix} \quad \text{Oberes Stabende ist R.}$$

$$\text{Vektor } \overrightarrow{UR} = \begin{pmatrix} -35 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} -35 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix} - \tfrac{10}{9} \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ 0 \\ 54 \end{pmatrix} \right] = \tfrac{10}{9} \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ 0 \\ 54 \end{pmatrix}$$

Länge des Stabes: $\left|\overrightarrow{UR}\right| = \tfrac{10}{9} \cdot \sqrt{25^2 + 54^2} \approx 66{,}1 \text{ cm}$

Unter welchem Winkel ist er gegen die Wand gelehnt?

Der Winkel zwischen dem Stab und dem Normalenvektor der Ebene ist $\cos\gamma = \dfrac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|}$

Das ergibt $\gamma = 70{,}4^\circ$. Der Winkel gegen die Wand ist dann $\alpha = 90^\circ - \gamma = 19{,}6^\circ$

Lösung: A3 Stochastik und Analysis

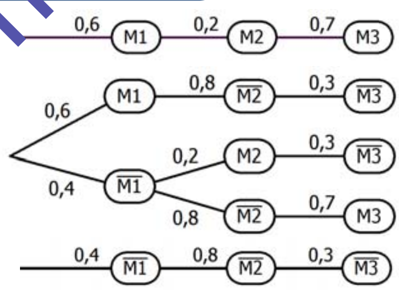
Seilparks sind sehr beliebt, da sie Bewegung und Nervenkitzel bieten. An Masten oder Bäumen sind Plattformen installiert, zwischen denen sich die Benutzer an Seilen gesichert bewegen.
In Deutschland gibt es 480 Seilparks, in der Schweiz 60.

3.1 Langfristige Untersuchungen haben ergeben, dass Mängel in den Seilparks entsprechend folgender Tabelle auftreten.

Getesteter Sicherheitsbereich	Anlegen und Benutzen der Kletterausrüstung	Zustand der Seile	Korrekte Einweisung und Beaufsichtigung
Anteil geprüfter Parks mit Mängeln	60%	20%	70%

Ist ein Seilpark in allen drei Bereichen mängelfrei, kann er zertifiziert werden.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
(A) Ein Seilpark zeigt Mängel in allen Bereichen.
(B) Ein Seilpark weist genau in einem Bereich Mängel auf.

$P(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}084$



$P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot (0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}7)$
$= 0{,}144 + 0{,}4 \cdot (0{,}06 + 0{,}56) = 0{,}932$

Es sei (C) das Ereignis „mängelfrei“.
$P(C) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}096$

Ermitteln Sie die Anzahl an zertifizierbaren Parks, die in Deutschland zu erwarten wären.

Bei n = 480 Seilparks, die mit der Wahrscheinlichkeit p = 0,096 zertifizierbar sind, kann man $E = n \cdot p = 480 \cdot 0{,}096 = 46{,}08$, also mit 46 zertifizierbaren Seilparks rechnen.

3.2 Der Seilpark „luftige Höhe" bietet Parcours in drei Schwierigkeitsstufen: leicht (l), mittel (M) und schwer (S). Man weiß, dass etwa 22 % der Besucher S-Parcours klettern. In einer bestimmten Woche hat dieser Park 550 Besucher.
Begründen Sie, dass die Anzahl der S-Kletterer als binomialverteilt angenommen werden kann.

Die Anzahl X der S-Kletterer ist binomial verteilt, weil die Wahrscheinlichkeit für jeden Kletterer dieselbe ist, und weil es genau zwei Optionen gibt: S-Kletterer oder nicht.

Berechnen Sie für folgende Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten:
(C) Genau 137 Besucher klettern S-Parcours.
(D) Höchstens ein Viertel der Besucher absolvieren S-Parcours.

$P(C) = P(X = 137) \approx 0{,}011$
$P(D) = P(X \le 137{,}5) \approx 0{,}954$

```
binomialPDf(137,550,0.22)
                0.01053994818
binomialCDf(0,137,550,0.22)
                 0.9536836897
```

Ermitteln Sie, wie viele Personen mindestens zu einem Kletterteam gehören müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95 % mindestens einer aus diesem Team einen S-Parcours klettert.

Es sei X die Anzahl der S-Kletterer. X ist binomial verteilt mit $p = 0,22$.

Zielereignis: Z: Es gibt mindestens einen S-Kletterer.

d. h. Z: $X \geq 1$

Bedingung für n: $P(X \geq 1) \geq 0,95$

d. h. $1 - P(X = 0) \geq 0,95$

$1 - 0,78^n \geq 0,95$ (*)

Solve(1−0.78^x≥0.95)
{x≥12.05713549}

Ergebnis: Man benötigt mindestens 13 Personen.

Hinweis: Ohne CAS-Rechner wird man die Gleichung (*) so lösen:

$-0,78^n \geq -0,05$

$0,78^n \leq 0,05$ | logarithmieren:

$n \cdot \ln 0,78 \leq \ln 0,05$ | $: \ln(0,78) < 0$

$n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,78} \approx 12,06$

$\frac{\ln(0.05)}{\ln(0.78)}$ 12.05713549

In der Hauptsaison rechnet der Seilparkbetreiber wöchentlich mit 750 Besuchern.
Wenn insgesamt 1000 Kletterer einen der S-Parcours benutzt haben, sollen die S-Parcours eine sicherheitstechnische Intensivprüfung erhalten.
Bestimmen Sie ein sinnvolles Zeitintervall für diese Prüfung.

Unter 750 Besuchern sind durchschnittlich $750 \cdot 0,22 = 165$ S-Kletterer pro Woche.

Bis dann 1000 S-Kletterer erreicht sind, vergehen $\frac{1000}{165} \approx 6$ Wochen.

3.3 Das letzte Element im schwersten Parcours des Seilparks „luftige Höhe" ist eine Seilrutsche. Der Verlauf des Seils über dem Erdboden kann in einem Koordinatensystem näherungsweise beschrieben werden durch die Funktion h mit der Gleichung
$h(x) = -0,0000149\,x^3 + 0,00334\,x^2 - 0,07991x + 6$ und $x \in \mathbb{R},\ 0 \leq x \leq 90$.
Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.
Das Stahlseil ist in den Punkten S(90 | 15) und Z(0 | 6) an zwei Masten befestigt, die senkrecht auf dem Erdboden stehen.
Weil das Seil durchhängt, ist es 0,3 % länger als die Strecke $\overline{SZ}$.
Berechnen Sie die Länge des Seils.

Strecke $\overline{SZ} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{90^2 + 9^2} = 90,45\text{ m}$

Seil: $\overset{\frown}{SZ} = 90,45\text{ m} \cdot 1,003 = 90,72\text{ m}$

Aus Sicherheitsgründen darf das Seil vom Startpunkt S aus nicht zu steil nach unten verlaufen.
Deshalb muss der Winkel zwischen Seil und Mast dort mindestens 67° betragen.
Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

Tangentensteigung in S:

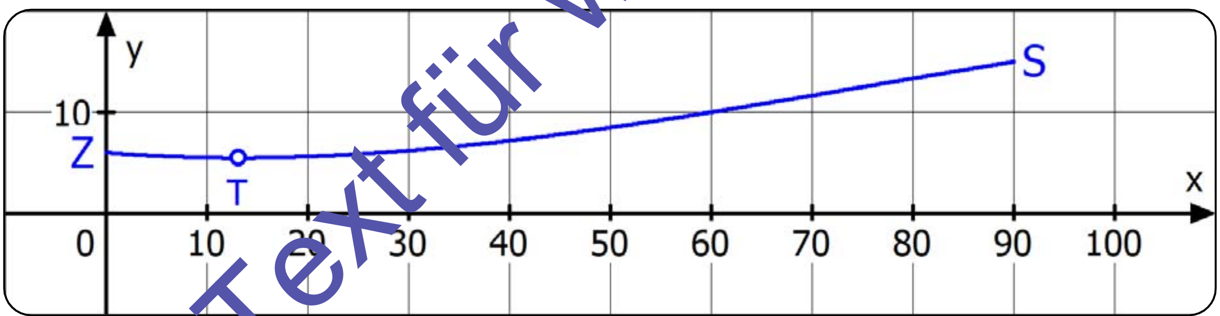
Der CAS-Rechner liefert einen Steigungswinkel von 9°; also beträgt der Winkel gegen die Stange 81°.
Die Bedingung ist also erfüllt.

```
Define h(x)=-0.0000149*x^3+0.00334*x^2-0.07991*x+6
                                                 done
Define h1(x)=d/dx(h(x))
                                                 done
h1(90)
                                              0.15922
tan⁻¹(ans)
                                          9.046096443
```

(WISSEN: Die 1. Ableitung liefert die Tangentensteigung und die entspricht dem Tangens des Steigungswinkels.)

Der zeitliche Ablauf der Abfahrt vom Startpunkt S bis zum tiefsten Seilpunkt kann durch die Funktion $s = 0{,}6\,t^2$ beschrieben werden, dabei ist s die Maßzahl der horizontalen Entfernung vom Start und t die Maßzahl der Zeit (Entfernung in Metern und Zeit in Sekunden).
An der tiefsten Seilstelle wird die größte lokale Änderungsrate von s (Momentangeschwindigkeit) erreicht, danach wird die Fahrt durch ein Bremssystem automatisch verlangsamt.

Der Seilparkbetreiber behauptet, dass auf der Seilrutsche maximal eine Geschwindigkeit von $15\,\frac{m}{s}$ erreicht wird. Untersuchen Sie, ob dies zutrifft.




```
Solve(h1(x)=0)
 {x=13.11324681,x=136.3274691}
```

Lage des Tiefpunktes: $x_T \approx 13{,}11$.

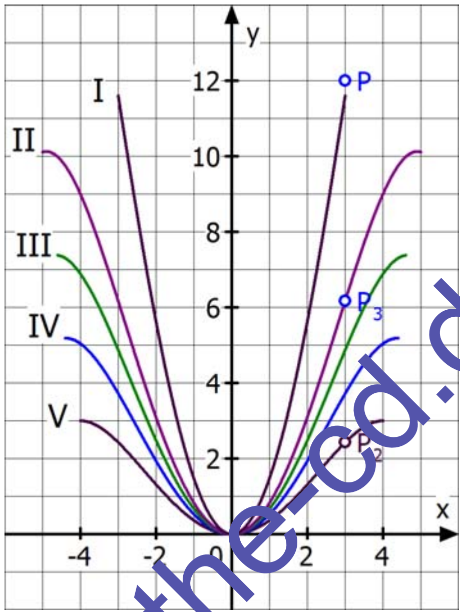
Vom Startpunkt S bis T legt die Seilrutsche eine horizontale Entfernung von s = 90 – 13,11 = 76.89 m zurück. Dazu benötigt sie die Zeit $t_T = \sqrt{\frac{s}{0{,}6}} = \sqrt{\frac{76{,}89}{0{,}6}}\,s \approx 11{,}32\ s$.

Die Momentangeschwindigkeit wird als momentane Änderungsrate über die erste Ableitung der Weg-Zeit-Funktion berechnet: $v(t) = \dot{s}(t) = 1{,}2 \cdot t$

Folgerung: $v(11{,}32s) = 1{,}2 \cdot 11{,}32\ \frac{m}{s} \approx 13{,}6\ \frac{m}{s}$

Ergebnis: Die maximale Geschwindigkeit (die im Tiefpunkt erreicht wird) liegt unter der angegebenen Grenze von $15\,\frac{m}{s}$.

Lösung: B1 Analysis



Die Abbildung zeigt Längsschnitte von fünf Gläsern einer Glas-Serie; Füße und Stiele der Gläser sind nicht abgebildet. Die Gläser sind rotationssymmetrisch, d. h. jeder zur Rotationsachse senkrechte Querschnitt durch ein Glas ist kreisförmig.

Im eingezeichneten Koordinatensystem werden die Rotationsachsen der Gläser durch die y-Achse dargestellt; eine Längeneinheit entspricht 1 cm in der Wirklichkeit.

Die Formen der Gläser sind so gewählt, dass jeder der fünf Längsschnitte modellhaft mithilfe einer der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit

$$f_k(x) = -\frac{3}{512}k \cdot x^4 + \frac{3}{32}k^2 \cdot x^2 \quad \text{und} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

beschrieben werden kann. Dabei gehört die Funktion f_2 zum Likörglas der Serie, die Funktion f_3 zum Cocktailglas. Das Sektglas hat eine Höhe von 12 cm, sein Rand einen Durchmesser von 6 cm. Die Materialstärke der Gläser soll vernachlässigt werden.

1.1 Ordnen Sie dem Likörglas und dem Cocktailglas jeweils den zugehörigen Graphen aus der Abbildung zu.

Hinweis: Wer mit CAS-Rechnern gut umgehen kann, der weiß, dass man Funktionen mit Parametern als Funktion mit zwei Variablen definieren kann, etwa also f(x,k).

Die Funktion f_2 wird dann als f(x,2) behandelt und f_3 ist f(x,3).
Ich habe (rechts sichtbar) berechnen lassen, welche Funktionswerte diese beiden Funktionen an der Stelle x = 3 haben.

$$\text{define } f(x,k) = -\frac{3k}{512}x^4 + \frac{3k^2}{32}x^2 \qquad \text{done}$$

```
f(3,2)
                    2.43
f(3,3)
                    6.17
```

Ergebnis: Das Schaubild K_2 von f_2 geht durch $P_2(3\,|\,2{,}4)$ und ist daher Kurve V, und das Schaubild von f_3 geht durch $P_3(3\,|\,6{,}2)$ und ist daher Kurve II.

1.2 Bestimmen Sie für das Sektglas den zugehörigen Wert von k.

Beim Sektglas mit der Höhe 12 und dem Durchmesser 6 kommt man eindeutig auf Kurve I:
Der Punkt $P_6(3\,|\,12)$ führt über die Punktprobe $f(3,k) = 12$ zu:
k = 4,06. (Der negative Wert wird nicht gebraucht.)

```
Solve(f(3,k)=12,k)
                {k=-3.50,k=4.06}
```

1.3 Begründen Sie, dass der Graph von f_k für jedes $k \in \mathbb{R}^+$ symmetrisch zur y-Achse ist.

f hat nur gerade Exponenten für x, also gilt $f_k(-x) = f_k(x)$. Das bedeutet Symmetrie zur y-Achse.

1.4 Bestimmen Sie Lage und Art der Extremstellen von f_k.

$f_k(x) = -\frac{3}{512}k \cdot x^4 + \frac{3}{32}k^2 \cdot x^2$, $\quad f_k'(x) = -\frac{3k}{128}x^3 + \frac{3k^2}{16}x$, $\quad f_k''(x) = -\frac{9k}{128}x^2 + \frac{3k^2}{16}$

Notwendige Bedingung: $f_k'(x) = 0 \iff -\frac{3k}{128}x^3 + \frac{3k^2}{16}x = 0 \quad |: 3k \text{ und } \cdot 128$

$-x^3 + 8kx = 0$ also $x(-x^2 + 8k) = 0$

$x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{8k}$

Hinreichende Bedingung: $f_k''(0) = \frac{3k^2}{16} > 0 \Rightarrow$ Minimum.

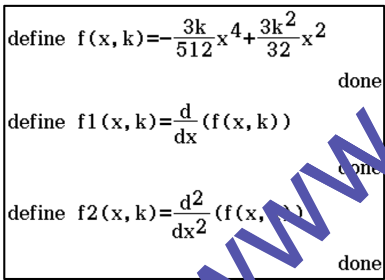
$f_k''(\pm\sqrt{8k}) = -\frac{9k}{128} \cdot 8k + \frac{3k^2}{16} = -\frac{9k^2}{16} + \frac{3k^2}{16} = -\frac{6k^2}{16} < 0 \Rightarrow$ Maximum.

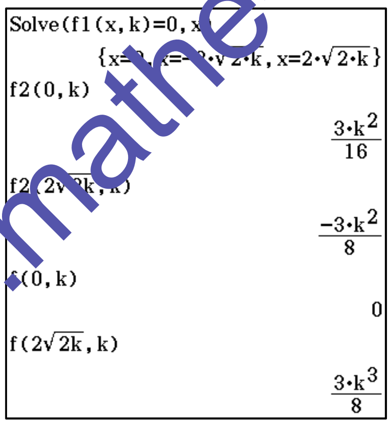
y-Koordinaten: $f_k(0) = 0$

$f_k(\pm\sqrt{8k}) = -\frac{3k}{512} \cdot 64k^2 + \frac{3k^2}{32} \cdot 8k = -\frac{3}{8}k^3 + \frac{6}{8}k^3 = \frac{3}{8}k^3$

Ergebnis: Tiefpunkt $T(0\,|\,0)$, Hochpunkte: $H_{1,2}\left(\pm\sqrt{8k}\,|\,\frac{3}{8}k^3\right)$

Hier mein Screenshot mit CASI= ClassPad:





1.5 Weisen Sie für die Schar der Graphen von f_k nach, dass alle Extrempunkte mit positiver x-Koordinate auf dem Graphen einer Funktion mit der Gleichung $y = \frac{3}{4096}x^6$ liegen.

Gesucht ist also die Ortskurve der Hochpunkte:

Es gilt: $x_H = \sqrt{8k} \Rightarrow x_H^2 = 8k \Rightarrow k = \frac{1}{8}x_H^2$

Einsetzen in $y_H = \frac{3}{8}k^3$: $\quad y_H = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{8}x_H^2\right)^3 = \frac{3}{8^4}x_H^6 = \frac{3}{4096}x_H^6$

Also liegen die beiden Hochpunkte auf der Kurve $y = \frac{3}{4096}x^6$.

1.6.1 Betrachtet wird nun das Cocktailglas, dessen Längsschnitt für $-2\sqrt{6} \le x \le 2\sqrt{6}$ durch f_3 beschrieben wird. Um das Glas verläuft 2 cm unterhalb des Randes eine eingeschliffene Linie. Berechnen Sie deren Länge.

Der rechte Rand liegt laut Aufgabe bei $x = 2\sqrt{6}$.

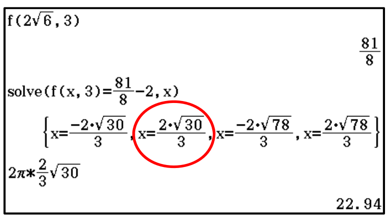
Dazu gehört die Glashöhe $f_3\left(2\sqrt{6}\right) = \frac{81}{8}$.

2 cm tiefer beträgt der Radius des Glases $x = \frac{2}{3}\sqrt{30} \approx 3{,}65$ (cm)

Die zugehörige Kreislinie hat die Länge

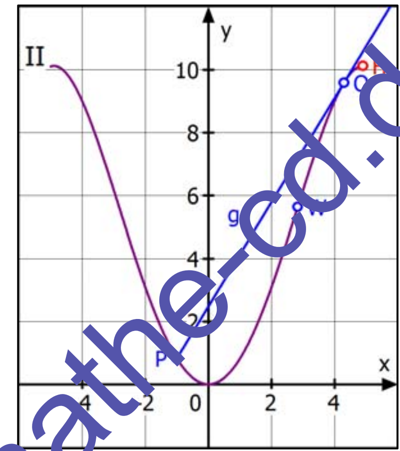
$$U = 2\pi x = 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{30} \approx 22{,}94.$$

Ergebnis: Die Länge der Linie beträgt 23 cm.



1.6.2 Im Glas steht ein 20 cm langer Strohhalm, dessen Durchmesser vernachlässigt werden soll.
Der Strohhalm hat mit seinem unteren Endpunkt Kontakt zum Glas.
Der untere Endpunkt des Strohhalms wird im Modell durch $P(-1 \mid f_3(-1))$ dargestellt,
der Punkt, in dem er das Glas berührt, durch $Q(u \mid f_3(u))$ mit $u > 0$.
Bestimmen Sie den Wert von u.

Gesucht ist also die Tangente von $P(-1 \mid 0{,}83)$ an die Kurve II, die durch f_3 dargestellt wird.



METHODE:
Man stellt die Gleichung im unbekannten Berührpunkt $Q(u \mid f_3(u))$ auf und macht mit P die Punktprobe.
Diese Gleichung liefert u.

Tangente mit der Punktsteigungsform:

$$y - f_3(u) = f_3'(u) \cdot (x - u)$$

Punktprobe mit $P(-1 \mid 0{,}83)$:

$$\boxed{0{,}83} - f_3(u) = f_3'(u) \cdot (\boxed{-1} - u)$$

```
solve(0.83-f(u,3)=f1(u,3)*(-1-u),u)
                                {u=-3.64,u=4.31}
```

CAS-Lösung: $u = 4{,}31$

1.7 Der Längsschnitt des Likörglases soll für $0 \le x \le 4$ mithilfe zweier in $\mathbb{R}$ definierter quadratischer Funktionen p1 und p2 beschrieben werden, die folgende Eigenschaften besitzen:
Die Scheitelpunkte der Graphen von p1 und p2 sollen im Tiefpunkt bzw. im Hochpunkt des Graphen von f_2 liegen.
Die Graphen von p1 und p2 sollen ohne Knick ineinander übergehen. Der Punkt, in dem die beiden Graphen ineinander übergehen, hat die gleiche x-Koordinate wie der Wendepunkt des Graphen von f_2.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen von p_1 und p_2.

Zuerst muss die **Wendestelle** des Graphen von f_2 berechnet werden, also für k = 2:

Man benötigt: $f_2''(x) = -\frac{18}{128}x^2 + \frac{12}{16} = -\frac{9}{64}x^2 + \frac{3}{4}$ und $f_2'''(x) = -\frac{9}{32}x$

Notwendige Bedingung: $f_2''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{9}{64}x^2 + \frac{3}{4} = 0 \quad | \cdot \frac{64}{9}$

$$-x^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{64}{9} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = \frac{16}{3} \;\Rightarrow\; x_W = \pm\sqrt{\frac{16}{3}} = \pm\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

Hinreichende Bedingung: $f_2'''\left(\pm\frac{4}{3}\sqrt{3}\right) \neq 0$

Bei der Wendestelle $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ werden die beiden Parabelbögen zusammengesetzt.

Ansatz für p_1: $p_1(x) = ax^2$ mit $p_1'(x) = 2ax$

Der Graph von p_2 soll den Hochpunkt als Scheitel übernehmen: $H(4 \mid 3)$

Ansatz für p_2: $p_2(x) = b \cdot (x-4)^2 + 3$ mit $p_2'(x) = b \cdot 2(x-4) = 2bx - 8b$

Die **Bedingung** lautet: An der Wendestelle von **II** sollen die Kurven knickfrei ineinander übergehen.

1. Bedingung daher: $p_1(\frac{4}{3}\sqrt{3}) = p_2(\frac{4}{3}\sqrt{3})$ d. h. $a \cdot \frac{16}{3} = b(\frac{4}{3}\sqrt{3} - 4)^2 + 3$ (1)

2. Bedingung: $p_1'\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right) = p_2'\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$ d. h. $2a \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3} = 2b\left(\frac{4}{3}\sqrt{3} - 4\right)$ (2)

CAS-Lösung:

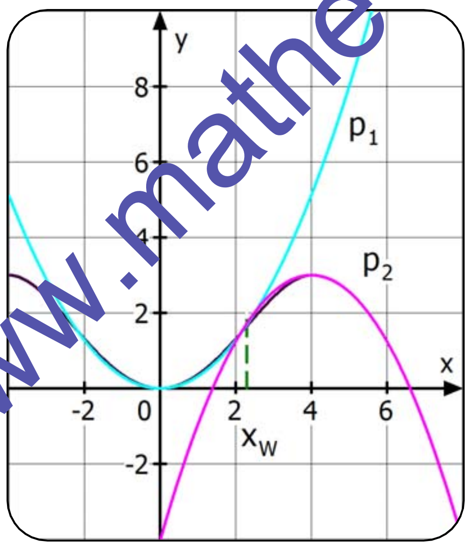
$$\left.\begin{cases} \frac{16}{3}*a=b*(\frac{4}{3}\sqrt{3}-4)^2+3 \\ \frac{8}{3}*a\sqrt{3}=2b*(\frac{4}{3}\sqrt{3}-4) \end{cases}\right|_{a,\,b}$$

$$\{a=0.32,\ b=-0.44\}$$

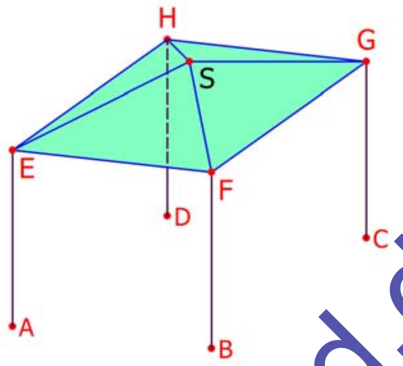
Ergebnis: $p_1(x) = 0{,}32 \cdot x^2$

$p_2(x) = -0{,}44 \cdot (x-4)^2 + 3$

Für Interessierte hier noch eine Abbildung, welche zeigt, wie der Graph von f_2 im Vergleich zu den Näherungsfunktionen p_1 und p_2 liegt.



Lösung: B2 Analytische Geometrie und Stochastik



Ein Turm auf einem Spielplatz besteht aus vier 4,50 m langen, vertikal stehenden Pfosten, vier horizontalen Balken und einem Dach in Form einer geraden Pyramide. Die Abbildung zeigt den Turm schematisch. Die Dicke der Bauteile des Turms soll vernachlässigt werden.
In einem kartesischen Koordinatensystem können die Enden der Pfosten für einen Wert von z mit $z \in \mathbb{R}$ modellhaft durch die Punkte A(2 | -3 | z), B, C und D(-3 | -2 | z) sowie E(2 | -3 | 4), F(3 I 2 I 4), G(-2 | 3 | 4) und H dargestellt werden, die Spitze des Daches durch den Punkt S(0 | 0 | 5). Dabei beschreibt die xy-Ebene den Untergrund; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit.

2.1 Geben Sie an, wie tief die Pfosten in den Untergrund hineinreichen.

Die Pfostenlänge ist einerseits $z_E - z_A = 4 - z$ und andererseits 4,50 m.
Also: $4 - z = 4{,}50 \quad \Rightarrow \quad z = -0{,}5$.
Ergebnis: Die Pfosten reichen 0,5 m in den Untergrund hinein.

2.2 Geben Sie die Koordinaten des Punktes H an.
Weisen Sie nach, dass das Viereck EFGH ein Quadrat ist.

H liegt 4 m über D(-3 | -2 | z): $z = 4$: $H(-3\,|\,-2\,|\,4)$

Parallelogrammnachweis: $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}$

Weil $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ ist EFGH ein Parallelogramm.

Rautennachweis: $\left|\overrightarrow{EF}\right| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$. $\left|\overrightarrow{EH}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-5\\1\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{26}$

Weil $\left|\overrightarrow{EF}\right| = \left|\overrightarrow{GH}\right|$ sind zwei benachbarte Seiten im Parallelogramm gleich groß, also hat das Parallelogramm gleich lange Seiten, es ist eine Raute bzw. Rhombus.

Quadratnachweis: $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-5\\1\\0\end{pmatrix} = -5 + 5 + 0 = 0$

Also hat die Raute einen rechten Winkel, ist also ein Quadrat.

Hinweis. Wenn man nach dem Parallelogrammnachweis zuerst einen rechten Winkel nachweist, folgert man, dass das Parallelogramm ein Rechteck ist. Wenn man dann zeigt, dass zwei benachbarte Seiten gleich lang sind, dann ist das Rechteck ein Quadrat.

2.3 **Begründen Sie, dass die Pyramide EFGHS symmetrisch zur z-Achse ist.**

Die Mittelpunkte gegenüberliegender Ecken liegt auf der z-Achse, ebenso S:

$$\vec{m}_{EG} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OG}\right) = \tfrac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad M_{EG}(0\,|\,0\,|\,4)$$

Dasselbe gilt dann für F und H, weil EFGH ein Parallelogramm ist.
(In einem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen gegenseitig).

2.4 **Die Punkte E, F und S liegen in einer Ebene L.**
Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.

E(2 | -3 | 4), F(3 I 2 I 4), S(0 | 0 | 5) legen die Ebene L fest.

Ein Normalenvektor L steht orthogonal auf den Vektoren $\overrightarrow{ES} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$

und $\overrightarrow{FS} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$

Normalenvektor berechnen.

1. Methode: mit dem Vektorprodukt (Kreuzprodukt):

$$\vec{n} = \overrightarrow{ES} \times \overrightarrow{FS} = \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+2\\-3+2\\4+9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\\13\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \cancel{-2} & \cancel{-3} \\ 3 & -2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -3 \\ 3 & -2 \\ \cancel{1} & \cancel{1} \end{array}$$

2. Methode; mit dem Skalarprodukt:

$\vec{n} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ ist orthogonal zu $\overrightarrow{ES}$ und $\overrightarrow{FS}$, d.h.

$\overrightarrow{ES}\cdot\vec{n} = 0$ d. h. $-2n_1 + 3n_2 + n_3 = 0$ (1)

$\overrightarrow{FS}\cdot\vec{n} = 0$ d. h. $-3n_1 - 2n_2 + n_3 = 0$ (2)

Elimination von n_3: (1) – (2): $n_1 + 5n_2 = 0$ (3)

Wähle z. B. $n_2 = 1 \;\Rightarrow\; n_1 = -5$

In (1): $n_3 = 2n_1 - 3n_2 = -10 - 3 = -13$

Das ergibt den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}-5\\1\\-13\end{pmatrix}$

der genauso verwendbar ist.

Normalengleichung aufstellen: $\vec{n}\cdot\vec{x} = k$ d. h. $5x - y + 13z = k$

Punktprobe mit $S(0\,|\,0\,|\,5)$: $k = 65$

Ergebnis: L: $5x - y + 13z = 65$

2.5 An der Spitze des Daches ist eine gerade Stange befestigt, deren oberer Endpunkt im Modell durch einen Punkt T dargestellt wird. Auf den Turm treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ beschreiben. Der Schatten der Stange liegt vollständig auf der Dachfläche, die durch das Dreieck EFS beschrieben wird.

Beschreiben Sie, wie man die Länge dieses Schattens berechnen kann, wenn die Koordinaten von T und $\vec{v}$ bekannt sind.

Zuerst muss man den unteren Endpunkt U der Stange berechnen. Dazu stellt man die Gleichung der Geraden auf, auf der die Stange liegt. Man verwendet den Aufpunkt Z und als Richtungsvektor $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Diese Gerade schneidet man mit der Dachfläche EFS durch Einsetzen.

Dann stellt man die Gleichung der Geraden auf, die durch T geht und den Richtungsvektor $\vec{v}$ hat. Diese schneidet man ebenfalls mit der Fläche EFS und erhält den Punkt V, der das Ende des Schattens beschreibt.

Die Länge des Schattens ist dann der Betrag des Vektors $\overrightarrow{UV}$.

2.6 Zur Stabilisierung des Turms wurden zusätzliche Balken mit einer Länge von 2,10 m verwendet. Ein solcher Balken ist mit einem Ende in einer Höhe von 3,50 m über dem Untergrund an einem der vertikal stehenden Pfosten befestigt, mit dem anderen Ende an einem der beiden darauf liegenden horizontalen Balken. Der obere Befestigungspunkt teilt den horizontalen Balken in zwei Abschnitte.

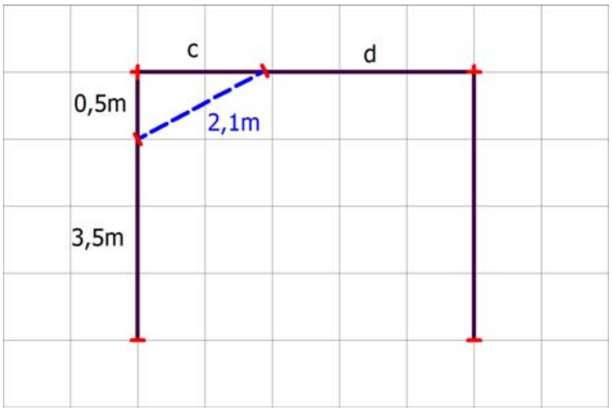
Bestimmen Sie das Verhältnis der Längen der beiden Abschnitte

Nach Pythagoras:

$c = \sqrt{2{,}1^2 - 0{,}5^2} \approx 2\,m$

$d = 5m - c = 3m$

Teilverhältnis: $2 : 3$



Es folgt der Stochastik-Teil

2.7 Um die Nutzung des Spielplatzes mit dem Turm auch für die Zukunft zu belegen, soll festgestellt werden, wie viele Kinder den Spielplatz zukünftig nutzen werden.
Die Tabelle zeigt prozentuale Anteile von Haushalten unterschiedlicher Größe an der Gesamtzahl der Haushalte im Jahr 2013 in Deutschland, die für diese Untersuchung zugrunde gelegt werden.

1 – Personen-Haushalte	40,5%
2 – Personen-Haushalte	34,5%
3 – Personen-Haushalte	12,5%
4 – Personen-Haushalte	9,2%
Haushalte mit mindestens 5 Personen	3,3%

2.7.1 Ermitteln Sie, wie viele Haushalte man im Jahr 2013 mindestens hätte zufällig auswählen müssen, damit darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mehr als zwanzig 2-Personen-Haushalte sind.

Es sei X die Zufallsvariable „Anzahl der 2-Personen-Haushalte".
X ist binomial verteilt mit $p = 0{,}345$. n (der Umfang der Stichprobe) ist gesucht.

Zielereignis: Man findet <u>mehr</u> als 20 2-Personen-Haushalte, d. h. $X \geq 21$

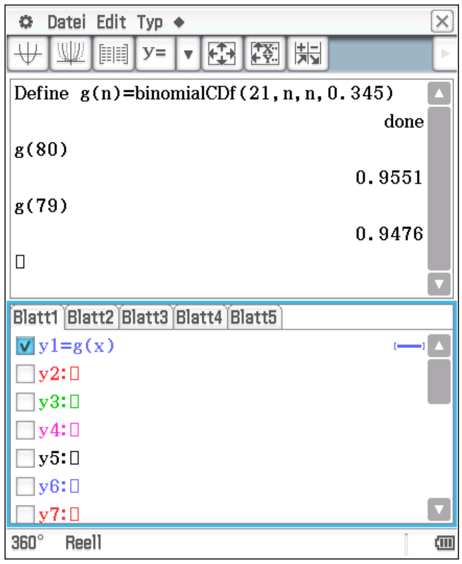
Bedingung: $P(X \geq 21) \geq 0{,}95$

1. Lösungsmöglichkeit mit CASIO ClassPad:

Definition einer Binomialfunktion, mit der man einige Werte berechnen lässt.
Nach einigem Suchen findet man diese beiden Werte.

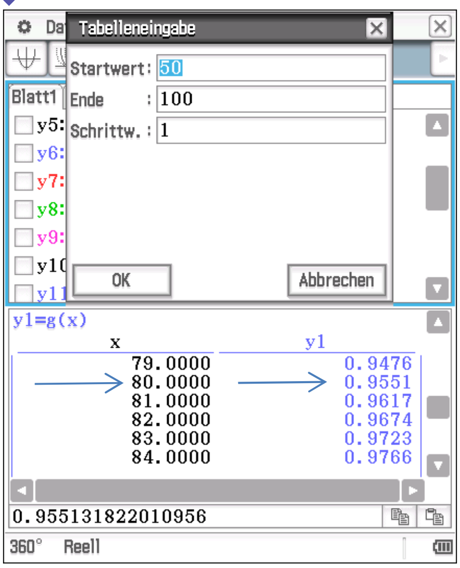
Ergebnis: $n \geq 80$.

```
Define g(n)=binomialCDf(21,n,n,0.345)
                                 done
g(80)
                               0.9551
g(79)
                               0.9476
```



2. Lösungsmöglichkeit mit CASIO ClassPad:

Man definiert wie zuvor die Funktion g, trägt sie in die Funktionenliste ein und lässt sich dann eine Wertetafel anzeigen.



2.7.2 Im Jahr 2014 wurde vermutet, dass der tatsächliche Anteil der 1-Personen-Haushalte größer als im Jahr 2013 ist. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob diese Vermutung zutrifft, sollte auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Haushalten und einem Signifikanzniveau von 5 % ein Test durchgeführt werden. Dabei sollte möglichst vermieden werden, irrtümlich davon auszugehen, dass die Vermutung zutrifft.

Geben Sie die passende Nullhypothese an und bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Testumfang: $n = 500$

Nullhypothese: $p \le 0{,}405$ (Rechtsseitiger Signifikanztest).

Testvariable: X = Anzahl der 1-Personen-Haushalte

X ist binomial verteilt mit p = 0,405

Erwartungswert: $E = 500 \cdot 0{,}405 = 202{,}50$

Definitionsbereich für X: $S = \{\underbrace{0,\ldots\boxed{203}\ldots,k}_{A} \mid \underbrace{k+1,\ldots\ldots,500}_{\bar{A}}\}$

Bestimmung von k durch die Vorgabe des Signifikanzniveaus von 5 %.

Das heißt: $\alpha \le 0{,}05$

bzw. $P(\bar{A}) \le 0{,}05$

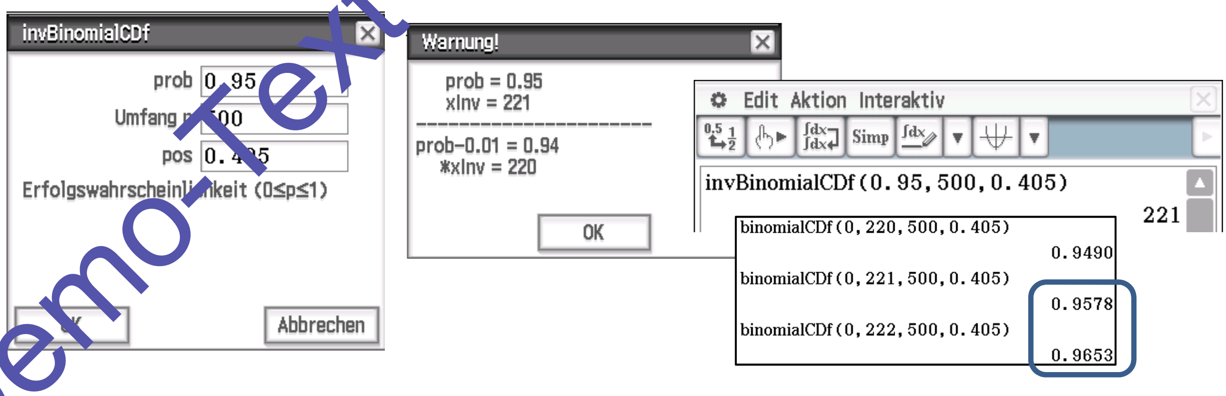
bzw. $P(X > k) \le 0{,}05$

d. h. $1 - P(X \le k) \le 0{,}05$

d. h. $-P(X \le k) \le -0{,}95$

d. h. $P(X \le k) \ge 0{,}95$

Lösung der Gleichung mit Hilfe der inversen Binomialfunktion. BinomialCDf(0,x,500,0.405) = 0,95



Nach der Eingabe erfolgt eine Warnung. Diese Gleichung ist nämlich nicht exakt lösbar, der Rechner findet zwei Werte (221 und 222), die ziemlich gut die Gleichung lösen. Also muss man selbst herausfinden, welche Zahl für k die Ungleichung löst: Es ist k = 221.

Der Ablehnungsbereich beginnt aber bei k+1, also: $\bar{A} = \{222\,;223\,;\ldots;500\}$

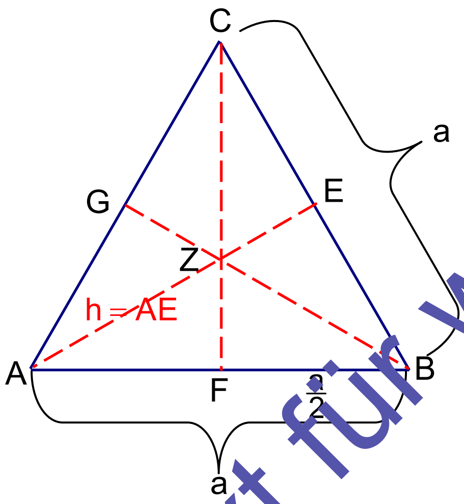
Ergebnis: Die Entscheidungsregel heißt: Findet man mindestens 222 1-Personen-Haushalte dann muss man der Vermutung zustimmen.

Lösung: B3 Analytische Geometrie und Stochastik

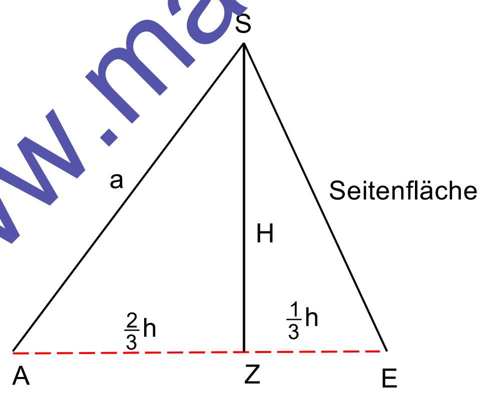
Auf einer ehemaligen Bergbauhalde in Bottrop (Ruhrgebiet) steht seit 1995 ein Aussichtsturm in Form eines Tetraeders, dessen Begrenzungsflächen gleichseitige Dreiecke sind. Das Tetraeder hat eine Höhe von 50 m und steht mit seiner Grundfläche auf vier 10 m hohen Betonpfeilern. Im Turm befinden sich drei Aussichtsplattformen, von denen die oberste gegenüber der Horizontalen geneigt ist.

2.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass die Kantenlänge des „Bottroper Tetraeders" rund 61 m beträgt.

Grundfläche des Tetraeders.



Seitenansicht des Tetraeders.



Die Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck. Die Höhe h in der Grundfläche ist AE oder CF.

Nach Pythagoras folgt im Teildreieck FBC: $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$,

also $h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

Die Tetraederhöhe beginnt im Schwerpunkt Z der Grundfläche und steht auf h senkrecht (rechte Abb.)

Da der Schwerpunkt diese Höhe (= Seitenhalbierende) im Verhältnis 2:1 teilt, ist

$$\overline{AZ} = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3} \quad \text{mit} \quad \overline{AZ}^2 = \frac{a^2}{9}\cdot 3 = \frac{a^2}{3}$$

Im Dreieck AZS folgt nach Pythagoras:

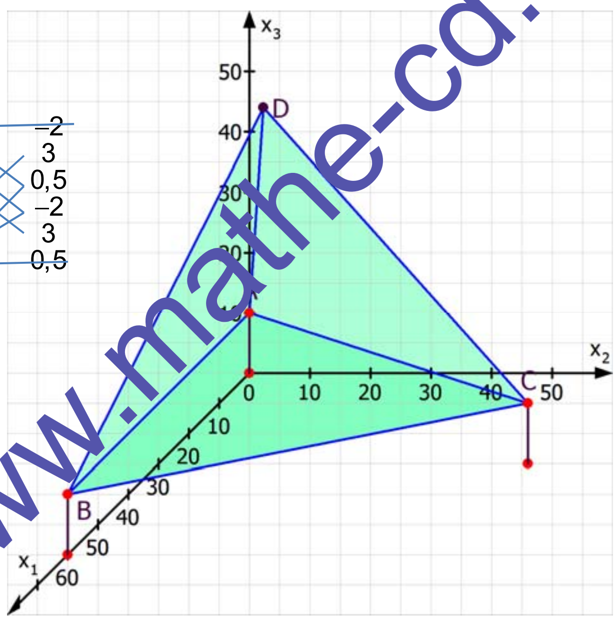
$$H^2 + \overline{AZ}^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad H^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2$$

Jetzt ist aber H gegeben, also: $a^2 = \frac{3}{2}H^2 = \frac{3}{2}\cdot 50^2 = \frac{3}{2}\cdot 2500 = 3750$

Daraus folgt: $a = \sqrt{3750} \approx 61{,}24\ (\text{m})$

2.2 In einer vereinfachten Modellierung wird der Aussichtsturm in einem kartesischen Koordinatensystem durch das Tetraeder ABCD mit A (0 | 0 | 10), B (60 | 0 | 10), $C\left(30 \mid 30\sqrt{3} \mid 10\right), D\left(30 \mid 10\sqrt{3} \mid 20\sqrt{6}+10\right)$ hinreichend genau beschrieben.
Eine Längeneinheit entspricht einem Meter. Die Erdoberfläche liegt in der xy-Ebene.
Die Punkte E(30 | 15 | 37,5), F(30 | 20 | 38) und G(28 | 18 | 38) sind Eckpunkte der geneigten Plattform.

2.2.1 Stellen Sie den Körper ABCD in einem Koordinatensystem dar.
Berechnen Sie den Neigungswinkel der Plattform bezüglich der Erdoberfläche.



Berechnung eines Normalenvektors der Plattform:

(1) mit dem Vektorprodukt:

$$\vec{n} = \overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

~~0~~	~~−2~~
5	3
0,5	0,5
0	−2
5	3
~~0,5~~	~~0,5~~

(2) mit dem Skalarprodukt:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ steht orthogonal zu

$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$, d.h.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5n_2 + \frac{1}{2}n_3 = 0 \qquad$ (I)

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2n_1 + 3n_2 + \frac{1}{2}n_3 = 0 \qquad$ (II)

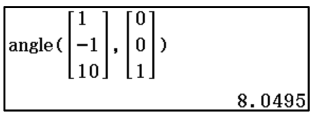
(I) – (II): $\quad 2n_1 + 2n_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_2 = -n_1$.

Wählt man $n_1 = 1$, folgt $n_2 = -1$. Und aus (I) erhält man $n_3 = -10n_2 = 10$

Normalenvektor ist also $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$

γ sei der Winkel von $\vec{n}$ gegen die z-Achse; $\quad \cos\gamma = \dfrac{\left|\vec{n} \cdot \vec{e}_3\right|}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\vec{e}3\right|} = \dfrac{10}{\sqrt{102} \cdot 1} \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 8^{O}$

Hinweis: Der CAS-Rechner CASIO ClassPad verfügt über die Funktion angle, die ebenfalls den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnet.



Folgerung: Der Winkel der Plattform gegen die xy-Ebene ist dann $\alpha = 90^{O} - \gamma \approx 82^{O}$

2.2.2 Im „Bottroper Tetraeder" ist nachts an der Spitze eine Lichtskulptur „Fraktal" beleuchtet.
Ein Künstler plant neue Beleuchtungsfiguren im Tetraeder.
Ein Entwurf sieht vor, dass vom Mittelpunkt des Tetraeders $M\left(30 \mid 10\sqrt{3} \mid 5\sqrt{6}+10\right)$ gleich lange Leuchtstreben senkrecht zu allen Seitenkanten führen sollen.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes der Kante BD, in dem die betreffende Strebe endet.

Die Lote vom Tetraedermittelpunkt auf die Kanten treffen diese aus Symmetriegründen in deren Mittelpunkt. Also im Falle der Kante BD in $M_{BD}\left(45 \mid 5\sqrt{3} \mid 10\sqrt{6}+10\right)$.

Berechnen Sie die Gesamtlänge aller Leuchtstreben.

Länge des Lotes von M zu B_{BD}:

$$\left|\overline{MM_{BD}}\right| = \left|\begin{pmatrix}45\\5\sqrt{3}\\10\sqrt{6}+10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}30\\10\sqrt{3}\\5\sqrt{6}+10\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}15\\-5\sqrt{3}\\5\sqrt{6}\end{pmatrix}\right| = 5\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\-\sqrt{3}\\\sqrt{6}\end{pmatrix}\right| = 5\cdot\sqrt{9+3+6} = 5\sqrt{18} = 15\sqrt{2}$$

Gesamtlänge aller Leuchtstreben:

$$L = 6\cdot 15\cdot\sqrt{2} = 90\sqrt{2} \approx 127.28 \text{ (m)}$$

2.2.3 Ein anderer Entwurf soll beleuchtete Rechteckformen erzeugen. Dazu wird das Tetraeder durch die Ebene E geschnitten. Vier Körperkanten durchstoßen die Ebene E in den Punkten $P\left(-5\sqrt{6}+60 \mid 5\sqrt{2} \mid 30\right)$, $Q\left(-5\sqrt{6}+60 \mid 15\sqrt{2} \mid 10\right)$, $R\left(5\sqrt{6} \mid 15\sqrt{2} \mid 10\right)$ und S. Der Punkt S liegt auf der Kante AD.

Weisen Sie nach, dass das Viereck PQRS ein Rechteck ist.

Gleichung der Ebene durch P, Q und R.

Bestimmung eines Normalenvektors zu $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}0\\10\sqrt{2}\\-20\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix}10\sqrt{6}-60\\10\sqrt{2}\\-20\end{pmatrix}$

mit dem Vektorprodukt:

$$\vec{n}_E = \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix}0\\10\sqrt{2}\\-20\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}10\sqrt{2}-60\\10\sqrt{2}\\-20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-200\sqrt{6}+1200\\-200\sqrt{3}+600\sqrt{2}\end{pmatrix} = 200\cdot\begin{pmatrix}0\\6-\sqrt{6}\\3\sqrt{2}-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} 0 & 10\sqrt{6}-60 \\ 10\sqrt{2} & 10\sqrt{2} \\ -20 & -20 \\ 0 & 10\sqrt{6}-60 \\ 10\sqrt{2} & 10\sqrt{2} \\ -20 & -20 \end{array}$$

Ebene E: $\left(6-\sqrt{6}\right)y + \left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)z = k$

Punktprobe mit $R\left(-5\sqrt{6} \mid 15\sqrt{2} \mid 10\right)$:

$$\left(6-\sqrt{6}\right)\cdot\boxed{15\sqrt{2}} + \left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot 10 = k$$

$$k = 90\sqrt{2} - 30\sqrt{3} + 30\sqrt{2} - 10\sqrt{3} = 120\sqrt{2} - 40\sqrt{3}$$

E: $\left(6-\sqrt{6}\right)y + \left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)z = 120\sqrt{2} - 40\sqrt{3}$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}30\\10\sqrt{3}\\20\sqrt{6}+10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}30\\10\sqrt{3}\\20\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

Gleichung der Geraden (AD): $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}30\\10\sqrt{3}\\20\sqrt{6}\end{pmatrix}$

Schnittpunkt von (AD) und E: $\left(6-\sqrt{6}\right)\cdot\boxed{10\sqrt{3}\cdot r} + \left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\boxed{10+20\sqrt{6}\cdot r} = 120\sqrt{2} - 40\sqrt{3}$

$$\left(60\sqrt{3} - 10\sqrt{18} + 60\sqrt{12} - 20\sqrt{18}\right)r = 120\sqrt{2} - 40\sqrt{3} - 30\sqrt{2} + 10\sqrt{3}$$

$$\left(60\sqrt{3} - 30\sqrt{2} + 120\sqrt{3} - 60\sqrt{2}\right)r = 90\sqrt{2} - 30\sqrt{3}$$

$$\left(180\sqrt{3} - 90\sqrt{2}\right)r = 90\sqrt{2} - 30\sqrt{3} \quad |:30$$

$$\left(6\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)r = 3\sqrt{2} - \sqrt{3} \quad |:30$$

$$r = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$$

Erweitern mit $6\sqrt{3}+3\sqrt{2}$:

$$r=\frac{\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(6\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)}{\left(6\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)\cdot\left(6\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)}=\frac{18\sqrt{6}-18+18-3\sqrt{6}}{36\cdot 3-9\cdot 2}=\frac{15\sqrt{6}}{90}=\frac{\sqrt{6}}{6}\quad\text{oder}\quad=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Dies führt zum Schnittpunkt $\vec{s}=\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}30\\10\sqrt{3}\\20\sqrt{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\sqrt{6}\\5\sqrt{2}\\30\end{pmatrix}$ also $S\left(5\sqrt{6}\,|\,5\sqrt{2}\,|\,30\right)$

Der Nachweis des Rechtecks geschieht in zwei Stufen.

Zuerst zeigt man, dass ein Parallelogramm vorliegt, denn

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}0\\10\sqrt{2}\\-20\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{RS}=\begin{pmatrix}5\sqrt{6}\\15\sqrt{2}\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\sqrt{6}\\5\sqrt{2}\\30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\10\sqrt{2}\\-20\end{pmatrix}=\overrightarrow{PQ}$$

Dann zeigt man, dass ein Winkel 90° hat: $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QR}=\begin{pmatrix}0\\10\sqrt{2}\\-20\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\sqrt{6}-60\\0\\0\end{pmatrix}=0$

Rechts ein Screenshot meiner PC-Version von CASIO ClassPad.

Zuerst wird der Normalenvektor als Kreuzprodukt berechnet

simplify(crossp($\begin{bmatrix}0\\10\sqrt{2}\\-20\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}10\sqrt{6}-60\\10\sqrt{2}\\-20\end{bmatrix}$))

$$\begin{bmatrix}0\\-200\cdot\sqrt{6}+1200\\-200\cdot\sqrt{3}+600\cdot\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

und mittels Division durch 200 vereinfacht.

simplify(ans/200)⇒n

$$\begin{bmatrix}0\\-\sqrt{6}+6\\-\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

Dann wird die Normalenform der Ebenengleichung erstellt:

$$\vec{n}\cdot\vec{x}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{OR}$$

dotp(n, $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$)=dotp(n, $\begin{bmatrix}-5\sqrt{6}\\15\sqrt{2}\\10\end{bmatrix}$)

$y\cdot(-\sqrt{6}+6)+z\cdot(-\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2})=10\cdot(-\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2})+15\cdot\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{6}+6)$

und vereinfacht.

simplify(ans)

$-\sqrt{6}\cdot y+6\cdot y-\sqrt{3}\cdot z+3\cdot\sqrt{2}\cdot z=-40\cdot\sqrt{3}+120\cdot\sqrt{2}$

Das ist die Gleichung der Geraden AD als Vektorfunktion von r.

Define ad(r)=$\begin{bmatrix}30r\\10\sqrt{3}r\\10+20\sqrt{6}r\end{bmatrix}$

done

Die Schnittgleichung von E und AD: AD wird für $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ eingesetzt.

Solve(dotp(n, ad(r))=dotp(n, $\begin{bmatrix}-5\sqrt{6}\\15\sqrt{2}\\10\end{bmatrix}$), r)

$$\left\{r=\frac{-\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2}}{3\cdot(2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2})}\right\}$$

r wird vereinfacht

simplify(ans)

$$\left\{r=\frac{\sqrt{6}}{6}\right\}$$

und in AD eingesetzt.

ad($\frac{\sqrt{6}}{6}$)

$$\begin{bmatrix}5\cdot\sqrt{6}\\5\cdot\sqrt{2}\\30\end{bmatrix}$$

Das ist der Ortsvektor des Schnittpunktes S.

Stochastik-Teil

2.3 Ein Hersteller beschichteter Rohre, wie sie auch für den Bau dieses Aussichtsturms verwendet wurden, wirbt damit, dass höchstens 3% seiner Rohre minimale Beschichtungsfehler aufweisen. Es besteht der Verdacht, dass dieser Wert höher ist. Daher werden 150 Rohre der laufenden Produktion entnommen und auf Beschichtungsfehler untersucht.

Begründen Sie, dass man die Anzahl der Rohre mit Beschichtungsfehlern als binomialverteilt annehmen kann.

Für alle Rohre ist die Wahrscheinlichkeit, defekt zu sein, gleich groß: p = 0,03.
Und es gibt nur zwei Möglichkeiten: defekt oder nicht defekt.

Formulieren Sie für ein Signifikanzniveau von 5% eine Entscheidungsregel.

Testumfang: $n = 150$

Nullhypothese: $p \le 0{,}03$ (Rechtsseitiger Signifikanztest).

Testvariable: X = Anzahl der defekten Rohre

X ist binomial verteilt mit p = 0,03

Erwartungswert: $E = 150 \cdot 0{,}03 = 4{,}5$

Definitionsbereich für X: $S = \{\underbrace{0,\ldots\boxed{4{,}5}\ldots,k}_{A} \mid \underbrace{k+1,\ldots,150}_{\bar{A}}\}$

Bestimmung von k durch die Vorgabe des Signifikanzniveaus von 5 %.

Das heißt: $\alpha \le 0{,}05$

bzw. $P(\bar{A}) \le 0{,}05$

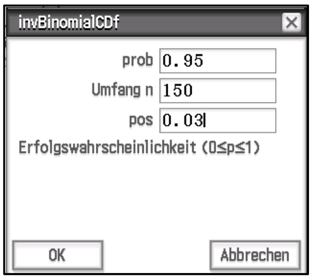
bzw. $P(X > k) \le 0{,}05$

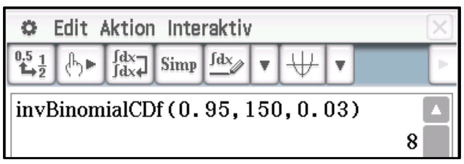
d. h. $1 - P(X \le k) \le 0{,}05$

d. h. $-P(X \le k) \le -0{,}95$

d. h. $P(X \le k) \ge 0{,}95$

Lösung der Gleichung mit Hilfe der inversen Binomialfunktion: BinomialCDf(0,x,150,0.03) = 0,95





Man erhält k = 8.

Der Annahmebereich ist also $A = \{0;\ldots;8\}$

Die Entscheidungsregel lautet:
Wenn mindestens 9 defekte Rohre gefunden werden, ist die Hypothese abzulehnen.