COPIRELEM

Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.

Concours de recrutement
des Professeurs des Écoles

Mathématiques

Annales 2018

Sujets, corrigés et éléments de formation

+

Exercices complémentaires avec corrigés
issus des concours blancs et examens des ESPE

Ces annales ont été rédigées par :

Agnès BATTON (ESPE de l'Académie de Versailles)
Anne BILGOT (ESPE de l'Académie de Paris)
Christophe BILLY (ESPE de l'Académie de Toulouse)
Laetitia BUENO-RAVEL (ESPE de Bretagne)
Richard CABASSUT (ESPE de l'Académie de Strasbourg)
Valentina CELI (ESPE d'Aquitaine)
Bruno COURCELLE (ESPE de Clermont-Auvergne)
Pierre DANOS (ESPE de l'Académie de Toulouse)
Nicolas DE KOCKER (ESPE de Lorraine)
Gwenaëlle GRIETENS (ESPE de l'Académie de Nantes)
Pascal GRISONI (ESPE de Bourgogne)
Michel JAFFROT (retraité de l'ESPE de l'Académie de Nantes)
Laurence MAGENDIE (retraitée de L'ESPE d'Aquitaine)
Christine MANGIANTE (ESPE de l'Académie de Lille)
Pascale MASSELOT (ESPE de l'Académie de Versailles)
Edith PETITFOUR (ESPE de Lorraine)
Arnaud SIMARD (ESPE de Franche-Comté)
Frédérick TEMPIER (ESPE de l'Académie de Poitiers)
Claire WINDER (ESPE de l'Académie de Nice)
Hélène ZUCCHETTA (ESPE de l'Académie de Lyon)

Chaque sujet a été pris en charge par plusieurs correcteurs.

La relecture finale du document a été effectuée par :

Pierre EYSSERIC (ESPE de l'Académie d'Aix-Marseille)
Michel JAFFROT (retraité de l'ESPE de l'Académie de Nantes)

Coordination de l'ensemble :
Pierre EYSSERIC (ESPE de l'Académie d'Aix-Marseille)

REMERCIEMENTS

Ces annales ont pu être menées à bien grâce aux contributions de personnes, associations et institutions :

- **Nos collègues formateurs en mathématiques** qui nous ont transmis des sujets de concours blancs et d'examens proposés dans leurs ESPE.

- **L'ARPEME** (Association pour l'élaboration et la diffusion de Ressources Pédagogiques sur l'Enseignement des Mathématiques à l'École).
  Cette association a pour but de favoriser le développement de la réflexion sur l'enseignement des mathématiques à l'école et sur la formation des professeurs à l'enseignement des mathématiques :
    - en aidant à la communication d'expériences, à la diffusion de documents de formation et de recherche sur l'enseignement des mathématiques ;
    - en apportant un soutien à l'organisation de colloques et séminaires de réflexion rassemblant les formateurs intervenant à divers titres dans la formation en mathématiques des professeurs ;
    - en prenant en charge l'élaboration, l'impression et la diffusion de tous documents utiles pour les formateurs en mathématiques des professeurs des écoles : documents pédagogiques écrits et audiovisuels, actes des colloques, comptes-rendus de séminaires.

- **La COPIRELEM** (Commission permanente des **IREM** pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire) et l'**IREM** (Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques) de l'Université de Paris VII Denis Diderot.

SOMMAIRE

Informations

Les sujets et leurs corrigés

EXERCICES ÉLABORÉS À PARTIR DES CONCOURS BLANCS ET EXAMENS PROPOSÉS DANS LES ESPE

L'ÉPREUVE DU CRPE EN AVRIL 2018

Nous reproduisons ici les principaux textes en vigueur relatifs à l'épreuve de mathématiques des concours de recrutement de professeurs des écoles, tels que vous pouvez les retrouver sur le site ministériel à partir de la page http://www.education.gouv.fr/pid97/siac1.html.

CONCOURS CONCERNÉS

- Concours externe de recrutement de professeurs des écoles.
- Concours externe spécial de recrutement de professeurs des écoles.
- Troisième concours de recrutement de professeurs des écoles.
- Second concours interne de recrutement de professeurs des écoles.
- Second concours interne spécial de recrutement de professeurs des écoles.

DÉFINITION DE L'ÉPREUVE

Référence :
http://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid98653/les-epreuves-crpe-externe-troisieme-crpe-second-crpe-interne.html

« L'ensemble des épreuves du concours vise à évaluer les capacités des candidats au regard des dimensions disciplinaires, scientifiques et professionnelles de l'acte d'enseigner et des situations d'enseignement. »

Épreuves d'admissibilité

« Le cadre de référence des épreuves est celui des programmes pour l'école primaire. Les connaissances attendues des candidats sont celles que nécessite un enseignement maîtrisé de ces programmes. Le niveau attendu correspond à celui exigé par la maîtrise des programmes de collège. Les épreuves d'admissibilité portent sur le français et les mathématiques. Certaines questions portent sur le programme et le contexte de l'école primaire et nécessitent une connaissance approfondie des cycles d'enseignement de l'école primaire, des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture et des contextes de l'école maternelle et de l'école élémentaire. »

Deuxième épreuve d'admissibilité : une épreuve écrite de mathématiques

« L'épreuve vise à évaluer la maîtrise des savoirs disciplinaires nécessaires à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et la capacité à prendre du recul par rapport aux différentes notions. Dans le traitement de chacune des questions, le candidat est amené à s'engager dans un raisonnement, à le conduire et à l'exposer de manière claire et rigoureuse.

L'épreuve comporte trois parties :

1. Une première partie constituée d'un problème portant sur un ou plusieurs domaines des programmes de l'école ou du collège, ou sur des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture, permettant d'apprécier particulièrement la capacité du candidat à rechercher, extraire et organiser l'information utile.

2. Une deuxième partie composée d'exercices indépendants, complémentaires à la première partie, permettant de vérifier les connaissances et compétences du candidat dans différents domaines des programmes de l'école ou du collège. Ces exercices pourront être proposés sous forme de questions à choix multiples, de questions à réponse construite ou bien d'analyses d'erreurs-types dans des productions d'élèves, en formulant des hypothèses sur leurs origines.

3. Une analyse d'un dossier composé d'un ou plusieurs supports d'enseignement des mathématiques, choisis dans le cadre des programmes de l'école primaire qu'ils soient destinés aux élèves ou aux enseignants (manuels scolaires, documents à caractère pédagogique), et productions d'élèves de tous types, permettant d'apprécier la capacité du candidat à maîtriser les notions présentes dans les situations d'enseignement.

L'épreuve est notée sur 40 points : 13 pour la première partie, 13 pour la deuxième et 14 pour la troisième.

5 points au maximum peuvent être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire.

Durée de l'épreuve : quatre heures. »

MATÉRIEL AUTORISÉ LORS DE L' ÉPREUVE

Références concernant le matériel autorisé :

« Le matériel autorisé pour passer l'épreuve, en dehors du matériel normal d'écriture, est indiqué dans le document qui vous est fourni en même temps que la convocation. »

http://www.siec.education.fr/votre-concours/crpe-enseignants-du-1er-degre/se-preparer#triple-mission

Références concernant l'utilisation des calculatrices électroniques à compter de la session 2018 lors des examens et concours.

http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=87354

« I - Pour les examens et concours de l'enseignement scolaire, la présente note de service annule et remplace les dispositions énoncées par la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 relative à l'utilisation des calculatrices électroniques à compter de la session 2000. **Elle est applicable à compter du 1er janvier 2018**. »
« ...l'usage de la calculatrice est autorisé si le sujet de l'épreuve le prévoit expressément. La page de garde des sujets ... doit impérativement indiquer si l'usage de la calculatrice est autorisé ou interdit. »

« II - **Est considéré comme « calculatrice »** tout dispositif électronique autonome, dépourvu de toute fonction de communication par voie hertzienne, ayant pour fonction essentielle d'effectuer des calculs mathématiques ou financiers, de réaliser des représentations graphiques, des études statistiques ou tous traitements de données mathématiques par le biais de tableaux ou diagrammes. »

« Les matériels autorisés sont les suivants :

- les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;
- les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen » répondant aux spécificités suivantes :

    - la neutralisation temporaire de l'accès à la mémoire de la calculatrice ou l'effacement définitif de cette mémoire ;

    - le blocage de toute transmission de données, que ce soit par wifi, Bluetooth ou par tout autre dispositif de communication à distance ;

    - la présence d'un signal lumineux clignotant sur la tranche haute de la calculatrice, attestant du passage au « mode examen » ;

    - la non réversibilité du « mode examen » durant toute la durée de l'épreuve. La sortie du «mode examen» nécessite une connexion physique, par câble, avec un ordinateur ou une calculatrice. »

« III - **Le déroulement des épreuves**
Le « mode examen » ne doit être activé par le candidat, pour toute la durée de l'épreuve, que sur instruction du surveillant de salle lorsque le sujet de l'épreuve autorise l'usage de la calculatrice.
Le candidat n'utilise qu'une seule machine sur la table. Toutefois, si celle-ci vient à connaître une défaillance, il peut la remplacer par une autre.

Afin de prévenir les risques de fraude, sont interdits les échanges de machines entre les candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices. L'utilisation d'une calculatrice non conforme aux caractéristiques techniques mentionnées au point II de la présente note donne lieu à la mise en œuvre d'une procédure disciplinaire.

Est interdite l'utilisation de tout module ou extension enfichable ainsi que de tout câble, quelles qu'en soient la longueur et la connectique.

Les chefs de centres d'examen veilleront à ce que les candidats soient convenablement informés des consignes relatives à l'utilisation des calculatrices, qui doivent être strictement respectées.

Les recteurs d'académie et les vice-recteurs veilleront à ce que tous les personnels appelés à participer aux tâches de surveillance des épreuves soient informés de ces dispositions. »

AVERTISSEMENT

Dans le corrigé des **exercices de mathématiques**, nous proposons souvent plusieurs méthodes de résolution pour une question. Certaines solutions sont plus longues que d'autres. Nous les donnons cependant pour que chacun puisse éventuellement reconnaître et valider la méthode qu'il a utilisée ou dans laquelle il s'est engagé sans peut-être savoir terminer.
Une méthode même longue donnera tous les points attribués à la question, du moment qu'elle a abouti au résultat demandé. Elle pénalise cependant le candidat car le temps passé à la rédiger n'est plus disponible pour traiter d'autres questions. Mais il est possible que le lecteur de ces annales la comprenne mieux qu'une méthode courte, même « élégante ». Le lecteur jugera donc par lui-même quelle(s) méthode(s) il lui convient de s'approprier.

En ce qui concerne les **analyses de productions d'élèves** et la partie 3 (**analyse de situations d'enseignement**), nous avons eu le souci de donner des réponses détaillées sur le plan didactique et donc, quelquefois, plus approfondies que ce que l'on peut attendre d'un candidat au CRPE. Certaines remarques des correcteurs sont alors ajoutées en italique.

CONSEILS AUX CANDIDATS

La lisibilité, la correction et la rigueur des réponses sur les plans mathématique et didactique sont, bien entendu, les critères principaux d'évaluation. Par ailleurs, une écriture difficilement lisible, la présence de « fautes » d'orthographe par trop grossières et fréquentes, les coquilles fâcheuses, le verbiage pompeux et vide, l'abus d'expressions hors de propos, finissent par avoir une incidence sur l'évaluation, et cela, quelle que soit la précision du barème de notation appliqué. Nous conseillons donc de relire la copie en tenant compte de tout cela.

PROBLÈME

	Géométrie plane	Géométrie espace	Trigonométrie	Numération Opérations	Arithmétique	Programmes de calcul	Équations Mise en équation	Probabilités Statistiques	Algorithmique	Grandeurs et mesures	Vitesses-Échelles Pourcentages Proportionnalité	Fonctions Graphiques	Tableur
Sujet 1 2018	X	X				X		X	X	X			
Sujet 2 2018	X			X				X	X	X			
Sujet 3 2018	X	X			X				X	X	X		
Sujet 4 2018								X	X		X		X
Sujet 5 2018	X				X			X	X		X		

EXERCICES

	Géométrie plane	Géométrie espace	Trigonométrie	Numération Opérations	Arithmétique	Programmes de calcul	Équations Mise en équation	Probabilités Statistiques	Algorithmique	Grandeurs et mesures	Vitesses-Échelles Pourcentages Proportionnalité	Fonctions Graphiques	Tableur
Sujet 1 2018	X	X				X		X	X	X			
Sujet 2 2018	X			X				X	X	X			
Sujet 3 2018	X	X			X				X	X	X		
Sujet 4 2018								X	X		X		X
Sujet 5 2018	X				X			X	X		X		

ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES

	Addition Soustraction	Proportionnalité	Division	Nombres	Fractions et décimaux	Multiplication	Résolution de problèmes	Grandeurs et mesures	Algorithmique	Cycle
Sujet 1 2018	**X**				**X**			**X**		**C2-C3**
Sujet 2 2018		**X C3**				**X C2**				**C2-C3**
Sujet 3 2018			**X**				**X**			**C2-C3**
Sujet 4 2018		**X**								**C3**
Sujet 5 2018		**X**			**X**		**X**			**C3**

ANALYSE DE SITUATIONS D'ENSEIGNEMENT

	Addition Soustraction	Proportionnalité	Division	Nombres	Fractions et décimaux	Multiplication	Résolution de problèmes	Grandeurs et mesures	Algorithmique	Cycle
Sujet 1 2018	**X C2**					**X C2**				**C2**
Sujet 2 2018		**X C3**		**X C1**		**X C2-C3**				**C1-C2-C3**
Sujet 3 2018		**X**								**C3**
Sujet 4 2018	**X C2**	**X C3**		**X C1**			**X C2 C3**			**C1-C2-C3**
Sujet 5 2018		**X**			**X**		**X**			**C3**

Remarque :

Dans les sujets de cette session du concours, un grand nombre d'exercices de la troisième partie, bien qu'annoncés comme des analyses de situations d'enseignement, sont majoritairement des analyses de productions d'élèves, parfois associées à une analyse d'un énoncé de problème.

LES SUJETS DU CONCOURS 2018

GROUPEMENT 1 – avril 2018

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

Comment lire les informations inscrites sur un pneumatique ?

La largeur	La largeur est exprimée en millimètre.
La hauteur	Ce nombre ne donne pas directement la mesure de la hauteur : il indique à quel pourcentage de la largeur correspond la hauteur (ici, la hauteur vaut 65% de la largeur).
Le diamètre	Le diamètre est exprimé en pouce. Il correspond au diamètre de la jante (le R signifie Radial).
L'indice de poids toléré (tableau 1)	L'indice de poids toléré est un code numérique qui correspond à la charge maximale qu'un pneu peut supporter.
L'indice de vitesse (tableau 2)	L'indice de vitesse est un code alphabétique qui correspond à la vitesse maximale à laquelle un pneu peut rouler. V correspond à 240 km/h.

Tableau 1

Indice de poids toléré	Poids en kg
55	218
58	236
59	243
60	250
61	257
62	265
63	272
64	280
65	290
66	300
67	307
68	315
69	325
70	335
71	345
72	355
73	365
74	375
75	387
76	400
77	412
78	425

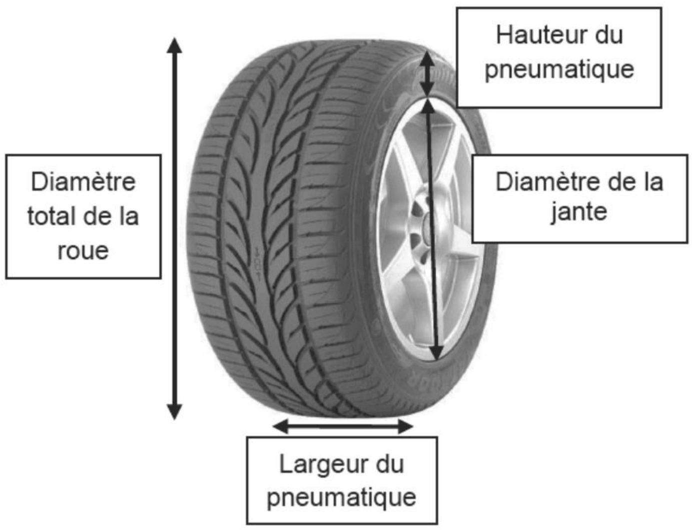


Tableau 2

Indice de vitesse	Vitesse en km/h
Q	160
R	170
S	180
T	190
U	200
H	210
V	240
ZR	>240
W	270
Y	300

Sources : http://www.fiches-auto.fr/articles-auto/pneu/s-630-indice-de-vitesse.php
http://www.pneus-online.fr/indices-charge-et-vitesse-conseils.html

PARTIE A : lecture des informations sur un pneumatique

Pour répondre aux questions suivantes on utilisera les informations contenues dans les documents précédents.

1) On considère un pneumatique sur lequel est inscrit « **195/65 R15 68V** ».

a) Sachant que 1 pouce vaut 2,54 cm, calculer le diamètre de la jante en centimètre.

b) Montrer que la hauteur du pneu est 12,675 cm.

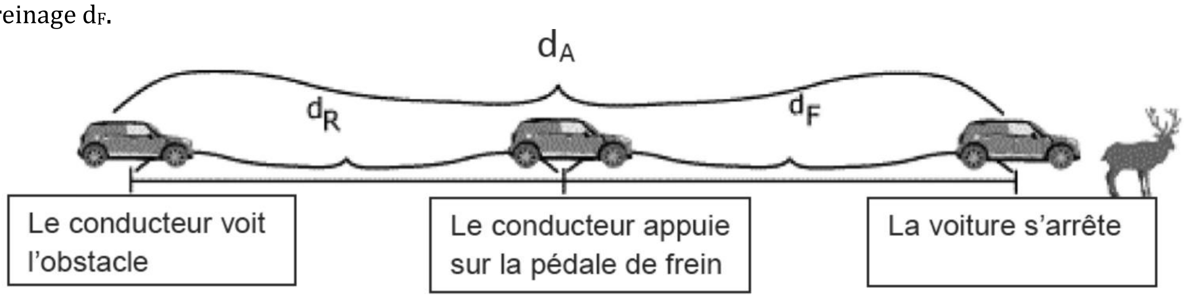
c) Calculer le diamètre total de la roue en centimètre.

2) On considère désormais un pneu radial pouvant supporter une charge maximale de 412 kg et rouler à la vitesse maximale de 270 km/h. Sa largeur est de 20,5 cm, le diamètre de sa jante est de 40,64 cm et son diamètre total est de 63,19 cm.

Indiquer, sous la forme « 195/65 R15 68V », les informations qui seront inscrites sur ce pneu.

PARTIE B : distance d'arrêt

La distance d'arrêt d_A d'un véhicule correspond à la distance de réaction d_R additionnée à la distance de freinage d_F.



Si V est la vitesse de la voiture au moment où le conducteur voit l'obstacle (en m/s : mètre par seconde), la distance de freinage (en mètre) se calcule de la manière suivante :

$$d_F = V^2 \times k$$

où k est une constante qui dépend de l'état de la route (k = 0,14 sur route mouillée, et k = 0,073 sur route sèche).

On admet alors que :

$$d_A = V \times t_R + k.V^2$$

où t_R est le temps de réaction, en seconde.

1) On estime qu'un conducteur vigilant a un temps de réaction de 0,75 seconde.
Calculer la distance d'arrêt pour un véhicule roulant à 90 km/h sur route mouillée.

2) Pour un conducteur vigilant, la distance d'arrêt sur route sèche est-elle proportionnelle à la vitesse ? Expliquer la réponse.

3) **Lecture de diagramme**

Le diagramme de la page suivante représente la distance d'arrêt sur route sèche d'un véhicule en fonction de sa vitesse.

Par exemple, on peut lire que, pour une vitesse de **180 km/h** (ou **50 m/s**), un véhicule parcourt **37,5 m** pendant le temps de réaction, que le temps nécessaire à son arrêt total sera de **9,08 s**, et que sa distance d'arrêt sera alors de **245,5 m**.

En utilisant ce diagramme,

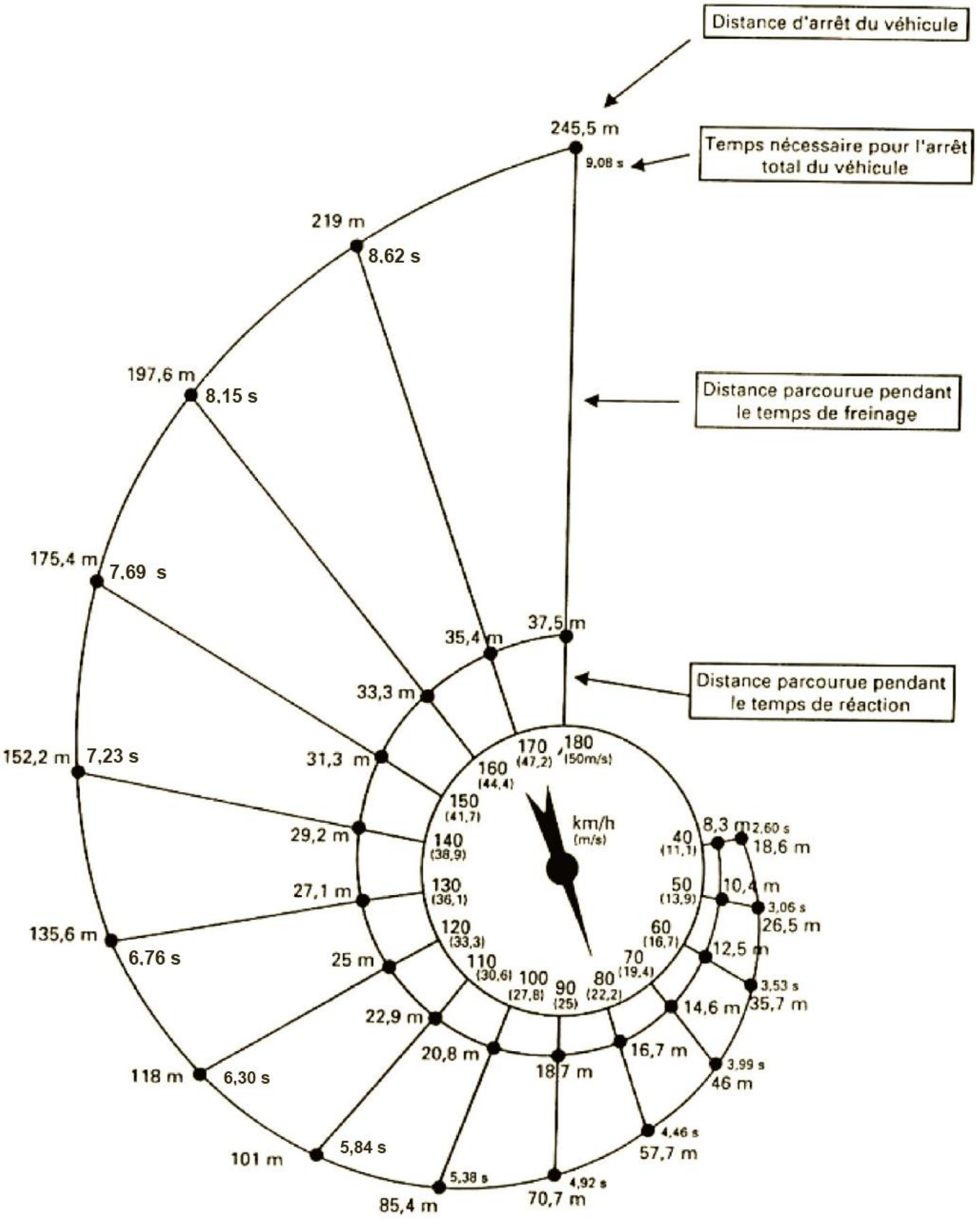
a) donner la distance d'arrêt d'un véhicule roulant à 110 km/h ;

b) donner la distance parcourue pendant le temps de freinage d'un véhicule roulant à 80 km/h ;

c) donner le temps que met un véhicule roulant à 130 km/h pour s'arrêter ;

d) donner la vitesse d'un véhicule sachant que la distance de réaction est de 25 m ;

e) dire si un conducteur roulant à 27,8 m/s et apercevant un obstacle à 100 m pourra s'arrêter à temps.



Sources : http://velobuc.free.fr/freinage.html

PARTIE C : au cinéma

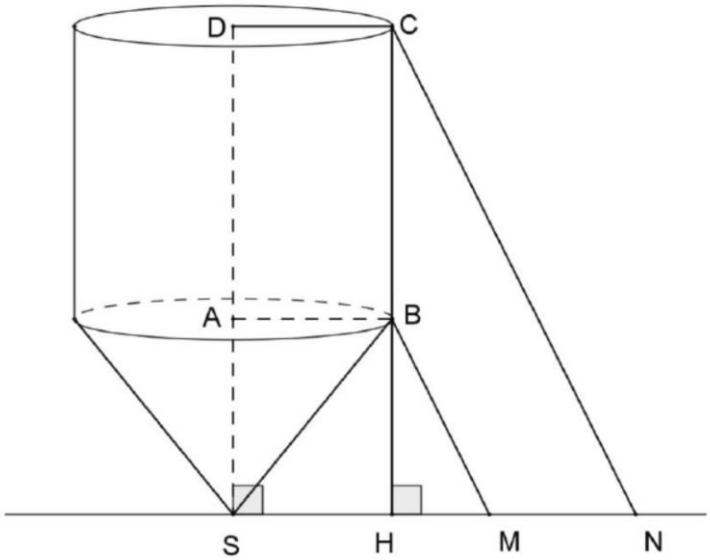
Une voiture est filmée lors d'une prise de vue cinématographique. Elle est équipée de roues **à cinq rayons** ayant un diamètre total de 54 cm. L'une de ces roues est représentée ci-dessous :

1) Calculer la circonférence de cette roue en cm (arrondie au millimètre).
2) La voiture roule à 110 km/h.
   a) Calculer le nombre de tours par seconde que fait la roue (au tour près).
   b) La caméra utilisée a une vitesse de défilement de 24 images par seconde. Combien de tours aura fait le pneu de la voiture entre deux images ?
3) À quelle vitesse, en km/h, devrait rouler la voiture pour que, en regardant le film, on ait l'impression que ses roues ne tournent pas ?

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1



Cette figure n'est pas à l'échelle.

Un éleveur possède un silo à farine formé de deux solides de révolution : un cône et un cylindre, comme représenté sur la figure ci-dessus.
Ces deux solides ont le même axe de révolution.
Les centres D et A des bases sont alignés avec le sommet S du cône.

On donne : AS = 1,60 m ; DA = 2,40 m ; AB = 1,30 m.

On rappelle les formules suivantes :
Volume du cylindre : $V_{cylindre} = aire\ de\ la\ base \times hauteur$

Volume du cône : $V_{cône} = \dfrac{aire\ de\ la\ base \times hauteur}{3}$

1) Quel est le volume en m^3 du silo à farine ? Arrondir au centième.

2) Le silo est rempli de farine d'orge au $\frac{6}{7}$ de son volume total. Une vache mange en moyenne 3 L de farine par jour. L'éleveur possède 48 vaches.
   Aura-t-il assez de farine pour nourrir ses 48 vaches durant 90 jours ?

3) Pour réaliser des travaux, deux échelles ont été posées contre le silo. Elles sont représentées sur la figure par des segments [BM] et [CN].
   On donne SM = 2,1 m et SN = 3,3 m.
   On note H le pied de la hauteur issue de B dans le triangle SBM.
   Les points S, H, M et N sont alignés.
   Les points C, B et H sont alignés.
   Les deux échelles sont-elles parallèles ? Justifier la réponse.

Exercice 2

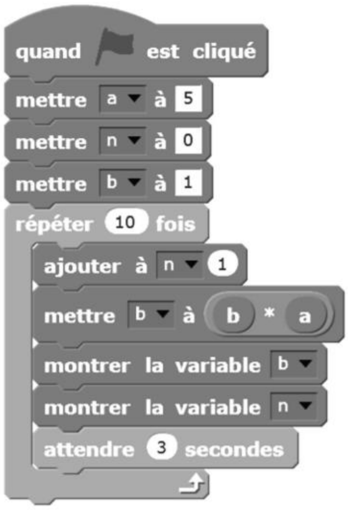
Dans une loterie, 300 billets sont vendus et il y a 37 billets gagnants. Les autres billets sont des billets perdants.
Parmi les 37 billets gagnants :

- 2 de ces billets permettent de gagner une télévision ;
- 5 permettent de gagner un bon de réduction de 100€ ;
- 10 permettent de gagner un bon de réduction de 50€ ;
- 20 permettent de gagner un porte-clés.

1) Quelle est la probabilité de gagner une télévision si l'on achète un billet ?

2) Quelle est la probabilité de gagner un bon de réduction (peu importe la somme) si l'on achète un billet ?
3) En plus de l'achat des bons de réduction dans plusieurs magasins, l'organisateur de la loterie dépense 500€ pour chaque télévision et 0,50€ pour chaque porte-clés.
   a) À quel prix doit-il vendre les billets de loterie, pour être sûr que ce jeu ne lui fera pas perdre d'argent ?
   b) S'il souhaite vendre chaque billet 2€, combien doit-il rajouter de billets perdants (en ne modifiant pas le nombre de billets gagnants et les lots correspondants) pour être assuré que ce jeu ne lui fera pas perdre d'argent ?

Exercice 3



Voici une copie d'écran d'un algorithme réalisé à l'aide du logiciel Scratch.

1) Quelles sont les valeurs des variables a, b et n à la fin du premier passage dans la boucle, puis à la fin du second passage ?
2) Que réalise ce programme ?

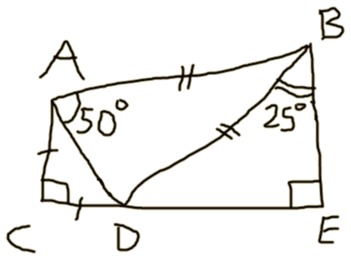
Exercice 4

Pour chacune des affirmations suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1) On considère un cube dont la surface totale extérieure mesure 576 cm^2.

   Affirmation : Son volume est inférieur à 1 litre.
2) **Affirmation :** L'inverse de la somme de deux nombres est égal à la somme des inverses de ces deux nombres.
3) Un prix subit une baisse de 30% puis le nouveau prix subit une hausse de 50%.

   Affirmation : le prix final est 5% plus élevé que le prix initial.
4) Soit la figure ci-dessous faite à main levée.



Affirmation : Les points C, D et E sont alignés.

TROISIEME PARTIE (14 points)

Cette partie est constituée de trois situations indépendantes.

SITUATION 1

Extrait du programme pour le cycle 2 - Nombres et calculs

Connaissances et compétences associées	**Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève**
Calculer avec des nombres entiers	
Calcul mental : calculer mentalement pour obtenir un résultat exact ou évaluer un ordre de grandeur.	Calculer mentalement - sur les nombres 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 en lien avec la monnaie - sur les nombres 15, 30, 45, 60, 90 en lien avec les durées. Résoudre mentalement des problèmes arithmétiques, à données numériques simples. Utiliser les propriétés des opérations, y compris celles du type $5 \times 12 = 5 \times 10 + 5 \times 2$.
Calcul en ligne : calculer en utilisant des écritures en ligne additives, soustractives, multiplicatives, mixtes.	Exemples de stratégies de calcul en ligne : $5 \times 36 = 5 \times 2 \times 18 = 10 \times 18 = 180$ $5 \times 36 = 150 + 30 = 180$ $5 \times 36u = 15d + 30u = 15d + 3d = 180u$ Utiliser des écritures en ligne du type $21 = 4 \times 5 + 1$ pour trouver le quotient et le reste de la division de 21 par 4 (ou par 5).
Calcul posé : mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour l'addition, la soustraction, la multiplication.	L'apprentissage des techniques opératoires posées (addition, soustraction, multiplication) se fait en lien avec la numération et les propriétés des opérations.

1) Donner deux raisons pour lesquelles le calcul en ligne est, en termes d'apprentissage, complémentaire au calcul posé.

2) Le calcul suivant est proposé à des élèves de cycle 2 qui pratiquent régulièrement le calcul en ligne :
   $28 + 17 = ?$
   Expliciter trois stratégies qu'un élève de cycle 2 pourrait mobiliser pour effectuer ce calcul en ligne.

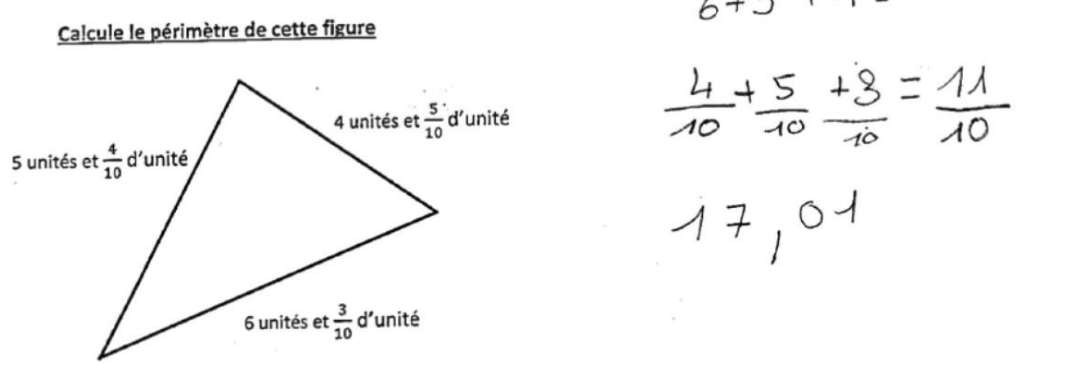
3) Expliciter trois stratégies de calcul mental ou en ligne qu'un élève de cycle 2 pourrait mobiliser pour effectuer 14×5. Pour chacune, indiquer quelles sont les connaissances et les propriétés utilisées.

SITUATION 2

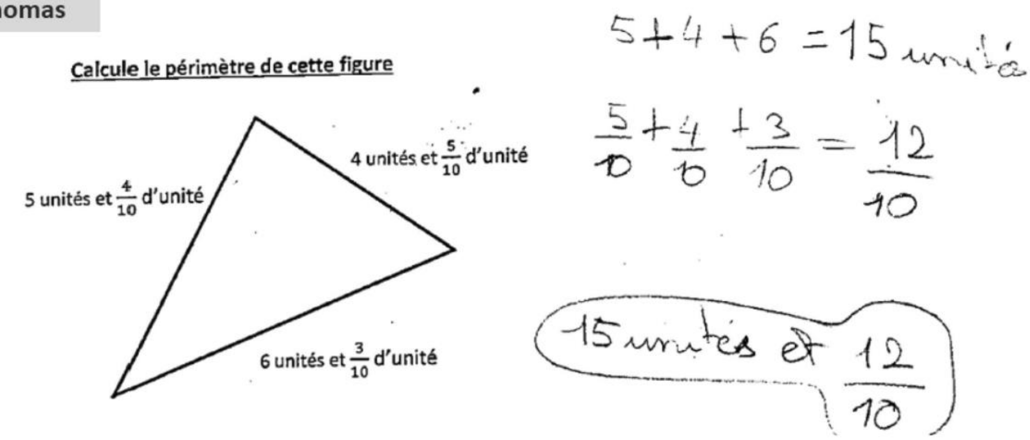
1) À partir des productions suivantes, expliquer pour chaque élève :
    - la démarche utilisée ;
    - les compétences qui semblent acquises ;
    - les éventuelles erreurs.

Productions d'élèves de CM2 :

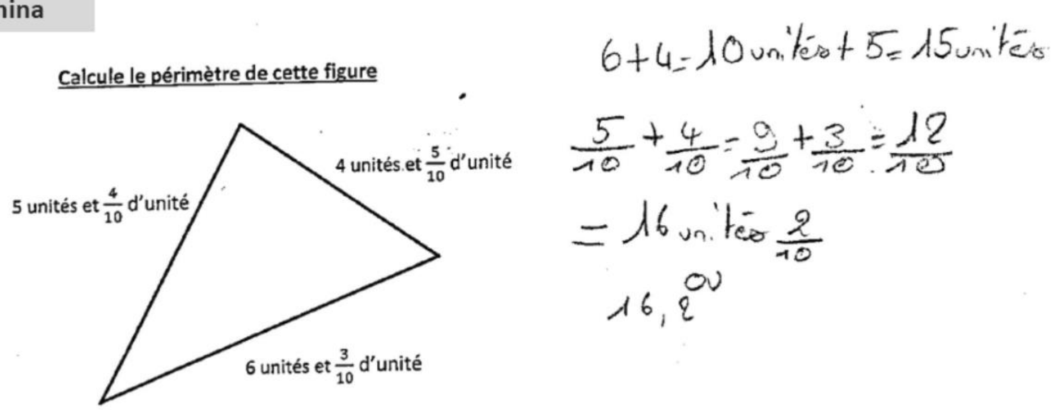
Nicolas



Thomas



Amina



2) Que peut proposer l'enseignant pour amener Thomas à rédiger sa réponse sous forme d'écriture à virgule ?

SITUATION 3

Des élèves d'une classe de cycle 3 doivent calculer 3,12 + 5,7 et expliquer comment ils procèdent.

Voici des exemples de productions d'élèves.

$3,12 + 5,7 = 8,19$

D'abord, il faut additioner la partie décimale de chaque nombre. $12 + 7 = 19$ ou 19 centièmes

Ensuite, on additione la partie entière

$3 + 5 = 8$ donc $3,12 + 5,7 = 8,19$

Benjamin

$3,12 + 5,7 =$

$$\begin{array}{r} 3,12 \\ +\ 5,\ 7 \\ \hline 8,19 \end{array}$$

Océane

$3,12 + 5,7 = 8,82$

$3,12 = \frac{312}{100}$

$5,7 = \frac{57}{10} = \frac{570}{100}$

$$\begin{array}{r} 312 \\ +\ 570 \\ \hline 882 \end{array}$$

c'est egal à 882 sort $\frac{882}{100}$

Isabelle

$3,12 + 5,7 = 8,82$

1) $5,7 = 5u + \frac{7}{10}$

2) $3,12 = 3u + \frac{12}{100}$

3) $\frac{7}{10} + \frac{12}{100} = \frac{82}{100}$

4) $3u + 5u = 8u$

5) $8u + \frac{82}{100} = 8,82$.

Pierre

1) À partir de l'analyse des différentes productions, expliquer quelles sont les différentes démarches proposées.

2) Quelle représentation erronée des nombres décimaux pourrait être à l'origine des erreurs des élèves ?

3) Proposer trois tâches ou activités que pourrait mettre en place l'enseignant pour remédier à ce type d'erreurs ?

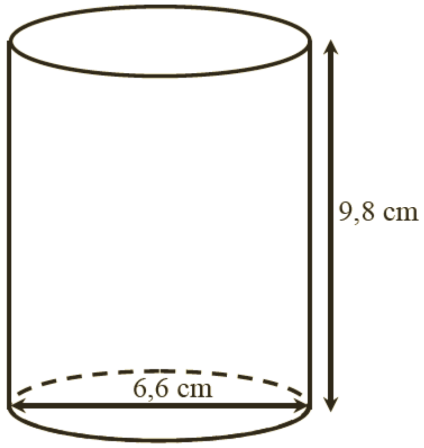
GROUPEMENT 2 – avril 2018

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

Dans cette partie, on cherche à optimiser la quantité de métal nécessaire à la fabrication de canettes de 33 centilitres (cL).

PARTIE A : canette « classique »

On modélise une « canette classique » par le cylindre de révolution représenté ci-dessous.

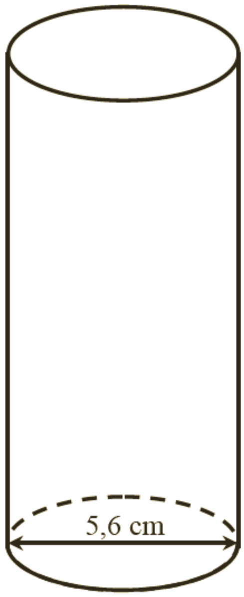


Le volume d'un tel cylindre s'obtient en multipliant l'aire de sa base par sa hauteur.

Vérifier que le volume de ce cylindre, de diamètre 6,6 cm et de hauteur 9,8 cm, est supérieur à 33 cL.

PARTIE B : canette « slim »

Un nouveau format de canette est apparu dernièrement sur le marché. Ces canettes allongées, dites « slim », sont plus hautes et plus fines que les précédentes, pour une même contenance.
Le cylindre représenté ci-dessous en modélise une. Son diamètre est de 5,6 cm.



Déterminer au millimètre près la plus petite hauteur possible du cylindre pour que la canette contienne au moins 33 cL.

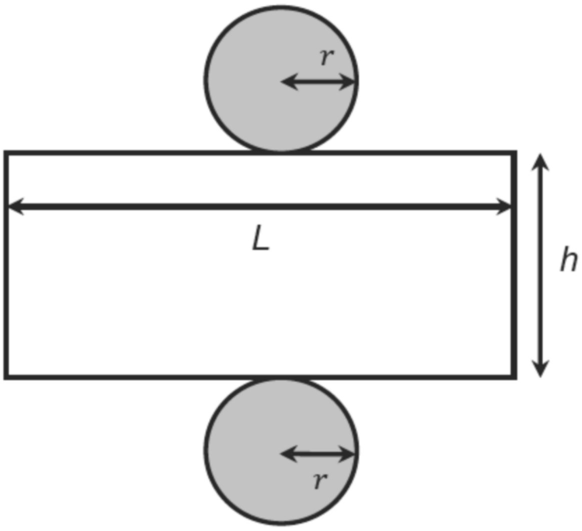
PARTIE C : étude du lien entre le rayon de la base d'une canette de 33 cl et l'aire de son patron

On appelle r le rayon, en centimètre, de la base du cylindre modélisant une canette de 33 cL et h sa hauteur, en centimètre.

1) Vérifier que :

$$h = \frac{330}{\pi r^2}$$

2) La figure ci-dessous représente le patron du cylindre. Celui-ci est formé de deux disques, et d'un rectangle de largeur h et de longueur L, exprimée en centimètre. Exprimer la longueur L en fonction de r.



Cette figure n'est pas à l'échelle.

3) Vérifier que l'aire, en centimètre carré, de la partie rectangulaire du patron est $\frac{660}{r}$.

4) Exprimer l'aire totale A du patron du cylindre, en centimètre carré, en fonction de r.

PARTIE D : lecture graphique

On s'intéresse à la réalisation d'un cylindre de révolution de base de rayon r, exprimé en centimètre, et de contenance 33 cL. L'aire, exprimée en centimètre carré, de la surface de métal nécessaire est modélisée par la fonction f qui, à tout nombre r strictement positif, associe

$$f(r) = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}.$$

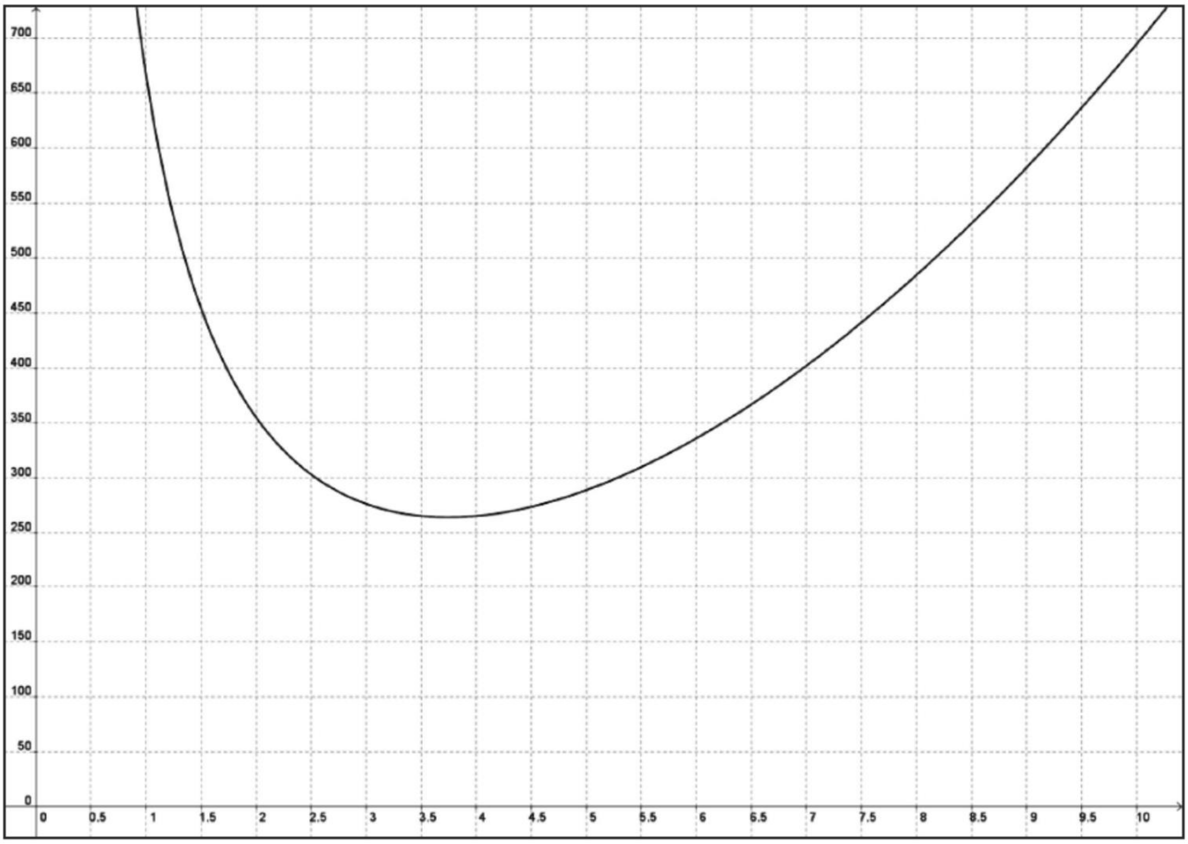
La fonction f est représentée en page suivante.
Répondre par lecture graphique aux questions suivantes :

1) Quelle est l'aire de la surface de métal nécessaire pour un cylindre dont la base a pour rayon 1,5 cm ?

2) À quelle(s) valeur(s) du rayon du cylindre correspond une aire de 300 cm² ?

3) Déterminer laquelle de la canette « classique » ou de la canette « slim » utilise le moins de surface de métal pour sa réalisation. Justifier la réponse en donnant les lectures graphiques effectuées.

4) À quelle valeur du rayon correspond la surface minimale de métal nécessaire à la fabrication d'une canette de 33 cL ?



PARTIE E : utilisation d'un tableur

On souhaite, à l'aide d'un tableur, affiner la réponse obtenue à la question 4 de la partie D par lecture graphique.
Voici une copie d'écran de la feuille de calcul utilisée :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	r	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
2	f(r)	276,55	273,28	270,59	268,42	266,75	265,54	264,76	264,40	264,41	264,80	265,53

1) Écrire une formule qui, entrée dans la cellule B2 et étirée vers la droite, permet d'obtenir les valeurs de $f(r)$ sur la ligne 2.

   Note : la fonction PI() du tableur renvoie la valeur de π avec une précision de 15 décimales.

2) Utiliser cette feuille de calcul pour déterminer un encadrement, le plus précis possible, du rayon du cylindre permettant de minimaliser l'aire de la surface de métal nécessaire à la réalisation d'une canette de 33 cL.

3) Déterminer la hauteur de la canette de 33 cL ayant une base de rayon 3,7 cm.
   Arrondir le résultat au dixième de centimètre.

PARTIE F

Les canettes sont fabriquées à partir d'une feuille plane de tôle d'aluminium d'épaisseur 130 micromètres (µm). Un micromètre est égal à un millionième de mètre. La masse volumique de l'aluminium est 2700 kg/m^3.
On s'intéresse aux canettes classiques dont le rayon est de 3,3 cm et dont la surface de métal nécessaire est de 268,42 cm^2, selon le tableau précédent.
On admet que l'anneau pour ouvrir la canette et le rivet de liaison entre l'anneau et le couvercle ont une masse de 1,4 g et que la masse d'aluminium nécessaire pour souder le couvercle au reste de la canette est 1,9 g.

1) Déterminer, au dixième de gramme près, la masse d'aluminium nécessaire pour fabriquer une cannette classique.
2) Il faut 9 kg d'aluminium pour fabriquer un certain type de vélo. Estimer le nombre de cannettes classiques nécessaires pour obtenir l'aluminium pour fabriquer un tel vélo.

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Les informations présentées dans cet exercice sont extraites du site de l'Établissement Français du Sang qui gère le don du sang en France (https://www.dondusang.net/).

Tableau 1 : Répartition de la population française selon le groupe sanguin et le rhésus

	O	A	B	AB
Rhésus +	36 %	37 %	9 %	3 %
Rhésus -	6 %	7 %	1 %	1 %

Quel que soit le groupe ABO du donneur, son sang sera toujours très utile pour un malade.

Tableau 2 : Compatibilité sanguine des donneurs et des receveurs

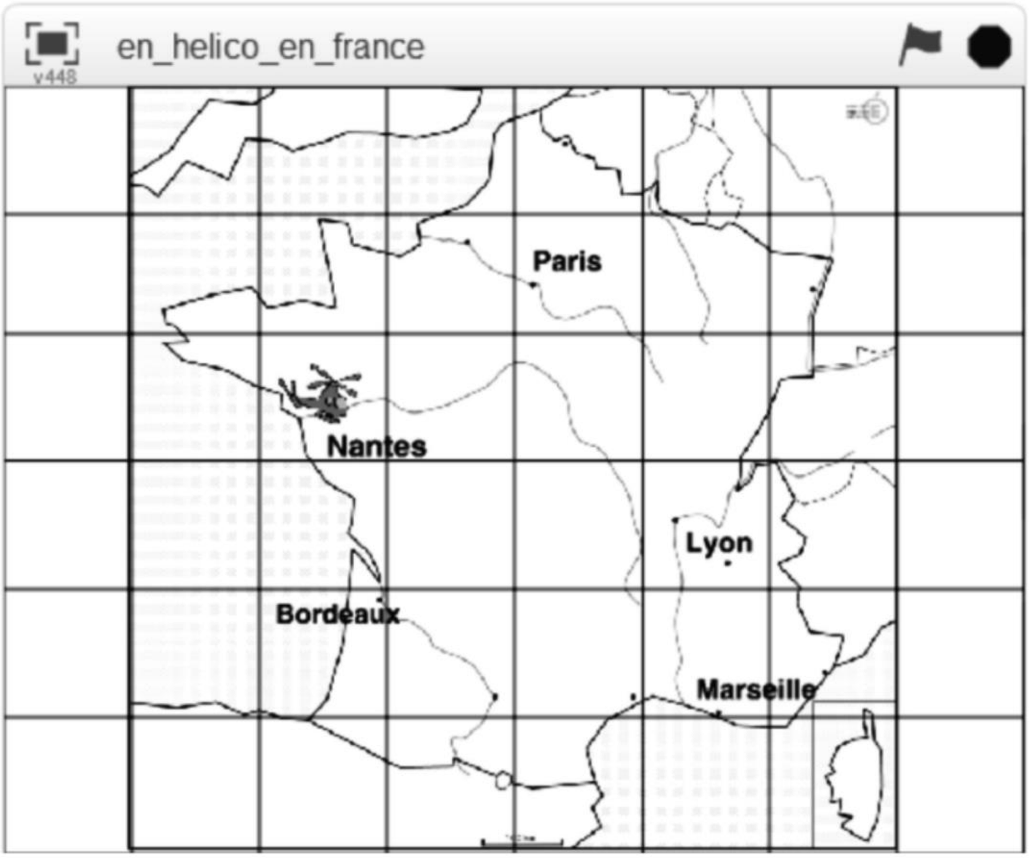
DONNEURS \ RECEVEURS	O+	O-	A+	A-	B+	B-	AB+	AB-	
O+	💧		💧		💧		💧		
O-	💧	💧	💧	💧	💧	💧	💧	💧	DONNEUR UNIVERSEL
A+			💧				💧		
A-			💧	💧			💧	💧	
B+					💧		💧		
B-					💧	💧	💧	💧	
AB+							💧		
AB-							💧	💧	
							RECEVEUR UNIVERSEL		

Lecture : une personne de groupe A rhésus négatif (A-) peut recevoir du sang d'un donneur du groupe O rhésus négatif ou du groupe A rhésus négatif. Il peut donner son sang à des personnes des groupes et rhésus A+ ; A- ; AB+ et AB-.

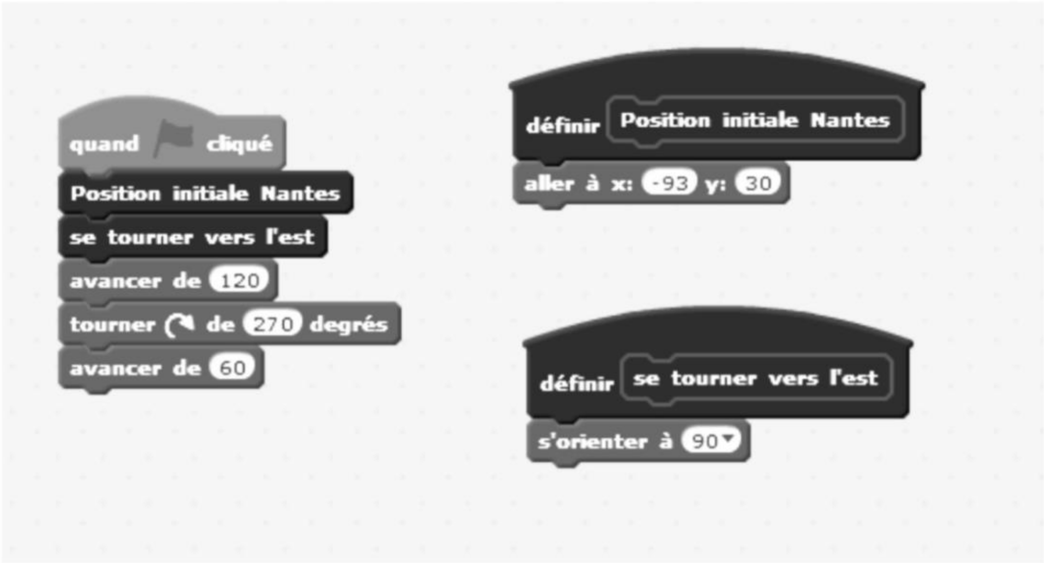
1) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population française soit « donneur universel » ?
2) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population française soit « receveur universel » ?
3) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population française puisse donner son sang à une personne du groupe B, rhésus + ?
4) On choisit au hasard une personne parmi les personnes du groupe O dans la population française. Quelle est la probabilité que cette personne soit « donneur universel » ?
   Arrondir le résultat au centième.

   Au 1er janvier 2016, d'après l'INSEE, la population française était de 66 627 602 personnes. Parmi ces personnes, 43 217 325 personnes avaient entre 18 et 70 ans, critère requis pour pouvoir donner son sang.
5) Estimer le nombre de « donneurs universels » en France au 1er janvier 2016.
6) Quel pourcentage de la population française représentait, au 1er janvier 2016, la population susceptible de donner son sang ?

Exercice 2



Le programme ci-après a été écrit avec le logiciel Scratch pour faire se déplacer le lutin « hélicoptère » de la case « Nantes » à la case « Paris » sur l'arrière-plan ci-dessus, c'est-à-dire pour « avancer » de deux cases et « monter » d'une case.



Un élève souhaite modifier le programme pour que l'hélicoptère se déplace de la case « Nantes » à la case « Lyon ». Par quels nombres doit-il remplacer les nombres « 120 », « 270 » et « 60 » ? Justifier votre réponse.

Exercice 3

Pour calculer de tête le carré d'un nombre entier se terminant par 5 :

- on prend le nombre de dizaines et on le multiplie par l'entier qui suit ce nombre de dizaines, cela donne le nombre de centaines du résultat ;
- on écrit ensuite 25 à droite du nombre de centaines pour obtenir le résultat.

Par exemple, 105 est composé de 10 dizaines et 5 unités, son carré s'obtient :

- étape 1 : en calculant $10 \times 11 = 110$, ce qui donne le nombre de centaines du résultat ;
- étape 2 : on écrit ensuite 25 à droite de 110 pour obtenir le résultat.

On a donc $105^2 = 11025$.

1) Montrer comment calculer mentalement 45^2.
2) Soit n un nombre entier se terminant par 5, n peut s'écrire : $10d + 5$ avec d le nombre de dizaines.

   Établir la relation :

$$n^2 = 100d.(d+1) + 25.$$

3) Expliquer en quoi le résultat de la question 2 permet d'établir la technique de calcul mental présentée dans l'énoncé.
4) Comment, par extension de la technique de calcul mental présentée, calculer mentalement le carré de 3,5 ?

Exercice 4

ABE est un triangle rectangle en E.
AE = 5 cm, AB = 13 cm.
La droite (BE) et la droite perpendiculaire à (AB) passant par A se coupent en C.
La droite (AE) et la droite perpendiculaire à (AC) passant par C se coupent en D.

1) Réaliser la figure en vraie grandeur.
2) Déterminer l'aire du triangle CEA ; on donnera l'arrondi au dixième de mm^2.

TROISIEME PARTIE (14 points)

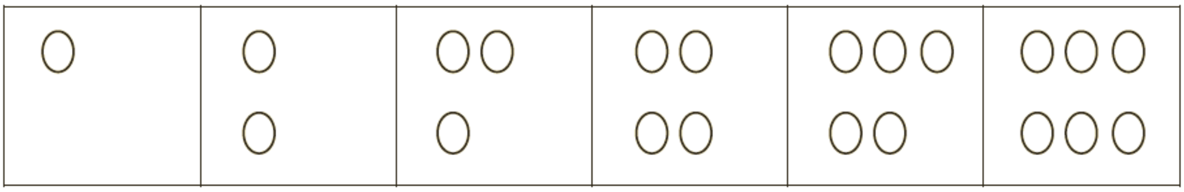
Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

SITUATION 1

Voici un extrait du programme de l'école maternelle publié dans le bulletin officiel n°2 du 26 mars 2015.

> *La stabilisation de la notion de quantité, par exemple trois, est la capacité à donner, montrer, évaluer ou prendre un, deux ou trois et à composer et décomposer deux et trois.*
> *Entre deux et quatre ans, stabiliser la connaissance des petits nombres (jusqu'à cinq) demande des activités nombreuses et variées portant sur la décomposition et recomposition des petites quantités […], la reconnaissance et l'observation des constellations du dé, la reconnaissance et l'expression d'une quantité avec les doigts de la main, la correspondance terme à terme avec une collection de cardinal connu. […] Après quatre ans, les activités de décomposition et recomposition s'exercent sur les quantités jusqu'à dix.*

1) Citer deux procédures qu'un élève de fin de petite section peut utiliser pour affirmer qu'une collection est constituée de trois objets.
2) Proposer une activité à mettre en place en moyenne section pour travailler les décompositions du nombre quatre.
3) Un enseignant de grande section décide d'utiliser avec ses élèves un dé dont les faces sont représentées de la façon suivante :

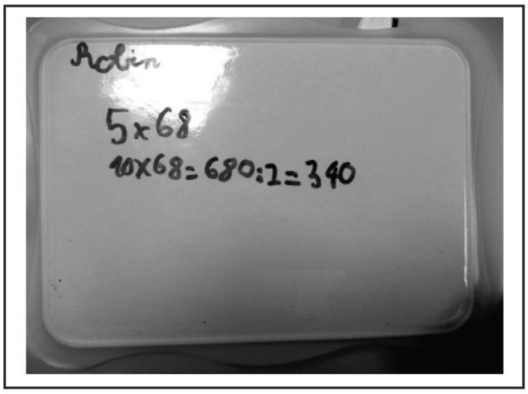


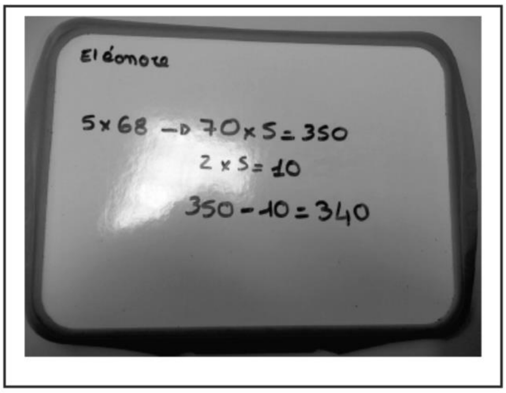
Quel intérêt peut-il y avoir à utiliser un tel dé ?

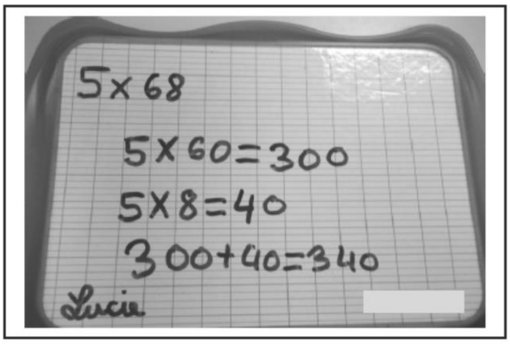
SITUATION 2

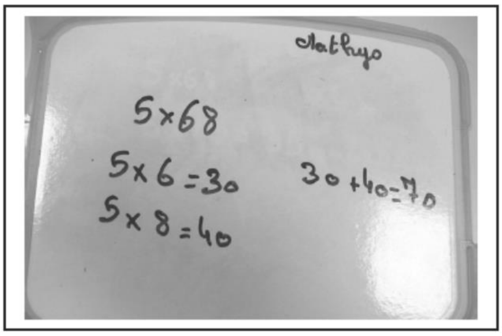
Lors d'un travail sur le calcul en ligne, un enseignant propose la situation suivante à ses élèves : « *Calculer* 5×68 ».

Voici les productions de quatre élèves, Robin, Eléonore, Lucie et Mathys.









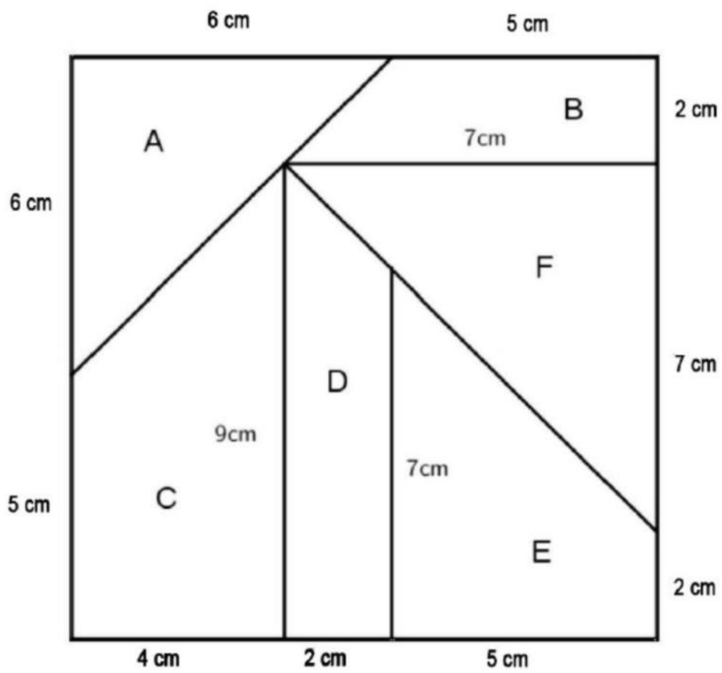
1) Analyser chacune des productions, en explicitant les procédures mises en œuvre et en relevant les éventuelles erreurs.
2) Donner trois démarches pouvant être attendues d'un élève de cycle 3 pour calculer en ligne 25×28. Pour chacune de ces démarches indiquer les connaissances en jeu.

SITUATION 3

Un enseignant propose la situation suivante en cycle 3 :

Consignes données oralement :

« Voici un puzzle carré.
Vous allez devoir refaire le même puzzle mais en plus grand. Il faudra le reconstituer exactement avec les pièces agrandies.
Le segment de 4 cm devra mesurer 6 cm sur votre puzzle agrandi.
Le compte-rendu de vos recherches sera présenté sous la forme d'une affiche ».



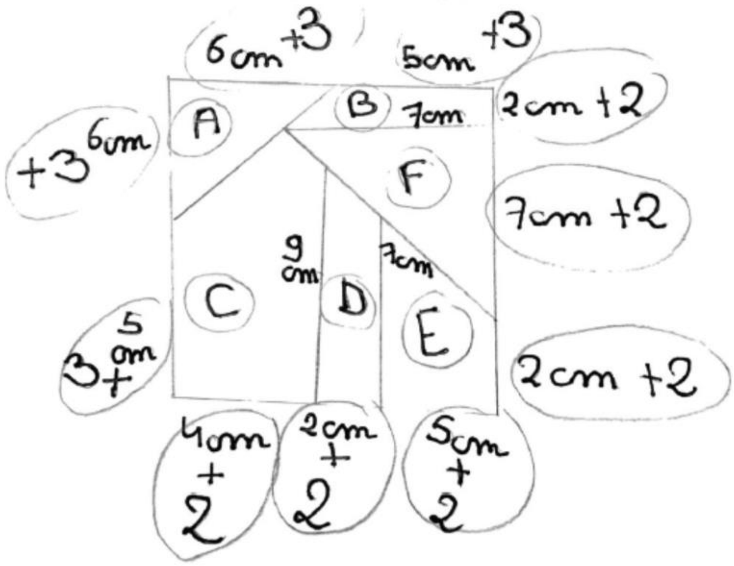
Modalités de mise en œuvre : le professeur demande aux élèves de travailler par groupes de quatre, de s'accorder sur la procédure à adopter pour agrandir les éléments du puzzle, de se répartir la construction des pièces en faisant leurs calculs individuellement puis d'assembler les morceaux pour reconstituer le puzzle agrandi.

1) Quel champ mathématique cette situation permet-elle de travailler ?
2) Analyser les différentes stratégies mises en œuvre en pointant les réussites et les erreurs des groupes ayant produit les affiches 1, 2 et 3.
3) Dans la mesure du possible, indiquer les procédures utilisées pour déterminer chacune des valeurs trouvées par le groupe ayant produit l'affiche 4.

Affiche n° 1

Nous avons fait :

- un tableau :



Affiche n° 2

Pour trouver la solution de ce puzzle, il faut ajouter le 1/4 de chaque nombre et le multiplier par ×2

4 cm $\xrightarrow{+2}$ 6 cm
6 cm $\xrightarrow{+3}$ 9 cm
7 cm $\xrightarrow{+3,5}$ 10,5 cm
2 cm $\xrightarrow{+1}$ 3 cm
5 cm $\xrightarrow{+2,5}$ 7,5 cm
9 cm $\xrightarrow{+4,5}$ 13,5 cm

Affiche n° 3

Pour faire le puzzle on a d'abord divisé 4 par 2 :

$4 \div 2 = 2$

Et on a fait la multiplication de 2 (résultat de $4 \div 2$) par 3 :

$2 \times 3 = 6$

On a donc divisé par 2 puis multiplié par 3, en procédant de cette façon :

$4 \longrightarrow 6$ (dans l'exemple)

$2 \longrightarrow 3$ $\quad 2 \div 2 = 1,\ 1 \times 3 = \cancel{1}3$

$6 \longrightarrow 9$ $\quad 6 \div 2 = 3,\ 3 \times 3 = 9$

$7 \longrightarrow 10{,}5$ $\quad 7 \div 2 = 3{,}5,\ 3{,}5 \times 3 = 10{,}5$

$5 \longrightarrow 7{,}5$ $\quad 5 \div 2 = 2{,}5,\ 2{,}5 \times 3 = 7{,}5$

$9 \longrightarrow 13{,}5$ $\quad 9 \div 2 = 4{,}5,\ 4{,}5 \times 3 = 13{,}5$

Affiche n° 4

4	6	7	2	5	9
6	9	10,5	3	7,5	13,5

4 -> 6 car on le sait.

6 -> 9 car 6 + 3 est égale à 9.

7 -> 10,5 car

2 -> 3 car la moitier de 6 est 3.

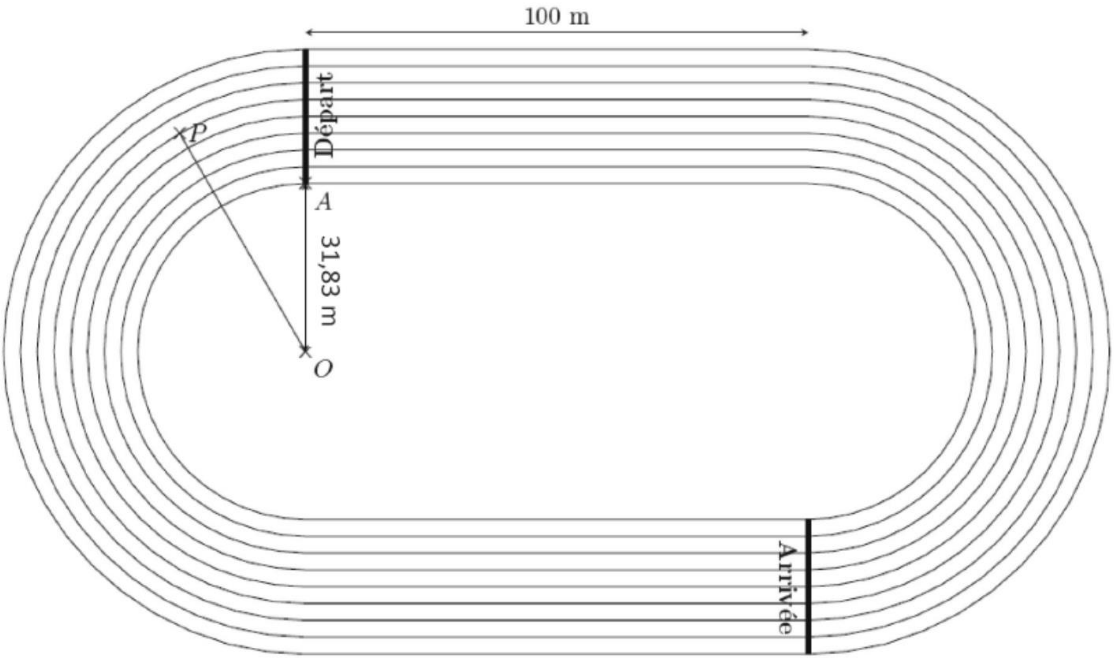
5 -> 7,5 car 4 + (2 ÷ 2) est égale à 7,5.

9 -> 13,5 car 4 + 4 + (2 ÷ 2) est égale à 13,5.

GROUPEMENT 3 – avril 2018

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

Une piste d'athlétisme est formée de huit couloirs. La largeur de chaque couloir est de 1,22 mètre. Chacun des neuf bords des huit couloirs est composé de deux lignes droites de 100 mètres et de deux demi-cercles. Le couloir 1 est celui le plus à l'intérieur, le 8 étant celui le plus à l'extérieur. Le bord intérieur du couloir 1 est composé de deux lignes droites de 100 mètres et de deux demi-cercles de rayon 31,83 mètres.
Dans tout l'exercice on négligera la largeur des bandes de peinture délimitant les couloirs.
Pour les courses de sprint (100 m, 200 m ou 400 m), il y a huit coureurs et chacun occupe un couloir.
Un coureur devant rester dans son couloir tout au long de la course, on considère que la distance qu'il parcourt est celle correspondant à la ligne la plus intérieure de son couloir.



1) Vérifier que la distance d'un tour de piste complet parcourue par le coureur du couloir 1 est d'environ 400 m.

2) Dessiner le couloir n°1 (avec ses deux bords) à l'échelle 1/1200. Indiquer les calculs effectués pour réaliser la construction.

   On étudie dans les questions ci-dessous la configuration d'une course de 200 m.

3) Expliquer pourquoi il y a un décalage au départ d'une course de 200 m comme sur la photographie ci-dessous :

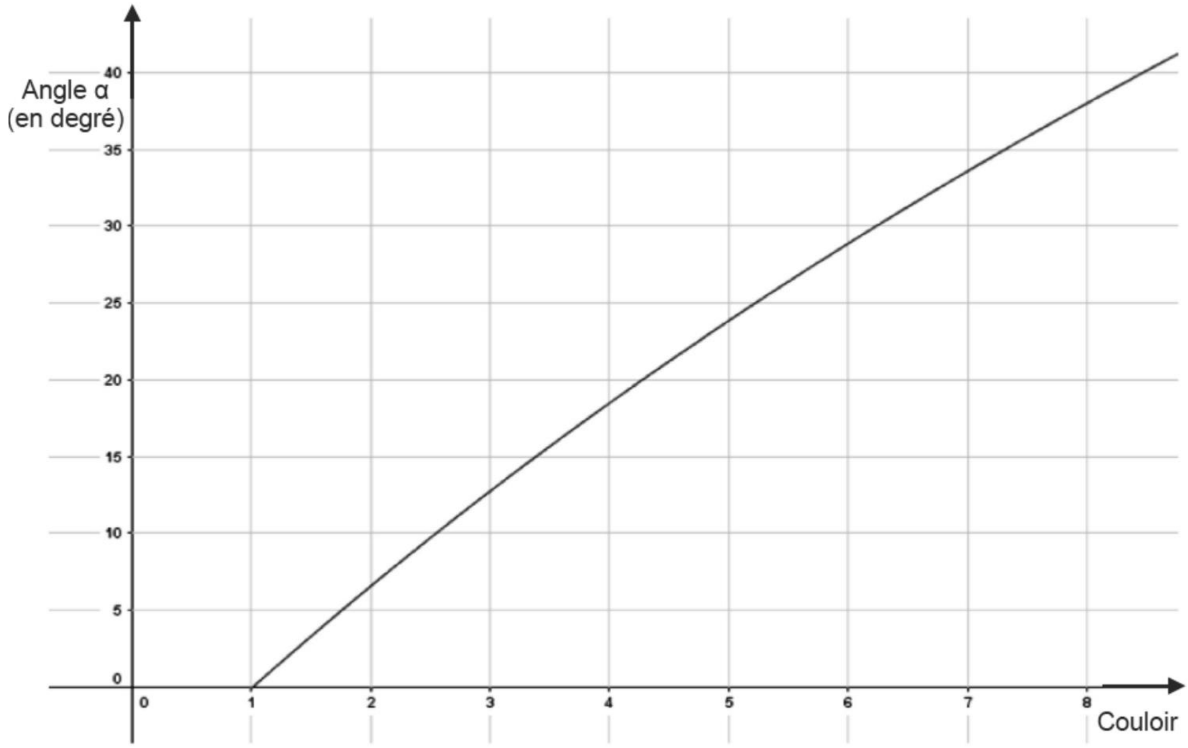
4) Sur la représentation précédente,
   - le point A correspond à la position de départ du coureur dans le couloir 1 :
   - le point P correspond à la position de départ du coureur dans le couloir 6. Pour ce coureur, le décalage correspond à la longueur de l'arc de cercle de centre O et qui a pour extrémités le point P et le point de la ligne 6 situé sur la ligne « Départ ».

   a) Calculer le décalage du coureur du couloir 6 au centimètre près.

   On peut repérer la position de départ dans le couloir par l'angle $\widehat{AOP}$ que l'on appelle α. Cet angle dépend du numéro *n* du couloir.

   b) Calculer la mesure de l'angle α pour le couloir n°6. On donnera la mesure de l'angle arrondie au dixième de degré.

   Voici la courbe d'une fonction permettant de déterminer la valeur de α en fonction du couloir *n*.



   c) Y a-t-il proportionnalité entre le numéro du couloir et la valeur de α ? Justifier.

   d) Par lecture graphique, donner un encadrement d'amplitude 2° de la valeur de l'angle α pour le couloir 3.

   e) Un élève utilise un tableur pour déterminer automatiquement le décalage et l'angle en fonction du couloir.

	A	B	C	D	E
1	**Couloir**	**Décalage**	**Angle α**		
2	1				
3	2				
4	3				
5	4				
6	5				
7	6				
8	7				
9	8				
10					

   Parmi les formules suivantes, quelle formule, qu'il fera ensuite glisser dans toute la colonne, peut-il entrer dans la case B2 pour calculer le décalage ? On rappelle que « PI() » renvoie le nombre π.

Formule A	Formule B
=PI()*((A2)*1,22+31,83)-100	=PI()*((A2-1)*1,22+31,83)-100

Formule C	Formule D
=PI()*((A2)*1,22)-100	=PI()*((A2-1)*1,22)-100

Formule E	Formule F
=PI()*((A2)*1,22+31,83)	=PI()*((A2-1)*1,22+31,83)

Formule G	Formule H
=PI()*((A2)*1,22)	=PI()*((A2-1)*1,22)

5) Au 1er janvier 2018, le Jamaïcain Usain Bolt détient le record du monde du 200 mètres en 19,19 secondes.

   a) Déterminer sa vitesse moyenne en km/h. Arrondir au dixième.

   b) À cette vitesse-là, combien mettrait-il de temps pour effectuer un marathon dont la longueur est de 42,195 km ? On donnera la réponse en heures, minutes et secondes, arrondie à la seconde près.

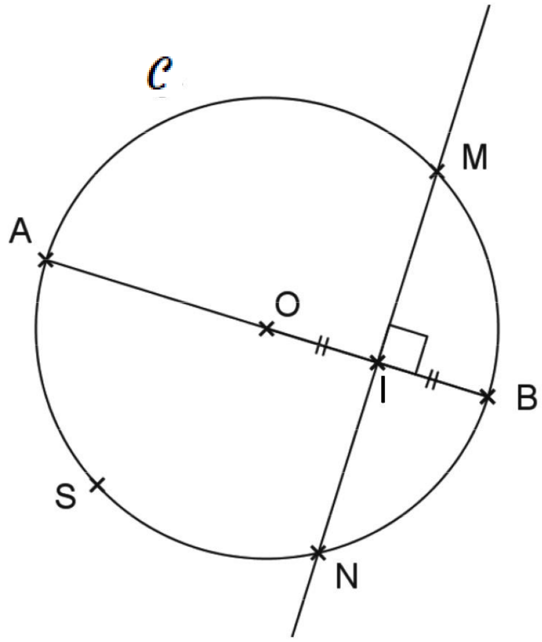
   c) Le précédent record du monde du 200 mètres était détenu par l'américain Michael Johnson, « La locomotive de Wako », avec un temps de 19,32 secondes aux Jeux Olympiques d'Atlanta en 1996. De quel pourcentage Usain Bolt a-t-il réduit le temps du record du monde du 200 mètres ?

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Sur la figure ci-dessous, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 5 cm. Le segment [AB] est un diamètre de ce cercle. Les points M et N sont les intersections du cercle $\mathcal{C}$ avec la médiatrice du segment [OB]. Le point I est le milieu de [OB]. Le point S est le symétrique du point M par rapport au point O.



Cette figure n'est pas dessinée en vraie grandeur.

1) Quelle est la nature du triangle OMB ? Justifier.
2) Démontrer que le quadrilatère AMBS est un rectangle.
3) Calculer la valeur exacte de l'aire du rectangle AMBS.
4) Démontrer que le quadrilatère OMBN est un losange.

Exercice 2

Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Justifier la réponse.
Une réponse inexacte ou non justifiée ne rapporte aucun point.

1) **Affirmation 1 :**

   126 possède exactement 10 diviseurs.

2) **Affirmation 2 :**

   Si un polygone non croisé A a un périmètre supérieur au périmètre du polygone non croisé B alors l'aire du polygone A est supérieure à l'aire du polygone B.

3) **Affirmation 3 :**

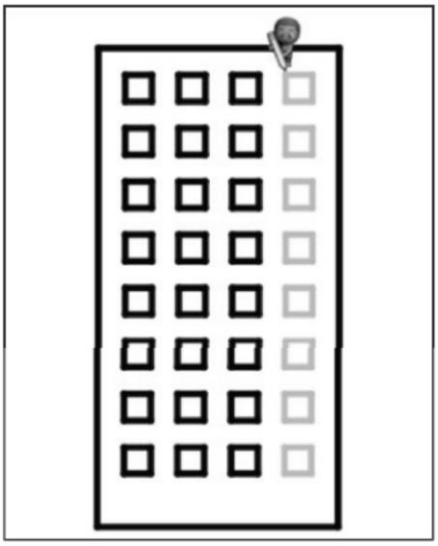
   Si des prix augmentent de 5 % par an, ils auront plus que doublé en 15ans.

4) **Affirmation 4 :**

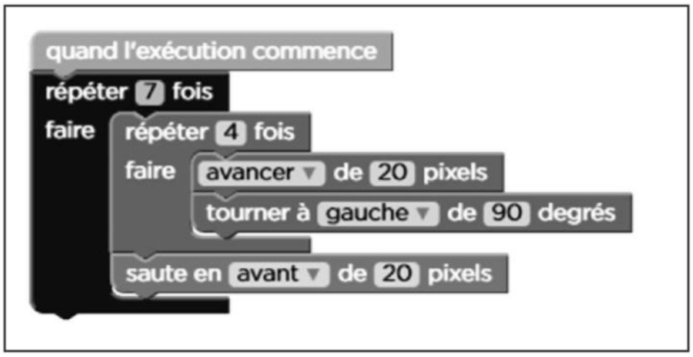
   Les dimensions de mon échantillon de parfum sont cinq fois plus petites que celles de mon flacon habituel. Il y a donc 25 fois moins de parfum dans l'échantillon que dans le flacon habituel.

Exercice 3

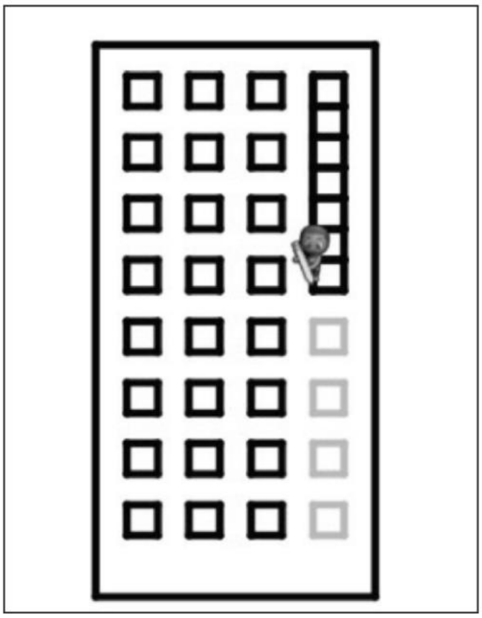
Un élève qui utilise le site « code.org » doit écrire un programme pour repasser au crayon noir les petits carrés en gris sur le dessin ci-après.



Il propose le programme ci-dessous :



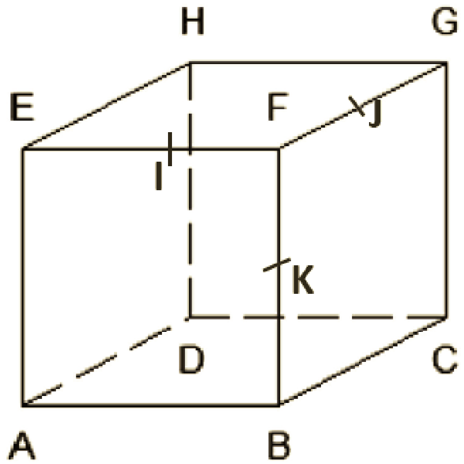
Quand il lance le programme, le dessin obtenu est le dessin suivant :



Que faut-il modifier dans le programme pour obtenir le dessin attendu ?

Exercice 4

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 6 cm.



1) Soit I, J et K les milieux respectifs des arêtes [FE], [FG] et [FB].
   Quelle est la nature du triangle IJK ? Justifier.
2) Montrer que le volume du tétraèdre FIJK est 4,5 cm^3. On rappelle que le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de l'aire d'une base par la hauteur associée.
3) Construire, en vraie grandeur, un patron du tétraèdre FIJK. On laissera les traits de construction.
4) On coupe le cube en suivant le plan (IJK), afin d'ôter le tétraèdre FIJK. On procède de la même façon avec chacun des sept autres sommets du cube. Le solide obtenu après ces différentes coupes s'appelle un « cuboctaèdre ».

   a) Calculer le volume de ce cuboctaèdre.
   b) Calculer la longueur totale de ses arêtes.
      On donnera le résultat arrondi au millimètre.

TROISIEME PARTIE (14 points)

Cette partie est constituée de trois situations indépendantes.

SITUATION 1

Une enseignante de CM2 propose l'exercice suivant en classe de CM2.

> Une boîte contient des dragées toutes identiques.
> 120 dragées pèsent 360 g.
> Combien pèsent 30 dragées ?

1) Proposer trois procédures pouvant être utilisées par les élèves pour résoudre cet exercice, en explicitant à chaque fois chacun des calculs effectués pour trouver le résultat attendu.
2) L'enseignante veut vérifier la maitrise de la procédure dite de retour à l'unité par les élèves. Elle souhaite garder la même forme d'exercice en modifiant les nombres en jeu dans l'énoncé pour contraindre, ou au moins encourager vivement, les élèves à utiliser cette procédure. Proposer un énoncé modifié qu'elle pourrait soumettre à ses élèves.

SITUATION 2

Un professeur des écoles distribue le problème suivant à ses élèves de CE1 et leur demande de se mettre en groupe pour le résoudre. Les productions de quatre groupes sont présentées dans la suite.

Les cinq élèves de l'équipe verte ont gagné des images.

Lisa : 12 images | Camille : 11 images

Luc : 10 images | Nora : 13 images

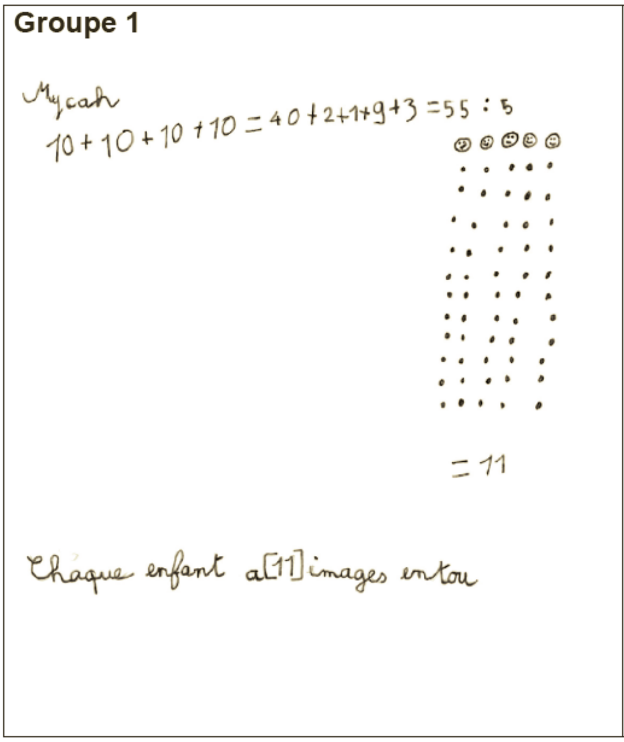
Ilyes : 9 images

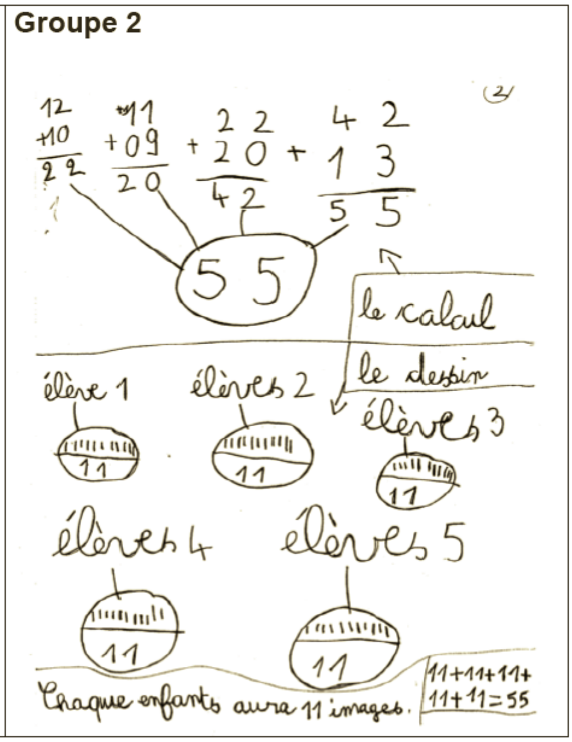
Ils veulent se les partager pour que chacun en ait la même quantité.

Combien d'images aura chaque enfant après le partage ?

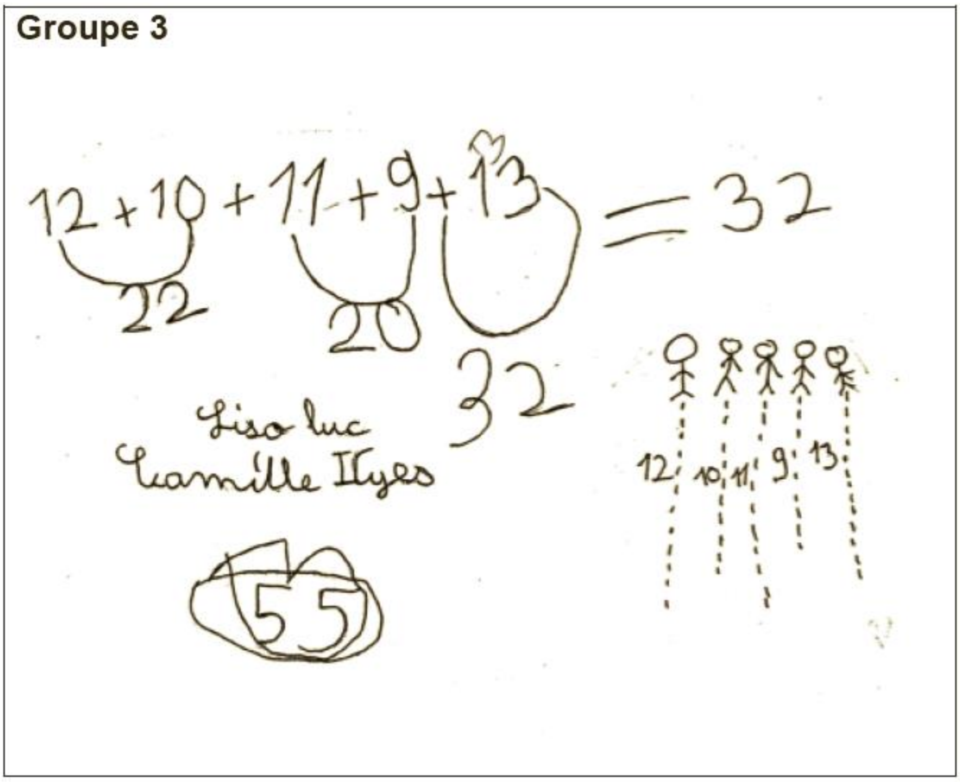
1) Citer deux objectifs d'apprentissage que cette situation permet de travailler.
2) a) Expliquer chacune des stratégies d'addition pour trouver 55 pour les élèves des groupes 1 et 2 en s'appuyant sur leurs productions ci-après.

   b) Donner un point commun et deux différences dans la démarche mathématique des productions des groupes 1 et 2.





3) Citer deux difficultés qu'a rencontrées le groupe 3.



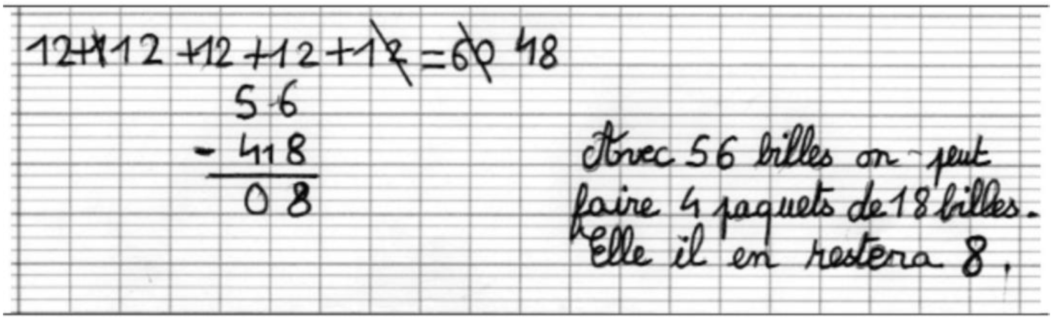
SITUATION 3

Voici une situation problème proposée à des élèves de CM1.

<u>Problème 1 :</u>
Combien de sacs de 12 billes peut-on faire avec 56 billes ?

Voici trois productions d'élèves illustrant la résolution du problème 1 :

Production n°1

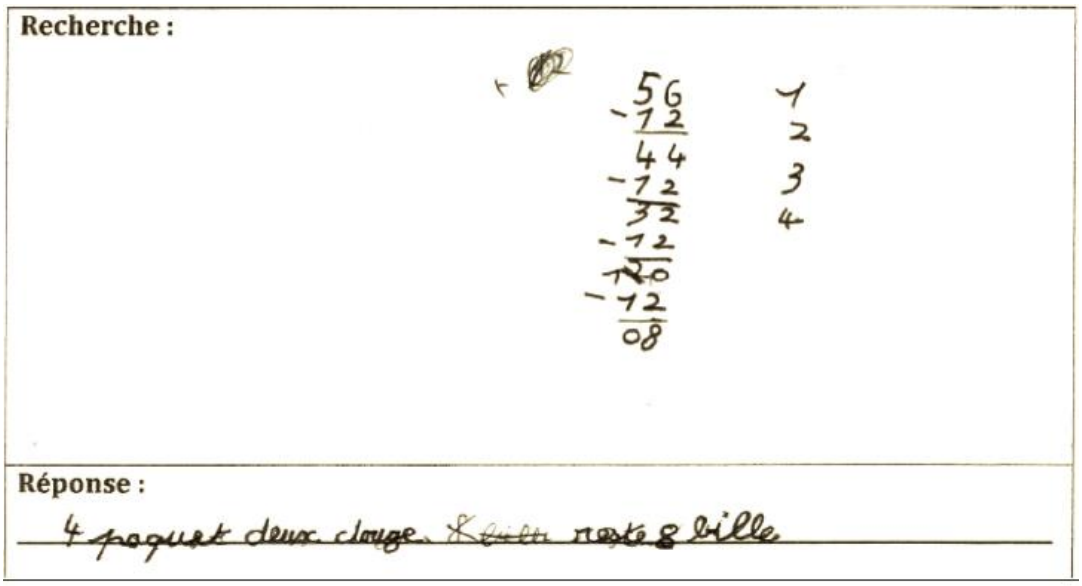


12+12 +12 +12 +1~~2~~ = ~~60~~ 48

56
− 48
08

Avec 56 billes on peut faire 4 paquets de 18 billes. Elle il en restera 8.

Production n°2



Recherche :

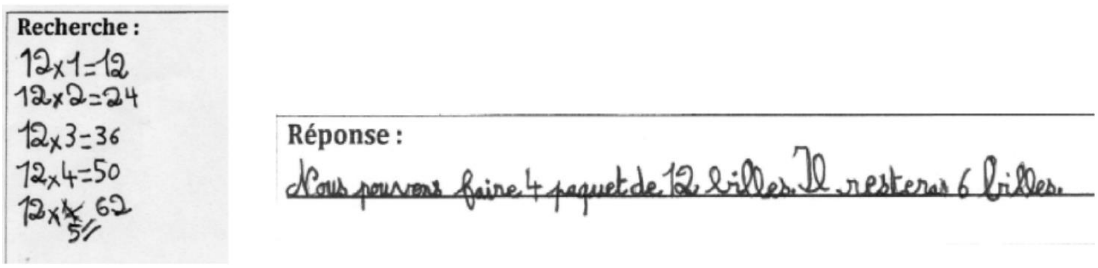
56
− 12
44
− 12
32
− 12
20
− 12
08

1 2 3 4

Réponse :

4 paquet deux douze ~~8 bille~~ reste 8 bille

Production n°3



Recherche :

12x1=12
12x2=24
12x3=36
12x4=50
12x5 62

Réponse :

Nous pourrons faire 4 paquet de 12 billes. Il resteras 6 billes.

1) Pour chacune de ces productions, expliciter la procédure utilisée pour résoudre le problème 1 ?

2) Expliquer comment la modification des nombres de l'énoncé peut montrer les limites des procédures mises en œuvre et inciter à l'utilisation de la technique opératoire de la division ?

3) Citer trois connaissances ou capacités nécessaires pour effectuer une division posée.

GROUPEMENT 4 – avril 2018

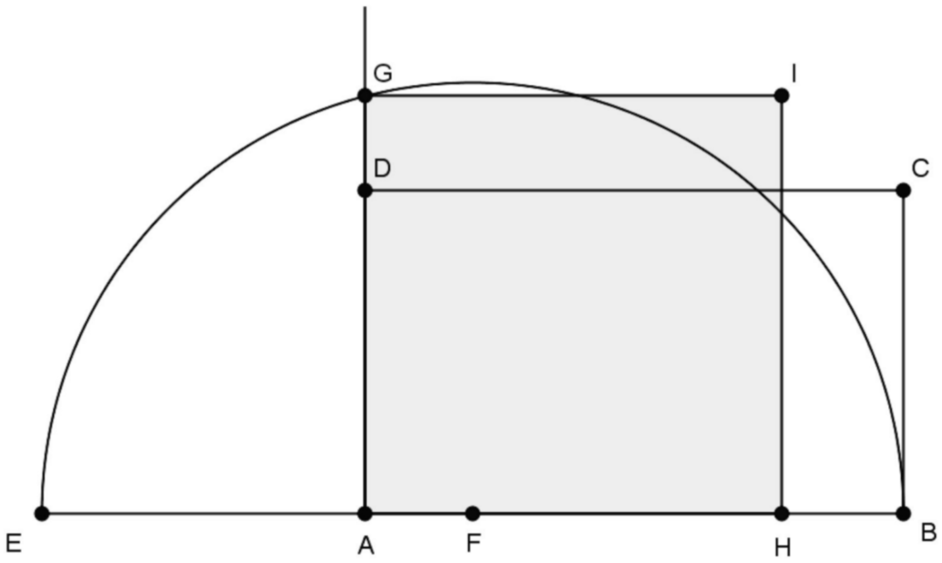
PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

Une aire de détente

Un architecte paysagiste est chargé de l'embellissement d'une aire de détente.
Avant les travaux, il s'agit d'un terrain rectangulaire. L'architecte a notamment pour mission de construire une aire de détente de forme carrée ayant la même aire que l'aire de détente rectangulaire initiale.

PARTIE A : une construction

Méthode de Samuel Marolois (1572 -1627), mathématicien et ingénieur militaire hollandais.
Sur le plan de l'architecte, on peut voir la configuration suivante réalisée à partir du rectangle initial ABCD :



Le rectangle ABCD étant donné, avec AB>BC, le protocole de cette construction est le suivant :

- construire E sur [BA) tel que AE = AD avec E n'appartenant pas à [AB] ;
- construire F milieu de [EB] et tracer le demi-cercle de diamètre [EB] qui coupe la demi-droite [AD) en G ;
- construire les points H et I tels que AHIG soit un carré, avec H appartenant à [AB).

1) On se place dans le cas où le terrain rectangulaire initial a une longueur de 308 mètres et une largeur de 132 mètres. On veut réaliser un plan à l'échelle de ce terrain, sous forme d'un rectangle ABCD, tel que la longueur du terrain soit représentée par un segment [AB] mesurant 7,7 cm.

   a) Montrer que la largeur [AD] du rectangle doit mesurer 3,3 cm.

   b) Quelle est l'échelle de ce plan ?

   c) Construire le rectangle ABCD et effectuer le protocole de construction donné ci-dessus.
   Laisser les traits de construction apparents.

   d) Calculer les longueurs des segments [EB], [EF], [AF] et [FG] sur le plan.

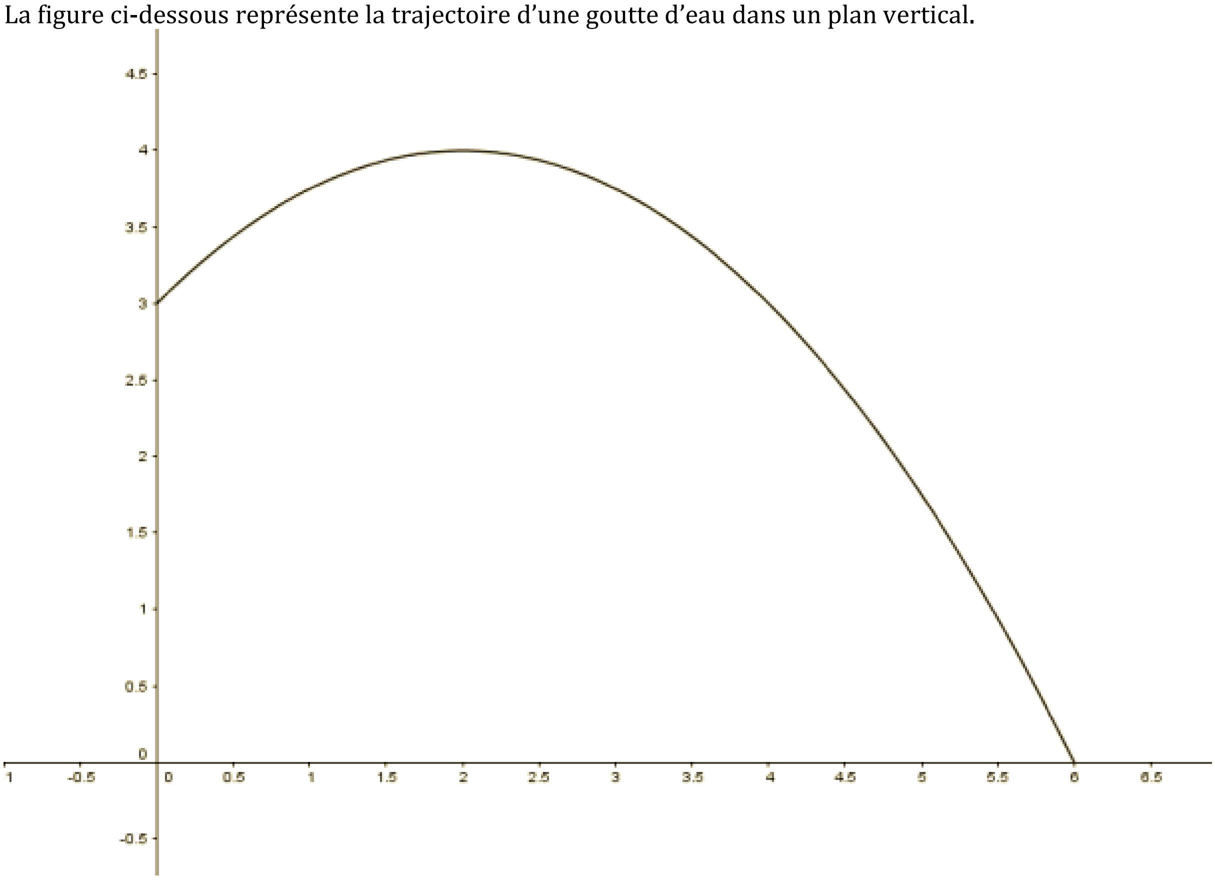
   e) En déduire l'aire du carré AGIH sur le plan.

   f) En déduire l'aire du carré correspondant dans la réalité et la comparer à l'aire du terrain rectangulaire initial.

2) L'architecte prétend que quelles que soient les dimensions du rectangle initial, le carré AHIG obtenu a toujours la même aire que le rectangle ABCD. Démontrer que cette affirmation est vraie.
On pourra poser AB = a et AD = b (avec a > b).

PARTIE B : aménagement d'une fontaine

L'architecte souhaite installer une fontaine d'eau au centre du carré AHIG construit précédemment.
La figure ci-dessous représente la trajectoire d'une goutte d'eau dans un plan vertical.



L'abscisse 0 correspond au centre du carré et l'ordonnée 0 correspond au niveau du sol.
L'axe des ordonnées donne la direction de la colonne de laquelle jaillit l'eau. Quand la goutte d'eau est au point de coordonnées $(x\,;\,y)$, cela signifie qu'elle est à la distance x, exprimée en mètre, de l'axe vertical situé au centre de la fontaine et à la hauteur y, exprimée en mètre, par rapport au sol. La courbe passe par les points de coordonnées (0 ; 3) et (6 ; 0).
Les graduations des axes expriment des mesures de longueurs en mètre.

1) a) À quelle hauteur est la goutte d'eau quand elle sort de la colonne ?

   b) À quelle distance du centre du carré l'eau retombe-t-elle ?

   c) Déterminer graphiquement la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau jaillissant de la fontaine.

2) La fonction représentée graphiquement ci-dessus est définie sur l'intervalle [0 ; 6] par une expression de la forme :

$$f\,(x) = -\frac{1}{4}x^2 + b\,x + c$$

où b et c sont des nombres que nous allons chercher à déterminer.

   a) Donner, en fonction de b et c, les images respectives de 0 et de 6 par la fonction f.

   b) En déduire les deux nombres b et c.

   c) Prouver que pour tout x de l'intervalle [0 ; 6], on a :

$$f\,(x) = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 4$$

   d) En déduire la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau jaillissant de la fontaine.
   Justifier.

PARTIE C : un peu de verdure

Par souci d'économie, il est décidé de récupérer les arbustes qui avaient été plantés de façon régulière sur le contour d'un terrain rectangulaire de longueur 308 mètres et de largeur 132 mètres.
Il y a un arbuste à chaque coin et la distance entre deux arbustes voisins est toujours la même, c'est un nombre entier de mètres.

1) De quelle(s) distance(s) peut-il s'agir ?
2) La distance, exprimée en mètre, entre chaque arbuste est un nombre premier supérieur à 3.
   De combien d'arbustes l'architecte dispose-t-il ?

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Pour chacun des problèmes suivants, indiquer laquelle des cinq réponses proposées est juste.
Aucune justification n'est attendue.

1) Amy dispose d'un cadenas dont la combinaison est un code à quatre chiffres. Chaque chiffre peut prendre une valeur de 0 à 6. Combien y a-t-il de combinaisons ?

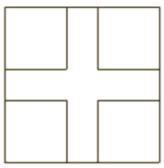
   A : 720 B : 24 C : 28 D : 2 401 E : 16 384

2) Parmi les quatre figures ci-dessous, laquelle n'est pas obtenue avec un des trois programmes proposés ?

Programme 1

Programme 2

Programme 3

A :  B :  C :  D : 

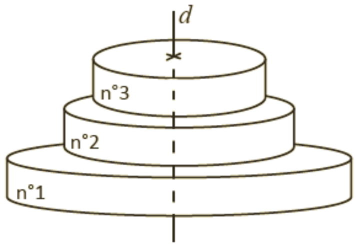
3) Un constructeur annonce qu'une voiture de course consomme 17 litres d'essence aux 100 km lorsqu'elle roule sur circuit à la vitesse de 70 m/s.

   Quelle sera sa consommation en 1h30min de trajet à cette vitesse ?

   A : 17,85 L B : 19,83 L C : 42,84 L D : 64,26 L E : 107,1 L

Exercice 2

Un élève pâtissier doit présenter, pour son projet de fin d'études, une pièce montée composée de 3 gâteaux cylindriques superposés, tous centrés sur l'axe *d* comme l'indique la figure ci-dessous :

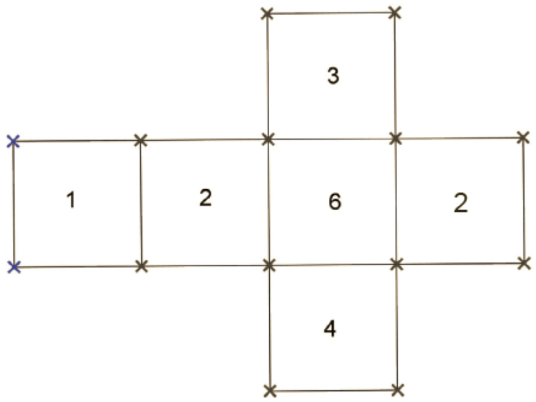


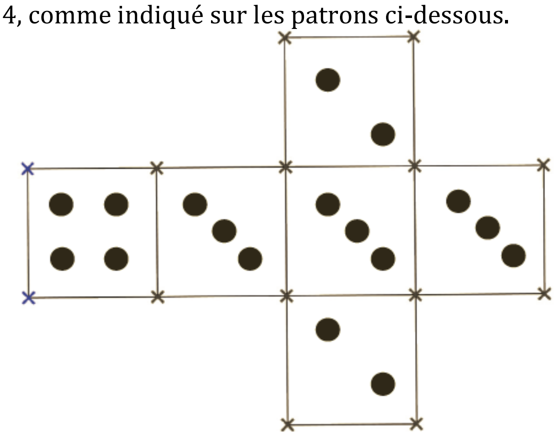
- Les trois gâteaux cylindriques sont de même hauteur : 10 cm.
- Le plus grand gâteau cylindrique, gâteau n° 1, a pour rayon 30 cm.
- Le rayon du gâteau n°2 est égal aux $\frac{2}{3}$ de celui du gâteau n°1.
- Le rayon du gâteau n° 3 est égal aux $\frac{3}{4}$ de celui du gâteau n°2.

1) Calculer le rayon du gâteau n° 3.
2) Montrer que le volume total exact de la pièce montée est égal à $15\,250\pi$ cm^3.
3) Quelle fraction du volume total représente le volume du gâteau n° 3 ? Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

Exercice 3

On lance deux dés équilibrés. Le premier dé indique un nombre à l'aide des chiffres de 1 à 6 et le deuxième dé indique un nombre à l'aide des constellations de 2 à 4, comme indiqué sur les patrons ci-dessous.





On additionne ensuite les deux nombres obtenus :

- si la somme est 6 on gagne 3 jetons ;
- si la somme est un nombre pair différent de 6 on gagne 1 jeton ;
- si la somme est un nombre impair on ne gagne rien.

1) Un joueur a gagné 1 jeton. Il a obtenu « 4 » avec le premier dé. Que peut-on dire sur le résultat obtenu avec le deuxième dé ? Justifier.
2) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 jetons ? Justifier.
3) Quelle est la probabilité de ne pas obtenir de jetons ? Justifier.
4) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un jeton ? Justifier.

Exercice 4

Voici un programme de calcul, appliqué sur un tableur :

A6

	A	B
1	**Programme**	**Résultat**
2	Prendre un nombre	5
3	Ajouter 3 à ce nombre	8
4	Élever la somme précédente au carré	64
5	Retrancher le carré du nombre de départ au résultat précédent	39
6		
7		

1) a) Vérifier qu'on obtient 33 en choisissant 4 comme nombre de départ.

   b) Quel résultat obtient-on si on choisit 4,2 comme valeur de départ ?

   c) Quel résultat obtient-on si on choisit $\frac{7}{10}$ comme valeur de départ ? On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

2) Quelles formules peut-on écrire dans les cases B3 ; B4 et B5 pour obtenir cette feuille de calcul ?

3) Pour chacune des deux affirmations suivantes, dire si elle est exacte et justifier la réponse.

   a) **Affirmation 1** : « Aucun nombre ne permet d'obtenir 0 comme résultat final. »

   b) **Affirmation 2** : « Si on prend un nombre entier positif, le résultat est toujours divisible par 3. »

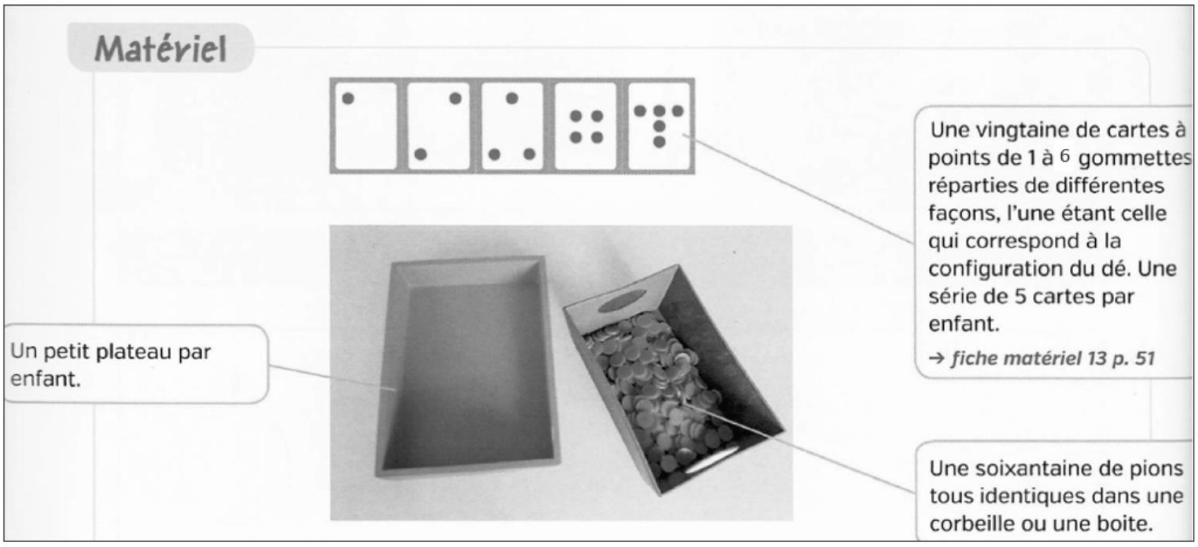
TROISIEME PARTIE (14 points)

Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

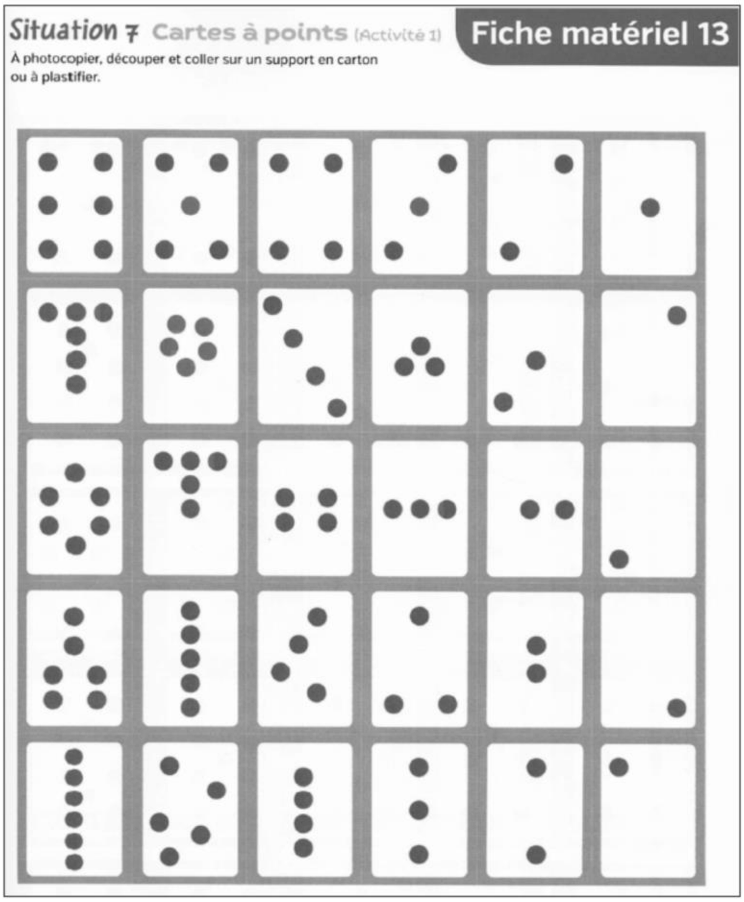
SITUATION 1

L'activité suivante intitulée « *Cartes à points* » est extraite de l'ouvrage « *Découvrir les maths Situations MS, Nouvelle édition, Programme 2015, Dominique Valentin, Hatier* 2015 ».

Voici le matériel utilisé :



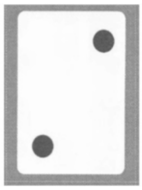
Les jetons sont d'une taille proche des points sur la carte.



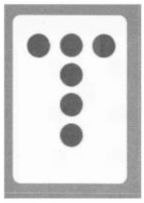
La règle du jeu est la suivante :

Les cartes sont disposées en tas à l'envers devant quatre ou cinq joueurs. Chaque enfant tire une carte et prend dans la corbeille « autant de pions qu'il y a de gommettes sur la carte ». S'il a réussi, il verse les pions dans son plateau et garde la carte ; sinon, il remet les pions dans la corbeille et remet la carte, à l'envers, sous le paquet commun. On joue cinq tours : le gagnant est celui qui a le plus de cartes.

1) Décrire deux procédures que les élèves peuvent utiliser pour quantifier la collection de gommettes sur la carte ci-dessous.



2) a) Décrire deux procédures que les élèves peuvent utiliser pour quantifier la collection de gommettes sur la carte ci-dessous.



   b) Pour chacune des procédures données, décrire une erreur que les élèves sont susceptibles de faire.

3) Comment les élèves peuvent-ils valider leur réussite ?

4) Donner trois variables de différenciation sur lesquelles les concepteurs du jeu se sont appuyés pour construire les différentes cartes.

SITUATION 2

Un enseignant propose les problèmes suivants à ses élèves de cycle 2.

Problème 1 Paul a gagné 8 billes pendant la récréation. Il a maintenant 22 billes. Combien avait-il de billes avant la récréation ?

Problème 2 Marie mesure 135 cm. C'est 45 cm de moins que son papa. Quelle est la taille du papa de Marie ?

1) De quel type de problèmes relèvent ces deux énoncés ?

2) Décrire deux procédures que l'on peut attendre d'élèves de CE1 pour le problème 1.

3) Quelles erreurs peuvent être induites par les formulations de ces deux problèmes ?

SITUATION 3

Voici quatre énoncés de problèmes proposés lors d'une séance par une enseignante de CM2.

Problème 1 :
Pour faire 8 brioches, il faut 500 g de farine, 6 œufs et 200 g de beurre.
Quelles quantités d'ingrédients sont nécessaires pour fabriquer 16 brioches ? 4 brioches ?

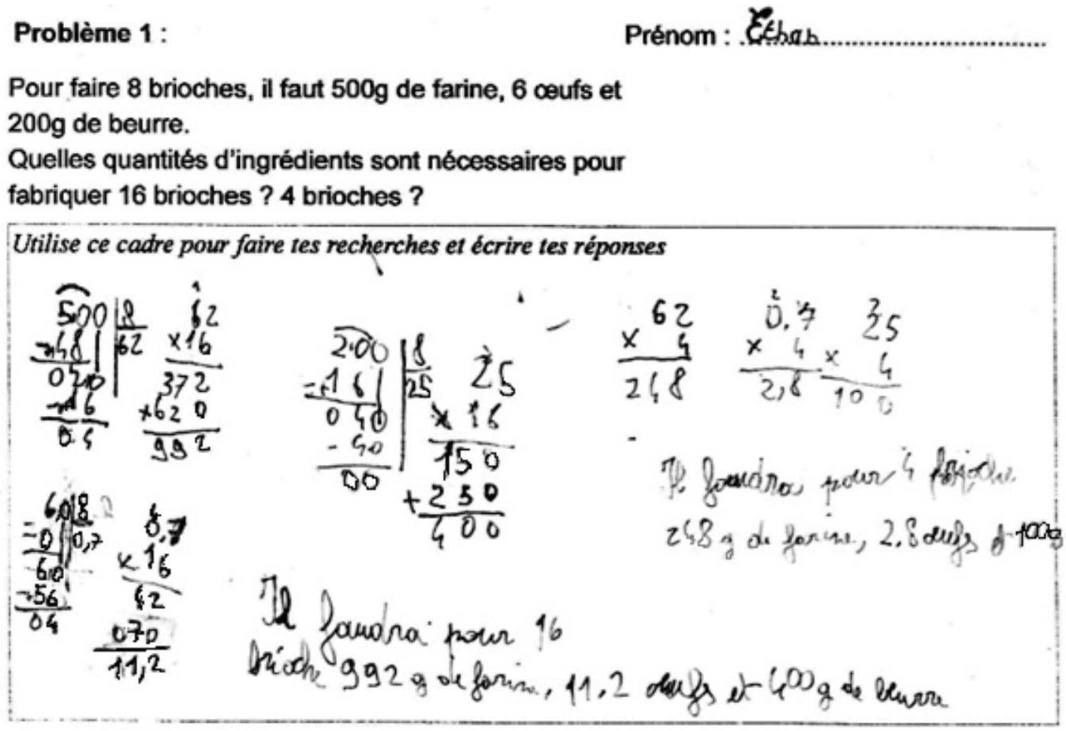
Problème 2 :
Un bébé pèse 4 kilos à 1 mois.
Combien pèsera-t-il à 12 mois ?

Problème 3 :
Pour une sortie scolaire, on réserve des bus pouvant transporter 40 personnes maximum.
Combien faut-il réserver de bus pour 50 personnes ?
Pour 100 personnes ?

Problème 4 :
Arthur a 6 piles identiques qui pèsent 18 g en tout.
Combien pèsent 8 piles ?

1) Quelle notion mathématique ces problèmes permettent-ils de consolider ?
2) Donner un argument pour justifier la pertinence de proposer les problèmes 2 et 3 dans cette séance.
3) Analyser la production d'Ethan (procédures, réussites et erreurs) au problème 1 (cf. Annexe 1).
4) Analyser les productions (procédures, réussites et erreurs) de Léandre et Aboubakr au problème 3 (cf. Annexe 2).
5) Décrire deux procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre pour résoudre le problème 4.

Annexe 1


Problème 1 : Prénom : Ethan

Pour faire 8 brioches, il faut 500g de farine, 6 œufs et 200g de beurre.
Quelles quantités d'ingrédients sont nécessaires pour fabriquer 16 brioches ? 4 brioches ?

Utilise ce cadre pour faire tes recherches et écrire tes réponses

Il faudra pour 4 brioche 248 g de farine, 2.8 œufs et 100g de beurre

Il faudra pour 16 brioche 992 g de farine, 11.2 œufs et 400g de beurre

Annexe 2

Problème 3 :

Prénom : Léandre

Pour une sortie scolaire, on réserve des bus pouvant transporter 40 personnes maximum.
Combien faut-il réserver de bus pour 50 personnes ?
Pour 100 personnes ?

Utilise ce cadre pour faire tes recherches et écrire tes réponses

un bus 40 perssones

desxièmes 10 perssonnes

deux autres bus 100 personnes

Il faudras deux bus pour 50 perssones et quatra bus pour 100 perssones

Problème 3 :

Prénom : Aboubakr

Pour une sortie scolaire, on réserve des bus pouvant transporter 40 personnes maximum.
Combien faut-il réserver de bus pour 50 personnes ?
Pour 100 personnes ?

Utilise ce cadre pour faire tes recherches et écrire tes réponses

50
× 40
00
+ 2000
2000

100
~~4~~
40
×
000
+ 4000
4000

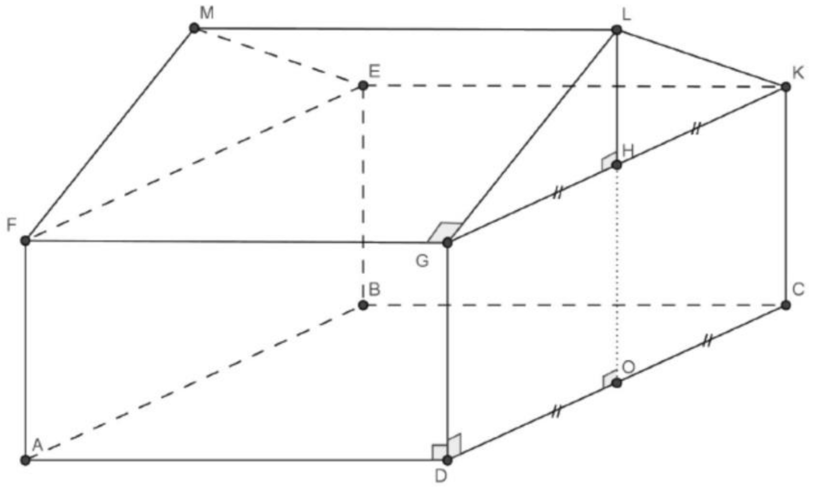
Pour 50 perssonn il faut reservé 2000 bus.

Pour 100 personne : 4000 bus.

GROUPEMENT 5 – avril 2018

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

Le propriétaire d'une maison individuelle souhaite construire dans son jardin une dépendance du type abri de jardin.



Les dimensions du bâtiment sont les suivantes : AF = 2,6 m ; AD = 5 m ; DC = 6 m et LO = 4,2 m.
On admet que les sept quadrilatères ABCD, ADGF, DCKG, CKEB, BEFA, GLMF et KEML sont des rectangles.

PARTIE A : le bâtiment

1) Déterminer la surface au sol ABCD du bâtiment.
2) Vérifier que le volume du bâtiment est 102 m^3.

PARTIE B : le toit

1) Aire de la surface à couvrir
   a) Déterminer la longueur LG.
   b) Montrer que l'aire du toit est 34 m^2.
2) Le propriétaire souhaite, pour des raisons de coût, utiliser des tuiles dites « mécaniques ».
   Pour cela, la pente de la surface sur laquelle on pose les tuiles, mesurée par l'angle $\widehat{HGL}$, doit être comprise entre 25° et 60°.
   La pente $\widehat{HGL}$ du toit permet-elle d'utiliser ce type de tuiles ?
3) Le propriétaire opte pour des tuiles plates rectangulaires « petit moule » ayant une largeur de 23,5 cm et une longueur de 32 cm.
   Le propriétaire recherche des informations pour estimer le nombre de tuiles à acheter.
   - Un site internet estime que pour ce type de tuiles il faut prévoir 20 tuiles au mètre carré pour prendre en compte les découpes et les chevauchements.
   - Un magazine professionnel estime qu'il faut déterminer le nombre de tuiles nécessaires pour couvrir la surface du toit et prévoir un tiers de tuiles en plus pour prendre en compte les découpes et les chevauchements.

   Avec laquelle de ces deux estimations obtient-on le nombre de tuiles le plus élevé ?
4) Pour faire couvrir le toit avec ces tuiles, le propriétaire hésite entre deux possibilités :

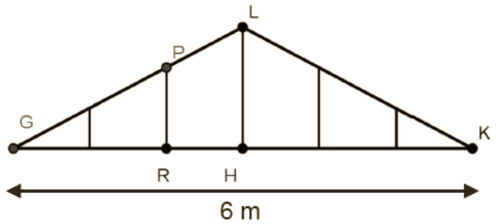
   Possibilité 1 : faire effectuer la totalité des travaux par une entreprise. Elle demande 60 € pour couvrir un mètre carré de toit, matériaux compris.

Possibilité 2 : il achète lui-même 700 tuiles (il décide d'en prendre un peu plus pour plus de sécurité) au prix de 1,35 € l'unité et fait effectuer la pose par une entreprise qui facture 900 € pour cette pose.

Quelle possibilité coûte le moins cher au propriétaire ?

PARTIE C : les frontons

Pour décorer la partie de forme triangulaire le propriétaire décide de poser une poutre verticale tous les mètres pour obtenir un effet de « colombage » sur les deux frontons.



1) Déterminer la longueur PR. On donnera le résultat en mètre, arrondi au centimètre.
2) Le vendeur affirme que le propriétaire aura besoin d'une longueur de bois égale à trois fois la longueur LH pour décorer un fronton. A-t-il raison ?

PARTIE D : maquette

Léo le fils du propriétaire a réalisé une maquette du bâtiment à l'échelle. La surface au sol de sa maquette, correspondant au rectangle ABCD, a une aire de 480 cm^2.

1) Déterminer l'échelle de la maquette.
2) En déduire le volume, en centimètre cube, de la maquette.

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Pour chacun des problèmes suivants, indiquer laquelle des cinq réponses proposées répond à la question posée.
Aucune justification n'est attendue.

1) Il y avait cinq perroquets dans la cage et leur prix moyen était de 5000 €. Un jour, pendant le nettoyage de la cage, le plus beau des perroquets s'est envolé. Le prix moyen des quatre perroquets restants est maintenant de 4000 €. Combien coutait le perroquet qui s'est envolé ?

   A 6000 € — B 100000 € — C 5500 € — D 2000 € — E 9000 €

2) Michel a 42 cubes identiques dont la longueur d'une arête est de 1 cm. Il construit un pavé en utilisant tous les cubes. Le périmètre de la face posée sur la table est de 18 cm. Quelle est la hauteur du pavé ?

   A 1 cm — B 2 cm — C 3 cm — D 4 cm — E 5 cm

3) Raphaël met 15 minutes pour traverser la forêt et revenir sans s'arrêter. Sa vitesse moyenne à l'aller est de 5 mètres par seconde et au retour de 4 mètres par seconde. Quelle est la largeur de la forêt traversée ?

   A 1,8 km — B 2 km — C 2,5 km — D 4 km — E 4,05 km

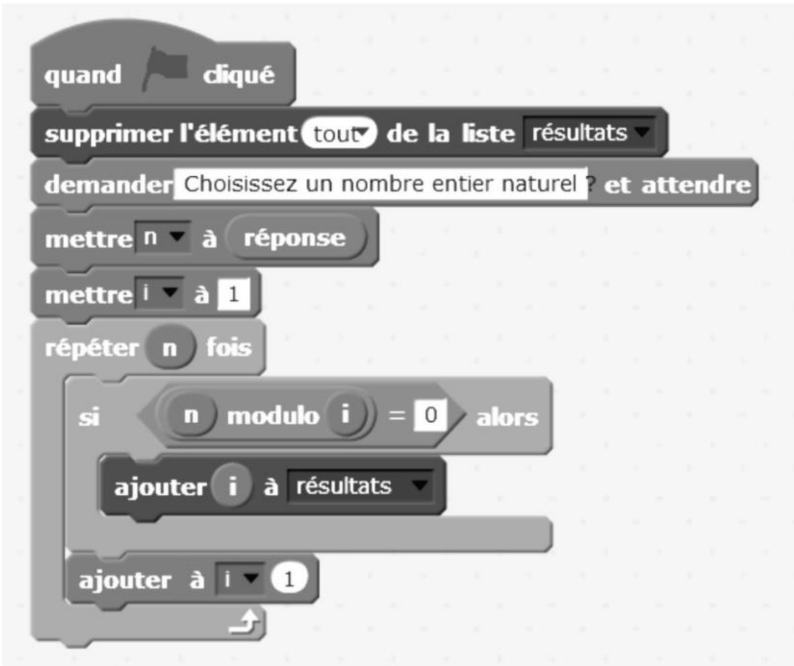
Exercice 2

Pour faire de la confiture, Grand-père ajoute à des mirabelles une masse de sucre égale aux quatre cinquièmes de la masse des fruits dénoyautés. La cuisson fait perdre 25% de la masse du mélange. Après la cuisson, la confiture est conditionnée dans des pots de 500 g. Les pots doivent être remplis pour une bonne conservation.

1) Aujourd'hui Grand-père a récolté des mirabelles ; après les avoir dénoyautées, il a obtenu 5 kg de fruits. Combien de pots de confiture peut-il remplir ?
2) La masse de confiture obtenue par le procédé suivi par Grand-père est-elle proportionnelle à la masse de mirabelles dénoyautées ? Justifier votre réponse.
3) Grand-père souhaite obtenir 18 pots de confiture. Déterminer la masse *m* minimum de mirabelles dénoyautées que Grand-père devra prévoir. On arrondira la masse à l'hectogramme près.

Exercice 3

Le programme ci-dessous est utilisé.



On rappelle qu'une « liste » est une suite d'éléments, ici une suite de nombres. Par exemple, (17 ; 245 ; 32) est une liste de trois nombres.

On rappelle également que la fonction (a modulo b), où **a** et **b** sont des entiers naturels, renvoie le reste de la division euclidienne de **a** par **b.**

Ainsi, (10 modulo 3) renvoie le nombre 1 car $10 = 3 \times 3 + \mathbf{1}$,

et (35 modulo 7) renvoie le nombre 0 car $35 = 5 \times 7 + \mathbf{0}$.

1) Que va contenir la liste « résultats » une fois le programme exécuté, si l'utilisateur entre le nombre 4 ?
2) L'utilisateur entre un nombre entier naturel non nul.
   a) Que va contenir la liste « résultats » une fois le programme exécuté ?
   b) Que peut-on dire sur le nombre entré par l'utilisateur si la liste ne contient qu'un nombre une fois le programme exécuté ?
   c) Que peut-on dire sur le nombre entré par l'utilisateur si la liste contient exactement deux nombres une fois le programme exécuté ?

Exercice 4

On a tracé un segment de 6,5 cm. À partir de ce segment, on cherche à construire un triangle en utilisant les valeurs obtenues par le lancer de deux dés cubiques équilibrés de couleurs différentes dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6. La valeur obtenue par chacun des deux dés déterminera les longueurs, en centimètre, des deux autres côtés du triangle.

1) Le lancer des dés donne les nombres « 4 » et « 5 ». Construire le triangle que ce lancer permet d'obtenir.
2) Quelle condition doivent remplir les deux longueurs obtenues avec les dés pour que le triangle soit constructible ?
3) Quelle est la probabilité d'obtenir un triangle constructible en effectuant cette expérience aléatoire ?
4) On sait que l'on a obtenu un triangle constructible en effectuant cette expérience aléatoire.
   Quelle est la probabilité pour qu'il soit isocèle ?

TROISIEME PARTIE (14 points)

Cette partie est constituée de trois situations indépendantes.

SITUATION 1

1) Le problème suivant est proposé à une classe de CM2.

> *Une boîte de sucres contient des morceaux de sucre tous identiques.*
>
> *30 morceaux de sucre pèsent 240 grammes.*
> *50 morceaux de sucre pèsent 400 grammes.*
> *Dans chaque cas, complète la réponse.*
>
> *Question 1 : 60 morceaux de sucre pèsent…*
>
> *Question 2 : 80 morceaux de sucre pèsent…*
>
> *Question 3 : 20 morceaux de sucre pèsent…*

Quelle est la principale notion du programme de cycle 3 abordée par ce problème ?

2) Voici huit réponses d'élèves à ce problème, codées de A à H.

	Réponse de l'élève	Écrits de recherche
A	60 morceaux de sucre pèsent …*480 grammes*	240 × 2 = 480
B	60 morceaux de sucre pèsent …*480 grammes*	400 + 80 = 480
C	60 morceaux de sucre pèsent …*24 000 grammes*	400 × 60 = 24 000
D	20 morceaux de sucre pèsent …*160 grammes*	400 – 240 = 160
E	20 morceaux de sucre pèsent …*160 grammes*	240 : 30 = 8 20 × 8 = 160
F	20 morceaux de sucre pèsent …*160 grammes*	60 : 3 = 20 480 : 3 = 160
G	20 morceaux de sucre pèsent …*230 grammes*	240 – 10 = 230
H	80 morceaux de sucre pèsent …*640 grammes*	240 + 400 = 640

a) Deux des réponses sont erronées. Les repérer et les analyser.

b) Analyser et classer les procédures des autres réponses.

3) L'enseignant souhaite amener ses élèves à recourir à la procédure de retour à l'unité. Le problème suivant figure dans leur manuel :

« *Pour la fête de fin d'année de l'école de rugby, on vend des paquets de chocolat. Karim achète 5 paquets et paie 8€. Dellia veut acheter 15 paquets, combien va-t-elle payer ?* ».

Proposer une modification des données de cet énoncé pour lui permettre d'atteindre cet objectif.

SITUATION 2

Lors d'une séance de calcul, l'enseignant relève ces quatre réponses d'élèves :

a. $2{,}3 \times 10 = 2{,}30$	b. $\frac{1}{4} = 1{,}4$
c. $45{,}6 < 45{,}13$	d. $2{,}15 + 17{,}2 = 19{,}17$

1) Pour chaque réponse d'élève, émettre une conjecture sur le raisonnement erroné qui a pu conduire à l'erreur faite.

2) Proposer deux situations de remédiation pour amener l'élève qui a donné la réponse c. à comprendre son erreur.

SITUATION 3

Dans une classe de CM2, un enseignant propose le problème ci-dessous :

Dédé sur une balance

En utilisant les informations données par ces trois dessins, détermine combien pèsent Dédé, le petit Francis et le chien Boudin.

D'après Deledicq A. et Missenard C., *Encyclopédie Kangourou des mathématiques au collège*, ACL éditions, 1996.

Dans les programmes de mathématiques pour le cycle 3, les six compétences travaillées en mathématiques sont les suivantes : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer.

Deux productions d'élèves sont présentées ci-dessous.

1) Analyser les productions de chaque élève au regard des deux compétences *communiquer* et *raisonner*.

2) En quoi les deux élèves ont-ils mobilisé la compétence *modéliser ?*

Production de Nina :

Dédé pèse : 125 Kg

Francis pèse : 20 Kg

Boudin pèse : 15 Kg

Dédé + Boudin	Dédé + Francis	Francis + Boudin
140 Kg	145 Kg	35 Kg

Boudin	Dédé	Francis	Dédé
~~−10 Kg~~	~~= 130~~	~~−15 Kg~~	~~= 130 Kg~~
−15 Kg	= 125	−20 Kg	= 125 Kg

~~10 + 15 = 25 c'est faux~~

15 + 20 = 35 c'est juste

Production de Yohan :

Réponse : le grand Dédé fait 125 Kg petit francis fait 20 Kg et le chien Boudin fait 15 Kg

Justification : Je me suis dit que petit francis faisait 5 Kg de plus que chien Boudin parce que peti francis et Grand Dédé faisaient en tout 145 Kg et Gra d Dédé et chien Boudin faisaient en tout 140 Kg ~~alors~~. Et je me dit que peut-être petit francis faisai 20 Kg et et chien Boudin 15 kg et j'ai fait 145 Kg 20 Kg = 125 et 140 − 15 = 125 et j'ai tarouvé que Grand Dédé faisaient 125 Kg petit francis faisai 20 et chien Boudin faisai 15 Kg.

CORRIGÉS DES CINQ SUJETS 2018

MISE AU POINT À PROPOS DE LA PROPORTIONNALITÉ[1]

La notion de « proportionnalité » est très présente dans les sujets du CRPE. Il nous semble important de faire une mise au point sur le vocabulaire utilisé pour parler des propriétés afférentes, en cohérence avec les documents ressources publiés sur Eduscol.

À toute situation de proportionnalité, on peut associer une fonction linéaire qui traduit la relation liant les deux grandeurs en présence. Cette fonction décrit et généralise la situation. De manière générique, on peut noter f cette fonction linéaire.
Les deux propriétés principalement citées pour décrire une procédure ou analyser une situation sont les suivantes :

(A) $pour\ tous\ réels\ x\ et\ y\ \ on\ a\quad f(x+y)=f(x)+f(y)$
(B) $pour\ tous\ réels\ k\ et\ x\ \ on\ a\quad f(k\times x)=k\times f(x)$

On montre, par exemple dans [simard2012] que les propriétés (A) et (B) sont des propriétés caractéristiques d'une fonction linéaire (sous réserve d'une condition de continuité de la fonction f).

La propriété (A) est communément appelée *propriété additive* ou *propriété de linéarité pour l'addition.*
La propriété (B) est communément appelée *propriété multiplicative* ou *propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre* ou encore *propriété d'homogénéité*.

La locution « propriété de linéarité pour l'addition » est redondante, nous préférerons « propriété additive » pour désigner la propriété (A). Nous choisirons, de même, la locution « propriété multiplicative » pour désigner la propriété (B). Le terme mathématique « homogénéité » est moins connu du public auquel s'adresse ce document donc nous ne l'utiliserons pas.

Une situation de proportionnalité met en jeu deux grandeurs liées par un coefficient multiplicateur, on passe d'une grandeur à l'autre en multipliant par un nombre a. Ce nombre est appelé *coefficient de proportionnalité* de la situation. La fonction linéaire sous-jacente est définie par $f(x)=a\times x$.

Il convient de distinguer les multiples significations de ce nombre a :

- a est le *coefficient de proportionnalité* lorsque l'on considère la structure multiplicative de la situation (dans ce cas, il s'agit d'une grandeur quotient et il s'exprime dans l'unité quotient des unités en jeu, par exemple des « euros par tartelettes ») ;
- a est la *valeur commune des rapports* des deux grandeurs en jeu lorsque l'on considère la situation en terme de *rapports égaux* (dans ce cas, il s'agit d'une grandeur quotient et il s'exprime dans l'unité quotient des unités en jeu, par exemple des « euros par tartelettes ») ;
- a est le *coefficient* qui définit la *fonction linéaire* associée à la situation de proportionnalité lorsque l'on considère la situation d'un point de vue *fonctionnel* (dans ce cas, il s'agit d'un nombre sans unité appelé scalaire) ;
- $a=f(1)$ est la *valeur de l'unité* (ou *valeur pour « un »*) lorsque l'on considère une procédure de *passage à l'unité* (dans ce cas, il s'agit de la mesure d'une grandeur et il s'exprime dans l'unité en jeu, par exemple des « euros ») ;
- a est le *coefficient directeur de la droite représentative de la fonction linéaire* associée à la situation de proportionnalité lorsque l'on se place dans le cadre graphique. On peut également dire que a est la *pente* ou l'*inclinaison* de la droite représentative de la fonction linéaire associée (dans ce cas, il s'agit d'un nombre sans unité appelé scalaire).

[1] **Référence :**
[simard2012] Simard A., « Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique », Petit x, n° 89, 2012, 51-63

Ces distinctions permettent d'être précis lorsque l'on décrit une procédure. Une procédure de retour à l'unité insiste sur la *valeur pour « un »*, alors qu'une procédure de recherche du coefficient de proportionnalité insiste sur le coefficient multiplicatif qui lie une grandeur à l'autre.

Le tableau de proportionnalité est un tableau de valeurs de la fonction linéaire associée à la situation. La construction d'un tel tableau relève d'une compétence d'organisation et de gestion de données. Cette structure s'avère efficace pour clarifier une situation de proportionnalité, en particulier identifier le statut des différentes données, éventuellement mieux « visualiser » des liens entre les nombres présents (correspondant à une même grandeur ou liés par la relation), et pour schématiser la procédure utilisée par l'élève. Les propriétés additive et/ou multiplicative sont généralement représentées par des flèches avec un symbole « $+$ » ou « $\times$ », le coefficient de proportionnalité par une flèche avec « $\times\, a$ » qui « fait passer » d'une grandeur à l'autre, le passage à l'unité est exprimé en ajoutant, le cas échéant, une ligne ou une colonne avec la valeur pour « un ». Un tableau de proportionnalité ne donne pas la réponse à la recherche d'une quatrième proportionnelle, c'est une schématisation mais pas une technique de résolution.

Remarque :

Lorsque l'élève considère l'utilisation d'un tableau comme une technique de résolution, il peut être amené à conclure que tout tableau à double entrée est un tableau de proportionnalité (ce qui est une erreur fréquente).

Finalement il semble important de faire le point sur trois procédures particulières :

- « le passage à l'unité »,
- « la règle de trois »,
- « le produit en croix ».

Pour cela on se donne un exemple de situation tiré de la partie 3.C. du sujet du Groupement 2 du CRPE 2014.

Lorsque je fais une mousse au chocolat pour 8 personnes, j'utilise 6 œufs. Quand je fais une mousse au chocolat pour 12 personnes, j'utilise 9 œufs. Combien faudra-t-il d'œufs si je fais une mousse au chocolat pour 20 personnes ?

La procédure de *passage à l'unité* consiste à chercher le nombre d'œufs pour 1 personne puis à multiplier ce résultat par 20 pour répondre à la question. Dans cet exemple, s'il faut 6 œufs pour 8 personnes, il faut $6 : 8 = 0{,}75$ œuf par personne, et donc $0{,}75 \times 20 = 15$ oeufs pour 20 personnes.

Remarque :

- *dans cette procédure, le premier calcul est une division, le second est une multiplication. Le résultat de la division peut être entier, décimal ou rationnel non décimal… ce qui représente une difficulté selon le niveau de l'élève ;*
- *si le résultat de cette division est non décimal, l'utilisation d'une valeur approchée peut donner un résultat final approximatif et faux (par exemple : pour 3 personnes il faut 2 œufs, donc pour une personne il faut $2 : 3 \approx 0{,}66$ œufs donc pour 30 personnes il faut $0{,}66 \times 30 = 19{,}8$ œufs… au lieu de 20 œufs) ;*
- *le résultat de la division peut être difficile à re-contextualiser car 0,75 œuf par personne n'a pas beaucoup de sens dans la réalité.*

La procédure de *la règle de trois* consiste à répondre à la question en trois temps sans faire de calculs intermédiaires.

S'il faut 6 œufs pour 8 personnes

alors il faut huit fois moins pour 1 personne, soit $\frac{6}{8}$ œufs pour 1 personne

et il faut vingt fois plus pour 20 personnes, soit $20 \times \frac{6}{8} = \frac{20 \times 6}{8} = \frac{120}{8} = 15$ œufs pour 20 personnes.

Remarque sur le calcul du résultat :

- *dans cette procédure, le premier calcul est une multiplication, le second est une division ;*
- *le résultat de la multiplication* 20×6 *n'a aucun sens vis à vis du contexte de l'énoncé ;*
- *l'utilisation de l'égalité* $20 \times \frac{6}{8} = \frac{20 \times 6}{8}$ *fait appel à une propriété du calcul fractionnaire ;*
- *le fait de « multiplier puis diviser » peut donner des calculs plus simples que « diviser puis multiplier »*

(dans l'exemple cité $\dfrac{20 \times 6}{8} = \dfrac{120}{8} = 15$ *est une suite de calculs dans les entiers, alors que le calcul* $20 \times \dfrac{6}{8} = 20 \times 0{,}75 = 15$ *nécessite un passage dans les décimaux).*

La procédure du *produit en croix* est vue au collège (programme de la classe de quatrième). Cette procédure consiste à ranger les valeurs en jeu dans un tableau (de proportionnalité) et à faire un calcul (multiplication puis division ou division puis multiplication).

$20 \times 6 : 8 = 15$

8	6
20	?

Remarque :

Il s'agit d'une procédure dé-contextualisée et purement technique qui masque le sens de la notion de proportionnalité. Cette procédure ne fait pas partie du programme de l'école élémentaire.

MISE AU POINT SUR LE CHOIX DES EXPRESSIONS UTILISÉES À PROPOS DE L'ÉCRITURE DES NOMBRES

L'expression **« écriture d'un nombre »** fait référence aux différentes écritures possibles pour un même nombre.

Pour les nombres entiers, on distingue :

- **L'écriture à l'aide des mots nombres** est la transcription écrite de notre système de numération orale. Nous préférons cette expression à l'expression « écriture en lettres », qui peut prêter à confusion avec « écriture algébrique » ou l'écriture en chiffres romain par exemple.

De leur côté, les programmes parlent de « noms des nombres », ceux-ci pouvant être constitués d'un ou plusieurs mots nombres.

- **L'écriture en chiffres** : celle-ci dépend du système de numération utilisé, en particulier des chiffres (les signes) utilisés et de la base choisie ; celle-ci va permettre l'utilisation d'un nombre fini de chiffres pour écrire tous les nombres.

Lorsque la base de numération est dix, on parle d'**écriture décimale**.
Les programmes parlent « d'écriture usuelle » ou indifféremment « d'écriture en chiffres » et « d'écriture chiffrée ».
Lorsque la base de numération est deux, on parle d'**écriture binaire**.
Lorsque la base de numération est soixante, on parle d'**écriture sexagésimale**.

Attention à l'utilisation du terme "chiffre". On écrit le nombre 15 en dessinant le chiffre 1 puis le chiffre 5. Mais dans une consigne du type « Prends 2 jetons », 2 est un nombre et non un chiffre, puisqu'il exprime une quantité.

On rencontre aussi des écritures liées aux différentes opérations :

- **Écriture additive** : c'est l'écriture d'un nombre sous la forme d'une somme.

Par exemple :

$5 + 2$ est une écriture additive du nombre sept.
$3 + 3 + 3 + 3 + 3$ est une écriture additive du nombre quinze.

- **Écriture multiplicative** : c'est l'écriture d'un nombre sous la forme d'un produit.

Par exemple :

6×10 est une écriture multiplicative du nombre soixante.
$2 \times 3 \times 5 \times 7$ est une écriture multiplicative du nombre deux-cent-dix.

- **Décomposition canonique** : ce sont des écritures qui font référence à la valeur des chiffres selon leur position (« canons » de la numération, les puissances de 10), par exemple $437 = 4 \times 100 + 3 \times 10 + 7$.

Dans les programmes, « l'écriture en ligne mixte » désigne un type de décomposition mêlant décomposition additive et multiplicative. Par exemple $437 = 43 \times 10 + 7$ ou $437 = 2 \times 220 - 3$.

Dans les programmes de cycle 2, on trouve l'expression « l'écriture en unités de numération » qui désigne des écritures du type « 5d 6u », mais aussi « 4d 16u » ou « 6u 5d » pour 56.

L'écriture de nombres non entiers amène l'utilisation d'autres écritures :

- **Les écritures fractionnaires**. Ce sont les écritures du type

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{238}{10}, \quad \frac{5}{1}, \quad \frac{20}{5}, \quad \frac{2{,}2}{3} \quad \ldots$$

On réserve le terme de **fraction** aux écritures fractionnaires dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers.

Les nombres rationnels sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction.

Il n'y a pas unicité de l'écriture d'un nombre rationnel sous forme de fraction :

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}$ sont des écritures fractionnaires du même nombre.

De même $\frac{4}{3}, \frac{8}{6}, \frac{12}{9}$ sont des écritures fractionnaires du même nombre.

Une **fraction décimale** désigne une écriture fractionnaire dont le dénominateur est 10, 100, 1000… (ou toute autre puissance de 10).

Les nombres décimaux sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.

$\frac{3227}{100}$ est un nombre décimal, mais aussi $\frac{1}{2}$ qui peut s'écrire $\frac{5}{10}$.

- **L'écriture à virgule**.

L'écriture à virgule est une convention d'écriture des nombres.

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}$ sont des écritures du nombre dont l'écriture à virgule est 0,5.

L'écriture à virgule d'un nombre décimal s'appelle son écriture décimale. Elle peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres.

Les nombres non décimaux peuvent aussi s'écrire avec une virgule, mais leur écriture comporte alors une infinité de chiffres :

- Périodique dans le cas d'un rationnel ; par exemple : $\frac{4}{3} = 0{,}66666\ \ldots$
- Non périodique dans le cas d'un réel non rationnel (cas de l'écriture à virgule de π par exemple).

On proscrira l'expression « nombre à virgule », car « à virgule » est une caractéristique de l'écriture du nombre et non du nombre lui-même.

MISE AU POINT SUR LA RÉDACTION DES SOLUTIONS DES PROBLÈMES PORTANT SUR LES CALCULS DE GRANDEURS

Il s'agit dans les formulations utilisées de bien distinguer les trois concepts intervenants, à savoir l'**objet**, la **grandeur** et la **mesure**, et d'éviter au maximum les abus de langage.

Le langage courant et le langage des manuels contiennent de nombreuses formes incorrectes, où sont confondues grandeur et mesure.

Exemples :

On écrira :	plutôt que
« un triangle équilatéral a ses trois côtés de même longueur » ;	« un triangle équilatéral a ses trois côtés de même mesure » ;
« la longueur du segment est 3 cm ».	« la mesure du segment est 3 cm ».

D'autre part, certains mots sont polysémiques : par exemple diamètre désigne parfois un segment ou une longueur ou la mesure de cette longueur.

Dans ces annales, on utilise le verbe « mesurer » uniquement pour l'action de mesurer avec un instrument ou des unités étalons.
On utilisera des expressions telles que « la hauteur de la tour Eiffel est (ou vaut) 320 m », plutôt que la formulation incorrecte : « la tour Eiffel mesure 320 m ».

Les programmes de cycle 3 précisent : « La notion de mesure d'une grandeur, consiste à associer, une unité étant choisie, un nombre (entier ou non) à la grandeur considérée. Il s'agit de déterminer combien d'unités ou de fractionnements de l'unité sont contenus dans la grandeur à mesurer. Les opérations sur les grandeurs permettent également d'aborder les opérations sur leurs mesures… »

Les programmes de cycle 4 indiquent que les élèves doivent « mener des calculs impliquant des grandeurs mesurables, notamment des grandeurs composées, <u>en conservant les unités</u>. »

Dans ces annales, nous nous conformerons autant que possible aux injonctions des programmes.

Exemples :

- Calcul de la somme de la masse de deux objets, l'un de masse 1 kg 800 g et l'autre de masse 450 g :
  1 kg + 800 g + 450 g = 1 kg + 1250 g = 2 kg + 250 g = 2,250 kg

- Calcul avec des grandeurs composées :
  La durée du parcours est égale au quotient de la distance parcourue par la vitesse du parcours :
  $$\frac{45\text{ km}}{30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 1{,}5\text{ h}$$

- Calcul du volume d'une pyramide à base carrée :
  $$\frac{1}{3} \times (7{,}5\text{ cm})^2 \times 10\text{ cm} = \frac{1}{3} \times 56{,}25\text{ cm}^2 \times 10\text{ cm} = 187{,}5\text{ cm}^3$$

- Calcul à l'aide du théorème de Thalès :
  $$\frac{\text{DJ}}{\text{DH}} = \frac{\text{JK}}{\text{HE}} \quad \text{donc} \quad \frac{\text{DJ}}{9\text{ cm}} = \frac{10\text{ cm}}{12\text{ cm}} = \frac{10}{12} \quad \text{et donc} \quad \text{DJ} = \frac{10}{12} \times 9\text{ cm} = 7{,}5\text{ cm}$$

Parfois, nous ne pourrons éviter certains abus :

De manière générale AB désigne la longueur du segment [AB] et on écrit par exemple AB = 3 cm. Mais, lorsque la lisibilité des calculs l'exige, on utilise aussi AB pour désigner la mesure de la longueur (une unité étant choisie), en étant conscient qu'il s'agit d'un abus de notation.

Exemples :

1) Un triangle ABC rectangle en A est tel que AB = 3 cm ; AC = 4 cm. Calculer BC.

Dans la correction de cet exercice, on note de la même manière les grandeurs AB, AC, BC et leur mesure pour effectuer les calculs sur les nombres.

$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 = 9 + 16 = 25$

$\mathrm{BC} = \sqrt{25} = 5$

La longueur du segment [BC] est 5 cm.

2) Dans un calcul à l'aide du théorème de Thalès :

$\frac{\mathrm{DJ}}{\mathrm{DH}} = \frac{\mathrm{JK}}{\mathrm{HE}}$ donc $\frac{12 - \mathrm{x}}{12} = \frac{\mathrm{JK}}{9}$ c'est - à - dire $\mathrm{JK} = \frac{9 \times (12 - x)}{12} = 0{,}75(12 - x)$

GROUPEMENT 1 – AVRIL 2018

PREMIÈRE PARTIE

A - Lecture des informations sur un pneumatique

1) Étude d'un pneumatique dont la cote est « 195/65 R15 68V »

a) Diamètre de la jante de ce pneumatique

La mesure en pouce du diamètre de la jante de ce pneumatique est donnée par le nombre qui suit la lettre R de sa cote.
Le diamètre de la jante vaut 15 pouces.
1 pouce = 2,54 cm donc 15 pouces $= 15 \times 2{,}54 \text{ cm} = 38{,}1 \text{ cm}$.

Le diamètre de la jante de ce pneumatique vaut 38,1 cm.

b) Hauteur de ce pneumatique

La mesure en millimètres de la largeur de ce pneumatique est donnée par le premier nombre de sa cote. La largeur est donc égale à 195 mm soit 19,5 cm.
Le deuxième nombre de la cote de ce pneu indique que la hauteur de ce pneu vaut 65% de sa largeur.

$$\frac{65}{100} \times 19{,}5 \text{ cm} = 0{,}65 \times 19{,}5 \text{ cm} = 12{,}675 \text{ cm}.$$

La hauteur de ce pneumatique vaut donc bien 12,675 cm.

c) Diamètre total de la roue

Pour calculer le diamètre total de cette roue, on doit prendre en compte le diamètre de la jante auquel on ajoute deux fois la hauteur du pneumatique.
$38{,}1 \text{ cm} + 2 \times 12{,}675 \text{ cm} = 63{,}45 \text{ cm}$.

Le diamètre total de la roue vaut 63,45 cm.

2) Cote d'un pneu radial selon les informations données

Calcul du premier nombre de la cote : la mesure de la largeur en mm

La largeur de ce pneu est égale à 20,5 cm soit 205 mm donc le premier nombre de sa cote est **205**.

Calcul du deuxième nombre de la cote : le pourcentage de la hauteur par rapport à la largeur

Calculons d'abord la hauteur du pneumatique :

$$\frac{63{,}19 \text{ cm} - 40{,}64 \text{ cm}}{2} = 11{,}275 \text{ cm}.$$

Passons ensuite au calcul du pourcentage demandé.

Méthode 1 : calcul du rapport entre la hauteur et la largeur

$$\frac{11{,}275}{20{,}5} = 0{,}55 = 55\%$$

Le deuxième nombre de la cote de ce pneu est **55.**

Méthode 2 : utilisation d'un tableau de proportionnalité

Recherchons le nombre manquant dans le tableau suivant, où il y a proportionnalité entre d'une part des mesures de longueurs et d'autre part le pourcentage de ces mesures de longueurs par rapport à la mesure de la largeur (toutes les mesures étant exprimées en cm).

	Largeur	Hauteur
Mesure en cm	20,5	11,275
Pourcentage	100	

On peut par exemple utiliser un produit en croix pour déterminer la valeur manquante :
$$\frac{11{,}275 \times 100}{20{,}5} = 55$$
Le deuxième nombre de la cote de ce pneu est **55.**

Calcul du nombre qui suit la lettre R de la cote : diamètre en pouces de la jante

La hauteur de la jante de ce pneu est égale à 40,64 cm et un pouce est égal à 2,54 cm.
Or $\frac{40{,}64 \text{ cm}}{2{,}54 \text{ cm}} = 16$ donc $40{,}64 \text{ cm} = 16 \times 2{,}54 \text{ cm} = 16$ pouces.
Le nombre qui suit la lettre R de la cote de ce pneu est **16.**

Recherche des indices de poids et de vitesse.

La lecture du tableau 1 nous indique que l'indice de poids correspondant à 412 kg est **77.**
La lecture du tableau 2 nous permet de trouver l'indice correspondant à la vitesse 270 km/h : la lettre **W.**

Finalement, la cote de ce pneu radial est « 205/55 R16 77W »

B - Distance d'arrêt

1) Distance d'arrêt à 90km/h sur route mouillée pour un conducteur vigilant

Conversion de la vitesse 90 km/h en m/s

Méthode 1

$$90 \text{ km/h} = \frac{90 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{90\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 25 \text{ m/s}.$$

Méthode 2

Dans cette méthode, on modélise le mouvement de la voiture, dont on connaît seulement la vitesse à l'instant du freinage, comme un mouvement (virtuel) à vitesse constante.
Une vitesse de 90 km/h signifie que si la voiture roulait pendant une heure elle parcourrait 90 km soit 90 000 m. Une heure contient 3 600 secondes (60 minutes par heure et 60 secondes par minute) donc , à la même vitesse, en 1s la voiture parcourrait 3600 fois moins de distance.
$$\frac{90\,000 \text{ m}}{3\,600} = 25 \text{ m}.$$
La vitesse au moment du freinage est donc égale à 25 m/s.

Remarque
La lecture du nombre entre parenthèses sous 90 dans le diagramme de la question 3 nous permet de vérifier ce résultat.

Calcul final de la distance d'arrêt par application de la formule $d_A = V \times t_R + kV^2$

$V = 25$ m/s, $t_R = 0{,}75$s et $k = 0{,}14$ car la route est mouillée.
$25 \times 0{,}75 + 0{,}14 \times 25^2 = 106{,}25$.

La distance d'arrêt d'un véhicule roulant à 90 km/h sur route mouillée est de 106,25 m.

Remarque
En toute rigueur, il faudrait écrire k = 0,14 s²/m, mais l'énoncé a négligé cette précision.

2) Proportionnalité ou non de la distance d'arrêt sur route sèche par rapport à la vitesse pour un conducteur vigilant

Dans le cas d'une route sèche ($k = 0{,}073$) pour un conducteur vigilant ($t_R = 0{,}75$), la distance d'arrêt est donnée par :
$d_A = V \times t_R + kV^2 = 0{,}75V + 0{,}073V^2$.

Méthode 1 : recherche de valeurs pour contredire la propriété multiplicative de linéarité

Calculons la distance d'arrêt pour une vitesse de 20 m/s (soit 72 km/h, pour indication car il n'était pas nécessaire de faire cette conversion pour répondre à la question).
$0{,}75 \times 20 + 0{,}073 \times 20^2 = 44{,}2$.
On obtient ainsi une distance d'arrêt égale à 44,2 m pour une vitesse initiale égale à 20 m/s.
Si la distance d'arrêt était proportionnelle à la vitesse, pour un véhicule allant deux fois plus vite, donc à 40 m/s, la distance d'arrêt serait également doublée, et serait égale à 88,4 m (44,2 m × 2).
Or pour 40 m/s, la formule donne : $0{,}75 \times 40 + 0{,}073 \times 40^2 = 146{,}8$, soit une distance d'arrêt égale à 146,8 m.
La distance d'arrêt n'est donc pas proportionnelle à la vitesse initiale.

Méthode 2 : recherche de valeurs pour contredire l'égalité des « produits en croix »

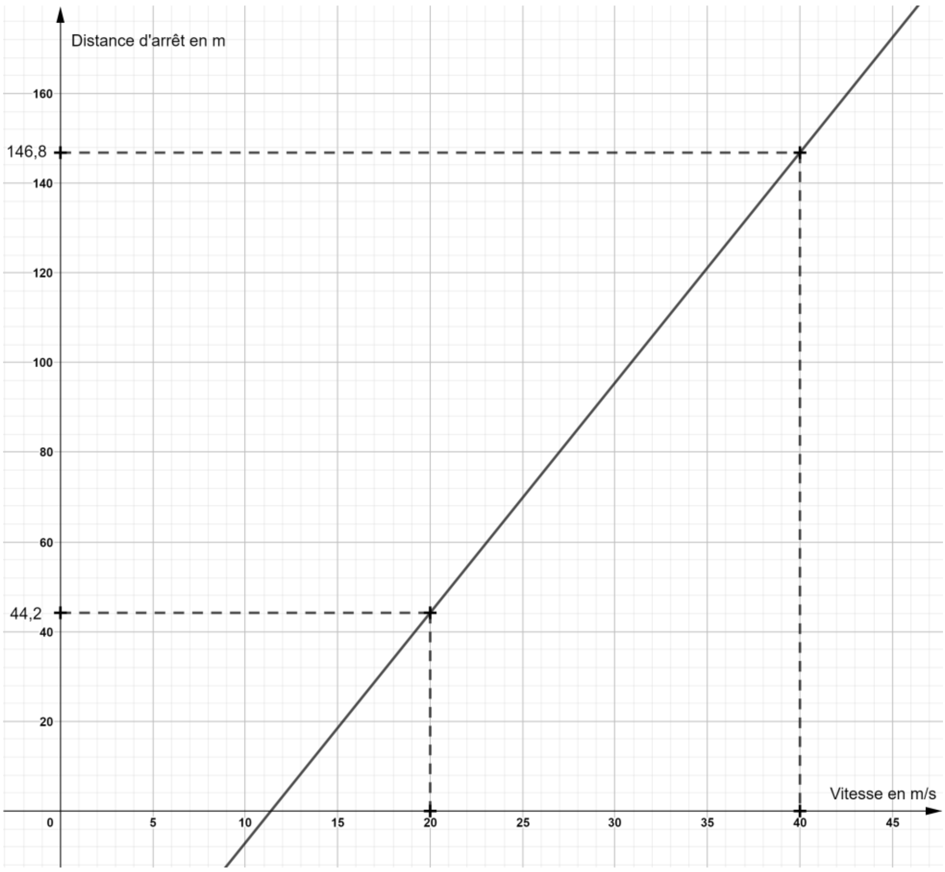
En reprenant les valeurs calculées ci-dessus (ou d'autres), on peut organiser ces données en les présentant dans un tableau.

Vitesse en m/s	20	40
Distance d'arrêt en m	44,2	146,8

Si ce tableau était un tableau de proportionnalité, alors les « produits en croix » seraient égaux.
Or ce n'est pas le cas, car $20 \times 146{,}8 = 2936$ et $40 \times 44{,}2 = 1768$.
La distance d'arrêt n'est donc pas proportionnelle à la vitesse initiale.

Méthode 3 : recherche de valeurs pour étudier la représentation graphique de d_A

En reprenant les valeurs calculées ci-dessus (ou d'autres), on peut placer dans un repère orthogonal les points de coordonnées (20 ; 44,2) et (40 ;146,8).



Si la distance d'arrêt était proportionnelle à la vitesse, alors ces points seraient alignés avec l'origine du repère. Le graphique ci-dessus montre que ce n'est pas le cas. La distance d'arrêt n'est donc pas proportionnelle à la vitesse initiale.

Remarque

Dans aucune des trois méthodes précédentes, on ne pouvait utiliser comme valeurs numériques les données du diagramme de la question 3 car il n'y est pas précisé que le conducteur est vigilant. On constate en effet, pour une vitesse de 50 m/s par exemple, que la distance d'arrêt sur le diagramme est de 245,5 m alors qu'en utilisant la formule pour un conducteur vigilant on obtient une distance d'arrêt de 220 m :
$0{,}75 \times 50 + 0{,}073 \times 50^2 = 220.$

Méthode 4 : étude de la linéarité de la fonction qui associe la distance d'arrêt à la vitesse

La formule $d_A = 0{,}75V + 0{,}073V^2$ peut être interprétée de la manière suivante : la distance d'arrêt est fonction de la vitesse, et cette relation peut être représentée par la notation fonctionnelle suivante : quelle que soit la vitesse V, $d_A(V) = 0{,}75V + 0{,}073V^2$.
Étudier la proportionnalité de la distance d'arrêt d'un véhicule par rapport à sa vitesse revient à étudier la linéarité de la fonction qui à un nombre V associe le nombre $0{,}75V + 0{,}073V^2$.
Cette fonction est la somme :

- d'une fonction linéaire (la fonction qui à V associe 0,75V est la fonction linéaire de coefficient 0,5) ;
- d'une fonction qui n'est pas linéaire (la fonction qui à V associe $0{,}073V^2$ est une fonction du second degré).

Elle n'est donc pas linéaire.

On en conclut que la distance d'arrêt n'est pas proportionnelle à la vitesse initiale.

3) Lecture de diagramme

Nous repérons sur le graphique de la page ci-contre les éléments qui ont permis de répondre aux questions posées.

a) Distance d'arrêt d'un véhicule roulant à 110 km/h

Elle est égale à **101 m.**

b) Distance parcourue pendant le freinage d'un véhicule roulant à 80 km/h

La distance parcourue pendant le freinage est la différence entre la distance d'arrêt et la distance parcourue pendant le temps de réaction soit : 57,7 m − 16,7 m = **41 m.**

c) Temps mis par un véhicule roulant à 130 km/h pour s'arrêter

Cette durée est égale à **6,76 s.**

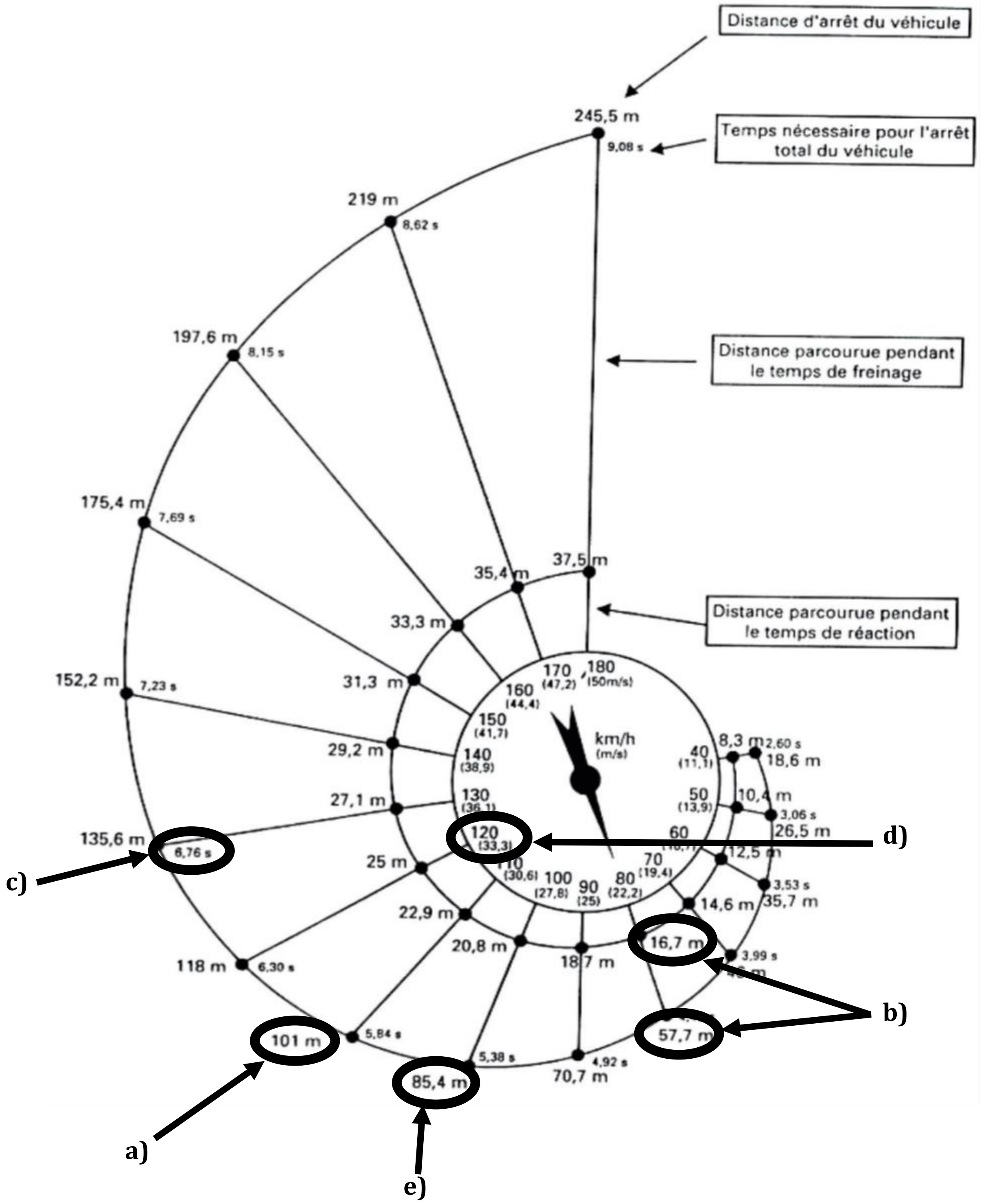
d) Vitesse d'un véhicule dont la distance de réaction est de 25 m

Cette vitesse est égale à **120 km/h**.

e) Un conducteur roulant à 27,8 m/s s'arrêtera-t-il avant un obstacle aperçu à 100 m ?

La lecture du diagramme nous donne une distance d'arrêt de 85,4 m pour une vitesse de 27,8 m/s.
Elle est inférieure à 100 m.

Oui, un conducteur roulant à 27,8 m/s, apercevant un obstacle à 100 m, pourra s'arrêter à temps.



Distance d'arrêt du véhicule
Temps nécessaire pour l'arrêt total du véhicule
Distance parcourue pendant le temps de freinage
Distance parcourue pendant le temps de réaction
km/h
(m/s)
245,5 m
9,08 s
219 m
8,62 s
197,6 m
8,15 s
175,4 m
7,69 s
152,2 m
7,23 s
135,6 m
6,76 s
118 m
6,30 s
101 m
5,84 s
85,4 m
5,38 s
70,7 m
4,92 s
57,7 m
3,99 s
35,7 m
3,53 s
26,5 m
3,06 s
18,6 m
2,60 s
37,5 m
35,4 m
33,3 m
31,3 m
29,2 m
27,1 m
25 m
22,9 m
20,8 m
18,7 m
16,7 m
14,6 m
12,5 m
10,4 m
8,3 m
180 (50m/s)
170 (47,2)
160 (44,4)
150 (41,7)
140 (38,9)
130 (36,1)
120 (33,3)
110 (30,6)
100 (27,8)
90 (25)
80 (22,2)
70 (19,4)
60
50 (13,9)
40 (11,1)
a)
b)
c)
d)
e)

C - Au cinéma

1) Circonférence en cm d'une roue de 54 cm de diamètre arrondie au millimètre près

Utilisons la formule du périmètre d'un cercle en fonction de son diamètre :

périmètre d'un cercle = π × diamètre de ce cercle

Le diamètre de la roue étant égal à 54 cm, nous obtenons une circonférence égale à 54π cm.
Un arrondi au millimètre près de cette longueur est 169,6 cm ou 169,7 cm.

La circonférence de cette roue, arrondie au millimètre près, est de 169,6 cm ou 169,7 cm.

Remarque

Il existe trois manières d'arrondir : au plus proche, par excès ou par défaut. Quand cela n'est pas imposé par l'énoncé, nous conseillons de choisir l'arrondi au plus proche, même si ce n'est pas obligatoire.
À ce propos, on pourra consulter le document ressource publié sur Eduscol, intitulé Nombres, mesures et incertitudes, disponible au lien suivant (consulté en mai 2018) :
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/PC/88/7/Nombres_mesures_et_incertitudes_222887.pdf

2) Tours de roue d'une voiture qui roule à 110 km/h

a) Nombre de tours par seconde de la roue

Calculons la distance parcourue par la roue en une seconde à 110 km/h.

En 1 h =3600 s, la roue parcourrait à cette vitesse 110 km,
donc en 1 seconde elle parcourt $\frac{110}{3\,600}$ km , soit environ 0,030556 km c'est à dire 3 055,6 cm, au mm près.

Calculons ensuite le nombre de tours fait par la roue en une seconde.

On vient de voir qu'en une seconde, la roue parcourt environ 3 055,6 cm.
On sait par ailleurs (d'après la question 1), qu'en un tour, la roue parcourt environ 169,6cm.
Une division permet d'en déduire le nombre de tours effectués en une seconde (on cherche combien de fois il y a 169,6 cm dans 3 055,6 cm) :
3 055,6 cm = 18 × 169,6 cm + 2,8 cm.

En une seconde, la roue fait environ 18 tours.

Remarque

En toute rigueur, il faudrait effectuer les calculs précédents en conservant les valeurs exactes.

On obtient alors : $\dfrac{\frac{11\,000\,000}{3\,600}\,cm}{54\pi\ cm} \approx 18{,}01$ *au centième de tour près.*

b) Nombre de tours de roue entre deux images

Remarque

« La caméra a une vitesse de défilement de 24 images par seconde » signifie qu'elle prend une photographie toutes les $\frac{1}{24}$ s. Ainsi, déterminer le nombre de tours fait par un pneu de la voiture « entre deux images » revient à chercher le nombre de tours faits par un pneu de la voiture pendant la durée qui s'écoule entre deux prises de photographies successives par la caméra, c'est-à-dire en $\frac{1}{24}$ s.

Pendant la durée d'affichage d'une image, c'est-à-dire pendant $\frac{1}{24}$ *s*, la roue fait 24 fois moins de tours que pendant une seconde.
En reprenant la valeur approchée calculée en a), on calcule et on obtient $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ ou 0,75.

Entre deux images, la roue fait environ trois-quarts de tour ou 0,75 tours.

Remarque

Comme pour la remarque de a), en ne prenant que des valeurs exactes, on obtient :

$$\frac{\frac{11\ 000\ 000}{3\ 600}}{54\pi} \times \frac{1}{24} \approx 0{,}75 \text{ à } 0{,}01\ près.$$

3) Vitesse pour laquelle on a l'impression que les roues ne tournent pas

Pour qu'un observateur ait l'impression, en regardant le film, que les roues ne tournent pas, il faut qu'à chaque photographie prise par la caméra, la roue soit dans une position où on ne remarque pas qu'elle a tourné. C'est en particulier le cas si la roue fait un nombre entier de tours complets entre chaque prise.

Remarque

D'après la question précédente, une vitesse égale à 110 km/h ne suffit pas, car on a vu qu'entre deux images, la roue fait environ trois quarts de tour. La vitesse cherchée est donc supérieure à 110 km/h.

La vitesse la plus faible permettant de remplir cette condition est celle qui permet à la roue de faire un tour complet en exactement $\frac{1}{24}$ s : cette vitesse est égale à 24 tours/s.
Exprimons-la en km/h.
1 h = 3600 s, donc 24 tours/s =24 × 3600 tours/h = 86 400 tours/h.
On a vu plus haut qu'en un tour la roue fait environ 169,6 cm (au mm près).
Or 86 400 × 169,6 cm = 14 653 440 cm = 146 535 m = 146,535 km.
La voiture a alors une vitesse d'environ 146,5 km/h.

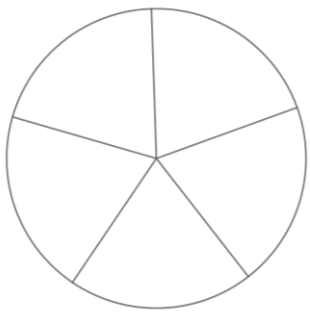
À la vitesse de 146,5 km/h (et pour tous ses multiples), on a l'impression que les roues ne tournent pas.

Remarque

En effectuant les calculs à partir de la valeur exacte de la mesure en cm de la circonférence de la roue, on obtient 86 400 × 54π cm/h ≈14 657 415 cm/h , soit 14 6,6 km/h à 0,1 km/h près.

Remarque

Si on suppose maintenant que les marquages du pneu (notamment les informations sur lesquelles portaient la partie A ne sont pas visibles, que la roue n'a aucun défaut, que la valve n'est pas visible et que les cinq branches sont rigoureusement identiques), le problème peut être modélisé par la recherche des rotations qui laissent invariante la figure ci-dessous :



C'est le cas des rotations qui ont pour centre, le centre du cercle, et pour angle, un multiple de $\frac{360}{5}$ *degrés.*

Pour la roue, cela signifie qu'après $\frac{1}{5}$ *de tour (ou un de ses multiples) l'image de la roue sera identique à la précédente. La vitesse minimale permettant de remplir cette condition est* $\frac{1}{5}$ *tour en* $\frac{1}{24}$ *s, soit* $\frac{24}{5}$ *tours par seconde.*

Cette vitesse est égale à 360 × $\frac{24}{5}$ *tours par heure, soit 17 280 tours par heure, soit environ 17 280 × 169,6 cm par heure. On obtient alors environ 29,3 km/h.*
Tous les multiples de cette vitesse répondent à la question.

DEUXIÈME PARTIE

EXERCICE 1

1) Volume du silo en m^3 arrondi au centième

Soit V le volume du silo. Il peut être calculé en faisant la somme du volume du cylindre et de celui du cône.
$V = V_{cylindre} + V_{cône}$

$V = \pi\ AB^2 \times AD + \frac{1}{3}(\pi\ AB^2 \times AS)$

$V = \pi\ \times (1{,}30\ m)^2 \times 2{,}40\ m + \frac{1}{3}(\pi \times (1{,}30\ m)^2 \times 1{,}60\ m)$

$V \approx 15{,}57\ m^3$ au centième de m^3 près.

Le volume du silo est d'environ 15,57 M^3 arrondi au centième de M^3 le plus proche.

2) Farine pour nourrir 48 vaches pendant 90 jours

48 vaches mangent chaque jour : $48 \times 3\ L = 144\ L = 0{,}144\ m^3$,
soit 90 fois plus pour 90 jours : $90 \times 0{,}144\ m^3 = 12{,}96\ m^3$.

$\frac{6}{7}$ du volume total du silo valent environ : $\frac{6}{7} \times 15{,}57\ m^3 \approx 13{,}35\ m^3$ ce qui est supérieur à $12{,}96\ m^3$.

L'éleveur aura assez de farine pour nourrir ses 48 vaches pendant 90 jours.

Remarque

L'erreur d'arrondi de la question 1) est inférieure à un centième de m^3. Multipliée par $\frac{6}{7}$, elle reste inférieure à un centième de m^3, ce qui garantit la validité de la comparaison.

3) Parallélisme des deux échelles

D'après la réciproque du théorème de Thalès dans le triangle HCN coupé par (BM), il suffit de vérifier les trois conditions
1) H, M, N sont alignés dans cet ordre,
2) H, B, C sont alignés dans cet ordre,
3) $\frac{HM}{HN} = \frac{HB}{HC}$
pour prouver que (CN) et (BM) sont parallèles.

1) et 2) sont vérifiés par hypothèse.
Pour l'ordre il s'agit d'un contrôle visuel sur la figure en l'absence d'un énoncé plus précis.

Vérifions 3).

Montrons tout d'abord que SH = AB et que SA = HB.
Le cône étant un cône de révolution, c'est un cône droit, donc son axe de révolution (SA) est perpendiculaire à sa base. Ainsi l'angle $\widehat{SAB}$ est droit.
On suppose que A, B, H, S sont dans un même plan (celui de la figure). Par conséquent le quadrilatère ABHS a trois angles droits- en H et S (par hypothèses) et en A (d'après ce qui précède)- donc ABHS est un rectangle. Comme les côtés opposés d'un rectangle ont même longueur,
SH = AB = 1,30 m et HB = SA = 1,60 m.

Calcul de HM, HN et HC
$HM = SM - SH = 2{,}1\ m - 1{,}30\ m = 0{,}80\ m.$
$HN = SN - SH = 3{,}3\ m - 1{,}30\ m = 2\ m.$
Il nous reste à calculer HC. Pour cela montrons que SDCH est un rectangle.
SDCH est un quadrilatère avec deux angles droits en S et en H (par hypothèses) et il a un angle droit en D - car (AD) est l'axe de révolution du cylindre et car S, A et D sont alignés. SDCH est donc un rectangle : ses côtés opposés ont même longueur, donc HC = SD.
Ainsi : $HC = SD = SA + AD = 1{,}60\ m + 2{,}40\ m = 4\ m.$

Calcul des rapports de la condition 3)
$\frac{\text{HM}}{\text{HN}} = \frac{0{,}80}{2} = 0{,}4$ et $\frac{\text{HB}}{\text{HC}} = \frac{1{,}60}{4} = 0{,}4$.
Les trois conditions de la réciproque du théorème de Thalès sont vérifiées ; nous pouvons en déduire que **les échelles sont bien parallèles.**

Remarque

Pour cette question, une validation visuelle ou instrumentée n'était pas suffisante.
Une des difficultés de la géométrie est qu'il faut distinguer ce que l'on voit sur le dessin que l'on valide visuellement (géométrie perceptive) et qui est intéressant pour avoir des idées (intérêt heuristique) de ce que l'on déduit des propriétés de la figure par un raisonnement déductif (géométrie des propriétés).
Il est souvent délicat d'établir des propriétés de la géométrie de l'ordre (à droite/à gauche ; au-dessus/au-dessous ; avant/après) et l'on se contente souvent, au collège, d'une validation visuelle parce qu'une validation déductive serait trop difficile à ce niveau. On pourra lire avec intérêt les documents ressources suivants :
Parzysz, Bernard. (2003). Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. Carnets de route de la Copirelem, Concertum, tome 2, éditeur ARPEME, Paris.
Eduscol (2016) Compétences travaillées en mathématiques : raisonner.
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/83/6/RA16_C4_MATH_raisonner_547836.pdf(consulté en mai 2018)

EXERCICE 2

1) Probabilité de gagner une télévision

On suppose que chaque billet a la même probabilité d'être vendu (impartialité du vendeur par rapport à l'acheteur). Autrement dit, on suppose l'équiprobabilité de la vente des billets.
Dans ces conditions, la probabilité de gagner une télévision est égale à la proportion de billets permettant de gagner une télévision parmi l'ensemble des billets vendus.
Ici deux billets permettent de gagner une télévision et 300 billets sont vendus au total.

Donc la probabilité de gagner une télévision est égale à $\mathbf{\frac{2}{300}}$ ou $\mathbf{\frac{1}{150}}$.

Remarque

Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1. L'expression courante « 1 chance sur 150 » qui ne répond pas à ce critère n'est donc pas correcte. Cela reste valable pour la question 2).

2) Probabilité de gagner un bon de réduction

De la même manière, 15 billets $(10 + 5)$ permettent de gagner un bon de réduction,

donc **la probabilité de gagner un bon de réduction est égale $\mathbf{\frac{15}{300}}$.**
On peut aussi exprimer cette réponse avec les écritures suivantes :
$\mathbf{\frac{5}{100}}$ ou $\mathbf{\frac{1}{20}}$ ou $\mathbf{0{,}05}$ ou $\mathbf{5\%}$ ou toutes fractions égales à $\frac{1}{20}$.

Remarque

L'écriture décimale, les écritures fractionnaires et l'écriture sous forme de pourcentage peuvent être proposées indifféremment car les valeurs sont exactes. Ce n'était pas le cas à la question 1.
Nous en profitons pour rappeler que toute valeur approchée doit être accompagnée de sa précision. Pour la question 1, si on veut donner la probabilité sous la forme d'une écriture décimale, il faut par exemple indiquer 0,006 au millième près.

3) Rentabilité de la loterie

a) Prix à fixer par l'organisateur pour ne pas perdre d'argent

Remarque

On suppose que l'organisateur vend tous les billets et qu'ils sont tous au même prix.
Par ailleurs, on suppose que la question porte sur le prix de vente minimum de chaque billet. En effet, un prix de vente du billet fixé à 1000€ est une réponse correcte à la question posée : il ne perdrait pas d'argent s'il les vendait tous…même si la vente de tous les billets est peu probable.

Calcul de la dépense globale

L'organisateur dépense :

- 2 téléviseurs à 500 € soit 1000 €,
- 5 bons de réduction à 100 € soit 500 €,
- 10 bons de réduction à 50 € soit 500 €,
- 20 porte-clés à 0,50 € soit 10 €.

Ceci constitue une dépense totale égale à $1000\ € + 500\ € + 500\ € + 10\ €$, soit 2010 €.

Calcul du prix minimum d'un billet

Pour ne pas perdre d'argent, la recette de la vente de 300 billets doit équilibrer la dépense de 2010 €.
$2010\ € : 300 = 6{,}70\ €$.

Pour ne pas perdre d'argent l'organisateur doit vendre le billet au moins 6,70 €.

b) Nombre de billets perdants à rajouter pour ne pas perdre d'argent avec des billets à 2 €

Avec un prix de 2 € pour chaque billet, la vente des 300 premiers billets rapporte $300 \times 2\ €$ soit 600 €.
Pour ne pas perdre d'argent, la recette des billets rajoutés doit être de $2010\ € - 600\ €$ soit 1410 €.
Or $1410€ : 2\ € = 705$.

L'organisateur doit donc rajouter 705 billets perdants aux 300 premiers billets.

Remarque

La question est ambiguë quant au terme « rajouter », car il n'est pas précisé explicitement à quel ensemble on cherche à rajouter des billets. Si on rajoute par rapport à la situation initiale des 300 billets, il faut rajouter 705 billets perdants. Si on rajoute par rapport aux 27 billets gagnants, il faut rajouter 978 billets perdants ($705 + 300 - 27$).
Lorsque le candidat est confronté à un énoncé ambigu, il a intérêt à signaler différentes interprétations qu'il envisage et à en choisir une. Dans tous les cas il ne doit pas s'emporter dans sa copie contre l'ambiguïté éventuelle de l'énoncé.

Remarque

Il nous a paru important de justifier au tout début l'hypothèse d'équiprobabilité. En effet cette hypothèse est trop souvent naturalisée. Le lecteur intéressé pourra se reporter à la référence suivante : Gauvrit Nicolas (2013) A propos du "biais d'équiprobabilité". Recherches en didactiques des mathématiques. Vol.33, n°2 pp. 163-182. La pensée sauvage. Grenoble.

EXERCICE 3

Complément de formation : aide à la compréhension du programme fourni, écrit en Scratch, un langage de programmation par blocs.

Reformulation des instructions en langage naturel		Ce que fait le programme	Valeurs des variables
L'exécution du programme est déclenchée par l'**évènemen**t « l'utilisateur clique sur le drapeau vert ».	quand est cliqué		
Initialisation des valeurs de plusieurs variables.	mettre a à 5	Le nombre 5 est affecté à la **variable a**.	a = 5
	mettre n à 0	Le nombre 0 est affecté à la **variable n**.	a = 5 n = 0
	mettre b à 1	Le nombre 1 est affecté à la **variable b**.	a = 5 n = 0 b = 1
Exécution 10 fois de suite de la séquence d'instructions qui se trouvent à l'intérieur de cette **boucle**.	répéter 10 fois		a = 5 n = 0 b = 1
Première exécution du contenu de la boucle			
Exécution d'un calcul (ajout de 1 à la valeur de la variable n), puis affectation du résultat à la **variable n.**	ajouter à n 1	Le programme calcule 0 + 1 = 1. n prend la valeur 1.	a = 5 **n = 1** b = 1
Exécution d'un calcul (multiplication des valeurs des variables a et b), puis affectation du résultat à la **variable b.**	mettre b à b * a	Le programme calcule 1 × 5 = 5. b prend la valeur 5.	a = 5 n = 1 **b = 5**
Affichage de la valeur de la variable b et de celle dela variable n **pendant 3 secondes**.	montrer la variable b montrer la variable n attendre 3 secondes	Le programme affiche pendant 3 s n 1 b 5	a = 5 n = 1 b = 5
Deuxième exécution du contenu de la boucle			
Exécution d'un calcul (ajout de 1 à la valeur de la variable n), puis affectation du résultat à la **variable n.**	ajouter à n 1	Le programme calcule 1 + 1 = 2. n prend la valeur 2.	a = 5 **n = 2** b = 5
Exécution d'un calcul (multiplication des valeurs des variables a et b), puis affectation du résultat à la **variable b.**	mettre b à b * a	Le programme calcule 5 × 5 = 25. b prend la valeur 25.	a = 5 n = 2 **b = 25**

Affichage de la valeur de la variable b et de celle de la variable n pendant 3 secondes.	montrer la variable b montrer la variable n attendre 3 secondes	Le programme affiche pendant 3 s n 2 b 25	a = 5 n = 2 b = 25
Troisième exécution du contenu de la boucle			
Exécution d'un calcul (ajout de 1 à la valeur de la variable n), puis affectation du résultat à la **variable n.**	ajouter à n 1	Le programme calcule 2 + 1 = 3. n prend la valeur 3.	a = 5 **n = 3** b = 25
Exécution d'un calcul (multiplication des valeurs des variables a et b), puis affectation du résultat à la **variable b.**	mettre b à (b * a)	Le programme calcule 25 × 5 = 125. b prend la valeur 125.	a = 5 n = 3 **b = 125**
Affichage de la valeur de la variable b et de celle dela variable n pendant 3 secondes.	montrer la variable b montrer la variable n attendre 3 secondes	Le programme affiche pendant 3 s n 3 b 125	a = 5 n = 3 b = 125
Quatrième, …,neuvième exécutions du contenu de la boucle			
Dixième exécution du contenu de la boucle			
Exécution d'un calcul (ajout de 1 à la valeur de la variable n), puis affectation du résultat à la **variable n.**	ajouter à n 1	Le programme calcule 9 + 1 = 10. n prend la valeur 10.	a = 5 **n = 10** b = 1 953 125
Exécution d'un calcul (multiplication des valeurs des variables a et b), puis affectation du résultat à la **variable b.**	mettre b à (b * a)	Le programme calcule 1953125 × 5 = 9765625. b prend la valeur 9765625.	a = 5 n = 10 **b = 9 765 625**
Affichage de la valeur de la variable b et de celle dela variable n pendant 3 secondes.	montrer la variable b montrer la variable n attendre 3 secondes	Le programme affiche pendant 3 s n 10 b 9765625	a = 5 n = 10 b = 9 765 625

Remarque :
Le programme étant terminé, l'affichage des valeurs de n et de b perdure au-delà de 3 secondes.

1) Valeurs des variables a, b et n à la fin du premier puis du second passage

	Initialisation	A la fin du 1er passage dans la boucle	A la fin du 2ème passage dans la boucle
Valeur de la variable a	5	5	5
Valeur de la variable n	0	$0 + 1 = 1$	$1 + 1 = 2$
Valeur de la variable b	1	$5 \times 1 = 5$	$5 \times 1 = 25$

À la fin du premier passage a, b, n valent respectivement 5, 5, 1.
À la fin du second passage a, b, n valent respectivement 5, 25, 2.

2) Ce que réalise ce programme

À chaque passage dans la boucle la valeur de la variable b est multipliée par 5.
À l'issue de la troisième répétition de la boucle, le programme affiche pendant 3 secondes la valeur de 5^3 soit «125 » et « 3 ».
À l'issue de la dixième et dernière répétition de la boucle, le programme affiche la valeur de 5^{10} soit « 9 765 625 » et « 10 ».

Le programme affiche successivement les dix premières puissances de 5 ainsi que l'exposant correspondant.

EXERCICE 4

1) Affirmation 1

L'affirmation « le volume d'un cube, dont la surface totale extérieure mesure 576 cm², est inférieure à 1 litre » est vraie.

Méthode 1

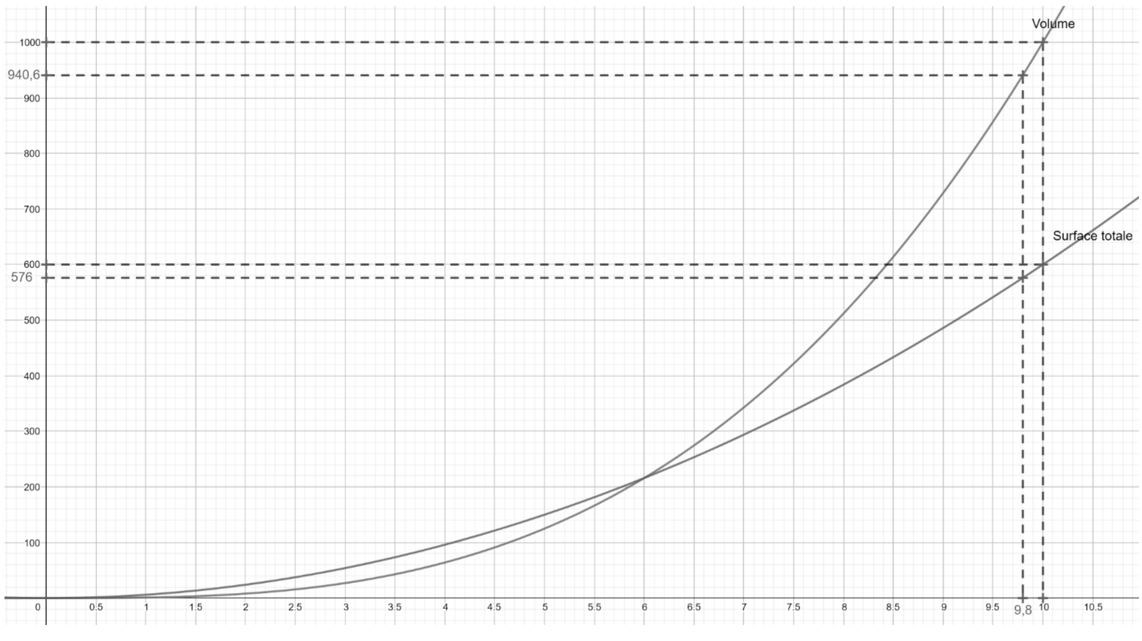
Tout cube a 6 faces carrées superposables donc l'aire d'une face du cube considéré est égale à $\frac{576}{6}$ cm² soit 96 cm².
L'aire d'un carré étant égale au carré de son côté, le côté de ce cube est égal à $\sqrt{96}$ cm.
Le volume de ce cube est ainsi égal à $\left(\sqrt{96}\right)^3$ cm³ soit environ 940,6 cm³ ou 0,9406 dm³ ou 0,9406 L, ce qui est inférieur à 1 L.

Méthode 2

Un cube de volume 1 litre, soit 1 dm³, a une arête de 1 dm soit 10 cm. Une face d'un tel cube a une aire égale à 10 cm × 10 cm soit 100 cm², et l'aire de sa surface extérieure est égale à 600 cm².
Cette valeur est supérieure à 576 cm².
On en déduit, par division par 6, que l'aire d'une face du cube de l'énoncé est inférieure à l'aire d'une face du cube d'arête 10 cm, puis que l'arête du cube de l'énoncé est plus courte que 10 cm, et enfin que le volume du cube de l'énoncé est inférieur au volume du cube d'arête 10 cm, donc à 1 L.

Remarque

On a utilisé implicitement la croissance des fonctions qui à l'arête d'un cube associent respectivement son volume et son aire totale. Le graphique ci-dessous représente ces deux fonctions : on constate que quand l'aire totale est plus grande, l'arête est plus grande et le volume est plus grand.



2) Affirmation 2

L'affirmation « l'inverse de la somme de deux nombres est égal à la somme des inverses de ces deux nombres » est fausse.

Il suffit de considérer le contre-exemple suivant.

Prenons les deux nombres 2 et 3.

L'inverse de la somme des deux nombres vaut $\frac{1}{2+3}$, soit $\frac{1}{5}$.

La somme des inverses des deux nombres vaut $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ soit $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$ soit $\frac{5}{6}$.

Comme $\frac{1}{5} \neq \frac{5}{6}$, l'affirmation est fausse.

Complément

On peut aussi montrer que l'affirmation est fausse quels que soient les nombres choisis. La recherche d'un contre-exemple <u>est tout de même à privilégier</u> car elle est bien plus simple à mettre en œuvre.

Prenons a et b deux nombres quelconques non nuls dont la somme est non nulle (sinon les inverses n'existent pas).

L'inverse de leur somme qu'on appelle A vaut $\frac{1}{a+b}$.

La somme de leurs inverses qu'on appelle B vaut $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Mettons A et B sur le même dénominateur pour les comparer. Quelles que soient les valeurs de a et b, non nulles, dont la somme est non nulle,

$$A = \frac{1}{a+b} = \frac{ab}{(a+b)\,ab}$$

$$B = \frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{(a+b)b}{(a+b)ab}+\frac{(a+b)a}{(a+b)ab} = \frac{ab+b^2+a^2+ba}{(a+b)ab} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)ab}$$

- *1er cas : si ab < 0*

A < 0 et B > 0 (car le carré d'un nombre est toujours positif) donc B > A et B est donc différent de A.

- *2ème cas : si ab > 0*

2ab > ab donc a^2+b^2+2ab > ab soit $(a+b)^2$ > ab. On en déduit que B > A, et que B est donc différent de A.

Les nombres A et B ne sont jamais égaux quels que soient les nombres a et b choisis.

Remarque

Le cas a.b = 0 n'est pas possible car a et b sont non nuls.

3) Affirmation 3

L'affirmation « le prix final est 5% plus élevé que le prix initial quand celui-ci subit une baisse de 30% puis une hausse de 50%. » est vraie.

Méthode1

Appliquer une baisse de 30 % à une grandeur revient à la multiplier par 0,70.
Appliquer une hausse de 50 % à une grandeur revient à la multiplier par 1,50.
Or $0{,}70 \times 1{,}50 = 1{,}05$, et multiplier par 1,05 revient à appliquer une augmentation de 5 %.
Une baisse de 30 % suivie d'une hausse de 50 % équivalent donc bien à une augmentation de 5 %.

Méthode 2

Soit p le prix initial.
Après la baisse de 30 % le prix devient 0,70 p .
Après une hausse de 50 % le prix devient : 1,50 $\times$ (0,70 p) soit 1,05 p.
Cela correspond bien à une augmentation globale de 5 % par rapport au prix initial.

Remarque

On utilise le coefficient multiplicatif $1+\frac{x}{100}$ *pour traduire une augmentation de x % de p car :*

$p + x \ \%$ *de* $p = p + \dfrac{x}{100} \times p = \left(1 + \dfrac{x}{100}\right) \times p$.

4) Affirmation 4

L'affirmation « les points C, D, E sont alignés » est fausse.
Calculons une mesure en degrés de $\widehat{\mathrm{CDE}}$ à l'aide de l'égalité suivante : $\widehat{\mathrm{CDE}} = \widehat{\mathrm{CDA}} + \widehat{\mathrm{ADB}} + \widehat{\mathrm{BDE}}$.

Calculons une mesure en degrés de $\widehat{CDA}$.

Le codage de la figure indique que le triangle ADC est rectangle et isocèle en C.
Dans un triangle, la somme des angles vaut 180°.
ADC est isocèle donc les angles à la base sont égaux.
Ainsi,
$\widehat{\mathrm{CDA}} = \dfrac{180° - 90°}{2} = 45°$.

Calculons une mesure en degrés de $\widehat{ADB}$*.*

Le codage indique que le triangle ADB est isocèle en B.
Les angles à la base en A et D sont égaux donc $\widehat{\mathrm{ADB}} = 50°$.

Calculons une mesure en degrés de $\widehat{BDE}$*.*

Le codage indique que le triangle BDE est rectangle en E.
La somme des angles vaut 180°.
Ainsi $\widehat{\mathrm{BDE}} = 180° - \widehat{\mathrm{BDE}} - \widehat{\mathrm{BED}} = 180° - 25° - 90° = 65°$.

Conclusion

$\widehat{\mathrm{CDE}} = \widehat{\mathrm{CDA}} + \widehat{\mathrm{ADB}} + \widehat{\mathrm{BDE}} = 45° + 50° + 65° = 160°$.

$\widehat{\mathrm{CDE}}$ n'est donc ni un angle plat, ni un angle nul : **les points C, D et E ne sont donc pas alignés.**

TROISIEME PARTIE

SITUATION 1

1) Deux raisons pour lesquelles le calcul en ligne est, en termes d'apprentissage, complémentaire au calcul posé

On peut par exemple avancer deux des raisons suivantes.

- Comme rappelé dans l'extrait de programmes inclus dans le sujet, le calcul posé consiste en l'exécution d' « algorithmes », alors que le calcul en ligne sollicite des « stratégies » de calcul, et donc une prise d'initiative chez les élèves.
- Le calcul en ligne sollicite explicitement différentes propriétés des opérations (par exemple la commutativité ou l'associativité pour l'addition et la multiplication), alors qu'on peut exécuter un algorithme posé sans avoir conscience des propriétés sous-jacentes.
- Le calcul en ligne incite à s'intéresser à différentes décompositions d'un même nombre (en cherchant à en choisir une qui se prête bien à l'opération demandée), alors que les techniques posées classiques reposent essentiellement sur la décomposition canonique des nombres.
- Pratiqué avant l'introduction d'algorithmes de calcul posé, le calcul en ligne peut permettre de justifier et de faciliter la compréhension de ces algorithmes.
  Par exemple, en fin de cycle 2, la décomposition (en ligne) du produit 15×12 en $15 \times 10 + 15 \times 2$ peut être exploitée par un enseignant pour introduire une technique posée en colonnes de calcul d'un produit d'un entier par un nombre à deux chiffres.
- Des procédures de calcul en ligne peuvent être mises en œuvre en calcul mental, alors que les algorithmes de calcul posé ne sont en général pas adaptés au calcul mental (car ils prennent appui sur plusieurs résultats intermédiaires qu'il peut être difficile de mémoriser, et car ils risquent, en cas d'erreur dans les ultimes étapes, de conduire à un ordre de grandeur erroné).

Remarque

On dit aussi parfois que le calcul posé relève du calcul automatisé, alors que le calcul en ligne relève du calcul réfléchi.
Cependant, par exemple dans l'algorithme posé de la division on estime combien de fois le diviseur est « contenu » dans le dividende, et ce faisant on opère un calcul réfléchi qui n'est pas complètement automatisé.

Remarque

On peut faire référence à François Boule : « Le calcul mental est un calcul sur les nombres plutôt que sur les chiffres ». En effet, alors qu'a priori les procédures de calcul « mental » varient selon les nombres en jeu, les techniques opératoires usuelles sont des algorithmes indépendants des nombres auxquels ils s'appliquent et dont ils ne prennent en compte ni l'ordre de grandeur, ni les propriétés arithmétiques. De plus, le travail « colonne par colonne » isole chaque chiffre du reste du nombre. Par exemple, pour calculer 73 – 27, « si l'on pose l'opération, on fait agir un algorithme qui énonce des manipulations à opérer sur les chiffres des unités, puis les chiffres des dizaines. Les nombres 73 et 27 sont provisoirement perdus de vue, et par conséquent aussi l'ordre de grandeur du résultat. » BOULE, F. (1997). Performances et démarches de calcul mental au cycle III. Éléments pour une pédagogie du calcul mental. Thèse de doctorat, Villeneuve d'Ascq. Presses universitaires du Septentrion.

2) Trois stratégies qu'un élève de cycle 2 pourrait mobiliser pour effectuer le calcul en ligne de $28 + 17$

On peut proposer trois des stratégies suivantes.

- Décomposition de chacun des nombres en unités de groupements de numération, puis recomposition en effectuant la conversion $10\text{ u} = 1\text{ d}$:

  $28 + 17 = 2\text{ d} + 8\text{u} + 1\text{ d} + 7\text{ u} = 3\text{ d} + 15\text{ u} = 3\text{ d} + 1\text{ d} + 5\text{ u} = 4\text{ d} + 5\text{ u} = 45.$
- Décomposition canonique de chacun des termes, puis ajout des dizaines entre elles, des unités isolées entre elles, en enfin ajout des deux nombres obtenus

  $28 + 17 = 20 + 8 + 10 + 7 = 20 + 10 + 8 + 7 = 30 + 15 = 45.$

- Décomposition canonique du deuxième terme et ajouts progressifs (ajout d'une dizaine, puis ajout du complément à la dizaine supérieure, puis ajout des unités restantes)
  $28 + 17 = 28 + 10 + 7 = 38 + 2 + 5 = 40 + 5 = 45$.
- Ajout du nombre entier de dizaines immédiatement supérieur à l'un des deux termes, puis retrait du complément
  $28 + 17 = 28 + 20 - 3 = 48 - 3 = 45$
  ou $28 + 17 = 30 - 2 + 17 = 30 + 17 - 2 = 30 + 15 = 45$.
- Décomposition soustractive des deux termes
  $28 + 17 = (30 - 2) + (20 - 3) = 50 - 5 = 45$.

Remarque

Dans cette dernière ligne, il ne s'agit pas de faire du calcul sur des nombres relatifs ($-2 - 3 = -5$) mais bien de raisonner comme suit : « ôter 2 puis ôter 3 revient à ôter 5 ».

3) Trois stratégies de calcul mental ou en ligne qu'un élève de cycle 2 pourrait mobiliser pour effectuer 14×5 (en précisant les connaissances et les propriétés utilisées)

Nous donnons trois réponses possibles directement inspirées des exemples présents dans les extraits de programmes fournis dans le sujet, puis les complétons par d'autres propositions.

- Utilisation de l'associativité de la multiplication, d'une décomposition multiplicative de 14 puis d'une recomposition multiplicative pour faire 10 et d'une technique pour multiplier un nombre par 10.
  $14 \times 5 = 7 \times 2 \times 5 = 7 \times 10 = 70$.
- Utilisation d'une décomposition additive de 14 en $10 + 4$; de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ; d'une technique pour multiplier un nombre par 10 ; d'une technique pour ajouter deux nombres entiers de dizaines ; connaissance de résultats issus des tables d'addition et de multiplication (4×5 et $7 + 2$).
  $14 \times 5 = 10 \times 5 + 4 \times 5 = 50 + 20 = 70$.
- Utilisation des mêmes propriétés que pour la stratégie précédente, mais en ayant recours au calcul sur les unités de groupements de numération.
  $14 \times 5 = 1\,\mathrm{d} \times 5 + 4\,\mathrm{u} \times 5 = 5\,\mathrm{d} + 20\,\mathrm{u} = 5\,\mathrm{d} + 2\,\mathrm{d} = 7\,\mathrm{d} = 70$.
- Utilisation d'une décomposition multiplicative de 14 puis d'une recomposition multiplicative en utilisant l'associativité de la multiplication ; connaissance du double de 35.
  $14 \times 5 = (2 \times 7) \times 5 = 2 \times (7 \times 5) = 2 \times 35 = 70$.
- Utilisation d'une décomposition multiplicative de $10 = 5 \times 2$ et d'une technique pour multiplier un nombre par 10 ; connaissance de la moitié de 14.
  $14 \times 10 = 140$ puis $140 : 2 = 70$.

SITUATION 2

Remarque

La réponse au problème, non demandée mais indispensable pour analyser les productions d'élèves, est 16 unités et 2 dixièmes d'unité (que l'on peut aussi écrire 16,2 unités).

Remarque

Il nous paraît difficile de nous prononcer sur l'acquisition de « compétences » chez les trois élèves à partir des productions, très succinctes, qui sont fournies. Dans la suite, les « compétences » que nous relevons s'apparentent plutôt à des connaissances et des savoir-faire qui paraissent mis en œuvre dans les productions.

1) Analyse de trois productions d'élèves (démarche utilisée, compétences qui semblent acquises, erreurs éventuelles)

Production de Nicolas

Description de sa démarche

Nicolas ajoute les parties entières puis les parties décimales de chacune des mesures de longueur. Il exprime ensuite la somme des deux nombres obtenus sous forme d'une écriture à virgule, en convertissant la somme des parties décimales en un entier complété par une partie décimale.

Compétences qui semblent acquises par Nicolas, et analyse de ses erreurs

Nicolas sait que le périmètre d'un triangle est égal à la somme des longueurs des trois côtés.
En revanche :

- il commet deux erreurs de calcul, une pour la somme des nombres d'unités (il trouve 16 au lieu de 15) et une pour la somme des nombres de dixièmes (il trouve 11 et non 12) ;
- il écrit une égalité (par nature fausse) entre des mesures ($5 + 4 + 6$) et une longueur (16 unités) ;
- le nombre qu'il donne comme réponse (17,01) est faux, et n'est pas égal à la somme des deux nombres qu'il a obtenus auparavant (16 unités et 11 dixièmes). La valeur obtenue laisse penser qu'il a convenablement converti dix dixièmes en une unité supplémentaire, mais qu'il s'est en revanche trompé dans la retranscription du dernier dixième, en l'écrivant au deuxième rang après la virgule, et non au premier.

Production de Thomas

Description de sa démarche

Comme Nicolas, Thomas ajoute les parties entières puis les parties décimales de chaque mesure de longueur. Il donne sa réponse en écrivant la somme des deux nombres obtenus, sans calcul supplémentaire.

Compétences qui semblent acquises par Thomas, et analyse de ses erreurs

- Thomas sait que le périmètre d'un triangle est égal à la somme des longueurs des trois côtés.
- Il sait additionner des fractions décimales : ses calculs sont corrects.
- En revanche, Thomas écrit une égalité fausse entre des mesures (5 + 4 + 6) et une longueur (15 unités).

Remarque

On peut remarquer qu'il n'effectue pas la conversion des douze dixièmes d'unité en une unité et deux dixièmes d'unité, mais on ne peut pas considérer que c'est une erreur : rien ne l'imposait dans la consigne.

Production d'Amina

Description de sa démarche

Amina ajoute progressivement les parties entières de chaque mesure de longueur (en calculant la somme des deux premières, puis en ajoutant la troisième), puis, de la même manière, ajoute les parties décimales. Elle ajoute ensuite les deux nombres obtenus, en effectuant la conversion de dix dixièmes et une unité.
Elle exprime sa réponse sous la forme d'une somme d'un entier et d'une fraction décimale inférieure à 1, et sous la forme d'une écriture à virgule.

Compétences qui semblent acquises par Amina, et analyse de ses erreurs

Amina sait que le périmètre d'un triangle est égal à la somme des longueurs des trois côtés.
Les calculs de sommes effectués par Amina sont corrects du point de vue des valeurs numériques obtenues.
La restitution écrite qui en est faite est en revanche incorrecte, car le signe « = » n'est pas convenablement utilisé :

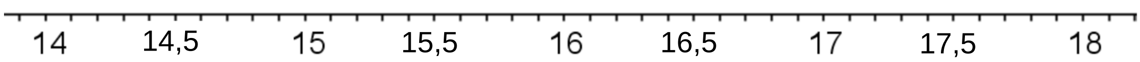
- d'une part, elle utilise le signe « = » pour rendre compte de la succession des opérations effectuées (probablement mentalement sous la forme « 5 dixièmes plus 4 dixièmes, cela fait 9 dixièmes, plus 3 dixièmes, cela fait 12 dixièmes »), mais les nombres qu'elle écrit de part et d'autre du signe « = » ne sont pas égaux ($\frac{5}{10} + \frac{4}{10} \neq \frac{9}{10} + \frac{3}{10}$),
- d'autre part, elle écrit des égalités erronées entre grandeurs et mesures.

Enfin, elle fournit comme ultime réponse un nombre (16,2) et non une longueur (la réponse correcte est 16,2 unités).

2) Une proposition que l'enseignant peut faire pour amener Thomas à rédiger sa réponse sous forme d'écriture à virgule

On peut proposer l'une des réponses suivantes.

- L'enseignant peut indiquer à Thomas que sa réponse est correcte, et lui demander explicitement de donner une autre écriture de cette réponse, avec une écriture à virgule.
- L'enseignant peut soumettre à Thomas les réponses d'Amina et de Nicolas et lui demander s'il est d'accord avec l'une des deux propositions. Il est alors possible que pour comparer sa réponse à celle des deux autres élèves, Thomas prenne l'initiative d'écrire sa réponse sous la même forme que les deux autres élèves.
- L'enseignant peut indiquer à Thomas que sa réponse est correcte, et lui donner un support avec une portion de droite graduée de dixième en dixième, sur laquelle apparaissent quelques repères sous forme d'écriture à virgule, comme dans l'exemple ci-dessous.
  Il peut alors lui demander de repérer un segment de longueur une unité puis un segment de longueur un dixième de l'unité sur cette droite, avant de lui demander de placer le nombre qu'il a obtenu (15 et 12 dixièmes).
  Il est alors possible que ceci incite l'élève à écrire sa réponse sous la même forme que les nombres déjà présents sur l'axe.



SITUATION 3

1) Démarches proposées par les quatre élèves pour calculer $3,12 + 5,7$

On peut relever essentiellement trois démarches dans ces quatre productions.

- Benjamin et Océane ajoutent d'une part les nombres écrits à gauche de la virgule (3 et 5), et d'autre part les nombres écrits à droite de la virgule (12 et 7). Ils juxtaposent ensuite les sommes obtenues, en les séparant par une virgule. Cette démarche est incorrecte.
- Isabelle écrit chacun des deux nombres sous la forme d'une fraction décimale, en choisissant la même unité de numération (le centième). Elle ajoute ensuite les deux nombres de centièmes ($312 + 570 = 882$) et en déduit la valeur de la somme sous la forme d'une fraction décimale. Cette démarche est correcte.
- Pierre décompose chacun des nombres en la somme de sa partie entière et de sa partie décimale, écrite avec une fraction décimale. Il effectue ensuite d'une part la somme des parties décimales, d'autre part la somme des parties entières. Il en déduit la valeur de la somme cherchée, décomposée en sa partie entière et sa partie décimale, puis écrite sous forme d'une écriture à virgule. Cette démarche est correcte.

2) Une représentation erronée des nombres décimaux qui pourrait être à l'origine des erreurs des élèves

Deux productions sont erronées : celle de Benjamin, et celle d'Océane.
Il est fort possible que ces deux élèves conçoivent une écriture à virgule comme la juxtaposition de deux nombres entiers.

3) Trois propositions de tâches ou d'activités qu'un enseignant pourrait mettre en œuvre pour remédier aux erreurs apparues ici

Les erreurs observées peuvent être issues de plusieurs sources, comme par exemple :

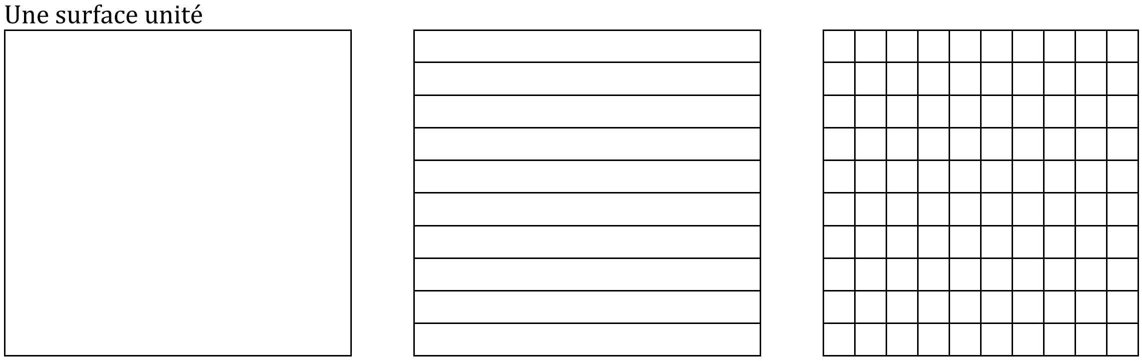
- une mauvaise compréhension des notions de dixième et centième d'unité ;
- une mauvaise compréhension de la signification des écritures à virgule.

Pour tenter de remédier à ces erreurs, l'enseignant pourrait proposer l'une des tâches suivantes (selon les évaluations effectuées précédemment auprès des élèves).

Des tâches de constitution de surfaces d'aire donnée

Pour revenir sur les notions de dixièmes et centièmes d'une unité donnée, l'enseignant pourrait mettre en jeu les nombres décimaux comme mesures de grandeurs (longueur ou aire), et proposer par exemple le support ci-dessous (dans le cas des aires).

Une surface unité



L'enseignant pourrait :

- dans un premier temps demander aux élèves de colorier une surface d'aire égale à une unité, une surface d'aire égale à un dixième d'unité, puis une surface d'aire égale à un centième d'unité ;
- dans un second temps mettre à la disposition des élèves une réserve de surfaces de chacun des rangs (unité, dixième d'unité, centième d'unité), et demander aux élèves de constituer des surfaces d'aires données, en demandant systématiquement plusieurs décompositions possibles.

Exemples de commandes : $\frac{13}{10}$ u ; $\frac{324}{100}$ u ; $2\text{ u} + \frac{14}{10}$ u ; $\frac{12}{100}$ u $+ \frac{9}{10}$ u ; etc.
Dans la verbalisation des actions des élèves, l'enseignant prendrait soin d'insister sur les relations « 1 unité = 10 dixièmes d'unité », « 1 dixième d'unité = 10 centièmes d'unité ».

Des tâches de conversion entre écritures fractionnaires et écriture à virgule

Pour revenir sur le sens des écritures à virgule, l'enseignant pourrait reprendre la tâche précédente, demander de constituer des surfaces d'aire donnée (sous forme d'écritures fractionnaires) en utilisant au maximum 9 surfaces de chaque rang. Il pourrait alors rappeler la convention d'écriture permettant d'écrire la décomposition canonique d'un nombre décimal avec l'écriture à virgule.
Il pourrait ensuite proposer des exercices d'entraînement au passage de décompositions en écritures fractionnaires en écriture à virgule, et *vice versa,* en prenant le soin de proposer des décompositions en écritures fractionnaires contenant parfois strictement plus de 9 unités d'un certain rang.

Des tâches de constitution de surfaces d'aires données sous la forme d'une somme de deux aires

Pour revenir sur l'addition de deux nombres décimaux donnés sous forme d'écriture décimale, l'enseignant pourrait faire travailler les élèves en binôme. Il demanderait à chacun de construire une surface d'aire donnée sous la forme d'un nombre décimal d'unités écrit avec l'écriture à virgule (ex : 1,56 u et 2,34u, puis 2,38u et 3,07u, puis 4,18u et 2,93u), puis pourrait demander au binôme de déterminer l'aire de la surface obtenue en réunissant les deux surfaces ainsi construites, en l'écrivant sous forme d'une écriture à virgule.

GROUPEMENT 2 – AVRIL 2018

PREMIÈRE PARTIE

Remarque

Attention, dans l'énoncé de cette partie, les notations L, r, h désignent tantôt des longueurs, tantôt des mesures exprimées en cm. Dans ce corrigé, nous choisissons d'homogénéiser les notations : les lettres L, r et h désigneront ainsi systématiquement des mesures de longueur (exprimées en cm).

A - Mesure du volume d'une canette « classique »

La longueur du diamètre du disque de base est de 6,6 cm. Ainsi l'aire de la base est égale à $\pi\,(\frac{6,6}{2})^2$ cm^2.

Méthode 1

On en déduit le volume du cylindre : $\pi\,(\frac{6,6}{2})^2 \times 9,8$ cm^3 $\approx 335,1$ cm^3
(valeur approchée par défaut à 0,1 cm^3 près).
Or : 1 cL = 10 cm^3, ainsi la contenance du cylindre qui est d'environ **33,5 cL est supérieure à 33 cL.**

Méthode 2

Le volume du cylindre est : $\pi\,(\frac{6,6}{2})^2 \times 9,8$ cm^3.
Or : $\pi > 3,14$.
Donc : $\pi\,(\frac{6,6}{2})^2 \times 9,8 > 3,14 \times (\frac{6,6}{2})^2 \times 9,8$.
Soit : $\pi\,(\frac{6,6}{2})^2 \times 9,8 > 335,10708 > 335$.
Puisque 1 cL = 10 cm^3, on a : 335 cm^3 = 33,5 cL.
On en déduit que la contenance de la canette classique est supérieure à 33 cL.

Remarque

Les unités usuelles françaises de mesure de volume sont le m^3 avec ses sous-unités et sur-unités. Les unités usuelles françaises de contenance sont le L et ses sous et sur unités. Ces deux systèmes d'unités peuvent être mis en relation notamment par l'une des égalités suivantes : 1 dm^3 = 1 L ou 1 cL = 10 cm^3.

B - Mesure de la hauteur d'une canette « slim »

On sait que : 33 cL = 330 cm^3.
Le volume de la canette slim est : $\pi(\frac{5,6}{2})^2 \times h$ cm^3, où h désigne la mesure de la hauteur de la canette.

Méthode 1

On cherche la valeur de h pour laquelle le volume de la canette slim est au moins égal à 330 cm^3.
On cherche donc la valeur de h telle : $\pi(\frac{5,6}{2})^2 \times h \geq 330$.
Ou encore telle que : $h \geq \dfrac{330}{\pi\left(\frac{5,6}{2}\right)^2}$

Or $\dfrac{330}{\pi\left(\frac{5,6}{2}\right)^2} \approx 13,4$ (valeur arrondie à 0,1 près).

On en déduit que **la hauteur de la canette « slim », doit être, d'au moins 13,4 cm** **(au millimètre près).**

Méthode 2

On cherche la valeur h pour laquelle : $\pi(\frac{5,6}{2})^2 \times h = 330$.

Soit : $h = \dfrac{330}{\pi\left(\frac{5,6}{2}\right)^2} \approx 13,4$ (valeur arrondie à 0,1 près).

Puisque le volume d'un cylindre de base donnée augmente lorsque sa hauteur augmente, on en déduit que : **la hauteur de la canette « slim » doit être d'au moins 13,4 cm (au millimètre près).**

C - Mesure de l'aire du patron d'une canette

Dans cette partie, toutes les mesures de longueur sont exprimées en cm, toutes les mesures d'aire en cm^2, toutes les mesures de volume en cm^3.

La mesure (en cm) du rayon de la base du cylindre modélisant la canette est notée *r*, celle de la hauteur de la canette est notée *h*.

1) Vérification

Le volume du cylindre formé par la canette est égal à : $\pi \times r^2 \times h$ cm^3.

Or le volume de la canette est 330 cm^3.

Ainsi : $\pi \times r^2 \times h = 330$.

Et donc : $h = \dfrac{330}{\pi r^2}$.

La mesure de la hauteur de la canette est $\boldsymbol{\dfrac{330}{\pi r^2}}$.

2) Mesure de la longueur du rectangle

La longueur du rectangle coïncide avec le périmètre du disque de base.

Ainsi la mesure L de la longueur du rectangle est donnée par : $L = 2\pi r$.

La mesure de la longueur du rectangle est égale à $\boldsymbol{2\pi r}$.

3) Mesure de l'aire de la partie rectangulaire

La mesure (en cm^2) de l'aire de la partie rectangulaire est donnée par : $L \times h$.

D'après la question 1, h peut s'exprimer en fonction de r : $h = \dfrac{330}{\pi r^2}$.

D'après la question 2, L peut s'exprimer en fonction de r : $L = 2\pi r$.

On en déduit que : $L \times h = 2\pi r \times \dfrac{330}{\pi r^2}$.

Donc : $L \times h = \dfrac{660}{r}$.

La mesure de l'aire de la partie rectangulaire est égale à $\boldsymbol{\dfrac{660}{r}}$.

4) Mesure de l'aire totale du patron

L'aire totale du patron du cylindre est égale à la somme de l'aire de la partie rectangulaire $\left(\dfrac{660}{r}\text{ cm}^2\right)$ et de deux fois l'aire du disque de base (πr^2 cm^2), soit : $\dfrac{660}{r}$ cm^2 + πr^2 cm^2.

La mesure de l'aire totale du patron est donc égale à : $\boldsymbol{\dfrac{660}{r} + 2\pi r^2}$.

D - Lecture graphique

Remarque

Le graphique présenté dans cette partie correspond à l'ensemble des points de coordonnées (r, f(r)) : en abscisses, est donnée la mesure r (exprimée en cm) du rayon du disque de base ; en ordonnées, est donnée la mesure f(r) (exprimée en cm^2) de la surface de métal nécessaire à la réalisation d'un cylindre de révolution dont la base a un rayon de longueur r cm.

1) Aire de la surface de métal pour un cylindre dont la base a pour rayon 1,5 cm

Pour r = 1,5, on lit graphiquement : $f(r) \approx 450$.

L'aire de la surface de métal nécessaire est environ 450 cm^2.

Remarque

Il est possible de retrouver cette valeur à partir de l'expression littérale de la fonction f.

On sait que : $f(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{660}{r}$.

Donc : $f(1{,}5) = 2\pi \times 1{,}5^2 + \dfrac{660}{1{,}5} \approx 454$ *(valeur arrondie à 1 près).*

Dans ce cas, on trouve que l'aire de la surface de métal nécessaire est 454 cm^2, ce qui correspond à une meilleure approximation que la lecture graphique.

2) Valeur(s) de r pour une aire de 300 cm^2

Dans cette question, il s'agit de lire sur le graphique les abscisses des points d'ordonnée égale à 300, autrement dit de lire les valeurs de r pour lesquelles : $f(r) = 300$.
On obtient deux possibilités : une valeur que l'on peut arrondir à 2,6 et une valeur comprise entre 5 et 5,5 que l'on peut arrondir à 5,25.

Une aire de 300 cm^2 correspond à un cylindre dont le rayon de la base est d'environ 2,6 cm, ou d'environ 5,25 cm.

Remarque

Il est possible de retrouver cette valeur à partir de l'expression littérale de la fonction f.

On sait que : $f(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{660}{r}$.

On cherche donc le nombre positif r tel que : $f(r) = 300$.

Autrement dit, on cherche le nombre positif r tel que : $2\pi r^2 + \dfrac{660}{r} = 300$.

Dans ce cas, il est nécessaire de résoudre une équation du troisième degré à une inconnue. Ceci est possible, mais ne constitue pas un attendu pour le concours. Nous ne présentons donc pas cette méthode ici.

3) Canette utilisant le moins de métal

Méthode 1

Pour la canette classique, r = 3,3 et pour la canette « slim », r = 2,8. Or sur l'intervalle [2,5 ; 3,5] la fonction f est décroissante (conjecture graphique), ainsi : $f(2{,}8) > f(3{,}3)$.

La canette classique utilise donc moins de métal que la canette slim.

Méthode 2

Pour la canette classique, r = 3,3 et on estime graphiquement : $f(3{,}3) \approx 270$.
Pour la canette « slim », r = 2,8 et on estime graphiquement : $f(2{,}8) \approx 280$.
On a donc : $f(2{,}8) > f(3{,}3)$.

La canette classique utilise ainsi moins de métal que la canette slim.

Remarque

Pour la méthode 2, on pourrait également utiliser des inégalités : $f(3{,}3) < 275$ *et* $f(2{,}8) > 275$.

Remarque

L'énoncé invite à une réponse graphique, mais on peut également suggérer une réponse basée sur les calculs effectifs :

$$f(3{,}3) = \frac{660}{3{,}3} + 2\pi(3{,}3)^2 \approx 268 \quad et \quad f(2{,}8) = \frac{660}{2{,}8} + 2\pi(2{,}8)^2 \approx 284.$$

4) Rayon de base pour une aire minimale à volume donné

La surface minimale de métal correspond sur le graphique au point de la courbe dont l'ordonnée est la plus petite. Par lecture graphique, ce point correspond à une abscisse comprise entre 3,5 et 4 (valeur que l'on peut arrondir à 3,75).

Pour un rayon compris entre 3,5 cm et 4 cm (valeur que l'on peut arrondir à 3,75 cm), on obtient une surface métallique d'aire minimale.

Remarque

Une conjecture graphique nous permet de dire que la fonction est décroissante jusqu'à une valeur proche de 3,75 puis croissante. Ainsi le minimum est atteint pour une valeur proche de 3,75.

E - Utilisation d'un tableur

1) Formule

L'expression de la fonction f est donnée par la formule suivante :

$$f(r) = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}.$$

Avec le tableur, on utilise une valeur approchée de π que nous choisissons par exemple à 10^{-2} près, soit 3,14.
Dans la cellule B2 on peut alors noter, l'une des formules ci-dessous :

=660/B1+2*π*B1*B1

=660/B1+2*π*B1^2

Remarque

Dans les formules ci-dessus, on peut remplacer B1 par B$1 (mais pas par $B1 ou B1).
L'utilisation de π dans les formules proposées est une formulation qui ne donne pas le bon résultat sur certains tableurs. En effet, sous excel par exemple, il faut écrire PI() qui réfère à une valeur approchée de pi à 15 décimales près (valeur préenregistrée).
On peut également remplacer π par une valeur approchée de π que nous choisissons par exemple à 10^{-2} près, soit 3,14.

2) Encadrement

Par lecture du tableau de valeur, on constate que la plus petite valeur de *f(r)* affichée est 264,40 donnée pour r = 3,7 ($f(3{,}6) \approx 264{,}76$ et $f(3{,}8) \approx 264{,}41$). Comme nous n'avons pas d'autres informations concernant les variations de la fonction (notamment s'il existe ou pas des valeurs plus petites prises par la fonction entre 3,6 et 3,8), nous en déduisons que pour r compris entre 3,6 et 3,8, obtient la valeur minimale de $f(r)$.

Pour un rayon compris entre 3,6 cm et 3,8 cm, la surface de métal nécessaire à la réalisation d'une canette de 33 cL sera d'aire minimale.

3) Hauteur d'une canette pour un rayon de 3,7 cm et de contenance 33 cL

La question C. 1 donne le lien entre h et r par l'égalité : $h = \frac{330}{\pi r^2}$.
Par conséquent, pour r = 3,7 on a : $h \approx 7{,}6$.

On en déduit que la canette de contenance 33 cL ayant une base de rayon 3,7 cm a pour hauteur 7,6 cm.

F – Aluminium consommé puis recyclé…

1) Masse d'aluminium

Méthode 1

Pour réaliser le patron de la canette classique, il s'agit de découper une surface d'aire 268,42 cm^2 dans une plaque d'aluminium de 130 µm.
Or : 1 µm = 10^{-6} m $= 100 \times 10^{-6}$ cm $= 10^{-4}$ cm.

Donc la plaque d'aluminium a une épaisseur de : $130\ \mu\text{m} = 130 \times 10^{-4}$ cm .
Le volume de la plaque d'aluminium est alors : $268{,}42 \times 130 \times 10^{-4}$ cm^3.
La masse volumique de l'aluminium est 2700 kg/m^3, c'est-à-dire que la masse de 1 m^3 est égale à 2 700 kg.
Or : 1 m^3 = 1 000 000 cm^3 = 10^6 cm^3.
Et : $2\,700$ kg $= 2\,700 \times 10^3$ g.
On en déduit que la masse de 1 cm^3 est égale à : $\dfrac{2\,700 \times 10^3}{10^6}$ g $= 2{,}7$ g.
Ainsi la masse d'aluminium nécessaire pour le patron de la canette est égale à : $(268{,}42 \times 130 \times 10^{-4}) \times 2{,}7\ \text{g} \approx 9{,}4$ g (valeur approchée par défaut à 0,1 g près).
De plus l'anneau et le rivet de liaison ont une masse de 1,4 g et la soudure a une masse de 1,9 g.
Alors : $9{,}4\ \text{g} + 1{,}4\ \text{g} + 1{,}9\ \text{g} = 12{,}7$ g.

La masse totale d'aluminium nécessaire pour réaliser la canette est d'environ 12,7 g.

Méthode 2

Pour fabriquer une canette classique, la surface de métal nécessaire est d'aire 268,42 cm^2.
Or : $268{,}42\ \text{cm}^2 = 0{,}026842\ \text{m}^2$.
Le volume d'aluminium nécessaire est donc :

$$0{,}026842\ \text{m}^2 \times 130\ \mu\text{m} = 0{,}026842\ \text{m}^2 \times \frac{130}{1\,000\,000}\ \text{m} = \frac{3{,}48946}{1\,000\,000}\ \text{m}^3$$

La masse d'aluminium nécessaire est alors :

$$\frac{3{,}48946}{1\,000\,000}\ \text{m}^3 \times 2700\ \text{kg/m}^3 = 0{,}009421542\ \text{kg} = 9{,}421542\ \text{g}$$

La masse d'aluminium nécessaire pour fabriquer une canette classique est, au dixième de gramme près 9,4 grammes. En ajoutant la masse de l'anneau et la masse nécessaire pour souder, **il faut en tout 12,7 g d'aluminium**.

Remarque

Dans l'énoncé, il est dit : « la masse d'aluminium nécessaire pour souder le couvercle au reste de la canette est 1,9 g ». On peut alors s'interroger sur la possibilité de prendre en compte – ou pas – la masse d'aluminium nécessaire pour souder le fond au reste de la canette… Dans ce corrigé, nous avons fait le choix de ne pas la prendre en compte.

2) Nombre de canettes classiques pour un vélo

On sait que : 9 kg = 9 000 g.
De plus la masse d'une canette est d'environ 12,7 g.
Or : $9\,000\ \text{g} \div 12{,}7\ \text{g} \approx 708{,}7$ (arrondi à 0,1 près).

On estime à 709 le nombre de canettes classiques pour fabriquer un vélo.

DEUXIEME PARTIE

EXERCICE 1

1) Probabilité qu'une personne choisie au hasard soit « donneur universel »

D'après le tableau 2, les donneurs universels sont les personnes du groupe $\mathrm{O}-$. Or, d'après la répartition donnée dans le tableau 1,6% de la population française se trouve dans ce groupe.

La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population française soit donneur universel est donc : $\mathbf{\frac{6}{100} = 0{,}06}$.

Remarque

En notant P(«O − ») la probabilité de l'événement « la personne appartient au groupe O − », on peut écrire : P(« O − ») = 0,06.

2) Probabilité qu'une personne choisie au hasard soit « receveur universel »

De la même manière qu'à la question précédente, d'après les informations données dans les tableaux 1 et 2, les receveurs universels sont du groupe $\mathrm{AB}+$, ce qui représente 3% de la population française.

La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population française soit receveur universel est donc : $\mathbf{\frac{3}{100} = 0{,}03}$.

Remarque

Avec les notations précédentes, on peut écrire P(« AB + ») = 0,03.

3) Probabilité pour qu'une personne choisie au hasard puisse donner son sang à une personne du groupe B +

Pour donner son sang à une personne du groupe $\mathrm{B}+$, il faut, toujours d'après les informations données dans le tableau 2, être dans l'un des groupes suivants : $\mathrm{B}+$, $\mathrm{B}-$, $\mathrm{O}+$ ou $\mathrm{O}-$.

D'après les informations données dans le tableau 1 :

- la probabilité d'appartenir au groupe $\mathrm{B}+$ est égale à 0,09 (puisque 9% de la population française appartient à ce groupe) ;
- la probabilité d'appartenir au groupe $\mathrm{B}-$ est égale à 0,01 (puisque 1% de la population française appartient à ce groupe) ;
- la probabilité d'appartenir au groupe $\mathrm{O}+$ est égale à 0,36 (puisque 36% de la population française appartient à ce groupe) ;
- la probabilité d'appartenir au groupe $\mathrm{O}-$ est égale à 0,06 (voir question 1.).

De plus, il est impossible d'appartenir à deux de ces groupes à la fois. Par conséquent, la probabilité d'appartenir à l'un de ces groupes est égale à : $0{,}09 + 0{,}01 + 0{,}06 + 0{,}36 = 0{,}52$.

La probabilité qu'une personne choisie au hasard puisse donner son sang à une personne du groupe B+ est donc 0,52.

Remarque

Avec les notations précédentes, la probabilité de pouvoir donner son sang à une personne du groupe B+ est la somme des probabilités d'appartenir aux groupes B +, B −, O + ou O −, soit :

P(« donneur B + ») = P(« B + ») + P(«B − ») + P(« O + ») + P(« O − »).

Donc : P(« donneur B + ») = 0,09 + 0,01 + 0,36 + 0,06 = 0,52.

4) Probabilité qu'une personne du groupe O soit « donneur universel »

Méthode 1

D'après le tableau 1, sur 100 personnes de la population française, 36 appartiennent au groupe $O+$ et 6 appartiennent au groupe $\mathrm{O}-$, donc 42 personnes appartiennent au groupe O.

Sur les 42 personnes de groupe O, seules 6 personnes sont du groupe $\mathrm{O}-$, soit une probabilité de :

$\frac{6}{42} = \frac{1}{7} \approx 0{,}14$ (arrondi au centième).

La probabilité qu'une personne du groupe O soit un donneur universel est d'environ 0,14 (arrondi au centième).

Méthode 2

D'après le tableau 1, les personnes du groupe $\text{O}+$ représentent 36% de la population française et les personnes du groupe $\text{O}-$ représentent 6% de cette même population. Les personnes du groupe $\text{O}-$ sont donc six fois moins nombreuses que celles du groupe O+. Par conséquent dans le groupe O, s'il y a n personnes du groupe $\text{O}-$, il y en aura $6n$ du groupe $\text{O}+$.

La probabilité qu'une personne du groupe O soit un « donneur universel » est alors égale à :

$$\boldsymbol{\frac{n}{6n+n} = \frac{1}{7} \approx 0{,}14.}$$

Remarque

Cette question peut être traitée comme une probabilité conditionnelle notée $P_{«O»}(« \ O- »)$:

$$P_{«O»}(« \ \text{O}- ») = \frac{card(O \cap O-)}{card(O)} = \frac{6}{42}.$$

Attention ! $P_{«O»}(« \ O- »)$ se lit $P(« \ O- »)$ sachant O : c'est la probabilité d'être du groupe $O-$ sachant que l'on appartient au groupe O.

5) Nombre de « donneurs universels » en France

D'après le tableau 1, 6% de la population française sont des « donneurs universels ».
Pour une population de donneurs de 43 217 325, cela correspond à :

$$\frac{43\,217\,325 \times 6}{100} = 2\,593\,039{,}5.$$

Il y a environ 2 593 039 donneurs universels en France.

Remarque

On pourrait également répondre 2 593 040 donneurs universels en France, car il s'agit d'une estimation.

6) Pourcentage de la population française susceptible de donner son sang

Selon l'INSEE, la population française était de 66 627 602 personnes, et parmi elles 43 217 325 étaient susceptibles de donner leur sang.
On en déduit que pour 100 personnes françaises, le nombre de celles qui sont susceptibles de donner leur sang est égal à :

$$\frac{43\,217\,325 \times 100}{66\,627\,602} \approx 64{,}86.$$

Il y a environ 64,86% de la population (arrondi au centième) susceptible de donner son sang.

EXERCICE 2

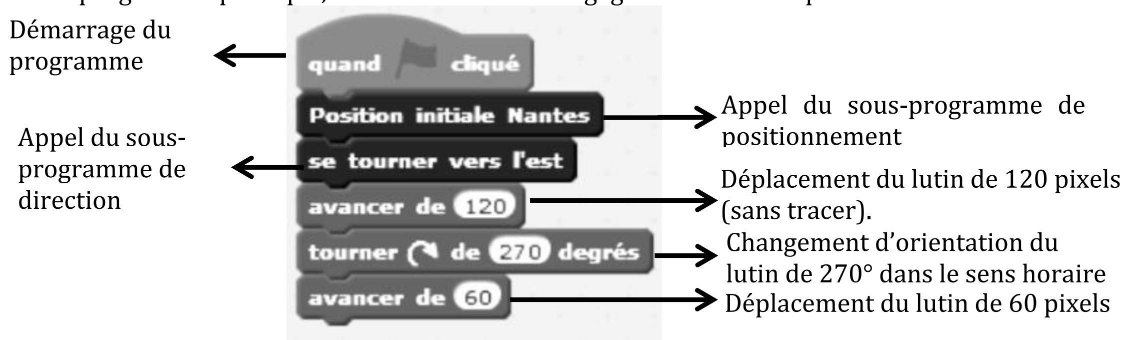
Remarque

Le détail de chaque instruction, donné ci-dessous, n'était pas attendu du candidat. Nous le présentons pour une meilleure compréhension du raisonnement.

Dans le sous-programme « Position initiale Nantes », les instructions du langage *Scratch* correspondent au positionnement du lutin « hélicoptère » au point de coordonnées (−93 ; 30).

Dans le sous-programme « Se tourner vers l'est », les instructions du langage *Scratch* correspondent à l'orientation du déplacement vers la droite.

Dans le programme principal, les instructions du langage *Scratch* correspondent aux actions suivantes :



Nombres à remplacer

Pour aller de Nantes à Paris, le lutin avance de deux cases (ce qui correspond à l'instruction « avancer de 120 » dans le script *Sratch*), puis il tourne vers sa droite de 270°, et avance encore d'une case (ce qui correspond à l'instruction « avancer de 60 »). On en déduit que la longueur d'une case représente 60 pixels.
Pour que l'hélicoptère avance horizontalement (vers la droite) de 3 cases, « 120 » doit être remplacé par « 180 ».
Pour que l'hélicoptère pivote (dans le sens horaire) de 90 degré vers la droite, « 270 » doit être remplacé par « 90 ».
« 60 » reste ainsi, l'hélicoptère atteint alors Lyon (il avance verticalement de deux cases vers le bas).

En conclusion, les nombres « 120 » et « 270 » doivent être remplacés par les nombres « 180 » et « 90 », le nombre « 60 » reste inchangé.

EXERCICE 3

1) Calcul mental de 45^2

45 est composé de 4 dizaines et de 5 unités, son carré s'obtient :

- en calculant $4 \times 5 = 20$, ce qui donne le nombre de centaines du résultat ;
- puis en écrivant 25 à la droite de 20 pour obtenir le résultat.

Soit $45^2 = 2025$.

2) Relation $n^2 = 100d(d+1) + 25$

Le nombre entier n peut s'écrire sous la forme : $n = 10d + 5$.
Alors : $n^2 = (10d + 5)^2$.
Ce qui donne après développement : $n^2 = 100d^2 + 2 \times 5 \times 10d + 5^2$.
Soit : $n^2 = 100d^2 + 100d + 25$.
Ou encore : $n^2 = 100d \times d + 100d \times 1 + 25$.
En mettant $100d$ en facteur , on obtient l'égalité :

$$\boldsymbol{n^2 = 100d(d+1) + 25.}$$

3) Explication de la relation précédente

Le produit *d(d + 1)* correspond à la première étape du calcul du carré, soit le produit du nombre de dizaines *d* par son successeur *(d + 1)*.
Le nombre obtenu étant multiplié par 100, il représente un nombre de centaines.
Puis on écrit 25 à droite, ce qui revient bien à ajouter 25 unités aux *d(d + 1)* centaines.

4) Calcul mental de $3{,}5^2$

Méthode 1

On peut écrire 3,5 sous la forme 35×10^{-1}.
Donc : $3{,}5^2 = (35 \times 10^{-1})^2 = 35^2 \times 10^{-2}$.
Pour calculer le carré de 35, on applique la technique de calcul mental : $35^2 = 100 \times 3 \times 4 + 25$.
Soit $35^2 = 1225$.
Donc : $3{,}5^2 = 1225 \times 10^{-2} = \mathbf{12{,}25}$.

Méthode 2

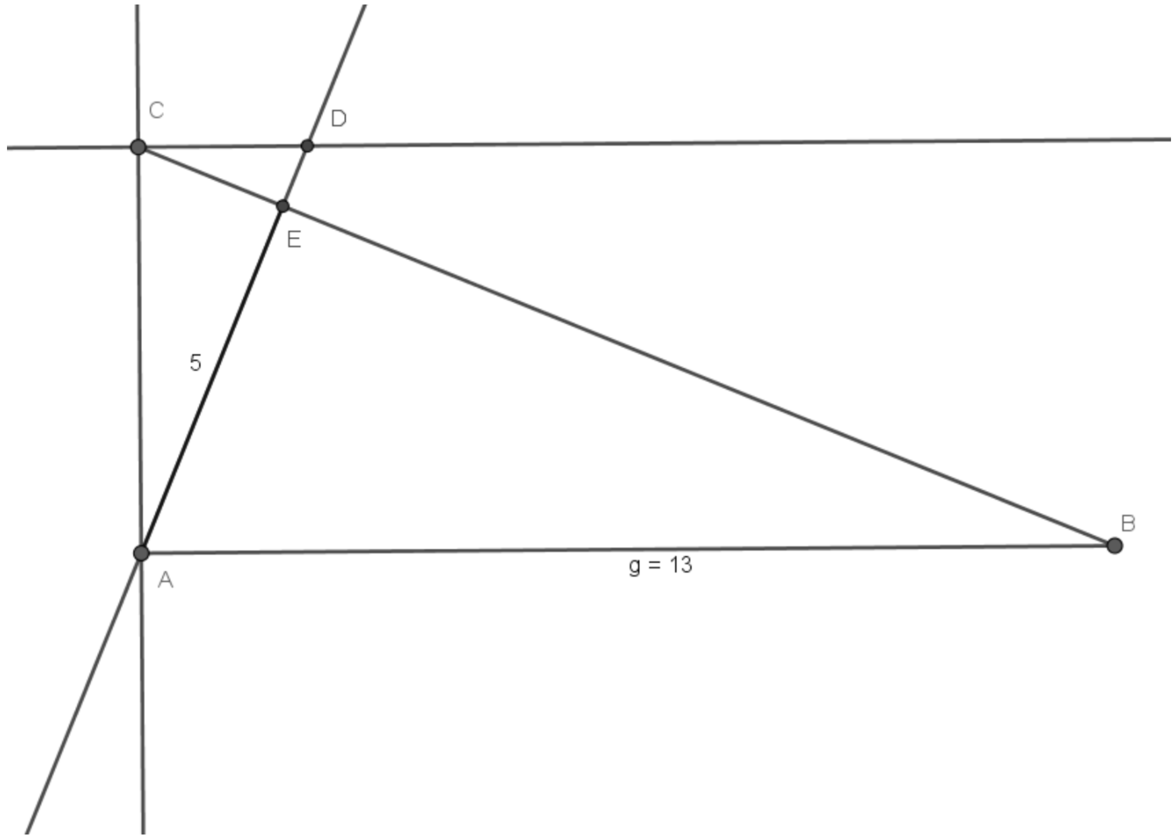
On peut écrire 3,5 sous la forme $35 \times 0{,}1$.
Donc : $3{,}5^2 = (35 \times 0{,}1)^2 = 35^2 \times 0{,}01 = 1225 \times 0{,}01 = \mathbf{12{,}25}$.

Méthode 3

On peut écrire 3,5 sous la forme $\frac{35}{10}$.
Donc : $3{,}5^2 = (\frac{35}{10})^2 = \frac{35^2}{10^2} = \frac{1225}{100} = \mathbf{12{,}25}$.

EXERCICE 4

1) Figure en vraie grandeur.



2) Aire du triangle CEA

Dans cette question, toutes les mesures de longueur sont exprimées en cm.

Méthode 1 : par calcul sur les longueurs

Pour calculer l'aire du triangle ACE en utilisant la formule de l'aire d'un triangle, il suffit de connaître AE et EC. Nous savons déjà que AE = 5.

Puisque C, E et B sont alignés : EC = BC – BE.

Calcul de BE

Le triangle AEB est rectangle en E, on peut appliquer le théorème de Pythagore : $AB^2 = AE^2 + BE^2$.
D'où : $BE^2 = AB^2 - AE^2 = 13^2 - 5^2 = 144$.
Donc $BE = 12$.

Calcul de BC

Dans le triangle rectangle ABC on a : $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$.
Dans le triangle rectangle AEB on a : $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{BE}{BA} = \dfrac{12}{13}$.
On en déduit que : $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{12}{13}$.
Ainsi : $BC = \dfrac{13 \times AB}{12}$.
Donc : $BC = \dfrac{13^2}{12}$.

Calcul de EC

$EC = BC - BE = \dfrac{13^2}{12} - 12$.

Calcul de l'aire de ACE

Aire ACE $= \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{13^2}{12} - 12\right) \times 5 \text{ cm}^2 \approx 5{,}20833 \text{ cm}^2$.
Or : $5{,}20833 \text{ cm}^2 = 520{,}833 \text{ mm}^2$.
L'aire du triangle CEA est d'environ 520,8 mm² (arrondi au dixième près).

Méthode 2 : par calcul sur les aires

On peut trouver l'aire de ACE par différence : Aire ACE = Aire ABC – Aire ABE.
Pour calculer les aires de ces deux triangles, on doit par calculer BE et BC.

Calcul de BE

Le triangle AEB est rectangle en E, on peut appliquer le théorème de Pythagore : $AB^2 = AE^2 + BE^2$.
D'où : $BE^2 = AB^2 - AE^2 = 13^2 - 5^2 = 144$.
Donc $BE = 12$.
On en déduit l'aire du triangle ABE : aire ABE $= \dfrac{1}{2} \times 5 \times 12 \text{ cm}^2 = 30 \text{ cm}^2$.

Calcul de BC

Dans le triangle rectangle ABC on a : $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$.
Dans le triangle rectangle AEB on a : $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{BE}{BA} = \dfrac{12}{13}$.
On en déduit que : $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{12}{13}$.
Ainsi : $BC = \dfrac{13 \times AB}{12}$.
Donc : $BC = \dfrac{13^2}{12}$.

On en déduit l'aire de ABC : Aire ABC $= \dfrac{BC \times AE}{2} \text{ cm}^2 = \dfrac{\frac{13^2}{12} \times 5}{2} \text{ cm}^2$.

Calcul de l'aire de ACE

Aire ACE = aire ABC – aire ABE .

Donc Aire ACE $= \dfrac{\frac{13^2}{12} \times 5}{2}$ cm² $- 30$ cm² $\approx 5{,}20833$ cm².
Or : 5,20833 cm² $=$ 520,833 mm².

L'aire du triangle CEA est d'environ 520,8 mm² (arrondi au dixième près).

Méthode 3 : identification de triangles semblables

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles car elles sont toutes les deux perpendiculaires à (AC). Les angles alternes-internes $\widehat{BAE}$ et $\widehat{ADC}$ sont égaux. Notons α la mesure en degré de l'angle $\widehat{BAE}$.
On a : $\widehat{BAE} = \widehat{ADC} = \alpha$.
Le triangle AEB est rectangle en E, donc : $\widehat{ABE} + 90 + \alpha = 180$.
Ainsi : $\widehat{ABE} = 90 - \alpha$.
Le triangle CED est rectangle en E donc : $\widehat{ECD} = 90 - \alpha$.
Le triangle AEC est rectangle en E, donc : $\widehat{ECA} + \widehat{CAE} + 90 = 180$.
Or $\widehat{CAE} = 90 - \alpha$, donc on a : $\widehat{ECA} = 180 - 90 - (90 - \alpha) = \alpha$.
Les triangles AEB et AEC ont leurs angles égaux à 90°, α et $(90 - \alpha)$. Ils sont donc semblables et les longueurs de leurs côtés sont donc proportionnelles.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AEB rectangle en E, on a :
$EB^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$. On a donc : EB = 12.

On a alors le tableau de proportionnalité suivant :

Côtés de AEB	AB = 13	AE = 5	EB = 12
Côtés de CEA	AC	CE	AE = 5

On peut ainsi calculer CE : $CE = \dfrac{5 \times 5}{12} = \dfrac{25}{12}$.

On peut alors calculer l'aire du triangle CEA : $\dfrac{CE \times EA}{2} = \dfrac{\frac{25}{12} \times 5}{2} = \dfrac{125}{24} \simeq 5{,}20833$.
Or : 5,20833 cm² $=$ 520,833 mm².

L'aire du triangle CEA est d'environ 520,8 mm² (arrondi au dixième près).

Méthode 3 bis :

En reprenant la méthode 2, il suffit de démontrer que les triangles ABE et AEC sont semblables pour trouver le coefficient de dilatation (agrandissement/réduction) entre ces deux triangles : AE est à AEC ce que EB est à AEB.

Ainsi le coefficient de dilatation est $\dfrac{5}{12}$.
Or on sait que si les longueurs sont multipliées par k, les aires sont multipliées par k^2.
L'aire du triangle AEC est donc : Aire AEC $= \left(\dfrac{5}{12}\right)^2 \times$ Aire ABE.
On peut calculer l'aire du triangle ABE : Aire ABE $= \dfrac{1}{2} \times 5 \times 12$ cm² $= 30$ cm².
On en déduit : Aire ACE $= \left(\dfrac{5}{12}\right)^2 \times 30$ cm² $\simeq 5{,}20833$ cm².
Or : 5,20833 cm² $=$ 520,833 mm².

L'aire du triangle CEA est d'environ 520,8 mm² (arrondi au dixième près).

TROISIÈME PARTIE

SITUATION 1

1) Deux procédures qu'un élève de fin de petite section peut utiliser pour affirmer qu'une collection est constituée de trois objets

Les procédures envisageables en fin de petite section sont les suivantes :

- percevoir visuellement et immédiatement que cette collection est constituée de trois objets (on parle aussi de *subitizing*) ;
- établir une correspondance terme à terme avec une collection dont on connaît le nombre d'objets (par exemple les doigts) ;
- dans le cas où cette collection est disposée comme la constellation trois du dé préalablement travaillée en classe, identifier cette constellation ;
- mettre en œuvre un dénombrement de cette collection :
    - énumérer en posant le doigt sur chaque objet tour à tour (sans en oublier et sans poser le doigt deux fois sur le même objet) et dire en même temps le mot nombre dans l'ordre « un, deux, trois » ; puis reprendre le dernier mot nombre énoncé « il y a trois objets » ;
    - prendre en compte visuellement chaque objet une seule fois et l'associer au mot-nombre correspondant : « un, deux, trois », puis conclure : « donc il y a trois objets ».

2) Activité à mettre en place en moyenne section pour travailler les décompositions du nombre quatre

Remarque

Cette question est très ouverte puisqu'une activité qui « travaille » les décompositions du nombre quatre peut être aussi bien une activité qui conduit à découvrir ces décompositions, qu'une activité qui met en jeu ou en évidence certaines de ces décompositions.

Ainsi on pourra proposer :

- une situation rituelle collective de petites comptines mettant en scène certaines décompositions de quatre, par exemple « Deux éléphants sur un vélo, deux éléphants dans une auto, ces quatre éléphants sont beaucoup trop gros ! » (voir Thomas Y. & Hersant M. (2015) *Maths à grands pas pour les PS-MS*. Retz. p.180) ; le récitatif de variantes de cette « calculine » propose ainsi un apprentissage par imprégnation ;
- proposer en atelier dirigé un jeu de « dominos du quatre » (dans lequel on aurait enlevé tous les dominos avec des constellations de nombres strictement plus grands que quatre) conduit à faire utiliser en contexte les décompositions du nombre quatre et à les expliciter ;
- avec le même objectif, une activité à deux, dans laquelle un élève montre aucun, un, deux, trois ou quatre doigts, et le second élève doit montrer le nombre de doigts nécessaires pour qu'au final on puisse compter 4 doigts ; une variante est de demander à deux élèves d'aller chercher en une fois juste ce qu'il faut de couverts et d'assiettes pour le goûter de poupées, attention chacun des deux élèves doit ramener des assiettes, des cuillères et des verres … qui sont au nombre de 4) ;
- une activité en atelier dirigé dans laquelle l'enseignant propose quatre objets, en cache une partie et demande aux élèves le nombre d'objets cachés correspond à une activité de renforcement.

3) Intérêt d'utiliser le dé particulier

Ce dé propose des **représentations des nombres différentes** de celles du dé classique. Les constellations proposées sur ce dé **mettent en évidence la parité ou l'imparité des nombres** puisque les constellations fonctionnent « par paires » : ce n'est pas le cas pour les constellations « classiques ».

De plus ce dé présente des **décompositions des nombres de trois à cinq différentes de celles induites par les constellations du dé « classique »**.

Nous présentons dans le tableau ci-dessous les différentes décompositions induites dans chaque cas :

Nombre	**Dé utilisé**	**Dé « classique »**
trois	Apparaît comme deux et un.	Apparaît comme un, un et un (points en diagonale).
quatre	Apparaît comme deux et deux.	Apparaît comme un, un, un et un (points à chaque angle de la face carrée).
cinq	Peut apparaître comme trois et deux, ou bien comme deux, deux et un, ou encore comme quatre et un.	Apparaît comme quatre et un.
six	Peut apparaître comme cinq et un (en référence à la constellation précédente), ou bien comme trois et trois (les deux lignes), ou encore comme deux, deux et deux (les trois colonnes).	Peut apparaître comme trois et trois (les deux lignes), ou bien comme deux, deux et deux (les trois colonnes).

SITUATION 2

1) Analyse des productions

Production de Robin

Robin s'appuie sur la connaissance du fait numérique « 5 c'est la moitié de 10 ».
Il commence par calculer le produit de 68 par 10 (en appliquant peut-être la loi des zéros) : il obtient 680 (résultat correct).
Il divise alors 680 par 2 (peut-être mentalement) pour obtenir 340 (résultat correct).
Sa procédure et son résultat sont corrects.
Cependant l'emploi du signe « = » est incorrect : Robin enchaîne les opérations sans les séparer ce qui produit une écriture mathématiquement fausse mais qui reflète bien sa façon de calculer « dix fois soixante-huit égale 680, divisé par deux égale 340 ».

Production d'Eléonore

Eléonore s'appuie sur sa connaissance de la table de multiplication du 5.
Elle décompose 68 en $70 - 2$.
Elle calcule alors le produit de 70 par 5 (certainement en deux temps : d'abord en calculant le produit de 7 par 5, puis celui du résultat 35 par 10 en appliquant la loi des zéros) : le résultat est correct.
Elle calcule également le produit de 2 par 5 (résultat correct).
Elle soustrait le second nombre au premier pour obtenir le résultat correct.

Production de Lucie

Lucie s'appuie sur sa connaissance de la table de multiplication du 5.
Elle décompose 68 en $60 + 8$.
Elle calcule alors le produit de 60 par 5 (certainement en deux temps : d'abord en calculant le produit de 6 par 5, puis celui du résultat 30 par 10 en appliquant la loi des zéros) : le résultat est correct.
Elle calcule également le produit de 8 par 5 (résultat correct).
Elle ajoute alors les deux nombres pour obtenir le résultat correct.

Production de Mathys

On peut penser que Mathys cherche à mettre en œuvre la technique opératoire de la multiplication.
Il calcule en effet chiffre à chiffre.
Ses résultats intermédiaires sont corrects.
Il ajoute alors les nombres obtenus (addition juste).
Cependant il traduit le résultat du produit de 6 dizaines par 5 comme 30 unités.
Son résultat est donc incorrect.

Remarque

La procédure de Robin met en jeu l'associativité et la commutativité de la multiplication ; les procédures d'Eléonore et de Lucie mettent en jeu la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

2) Trois démarches attendues d'un élève de cycle 3 pour calculer en ligne 25×28, et connaissances en jeu dans ces démarches

Remarque

Dans cette question nous avons choisi de comprendre le terme « connaissances » en « connaissances mathématiques ». Ces connaissances « en jeu » peuvent être effectives et explicitement utilisées par l'élève (comme par exemple la connaissance des tables de multiplication), ou bien être utilisées implicitement en contexte – elles sont alors sous-jacentes à la procédure (comme par exemple l'utilisation des propriétés de la multiplication).

Procédure 1

$25 \times 28 = 25 \times (4 \times 7)$	connaissance du répertoire multiplicatif (table de 7)
$= (25 \times 4) \times 7$	associativité de la multiplication
$= 100 \times 7$	connaissance du fait numérique $25 \times 4 = 100$
$= 700$	connaissance de la multiplication par 100

Procédure 2

$25 \times 28 = 25 \times (20 + 8)$	décomposition additive d'un nombre en dizaines et unités
$= 25 \times 20 + 25 \times 8$	distributivité de la multiplication par rapport à l'addition
$= (25 \times 2) \times 10 + 25 \times 8$	associativité de la multiplication
$= 50 \times 10 + 200$	connaissance des faits numériques impliquant 25, 50, 100, 200
$= 500 + 200$	connaissance de la multiplication par 10
$= 700$	connaissance du répertoire additif et valeur positionnelle des chiffres dans le nombre

Procédure 2 bis

$25 \times 28 = 25 \times (20 + 8)$	décomposition additive en dizaines et unités
$= 25 \times 20 + 25 \times 8$	distributivité de la multiplication par rapport à l'addition
$= 25 \times 20 + 200$	connaissance du fait numérique $25 \times 8 = 200$
$= (20 + 5) \times 20 + 200$	décomposition additive en dizaines et unités
$= 20 \times 20 + 5 \times 20 + 200$	distributivité de la multiplication par rapport à l'addition
$= 20 \times 20 + 100 + 200$	connaissance du fait numérique $5 \times 20 = 100$
$= 400 + 100 + 200$	connaissance de la multiplication par 10
$= 700$	connaissance du répertoire additif et valeur positionnelle des chiffres dans le nombre

Procédure 3

$25 \times 28 = 25 \times (30 - 2)$	décomposition soustractive
$= 25 \times 30 - 25 \times 2$	distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction
$= (25 \times 3) \times 10 - 25 \times 2$	associativité de la multiplication
$= 75 \times 10 - 50$	connaissance des faits numériques impliquant 25, 50, 75
$= 750 - 50$	connaissance de la multiplication par 10
$= 700$	connaissance du répertoire additif et valeur positionnelle des chiffres dans le nombre

Procédure 4

$25 \times 28 = 25 \times (2 \times 14)$	connaissance des doubles et moitiés
$= (25 \times 2) \times 14$	associativité de la multiplication
$= 50 \times 14$	connaissance du fait numérique $25 \times 2 = 50$
$= (100 \div 2) \times 14$	connaissance du fait numérique $50 = 100 \div 2$
$= (100 \times 14) \div 2$	associativité de la multiplication (et de la division)
$= 1400 \div 2$	connaissance de la multiplication par 100
$= 700$	connaissance des doubles et moitiés

Procédure 4 bis

$25 \times 28 = 25 \times (2 \times 14)$	connaissance des doubles et moitiés
$= (25 \times 2) \times 14$	associativité de la multiplication

	$= 50 \times 14$	décomposition d'un nombre en dizaines et unités
	$= 50 \times 10 + 50 \times 4$	distributivité de la multiplication par rapport à l'addition
	$= 500 + 50 \times 4$	connaissance de la multiplication par 10
	$= 500 + 200$	connaissance de la relation entre 50 et 200
	$= 700$	connaissance du répertoire additif et valeur positionnelle des chiffres dans le nombre

Procédure 4 ter

25×28	$= 25 \times (2 \times 14)$	connaissance des doubles et moitiés
	$= (25 \times 2) \times 14$	associativité de la multiplication
	$= 50 \times 14$	connaissance du fait numérique $25 \times 2 = 500$
	$= 50 \times 2 \times 7$	connaissance des doubles et moitiés
	$= 100 \times 7$	connaissance des faits numériques $50 \times 2 = 100$
	$= 700$	connaissance de la multiplication par 100

Procédure 5

25×28	$= (20 + 5) \times 28$	décomposition additive en dizaines et unités
	$= 20 \times 28 + 5 \times 28$	distributivité de la multiplication par rapport à l'addition
	$= 560 + 5 \times 28$	connaissance de la multiplication par 10
	$= 560 + (10 \div 2) \times 28$	connaissance des doubles et moitiés
	$= 560 + (10 \times 28) \div 2$	associativité de la multiplication
	$= 560 + 280 \div 2$	connaissance de la multiplication par 10
	$= 560 + 140$	connaissance des doubles et moitiés
	$= 700$	compléments à la centaine supérieure

Procédure 6

25×28	$= (5 \times 5) \times (2 \times 2 \times 7)$	décomposition multiplicative des nombres en jeu
	$= 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 7$	associativité de la multiplication
	$= 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 7$	commutativité de la multiplication
	$= (5 \times 2) \times (5 \times 2) \times 7$	associativité de la multiplication
	$= 10 \times 10 \times 7$	connaissance du fait numérique $5 \times 2 = 10$
	$= 100\ 7$	connaissance du fait numérique $10 \times 10 = 100$
	$= 700$	connaissance de la multiplication par 100

SITUATION 3

1) Champ mathématique travaillé dans la situation du puzzle

La situation du puzzle est une situation d'agrandissement. Elle se situe donc **dans le thème de la proportionnalité dans le cadre géométrique** : les longueurs des côtés de chaque élément agrandi sont proportionnelles aux longueurs des côtés des éléments correspondant du puzzle initial.

Le coefficient de proportionnalité est égal à $\frac{6}{4}$, c'est-à-dire $\frac{3}{2}$ ou encore 1,5.

Remarque :

La fonction linéaire f correspondant à cet agrandissement est alors donnée par : $f(x) = \frac{3}{2}x = 1{,}5x$.

2) Analyse des stratégies des différents groupes

Stratégie du groupe de l'affiche n°1

On peut penser que le groupe a identifié une relation additive entre les données : six c'est quatre plus deux. Il a donc appliqué cette relation aux longueurs 2 cm et 7 cm des côtés verticaux des figures B, F et E, ainsi qu'aux longueurs 4 cm, 2 cm et 5 cm des côtés horizontaux des figures C, D et E. Il a ainsi obtenu deux côtés consécutifs d'un carré agrandi, de longueur 17 cm. Pour respecter cette dimension sur les deux autres côtés du carré agrandi, il est alors nécessaire d'augmenter de 6 cm chaque côté du carré initial. Or chacun de ces deux côtés correspond à la réunion de côtés de deux pièces (A et C pour la partie verticale, A et B pour la

partie horizontale). Le groupe a alors ajouté 3 cm aux longueurs 6 cm et 5 cm des côtés verticaux des deux pièces A et C et de ceux horizontaux des deux pièces A et B.
Les calculs sont corrects mais la procédure est incorrecte car elle réfère à une représentation erronée de cette situation de proportionnalité : pour les élèves de ce groupe, agrandir c'est ajouter.

Remarque

Les élèves commencent par écrire « nous avons fait un tableau ». Cette phrase pourrait s'interpréter en tant que « tableau de proportionnalité » ou alors en tant que « tableau d'écriture avec des lignes et des colonnes ». Sans discussion avec les élèves, il n'est pas possible d'identifier la signification de cet écrit.

Stratégie du groupe de l'affiche n°2

Il semble que les élèves de ce groupe aient identifié une relation additive entre les données, mais dépendante de ces données :
à un nombre x, il faut lui ajouter son « quart » (soit $\frac{x}{4}$) « multiplié par 2 » (soit $2 \times \frac{x}{4}$ ou encore $\frac{x}{2}$).
Ainsi le nombre qu'il faut ajouter à quatre pour obtenir six (le nombre deux) correspond au quart de quatre (c'est-à-dire un) multiplié par deux. Ils ont appliqué cette méthode de calcul à toutes les valeurs numériques données. Les calculs sont exacts et explicités.
Cette méthode est la traduction de la fonction numérique $x \rightarrow x + \frac{x}{2}$. Elle correspond à une représentation correcte de cette situation d'agrandissement.

Stratégie du groupe de l'affiche n°3

Les élèves de ce groupe ont cherché une relation multiplicative entre les données. Pour cela, ils ont procédé en deux temps : d'abord en identifiant deux comme diviseur commun aux nombres quatre et six (c'est même leur plus grand diviseur commun), puis en recherchant le nombre par lequel il faut diviser quatre pour obtenir deux, puis celui par lequel il faut multiplier deux pour obtenir six. Les élèves se sont appuyés sur leur connaissance de la table de 2 et ont justifié leur procédure en écrivant les calculs : 4 ÷ 2 = 2 et 2 × 3 = 6. Ils ont alors explicité leur méthode de calcul, diviser par deux puis multiplier par trois, dans une phrase et l'ont appliquée à toutes les valeurs numériques données. Les calculs sont exacts et explicités.
Cette méthode s'appuie sur une représentation juste correcte de cette situation d'agrandissement « agrandir, c'est multiplier ».

Remarque

Cette procédure est la reconnaissance d'une fonction multiplicative sous forme d'opérateur composé de « diviser par 2 » et « multiplier par 3 ».

3) Procédures utilisées par le groupe ayant produit l'affiche 4

Les élèves de ce groupe ont choisi une présentation en tableau. Ils explicitent ensuite leurs calculs au-dessous du tableau. On peut penser que ces élèves n'ont pas rempli le tableau dans l'ordre d'apparition des données, mais plutôt en fonction des nombres en jeu en commençant par exemple par le nombre 2, et qu'ils ont fait fonctionner les propriétés de la fonction linéaire représentant la situation de proportionnalité :

- propriété multiplicative d'abord dans le cas de l'image du nombre 2 : $f(2) = f\left(\frac{4}{2}\right) = \frac{f(4)}{2}$ puisque 3 est obtenu en remarquant que c'est la moitié de 6 (sous-entendu puisque 2 est la moitié de 4) ;
- propriété additive ensuite dans le cas de l'image du nombre 6 : $f(6) = f(4+2) = f(4) + f(2)$ puisque 9 est obtenu en ajoutant 6 et 3 (sous-entendu puisque 6 est la somme de 4 et de 2 dont on connaît les images) ;
- propriétés additive et multiplicative dans le cas de l'image du nombre 5 :
  $f(5) = f(4+1) = f\left(4 + \frac{2}{2}\right) = f(4) + \frac{f(2)}{2}$ (1 est vu comme la moitié de 2) ;
- propriétés additive et multiplicative dans le cas de l'image du nombre 9 :
  $f(9) = f(4+4+1) = f\left(4+4+\frac{2}{2}\right) = f(4) + f(4) + \frac{f(2)}{2}$ (1 est vu comme la moitié de 2) ;
- propriété additive enfin dans le cas de l'image du nombre 7 vu comme $5 + 2$:
  $f(7) = f(5+2) = f(5) + f(2)$.

GROUPEMENT 3 – AVRIL 2018

PREMIÈRE PARTIE

1) Vérification que la distance d'un tour de piste complet parcourue par le coureur du couloir 1 est d'environ 400 m

La distance d'un tour de piste complet parcourue par le coureur du couloir 1 correspond à la longueur de la ligne intérieure du couloir 1, qui est composée de 2 segments de longueur 100 m et deux demi-cercles de rayon 31,83 m : $\mathbf{2 \times 100\ m + 2 \times \pi \times 31,83\ m \approx 400\ m}$

La distance d'un tour de piste complet parcourue par le coureur du couloir 1 est d'environ 400 m.

2) Dessin du couloir n°1 à l'échelle 1/1200. Indiquer les calculs effectués pour réaliser la construction

Les deux bords du couloir 1 ont une longueur de 100 m = 10 000 cm.
Les deux demi-cercles du bord intérieur du couloir 1 ont comme rayon 31,83 m = 3 183 cm.
La largeur du couloir 1 est de 1,22 m = 122 cm.
Les deux demi-cercles du bord extérieur du couloir 1 ont comme rayon :
31,83 m + 1,22 m = 33,05 m = 3305 cm

Calculons les dimensions du dessin, au mm près, sachant que 1 cm sur le dessin représente 1200 cm sur la piste :

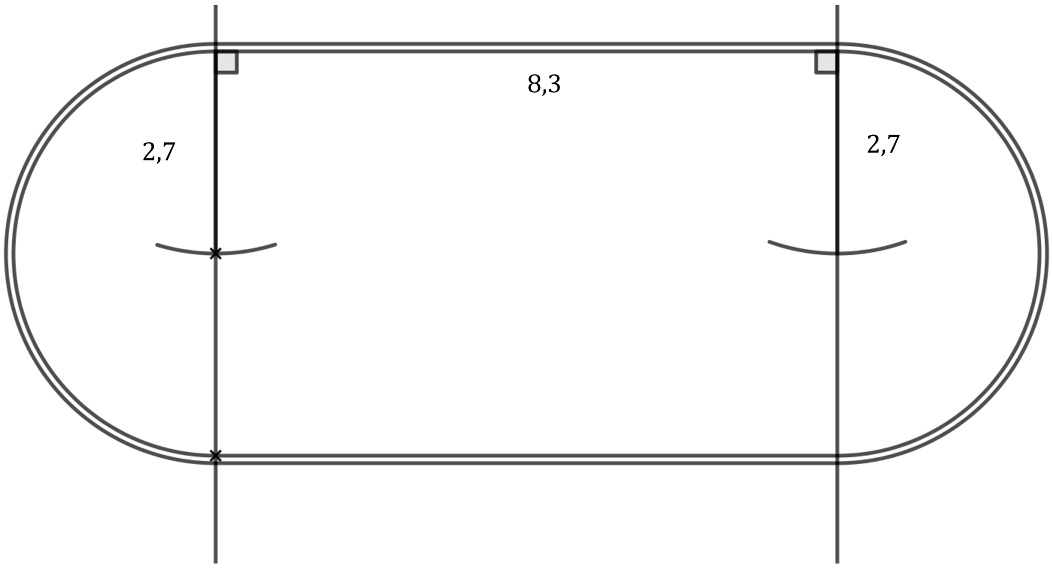
$10\,000 \text{ cm} \times \frac{1}{1200} = \frac{25}{3} \text{ cm} \approx 8,3 \text{ cm}$

$3\,183 \text{ cm} \times \frac{1}{1200} = \frac{1061}{400} \text{ cm} \approx 2,7 \text{ cm}$

$122 \text{ cm} \times \frac{1}{1200} \approx 0,1 \text{ cm}$

$3\,305 \text{ cm} \times \frac{1}{1200} \approx 2,8 \text{ cm}$

Sur le dessin, la ligne intérieure est composée de deux segments de 8,3 cm et de deux demi-cercles de rayon 2,7 cm. La ligne extérieure est composée de deux demi-cercles de rayon 2,8 cm et de même centre que ceux de la ligne intérieure, et de deux segments de 8,3 cm parallèles à ceux de la ligne intérieure, écartés de 0,1 cm.



Remarque

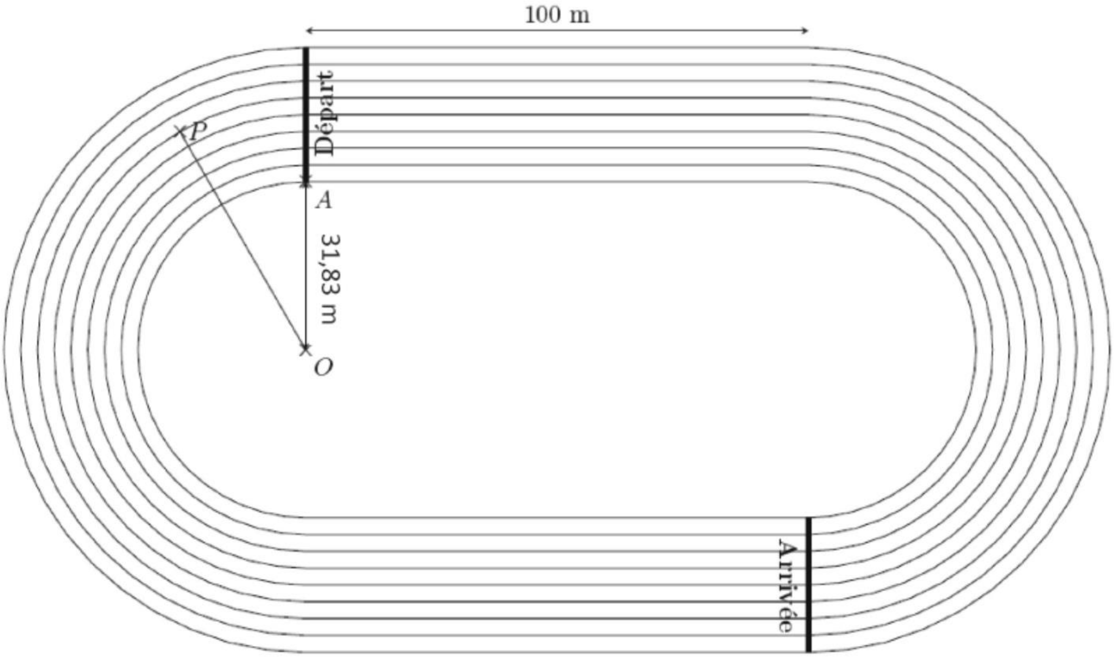
Pour réaliser le dessin, on peut tracer un premier segment de 8,3 cm de longueur et les deux droites perpendiculaires à ce segment en chacune de ses extrémités. Pour trouver le centre des demi-cercles, on reporte au compas le rayon 2,7 cm sur les deux perpendiculaires à partir des extrémités du segment.

3) Explication du décalage au départ d'une course de 200 m

Chaque ligne délimitant les couloirs est composée de deux segments de 100 m et de deux demi-cercles dont les rayons vont croissant de l'intérieur vers l'extérieur. La longueur de chaque ligne est donc croissante du 1er au 8ème couloir.
Sachant que la ligne d'arrivée est tracée de manière perpendiculaire au couloir, il est nécessaire de placer les positions de départ des coureurs de manière équitable : chacune doit être à 200 m de la ligne d'arrivée.

Au départ les 8 coureurs ne seront donc pas placés sur une même ligne de départ. Il faudra donc un décalage.

4) a) Calcul du décalage du coureur du couloir n°6 au centimètre près



$\mathbf{OP = 31,83\ m + 5 \times 1,22\ m = 37,93\ m}$

La longueur du demi-cercle sur lequel est le point P est donc 37,93π m.
Comme il faut que la distance de P à l'arrivée soit de 200 m, il faut que la distance parcourue sur ce demi-cercle par le coureur soit de 100 m. Le décalage est donc (37,93π − 100) m ≈ 19,16 m à 1 cm près .

Le décalage du coureur du couloir n°6 est 19, 16 m à 1 cm près.

4) b) Calcul de la mesure de l'angle α pour le couloir n°6, arrondie au dixième de degré

La mesure d'un angle au centre est proportionnelle à la longueur de l'arc intercepté.
Pour le demi-cercle de longueur 37,93π m, la mesure de l'angle est 180°.
Pour l'arc correspondant au décalage de longueur 19,16 m, la mesure de l'angle est α.
On a donc le tableau de proportionnalité suivant :

Longueur de l'arc en m	37,93π m	19,16 m
Angle au centre en °	180°	α

$$\alpha = \frac{180° \times 19,16\ \text{m}}{37,93\pi\ \text{m}} \approx 28,9°$$

La mesure de l'angle α pour le couloir n°6 est 28,9° au dixième de degré près.

4) c) Proportionnalité entre le numéro du couloir et la valeur de α ?

La courbe (donnée dans l'énoncé) représentant la fonction donnant α en fonction du numéro de couloir n'est pas une droite.

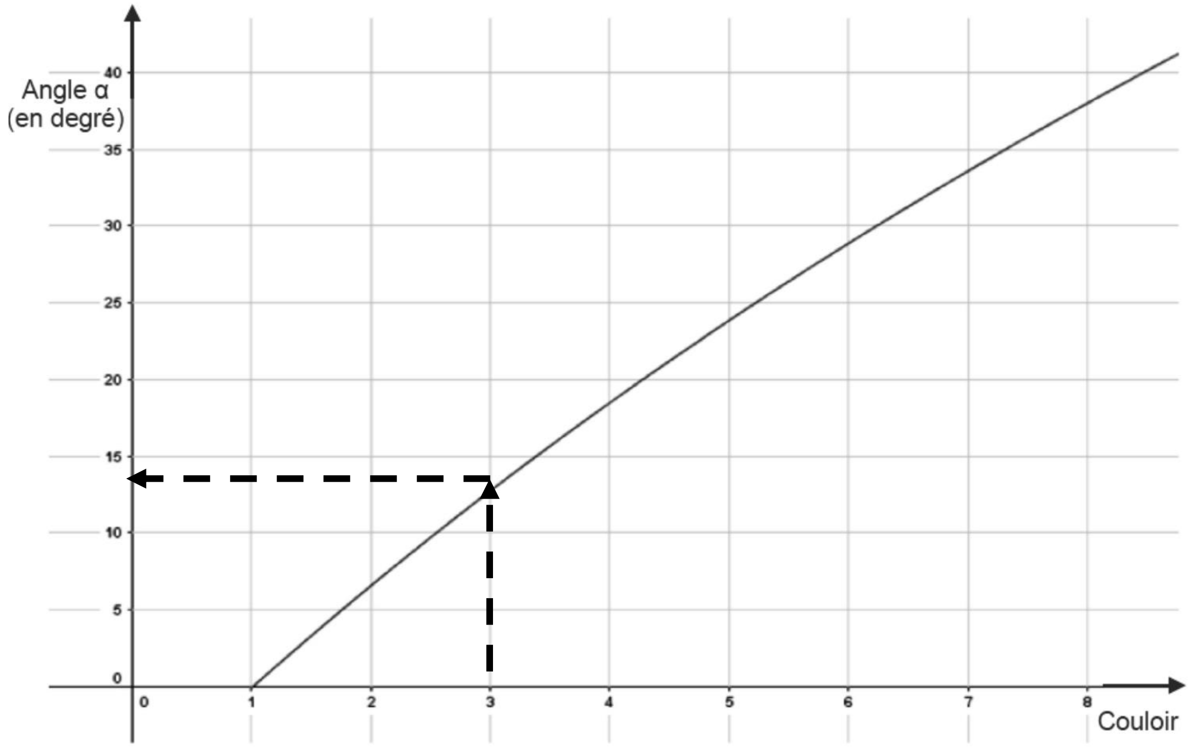
Le numéro de couloir et la valeur de α ne sont donc pas proportionnels.

Autre justification possible

La courbe représentant la fonction donnant α en fonction du numéro de couloir ne passe pas par l'origine du repère.

Le numéro de couloir et la valeur de α ne sont donc pas proportionnels.

4) d) Encadrement d'amplitude 2° de l'angle α pour le couloir n°3, par lecture graphique



Sur le graphique, la valeur de α correspondant au couloir 3 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 3. Cette ordonnée est comprise entre 12° et 14°, $(14° - 12° \;=\; 2°)$.

$12° < \alpha < 14°$ est donc un encadrement d'amplitude 2° de la valeur de α pour le couloir n°3.

4) e) Formule à entrer dans la case B2 pour calculer le décalage

Notons n le numéro de couloir, et calculons le décalage et l'angle en fonction de n :

Le rayon du demi-cercle intérieur du couloir n est $31{,}83 \text{ m} + (n-1) \times 1{,}22 \text{ m}$

Le décalage pour le couloir n correspond à la longueur du demi-cercle intérieur auquel on soustrait 100 m :

$$(31{,}83 \text{ m} + (n-1) \times 1{,}22 \text{ m}) \times \pi - 100 \text{ m}$$

La formule qui calcule ce décalage est : =PI()*((A2-1)*1,22+31,83)–100 ; on la copie dans la case B2 puis on la fait glisser dans toute la colonne.

5) a) Vitesse moyenne de Usain Bolt en km/h

La vitesse moyenne en km/h s'obtient en divisant la distance parcourue en km par la durée du parcours en h. La distance parcourue est 200 m , soit 0,2 km et la durée est 19,19 s , soit $\dfrac{19{,}19}{3600}$ h.

La vitesse moyenne d'Usain Bolt en km/h est donc :

$$\frac{0{,}2 \text{ km}}{\frac{19{,}19}{3600} \text{ h}} = 0{,}2 \text{ km} \times \frac{3600}{19{,}19 \text{ h}} = \frac{720 \text{ km}}{19{,}19 \text{ h}} \quad \text{soit environ 37,5 km/h au dixième près.}$$

La vitesse moyenne du Jamaïcain Usain Bolt est de 37,5 km/h au dixième près.

5) b) Temps mis par Usain Bolt pour effectuer à cette vitesse un marathon

Remarque

L'expression « à cette vitesse » peut être interprétée de deux façons différentes : on peut utiliser dans les calculs soit la valeur exacte soit la valeur approchée obtenue à la question précédente.

Avec la valeur exacte de la vitesse moyenne

À vitesse constante, la durée de parcours est proportionnelle à la distance parcourue.
On a le tableau de proportionnalité suivant :

Distance parcourue	$\frac{720}{19{,}19}$ km	42,195 km
Durée du trajet	1 h	T

d'où $\quad T = \frac{42{,}195}{\frac{720}{19{,}19}}\text{ h} = 42{,}195 \times \frac{19{,}19}{720}\text{ h} = \frac{809{,}72205}{720}\text{ h} = \frac{720 + 89{,}72205}{720}\text{ h} = 1\text{ h} + \frac{89{,}72205}{720}\text{ h}$

soit $\quad T = 1\text{ h} + \frac{89{,}72205 \times 60}{720}\text{ min} = 1\text{ h} + \frac{5383{,}323}{720}\text{ min} = 1\text{ h} + \frac{7 \times 720 + 343{,}323}{720}\text{ min}$

et enfin $T = 1\text{ h} + 7\text{ min} + \frac{343{,}323 \times 60}{720}\text{ s}$

soit $T \approx 1\text{ h} + 7\text{ min} + 29\text{ s}$.

À la vitesse de 37,5 km/h, le Jamaïcain Usain Bolt mettrait à la seconde près 1 h 7 min 29 s pour effectuer un marathon de 42,195 km.

Avec la valeur arrondie au dixième de la vitesse moyenne

$T = \frac{42{,}195}{37{,}5}\text{ h} = 1{,}1252\text{ h} = 1\text{ h} + 0{,}1252 \times 60\text{ min} = 1\text{ h} + 7{,}512\text{ min}$

soit $T = 1\text{ h} + 7\text{ min} + 0{,}512 \times 60\text{ s}$

soit $T \approx 1\text{ h} + 7\text{ min} + 31\text{ s}$.

À la vitesse de 37,5 km/h, le Jamaïcain Usain Bolt mettrait à la seconde près 1 h 7 min 31 s pour effectuer un marathon de 42,195 km.

5) c) Pourcentage de réduction par Usain Bolt du précédent record du monde de 200 m

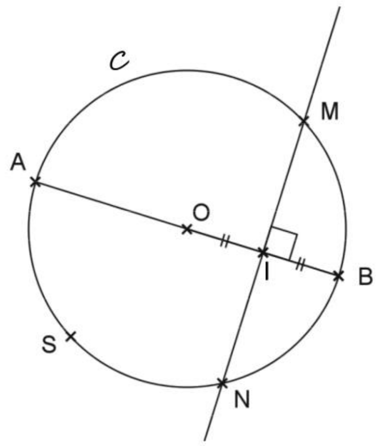
Usain Bolt a amélioré le précédent record de $19{,}32\ s - 19{,}19\ s$ soit $0{,}13\ s$.
Ce qui, ramené au record précédent, correspond à un pourcentage de :

$$\frac{0{,}13}{19{,}32} \times 100 \approx 0{,}67\%$$

Usain Bolt a réduit le temps record de 0,67% à 0,01% près.

DEUXIÈME PARTIE

EXERCICE 1



1) Nature du triangle OMB

M est un des points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ de centre O avec la médiatrice du segment [OB] donc :

- M appartient à la médiatrice du segment [OB], d'où MO = MB.
- M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O d'où [MO] est un rayon du cercle. Or le segment [AB] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ de centre O, donc [OB] est un rayon du cercle, d'où MO = OB.

On a donc MO = MB = OB.

Le triangle OMB est donc un triangle équilatéral.

2) Nature du quadrilatère AMBS

Méthode 1

M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] donc le triangle AMB est rectangle en M, le quadrilatère AMBS possède donc un angle droit en M.
Le point S est le symétrique du point M par rapport au point O, donc O est le milieu du segment [MS].
Le point O est le centre du cercle de diamètre [AB], donc O est le milieu du segment [AB].
Le quadrilatère AMBS a donc ses diagonales [MS] et [AB] qui se coupent en leur milieu O, AMBS est donc un parallélogramme.

Or ce parallélogramme a un angle droit, **il s'agit donc d'un rectangle**.

Méthode 2

Le point O est le centre du cercle de diamètre [AB], donc O est le milieu du segment [AB].
Le point S est le symétrique du point M par rapport au point O, donc O est le milieu du segment [MS], et ce segment [MS] est un diamètre du cercle. On a donc MS = AB.
Le quadrilatère AMBS a donc ses diagonales sécantes en leur milieu et de même longueur

Le quadrilatère AMBS est donc un rectangle.

3) Valeur exacte de l'aire du rectangle

Méthode 1

L'aire du rectangle est égale à MB $\times$ MA.
D'après 1), MB est égal au rayon du cercle $\mathcal{C}$ donc MB = 5 cm.
Le segment [AB] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ donc AB = 10 cm.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AMB rectangle en M : $AB^2 = AM^2 + MB^2$.
Donc $AM^2 = AB^2 - MB^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75$ soit $AM = \sqrt{75}$ cm $= 5\sqrt{3}$ cm.
Ainsi MB $\times$ MA = 5 cm $\times$ $5\sqrt{3}$ cm = $25\sqrt{3}$ cm².

L'aire du rectangle est égale à $25\sqrt{3}$ cm²

Méthode 2

L'aire du rectangle est égale à MB $\times$ MA.
D'après 1), MB est égal au rayon du cercle $\mathcal{C}$ donc MB $=$ 5 cm.
D'après 1), le triangle OMB est équilatéral, de plus B, O et A sont alignés dans cet ordre donc $\widehat{\text{MBA}} = 60°$.
Dans le triangle AMB rectangle en M, on a : $\tan \widehat{\text{MBA}} = \dfrac{\text{MA}}{\text{MB}}$
d'où $\text{MA} = \text{MB} \times \tan \widehat{\text{MBA}}$
Ainsi $\text{MB} \times \text{MA} = 5 \text{ cm} \times 5 \tan 60° \text{ cm} = 25 \times \tan 60° \text{ cm}^2 = \mathbf{25\sqrt{3}\ cm^2}$

L'aire du rectangle est égale à 25 $\sqrt{3}$ cm²

Méthode 3

L'aire du rectangle AMBS est égale à deux fois l'aire du triangle AMB car [AB] est une de ses diagonales.
L'aire du triangle AMB est égale à $\dfrac{\text{AB} \times \text{IM}}{2}$.
I étant le milieu de [OB], $\text{IB} = \dfrac{5}{2}$ cm .
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle IBM rectangle en I : $\text{MB}^2 = \text{IM}^2 + \text{IB}^2$.
Donc $\text{IM}^2 = \text{MB}^2 - \text{IB}^2 = 5^2 - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = 25 - \dfrac{25}{4} = \dfrac{75}{4}$.
Donc $\text{IM} = \sqrt{\dfrac{75}{4}} \text{ cm} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.
Ainsi $\dfrac{\text{AB} \times \text{IM}}{2} = \dfrac{10 \text{ cm} \times \text{IM}}{2} = 5 \text{ cm} \times \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = \dfrac{25\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$.
L'aire du rectangle est donc $2 \times \dfrac{25\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$, soit $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

L'aire du rectangle est égale à 25 $\sqrt{3}$ cm²

4) Nature du quadrilatère OMBN

Méthode 1

Les points M et N appartiennent à la médiatrice du segment [OB] donc MO = MB et N0 = NB.
De plus, les points M et N appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre O donc MO $=$ NO.
On a donc MO = MB = N0 = NB.

Ainsi, le quadrilatère OMBN a ses quatre côtés de même longueur, **il s'agit donc d'un losange**.

Méthode 2

Les points M et N appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre O donc MO = NO, et le triangle OMN est isocèle en O.
Comme (MI) est médiatrice de [OB], (OI) est perpendiculaire à (MN), donc (OI) est la hauteur issue de O dans le triangle OMN.
Comme OMN est isocèle en O, (OI) est aussi médiane, et I est donc milieu de [MN].

Ainsi, le quadrilatère OMBN a ses diagonales sécantes en leur milieu et perpendiculaires, **il s'agit donc d'un losange.**

EXERCICE 2

1) Affirmation 1 : 126 possède exactement 10 diviseurs.

Méthode 1 (identification de tous les diviseurs positifs de 126)

On énumère tous les diviseurs possibles. La recherche exhaustive doit passer par une procédure permettant de ne pas en oublier. On les teste successivement à partir de 1.

126 est divisible par 1 (comme tout entier) : 126 $=$ 1 $\times$ 126 ; par conséquent il est aussi divisible par 126.

126 est divisible par 2 (c'est un nombre pair) : 126 $=$ 2 $\times$ 63 ; par conséquent il est aussi divisible par 63.

126 est divisible par 3 (la somme de ses chiffres $1 + 2 + 6 = 9$ est divisible par 3) : $126 = 3 \times 42$; par conséquent il est aussi divisible par 42.

126 n'est pas divisible par 4 (la moitié de 126 est 63, et 63 est un nombre impair).

126 n'est pas divisible par 5 (son chiffre des unités n'est ni 0, ni 5).

126 est divisible par 6 (il est divisible par 2 et par 3) : $126 = 6 \times 21$; par conséquent il est aussi divisible par 21.

126 est divisible par 7 ($126 = 7 \times 18$) ; par conséquent il est aussi divisible par 18.

126 n'est pas divisible par 8 (il n'est pas divisible par 4, donc *a fortiori* pas par 8).

126 est divisible par 9 (la somme de ses chiffres $1 + 2 + 6 = 9$ est divisible par 9) : $126 = 9 \times 14$; par conséquent il est aussi divisible par 14.

126 n'est pas divisible par 10 (son chiffre des unités n'est pas 0).

126 n'est pas divisible par 11 ($126 = 11 \times 11 + 4$).

126 n'est pas divisible par 12 ($126 = 12 \times 10 + 6$). On remarque ici que le quotient obtenu est inférieur à 12, et qu'il est donc inutile de continuer à tester les entiers supérieurs à 12.

De manière générale, il est inutile de tester les nombres entiers supérieurs à $\sqrt{126}$.

On obtient alors la liste suivante des diviseurs de 126 :

1	126
2	63
3	42
6	21
7	18
9	14

On constate qu'il existe 12 diviseurs positifs de 126. **L'affirmation est donc fausse**.

Dans les méthodes suivantes, on décompose 126 en produit de facteurs premiers :

$$126 = 2 \times 63 = 2 \times 9 \times 7 = 2 \times 3^2 \times 7.$$

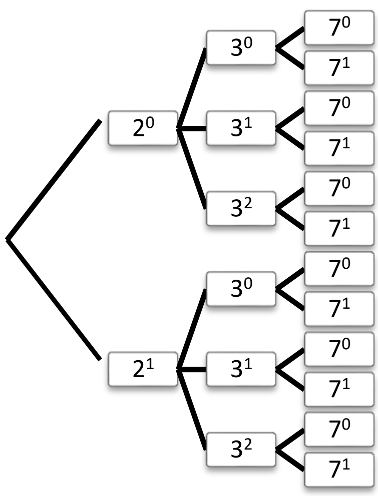
Méthode 2 (identification d'au moins 11 diviseurs de 126)

À partir de la décomposition de 126 en produit de facteurs premiers, on peut constater que les nombres 1 ; 2 ; 3 ; 7 ; 9 ; 14 ; 18 ; 21 ; 42 ; 63 et 126 (par exemples) sont des diviseurs positifs de 126. Ce dernier a donc au moins 11 diviseurs positifs. **L'affirmation est donc fausse.**

Méthode 3 (identification de tous les diviseurs positifs de 126 à partir de la décomposition en facteurs premiers)

L'arbre suivant permet de lister toutes les façons de choisir un ou plusieurs termes de la décomposition $2 \times 3^2 \times 7$ afin d'obtenir tous les diviseurs positifs de 126.

Par exemple le chemin $2^0 \rightarrow 3^2 \rightarrow 7^1$ permet d'obtenir le diviseur $2^0 \times 3^2 \times 7^1 = 63$



On constate qu'il existe $2 \times 3 \times 2 = 12$ diviseurs positifs de 126. **L'affirmation est donc fausse.**

Méthode 4 (calcul du nombre de diviseurs de 126)

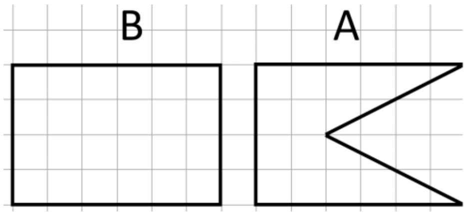
La décomposition en produit de facteurs premiers nous permet de calculer le nombre de diviseurs de 126, sans dresser la liste de ceux-ci : en réalisant le produit de tous les exposants des facteurs premiers présents dans la décomposition du nombre auxquels on a ajouté 1.
Dans le cas de 126, cela donne : $(1+1)\times(2+1)\times(1+1)=12$.
Donc 126 a exactement 12 diviseurs positifs. **L'affirmation est donc fausse.**

Remarque

Cette dernière méthode peut s'expliquer à l'aide d'un arbre comme celui présenté dans la méthode 3.

2) Affirmation 2 : Si un polygone non croisé A a un périmètre supérieur au périmètre du polygone non croisé B alors l'aire du polygone A est supérieure à l'aire du polygone B**.**

Le contre-exemple suivant prouve que **l'affirmation est fausse.**
On prend pour polygone B un rectangle et pour polygone A un pentagone construit à partir de ce rectangle comme sur la figure suivante :



A est un polygone non croisé dont le périmètre est supérieur à celui du polygone non croisé B et dont l'aire est inférieure à celle du polygone non croisé B.

3) Affirmation 3 : Si des prix augmentent de 5 % par an, ils auront plus que doublé en 15 ans**.**

Augmenter un prix de 5 % revient à le multiplier par $1+\dfrac{5}{100}=1{,}05$.
Si les prix augmentent de 5 % par an, en 15 ans, ils auront été multipliés par $(1{,}05)^{15}$
$(1{,}05)^{15}\approx 2{,}07$
Les prix auront donc plus que doublé.

L'affirmation est donc vraie.

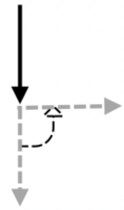
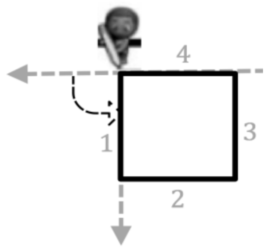
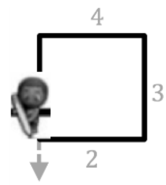
4) Affirmation 4 : Les dimensions de mon échantillon de parfum sont cinq fois plus petites que celles de mon flacon habituel. Il y a donc 25 fois moins de parfum dans l'échantillon que dans le flacon habituel.

Le volume de l'échantillon de parfum est déterminé par trois dimensions. Si chacune de ces dimensions est cinq fois plus petite que celle du flacon habituel, alors le volume sera 5^3 fois plus petit. Il y a donc 125 fois moins de parfum dans l'échantillon que dans le flacon habituel et non 25.

L'affirmation est donc fausse.

EXERCICE 3

Modifications à réaliser pour obtenir le dessin attendu

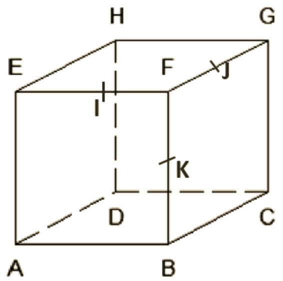
	Le personnage avec le crayon est orienté dans une direction verticale, de haut en bas. **Orientation**	
	Le personnage avec le crayon avance de 20 pixels vers le bas. ***Tracé 1***	
	Le personnage avec le crayon tourne de 90 degrés sur sa gauche. ***Changement d'orientation 1***	
	Le tracé suivi du changement d'orientation est réalisé 4 fois. Au bout de la quatrième fois, le carré est tracé et le personnage avec le crayon a retrouvé sa position et son orientation initiale. **Tracé du carré**	
	Le personnage se déplace vers le bas de 20 pixels, sans tracer, en gardant la même orientation. Il va donc se retrouver sur le sommet du premier carré, en bas à gauche. Or, les carrés doivent être espacés de la longueur d'un côté. **Le saut à réaliser doit donc être de 40 pixels.**	
	Au bout de la septième fois, on obtiendra 7 carrés. Or, il en faut 8. **Le tracé doit donc être répété 8 fois.**	

Deux modifications sont donc à réaliser pour obtenir le dessin attendu :

- **Remplacer 20 par 40 dans « saute en avant de 20 pixels » ;**
- **Remplacer 7 par 8 dans « répéter 7 fois ».**

EXERCICE 4

1) Nature du triangle IJK



Dans le triangle EFB, I est le milieu du côté [EF] et K est le milieu du côté [FB],

donc IK $= \frac{1}{2}$ EB d'après le théorème des milieux dans un triangle.

On peut montrer de la même manière que :

IJ $= \frac{1}{2}$ EG dans le triangle EFG et JK $= \frac{1}{2}$ BG dans le triangle BFG.

Or [EG], [GB] et [BE] sont des diagonales de faces du cube ABCDEFGH, elles sont donc de même longueur.

On a donc IJ = JK = IK.

Et par conséquent **le triangle IJK est un triangle équilatéral**.

2) Volume du tétraèdre FIJK

Le tétraèdre FIJK est formé de quatre faces triangulaires. Il s'agit d'une pyramide à base triangulaire dont chacune des faces peut être considérée comme base.
Dans le cube ABCDEFGH, l'arête [FG] est perpendiculaire à la face ABFE.
Or I appartient à [EF], K appartient à [FB] et J appartient à [FG] donc [FJ] est perpendiculaire au plan (FIK).
[FJ] est donc la hauteur associée à la base FIK dans la pyramide FIJK.

Le volume de la pyramide FIJK est donc égal à $\frac{1}{3} \times$ Aire (FIK) $\times$ FJ .

EFBA est un carré donc le triangle FIK est rectangle en F donc Aire (FIK) $= \frac{1}{2} \times$ FI $\times$ FK .

On a alors Volume (FIJK) $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times$ FI $\times$ FK $\times$ FJ.

I est le milieu de [EF], J est le milieu de [FG] et K est le milieu de [FB] donc FI = FK = FJ = 3 cm.

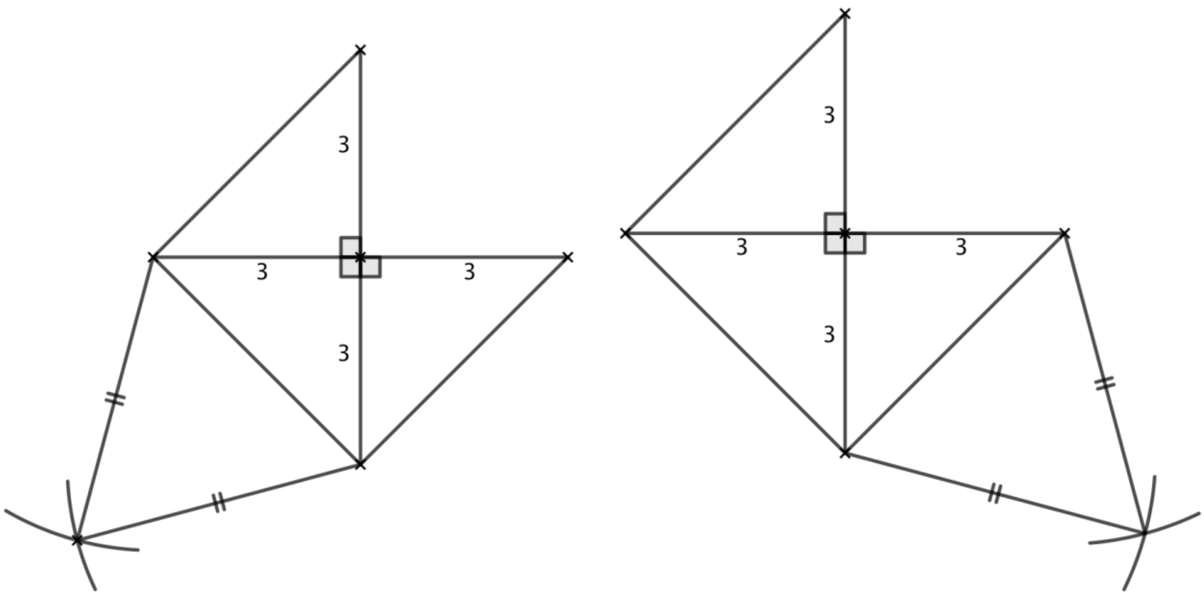
Volume (FIJK) $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 4{,}5 \text{ cm}^3$.

Le volume du tétraèdre est 4,5 cm³.

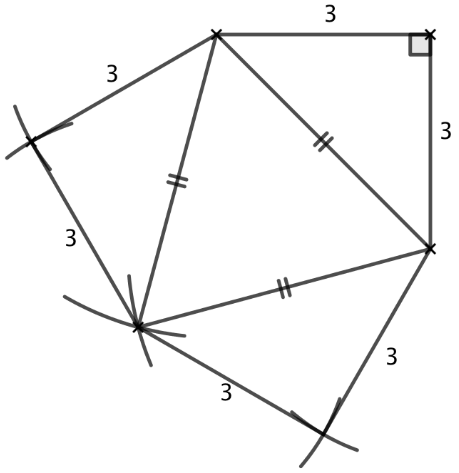
3) Patron du tétraèdre FIJK

Nous présentons ci-après des patrons possibles.

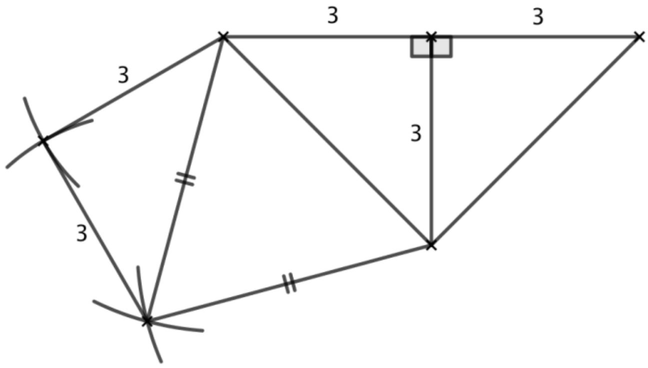
Deux patrons obtenus en commençant par tracer les triangles rectangles à l'équerre et la règle graduée, puis le triangle équilatéral au compas :



Patron obtenu en commençant par tracer un triangle rectangle à l'équerre et la règle graduée, puis les trois autres triangles au compas :



Patron obtenu en commençant par deux triangles rectangles à l'équerre et à la règle graduée, puis les deux autres triangles au compas :



4) a) Volume du cuboctaèdre

Le volume du cuboctaèdre est égal au volume du cube auquel on retranche huit fois le volume du tétraèdre FIJK donc :

Volume (cuboctaèdre) $= (6^3 - 8 \times 4{,}5)$ cm^3 $=$ 180 cm^3.

Le cuboctaèdre a un volume de 180 cm^3.

4) b) Longueur totale des arêtes

Chacune des arêtes a la longueur d'un côté du triangle équilatéral IJK. D'après 1), IK $= \dfrac{1}{2}$ EB.

EB est une diagonale d'un carré de côté 6 cm, donc EB $= 6\sqrt{2}$ cm.
On a donc IK $= 3\sqrt{2}$ cm.
Chacune des coupes du cube forme 3 arêtes, le cuboctaèdre a donc 24 arêtes.
La longueur totale de ses arêtes est donc : $24 \times 3\sqrt{2}$ cm $= 72\sqrt{2}$ cm $\approx$ 101,82 cm.

La longueur totale des arêtes est donc à 1 mm près de 101,8 cm.

TROISIÈME PARTIE

SITUATION 1

1) Trois procédures pouvant être utilisées par les élèves

Procédure dite de retour à l'unité

Cette procédure consiste à calculer le poids d'une dragée puis à multiplier le poids obtenu par le nombre de dragées dans la collection dont on cherche à connaître le poids.
Le poids d'une dragée s'obtient en divisant 360 par 120 ($360 : 120 = 3$).
Une dragée pèse donc 3 grammes.
Le poids de 30 dragées s'obtient en multipliant le poids d'une dragée par 30 ($30 \times 3 = 90$).
Les 30 dragées pèsent 90 grammes.

Utilisation du coefficient de proportionnalité

Cette procédure consiste à utiliser le coefficient de proportionnalité, c'est-à-dire le nombre par lequel multiplier le nombre de dragées pour obtenir leur poids : ici, c'est 3 (car $120 \times 3 = 360$).
On en déduit le poids de 30 dragées en multipliant le nombre de dragées par le coefficient de proportionnalité ($30 \times 3 = 90$).
Les 30 dragées pèsent 90 grammes.

Utilisation du rapport commun

Cette procédure consiste à identifier le rapport entre le nombre de dragées dont on connait le poids et le nombre de dragées dont on recherche le poids.
Il s'agit de remarquer ici que 30 s'obtient en divisant 120 par 4.
Utilisant le fait que le rapport entre le poids connu et celui recherché est le même, on en déduit que le poids recherché s'obtient en divisant 360 par 4 ($360 : 4 = 90$).
Les 30 dragées pèsent 90 grammes.

2) Exemple d'énoncé susceptible d'encourager les élèves à utiliser la procédure dite de retour à l'unité

Pour encourager les élèves à utiliser la procédure dite de retour à l'unité, on pourra :

- rendre moins favorable le recours au rapport commun de proportionnalité en évitant de proposer deux nombres (de dragées) dont l'un est multiple de l'autre comme c'est le cas dans l'énoncé initial (30 et 120).
- proposer deux nombres (nombre de dragées et nombre de grammes correspondant) dont l'un est multiple de l'autre.

Par exemple : 9 dragées pèsent 27 g. Combien pèsent 40 dragées ?

SITUATION 2

1) Deux objectifs d'apprentissage que cette situation permet de travailler

On peut citer deux des objectifs suivants :

- résoudre des problèmes nécessitant plusieurs étapes de calculs (problèmes dits « complexes ») ;
- résoudre un problème additif ;
- résoudre un problème de partage ;
- mettre en œuvre une stratégie personnelle pour résoudre un problème de partage équitable ;
- effectuer des calculs.

2) a) Stratégies des groupes 1 et 2

Stratégie du groupe 1

Les élèves du groupe 1 commencent par calculer le nombre total d'images gagnées par les enfants de l'équipe verte.
Pour cela, ils effectuent des additions en ligne en commençant par effectuer des regroupements (ils calculent tout d'abord $10 + 10 + 10 + 10$ puis ajoutent au résultat obtenu $2 + 1 + 3 + 9$).
Notons que :

- cela suppose d'effectuer implicitement une décomposition additive des nombres à additionner ;
- le signe égal est utilisé de manière impropre lors de cette succession de calculs effectués en ligne.

Puis, les élèves cherchent à diviser le nombre total de cartes gagnées par 5 afin d'obtenir le nombre de cartes obtenues par chacun des enfants après le partage (ils écrivent à la suite de l'addition en ligne le calcul à effectuer c'est-à-dire 55 : 5)
Pour cela, ils représentent les visages de cinq enfants et effectuent une distribution simulée des cartes en prenant appui sur une certains disposition spatiale.
Chaque carte étant représentée par un point, ils procèdent horizontalement, ligne par ligne, en dénombrant au fur et à mesure les points, c'est-à-dire les cartes ainsi distribuées et s'arrêtent lorsqu'ils sont arrivés à 55. Il leur suffit ensuite de dénombrer le nombre de points alignés sous l'un des visages (ils écrivent « =11 »).

Enfin, ils rédigent une phrase réponse indiquant le nombre de cartes par enfant après le partage.

Stratégie du groupe 2

Les élèves du groupe 2 commencent eux aussi par calculer le nombre total d'images gagnées par les enfants de l'équipe verte.
Pour cela, ils regroupent certains termes de l'addition à effectuer selon plusieurs additions posées : ils commencent par additionner 12 et 10 puis 11 et 9, additionnent les résultats obtenus puis ajoutent 13 au résultat trouvé et enfin obtiennent 55, qui est bien le nombre d'images gagnées.
Ils entourent 55 probablement pour signifier qu'il s'agit du résultat obtenu et font des liens vers les différentes additions posées sans doute pour signifier qu'ils les ont successivement prises en compte pour obtenir 55.

Puis, ils cherchent à diviser le nombre total de cartes gagnées par 5 afin d'obtenir le nombre de cartes obtenues par chacun des enfants après le partage.
Pour cela, ils font un schéma : ils effectuent une distribution simulée des cartes en représentant chacune d'elles par un bâton puis ils dénombrent les bâtons, c'est-à-dire les cartes ainsi distribuées. Ils écrivent « 11 » sous chacun des paquets ainsi obtenus.
Ils effectuent ensuite une addition en ligne (addition réitérée $11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11$) qui leur permet de vérifier que la somme totale des cartes obtenues par chacun des enfants après le partage correspond bien au total des cartes gagnées (procédure de validation).

Enfin, ils rédigent une phrase réponse indiquant le nombre de cartes par enfant après le partage.

2) b) Un point commun et deux différences

Point commun entre les deux stratégies

On peut citer l'un des points communs suivants :

- les deux groupes utilisent le même type de procédure pour résoudre le problème de partage. Ils effectuent une distribution simulée grâce à un schéma afin d'obtenir le nombre de cartes obtenues par chaque enfant après le partage ;
- les deux groupes utilisent une stratégie qui procède en deux temps : calcul du nombre total de cartes gagnées puis partage équitable des cartes entre les enfants.

Remarque

On aurait pu aussi mettre en œuvre une procédure consistant à répartir autrement les cartes entre les enfants dans le but d'un partage équitable (il suffit que Lisa, qui possède 12 images, en donne une à Luc, qui n'en possède que 10, et que Nora, qui possède 13 images, en donne deux à Ilyes, qui n'en possède que 9).

Deux différences

- Le groupe 1 effectue des additions en ligne alors que le groupe 2 effectue des additions posées.
- Le groupe 2 procède à une vérification du partage (grâce à l'addition réitérée) alors que le groupe 1 ne met pas en place de procédure de validation du résultat obtenu.

3) Deux difficultés rencontrées par le groupe 3

Une première difficulté rencontrée par les élèves du groupe 3 se situe au niveau de la suite de calculs à effectuer pour obtenir le nombre de cartes gagnées par les enfants de l'équipe verte. Ils écrivent l'addition en ligne, regroupent certains termes, additionnent 12 et 10 puis 11 et 9 et obtiennent respectivement 22 et 20. Il leur reste alors 13 à ajouter. Ils écrivent 32 sous le 13 suite à une erreur de calcul (ont-ils cherché à additionner 9 et 13 afin de continuer à regrouper par deux les termes de l'addition écrite en ligne ?).

La seconde difficulté rencontrée concerne la recherche du nombre de cartes obtenues par chaque enfant de l'équipe verte après le partage. Les enfants du groupe 3 dessinent cinq bonhommes pour représenter les cinq enfants puis représentent les cartes gagnées par des petits tirets. Or, au lieu d'effectuer un partage équitable des cartes gagnées, ils attribuent à chacun des enfants les cartes qui sont déjà en sa possession (avant partage). Ils écrivent ensuite 55 et l'entourent comme pour signifier qu'il s'agit de la réponse à donner. Or, il ne s'agit que du nombre total de cartes gagnées par l'équipe (et non pas le nombre de cartes obtenues par chaque élève après partage) et ce nombre a probablement été obtenu par dénombrement des petits tirets représentant les cartes gagnées.

SITUATION 3

1) Procédures utilisées pour résoudre le problème 1

Production n°1

L'élève met en œuvre une procédure qui mobilise l'addition réitérée.
Il écrit l'addition en ligne $12 + 12 + 12 + \cdots$ jusqu'à ce qu'il constate le dépassement du nombre à diviser : il écrit 60 puis le barre, barre aussi le dernier terme de l'addition et obtient ainsi 48 (qui est inférieur à 56).
Il cherche ensuite la différence entre 48 et 56 afin d'obtenir le reste et pour cela, il pose et effectue la soustraction.
Enfin, il écrit une phase réponse dans laquelle on peut relever une erreur (probablement d'inattention) : l'élève écrit 18 billes au lieu de 12.

Production n°2

L'élève met en œuvre une procédure qui mobilise la soustraction réitérée.
Il pose la soustraction (56 – 12), l'effectue et soustrait à nouveau 12 au résultat obtenu. Il procède ainsi jusqu'à obtenir un résultat inférieur à 12. Si la manière dont il présente ces soustractions successives est incorrecte, la démarche est pertinente.
L'élève dénombre ensuite les soustractions successivement effectuées en notant en marge 1 2 3 4 et obtient ainsi le nombre de paquets de 12 réalisés.
Enfin, il indique le nombre de paquets de 12 billes et le nombre de billes restantes dans la phrase réponse.

Production n°3

L'élève met en œuvre une procédure qui consiste à rechercher un encadrement de 56 par deux multiples successifs de 12.
Il commence par établir un répertoire multiplicatif en multipliant successivement 12 par 1, par 2, par 3, etc. ce qui lui permet d'obtenir la liste des multiples de 12.
Si la procédure est pertinente, on relève toutefois une erreur de calcul ($4 \times 12 = 50$) qui se répercute sur le calcul suivant ($12 \times 5 = 62$) car l'élève procède probablement par ajout réitéré de 12.
Puis, il écrit une phase réponse : le nombre proposé comme quotient est exact mais le reste obtenu est erroné. En effet, l'erreur de calcul relevée dans le répertoire multiplicatif est sans conséquence sur le calcul du quotient : 56 étant compris entre 50 et 62, l'élève en déduit que 56 est compris entre 4×12 et 5×12. Or, les deux multiples successifs de 12 qui permettent d'encadrer 56 sont 48 et 60. Par contre, l'erreur de calcul a une incidence sur le calcul du reste. En effet, l'élève soustrait 50 à 56 au lieu de soustraire 48 à 56 et obtient 6 au lieu de 8.

2) Modification des nombres de l'énoncé pour montrer les limites des procédures mises en œuvre et inciter à l'utilisation de la technique opératoire de la division

Jouer sur le choix de nombres peut en effet permettre à l'enseignant de montrer les limites des procédures basées sur le recours à des additions ou des soustractions réitérées.
Pour cela, l'enseignant doit faire en sorte que les nombres choisis induisent des calculs plus longs, plus difficiles, plus fastidieux : davantage d'additions ou de soustractions successives ou encore une recherche d'encadrement entre deux multiples successifs plus longue.

Par exemple : Combien de sacs de 12 billes peut-on faire avec 754 billes ?

3) Trois connaissances ou capacités nécessaires pour effectuer une division posée

Pour effectuer une division posée, différentes connaissances ou capacités sont nécessaires :

- connaître et être capable d'utiliser l'algorithme de la division posée.

Ce qui suppose nécessairement de :

- savoir utiliser la potence (notamment savoir comment disposer les nombres) ;
- savoir multiplier (et notamment connaître les tables de multiplication) ;
- savoir effectuer correctement les calculs soustractifs des restes dans les divisions (que ce soit en écrivant les soustractions ou pas).

Mais aussi de :

- donner du sens aux nombres obtenus (quotient et reste) ;
- donner du sens aux nombres manipulés (en ayant recours aux unités de numération) ;
- calculer l'ordre de grandeur ;
- savoir utiliser la définition de la division euclidienne ($a = b \times q + r$) pour vérifier les quotients et reste obtenus.

GROUPEMENT 4 – avril 2018

PREMIÈRE PARTIE

A - Une construction

Le problème proposé consiste à trouver comment construire une surface de forme carrée ayant la même aire que la surface rectangulaire initiale.

1) Étude sur un cas particulier

On se place dans le cas où la mesure de la longueur AB du rectangle initial est 308 m et celle de la largeur 132 m. Réalisation d'un plan à l'échelle avec AB = 7,7 cm.

a) Calcul de la longueur AD sur le plan

Le plan à l'échelle est une réduction avec les dimensions du plan proportionnelles aux dimensions du terrain.

Procédure 1 : passage à l'unité

7,7 cm sur le plan correspondent à 308 m sur le terrain,

donc 1 cm sur le plan correspond à $\frac{308}{7{,}7}$ m sur le terrain, soit 40 m.

La largeur du terrain est 132 m qui correspondent sur le plan à AD $= \frac{132}{40}$ cm soit AD $=$ 3,3 cm.

Remarque 1

On peut aussi chercher la valeur sur le plan correspondant à 1 m dans la réalité :

1 m sur le terrain est représenté par $\frac{7{,}7}{308}$ cm = $\frac{1}{40}$ cm = 0,025 cm.

Donc 132 m dans la réalité sera représenté par AD = 132 × 0,025 cm = 3,3 cm.

Remarque 2

Cette procédure s'apparente à celle désignée par « règle de trois » :

308 m dans la réalité correspond à 7,7 cm sur le plan ;

donc 1 m dans la réalité correspond à 308 fois moins soit à $\frac{7{,}7}{308}$ cm sur le plan

et 132 m dans la réalité correspond à 132 fois plus soit à 132 × $\frac{7{,}7}{308}$ cm = 3,3 cm.

Procédure 2 : utilisation du coefficient de proportionnalité

Distances dans la réalité	308 m	132 m
Distances sur le plan	7,7 cm	AD

$\times \frac{7{,}7}{308}$

On obtient la mesure de AD en cm sur le plan en multipliant 132 (mesure en m sur le terrain) par $\frac{7{,}7}{308}$.

On a donc : AD $= 132 \times \frac{7{,}7}{308}$ cm $= 132 \times \frac{1}{40}$ cm $= 132 \times 0{,}025$ cm $= 3{,}3$ cm.

Procédure 3 : utilisation de l'égalité des rapports de longueurs

$$\frac{\text{AD}}{7{,}7\text{ cm}} = \frac{132\text{ m}}{308\text{ m}} \quad \text{soit AD} = 7{,}7\text{ cm} \times \frac{3}{7} = 3{,}3\text{ cm}$$

Procédure 4 : utilisation de l'égalité des « produits en croix » (conséquence de l'égalité des rapports)

AD $\times$ 308 m $=$ 132 m $\times$ 7,7 cm

d'où AD $= \frac{132\text{ m} \times 7{,}7\text{ cm}}{308\text{ m}} = 3{,}3$ cm.

308 m	132 m
7,7 cm	AD

Procédure 5 : utilisation des propriétés de la linéarité

Il s'agit de trouver des relations entre 308 et 132. Les nombres en présence ne se prêtent pas vraiment à l'utilisation de cette procédure, mais on peut remarquer que :

$$308 = 2 \times 132 + 44 = 2 \times 132 + \frac{132}{3} = \frac{7}{3} \times 132$$

et par conséquent :

$7{,}7 \text{ cm} = \dfrac{7}{3} \times \text{AD}$ d'où $\text{AD} = \dfrac{3}{7} \times 7{,}7 \text{ cm} = 3{,}3 \text{ cm}.$

b) Échelle de ce plan

Dans la phrase usuelle : « le plan du terrain est à l'échelle… », le nombre attendu est une fraction de numérateur 1 et correspond au coefficient (sans unité) qui exprime la relation entre les dimensions sur le terrain et les dimensions sur le plan :

Ici, en exprimant les mesures dans la même unité, $\dfrac{30800}{7{,}7} = 4\,000$ (ou $\dfrac{308}{0{,}077} = 4\,000$).

Ici, 1 cm sur le plan représente 4 000 cm sur le terrain (ou 1 m sur le plan représente 4 000 m sur le terrain, ou 1 mm sur le plan représente 4 000 mm sur le terrain, etc.).

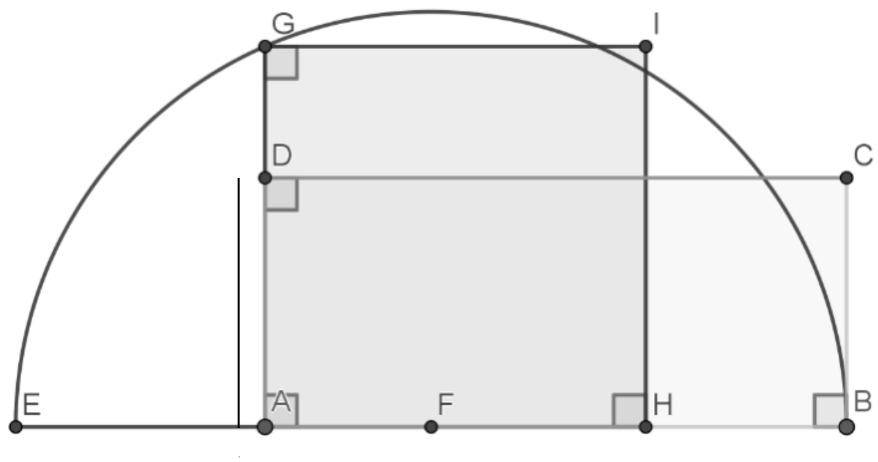
L'échelle est 1/4 000.

c) Construction de la figure à l'échelle et réalisation du protocole de construction

Les instruments à utiliser n'étant pas précisés ici, on suppose donc que tous les instruments (règle, équerre et compas) sont autorisés

Protocole de construction :

- tracer un rectangle ABCD, avec AB = 7,7 cm et AD = 3,3 cm ;
- construire un point E sur la demi-droite [BA) tel que AE = AD avec E n'appartenant pas au segment [AB] ;
- construire F milieu de [EB] et tracer le demi-cercle de diamètre [EB] qui coupe la demi-droite [AD) en G ;
- construire les points H et I tels que AHIG soit un carré, avec H appartenant à la demi-droite [AB).



AB = 7,7 cm et AD = 3,3 cm

d) Calcul des longueurs des segments [EB], [EF], [AF] et [FG] sur le plan

D'après la construction :

les points E, A, F et B sont alignés et AE = AD et FE = FB = FG et AH = HI = IG = GA ;

AB = 7,7 cm et AD = 3,3 cm

A est un point du segment [EB]

donc **EB** = EA + AB = DA + AB soit EB = 3,3 cm + 7,7 cm = **11 cm**.

F est le milieu de [EB] d'où **EF** = 11 cm : 2 = **5,5 cm.**

F est un point du segment [AB] donc **AF** = AB – BF = AB – EF = 7,7 cm – 5,5 cm = **2,2 cm.**

FG est un rayon du demi-cercle de diamètre [EB] donc **FG** = FE = **5,5 cm.**

e) Aire du carré AGIH sur le plan

Seules les longueurs des segments [AF] et [FG] sont connues. AF = 2,2 cm et FG = 5,5 cm.
L'aire du carré AGIH est AG^2.
Pour trouver AG^2, dans le triangle AFG rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore,
$FG^2 = FA^2 + AG^2$ donc on a $AG^2 = FG^2 - FA^2 = (5{,}5 \text{ cm})^2 - (2{,}2 \text{ cm})^2 = 25{,}41 \text{ cm}^2$

L'aire du carré sur le plan est donc 25,41 cm².

f) Aire du carré dans la réalité

Pour obtenir les mesures des longueurs des côtés du carré en cm dans la réalité, on multiplie les mesures des longueurs des côtés du carré en cm sur le plan par le coefficient 4 000 (inverse de l'échelle).
Pour obtenir la mesure de l'aire du carré en cm^2 dans la réalité, on multiplie la mesure de l'aire du carré en cm^2 sur le plan par le coefficient $4\,000^2$ (carré du coefficient).

L'aire du carré dans la réalité est $25{,}41 \text{ cm}^2 \times 4\,000^2 = 406\,560\,000 \text{ cm}^2 = 40\,656 \text{ m}^2$.

Comparaison avec l'aire du rectangle initial

La mesure de l'aire du rectangle initial, en m^2, est $132 \times 308 = 40\,656$.

Les deux aires sont égales.

Remarque

On peut comparer l'aire du rectangle et l'aire du carré sur le plan :
L'aire du carré sur le plan est 25,41 cm².
L'aire du rectangle sur le plan est 7,7 cm × 3,3 cm = 25,41 cm².

2) Cas général : AB = a et AD = b (avec a > b)

Nous nous intéressons ici à la représentation sur le plan. Les nombres a et b expriment des mesures de longueur dans la même unité.
L'aire du rectangle ABCD est égale à AB × AD, c'est à dire a × b. D'autre part, l'aire du carré AHIG est égale à AG^2
En reprenant le raisonnement précédent (1) d)) fait sur un cas particulier, on exprime les différentes mesures en fonction de a et b :
Par construction :

$EB = a + b$; $EF = \frac{a+b}{2}$; $AF = AB - EF = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$; $FG = EF = \frac{a+b}{2}$.

Le triangle AFG est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore,

$FG^2 = FA^2 + AG^2$ d'où $AG^2 = FG^2 - FA^2$;

soit $AG^2 = (\frac{a+b}{2})^2 - (\frac{a-b}{2})^2 = \frac{1}{4}[(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)] = a \times b$.

On en déduit que l'aire du carré AHIG est bien égale à l'aire du rectangle ABCD.

B - Aménagement d'une fontaine

Lecture d'une représentation graphique représentant la trajectoire de la goutte d'eau dans un plan vertical

Quand la goutte d'eau est au point de coordonnées (x ; y), cela signifie qu'elle est à la distance x, exprimée en mètre, de l'axe vertical situé au centre de la fontaine et à la hauteur y, exprimée en mètre, par rapport au sol. Les graduations des axes expriment des mesures de longueur en mètre.

1) a) Hauteur de la goutte d'eau à la sortie de la colonne

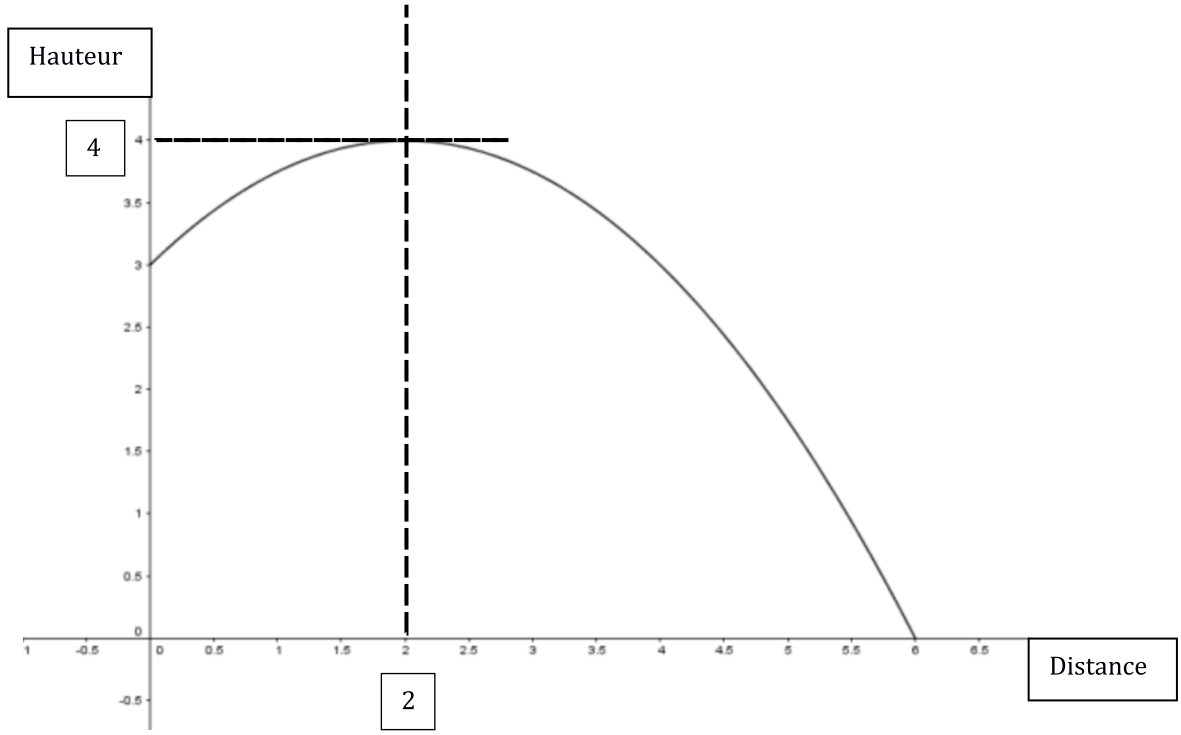
Quand la goutte d'eau sort de la colonne, elle est à une distance 0 de l'axe vertical. Par lecture sur la figure, elle est à une hauteur de 3 m.

1) b) Distance du centre du carré à laquelle la goutte d'eau retombe

Quand la goutte d'eau retombe, la hauteur est 0 m. Par lecture sur la figure, elle est à une distance de 6 m de l'axe vertical.

1) c) Détermination de la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau

Pour déterminer graphiquement la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau, on trace la parallèle à l'axe des abscisses tangente à la courbe à son maximum et l'intersection de cette parallèle avec l'axe des ordonnées donne l'ordonnée de ce maximum. On lit graphiquement l'abscisse correspondante. Par lecture sur ces deux axes, la hauteur maximale est environ 4 m pour une distance à l'axe vertical de 2 m environ (voir graphique ci-dessous).



2) Expression algébrique de la fonction représentée graphiquement ci-dessus

Cette fonction est définie sur l'intervalle [0 ; 6] par une expression de la forme :

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$$

avec b et c à déterminer.

a) Images, en fonction de *b* et *c*, des nombres 0 et 6 par la fonction *f*

$f(0) = -\frac{1}{4} \times 0^2 + b \times 0 + c = c.$

$f(6) = -\frac{1}{4} \times 6^2 + b \times 6 + c = -9 + 6b + c.$

b) Détermination des nombres *b* et *c*

La courbe représentant graphiquement la fonction f passe par les points de coordonnées (0 ; 3) et (6 ; 0).
On a donc : $f(0) = 3$ et $f(6) = 0$.
On en déduit que $c = 3$ et $-9 + 6b + c = 0$.
D'où $6b = 6$ c'est à dire $b = 1$

L'expression algébrique de la fonction est donc $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$.

c) Nouvelle expression de la fonction *f*

On développe l'expression donnée $f(x) = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 4$.

$f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4) + 4 == -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$ pour tout x de l'intervalle [0 ; 6].

On retrouve l'expression obtenue en b).

d) Hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau

$(x - 2)^2$ est un carré donc un nombre positif.

Par conséquent $-\frac{1}{4}(x-2)^2$ est un nombre négatif et sa plus grande valeur est 0.

On en déduit que la somme $-\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$ est donc inférieure ou égale à 4 ;

d'où $f(x) \leq 4$ pour tout x de l'intervalle $[0 ; 6]$.

Comme $-\frac{1}{4}(x-2)^2 = 0$, pour $x = 2$, on peut conclure que .

la hauteur maximale atteinte par la goutte d'eau est 4 m pour une distance à l'axe de 2 m.

Remarque

On pourrait aussi comparer $f(x)$ avec 4 et calculer $f(x) - 4$:

$f(x) - 4 = -\frac{1}{4}(x-2)^2$ *et par suite* $f(x) \leq 0$.

C - Un peu de verdure

1) Distance(s) possible(s) entre deux arbustes

La distance entre deux arbustes est toujours la même sur la longueur et la largeur du rectangle et est un nombre entier de mètres. On en déduit que cette distance est à la fois un diviseur de 308 et de 132.

Procédure 1 : par le PGCD (plus grand diviseur commun)

Les diviseurs communs à deux nombres sont les diviseurs de leur PGCD.
Calcul du PGCD :
$308 = 11 \times 4 \times 7$ et $132 = 11 \times 3 \times 4$ donc $11 \times 4 = 44$ est le PGCD de 308 et 132.

Les distances possibles sont les diviseurs de 44 soient : **1 ; 2 ; 4 ; 11 ; 22 ; 44**.

Procédure 2 : par l'énumération des diviseurs de chacun des nombres

Diviseurs de 308 : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 11 ; 14 ; 22 ; 28 ; 44 ; 77 ; 154 ; 308

Diviseurs de 132 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 11 ; 12 ; 22 ; 33 ; 44 ; 66 ; 132

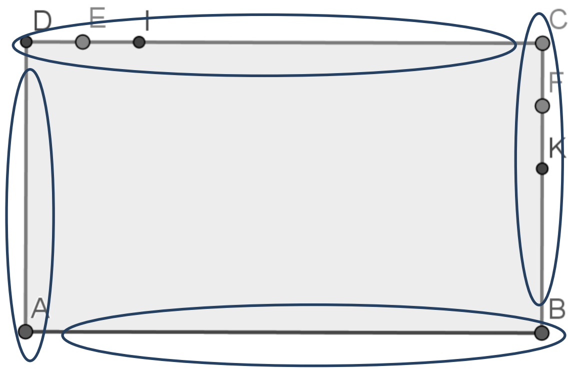
Les diviseurs communs sont : 1 ; 2 ; 4 ; 11 ; 22 ; 44, ce qui correspond aux **distances possibles entre deux arbustes.**

2) Nombre d'arbustes

Parmi ces nombres, un seul est supérieur à 3 et premier : c'est 11. Donc la distance entre chaque arbuste est 11 m.

Procédure 1

Comme les arbustes sont plantés sur le contour du rectangle de dimensions 308 m par 132 m avec un arbuste à chaque sommet du rectangle, le nombre d'arbustes est égal au nombre d'intervalles entre ces arbustes. Sur la longueur, il y a 28 intervalles (308 : 11) et sur la largeur, il y en a 12 (132 : 11).



Si on ne prend qu'un arbuste de sommet sur chaque côté du rectangle, le nombre d'arbustes est égal au nombre d'intervalles entre ces arbustes (autrement ce serait un de plus).

Le nombre d'arbustes est $(28 + 12) \times 2 = 80$.

Procédure 2

Sur un contour fermé, le nombre d'intervalles est égal au nombre d'arbustes.
Calcul du périmètre : $(308 \text{ m} + 132 \text{ m}) \times 2 = 880 \text{ m}$; on divise ce périmètre par la distance entre deux arbustes : $880 : 11 = 80$.

Il y a donc 80 arbustes à déplacer.

DEUXIÈME PARTIE

EXERCICE 1 : questions à choix multiples (les justifications ne sont pas demandées)

1) Nombre de combinaisons d'un code à quatre chiffres

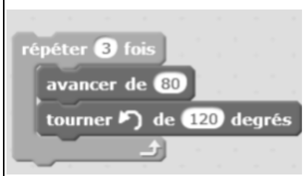
Amy dispose d'un cadenas dont la combinaison est un code à quatre chiffres. : □ □ □ □
Chaque chiffre peut prendre une valeur de 0 à 6. Il y a ainsi 7 possibilités (0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6) pour chacune des cases.
Donc il y a $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4$ combinaisons pour ce code (7 pour le premier chiffre, 7 pour le 2^{e}, 7 pour le 3^{e} et 7 pour le 4^{e} chiffre)
Or $7^4 = 2401$.

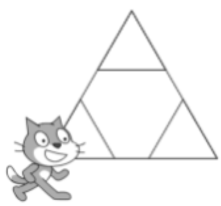
La réponse attendue est donc la proposition D.

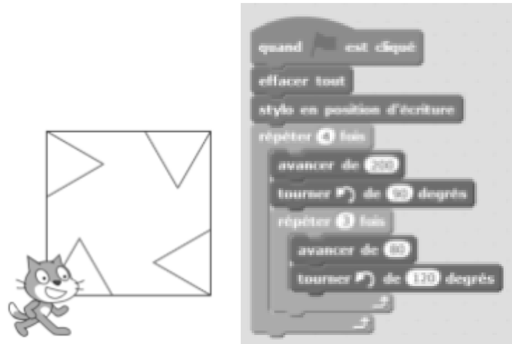
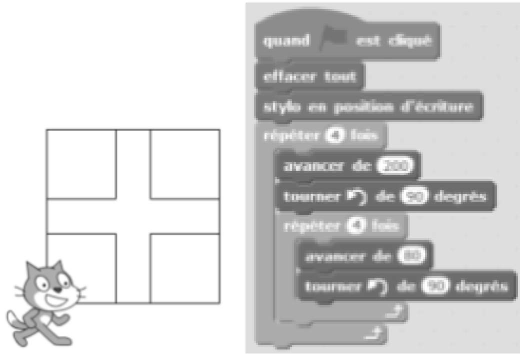
Remarque

Il s'agit de déterminer la réponse parmi cinq propositions très différentes. Un ordre de grandeur du nombre $7^4 = 49^2 \approx 50^2$ et $50^2 = 2500$ permet de conclure que la réponse est la proposition D.

2) Figure non obtenue par l'un des programmes proposés

			
Ce bloc permet de construire un carré de côté 200 u. *L'angle de 90 degrés correspond à l'angle « externe » formé par deux côtés consécutifs du carré et 200 est la longueur du côté.*	Ce bloc permet de construire un carré de côté 80 u.	Ce bloc permet de construire un triangle équilatéral de côté 200 u. *L'angle de 120 degrés correspond à l'angle « externe » formé par deux côtés consécutifs du triangle et 200 est la longueur du côté.*	Ce bloc permet de construire un triangle équilatéral de côté 80 u.

Le programme 1 permet de construire **la figure C** : Si l'on analyse le programme 1, il s'agit de construire un triangle équilatéral de côté 200 u dans lequel sont construits des triangles équilatéraux de côté 80 u à chaque angle : figure C. *Un côté du grand triangle est tracé, puis le petit triangle appuyé sur ce côté en entier avant de tracer le côté suivant du grand triangle…*	

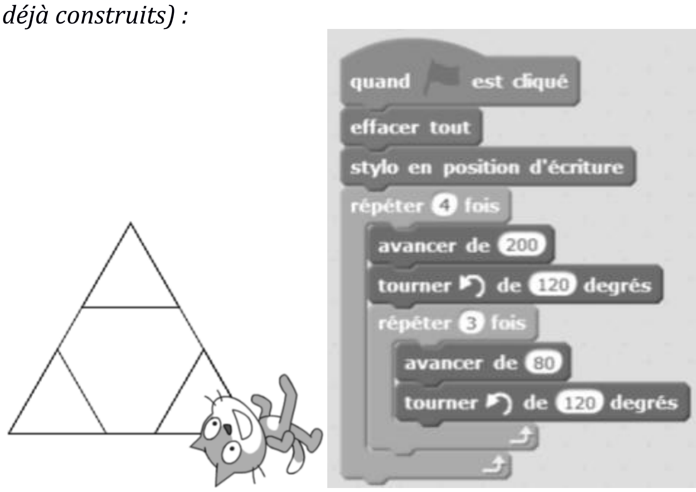
Le programme 2 permet de construire **la figure A :** Si l'on analyse le programme 2, il s'agit de construire un carré de côté 200 u dans lequel sont construits des triangles équilatéraux de côté 80 u à chaque angle : figure A. *Un côté du grand carré est tracé, puis le petit triangle appuyé sur ce côté en entier avant de tracer le côté suivant du carré…*	
Le programme 3 permet construire **la figure B** : Si l'on analyse le programme 3, il s'agit de construire un carré de côté 200 u dans lequel on construit des carrés de côté 80 u dans chaque angle : figure B *Un côté du grand carré est tracé, puis le petit carré appuyé sur ce côté en entier avant de tracer le côté suivant du grand carré…*	

Il n'y a pas de programme pour construire la figure D.

La réponse attendue est donc la figure D.

Remarque

On pourrait penser à se fier à des indices de surface (ce qui fonctionne ici car il n'y a pas de piège) : par exemple boucle de 4 pour construire un carré, boucle de 3 pour construire un triangle.
Cependant, le programme suivant, avec une boucle de 4, construit un triangle (le stylo repasse sur des traits déjà construits) :



3) Consommation en 1 h 30 min de trajet à la vitesse de 70 m/s

La consommation d'une voiture de course est 17 L au 100 km à une vitesse de 70 m/s.
Si on suppose que la voiture roule régulièrement, cette situation est modélisée par la proportionnalité, ce qui permet de trouver la consommation en 1 h 30 min de trajet à 70 m/s. La consommation est considérée proportionnelle à la distance parcourue en roulant à la même vitesse.

Calcul de la distance parcourue puis de la consommation

Méthode 1

- calcul de la distance parcourue

À cette vitesse, 70m/s, en 1 h 30 min = 60 min + 30 min = 90 min = 90 x 60 s = 5 400 s, il parcourt : 70 m/s × 5 400 s = 378 000 m = 378 km.

- calcul de la consommation

La voiture consomme 17 litres d'essence aux 100 km. Comme 378 km = 3,78 × 100 km, elle consommera : 17 L × 3,78 = 64,26 L.

La réponse attendue est donc la proposition D.

Méthode 2

- calcul de la distance parcourue

Conversion de la vitesse donnée en m/s en km/h c'est-à-dire :

$$\frac{70\text{ m}}{1\text{ s}} = \frac{70\text{ m} \times 3600}{1\text{ s} \times 3600} = \frac{252\text{ km}}{1\text{ h}} = 252\text{ km/h}.$$

En 1 h 30 min, la voiture a parcouru 1,5 h × 252 km/h = 378 km.

(pour multiplier 252 par 1,5, on peut utiliser le fait numérique $0{,}5 = \frac{1}{2}$;

d'où 252 km + 252 km : 2 = 252 km + 126 km = 378 km).

- calcul de la consommation

La voiture consomme 17 litres d'essence aux 100 km. Comme 378 km = 3,78 × 100 km, elle consommera : 17 L × 3,78 = 64,26 L.

La réponse attendue est donc la proposition D.

Méthode 3 : en plaçant les données dans un tableau pour organiser les données et mettre en évidence les relations

× 3,78

distance	70 m	70 m × 3600 = 378 km	100 km	378 km
temps	1 s	1 h = 3600 s		
consommation			17 L	17 L × 3,78 = 64,26 L

× 3600

La réponse attendue est donc la proposition D.

EXERCICE 2 : calcul de volumes de cylindres

1) Rayon du gâteau numéro 3

Méthode 1 : par étapes de calculs successifs

Le rayon du gâteau n° 1 est $r_1 = 30$ cm ; le rayon du gâteau n°2 est $r_2 = \frac{2}{3} \times r_1 = \frac{2}{3} \times 30\text{ cm} = 20\text{ cm}$; le rayon du gâteau n° 3 est $r_3 = \frac{3}{4} \times r_2 = \frac{3}{4} \times 20\text{ cm} = 15\text{ cm}$.

Méthode 2

$$r_3 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times 30\text{ cm} = \frac{1}{2} \times 30\text{ cm} = 15\text{ cm}.$$

2) Volume total exact de la pièce montée

Rappel du volume d'un cylindre :

$\pi \times r^2 \times h$ avec r rayon du cylindre et h sa hauteur.

La hauteur est la même pour les trois gâteaux : $h = 10$ cm.

On somme les volumes des trois gâteaux (en cm^3) :

$\pi \times {r_1}^2 \times h + \pi \times {r_2}^2 \times h + \pi \times {r_3}^2 \times h = 10\pi \times (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) = 10\pi\,(30^2 + 20^2 + 15^2) = 15250\,\pi$.

Le volume total exact de la pièce montée est 15 250π cm³.

3) Fraction du volume total représentée par le volume du gâteau numéro 3

Pour calculer la fraction du volume total que représente le volume du gâteau n°3, on calcule le rapport :

$$\frac{V_3}{V_{total}} = \frac{2250\pi}{15\,250\,\pi} = \frac{9\,x\,250}{61\,x\,250} = \frac{9}{61},$$

écrit sous forme d'une fraction irréductible car 61 n'est pas un multiple de 3.

Le volume du gâteau n°3 représente les $\frac{9}{61}$ du volume du gâteau total.

EXERCICE 3 : calcul de probabilités avec des dés particuliers

Remarque préalable

Dans cet énoncé, il y a incompatibilité entre la représentation du patron du premier dé et la formulation « Le premier dé indique un nombre à l'aide des chiffres de 1 à 6. »

Deux hypothèses sont donc possibles : Pour le premier dé, les faces valent : 1, 2, 2, 3, 4, 6 comme indiqué sur le patron ou 1, 2, 3, 4, 5, 6 du dé classique comme le sous-entend la formulation.

Première hypothèse :

Pour le premier dé, les faces valent : 1, 2, 2, 3, 4, 6, soit cinq valeurs possibles. Pour le deuxième dé, les faces valent 2, 2, 3, 3, 3 et 4, soit trois valeurs possibles.

La somme des valeurs de deux dés est donc un nombre compris entre 3 $(1 + 2)$ et 10 $(6 + 4)$ sans le 9.

1) Valeur du deuxième dé

Un joueur a gagné un jeton, si la somme obtenue est un nombre pair différent de 6, c'est-à-dire si la somme est 4 ou 8 ou 10. Sachant que le premier dé indique « 4 », le deuxième dé indiquant un nombre supérieur ou égal à 2 et inférieur ou égal à 4, la somme ne peut pas être égale à 4 ou à 10.

Le deuxième dé indique donc « 4 ».

(il est possible de s'appuyer sur la ligne « 4 » du tableau de la méthode 2 ci-après : seul « 8 » est pair et différent de 6 et il est dans la colonne du « 4 ».)

2) Probabilité d'obtenir trois jetons

Pour obtenir 3 jetons, il faut obtenir une somme de 6 avec les deux dés.

Méthode 1 : calcul des probabilités

Les combinaisons possibles sont notées de la façon suivante : (premier dé ; deuxième dé) soit (2 ; 4), (3 ; 3), (4, 2) donc la probabilité d'obtenir 6 est la somme des probabilités des éléments élémentaires constituées par ces paires.

Par exemple, pour P(2 ; 4) , la probabilité est le produit des deux probabilités $P_1(2)$ (la probabilité pour le dé 1 d'obtenir 2) et $P_2(4)$ (la probabilité sur le deuxième dé d'obtenir 4).

$$\begin{aligned} P(\text{somme de } 6) &= P(2\,;4) + P(3\,;\,3) + P(4\,;\,2) \\ &= P_1(2) \times P_2(4) + P_1(3) \times P_2(3) + P_1(4) \times P_2(2) \\ &= \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P(somme\ 6)} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{36}} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{36}} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{36}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{36}}.$$

Méthode 2 : analyse de tous les cas

On note dans un tableau les différentes sommes possibles obtenues à partir des lancés des deux dés.

1er dé \ 2ème dé	2	2	3	3	3	4
1	3	3	4	4	4	5
2	4	4	5	5	5	**6**
2	4	4	5	5	5	**6**
3	5	5	**6**	**6**	**6**	7
4	**6**	**6**	7	7	7	8
6	8	8	9	9	9	10

Il y a 7 possibilités d'obtenir la somme égale à 6 et il y a 36 possibilités différentes donc la probabilité d'obtenir 3 jetons est $\frac{7}{36}$.

Méthode 3 : utilisation d'un arbre de probabilités

Un arbre de probabilités pondéré, constitué de 15 (3 × 5) branches permet également d'obtenir la réponse mais il est plus difficile à gérer.

3) Probabilité de ne pas obtenir de jetons

On n'obtient pas de jeton si la somme est impaire donc pour les sommes : 3, 5, 7 ou 9.

Méthode 1 : calcul des probabilités

$\mathrm{P}(\text{somme impaire}) = \mathrm{P}(\text{obtenir } 3, 5, 7 \text{ ou } 9)$

$\mathrm{P}(\text{somme impaire}) = \mathrm{P}(1\,;2) + \mathrm{P}(1\,;4) + \mathrm{P}(2\,;3) + \mathrm{P}(3\,;2) + \mathrm{P}(4\,;3) + \mathrm{P}(3\,;4) + \mathrm{P}(6\,;3)$ soit :

$\mathrm{P}_1(1) \times \mathrm{P}_2(2) + \mathrm{P}_1(1) \times \mathrm{P}_2(4) + \mathrm{P}_1 1\,(2) \times \mathrm{P}_2(3) + \mathrm{P}_1(3) \times \mathrm{P}_2(2) + \mathrm{P}_1(4) \times \mathrm{P}_2(3) + \mathrm{P}_1(3) \times \mathrm{P}_2(4) + \mathrm{P}_1(6) \times \mathrm{P}_2(3)$

$= \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6}$

$= \frac{2}{36} + \frac{1}{36} + \frac{6}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} + \frac{3}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$

La probabilité de ne pas obtenir de jeton est égale à $\frac{1}{2}$.

Méthode 2 : analyse de tous les cas

On note dans un tableau les différentes sommes possibles obtenues à partir des lancers des deux dés.

1er dé \ 2ème dé	2	2	3	3	3	4
1	**3**	**3**	4	4	4	**5**
2	4	4	**5**	**5**	**5**	6
2	4	4	**5**	**5**	**5**	6
3	**5**	**5**	6	6	6	**7**
4	6	6	**7**	**7**	**7**	8
6	8	8	**9**	**9**	**9**	10

Il y a 18 possibilités d'obtenir une somme impaire et il y a 36 possibilités différentes

donc **la probabilité de ne pas obtenir de jeton est $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.**

Méthode 3 : utilisation d'un arbre de probabilités

(comme indiqué à la question précédente)

4) Probabilité d'obtenir au moins un jeton.

(obtenir 3 jetons) désigne l'ensemble des couples (nombre du 1er dé, nombre du 2ème dé) qui permettent de gagner 3 jetons, c'est-à-dire que la somme des deux nombres du couple vaut 6.
(ne pas obtenir de jeton) désigne l'ensemble des couples (nombre du 1er dé, nombre du 2ème dé) qui ne permettent pas le gain de jeton, c'est-à-dire que la somme des deux nombres du couple est impaire.
(obtenir un seul jeton) désigne l'ensemble des couples (nombre du 1er dé, nombre du 2ème dé) qui permettent de gagner 1 seul jeton, c'est-à-dire que la somme des deux nombres du couple est paire et différente de 6.
Ces trois évènements sont disjoints et leur réunion est l'ensemble des couples (nombre du 1er dé, nombre du 2ème dé) que l'on peut obtenir lors d'un lancer des deux dés, soit l'univers Ω, ensemble des événements possibles.

Univers Ω = (obtenir 3 jetons) ∪ (ne pas obtenir de jeton) ∪ (obtenir un seul jeton).

Méthode 1 : évènement contraire

(Obtenir au moins un jeton) est l'évènement contraire à l'évènement (ne pas obtenir de jeton).
Par conséquent :

$\text{P(obtenir au moins un jeton)} = 1 - \text{P (ne pas obtenir de jeton)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

La probabilité d'obtenir au moins un jeton est $\frac{1}{2}$.

Méthode 2 : calcul de probabilités

Obtenir au moins un jeton correspond à la réunion de deux évènements (obtenir un jeton) et (obtenir trois jetons).

P(obtenir au moins un jeton) = P(obtenir exactement un jeton) + P(obtenir trois jetons)

P(obtenir exactement un jeton) = P(pair différent de 6) = P(somme égale à 4 ou 8 ou 10)

$= P(4) + P(8) + P(10) = P((1\,;3)) + P((2\,;2)) + P((4\,;4)) + P((6\,;2)) + P((6\,;4))$

$= P_1(1) \times P_2(3) + P_1(2) \times P_2(2) + P_1(4) \times P_2(4) + P_1(6) \times P_2(2) + P_1(6) \times P_2(4)$

$= \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$

$= \frac{3+4+1+2+1}{36} = \frac{11}{36}$

et P(obtenir 3 jetons) $= \frac{7}{36}$, d'après la question 2.

Donc P(obtenir au moins un jeton) $= \frac{11}{36} + \frac{7}{36} = \frac{18}{36}$.

La probabilité d'obtenir au moins un jeton est de $\frac{1}{2}$.

Méthode 3 : analyse de tous les cas

On note dans un tableau les différentes sommes possibles obtenues à partir des lancés des deux dés.

1er dé \ 2ème dé	2	2	3	3	3	4
1	3	3	**4**	**4**	**4**	5
2	**4**	**4**	5	5	5	**6**
2	**4**	**4**	5	5	5	**6**
3	5	5	**6**	**6**	**6**	7
4	**6**	**6**	7	7	7	**8**
6	**8**	**8**	9	9	9	**10**

Il y a 18 possibilités d'obtenir une somme paire et il y a 36 possibilités différentes

donc **la probabilité d'obtenir au moins un jeton est $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.**

Méthode 4 : utilisation d'un arbre de probabilités
(comme indiqué à la question 2)

Deuxième hypothèse

Pour le premier dé, les faces valent : 1, 2, 3, 4, 5, 6, soit six valeurs possibles. Pour le deuxième dé, les faces valent 2, 2, 3, 3, 3 et 4, soit trois valeurs possibles.
La somme des valeurs de deux dés est donc un nombre compris entre 3 et 10.
Le premier dé est un dé « classique » pour lequel chacune des faces est équiprobable.
Avec les notations précédentes : $P_1(1) = P_1(2) = P_1(3) = P_1(4) = P_1(5) = P_1(6) = \frac{1}{6}$.
Il s'agit donc de garder le même raisonnement mais les combinaisons changent ainsi que les valeurs de $P_1(2)$ et de $P_1(5)$.

1) Valeur du deuxième dé

Un joueur a gagné un jeton, si la somme obtenue est un nombre pair différent de 6, c'est-à-dire si la somme peut être 4 ou 8 ou 10. Sachant que le premier dé indique « 4 », le deuxième dé indiquant un nombre supérieur ou égal à 2 et inférieur ou égal à 4, la somme ne peut pas être égale à 4 ou à 10.

Le deuxième dé indique donc « 4 ».

(il est possible de s'appuyer sur la ligne « 4 » du tableau de la méthode 2 ci-après : seul « 8 » est pair et différent de 6 et il est dans la colonne du « 4 ».)

2. Probabilité d'obtenir trois jetons

Pour obtenir 3 jetons, il faut obtenir une somme de 6 avec les deux dès.

Méthode 1 : calcul des probabilités

Les combinaisons possibles sont notées de la façon suivante : (premier dé ; deuxième dé) soit (2 ; 4), (3 ; 3), (4, 2) donc la probabilité d'obtenir 6 est la somme des probabilités des éléments élémentaires constituées par ces paires.
Par exemple, pour P(2 ; 4) , la probabilité est le produit des deux probabilités $P_1(2)$ (la probabilité pour le dé 1 d'obtenir 2) et $P_2(4)$ (la probabilité sur le deuxième dé d'obtenir 4).

$$\begin{aligned} P(\text{somme de } 6) &= P(2\,;4) + P(3\,;\,3) + P(4\,;\,2) \\ &= P_1(2) \times P_2(4) + P_1(3) \times P_2(3) + P_1(4) \times P_2(2) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P(somme\ 6)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{36}} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{36}} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{36}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}.$$

Méthode 2 : analyse de tous les cas

On note dans un tableau les différentes sommes possibles obtenues à partir des lancés des deux dés.

1er dé \ 2ème dé	2	2	3	3	3	4
1	3	3	4	4	4	5
2	4	4	5	5	5	**6**
3	5	5	**6**	**6**	**6**	7
4	**6**	**6**	7	7	7	8
5	7	7	8	8	8	9
6	8	8	9	9	9	10

Il y a 6 possibilités d'obtenir la somme égale à 6 et il y a 36 possibilités différentes donc la probabilité d'obtenir 3 jetons $\frac{6}{36}$, soit $\frac{1}{6}$.

Méthode 3 : utilisation d'un arbre de probabilités

Un arbre de probabilités pondéré, constitué de 18 (3 × 6) branches permet également d'obtenir la réponse mais il est plus difficile à gérer.

3) Probabilité de ne pas obtenir de jetons

On n'obtient pas de jeton si la somme est impaire donc pour les sommes : 3, 5, 7 ou 9.

Méthode 1 : calcul des probabilités

$\mathrm{P(somme\ impaire)} = \mathrm{P(obtenir\ 3, 5, 7\ ou\ 9)}$

$\mathrm{P(obtenir\ 3)} = \mathrm{P}(1\,;2) = \mathrm{P}_1(1) \times \mathrm{P}_2(2) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{36}.$

$\mathrm{P(obtenir\ 5)} = \mathrm{P}(1\,;4) + \mathrm{P}(2\,;3) + \mathrm{P}(3\,;2) = \mathrm{P}_1(1) \times \mathrm{P}_2(4) + \mathrm{P}_1 1(2) \times \mathrm{P}_2(3) + \mathrm{P}_1(3) \times \mathrm{P}_2(2)$

$\mathrm{P(obtenir\ 5)} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$

$\mathrm{P(obtenir7)} = \mathrm{P}(3\,;4) + \mathrm{P}(4\,;3) + \mathrm{P}(5\,;2) = \mathrm{P}_1(3) \times \mathrm{P}_2(4) + \mathrm{P}_1 1(4) \times \mathrm{P}_2(3) + \mathrm{P}_1(5) \times \mathrm{P}_2(2)$

$\mathrm{P(obtenir\ 7)} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$

$\mathrm{P(obtenir\ 9)} = \mathrm{P}(5\,;4) + P(6\,;3) = \mathrm{P}_1(5) \times \mathrm{P}_2(4) + \mathrm{P}_1(6) \times \mathrm{P}_2(3) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{36}.$

Donc $\mathrm{P(somme\ impaire)} = \frac{1}{36} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{1}{2}.$

La probabilité de ne pas obtenir de jeton est égale à $\frac{1}{2}$.

Méthode 2 : analyse de tous les cas

On note dans un tableau les différentes sommes possibles obtenues à partir des lancés des deux dés.

2ème dé / 1er dé	2	2	3	3	3	4
1	**3**	**3**	4	4	4	**5**
2	4	4	**5**	**5**	**5**	6
3	**5**	**5**	6	6	6	**7**
4	6	6	**7**	**7**	**7**	8
5	**7**	**7**	8	8	8	**9**
6	8	8	**9**	**9**	**9**	10

Il y a 18 possibilités d'obtenir une somme impaire et il y a 36 possibilités différentes

donc **la probabilité de ne pas obtenir de jeton est $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.**

Méthode 3 : utilisation d'un arbre de probabilités

(comme indiqué à la question précédente)

4) Probabilité d'obtenir au moins un jeton

(obtenir 3 jetons) désigne l'ensemble des couples (nombre du 1er dé, nombre du 2ème dé) qui permettent de gagner 3 jetons, c'est-à-dire que la somme des deux nombres du couple vaut 6.

(ne pas obtenir de jeton) désigne l'ensemble des couples (nombre du 1er dé, nombre du 2ème dé) qui ne permettent pas le gain de jeton, c'est-à-dire que la somme des deux nombres du couple est impaire.

(obtenir un seul jeton) désigne l'ensemble des couples (nombre du 1er dé, nombre du 2ème dé) qui permettent de gagner 1 seul jeton, c'est-à-dire que la somme des deux nombres du couple est paire et différente de 6.

Ces trois évènements sont disjoints et leur réunion est l'ensemble des couples (nombre du 1er dé, nombre du 2ème dé) que l'on peut obtenir lors d'un lancer des deux dés, soit l'univers Ω, ensemble des événements possibles.

Univers Ω = (obtenir 3 jetons) ∪ (ne pas obtenir de jeton) ∪ (obtenir un seul jeton).

Méthode 1 : évènement contraire

(Obtenir au moins un jeton) est l'évènement contraire à l'évènement (ne pas obtenir de jeton).
Par conséquent :

P(obtenir au moins un jeton) $= 1 - $ P (ne pas obtenir de jeton) $= 1 - \frac{1}{2} .= \frac{1}{2}$.

La probabilité d'obtenir au moins un jeton est $\frac{1}{2}$.

Méthode 2 : calcul de probabilités

Obtenir au moins un jeton correspond à la réunion de deux évènements (obtenir un jeton) et (obtenir trois jetons).

P(obtenir au moins un jeton) = P(obtenir exactement un jeton) + P(obtenir trois jetons)

P(obtenir exactement un jeton) = P(pair différent de 6) = P(somme égale à 4 ou 8 ou 10)

$= P(4) + P(8) + P(10)$

$= P((1\,;3)) + P((2\,;2)) + P((4\,;4)) + P((5\,;3)) + P((6\,;2)) + P((6\,;4))$

$= P_1(1) \times P_2(3) + P_1(2) \times P_2(2) + P_1(4) \times P_2(4) + P_1(5) \times P_2(3) + P_1(6) \times P_2(2) + P_1(6) \times P_2(4)$

$= \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$

$= \frac{3+2+1+3+2+1}{36} = \frac{12}{36}$

et P(obtenir 3 jetons) $= \frac{6}{36}$, d'après la question 2.

Donc P(obtenir au moins un jeton) $= \frac{12}{36} + \frac{6}{36} = \frac{18}{36}$.

La probabilité d'obtenir au moins un jeton est de $\frac{1}{2}$.

Méthode 3 : analyse de tous les cas

On note dans un tableau les différentes sommes possibles obtenues à partir des lancés des deux dés.

2ème dé / 1er dé	2	2	3	3	3	4
1	3	3	**4**	**4**	**4**	5
2	**4**	**4**	5	5	5	**6**
3	5	5	**6**	**6**	**6**	7
4	**6**	**6**	7	7	7	**8**
5	7	7	**8**	**8**	**8**	9
6	**8**	**8**	9	9	9	**10**

Il y a 18 possibilités d'obtenir une somme paire et il y a 36 possibilités différentes ;

donc **la probabilité d'obtenir au moins un jeton est $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.**

Méthode 4 : utilisation d'un arbre de probabilités

(comme indiqué à la question 2)

EXERCICE 4 : programme de calcul sur tableur

1) a) Réponse « 33 » pour le nombre de départ « 4 »

Méthode 1 : algébrisation de la situation

soit x le nombre de départ :

Prendre un nombre	x
Ajouter 3 à ce nombre	$x+3$
Élever la somme précédente au carré	$(x+3)^2$
Retrancher le carré du nombre de départ au résultat précédent	$(x+3)^2-x^2$

Donc si l'on remplace x par 4 on trouve : $(4+3)^2-4^2 = 7^2-4^2 = 49-16 = 33$.

Méthode 1 bis

Pour la proposition finale, on peut

- soit factoriser en $(x+3+x)\times(x+3-x) = 3\times(2x+3)$
  Pour $x=4$, on obtient $3\times(2\times 4+3) = 3\times 11 = 33$.
- soit développer en $x^2+6x+9-x^2 = 6x+9$
  Pour $x=4$, on obtient $6\times 4+9 = 24+9 = 33$.

Méthode 2 : lecture du programme « pas à pas »

programme		**détails**
prendre un nombre	4	4
ajouter 3 à ce nombre	7	$4+3$
élever la somme précédente au carré	49	7^2
retrancher le carré du nombre de départ au résultat précédent	33	$49-4^2$

1) b) Résultat obtenu avec « 4,2 » comme valeur de départ

Méthode 1

$(4{,}2+3)\times 2-4{,}22 = \mathbf{34{,}2}$.

Méthode 1bis

$3\times(2\times 4{,}2+3) = 3\times 11{,}4 = \mathbf{34{,}2}$ ou $6\times 4{,}2+9 = 25{,}2+9 = \mathbf{34{,}2}$.

Méthode 2 : avec tableur ou calcul des étapes les unes après les autres

programme		**détails**
prendre un nombre	4,2	4,2
ajouter 3 à ce nombre	7,2	$4{,}2+3$
élever la somme précédente au carré	51,84	$7{,}2^2$
retrancher le carré du nombre de départ au résultat précédent	34,2	$51{,}84-4{,}2^2$

Le résultat obtenu est « 34,2 ».

1) c) Résultat obtenu si on choisit $\frac{7}{10}$ comme valeur de départ

Méthode 1

$(0{,}7+3)\times 2-0{,}72 = 13{,}2$.

Méthode 1bis

$3\times(2\times 0{,}7+3) = 3\times 4{,}4 = 13{,}2$ ou $6\times 0{,}7+9 = 4{,}2+9 = 13{,}2$.

Méthode 2 : avec tableur ou calcul des étapes les unes après les autres

programme		**détails**
prendre un nombre	0,7	0,7
ajouter 3 à ce nombre	3,7	$0{,}7 + 3$
élever la somme précédente au carré	13,69	$3{,}7^2$
retrancher le carré du nombre de départ au résultat précédent	13,2	$13{,}69 - 0{,}7^2$

Le résultat obtenu est « 13,2 ».

2) Formules à écrire dans les cases B3, B4 et B5

En référence au nombre de départ écrit dans la cellule B2 :

- dans la case B3, on écrit **=B2+3** ;
- dans la case B4, on écrit **=B3*B3** ou **=B3^2** ;
- dans la case B5, on écrit **=B4-B2^2.**

3) Deux affirmations

a) **Affirmation 1** : « Aucun nombre ne permet d'obtenir 0 comme résultat final. »

On recherche la solution de $(x+3)^2 - x^2 = 0$;
en utilisant la factorisation, cette équation est équivalent à $3 \times (2x+3) = 0$
qui est équivalent à $(2x+3) = 0$ soit $x = -\frac{3}{2}$.

Donc **l'affirmation 1 est fausse**.

b) **Affirmation 2** : « Si on prend un nombre entier positif, le résultat est toujours divisible par 3. »

La factorisation de l'expression $3(2x+3)$ met en évidence la divisibilité du résultat par 3.

L'affirmation 2 est donc vraie.

TROISIÈME PARTIE

SITUATION 1 (Cycle 1 Moyenne Section)

Analyse de l'activité « Cartes à points » issue de la ressource « Découvrir les mathématiques – Moyenne section – Hatier - Édition 2015 » dont les auteurs sont : Dominique Valentin, Marie-Hélène Salin, Dominique Verdenne et Roland Charnay.

1) Deux procédures de quantification de la collection de gommettes

Remarques

On lit dans le programme qu'en fin de maternelle, les enfants doivent savoir « Quantifier des collections jusqu'à dix au moins ; les composer et les décomposer par manipulations effectives puis mentales ». « Quantifier une collection de gommettes » est ici utilisé dans le sens de « dénombrer », c'est-à-dire « extraire le nombre de », donc associer une désignation orale ou autre (comme les doigts de la main par exemple) du nombre.
Dans la situation proposée, pour constituer une collection de pions équipotente à la collection de gommettes, il n'est pas indispensable de passer par une désignation du nombre.
Pour répondre à cette question, nous faisons l'hypothèse que « quantifier la collection de gommettes » signifie « associer une désignation orale du nombre » correspondant au cardinal de cette collection. Quand on évoque le contexte cardinal, on se réfère aux situations où le mot-nombre quantifie une collection d'éléments, où il s'agit de répondre à la question " combien ? ".

Sur la carte rectangulaire présentée figurent deux gommettes disposées l'une en haut à droite et l'autre en bas à gauche (il y a deux représentations possibles de la constellation usuelle du dé). La désignation orale associée peut être « deux gommettes » ou « deux » ou encore « une et encore une ».

Procédure 1 : par subitizing

Michel Fayol définit le terme « subitizing »» comme étant le "dénombrement rapide, précis et assuré de la numérosité d'une collection présentée pendant une durée très brève". Ce processus consiste en une « aperception globale » d'une quantité qui ne nécessite pas le recours au comptage. L'élève reconnaît/identifie la quantité et énonce le nombre « deux ».

Procédure 2 : par « comptage de un en un » associé ou non à un « pointage »

L'élève pointe successivement chacune des gommettes en énonçant « un, deux » et conclut qu'il y a deux gommettes sur la carte et qu'il s'agit d'une carte « deux ».

L'élève considère chacune des gommettes et conclut : « un et encore un, deux ». Rappelons que pour construire la collection de pions, la quantification sous la forme « un et encore un » est suffisante.

2) a) Deux procédures de quantification de la collection de gommettes

Sur la carte rectangulaire présentée figurent six gommettes disposées « en T » avec un alignement de trois gommettes et un alignement de quatre gommettes. Cette disposition ne correspond pas à la collection organisée de la constellation usuelle du dé (trois et trois ou deux, deux et deux) ou des cartes à jouer (cinq et un). La désignation orale associée peut être « six » ou encore des désignations correspondant à certaines décompositions induites par la disposition des gommettes : « trois et trois » ou « quatre et deux » ou « quatre et un et un ».

Procédure 1 : par « comptage » s'appuyant ou non sur un « pointage » des gommettes

L'élève prend en compte successivement chacune des gommettes en énonçant « un, deux, trois, quatre, cinq, six » en énumérant la collection de gommettes (c'est-à-dire en pointant, avec le doigt ou le regard, une et une seule fois chaque gommette, sans en oublier). Cette procédure d'énumération peut encore se décliner puisque différents « chemins », plus ou moins induits par la disposition des gommettes, sont possibles pour explorer la collection de gommettes.

Procédure 2 : par « subitizing » et « surcomptage » s'appuyant ou non sur un « pointage »

L'élève reconnaît « trois » (ou « quatre ») puis surcompte en prenant en compte successivement chacune des autres gommettes et en énonçant « quatre, cinq, six » (ou « cinq, six »)…

Procédure 3 : par décomposition-recomposition

L'élève reconnaît/identifie deux sous collections disjointes : « trois et trois » et en reste à cette désignation qui l'amènera, dans ce contexte particulier, à réussir en prenant trois et trois pions. Il peut aussi énoncer à la suite le nombre « six », résultat d'un calcul dont le résultat peut être automatisé (mémorisation des doubles : « trois et trois, c'est six »). L'élève reconnaît/identifie « quatre et deux » et en reste à cette désignation qui l'amènera, dans ce contexte particulier, à réussir en prenant quatre et deux pions, ou énonce à la suite « cinq, six » (éventuellement en utilisant ses doigts) pour conclure qu'il y a « six gommettes » ou que c'est une carte « six ».

2) b) Erreurs dans la mise en œuvre de chacune des procédures

Procédure 1 : par « comptage » s'appuyant ou non sur un « pointage » des gommettes

Plusieurs erreurs d'origines différentes peuvent être listées :

- erreur dans la récitation de la comptine : oubli ou répétition d'un mot nombre, ordre non respecté sur les mots nombres, …
- erreur dans l'énumération : pointer deux fois la même gommette (ici celle qui appartient aux deux alignements par exemple), oublier une gommette ;
- erreur dans la coordination pointage/récitation de la suite des mots-nombres : aller trop vite sur la récitation ou sur le pointage …

Ces erreurs peuvent être éventuellement cumulées…

Procédure 2 : par « subitizing » et « surcomptage » s'appuyant ou non sur un « pointage »

Erreur de surcomptage : l'élève reconnaît un premier groupe de gommettes, il pointe l'objet suivant en énonçant non pas le suivant mais le même mot-nombre. Par exemple, il reconnaît « trois » (ou « quatre ») puis surcompte en pointant successivement chacune des autres gommettes et en énonçant « trois, quatre, cinq » (ou « quatre, cinq »).

Procédure 3 : par décomposition-recomposition

Erreur dans l'identification des deux sous collections : en particulier ici une gommette est commune aux deux alignements donc l'élève peut considérer deux sous-collections non disjointes et dire « trois » et « quatre ».

3) Moyens de validation

Dans cette situation, un élève doit prendre la bonne quantité de pions pour réussir, « autant de pions que de gommettes ».
Pour valider sa réussite, il peut :

- poser les pions sur les gommettes (un pion sur chaque gommette) (dans le document il est précisé : « *Les jetons sont d'une taille proche des points sur la carte.* ») et constater que toutes les gommettes (tous les points) sont recouvertes et qu'il ne reste pas de pions ;
- poser les pions à côté de la carte en les disposant de la même manière et constater qu'il est possible de « reproduire » la configuration des gommettes avec les pions et qu'il ne reste pas de pions.

Remarque

C'est également une procédure pour constituer la collection de pions équipotente à la collection de pions (sans recourir au nombre…)

4) Trois variables de différenciation

Analyse des cartes proposées sur la « fiche matériel 13 » pour identifier les variables sur lesquelles les concepteurs se sont appuyés pour construire les différentes cartes.
Comme la question porte sur la conception des différentes cartes, on peut comprendre la question comme « envisager les choix possibles pour constituer ce jeu de cartes » et d'identifier les variables didactiques.

- Quantité représentée : ici, de 1 à 6 qui est dans le champ numérique travaillé en MS.
- Représentation des quantités : ici, des collections de gommettes (il n'y a pas d'écriture chiffrée).
- Choix des objets représentés : ici, des gommettes toutes identiques.

- Taille des objets représentés : ici, toutes les tailles sont identiques.
- Disposition des objets : ici, différentes dispositions sont envisagées de la configuration de dés à une dispersion en passant par des alignements.

Il ne s'agit pas ici d'étudier la mise en œuvre de la différenciation dans la cadre de la classe : par exemple restreindre le champ numérique pour certains élèves.

La disposition des cartes sur la fiche permet de repérer qu'il y a cinq cartes avec une gommette (disposées sur une même colonne), cinq cartes avec deux gommettes, cinq cartes avec trois gommettes, cinq cartes avec quatre gommettes, cinq cartes avec cinq gommettes, cinq cartes avec six gommettes, soit trente cartes différentes (en fait par symétrie centrale, il n'y a que trois dispositions différentes pour le « un »). Pour les cartes avec une ou deux gommettes, les dispositions des gommettes changent, cependant il ne nous semble pas judicieux de parler ici de « variables de différenciation ». Pour les cartes « deux », c'est juste la « distance » entre les deux gommettes qui varie.

Pour les autres cartes, nous citons ce qui les distingue en évoquant l'impact sur la plus ou moins grande complexité dans la mise en œuvre d'une procédure (une façon d'entendre la formulation « variables de différenciation ») ; ici comme les gommettes (les points) sont toutes (tous) identiques, les variables seraient donc liées à la disposition des gommettes (points) sur la carte (ce qui constitue une seule variable !) :

- organisation plus ou moins familière (première ligne de la fiche correspondent aux constellations du dé (à une symétrie près)) ;
- organisation qui fait apparaître des décompositions qui peuvent conduire à utiliser des connaissances de certaines recompositions : pour six : trois et trois, c'est six (1ère carte 2ème ligne) ; pour quatre : trois et un (3ème carte 4ème ligne) ;
- organisation pour laquelle le dénombrement par comptage, notamment la procédure d'énumération peut être rendue plus difficile : par exemple si les gommettes sont alignées (comme pour « six », la première carte (à gauche) de la cinquième ligne) ou si l'ordre de parcours de la collection est plus difficile à mémoriser (comme 2ème carte 5ème ligne, ou 2ème carte 2ème ligne ou 1ère carte 3ème ligne).

Remarque 1

Pour envisager d'autres variables, on pourrait imaginer que sur une carte, les gommettes ne soient pas toutes de la même couleur. Si c'était le cas, le nombre de couleurs et la partition proposée constitueraient d'autres variables.

Remarque 2

« Le gagnant est celui qui a le plus de cartes. », c'est donc celui qui a réussi le plus souvent à construire la collection de pions équipotente à la collection de gommettes (points) qui gagne. La quantité de pions gagnés placés dans le plateau individuel de l'élève n'est pas prise en compte.

SITUATION 2 (Cycle 2 CE1)

1) Types de problèmes dont relèvent chacun des problèmes

Remarque préliminaire

Cette question est relativement floue. Nous faisons ici l'hypothèse qu'il s'agit de se référer à la classification des problèmes relevant des structures additives proposée par Gérard Vergnaud[1]. Cette dernière est parfois évoquée dans les guides du maître associés aux manuels des élèves et par exemple la ressource « Le moniteur de Mathématiques »[2] y fait spécifiquement référence.
Chaque problème est analysé en se référant à cette catégorisation.

[1] On pourra consulter son article dans la revue Petit x. Num. 22. p. 51-69 : Psychologie et développement cognitif et didactique des maths : un exemple : les structures additives.
[2] Le moniteur de mathématiques cycle 3. Résolution de problèmes, Fichier pédagogique. Edition Nathan.

Problème 1 : « Paul a gagné 8 billes pendant la récréation. Il a maintenant 22 billes. Combien avait-il de billes avant la récréation ? »

Ce problème peut être considéré comme un problème de transformation : « État initial-Transformation-État final », avec une transformation positive (gagner) et un état final (il a maintenant…) connus. La question porte sur la recherche de l'état initial (combien avait-il…).
Il peut également être interprété comme un problème de comparaison additive ou comme un problème de composition d'états (dans les 22 billes, il y a les 8 billes gagnées et les billes de départ). Il se résout par une soustraction 22 – 8 pour un expert.

Problème 2 : « Marie mesure 135 cm. C'est 45 cm de moins que son papa. Quelle est la taille du papa de Marie ? »

Ce problème peut être considéré comme un problème de comparaison d'états (de mesures) additive avec recherche d'un état connaissant l'autre état (Marie mesure) et le critère de comparaison (l'écart) (… de moins que…). La question porte sur la recherche de l'autre état (quelle est la taille de…). Il se résout par une addition 135 + 45 pour un expert.

2) Deux procédures pour le problème 1 attendues d'un élève de CE1

Nous décrivons une diversité de procédures qui amènent à trouver la bonne réponse, mobilisant différents supports. Cette liste n'est pas hiérarchisée, ni exhaustive.

Procédures 1 : par « appui sur un dessin des billes »

On peut distinguer au moins deux niveaux de procédures différents (une revenant sur l'action en inversant la transformation et l'autre s'appuyant sur la recherche d'un complément) :

- dessin des 22 billes puis barrer parmi ces 22, les 8 billes qui ont été gagnées et conclure en dénombrant les billes non barrées : 14 billes ;
- dessin de billes en « surcomptant » à partir de « neuf » jusque « vingt-deux » puis dénombrement des billes dessinées : 14 billes.

Procédure 2 : par « appui sur les écritures des nombres »

On peut distinguer deux façons de réaliser cette procédure revenant sur l'action en inversant la transformation :

- écrire tous les nombres de 1 à 22 puis barrer les nombres de 1 à 8, en dénombrant les écritures non barrées : 14 ;
- écrire tous les nombres de 1 à 22 puis barrer les huit nombres de 22 à 15, en dénombrant les écritures (« un, deux, … huit ») au fur et à mesure et « lire » qu'il reste 14 nombres non barrés.

Procédure 3 : par « appui sur les doigts »

- L'élève a reconnu qu'il fallait trouver le nombre correspondant à « 22 – 8 ». Pour trouver ce nombre, il peut lever successivement huit doigts en décomptant : « vingt-et-un ; vingt ; dix-neuf ; dix-huit ; dix-sept ; seize ; quinze ; quatorze » et conclure que Paul avait quatorze billes.

Procédure 4 : par « appui sur la bande numérique ou la demi-droite graduée »

- L'élève a reconnu qu'il fallait trouver le nombre correspondant à « ? + 8 = 22 ». Il traduit en « 8 + ? = 22 », « de 8, pour aller à 22 ». Pour trouver ce nombre, il peut chercher l'écart entre 8 et 22, soit en comptant de un en un, soit par sauts : de 8 à 10, deux puis de 10 à 22, douze ; donc quatorze (douze et deux).
- L'élève a reconnu qu'il fallait trouver le nombre correspondant à « 22 – 8 ». Pour trouver ce nombre, il recule à partir de 22, de un en un ou par sauts en décomposant 8 (en 2 + 6) pour aller à la dizaine inférieure : 20 puis à 14.

Procédure 5 : par « un calcul en ligne »

- L'élève a reconnu qu'il fallait trouver le nombre correspondant à « 22 – 8 ». Pour trouver ce nombre en mobilisant la propriété des écarts, il écrit : 22 – 8 = 24 – 10 = 14.
- L'élève a reconnu qu'il fallait trouver le nombre correspondant à « 22 – 8 ». Pour trouver ce nombre en décomposant un des deux nombres, il peut écrire :

$22 - 8 = 22 - 2 - 6 = 14$ ou $22 - 8 = 18 + 4 - 8 = 10 + 4 = 14.$

Procédure 6 : par « un calcul posé »

- Soustraction posée
- Addition à trou…

3) Erreurs pouvant être induites par les formulations

Ici dans chacun des deux problèmes proposés, certains « mots inducteurs » peuvent induire des erreurs de représentations du problème.

Problème 1

Une erreur peut provenir du fait qu'une transformation positive est évoquée : « il a gagné 8 billes » et que l'opération experte à effectuer entre les deux nombres (données de l'énoncé) est une soustraction.

Problème 2

Une erreur peut provenir du fait que le critère de comparaison (l'écart) est formulé en : « … de moins que… » et que l'opération experte à effectuer entre les deux nombres (données de l'énoncé) est une addition.

La formulation suivante donnerait des résultats différents :
Marie mesure 135 cm. Son papa mesure 45 cm de plus qu'elle. Quelle est la taille du papa de Marie ?

SITUATION 3 (Cycle 3 CM2)

1) Notion mathématique pouvant être consolidée

La notion mathématique pouvant être consolidée en proposant ces quatre problèmes au CM2 est la notion de proportionnalité. Elle intervient ici dans le cadre numérique. Les problèmes permettront de revenir sur le sens de la proportionnalité (reconnaître si une situation est ou non une situation de proportionnalité) et d'amener les élèves à mettre en œuvre différentes procédures pour résoudre un problème relevant de la proportionnalité.

2) Un argument pour justifier la pertinence des problèmes 2 et 3 dans cette séance

Ces deux problèmes proposés parmi d'autres relevant de la proportionnalité, pourront amener les élèves à s'interroger sur les cas où une situation n'est pas une situation de proportionnalité.

Dans le cas du problème 2 : « Un bébé pèse 4 kilos à 1 mois. Combien pèsera-t-il à 12 mois ? », la formulation de la question peut induire l'idée que cette question a une réponse et que l'élève peut la trouver à partir des données de l'énoncé. Cependant la réponse qui pourrait être proposée « 48 kilos » (4×12) peut être questionnée et invalidée par des validations pragmatiques : 48 kilos à 12 mois… L'idée de proportionnalité qui peut émerger est ici liée à la notion de croissance.

Une autre possibilité liée à la croissance serait sur un modèle additif avec des nombres « abstraits » : on ajoute 11 à 1 pour obtenir 12 donc on ajoute 11 à 4 kg pour obtenir 15 kg.

Dans le cas du problème 3 : « Pour une sortie scolaire, on réserve des bus pouvant transporter 40 personnes maximum. Combien faut-il réserver de bus pour 50 personnes ? Pour 100 personnes ? », il s'agit d'une situation qui peut aussi induire l'idée d'une relation de proportionnalité entre le nombre de personnes à transporter et le nombre de bus à réserver. Cependant la réponse doit être un nombre entier (de bus) ce qui peut amener les élèves à questionner leur réponse (par exemple, pour 50 personnes, 50 / 40, soit 1,25 bus). Les arguments ne sont pas de même nature que pour le problème précédent.

Remarque

La situation du problème 3 peut être modélisée par une fonction constante par morceaux (dont la représentation graphique est « en escaliers ») : de 1 à 40 personnes, un bus ; de 41 à 80 personnes, deux bus ; de 81 à 120 personnes, trois bus, etc.

3) Analyse de la production d'Ethan (problème 1)

Problème 1 : « Pour faire 8 brioches, il faut 500 g de farine, 6 œufs et 200 g de beurre. Quelles quantités d'ingrédients sont nécessaires pour fabriquer 16 brioches ? 4 brioches ? »

Il existe une relation de proportionnalité entre la quantité de brioches et la quantité de farine ; la quantité de brioches et la quantité de beurre. Pour la relation entre la quantité de brioches et la quantité d'œufs, ce n'est pas le cas puisque la quantité d'œufs doit être un nombre entier. Ici, avec la recette proposée, il faudrait un œuf pour faire une brioche, deux œufs pour faire deux brioches, trois œufs pour faire 3 ou 4 brioches… Les données numériques choisies peuvent amener les élèves à privilégier certaines procédures en identifiant : la relation entre 8 et 16, la relation entre 8 et 4. Les nombres donnés pour les ingrédients étant tous pairs.

Analyse de la production d'Ethan

À la lecture de l'écrit produit par Ethan, il s'agit de reconstituer l'ordre dans lequel il a effectué ses recherches.

Procédure

Pour chaque ingrédient, Ethan calcule d'abord la quantité nécessaire pour une brioche en posant une division par 8 des quantités nécessaires pour 8 brioches (données de l'énoncé), puis il multiplie le quotient obtenu par le nombre de brioches indiqué dans la question (16 puis 4).

- Recherche de la quantité de farine nécessaire pour une brioche ; division euclidienne de 500 par 8 : le quotient est 62 et le reste est 4 (les restes ne sont pas utilisés dans la suite de la production).
- Recherche de la quantité de farine nécessaire pour 16 brioches ; multiplication du quotient obtenu : $62 \times 16 = 992$.
- Recherche de la quantité d'œufs nécessaire pour une brioche ; division avec quotient décimal de 6 par 8 : le quotient est 0,7 et le reste 4 dixièmes.
- Recherche de la quantité d'œufs nécessaire pour 16 brioches ; multiplication : $0{,}7 \times 16 = 11{,}2$.
- Recherche de la quantité de beurre nécessaire pour une brioche ; division euclidienne de 200 par 8 ; le quotient est 25 et le reste est 0.
- Recherche de la quantité de beurre nécessaire pour 16 brioches ; multiplication : $25 \times 16 = 400$.

L'élève formule une phrase réponse intégrant ses résultats : « Il faudra pour 16 brioches, 992 g de farine, 11,2 œufs et 400 g de beurre. »

- Recherche de la quantité de farine nécessaire pour 4 brioches ; multiplication : $62 \times 4 = 248$.
- Recherche de la quantité d'œufs nécessaire pour 4 brioches ; multiplication : $0{,}7 \times 4 = 2{,}8$.
- Recherche de la quantité de beurre nécessaire pour 4 brioches ; multiplication : $25 \times 4 = 400$.

L'élève formule une phrase réponse : « Il faudra pour 4 brioches, 248 g de farine, 2,8 œufs et 100 g de beurre.

Réussites

Il met en œuvre une procédure adaptée à la situation. Si les nombres proposés (ici 500 ; 6 ; et 200) avaient été des multiples de 8, sa procédure lui aurait permis d'arriver au résultat. Il ne fait aucune erreur de calcul dans la mise en œuvre des techniques opératoires : division euclidienne ou division décimale et multiplication.

Erreurs

Il semble mettre en œuvre une procédure automatisée de retour à l'unité sans prendre en considération les relations entre les nombres proposés dans l'énoncé.

Il n'interroge pas les nombres proposés ni les nombres trouvés en se référant aux données du problème ou la nature du nombre (entier ici) : 2,8 œufs pour 4 brioches alors qu'il en faut 6 pour 8 brioches. Il ne vérifie pas les résultats trouvés : par exemple pour les 62 g de farine pour une brioche, il pouvait multiplier ce nombre par 8 et constater que l'on ne retrouve pas 500 ($62 \times 8 = 496$).

Les résultats ne sont pas contrôlés par rapport au contexte, il ne se réfère pas à la réalité pour le nombre d'œufs en donnant une réponse non entière.

4) Analyse des productions de Léandre et d'Aboubakr (problème 3)

Problème 3 : « Pour une sortie scolaire, on réserve des bus pouvant transporter 40 personnes maximum. Combien faut-il réserver de bus pour 50 personnes ? Pour 100 personnes ? »

Analyse de la production de Léandre

L'élève dessine des rectangles représentant les bus et répartit les voyageurs. Pour répartir les 50 personnes, il utilise donc un bus « complet » (prise en compte de la contrainte « 40 personnes maximum ») et un autre bus pour les 10 personnes supplémentaires. Pour trouver le nombre de bus nécessaires pour transporter 100 personnes, il utilise probablement la relation entre 50 et 100 (100 est le double de 50 ou 100, c'est 50 et encore 50). Il utilise alors deux autres bus pour les 50 personnes supplémentaires et conclut qu'il faudra 4 bus pour transporter 100 personnes. Il utilise sa réponse correcte à la 1ère question sans tenir compte qu'un bus est incomplet.

Analyse de la production d'Aboubakr

Pour trouver le nombre de bus, l'élève multiplie le nombre de personnes à transporter par le nombre de personnes maximum par bus.
Il donne les résultats justes à ses deux multiplications en utilisant la technique opératoire où apparaissent des lignes de zéros, y compris pour multiplier un nombre par 100. Il écrit deux phrases réponses en lien avec les questions posées et intégrant ses résultats.
Sa représentation du problème est erronée, on pourrait penser qu'il répond à la question : « combien de personnes peuvent transporter 50 bus ? » mais sa phrase réponse ne confirme pas cette hypothèse.
Il obtient des nombres « aberrants » (plus de bus que de personnes dans les bus) qu'il ne contrôle pas.

Remarque

La réponse de cet élève est rare et peu fréquente au CM2 et non représentative d'erreurs possibles sur cette question.

5) Deux procédures pour résoudre le problème 4

Problème 4 : « Arthur a 6 piles identiques qui pèsent 18 g en tout. Combien pèsent 8 piles ? »

Il s'agit d'une situation de proportionnalité : la masse (ici exprimée en grammes) est proportionnelle au nombre de piles.

Procédure 1 : passage à l'unité

Recherche de la masse d'une pile par division (ou multiplication à trou) $18 : 6 = 3$. Une pile a une masse de 3 grammes. Recherche de la masse de 8 piles par multiplication : $3 \times 8 = 24$. 8 piles ont une masse de 24 grammes.

$: 6$

Nombre de piles	6	8	1
Masse des piles	18		

$\times 8$

Remarque

La procédure connue sous le nom « règle de trois » s'apparente à la procédure « retour à l'unité » mais sans forcément effectuer la division en premier.
Si 6 piles pèsent 18g, alors 1 pile pèse six fois moins c'est-à-dire $18\text{ g} : 6 = 3\text{ g}$, *et 8 piles pèsent huit fois plus soit* $8 \times 3\text{ g} = 24\text{ g}$.

Ceci peut aussi s'écrire $8 \times \frac{18\,g}{6}$ *et relève du calcul fractionnaire (en classe de collège).*

Procédure 2 : recherche du coefficient de proportionnalité

La procédure de recherche du coefficient de proportionnalité insiste sur le coefficient multiplicatif qui lie une grandeur à l'autre ; il s'exprime plutôt sous la forme 3 g/pile ou 3 g pour une pile (ou sans unité pour un coefficient).

Nombre de piles	6	8
Masse des piles	18	

$\times 3$

Procédure 3 : utilisation des propriétés de linéarité (multiplicatives et additives)

Les opérations effectuées sur une des grandeurs sont « reproduites » sur l'autre grandeur :

- recherche de la masse de 2 piles (en considérant que 8 et 6 sont des multiples de 2) par division par 3 (car 6 : 3 $=$ 2) : 18 : 3 $=$ 6. Deux piles ont une masse de 6 grammes.

puis :

- recherche de la masse de 8 piles par multiplication par 4 ($8 = 2 \times 4$) : $6 \times 4 = 24$. 8 piles ont une masse de 24 grammes.

ou

- recherche de la masse de 8 piles par addition de la masse de 6 piles et de la masse de 2 piles soit : $18 + 6 = 24$ (comme $8 = 6 + 2$) . 8 piles ont une masse de 24 grammes.

: 3 $\quad\quad$ $\times$ 4

Nombre de piles	6	2	8
Masse des piles	18		

+

Remarque

Seules les procédures de ce type sont attendues au cycle 3.

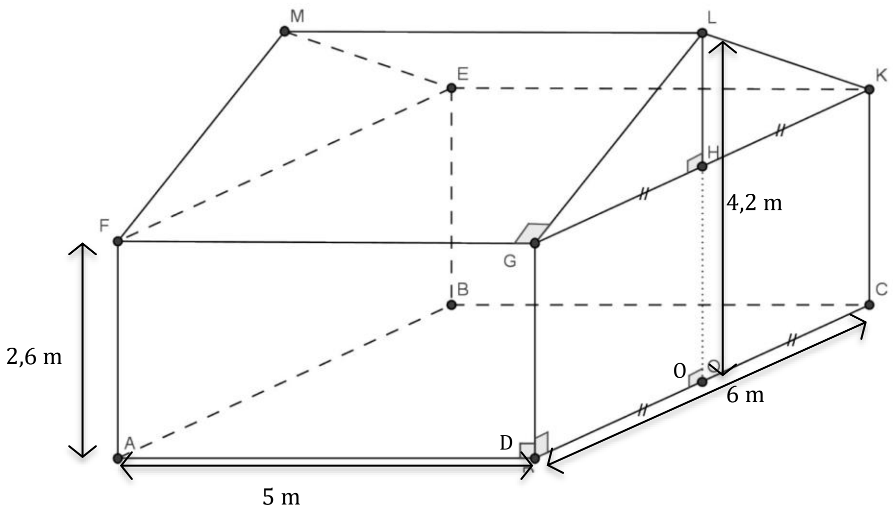
L'utilisation d'une représentation graphique ou du produit en croix relève du cycle 4 car elle nécessite de connaitre des propriétés de la fonction linéaire, en particulier que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine et des propriétés sur l'égalité des rapports dans une situation de proportionnalité.

GROUPEMENT 5 – AVRIL 2018

PREMIÈRE PARTIE : un abri de jardin

Remarque préalable

Les informations relatives au solide modélisant l'abri de jardin sont données, d'une part dans le texte, c'est le cas par exemple des différentes mesures, et d'autre part sous forme codée dans la figure, c'est le cas des milieux et de certains angles droits.
On admettra ainsi dans la suite que les points L, H et O sont alignés (résultat qui peut se déduire des informations codées sur la figure).



A - Le bâtiment

1) Calcul de la surface au sol de l'abri

Remarque

L'expression « la surface au sol » est issue du langage courant. Toutefois celle-ci peut désigner aussi bien la surface elle-même (ici le rectangle ABCD) que son aire. Mathématiquement, et les programmes l'exigent, il conviendrait de distinguer ces deux sens (distinguer ici l'objet et la grandeur) par des formulations adaptées. Le contexte nous invite ici à privilégier le second sens ; ce qui revient à interpréter la question comme « déterminer l'aire de la surface au sol du bâtiment ».

La surface au sol du bâtiment est l'aire du rectangle ABCD, dont la longueur DC et la largeur AD sont respectivement égales à 6 m et à 5 m.
D'où $\text{Aire(ABCD)} = \text{DC} \times \text{AD} = 6\text{ m} \times 5\text{ m} = 30\text{ m}^2$.

La surface au sol du bâtiment est de 30 m².

2) Volume du bâtiment

Le bâtiment peut se décomposer en deux solides :

- un pavé droit ABCDGKEF ;
- un prisme droit EFGKLM à base triangulaire GKL.

Le volume du bâtiment est la somme de leurs deux volumes.

Calcul du volume du pavé droit ABCDGKEF

On connait la longueur DC, la largeur AD et la hauteur AF de ce pavé droit.
On a donc : $\text{V(ABCDGKEF)} = \text{DC} \times \text{AD} \times \text{AF} = 6\text{ m} \times 5\text{ m} \times 2{,}6\text{ m} = 78\text{ m}^3$

Calcul du volume du prisme droit EFGKLM

Rappelons que le volume d'un prisme se calcule à l'aide de la formule : $\mathrm{V} = \mathrm{Aire(base)} \times \mathrm{hauteur}$.

Le triangle GKL est une base de ce prisme. La hauteur associée à cette base est GF, qui est égale à AD, donc à 5 m, car ADGF est un rectangle.

- Calculons l'aire du triangle GKL.

D'après les données codées de la figure (angle droit en H), on peut dire que (LH) est la hauteur relative à la base [GK] de ce triangle.
On a d'une part :
$\mathrm{GK} = \mathrm{DC} = 6\ \mathrm{m}$ car CDGK est un rectangle.
D'autre part :
$\mathrm{LH} = \mathrm{LO} - \mathrm{HO}$ car H est un point du segment [OL] (on admet que O, L et H sont alignés).
Or H et O sont les milieux respectifs des segments [GK] et [DC], donc HO est une médiane du rectangle CDGK. Sa longueur est donc égale à celle des côtés [DG] et [CK], et donc égale à AF puisque ADGF est un rectangle.
D'où $\mathrm{LH} = \mathrm{LO} - \mathrm{HO} = 4{,}2\ \mathrm{m} - 2{,}6\ \mathrm{m} = 1{,}6\ \mathrm{m}$.
On a alors $\mathrm{Aire(GKL)} = \dfrac{base \times hauteur}{2} = \dfrac{\mathrm{GK} \times \mathrm{LH}}{2} = \dfrac{6\ \mathrm{m} \times 1{,}6\ \mathrm{m}}{2} = \dfrac{9{,}6\ \mathrm{m}^2}{2} = 4{,}8\ \mathrm{m}^2$.

- On peut alors calculer le volume du prisme droit EFGKLM

$\mathrm{V(EFGKLM)} = \mathrm{Aire(GKL)} \times \mathrm{GF} = 4{,}8\ \mathrm{m}^2 \times 5\ \mathrm{m} = 24\ \mathrm{m}^3$

Calcul du volume total du bâtiment

Finalement, on obtient
$$\mathrm{V}(b\hat{a}timent) = \mathrm{V(ABCDGKEF)} + \mathrm{V(EFGKLM)} = 78\ \mathrm{m}^3 + 24\ \mathrm{m}^3 = 102\ \mathrm{m}^3$$
Le volume du bâtiment est donc bien 102 m³.

B - Le toit

1) a) Longueur LG

Dans le triangle LHG, rectangle en H, on connait les longueurs des deux côtés de l'angle droit :
- $\mathrm{LH} = 1{,}6\ \mathrm{m}$ (voir question précédente)
- $\mathrm{GH} = \frac{1}{2} \times \mathrm{GK} = \frac{1}{2} \times 6\ \mathrm{m} = 3\ \mathrm{m}$, car H est le milieu de [GK].

Le théorème de Pythagore permet de calculer la longueur de l'hypoténuse [LG] :
$\mathrm{LG}^2 = \mathrm{GH}^2 + \mathrm{LH}^2 = (1{,}6\ \mathrm{m})^2 + (3\ \mathrm{m})^2 = 2{,}56\ \mathrm{m}^2 + 9\ \mathrm{m}^2 = 11{,}56\ \mathrm{m}^2$
D'où $\mathrm{LG} = \sqrt{11{,}56\ \mathrm{m}^2} = 3{,}4\ \mathrm{m}$.
La longueur LG est égale à 3,4 m.

1) b) Aire du toit

Le toit est constitué des deux rectangles GLMF et KEML.

- Les deux rectangles GLMF et KEML ont même longueur LM, égale à GF et à KE.

Et puisque ADGF est aussi un rectangle, GF est égale à AD et donc à 5 m.

- Les deux rectangles GLMF et KEML ont aussi la même largeur.

En effet, la droite (LH) est la médiatrice du segment [GK], puisqu'elle lui est perpendiculaire et passe en son milieu. En conséquence L est équidistant de G et K.

Ainsi, on a LK = LG = 3,4 m.

- Ainsi, les deux rectangles GLMF et KEML sont superposables et donc ils ont la même aire.

On en déduit $\mathrm{Aire}(toit) = 2 \times \mathrm{Aire(GLMF)} = 2 \times \mathrm{GF} \times \mathrm{LG} = 2 \times 5\ \mathrm{m} \times 3{,}4\ \mathrm{m} = 34\ \mathrm{m}^2$.

L'aire du toit est donc bien égale à 34 m².

2) Pente du toit et type de tuiles

Dans le triangle GHL, rectangle en H, on connait les mesures des longueurs des trois côtés.
Pour déterminer l'angle $\widehat{\mathrm{HGL}}$, on peut donc, au choix, calculer son sinus, son cosinus ou sa tangente.

Par exemple, on a $\tan\widehat{HGL} = \dfrac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}} = \dfrac{LH}{GH} = \dfrac{1{,}6 \text{ m}}{3 \text{ m}}$ (ou encore $\tan\widehat{HGL} \approx 0{,}5333$)

d'où $\widehat{HGL} = \tan^{-1}\left(\dfrac{1{,}6}{3}\right)$

soit $\widehat{HGL} \approx 28°$. (ou $\widehat{HGL} \approx \tan^{-1}(0{,}5333) \approx 28°$)

L'angle $\widehat{HGL}$ est bien compris entre 25° et 60°. Il permet donc d'utiliser les tuiles « mécaniques ».

3) Estimation du nombre de tuiles « petit moule » nécessaires

Remarque

D'après l'énoncé, le magazine professionnel demande de commencer par déterminer « le nombre de tuiles nécessaires pour couvrir la surface du toit », sans autre précision sur son mode de calcul. Deux interprétations sont alors envisageables selon que l'on simule un pavage du toit par les tuiles ou que l'on se limite à une comparaison entre les aires du toit et d'une tuile. Ces deux interprétations aboutissent à des estimations différentes mais, ici, à la même conclusion finale.

1ère interprétation du conseil du magazine : simulation d'un pavage effectif

Dans ce cas, afin de pouvoir comparer les deux estimations, il faut pour chacune d'elles calculer le nombre total de tuiles nécessaires pour couvrir le toit.

- À partir des informations du site internet

L'aire du toit est de 34 m^2 et le site internet conseille de prévoir 20 tuiles au mètre carré pour prendre en compte les découpes et les chevauchements.

Si l'on suit les préconisations de ce site, il faudra prévoir 20 fois 34 tuiles soit **680 tuiles.**

- À partir des informations du magazine professionnel

Il s'agit ici dans un premier temps de couvrir la surface du toit en juxtaposant simplement des tuiles.
Pour couvrir le plan GLMF du toit :

- le long du côté FG, il faudra 22 colonnes de tuiles car $21 \times 23{,}5 \text{ cm} < 5 \text{ m} < 22 \times 23{,}5 \text{ cm}$;
- le long du côté LG, il faudra 11 rangées de tuiles car $10 \times 32 \text{ cm} < 3{,}4 \text{ m} < 11 \times 32 \text{ cm}$.

Il faudra donc $11 \times 22 = 242$ tuiles pour couvrir le pan GLMF, et le double, soit 484 tuiles pour couvrir l'ensemble du toit en les juxtaposant simplement.

Pour prendre en compte les découpes et les chevauchements, ce magazine préconise de prévoir un tiers de tuiles de plus, soit en tout $\dfrac{4}{3}$ des 484 tuiles. Il faudra alors prévoir $\dfrac{4}{3} \times 484 \approx 645{,}3$ soit **646 tuiles**.

C'est donc l'estimation du site internet qui conduit au nombre de tuiles le plus élevé.

2nde interprétation du conseil du magazine : utilisation du rapport entre l'aire d'un toit et l'aire d'une tuile

Méthode 1 : calcul du nombre total de tuiles nécessaires pour couvrir le toit

- À partir des informations du site internet

L'aire du toit est de 34 m^2 et le site internet conseille de prévoir 20 tuiles au mètre carré pour prendre en compte les découpes et les chevauchements.

Si l'on suit les préconisations de ce site, il faudra prévoir 20 fois 34 tuiles soit **680 tuiles.**

- À partir des informations du magazine professionnel

Pour déterminer le nombre de tuiles nécessaires pour couvrir le toit, on cherche le rapport entre l'aire du toit et l'aire d'une tuile.

- aire du toit : $34 \text{ m}^2 = 340\,000 \text{ cm}^2$.
- aire d'une tuile : $23{,}5 \text{ cm} \times 32 \text{ cm} = 752 \text{ cm}^2$.
- nombre de tuiles nécessaires pour couvrir la surface du toit : $340000 \div 752 \approx 452{,}1$, soit 453 tuiles.

D'où l'estimation du nombre tuiles nécessaires pour couvrir le toit : $\dfrac{4}{3} \times 453$ tuiles $=$ **604 tuiles**.

C'est donc l'estimation du site internet qui conduit au nombre de tuiles le plus élevé.

Méthode 2 : comparaison du nombre de tuiles nécessaires pour couvrir un mètre-carré
L'aire d'une tuile est : $23{,}5\text{ cm} \times 32\text{ cm} = 752\text{ cm}^2$.
Donc pour couvrir un m², c'est-à-dire 10 000 cm², il faudra : $10\,000\text{ cm}^2 : 752\text{ cm}^2 \approx 13{,}3$ tuiles.
On y ajoute un tiers pour les découpes et les chevauchements : $\frac{4}{3} \times 13{,}3$ tuiles $\approx 17{,}7$ tuiles.
Selon le magazine, il faut donc moins de 18 tuiles au m².
C'est donc l'estimation du site internet qui conduit au nombre de tuiles le plus élevé.

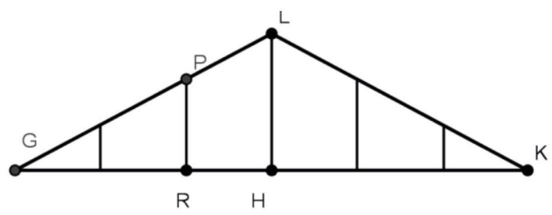
4) Coût de la couverture

Possibilité 1
L'aire du toit est de 34 m^2 et l'entreprise facture 60 € par m².
Le coût total serait alors de : $34\text{ m}^2 \times 60\text{ €/m}^2 = 1920\text{ €}$.

Possibilité 2
Le coût de l'achat de 700 tuiles est de : $700\text{ tuiles} \times 1{,}35\text{ €/tuile} = 945\text{ €}$.
En y intégrant la pose, le coût total serait de $945\text{ €} + 900\text{ €} = 1845\text{ €}$.

La seconde possibilité coûte le moins cher au propriétaire.

C - Les frontons



1) Longueur PR

Toutes les poutres étant verticales, elles sont parallèles entre elles.
Ainsi, dans la situation proposée :

- les points G, R et H sont alignés,
- les points G, P et L sont alignés,
- les droites (RP) et (HL) sont parallèles entre elles.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès, en s'appuyant par exemple sur les triangles semblables GRP et GHL, ce qui permet d'affirmer que :

$$\frac{GP}{GL} = \frac{GR}{GH} = \frac{PR}{LH}$$

L'égalité $\frac{PR}{LH} = \frac{GR}{GH}$ donne $\frac{PR}{LH} = \frac{2}{3}$, d'où $PR = \frac{2}{3} \times LH = \frac{2}{3} \times 1{,}6\text{ m}$ soit $PR \approx 1{,}0666\text{ m}$.
La valeur de PR, exprimée en mètre et arrondie au centimètre est donc de 1,07 m.

2) Longueur de bois pour décorer le fronton

Remarque
Attention, il s'agit ici de savoir si le propriétaire aura besoin d'une longueur de bois <u>exactement</u> égale à trois fois la longueur LH. Il faut donc éviter, et même s'interdire, le recours à des valeurs approchées.

Le colombage est constitué de cinq poutres et il est symétrique par rapport à la poutre centrale de longueur LH. Si l'on nomme P' et R' les milieux respectifs de [GP] et de [GR], deux autres poutres sont de longueur P'R' et les deux dernières sont de longueur PR.

Le raisonnement mené lors de la question précédente a conduit à la relation : $PR = \frac{2}{3} \times LH$.

Un raisonnement analogue, utilisation du théorème de Thalès avec les triangles semblables GP'R' et GHL, conduit à la relation $\mathrm{P'R'} = \frac{1}{3} \times \mathrm{LH}$.

Remarque
On peut aussi utiliser le théorème des milieux dans le triangle GRP qui permet d'obtenir :
$P'R' = \frac{1}{2} \times PR = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times LH = \frac{1}{3} \times LH.$

Méthode 1 : calcul explicite de la longueur totale
La longueur totale des cinq poutres est alors :

$$\mathrm{LH} + 2 \times \mathrm{PR} + 2 \times \mathrm{P'R'} = \mathrm{LH} + 2 \times \frac{2}{3} \times \mathrm{LH} + 2 \times \frac{1}{3} \times \mathrm{LH} = \frac{9}{3} \times \mathrm{LH} = 3\,\mathrm{LH}.$$

Pour décorer un fronton, le propriétaire aura bien besoin d'une longueur de bois exactement égale à trois fois la longueur LH.

Donc le vendeur a raison, son affirmation est vraie.

Méthode 2 : calcul par regroupement « réfléchi » des longueurs
On remarque que, pour fabriquer les poutres [P'R'] et [PR], il faut une longueur LH.
En effet : $\frac{1}{3} \times \mathrm{LH} + \frac{2}{3} \times \mathrm{LH} = \frac{3}{3} \times \mathrm{LH} = \mathrm{LH}$.
Il en est de même pour les deux poutres qui leur sont symétriques par rapport à (LH).
Et donc, pour décorer un fronton avec cinq poutres, le propriétaire aura bien besoin d'une longueur de bois exactement égale à trois fois la longueur LH.

Donc le vendeur a raison, son affirmation est vraie.

D - Maquette

1) Échelle de la maquette

Rappel
L'échelle d'une représentation (plan, maquette, ...) est le rapport entre les mesures des longueurs sur la représentation et les mesures des longueurs correspondantes de l'objet réel, exprimées dans la même unité.
Quand il s'agit, comme ici, d'une réduction, on l'exprime sous la forme d'une fraction, si possible de la forme $\frac{1}{k}$*, notée usuellement 1/k (ou 1 : k). Les longueurs sur la représentation s'obtiennent alors en multipliant les longueurs réelles par* $\frac{1}{k}$ *(donc en les divisant par k).*

Méthode 1 : en raisonnant sur les longueurs
Les dimensions en réalité du rectangle ABCD sont AD = 5 m = 500 cm et DC = 6 m = 600 cm.
Si on note *1/k* l'échelle de la maquette, alors les dimensions dans la maquette du rectangle ABCD sont :
$\frac{500}{\mathrm{k}}$ cm et $\frac{600}{\mathrm{k}}$ cm.
L'aire, dans la maquette, de la surface au sol s'obtient donc en effectuant le produit de $\frac{500}{\mathrm{k}}$ cm et de $\frac{600}{\mathrm{k}}$ cm.
Cette aire est égale à 480 cm2, donc le nombre k est solution de l'équation : $\frac{500}{\mathrm{k}} \times \frac{600}{\mathrm{k}} = 480$.
On obtient : $\frac{300000}{\mathrm{k}^2} = 480$, d'où $480\,\mathrm{k}^2 = 300000$, d'où $\mathrm{k}^2 = \frac{300000}{480} = 625$ et $\mathrm{k} = \sqrt{625} = 25$.

La maquette est donc à l'échelle 1/25. (*On dit aussi « au 25ème ».*)

Méthode 2 : en raisonnant directement sur les aires
On sait que, entre le réel et sa représentation, lorsque le rapport entre les longueurs est k, alors le rapport entre les aires est k^2 et le rapport entre les volumes est k^3.

Dans la situation donnée, l'aire de la surface au sol est :
- en réalité de $30\ \mathrm{m}^2 = 300000\ \mathrm{cm}^2$
- sur la maquette de $480\ \mathrm{cm}^2$.

Le rapport entre ces deux aires est donc $\mathrm{k}^2 = \frac{300000}{480} = 625$.

Le rapport entre les longueurs est donc $\mathrm{k} = \sqrt{625} = 25$.

La maquette est donc à l'échelle 1/25.

Méthode 3 : en raisonnant sur les aires avec une homothétie

Passer du réel à sa représentation correspond à l'utilisation d'une homothétie.

Dans le cas d'une réduction à l'échelle 1/k, cette homothétie est de rapport $\frac{1}{\mathrm{k}}$.

On sait que dans ce cas, toutes les longueurs sont multipliées par $\frac{1}{\mathrm{k}}$, donc les aires sont multipliées par $\left(\frac{1}{\mathrm{k}}\right)^2$ et les volumes sont multipliés par $\left(\frac{1}{\mathrm{k}}\right)^3$.

Dans la situation donnée, l'aire de la surface au sol est :
- en réalité de $30\ \mathrm{m}^2 = 300000\ \mathrm{cm}^2$;
- sur la maquette de $480\ \mathrm{cm}^2$.

On a donc : $300\,000 \times \left(\frac{1}{\mathrm{k}}\right)^2 = 480$ d'où $\left(\frac{1}{\mathrm{k}}\right)^2 = \frac{480}{300000} = \frac{1}{625}$.

On en déduit $\frac{1}{\mathrm{k}} = \frac{1}{\sqrt{625}} = \frac{1}{25}$.

La maquette est donc à l'échelle 1/25.

2) Volume, en cm³, de la maquette

Remarque

Le calcul du volume de la maquette est en lien avec le calcul du volume réel du bâtiment.
On pourrait envisager de reprendre pas à pas la méthode utilisée pour la question A2 après avoir déterminé (grâce à l'échelle) toutes les longueurs utiles de la maquette. Cependant, le fait que le volume du bâtiment soit donné dans l'énoncé (question A2) doit inciter à utiliser ce résultat. L'utilisation directe du rapport entre les volumes (voir propriétés rappelées dans la question précédente, méthodes 2 et 3) est alors très efficace.

Puisque l'échelle de la maquette est de 1/25, les longueurs sur la maquette s'obtiennent en multipliant les longueurs réelles par $\frac{1}{25}$ donc le volume de la maquette s'obtient en multipliant le volume réel de l'abri de jardin par $(\frac{1}{25})^3$, c'est-à-dire en le divisant par $25^3 = 15625$.

Le volume réel de l'abri de jardin est de $102\ \mathrm{m}^3 = 102\,000\,000\ \mathrm{cm}^3$

Le volume de la maquette est donc de $102\,000\,000\ \mathrm{cm}^3 \div 15625 = 6528\ \mathrm{cm}^3$.

Le volume de la maquette est de 6528 cm³.

DEUXIÈME PARTIE

EXERCICE 1 : QCM

Remarque

Dans cet exercice, seules les réponses était attendues. Ici, nous les avons toutes justifiées.
Dans la mesure où plusieurs réponses sont à chaque fois proposées, une seule étant correcte, plusieurs stratégies peuvent être, a priori, envisageables.
On peut, selon le cas :

- *résoudre le problème tel qu'il est posé (puis contrôler que la solution obtenue est proposée) ;*
- *éliminer les solutions proposées incompatibles avec les données et tester les plus probables ;*
- *tester chacune des solutions proposées jusqu'à en trouver une qui « fonctionne ».*

1) Une question de moyenne

La réponse correcte est E.
Si le prix moyen des cinq perroquets était initialement de 5000 €, c'est que le prix total de ces cinq perroquets était de 5×5000 € $= 25\,000$ €.
Puisque le prix moyen des quatre perroquets restants est de 4000 €, c'est qu'à eux quatre, ils coûtent 4×4000 € $= 16\,000$ €.
La valeur du plus cher de ces perroquets est donc la différence entre 25 000 € et 16 000 €, soit 9000 €.

Donc le perroquet qui s'est envolé coûtait 9000 €.

Remarque

Prendre ici le problème « à l'envers » en testant chacune des réponses proposées peut permettre d'éliminer les solutions extrêmes 2000 € (inférieur à la moyenne) et 100 000 € (beaucoup trop grand pour une seule valeur sur 5) mais, pour faire un choix <u>certain</u> parmi les valeurs restantes, il paraît indispensable de faire le lien entre valeur moyenne et valeur totale. Ce qui revient au raisonnement précédent...

2) Décomposition d'un pavé de 42 cubes

La réponse correcte est C.
Comme chaque cube a pour arête 1cm, les mesures en cm des trois dimensions du pavé sont des nombres entiers. Notons L, l, et h ces trois nombres, mesures respectives des longueur et largeur de la face posée au sol et de la hauteur du pavé.
Il s'agit alors de déterminer ces trois nombres entiers sachant qu'ils vérifient deux contraintes :

- le produit $L \times l \times h$ doit être égal à 42, car le volume du pavé est de 42 cm^3. Cette contrainte a aussi pour conséquence que L, l et h doivent être des diviseurs de 42.
- La somme $L + l$ doit être égale à 9, car le demi-périmètre de la face posée au sol doit être de 9 cm, moitié de 18 cm.

Une stratégie, pour résoudre cet exercice, consiste à chercher toutes les possibilités satisfaisant l'une des contraintes, puis de regarder, pour chacune d'elles, si elle vérifie aussi la seconde contrainte (*méthodes 1 et 2*). Une autre stratégie consiste ici (QCM) à considérer chacune des valeurs de h proposées et regarder si on peut alors trouver l et L satisfaisant aux deux contraintes précédentes (*méthode 3*).

Méthode 1 : recherche des décompositions multiplicatives de 42 en produit de trois facteurs entiers

La décomposition de 42 en produit de facteurs premiers est : $42 = 2 \times 3 \times 7$.
42 possède 8 diviseurs qui sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 et 42.
Les décompositions de 42 en produit de trois facteurs sont alors les suivantes :

- $42 = 1 \times 1 \times 42$
- $42 = 1 \times 2 \times 21$
- $42 = 1 \times 3 \times 14$
- $42 = 1 \times 6 \times 7$
- $42 = 2 \times 3 \times 7$

Il s'agit ici dans un second temps de chercher parmi ces cinq décompositions, celle(s) dont deux des facteurs ont pour somme 9.
C'est le cas uniquement pour la dernière de ces cinq décompositions : 7 et 2 ont pour somme 9.

Ces deux nombres correspondent donc aux mesures en centimètres des longueur et largeur de la face posée au sol.
Le troisième facteur, qui est un 3, correspond à la mesure de la hauteur. Celle-ci est donc égale à 3 cm.

La hauteur du pavé est de 3 cm.

Méthode 2 : recherche des décompositions additives de 9

Les seules décompositions possibles de 9 comme somme de deux entiers non nuls sont les suivantes :

$9 = 1 + 8$ $\quad 9 = 2 + 7$ $\quad 9 = 3 + 6$ $\quad 9 = 4 + 5$

Dans un second temps, il faut retenir parmi ces quatre décompositions additives uniquement celle(s) dont les deux termes sont des diviseurs de 42.
C'est uniquement le cas de la décomposition $9 = 2 + 7$ car 8, 6, 4 et 5 ne sont pas des diviseurs de 42.
On en conclut donc que 7 et 2 sont les valeurs de L et l.
La mesure h de la hauteur, exprimée en centimètre, vérifie donc $7 \times 2 \times h = 42$.
Ce qui donne $h = 3$.

La hauteur du pavé est de 3 cm.

Méthode 3 : recherche à partir des valeurs de h proposées

Si $h = 1$ alors on cherche deux entiers L et l tels que $\mathrm{L} \times \mathrm{l} = 42$ et $\mathrm{L} + \mathrm{l} = 9$.
Les seules décompositions de 42 en produit de deux facteurs sont :
$42 = 1 \times 42 = 2 \times 21 = 3 \times 14 = 6 \times 7$.
Aucune ne fournit un couple de somme 9. Il n'existe donc pas de solution.

Si $\mathrm{h} = 2$ alors on doit avoir $\mathrm{L} \times \mathrm{l} = 21$ et $\mathrm{L} + \mathrm{l} = 9$.
Les seules décompositions de 21 en produit de deux facteurs sont : $21 = 1 \times 21 = 3 \times 7$.
Là encore, aucune solution satisfaisante.

Si $\mathrm{h} = 3$ alors on doit avoir $\mathrm{L} \times \mathrm{l} = 14$ et $\mathrm{L} + \mathrm{l} = 9$.
On a $14 = 1 \times 14 = 2 \times 7$ or $2 + 7 = 9$ donc $\mathrm{L} = 7$ et $\mathrm{l} = 2$ est la solution cherchée.

Il est inutile de tester les autres valeurs de h, d'une part car il est admis que le problème n'admet qu'une solution et, d'autre part, car 4 et 5 ne sont pas diviseurs de 42.

La hauteur du pavé est donc de 3 cm.

3) Vitesse moyenne

La réponse correcte est B.

Méthode 1 : méthode algébrique avec résolution d'une équation

Comme les vitesses sont exprimées en mètres par seconde, on privilégiera ici comme unités, d'une part les secondes pour les durées, d'autre part les mètres pour les distances.

Notons *d* la valeur cherchée, exprimée en mètres, de la largeur de la forêt.
À l'aller, la durée exprimée en secondes de la traversée est de : $\mathrm{t_A} = \frac{\mathrm{d_A}}{\mathrm{v_A}} = \frac{\mathrm{d}}{5}$.
Au retour, la durée exprimée en secondes de la traversée est de : $\mathrm{t_R} = \frac{\mathrm{d_R}}{\mathrm{v_R}} = \frac{\mathrm{d}}{4}$.
La durée totale de ces deux traversées effectuées par Raphaël étant de 15 minutes, soit 900 secondes, *d* est solution de l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}}{5} + \frac{\mathrm{d}}{4} = 900.$$

Cette équation se transforme successivement en :

$\frac{4\mathrm{d}}{20} + \frac{5\mathrm{d}}{20} = 900$ $\quad$ d'où $\frac{9\mathrm{d}}{20} = 900$ $\quad$ d'où $\frac{d}{20} = 100$ $\quad$ d'où $\mathrm{d} = 2000$ m.

La largeur de la forêt traversée est de 2000 m, soit 2 km.

Méthode 2 : en testant successivement par le calcul chacune des valeurs proposées

- Testons la proposition A.

Si la largeur de la forêt est de 1,8 km, c'est-à-dire de 1800 m, la durée de la traversée aller de Raphaël sera de $\frac{1800 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 360\ s$ et la durée de sa traversée retour sera de $\frac{1800 \text{ m}}{4 \text{ m/s}} = 450\ s$

La durée totale des deux traversées sera alors de 810 s., un temps inférieur à 15 minutes (c'est-à-dire à 900 secondes). On peut en conclure que la largeur de la forêt est à coup sûr supérieure à 1,8 km.

- Testons la proposition B.

Si la largeur de la forêt est de 2 km, c'est-à-dire de 2000 m, la durée de la traversée aller de Raphaël sera de $\frac{2000 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 400\ s$ et la durée de sa traversée retour sera de $\frac{2000 \text{ m}}{4 \text{ m/s}} = 500\ s$.

La durée totale des deux traversées sera alors de 900 s, soit exactement la durée annoncée de 15 minutes.

La largeur de la forêt traversée est donc de 2 km.

Il n'y a évidemment plus besoin de tester les propositions C, D et E d'une part parce que dans ces trois propositions, la distance étant supérieure à 2 km, le temps de traversée aller-retour sera à chaque fois supérieur à 15 minutes et, d'autre part, parce que ce problème admet une unique solution.

EXERCICE 2

1) Nombre de pots de confiture

Pour faire sa confiture, Grand-père doit ajouter une quantité de sucre égale à 4/5 des 5 kg de mirabelles dénoyautées, c'est-à-dire ajouter 4 kg de sucre aux 5 kg de fruits. Il obtient donc 9 kg de mélange.
La cuisson fait perdre 25 % de la masse de ce mélange fruit-sucre.

Enlever 25 % à une quantité revient à la multiplier par $(1 - \frac{25}{100}) = 0,75$.
La quantité de confiture obtenue après cuisson est donc de : $0,75 \times 9$ kg = 6,750 kg.
Pour remplir entièrement chacun des pots utilisés, il faut un demi-kilo de confiture donc avec un kilo de confiture, on remplit 2 pots. Grand-père pourra donc remplir 13 pots de confiture.

Remarque

On peut aussi diviser les 6750 g de confiture par 500 g, la contenance d'un pot. Le nombre de pots entièrement remplis est alors la partie entière du quotient, c'est-à-dire la partie entière de 13,5.

2) Proportionnalité entre la masse de confiture et la masse des fruits dénoyautés

On pouvait présenter le raisonnement de plusieurs façons.

Méthode 1 : en raisonnant sur les différentes grandeurs et leurs rapports

La masse du sucre ajouté est proportionnelle à la masse des mirabelles dénoyautées puisque leur rapport est constant toujours égal à $\frac{4}{5}$.

De même la masse du mélange fruit-sucre obtenu est proportionnelle à la masse des mirabelles dénoyautées puisque leur rapport est constant égal à $1 + \frac{4}{5}$, c'est-à-dire à $\frac{9}{5}$ ou 1,8.

Pour finir, la masse de mélange perdue lors de la cuisson et la masse de confiture obtenue après cuisson sont aussi proportionnelles à la masse des mirabelles dénoyautées : le rapport entre ces deux dernières est toujours égal à $0,75 \times 1,8 = 1,35$.

La masse de confiture obtenue est bien proportionnelle à la masse de mirabelles dénoyautées.

Méthode 2 : en exprimant chacune des grandeurs sous forme algébrique et en utilisant une fonction linéaire

Notons x la masse initiale de mirabelles dénoyautées et $f(x)$ la masse de confiture obtenue après cuisson.

La masse du sucre ajouté est donc égale à $\frac{4}{5}x$.

La masse de mélange fruit-sucre obtenu est alors égale à $\frac{4}{5}x + x = \frac{9}{5}x = 1,8\,x$.

La masse de confiture obtenue après cuisson est donc égale à $0,75 \times 1,8\,x = 1,35\,x$.

La fonction qui exprime la masse de confiture obtenue après cuisson en fonction de la masse de mirabelles dénoyautées est donc : $f(x) = 1{,}35\,x$.
Cette fonction est de la forme $f(x) = a\,x$. Il s'agit donc d'une fonction linéaire et la situation modélisée par cette fonction est bien une situation de proportionnalité.

La masse de confiture obtenue est bien proportionnelle à la masse de mirabelles dénoyautées.

3) Masse minimum de fruits dénoyautés pour obtenir 18 pots

Pour remplir 18 pots, il faut disposer de 18 fois 500 g de confiture, soit 9 kg de confiture.

Méthode 1

Le premier raisonnement mené à la question précédente sur les rapports entre grandeurs permet d'écrire l'égalité :

$$\frac{masse\ de\ confiture}{masse\ de\ fruits\ dénoyautés} = 1{,}35.$$

D'où $\frac{9\text{ kg}}{\text{m}} = 1{,}35$ puis $1{,}35 \times \text{m} = 9\text{ kg}$ et donc $\text{m} = \frac{9\text{ kg}}{1{,}35} \approx 6{,}667\text{ kg}$.

La masse m minimum, arrondie à l'hectogramme près, de mirabelles dénoyautées nécessaires pour remplir 18 pots de confiture est donc 6,7 kg.

Méthode 2

La fonction obtenue à la question précédente est l'expression de la masse de confiture en fonction de la masse de fruits dénoyautés : $f(x) = 1{,}35\,x$.
La masse m nécessaire de mirabelles dénoyautées pour obtenir 9 kg de confiture vérifie donc l'égalité suivante :

$f(\text{m}) = 9\text{ kg}$ d'où $1{,}35 \times \text{m} = 9\text{ kg}$ et donc $\text{m} = \frac{9\text{ kg}}{1{,}35} \approx 6{,}667\text{ kg}$.

La masse m minimum, arrondie à l'hectogramme près, de mirabelles dénoyautées nécessaires pour remplir 18 pots de confiture est donc 6,7 kg.

EXERCICE 3

1) La liste « *résultats* » lorsque *n* = 4

Si l'on suit pas à pas l'exécution du programme, on obtient :

- Initialisation du programme

La liste « *résultats* » est vidée.
Si l'utilisateur choisit le nombre 4, on aura *n* = 4 et, pour commencer, *i* = 1
Le programme de la boucle qui suit doit être réalisé 4 fois.

- Boucle 1 :

Puisque « 4 modulo 1 » renvoie 0, alors 1 est mis dans la liste « *résultats* ».
Puis la variable *i* augmente de 1 donc *i* prend la valeur 2.

- Boucle 2 :

« 4 modulo 2 » renvoie 0, donc 2 est ajouté à la liste « *résultats* » puis *i* prend la valeur 3.

- Boucle 3 :

« 4 modulo 3 » renvoie 1, donc 3 n'est pas ajouté à la liste « *résultats* » et *i* prend la valeur 4.

- Boucle 4:

« 4 modulo 4 » renvoie 0, donc 4 est ajouté à la liste « *résultats* » puis *i* prend la valeur 5.

- Fin du programme

La liste « *résultats* » s'affiche : (1 ; 2 ; 4).

Si l'utilisateur choisit le nombre 4, la liste « *résultats* » sera (1 ; 2 ; 4).

Remarque

Pour bien comprendre l'évolution de l'état des variables et de la liste, on peut détailler davantage l'exécution du programme (voir tableau suivant), en numérotant de 1 à 9 chacune des lignes de ce script (la ligne 7.3, par exemple, correspondant dans la boucle à la 3ème exécution de la ligne 7).

		Valeur de n	*Valeur de i*	*Réponse à l'instruction conditionnelle « si n modulo i =0 »*	*Contenu de la liste résultats*
Avant la boucle	*ligne 2*	-	-	-	*vidée*
	ligne 3	-	-	-	∅
	ligne 4	4	-	-	∅
	ligne 5	4	1	-	∅
1ère exécution de la boucle	*ligne 7.1*	4	1	*OUI*	∅
	ligne 8.1	4	1	-	*(1)*
	ligne 9.1	4	2	-	*(1)*
2ème exécution de la boucle	*ligne 7.2*	4	2	*OUI*	*(1)*
	ligne 8.2	4	2	-	*(1 ;2)*
	ligne 9.2	4	3	-	*(1 ;2)*
3ème exécution de la boucle	*ligne 7.3*	4	3	*NON*	*(1 ;2)*
	ligne 8.3	4	3	-	*(1 ;2)*
	ligne 9.3	4	4	-	*(1 ;2)*
4ème exécution de la boucle	*ligne 7.4*	4	4	*OUI*	*(1 ;2)*
	ligne 8.4	4	4	-	*(1 ;2 ;4)*
	ligne 9.4	4	4	-	*(1 ;2 ;4)*

2) a) Contenu de la liste une fois le programme exécuté

Ce script définit une liste nommée « *résultats* » qui est vidée de son contenu en début d'exécution du programme (ligne 2).
Ce script définit en lignes 4 et 5 deux variables :

- la variable n est le nombre choisi par l'utilisateur. Cette variable reste constante tout au long de l'exécution du script ;
- la variable i prend pour valeur initiale 1 et est ensuite incrémentée de 1 à chacune des n itérations de la boucle. La variable i prend donc successivement toutes les valeurs entières de 1 à n.

Ce script comporte une boucle répétée n fois.
La condition « si n modulo $i = 0$ » de la ligne 7 peut se reformuler en « si i divise n ».
Ainsi en ligne 8, un nombre i vient s'ajouter à la liste « résultats » uniquement s'il est un diviseur de n.

Comme i prend successivement toutes les valeurs de 1 à n, à la fin de l'exécution du programme la liste « *résultats* » est constituée de tous les diviseurs du nombre n choisi, diviseurs qui sont listés dans l'ordre croissant.

Ainsi, la liste « *résultats* » est constituée de tous les diviseurs de *n* présentés dans l'ordre croissant.

Remarque

Le nombre entier n choisi ne doit pas être nul pour que l'instruction « répéter n fois » puisse être exécutée. Sinon, si l'on choisit le nombre 0, la liste « résultats » restera vide.

2) b) Nombre choisi si la liste « *résultats* » ne contient qu'un seul nombre

La question posée revient à déterminer les nombres entiers ne possédant qu'un seul diviseur.
On sait que tout nombre entier naturel non nul autre que 1 admet au moins deux diviseurs, 1 et lui-même.
1 est le seul nombre entier naturel non nul à ne posséder qu'un seul diviseur, lui-même.

Ainsi, si la liste « *résultats* » ne contient qu'un seul nombre une fois le programme exécuté, c'est que le nombre choisi était 1.

2) c) Nombres choisis si la liste « *résultats* » contient exactement deux nombres

La question posée revient à déterminer les nombres entiers possédant exactement deux diviseurs.

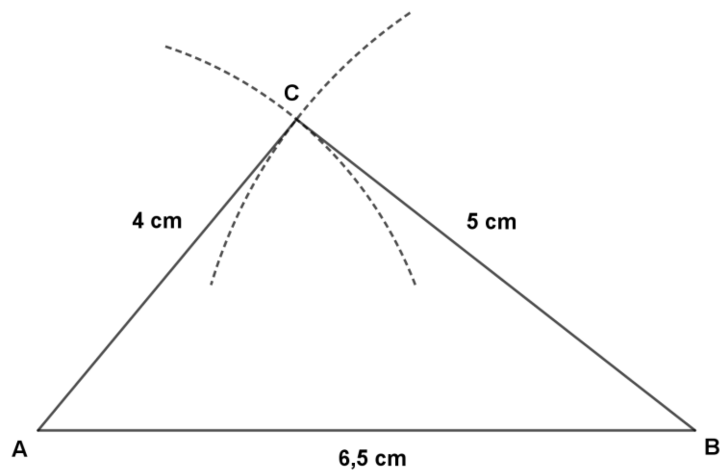
On sait que tout entier naturel non nul autre que 1 possède au moins deux diviseurs (1 et lui-même) et que les nombres qui ont exactement deux diviseurs sont, par définition, les nombres premiers.

Donc si la liste « *résultat* » contient exactement deux nombres, c'est que le nombre choisi est un nombre premier.

EXERCICE 4

1) Construction d'un triangle

Le segment de longueur 6,5 cm déjà tracé détermine deux des sommets du triangle, notons les A et B.
Le troisième sommet C appartient à l'intersection du cercle de centre A et de rayon 4 cm et du cercle de centre B et de rayon 5 cm.



2) Condition pour que le triangle soit constructible

Cette question mobilise une propriété que vérifient tous les triangles : l'inégalité triangulaire.
Rappel : les longueurs des côtés d'un triangle ABC doivent vérifier l'inégalité $AB \leq AC + CB$.

L'inégalité triangulaire permet de formuler des conditions de constructibilité d'un triangle dont on connait les longueurs des côtés.
Ainsi, on a la propriété suivante : « Un triangle est constructible si et seulement si la longueur de chaque côté est inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés. ».
Ou encore : « Un triangle est constructible si et seulement si la longueur du côté le plus long est inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés. ».

Comme les deux longueurs obtenues avec les dés, notons les a et b, sont toutes deux inférieures à 6 cm, le segment AB déjà tracé sera assurément le plus long des trois côtés du triangle (s'il est constructible).

Ainsi, le triangle sera constructible si et seulement si les deux longueurs a et b obtenues avec les dés vérifient l'inégalité $6{,}5 \leq a + b$, condition qui s'écrit aussi $a + b \geq 6{,}5$.

Remarque

Cette condition revient à dire que les deux cercles, de centre A et de rayon a, et de centre B et de rayon b, se coupent.

3) Probabilité d'obtenir un triangle constructible

L'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés équilibrés de couleurs différentes (par exemple un rouge et un vert) numérotés de 1 à 6 conduit à 36 (6×6) issues élémentaires équiprobables possibles que l'on peut présenter dans un tableau à double entrée.
Dans cette expérience aléatoire, on s'intéresse à la somme des deux résultats obtenus, sommes que l'on peut aussi indiquer dans le tableau.

dé rouge / dé vert	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Les issues favorables correspondent aux cas où cette somme est supérieure ou égale à 6,5.
Elles sont représentées par les cases grisées du tableau : il y a donc 21 issues favorables parmi les 36 résultats possibles.

La probabilité d'obtenir un triangle constructible est donc $\frac{21}{36}$ (ou $\frac{7}{12}$).

4) Probabilité d'obtenir un triangle isocèle sachant qu'il est constructible

Dans cette question les seules issues envisagées sont celles où le triangle est constructible. Il n'y a donc plus que 21 issues élémentaires équiprobables possibles.
Parmi elles, les issues favorables sont celles où le triangle est isocèle, c'est-à-dire possède deux côtés de même longueur. Comme les longueurs obtenues avec les dés sont des nombres entiers de centimètres, elles ne peuvent être égales à la longueur 6,5 cm du segment tracé.

Ainsi le triangle est isocèle à la seule condition que les résultats des deux dés soient égaux.
Ces issues favorables correspondent aux cases (4 ; 4), (5 ; 5) ; (6 ; 6) situées sur la première diagonale du tableau à double entrée ci-dessous, cases cochées dans le tableau ci-dessous.

dé rouge / dé vert	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1						
2						
3						
4				X		
5					X	
6						X

Il y a donc 21 issues possibles équiprobables pour que le triangle soit constructible, et, parmi elles, seules 3 issues sont favorables.

La probabilité pour que le triangle soit isocèle sachant qu'il est constructible est donc $\frac{3}{21}$ (ou $\frac{1}{7}$).

TROISIÈME PARTIE

SITUATION 1

1) Principale notion du programme du cycle 3 abordée par ce problème

Les morceaux de sucre étant tous identiques, les deux grandeurs « nombre de morceaux de sucre » et « masse de ces morceaux » sont deux grandeurs proportionnelles.

La principale notion du programme du cycle 3 abordée par ce problème est la proportionnalité.

2) a) Analyse des deux réponses erronées

La réponse C est erronée.
En effet, 60 morceaux de sucre pèsent 480 grammes et non 24 000 grammes.

L'élève semble appliquer un coefficient de proportionnalité au nombre de morceaux de sucre (60). Il semble avoir pris en compte la deuxième phrase de l'énoncé « 50 morceaux de sucre pèsent 400 grammes ». Il a bien interprété que le problème relevait du champ multiplicatif mais utilise à tort le nombre 400 comme coefficient à appliquer au nombre de morceaux (comme si chaque morceau pesait 400 grammes).

La réponse G est erronée.
En effet, 20 morceaux de sucre pèsent 160 grammes et non 230 grammes.

L'élève utilise à tort un modèle additif à partir de la masse de 30 morceaux : puisque le nombre de morceaux de sucres diminue de 10 (20 = 30 – 10), la masse diminue aussi de 10 (240 – 10). On peut penser que l'élève n'a pas encore accédé au modèle multiplicatif.
Une autre hypothèse est qu'il y ait confusion avec la propriété de linéarité pour l'addition : la masse de 20 morceaux de sucre est la masse de 30 morceaux moins la masse de 10 morceaux (qui n'était pas donnée).

Remarque

*Le modèle additif souvent utilisé à tort par les élèves consiste à penser « puisqu'il y a tant de plus de ceci, alors il y a tant de plus de cela ». Le modèle multiplicatif correct consiste à penser « puisqu'il y a tant de **fois** plus de ceci, alors il y a tant de **fois** plus de cela ».*

2) b) Analyse des autres réponses et classement des procédures

Utilisation de la propriété de linéarité pour l'addition

Réponse D

La masse de 20 morceaux de sucre (50 – 30) est la différence entre la masse de 50 morceaux (400 grammes) et celle de 30 morceaux (240 grammes).

Réponse H
La masse de 80 morceaux de sucre (50 + 30) est la somme de la masse de 30 morceaux (240 grammes) et de celle de 50 morceaux (400 grammes).

Utilisation de la propriété de linéarité pour la multiplication

Réponse A

La masse de 60 morceaux de sucre est le double de celle de 30 morceaux. Autrement dit, deux fois plus de morceaux (60 = 30 × 2) pèsent deux fois plus (480 grammes = 240 grammes × 2).

Réponse F
Cet élève utilise la réponse obtenue à la question 1.
La masse de 20 morceaux de sucre est le tiers de celle de 60 morceaux. Autrement dit, trois fois moins de morceaux (20 = 60 : 3) pèsent trois fois moins (160 grammes = 480 grammes : 3).

Utilisation des deux propriétés de linéarité précédentes (procédure mixte)

Réponse B
Tout d'abord, 3 fois moins de morceaux de sucre pèsent 3 fois moins, ainsi 10 morceaux (le tiers de 30) pèsent 80 grammes (le tiers de 240 grammes).

Ensuite, la masse de 60 morceaux de sucre $(50 + 10)$ pèse la somme de la masse de 50 morceaux et de la masse de 10 morceaux (400 grammes $+$ 80 grammes).

Utilisation de la règle de trois (retour à l'unité)

Réponse E
Si 30 morceaux de sucre pèsent 240 grammes, 1 morceau pèse 30 fois moins soit 8 grammes. 20 morceaux pèsent alors 20 fois plus soit 8 grammes × 20 = 160 grammes.

Remarque

Cet élève peut également avoir utilisé le coefficient de proportionnalité sans écrire les unités.
On a $240\ grammes : 30\ morceaux = 8\ grammes/morceau$ *: c'est le coefficient de proportionnalité (qui est une grandeur quotient). Pour calculer la masse de 20 morceaux de sucre, il applique ce coefficient de proportionnalité à ces 20 morceaux :* $20\ morceaux \times 8\ grammes/morceau = 160\ grammes.$

3) Modification des données pour inciter à recourir à la procédure de retour à l'unité

Avec les données de l'énoncé, la procédure de retour à l'unité passe par le calcul du cinquième de 8 €. C'est un nombre décimal (1,6 €) peu facile à utiliser dans des calculs. Il est ici beaucoup plus simple d'utiliser la propriété de linéarité pour la multiplication : trois fois plus de paquets coûtent trois fois plus cher, soit 15 paquets (5 paquets $\times$ 3) coûtent 24 € (8 € $\times$ 3).

Pour amener les élèves à recourir à la procédure de retour à l'unité, toujours en utilisant le prix de 5 paquets, il faut que ce prix soit un multiple de 5 et que le nombre de paquets dont on veut calculer le prix ne soit pas multiple de 5.

Par exemple, tout en gardant les mêmes nombres que dans l'énoncé original, on pourrait proposer :
« *Pour la fête de fin d'année de l'école de rugby, on vend des paquets de chocolat. Karim achète 5 paquets et paie 15€. Dellia veut acheter 8 paquets, combien va-t-elle payer ?* »

La procédure de retour à l'unité serait alors la suivante :
1 paquet de chocolat coûte 5 fois moins cher que 5 paquets, soit 3 € (15 € : 5).
8 paquets coûtent alors 8 fois plus qu'un paquet, soit 3 € $\times$ 8 $=$ 24 €.

SITUATION 2

1) Conjectures sur le raisonnement erroné qui a pu conduire à l'erreur faite

a. L'élève étend aux nombres décimaux la règle de multiplication par 10 apprise pour les entiers et qu'il a interprétée comme : « quand je multiplie un nombre par 10, j'ajoute un zéro ». Ainsi, dans ce cas des décimaux, cela le conduit à accoler un zéro à droite du nombre décimal 2,3.

b. L'élève considère chacune de ces écritures (une fractionnaire et une à virgule) comme la juxtaposition de deux entiers, séparés par un marqueur, dans un cas une barre de fraction dans l'autre une virgule, marqueurs qu'il considère comme équivalents. Ainsi, il « voit » le 1 et le 4, séparés par une barre de fraction, séparateur qu'il remplace par une virgule pour obtenir 1,4.

c. et d. Le nombre décimal est interprété ici encore comme la juxtaposition de deux entiers, séparés par une virgule.
Ainsi, dans le calcul d, pour ajouter 2,15 et 17,2, l'élève est ainsi amené à ajouter d'une part les parties « à gauche de la virgule » 2 et 17 puis, d'autre part, les parties « à droite de la virgule » 15 et 2.
De même, pour la réponse c, les deux parties entières étant égales, puisque 6 est inférieur à 13, l'élève considère que 45,6 est inférieur à 45,13. On peut également envisager que cette réponse correspond à l'emploi d'une règle de comparaison valable pour les nombres entiers : « le nombre le plus grand est celui qui a le plus de chiffres ». Puisque 45,13 a quatre chiffres, il est plus grand que 45,6 qui n'en a que trois.

2) Situations de remédiation pour l'élève qui a donné la réponse c

Écrire les nombres décimaux sous forme de fractions décimales

Les nombres décimaux sont introduits en lien avec les fractions décimales, y revenir en s'appuyant aussi sur leur oralisation (un « centième » n'est pas un « dixième »), peut aider l'élève à comprendre son erreur.

On peut écrire et lire les deux nombres :

- soit sous forme de fractions décimales de même dénominateur :

$$45{,}6 = \frac{456}{10} = \frac{4560}{100} \quad \text{et} \quad 45{,}13 = \frac{4513}{100}.$$

Puisque $4513 < 4560$, on a $\frac{4513}{100} < \frac{4560}{100}$, et donc $45{,}13 < 45{,}6$.

- soit sous forme de somme d'un entier et de fractions décimales inférieures à 1 :

$$45{,}6 = 45 + \frac{6}{10} \quad \text{et} \quad 45{,}13 = 45 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100}.$$

Puisque « 6 dixièmes » est supérieur à « 1 dixième », on peut dire que « 45 unités et 6 dixièmes » est supérieur à « 45 unités, 1 dixième et 3 centièmes ».

Placer des nombres sur une droite graduée

On peut aussi proposer à l'élève de compléter une droite graduée.
Celle-ci peut se présenter sous la forme d'une ligne graduée tous les centimètres, avec une quinzaine de graduations, sur laquelle 45 et 46, sont déjà placés, séparés de 10 cm (les graduations représentent donc les dixièmes). On demande alors à l'élève de placer 45,1 et 45,2 puis 45,5 et 45,6, puis de prévoir la position de 45,13 et d'en déduire la comparaison entre les deux nombres.
Pour renforcer la remédiation on pourra proposer d'autres nombres à placer et à comparer, par exemple : 45,55 et 45,8.

Remarque

On peut aussi utiliser des zooms successifs entre deux graduations permettant de comprendre le lien et l'enchâssement entre les différentes unités (unités, dixièmes, centièmes, ...). Voir le document d'accompagnement « Fractions et nombres décimaux au cycle 3 », page 13, sur le site éduscol.

SITUATION 3

1) Analyse des productions au regard des compétences *communiquer* et *raisonner*

Compétence *communiquer*

Au regard de cette compétence, on peut remarquer que les deux élèves commencent par répondre clairement à la question posée, ce qui laisse penser que les deux écrits sont postérieurs à la recherche et ont donc bien pour objectif de « communiquer ». Mais alors que Nina donne trois phrases-réponse élémentaires, Yohan regroupe les trois résultats en une seule phrase (et utilise l'expression familière « fait » pour « pèse »).

Les deux élèves justifient ensuite leur réponse en essayant d'expliciter leur raisonnement.

Yohan relate chronologiquement les différentes étapes de celui-ci dans une rédaction claire, parfaitement compréhensible et détaillée. Le caractère distancié et réflexif de cet écrit permet de le considérer comme une narration de recherche.

La production de Nina est plus proche de la trace écrite de sa recherche. Pour sa mise en forme, elle utilise tableaux, symboles mathématiques, et barre les hypothèses incorrectes. Cet écrit est adapté en tant que support à une présentation orale mais présenté seul, il nécessite une analyse détaillée si l'on veut retrouver le raisonnement utilisé.

Compétence *raisonner*

Les deux élèves montrent ici une très bonne capacité de raisonnement : prise en compte des trois données/contraintes, déductions correctes, utilisation d'une procédure par essai-ajustement. Leurs raisonnements sont très proches.

La comparaison des deux premières pesées leur permet de conclure que Francis pèse 5 kg de plus que Boudin (Yohan le dit explicitement, c'est moins évident mais vraisemblable pour Nina).

Yohan utilise alors ce résultat et la 3ème pesée pour faire une hypothèse sur les masses de Francis et Boudin (la solution est alors unique mais il ne la présente pas ainsi). Il en déduit l'hypothétique masse de Dédé dans les deux premières pesées : le résultat étant le même, il conclut que son hypothèse était valide.

On peut penser que Nina part d'une masse supposée pour Boudin, en déduit la masse de Dédé d'après la 1ère pesée, puis, sachant que Francis pèse 5 kg de plus, contrôle la masse de Dédé avec la 2ème pesée. La 3ème pesée lui permet alors de tester son hypothèse initiale sur la masse de Boudin. Son 1er essai ne convient pas (10 kg), elle l'ajuste et trouve cette fois la solution correcte.

2) Mobilisation de la compétence *modéliser*

Remarque

Les programmes de 2016, dans l'explicitation pour le cycle 3 de la compétence « modéliser », indiquent notamment :

- *utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne ;*
- *reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité.*

À ce niveau de scolarité, le problème se classe dans la catégorie des « problèmes pour chercher ». Le modèle mathématique théorique qui lui est associé est un système de trois équations du premier degré à trois inconnues (les trois masses). L'utilisation de ce modèle et la procédure de résolution générale correspondante sont évidemment hors de portée des élèves de cycle 3.
Cependant, les deux élèves ont su mathématiser le problème en reconnaissant une situation additive. Ils ont su traduire les dessins des pesées par des conditions nécessaires portant sur les trois nombres inconnus. Cette formalisation leur a permis de traiter efficacement les données et ils ont su réinterpréter les résultats dans le contexte du problème initial. Cette démarche montre la mobilisation effective de la compétence « modéliser ».

EXERCICES ÉLABORÉS
À PARTIR
DES CONCOURS BLANCS
ET EXAMENS
PROPOSÉS DANS LES ESPE

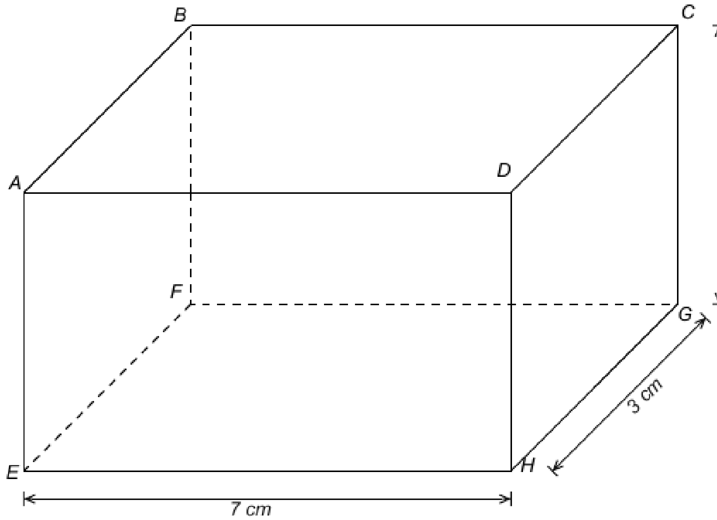
SUJETS

EXERCICES
d'après divers sujets d'examens

EXERCICE 1

Géométrie dans l'espace d'après un sujet de Besançon

On considère un pavé droit ABCDEFGH de dimensions 3 cm, 4 cm et 7 cm, comme indiqué sur la figure (qui n'est pas en vraie grandeur).



PARTIE A

1) Calculer AF en cm.
2) Calculer FD. On donnera le résultat exact, puis approché au mm près.
3) Calculer la contenance du pavé droit ABCDEFGH au cL près.

PARTIE B

On considère le point M de l'arête [AD] tel que $AM = 3$ cm. N est le point de l'arête [DH] tel que (MN) est parallèle à (AH).

1) Montrer que $DN = \frac{16}{7}$ cm.
2) Déterminer la nature du triangle DCN.
3) Soient P et Q les points suivants :
   - P est le point de l'arête [BC] tel que $BP = 3$ cm.
   - Q est le point de la face ADHE tel que MDNQ est un rectangle.

   On considère le solide MDNQPC dont les faces sont MDNQ, MDCP, QNCP, CDN et PMQ.

   a) Quel est le nom de ce solide ?
   b) Calculer la contenance au cL près de ce solide.

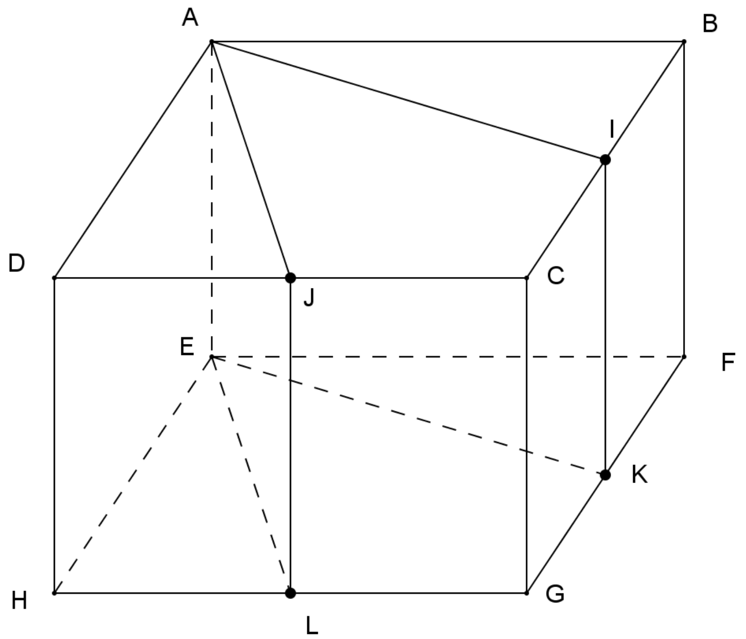
PARTIE C

1) Construire un patron du solide MDNQPC en vraie grandeur.
2) Donner le nombre d'arêtes et de faces du solide MDNQPC.

EXERCICE 2

Géométrie dans l'espace d'après un sujet de Toulouse

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle de dimensions AB = AD = 6 cm et AE = 4 cm.
I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes [BC], [CD], [FG] et [GH].
Un menuisier habitant Albi taille dans ce pavé droit un objet qui a la forme du solide AICJEKGL.



1) Le solide AICJEKGL

Les questions suivantes doivent être traitées sans effectuer aucun calcul et en utilisant la règle et le compas.

a) Donner, en justifiant, la nature de la face AJLE de ce solide.

b) Tracer en vraie grandeur le quadrilatère AJCI en laissant apparents les traits de construction.

(La règle graduée ne sera utilisée que pour tracer les segments de longueur donnée, pas leurs milieux.)

c) Tracer en vraie grandeur un patron du solide AICJEKGL.

2) La peinture du solide

Pour que le solide ne s'abime pas, le menuisier décide de le peindre.

a) Montrer que l'aire de AJCI est égale à 18 cm^2.

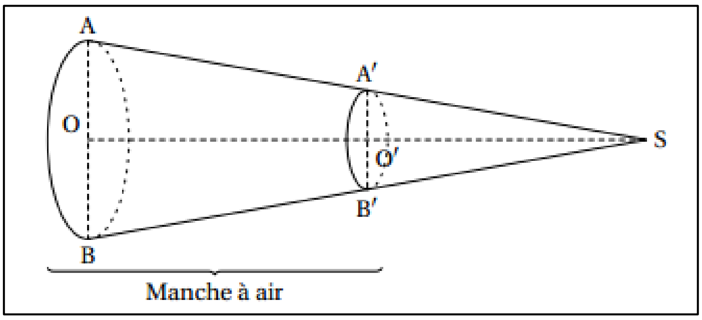
b) Calculer l'aire totale des faces du solide AICJEKGL (donner la valeur en cm^2, arrondie à l'unité près).

c) Le fabricant de peinture conseille au menuisier une peinture à haut pouvoir couvrant : 8 litres de peinture couvrent 100 m^2. Pour des raisons de stockage, le menuisier achète des pots de 5 litres. Combien de solides identiques au solide AICJEKGL le menuisier peut-il peindre avec un pot de peinture ?

EXERCICE 3

Géométrie dans l'espace (cône) d'après un sujet de Paris

Sur l'altiport (aérodrome d'altitude) d'une station de ski se trouve une manche à air qui permet de vérifier la direction et la puissance du vent. Cette manche à air a la forme d'un tronc de cône de révolution obtenu à partir d'un cône auquel on enlève la partie supérieure, après section par un plan parallèle à la base.



On donne AB = 60 cm, A'B' = 30 cm, BB' = 240 cm.
O est le centre du disque de la base du grand cône de sommet S.
O', milieu de [OS], est le centre de la section de ce cône par un plan parallèle à la base.
B' appartient à la génératrice [SB] et A' appartient à la génératrice [SA].

1) Démontrer que la longueur de [SB] est égale à 480 cm.
2) Calculer la longueur de [SO]. On arrondira le résultat au centimètre.
3) Calculer le volume d'air qui se trouve dans la manche à air. On arrondira au centimètre cube.

EXERCICE 4

Division euclidienne, probabilités et algorithmique d'après un sujet de Dijon

1) On considère un premier script dans lequel :
   - **a** est une variable ;
   - l'instruction 

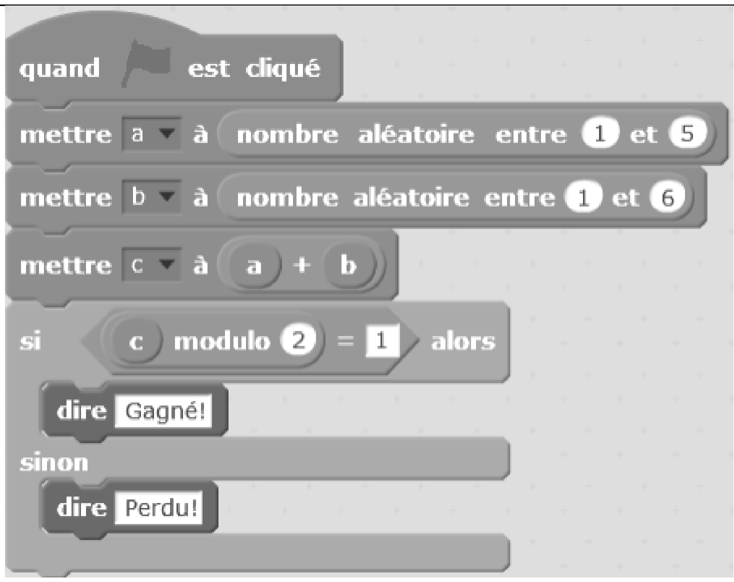
 affecte à la variable **a** un nombre entier choisi au hasard et de façon équiprobable entre 1 et 5 (tous deux inclus) ;
   - l'instruction 

 donne le reste dans la division euclidienne de **a** par 2.

Script n°1

Vérifier que la probabilité d'entendre « Gagné ! » à l'issue de l'exécution de ce script est égale à 0,6.

2) On considère un second script, dans lequel interviennent trois variables a, b et c.

Numéro de ligne	Script n°2
1 2 3 4 5 6 7 8	

a) Si lors de l'exécution du script, les valeurs engendrées pour a et b sont respectivement 4 et 2, que « dira » finalement le programme ?

b) Déterminer la probabilité d'entendre « Gagné ! » à l'issue de l'exécution de ce script.

3) On modifie le script précédent en remplaçant la ligne 4 par l'instruction :

(où a * b désigne le produit de a et de b).

a) Vérifier que la probabilité d'entendre « Gagné ! » à l'issue du script est maintenant de 0,3.

b) On exécute successivement deux fois ce script, déterminer la probabilité d'entendre une seule fois « Gagné ! ».

EXERCICE 5

Fractions et décimaux d'après un sujet de Marseille

Les questions ci-dessous sont indépendantes.

1) Pour chacun des nombres suivants, préciser s'il est décimal ou non décimal et justifier la réponse :

$$\frac{17}{8}\ ; \qquad 15,\overline{27}\ ; \qquad \frac{2794}{55}\ ; \qquad \frac{1096}{152}.$$

2) Soit n un entier naturel.

Comparer les fractions $\dfrac{n+2}{n+3}$ et $\dfrac{n+3}{n+4}$.

3) Au goûter, Solène mange un quart du paquet de gâteaux qu'elle vient d'ouvrir. De retour du collège, sa sœur Élisa mange les deux-tiers des gâteaux restant dans le paquet entamé par Solène. Il reste 5 gâteaux.

Quel était le nombre initial de gâteaux dans le paquet ?

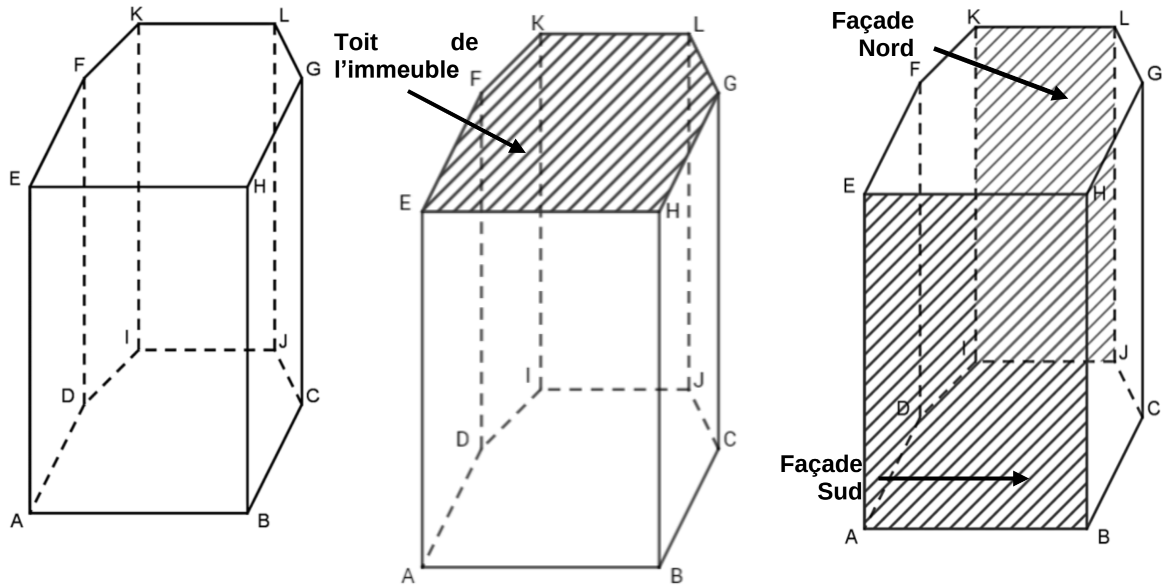
PROBLEME DE GÉOMÉTRIE, GRANDEURS ET MESURES d'après un sujet de Dijon

On désire construire un immeuble écologique dans le sud de la Saône et Loire. Plusieurs solutions sont étudiées.

PARTIE A : forme du toit EHGLKF

L'immeuble est un prisme droit à base hexagonale ABCJID tel que :

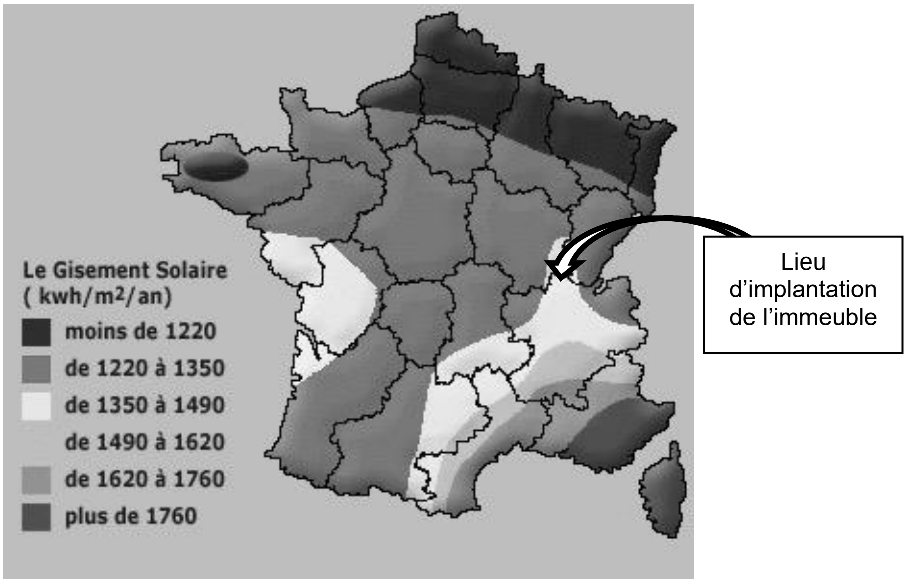
- ABCD est un rectangle, AB = 30 m, BC = 25 m ;
- DCJI est un trapèze isocèle de hauteur 10 m avec (DC) parallèle à (IJ) et DI = JC ;
- l'angle $\widehat{CDI}$ est égal à 53° ;
- la hauteur AE du prisme droit est égale à 54 m.



1) Vérifier que les trois affirmations suivantes sont vraies.
   Affirmation 1 : la longueur FK, arrondie au dm près, est égale à 12,5 m.
   Affirmation 2 : la valeur approchée par excès au dm près de KL est de 15 m.
   Affirmation 3 : l'aire du toit de l'immeuble est d'environ 975 m^2.
2) Représenter le toit EHGLKF de l'immeuble à l'échelle $\frac{1}{500}$.

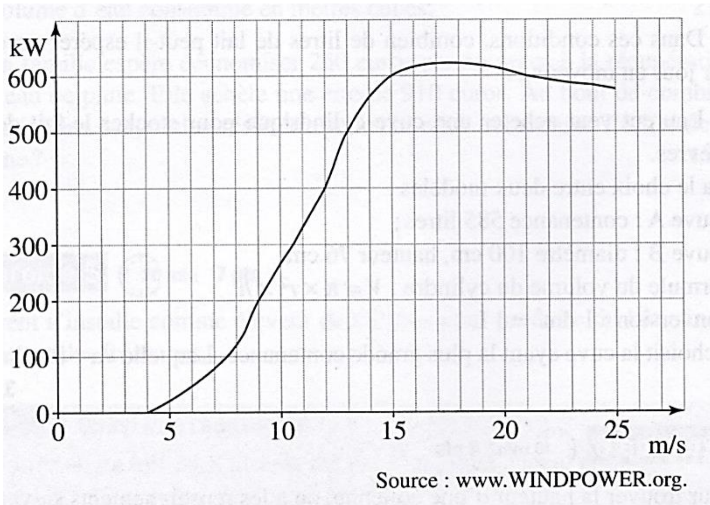
PARTIE B : production d'électricité par des panneaux solaires

Sachant que l'immeuble est situé au sud de la Bourgogne et que le toit (EHGLKF) et la façade sud (ABHE) sont recouverts de panneaux solaires, donner, à l'aide des informations présentées sur la carte ci-dessous, un encadrement de l'énergie économisée par an en kWh grâce aux panneaux solaires.



PARTIE C : production d'électricité par des éoliennes

La puissance fournie par une éolienne dépend de la vitesse du vent. Lorsque la vitesse du vent est trop faible, l'éolienne ne fonctionne pas. Lorsque la vitesse du vent est trop importante, par sécurité, on arrête volontairement son fonctionnement. On a tracé la courbe représentant la puissance fournie, en kW, en fonction de la vitesse du vent en m/s.



Utiliser ce graphique pour répondre aux questions suivantes.

1) Quelle vitesse le vent doit-il atteindre pour que l'éolienne fonctionne ?
2) Quelle doit être la vitesse du vent pour que l'éolienne fournisse une puissance supérieure à 600 kW ?
3) À partir de quelle vitesse arrête-t-on volontairement l'éolienne ? Exprimer cette vitesse en km/h.

PARTIE D : isolation de la façade Nord

On décide d'isoler la façade nord IJLK avec un isolant végétal. Celui-ci a un coût de 15 € par m².

1) Sachant que l'on recouvre la totalité de cette façade à l'exception des baies vitrées qui représentent 22% de la surface, quel sera le coût de cette isolation ?
2) Pour calculer la puissance nécessaire P en Watts (W) de chauffage d'une habitation, on utilise la formule suivante :

$$\boldsymbol{P = t \times DT \times V}$$

   - $\boldsymbol{t}$ est le coefficient d'isolation
   - $\boldsymbol{DT}$ est la différence entre la température extérieure minimale et la température souhaitée
   - $\boldsymbol{V}$ est le volume de la pièce en m³.

   a) Avec l'isolation de la façade nord, le coefficient $\boldsymbol{t}$ obtenu est 1,5.
   Sachant que l'appartement a une hauteur sous plafond de 2,50 m, que la température extérieure minimale est $-10°C$, et que l'on souhaite 21°C dans un séjour de 24 m², calculer la puissance nécessaire pour le chauffage du séjour.

   b) L'isolation a permis une réduction de 20% du coefficient $\boldsymbol{t}$.
   Quelle était sa valeur avant l'isolation ?

GÉOMÉTRIE PLANE ET DANS L'ESPACE
d'après un sujet de Paris

Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.

PARTIE A : vrai/faux

Dans cet exercice, sept affirmations sont proposées.

Pour chacune, dire si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse.

Affirmation 1

Un cube, une pyramide à base pentagonale et un prisme droit à base triangulaire totalisent 34 sommets.

Affirmation 2

Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

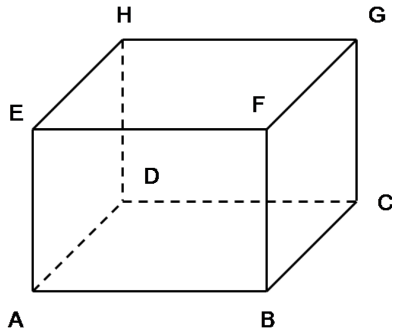
Affirmation 3

Un quadrilatère qui a deux angles droits est un trapèze rectangle.

Affirmation 4

On peut construire un seul triangle ABC isocèle avec AB = 3 cm et BC = 7 cm.

Pour les **affirmations 5 à 7**, on considère le prisme droit à base carrée représenté ci-dessous.



Affirmation 5

Dans la réalité, EFGH est un rectangle.

Affirmation 6

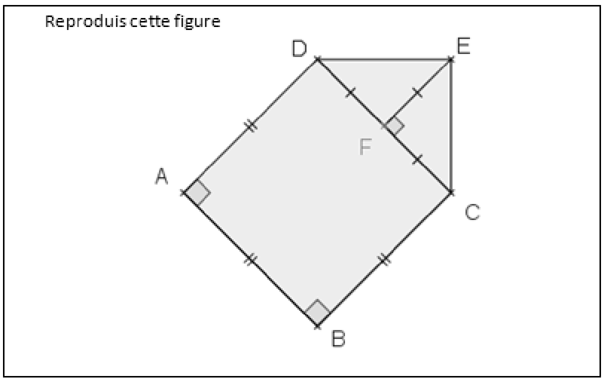
Dans la réalité, les longueurs EH et FB sont égales.

Affirmation 7

Dans la réalité, les points E, D et B sont alignés.

PARTIE B : étude de figures planes

Il s'agit d'un exercice du manuel *Cap Maths* CE2, édition 2016 (Hatier), modifié avec l'ajout de codages.



1) Quelle est nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.
2) On a tracé sur l'annexe 1 le segment [AB] en vraie grandeur.
   Compléter l'annexe 1 pour obtenir la figure précédente, en utilisant uniquement **la règle non graduée et le compas** (on laissera les traits de construction visibles).
3) La figure codée ci-dessus est le support d'une situation de communication (de type émetteur – récepteur) donnée à des élèves de cycle 3. Les élèves émetteurs disposaient de la figure mais n'avaient pas à la construire.
   a) Indiquer quelle est la rupture entre la géométrie étudiée en début de cycle 3 et celle étudiée en fin de cycle 3.
   b) En quoi cet exercice aide-t-il à passer d'une géométrie à l'autre ?
4) On s'intéresse à présent aux quatre productions d'élèves émetteurs données en annexe 3.
   Il avait été indiqué aux élèves qu'il n'était pas utile de respecter les longueurs, mais qu'il suffisait de respecter les propriétés géométriques. Cependant certains ont tout de même utilisé des mesures de longueur qui correspondent à la figure modèle dont ils disposaient.
   a) Indiquer les erreurs commises par William. Comment pourriez-vous les expliquer ?
   b) La production de Gabriel permet-elle d'obtenir la figure attendue ? Justifier.
   c) Dans une classe, comment pourrait-on montrer à Neila que son programme ne convient pas ?
   d) Construire une figure qui correspond à l'énoncé produit par Raphaëlle mais qui ne répond pas au problème posé.
   e) Après l'analyse de ces productions, indiquer une compétence qui n'est maîtrisée ni par Raphaëlle, ni par Neila et une compétence qui est maîtrisée par l'ensemble des quatre élèves.

PARTIE C : étude de solides

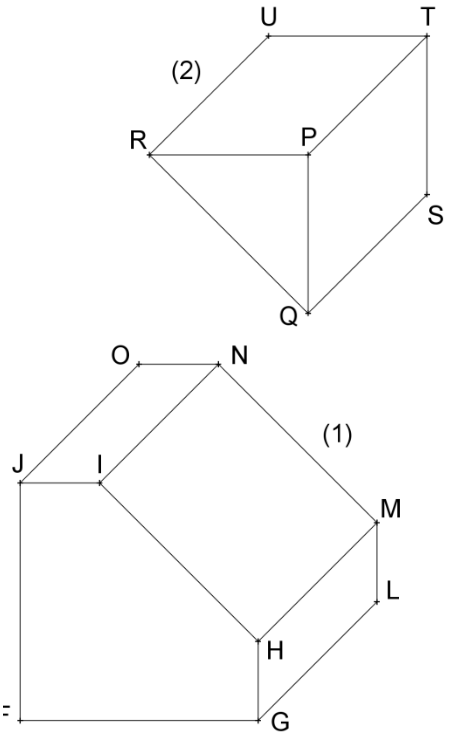
La question 3 de cette partie C est indépendante des questions 1 et 2 qui la précèdent.

On trouve l'énoncé suivant dans le manuel *Cap Maths* CM2, édition 2004 (Hatier).

En assemblant le cube tronqué (1) et le prisme droit (2) représentés ci-contre, on obtient un cube.

Tu disposes d'un gabarit des différentes faces du prisme droit PQRSTU (2) (à savoir les pièces (a), (d) et (e) dans la suite), ainsi que d'un gabarit d'une face du cube (pièce (c) dans la suite).

Utilise ces gabarits pour construire un patron du cube tronqué.



Volontairement, ni les gabarits des faces du prisme droit (2), désignés par (a), (d), (e), ni la pièce(c) (face du cube), présents dans la ressource, n'ont été reproduits dans cet énoncé.

1) On sait que l'arête du cube a pour longueur 6 cm et que JI = HG = 2 cm. Construire en vraie grandeur les pièces (a), (d) et (e). On ne demande pas de justification, tous les instruments sont autorisés, les traits de construction devront rester apparents.

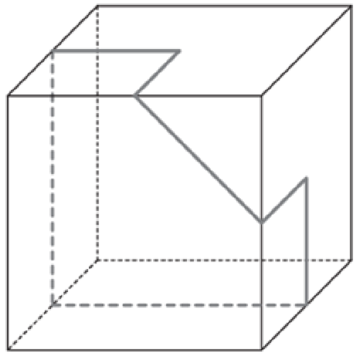
2) a) Indiquer le nom de ce solide (1) (autre que « cube tronqué ») ainsi que son nombre de faces, d'arêtes et de sommets.

   b) Construire en vraie grandeur un patron de ce solide (tous les instruments sont autorisés).

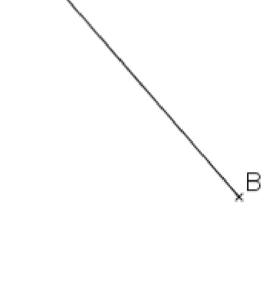
   c) Des élèves doivent commander à l'enseignant un nombre de morceaux de scotch pour construire le solide à partir de leur patron, avec un seul morceau de scotch pour solidariser deux faces. Pour le patron construit en c), combien de morceaux de scotch devraient-ils commander ?

3) On considère le cube ci-contre sur lequel on a tracé des segments sur plusieurs faces.

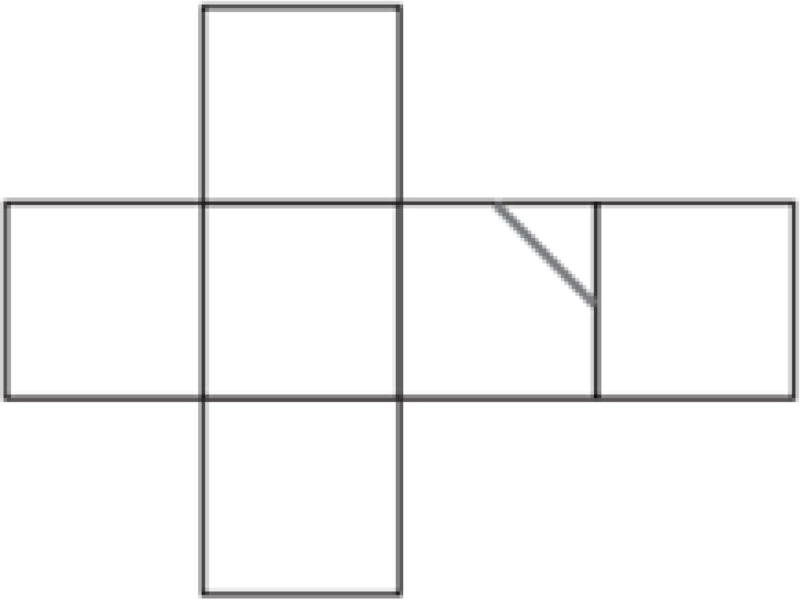
   Compléter le patron correspondant à ce solide sur l'annexe 2, en y ajoutant les segments tracés sur le cube manquants (on ne demande pas de justification et tous les instruments sont autorisés).



ANNEXE 1 (à rendre avec la copie) – partie B



ANNEXE 2 (à rendre avec la copie) – partie C



ANNEXE 3

Texte de William	*Texte de Neila*
Fais un losange ABCD et Place le point F au milieu de [DC], trace un triangle équilatéral rectangle DFE et un autre de l'autre coté, un Triangle CEF.	1) Trace un carre et nomme le ABCD 2) Place un point F milieu de [DC] 3) Trace le segment [DE) 4 Trace le segment (CE) 5) trace le segment (FE)
Texte de Gabriel	*Texte de Raphaëlle*
Trace un carré ABCD. Trace un triangle rectangle isocèle en E, DEC Place un point F au milieu du segment [DC] Trace un segment [FE]	Trace un carré DABC DA=3,2cm. Trace un triangle isocele en E. DE=2,3 Place le point F au millieu de DC et relie [FE].

PROBLÈME (tableur, grandeurs et division euclidienne) d'après un sujet de Paris

PARTIE I

Pour financer un voyage scolaire, des élèves d'Afrique du Sud sont responsables de la vente de tickets de loterie.
Le premier prix est une tente familiale pour faire du camping, achetée par les organisateurs de la loterie au prix de 6000 ZAR.

1) Le **rand Sud-Africain** (ZAR) est la monnaie officielle de l'Afrique du Sud.
   Au 19 février 2017, le taux de change avec l'euro est le suivant : 1 EUR = 13,775 ZAR
   Calculez au centime d'euros près, le prix de la tente.
2) Les organisateurs choisissent dans un premier temps de fixer le prix d'un billet de loterie à 20 ZAR.
   a) Combien de billets devront être vendus pour couvrir le prix de la tente ?
   b) Combien de billets doivent être vendus pour obtenir un bénéfice de 1000 ZAR ?
   c) Le calcul du bénéfice doit en fait prendre en compte le coût d'impression des billets : le coût de l'impression d'un billet de loterie est de 1,50 ZAR. En vendant 350 billets à un prix de 20 ZAR, quel serait le bénéfice de la vente ?
3) Pour calculer le bénéfice qui serait réalisé en vendant 350 billets pour d'autres valeurs du prix du billet, les organisateurs ont construit, à l'aide d'un tableur, la feuille de calcul ci-dessous.

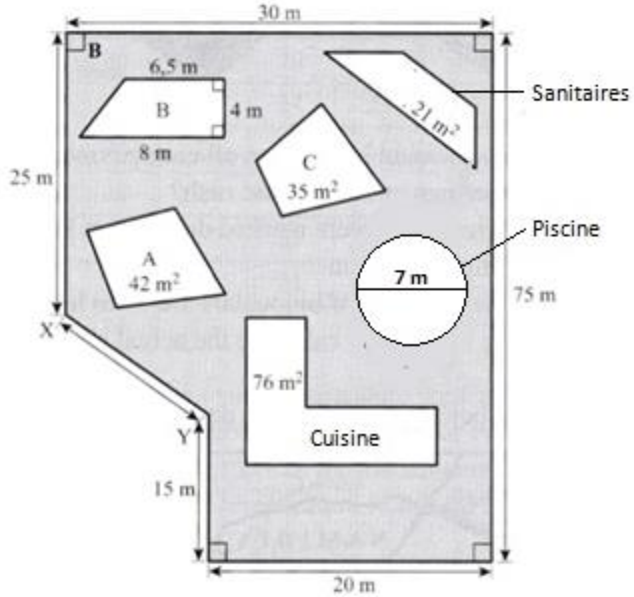
	A	B	C	D	E	F
1	**Prix de la tente (en ZAR)**	6000				
2						
3	**Prix du ticket (en ZAR)**	20	25	30	35	40
4	**Bénéfice réalisé (en ZAR)**	475	2225	3975	5725	7475

   Parmi les formules données ci-dessous, lesquelles ont pu être écrites dans la cellule B4 puis étirées vers la droite pour obtenir les résultats dans les cellules grisées ? On ne demande pas de justification.

   a) =20*350-6000-1,5*350 b) =B3*350-B1-1,5*350 c) =B3*350-B1-1,5*350
   d) =B3*350-6000-1,5*350 e) =(B3-1,5)*350-6000 f) = B3*350-B$1-1,5*350
4) Il est finalement décidé de fixer le prix du billet à 25 ZAR (au-delà, les organisateurs craignent de ne pas vendre beaucoup de billets).
   a) Calculez le pourcentage d'augmentation du prix du billet par rapport au prix choisi dans la question 2.
   b) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte.* Combien devrait-on vendre de billets pour avoir un bénéfice d'au moins 10 000 ZAR ?

PARTIE II

Jacob est très chanceux, il a gagné cette tente !
Pour ses prochaines vacances en famille, il décide d'aller aux chutes Victoria au Zimbabwe.
Il y connait un camping situé à Livingstone, décrit par le plan ci-dessous qui n'est pas à l'échelle.



1) Jacob choisit l'emplacement B qui possède une superbe vue sur le paysage.
   Calculez l'aire de cet emplacement.
2) La piscine est un bassin cylindrique, qui a une profondeur de 2 m.
   Calculez le volume d'eau nécessaire pour la remplir aux trois quarts de sa hauteur (on exprimera la réponse en m^3 puis en litre, en donnant une valeur approchée au litre près).
3) On s'intéresse maintenant au périmètre du camping.
   a) Montrez que la longueur XY est égale à 36,4 m au centimètre près.
   b) Déduisez-en le périmètre du camping au centimètre près.
4) Hormis les infrastructures représentées sur le plan, le camping est entièrement recouvert de pelouse.
   a) Calculez l'aire de la pelouse (on donnera une valeur approchée au m^2 près).
   b) Dans cette question, on considère que l'aire de la pelouse est égale à 1700 m^2. Sachant qu'il faut 10 kg de semence pour une surface dont l'aire est égale à 500 m^2, donnez au kg près la masse de semence nécessaire pour cette pelouse.

PARTIE III

Sur place, Jacob décide de faire du rafting sur le fleuve Zambèze avec un groupe de touristes.
Si on regroupe tous les participants dans des canots de 6 places, il reste 3 personnes sur le dernier canot.
Si on regroupe tous les participants dans des canots de 5 places, il n'en reste pas.

1) Si on regroupait 3 participants par canot, en resterait-il ? Justifiez votre réponse.
2) Si on regroupait 2 participants par canot, en resterait-il ? Justifiez votre réponse.
3) Quel peut être le nombre de participants sachant qu'il y en a en tout moins de 100 ? Trouvez tous les cas possibles.

ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES SUR LES AIRES d'après un sujet de Dijon

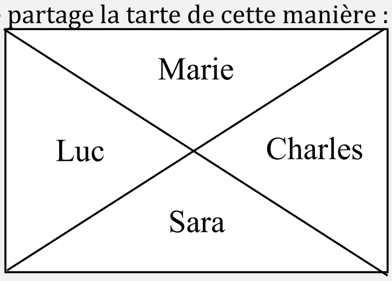
L'exercice suivant a été proposé en 2014 lors du Rallye Mathématique Transalpin à des élèves provenant de l'ensemble du cycle 3, de la classe de CM1 à celle de 6ème .

L'encadré n'est pas à l'échelle de la feuille distribuée aux élèves. Les dimensions du rectangle présenté aux élèves sont 4,9 cm et 3,1 cm.

LA TARTE DE MAMIE LUCIE

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.

Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

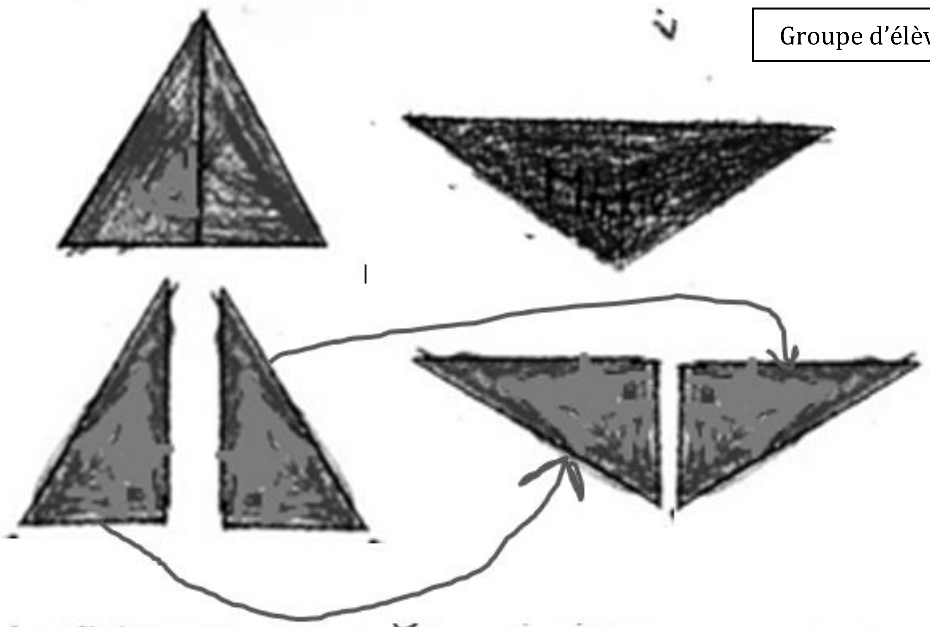
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Les productions de quatre groupes d'élèves figurent en annexe page suivante [1].

1) Les groupes d'élèves 1 et 2 (voir annexe) proposent des procédures n'utilisant pas les mesures. Analyser ces procédures en relevant les propriétés mathématiques sur lesquelles elles s'appuient.
2) Détailler les différentes étapes de la procédure suivie par le groupe 3 et analyser leur(s) erreur(s).
3) a) Citer trois compétences qui semblent maîtrisées par les élèves du groupe 4.
   b) Quelle difficulté, à l'origine de leur erreur, ont rencontrée les élèves de ce groupe 4?
4) Le résultat auquel conduit cet exercice reste-t-il vrai lorsque la tarte a la forme d'un parallélogramme ?

[1] Ces productions sont extraites d'un article de B. Anselmo et M. Henry publié dans les Actes du 42e Colloque Copirelem.

Groupe d'élèves 1



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

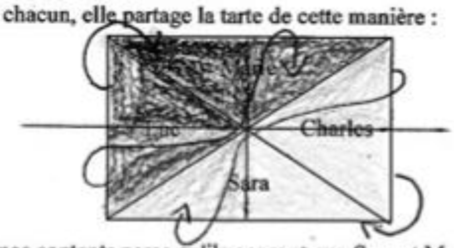
Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

On coupe la part de Luc ~~etcharles~~ en 2 parties égales par les axes de symétrie du rectangle. Les 2 pars de Luc et on les superposent sur celle de Marie et on fait pareil avec celle de Charles et Sara. Donc c'est Sara et Marie qui ont raison.

Groupe d'élèves 2

Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



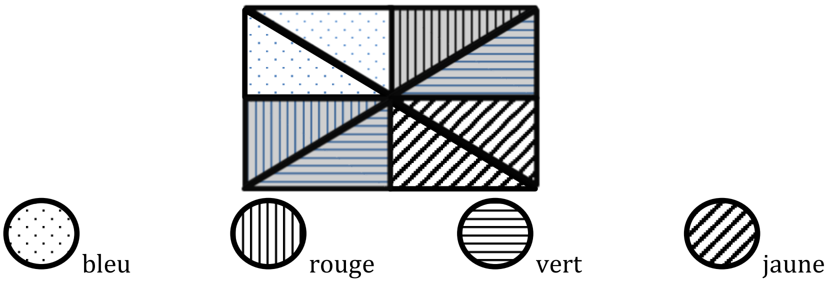
Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

On coupe la part de Luc etcharles en 2 parties égales par les axes de symétrie du rectangle. Les 2 pars de Luc et on les superposent sur celle de Marie et on fait pareil avec celle de Charles et Sara. Donc c'est Sara et Marie qui ont raison.

Le groupe d'élèves 2 utilise quatre couleurs dans son découpage ; nous donnons ci-dessous la légende des couleurs utilisées :



Groupe d'élèves 3

on fait $2,8 \times 2 + 3,1 = 8,7$ la part de luc
et charle fait 8,7 cm.
On fait $2,8 \times 2 + 4,8 = 10,4$ la part
de Sara et Marie fait 10,4 cm.
C'est luc et charle qui on raison car la part
de marie et sara est de 10,4 cm et cel de luc et
charle 8,7 cm donc la part de marie et sara est plus
grande donc c'est luc et charle qui on raison

Groupe d'élèves 4

C'est Luc et Charles ont raison. On a fait base fois hauteur et
on a divisé par 2.

$$\begin{array}{r} 3,1 \\ \times\ 2,5 \\ \hline 155 \\ +\ 620 \\ \hline 7,75 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4,9 \\ \times\ 1,5 \\ \hline 245 \\ +\ 490 \\ \hline 7,35 \end{array}$$

$7,35 \div 2 = 3,675$

$7,75 \div 2 = 3,875$

ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES SUR LA DURÉE d'après un sujet de Dijon

Une enseignante de CM2 propose à ses élèves l'exercice suivant :

> *Alain veut participer au cross du collège.*
> *Il faut réussir à parcourir 2000 m en 12 min 40 s pour être qualifié.*
> *Sachant qu'il est à 2 minutes et 36 secondes de la qualification, combien de temps met-il actuellement pour effectuer le parcours ?*

1) a) Résoudre le problème.

   b) Les productions de six élèves sont présentées ci-dessous. Proposer un classement de ces productions en fonction de la représentation sous-jacente du problème sur laquelle elles s'appuient.

Élève A	***Élève B***
12,40 s 2,36 s 10,04 s Il met 10,04s le parcours	12 min 40s – 2 min 36s = 10,04 Actuelement, il met 10 min et 4 secondes.
Élève C	***Élève D***
Il met 10 m 4 s pour parcourir le resultat → 12,36 + 10 0 4 18 4 0	12,40 2,36 10,04 Alain a actuellement effectuer 10,04
Élève E	***Élève F***
Il mettra plus de temps	12 min 40s + 2 min 36s 15 16 il fait 15 min et 16 s

   c) Lors de la mise en commun, l'enseignante choisit de présenter en premier la production de **l'élève E**. Quelle peut-être son intention ?

2) Analyse des productions

   a) Comparer les productions des **élèves A, B, C et D** du point de vue des techniques de calcul mises en œuvre.

   b) Analyser la nature des nombres mobilisés et leurs écritures dans les productions des **élèves A, B, C et D**.

   c) Détailler les différentes étapes du calcul effectué par **l'élève F**.

3) Face aux nombreuses erreurs, en particulier dans les additions posées, l'enseignante invite les élèves à rechercher une autre démarche que celle d'une opération posée en colonne. Quelle solution s'appuyant sur une schématisation de la situation pourrait-elle leur proposer ?

ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES (PROPORTIONNALITÉ) d'après un sujet de Paris

On s'intéresse au problème suivant, inspiré d'un problème proposé dans la collection *Euromaths (Hatier, 2009)*.

a) Pour peindre une cabane, Alice a utilisé deux mélanges :

Mélange A : 2 litres de peinture blanche 1 tube de peinture verte	**Mélange B :** 3 litres de peinture blanche 2 tubes de peinture verte

Alice a peint un mur avec le mélange A, et un autre avec le mélange B.
Hélène observe la cabane d'Alice.

Quel est le mur le plus clair ?

b) Alice choisit d'utiliser le mélange B pour peindre sa cabane. Elle dispose de 7 tubes de peinture verte.

Combien de litres de peinture blanche devra-t-elle utiliser pour faire son mélange ?

1) Résoudre ce problème (en utilisant une procédure de votre choix).
2) Citer une variable didactique présente dans un problème du type de celui qui est posé dans la question b).

   Proposer un autre choix pour la valeur de cette variable que celui qui a été fait dans l'énoncé, en précisant les conséquences prévisibles dans les procédures des élèves.

L' annexe 1 propose quatre réponses d'élèves à la question b) du problème.

3) Indiquer les productions pour lesquelles le raisonnement employé est correct. Vous préciserez la ou les propriété(s) mathématique(s) implicitement utilisée(s).

L'annexe 2 propose trois réponses d'élèves à la question a) du problème (leurs réponses à la question b) figurent en annexe 1).

4) Quelle(s) aide(s) envisager pour faire évoluer les raisonnements de ces élèves ?

ANNEXE 1

Nour

Réponse :

Elle devra utiliser : 10,5 litres de peinture.

tubes	1	2	3	4	5	6	7
litres	1,5	3	4,5	6	7,5	9	10,5

Alix

Réponse : Elle devra utiliser 8 litres de peinture pour faire son mélange car vu que pour le mélange B il y a un pot de plus de peinture blanche par rapport à la peinture verte, ce sera la même chose pour 7 pots de peinture verte. C'est proportionnelle.

Mathilde

Réponse :

	+5		
peinture blanche	3	8	
peinture verte	2	7	
	+5		

Il lui faudra 8 litres de peintures blanche.

Camille

Réponse :

7	2
10	3,5

Il faudra 10,5 litre de peinture blanche.

$3 \times 3,5 = 10,5$

ANNEXE 2

Alix

Réponse : Le mur le plus clair est celui qui est peint avec le mélange A car elle a moins de peinture donc le mur sera plus clair.

Mathilde

Réponse :
Ils seront tous de la même couleur, il y aura juste plus de peinture.

+1

peinture blache	2	3	
peinture verte	1	2	

+1

Car les deux valeurs sont proporsionelle.

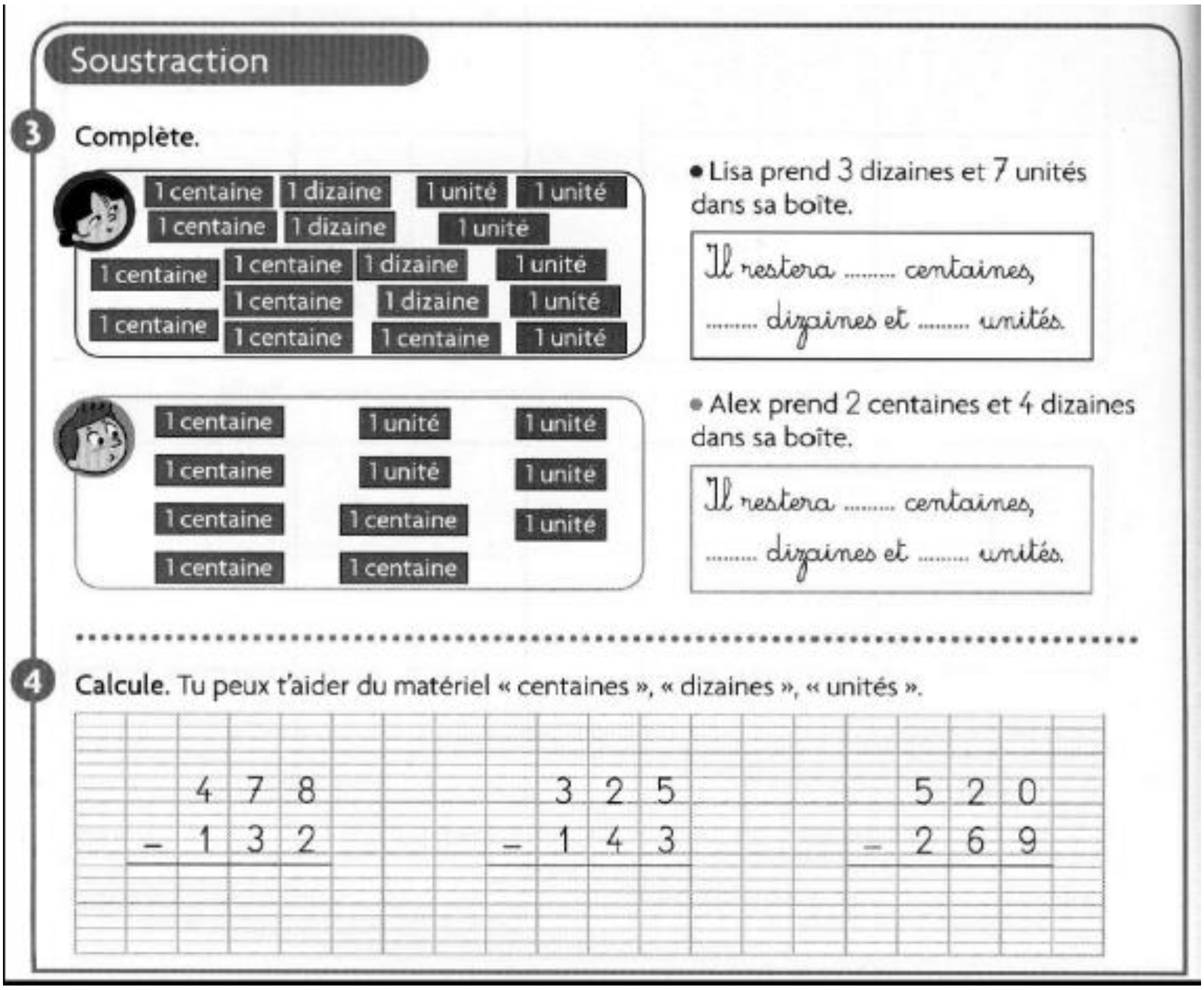
Camille

Réponse :
Le mur avec le mélange A est plus clair car le double du vers es ajouté alors que dans le mélange B c'est 1 tiers de plus.

ANALYSE DE SITUATIONS SUR LE CALCUL AUX CYCLES 2 ET 3 d'après un sujet de La Roche sur Yon

PARTIE A : calculs de soustractions

Voici un extrait du manuel Cap Maths CE1 (Hatier) :


Soustraction

3 Complète.

1 centaine 1 dizaine 1 unité 1 unité
1 centaine 1 dizaine 1 unité
1 centaine 1 centaine 1 dizaine 1 unité
1 centaine 1 dizaine 1 unité
1 centaine 1 centaine 1 centaine 1 unité

• Lisa prend 3 dizaines et 7 unités dans sa boîte.

Il restera .... centaines, ... dizaines et .... unités.

1 centaine 1 unité 1 unité
1 centaine 1 unité 1 unité
1 centaine 1 centaine 1 unité
1 centaine 1 centaine

• Alex prend 2 centaines et 4 dizaines dans sa boîte.

Il restera .... centaines, ... dizaines et .... unités.

4 Calcule. Tu peux t'aider du matériel « centaines », « dizaines », « unités ».

$$\begin{array}{r} 478 \\ -\ 132 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 325 \\ -\ 143 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 520 \\ -\ 269 \\ \hline \end{array}$$

1) **Étude de l'exercice 3**
   a) Indiquer la procédure qui semble attendue en CE1 pour résoudre l'exercice 3.
   b) Sur quelle(s) propriété(s) de notre système de numération écrit cette procédure s'appuie-t-elle ?
   c) Quelle aide pourrait-on proposer à des élèves en difficulté sur cet exercice ?

2) **Étude de l'exercice 4**

L'exercice 3 sert à préparer le travail sur une technique opératoire de la soustraction de l'exercice 4. S'agit-il de la technique traditionnelle française de la soustraction qui est travaillée ici ? Si ce n'est pas le cas, de quelle technique s'agit-il ? Dans tous les cas vous justifierez votre réponse en vous appuyant sur l'exemple de la soustraction posée 325 – 143.

PARTIE B : calcul de divisions

Des travaux d'élèves de CM2, à qui il était demandé d'effectuer la division 38 742 : 38, sont reproduits ci-dessous.

Étudier les productions des quatre élèves, vérifier les résultats (quotient et reste) et analyser les erreurs commises en formulant des hypothèses sur leur origine.

Elève A

38×2=76
38×10=380
38×9=342

```
38 742      | 38
 74 ↓(-38)  |------
 362 (-342) | 1190
  20        |
```

Elève B

38×1=38
38×2=76
38×4=152
38×8=304
38×9=342

38×10=380
38×20=760

```
  38 742 | 38
- 38 000 |------
     742 | 1000
   - 380 |   10
     462 |   10
   - 380 |    2
      82 |------
    - 76 | 1022
       6 |
```

Elève C

38×1=38
38×2=76
38×3=114
38×4=152
38×5=190
38×6=228
38×7=266
38×8=304
38×9=342

```
38 742 | 38
 0742  |------
- 380  | 1019
  362  |
- 342  |
   20  |
```

je vérifie

```
   1019
 ×   38
 ------
   8152
  30570
 ------
  38722
```

Elève D

38×10=380
38×11=418
38×12=456

```
38742 | 38
 0074 |------
 - 38 | 1112
  462 |
- 456 |
    6 |
```

PARTIE C : calculs avec des nombres décimaux

1) Une partie de l'exercice 13 de l'évaluation nationale CM2 (janvier 2011) propose ceci :

Pose et effectue les opérations suivantes	
208 + 13,75	*56,73 – 7,02*

Les résultats de réussite observés dans une circonscription de l'académie de Nantes pour ces opérations sont les suivants :

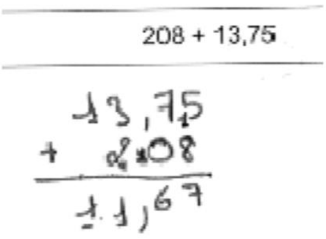
- 65% de réponses justes pour l'addition ;
- 76% de réponses justes pour la soustraction.

Analysez mathématiquement ce qui permet d'expliquer cet écart de réussite au profit de la soustraction.

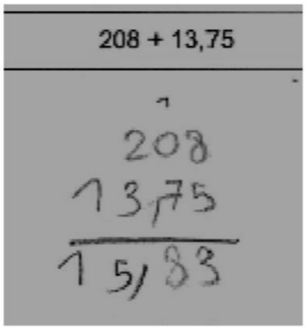
2) Voici ci-dessous trois productions d'élèves concernant l'addition $\mathbf{208 + 13,75}$.

Pour chaque production, faites une analyse en explicitant les procédures, en relevant les erreurs et leur origine possible.

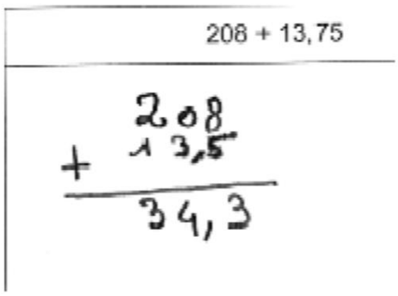
Elève A



Elève B



Elève C



ANALYSE DE SITUATIONS SUR LA NUMÉRATION d'après un sujet de Paris

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

PARTIE A : étude de manuels de cycle 3

Vous trouverez, en annexe 1, la double page consacrée aux « nombres jusqu'à 9 999 » d'un manuel de cycle 3 (Opération maths, CM1, Hatier, 2016).

1) Étude de l'exercice 1

a) Résoudre cet exercice en utilisant deux procédures différentes, en précisant laquelle serait à privilégier en classe dans le cadre d'un travail sur la numération décimale (justifier ce choix).

b) Les auteurs ont choisi de présenter des plaques qui se superposent. Quelle a pu être leur intention vis-à-vis des procédures visées chez les élèves ?

2) Étude de l'exercice 2

a) Répondre à la question posée, en utilisant la procédure au choix.

b) Citer trois difficultés présentées par cet exercice (relativement au travail sur le dénombrement de collections et l'exploitation du système de numération décimale).

3) Étude des exercices 3, 4, 5 et 6

a) Répondre aux questions posées dans ces quatre exercices (aucune justification demandée).

b) Les auteurs ont joué sur deux variables didactiques pour construire les trois questions de l'exercice 6 : expliquer en quoi la question b. et la question c. sont différentes de la question a. dans le cadre d'un travail sur le système de numération décimale.

4) Étude de l'exercice 10

a) Répondre à la question posée pour 3 275.

b) Donner cinq autres nombres que l'on peut dire en utilisant exactement les mêmes mots-nombres que ceux qui sont utilisés pour 3 275.

5) Étude de la partie « Les petits matheux »

a) Donner un intérêt de proposer un exercice portant sur un autre système de numération que notre système de numération décimale.

b) Donner un point commun et une différence entre les règles de construction de notre système de numération et celles du système de numération proposé.

6) Recours à un autre manuel

Vous trouverez en annexe 2 le premier exercice de la double page consacrée aux « nombres jusqu'à 9 999 » d'un autre manuel de cycle 3 (Graine de maths, CM1, Nathan, 2016).

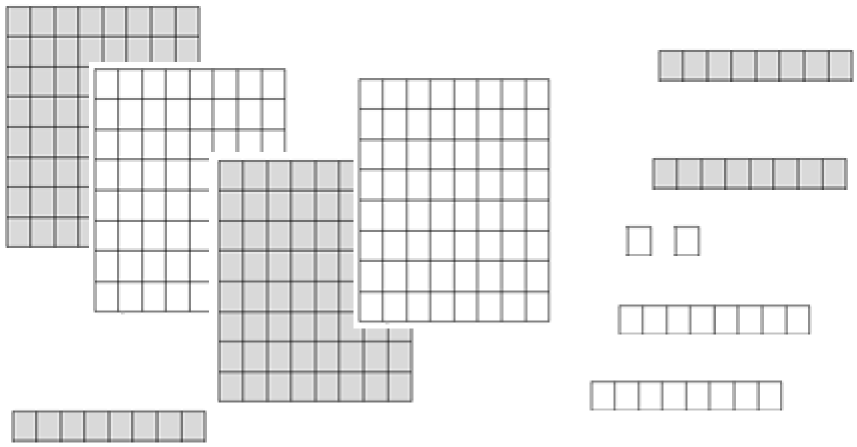
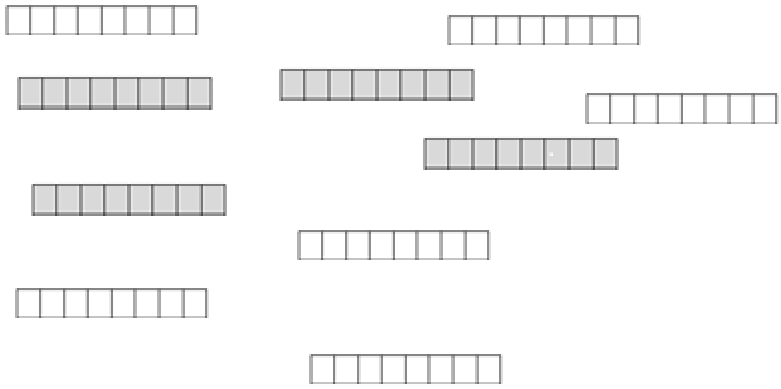
a) Donner trois réponses correctes pour cet exercice.

b) Modifier l'énoncé pour qu'une seule réponse correcte soit possible.

c) Cet exercice paraît-il redondant avec certains exercices proposés dans le premier manuel ou, au contraire, complémentaire ? Justifier la réponse.

PARTIE B : travail en base huit

1) *(Analogie avec l'exercice 1 de l'annexe 1)* Donner l'écriture chiffrée en base huit du cardinal de chacune de ces collections de timbres (toutes les plaques sont complètes).

Collection A	
Collection B	

2) Dessiner une collection de $\overline{52}^{\text{huit}}$ timbres.
3) Comment s'écrivent en base dix les nombres qui s'écrivent $\overline{231}^{\text{huit}}$ et $\overline{700}^{\text{huit}}$? Les calculs devront être apparents.
4) Écrire en base huit le nombre qui s'écrit $\overline{1580}^{\text{dix}}$. Les calculs devront être apparents.

ANNEXE 1

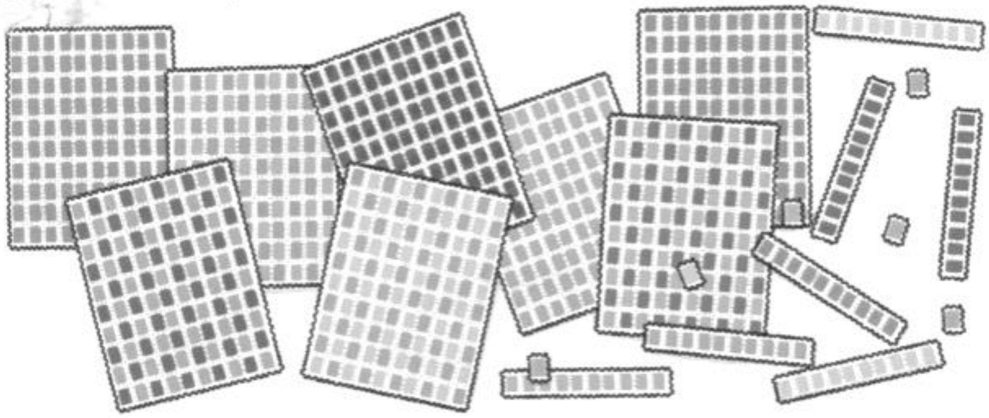
Source : *Opération maths, CM1, Hatier, 2016*

3 Les nombres jusqu'à 9 999

Numération écrite et numération orale

CALCUL MENTAL
• *jeu du furet de 5 en 5*

1 **Combien de timbres y a-t-il ?** (Toutes les plaques sont complètes.)



2 Certaines boîtes contiennent 100 perles, d'autres 10 perles. **Combien de perles y a-t-il ?**

3 Combien de centaines y a-t-il dans une unité de mille ?
Combien de centaines y a-t-il dans 7 unités de mille ?

1 000 se dit « mille ». C'est une unité de mille.

4 Combien de dizaines y a-t-il dans une unité de mille ?
Combien de dizaines y a-t-il dans 5 unités de mille?

5 **Écris en chiffres.**

a. 34 centaines
b. 164 dizaines
c. 7 unités de mille

6 **Écris en chiffres.**

a. 8 unités de mille, 5 centaines, 7 dizaines et 4 unités
b. 3 unités de mille et 4 dizaines
c. 6 centaines, 5 unités de mille et 2 unités

7 **Range** dans l'ordre croissant les nombres :

658 49 6 058 491 649 4 901 65 4 910

8 ***Problème***

Combien de boites de 10 crayons faut-il pour avoir 500 crayons ?
Combien de crayons a-t-on avec 10 cartons contenant chacun 100 boites de 10 crayons ?

OBJECTIF : revoir les unités de numération et le nom des nombres jusqu'à 9 999.

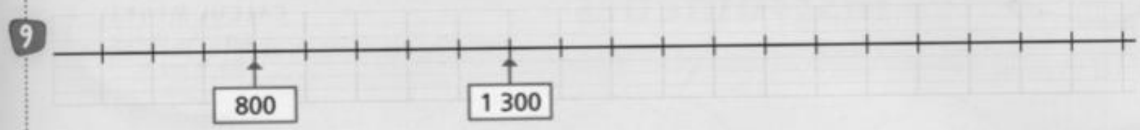
CALCUL MENTAL ▸ jeu du furet de 5 en 5 en croissant, en décroissant à partir d'un nombre quelconque.

12

ANNEXE 1

(suite du document)

9



a. **Complète :** « Cette portion de droite est graduée de … en … ».

b. **Reproduis** cette droite graduée et **place** chaque nombre le plus précisément possible.

1 000 | 600 | 2 000 | 1 500 | 1 650 | 1 150 | 525

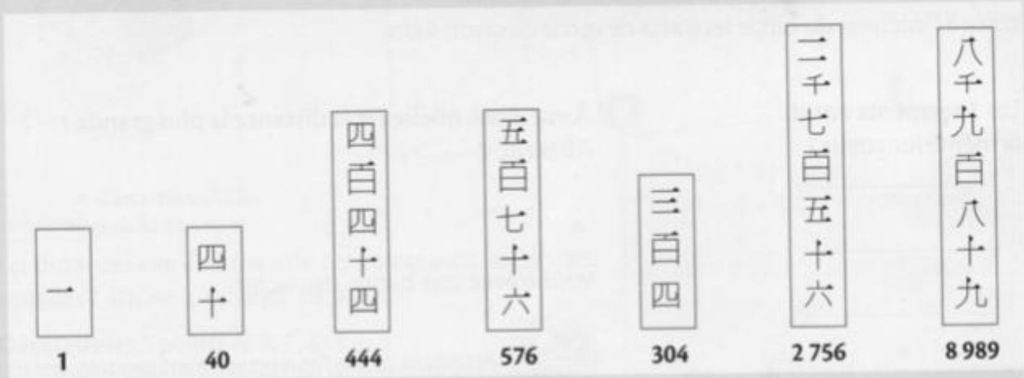
10 **Trouve** les mots-nombres utilisés pour dire chaque nombre. **Écris** ces nombres en lettres.

3 275 | deux | trois | cinq | sept | quinze | vingt(s) | cent(s) | soixante | mille

3 098 | zéro | trois | quatre | huit | neuf | dix | vingt(s) | trente | cent(s) | mille

Les petits matheux VOYAGEURS

Pour écrire les nombres, les Chinois utilisent deux séries de signes :
– une série désigne les unités de numération : 十 dizaine, 百 centaine, 千 unité de mille ;
– une série de signes qui correspondent à nos chiffres.



Les petits matheux ont commencé à trouver la valeur des chiffres chinois. Continue.

三	七	四	九	一	六	二	八	五
3	a	b	c	d	e	f	g	h

Écris la décomposition du nombre 2 756 qui explique comment il est écrit en chinois.

Je calcule rapidement

Observe chaque suite et **écris** les cinq nombres suivants.

a. 972 | 977 | 982   b. 236 | 231 | 226

Liaison CE2-CM1 • 13

ANNEXE 2

<u>Source</u> *Graine de maths, CM1, Nathan, 2016*

Connaitre les nombres entiers jusqu'à 9 999

COMPÉTENCES
→ Consolider les connaissances en numération écrite et orale.
→ Utiliser « mille ».

Des sculptures de ballons

Pour terminer sa semaine d'action, une association humanitaire organise une vente de sculptures de ballons.
Maria achète 1 580 ballons, en deux conditionnements :

Combien de sachets de chaque sorte achètera-t-elle ?

ANALYSE DE SITUATIONS SUR LA DIVISION
d'après un sujet de Besançon

Cet exercice se compose de quatre parties A, B, C et D indépendantes mais portant toutes sur l'enseignement de la division à l'école primaire.

PARTIE A

Le problème suivant est proposé en classe de CE2.

> **Les enfants d'une classe de CE2 veulent montrer 55 doigts en montrant des mains**
> **(les 5 doigts de chaque main sont montrés).**
> **Combien doivent-ils montrer de mains ?**

1) Donner la définition de la division euclidienne d'un entier naturel *a* par un entier naturel *b* non nul.
2) Décrire trois procédures d'élèves de CE2 permettant de résoudre ce problème dont deux au moins feront appel au calcul.
3) Dans les programmes de l'école primaire (B.O spécial n°11 du 26 novembre 2015), on peut lire que « L'étude de la division [...] est initiée au cours du cycle 2 dans des situations simples de partage ou de groupement. Elle est ensuite préparée par la résolution de deux types de problèmes : ceux où l'on cherche combien de fois une grandeur contient une autre grandeur et ceux où l'on partage une grandeur en un nombre donné de grandeurs ».
   a) D'après cet extrait des programmes, de quel type est le problème proposé ?
   b) En utilisant les mêmes données numériques (55 et 5), proposer un énoncé de problème de l'autre type que l'on peut donner à des élèves de CE2.

PARTIE B

On a proposé l'énoncé de problème suivant à des élèves de CE1.

> **Un jardinier a planté 45 salades. Il a fait trois rangées. Il a mis le même nombre de salades dans chaque rangée.**
> **Combien y a-t-il de salades dans chaque rangée ?**

Dans l'annexe 1, trois productions d'élèves sont proposées.

Pour chacune d'entre elles, expliquer la procédure utilisée en mettant en évidence ce qui est correct et le cas échéant ce qui est erroné.

PARTIE C

On a demandé à deux élèves de CM1, Francine et Farid, de poser la division euclidienne de 4 318 par 14.

Les productions de ces deux élèves sont reproduites en annexe 2.

Relever et analyser les erreurs commises par ces deux élèves.

PARTIE D

L'énoncé de problème suivant a été proposé à des élèves de l'école primaire.

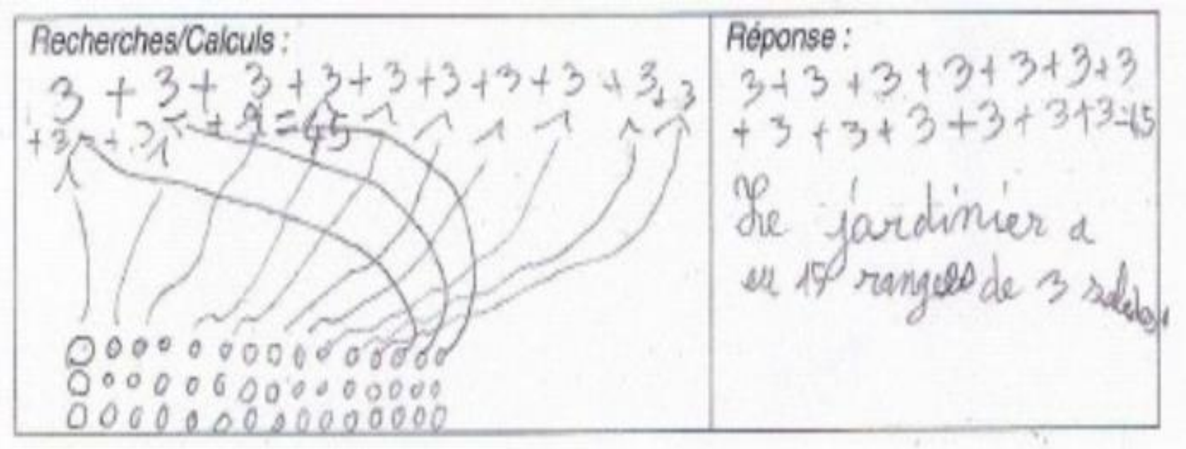
> **« J'achète 24 tickets d'entrée à un parc de loisirs. Le prix total est de 300 €.**
> **Quel est le prix d'un ticket ? »**

Les productions de 3 élèves sont proposées en annexe 6.

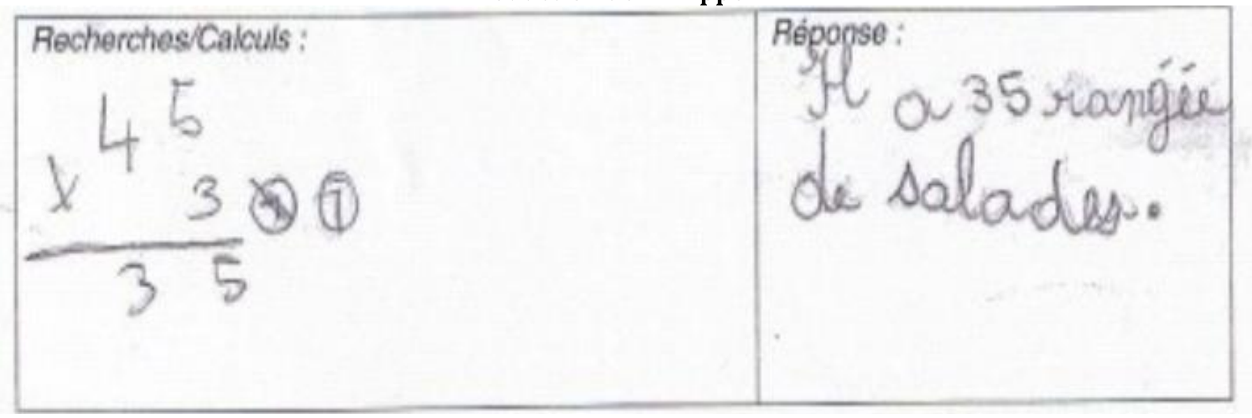
a) Ce problème relève-t-il de la division euclidienne ? Justifier la réponse.
b) Dans quel cycle peut-on proposer ce problème ? Dans quelles classes de ce cycle ?
c) Analyser les productions des trois élèves (Catherine, Pierre et François) fournies en annexe 3en relevant les erreurs commises.

ANNEXE 1

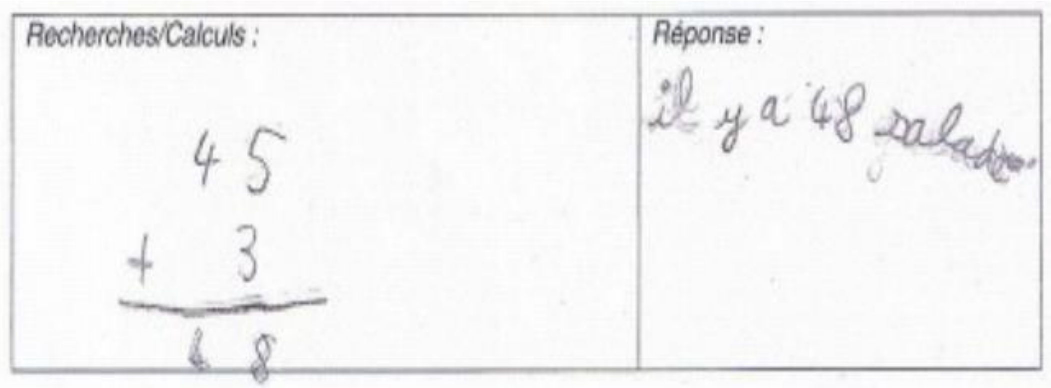
Production d'Édouard



Production de Philippe

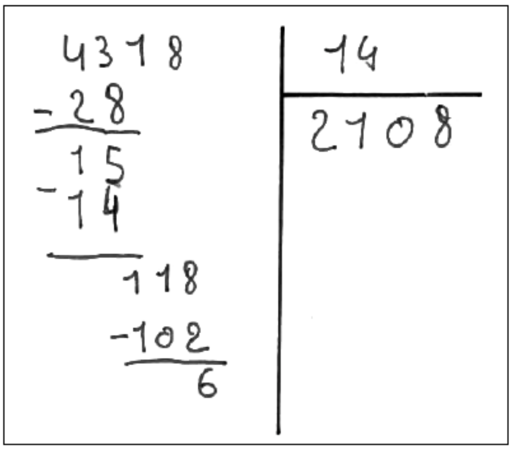


Production de Laurent

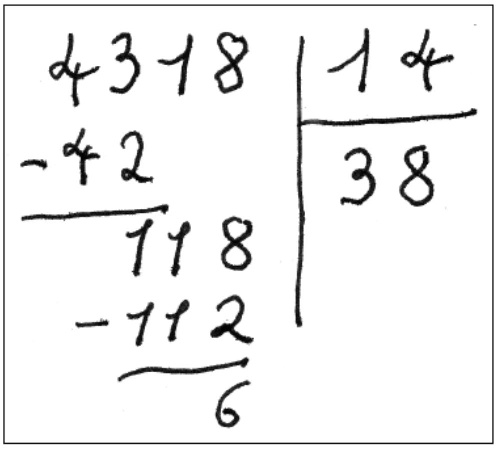


ANNEXE 2

Production de Francine



Production de Farid



ANNEXE 3

Production de Catherine

J'achète 24 tickets d'entrée à un parc de loisirs. Le prix total est de 300 €. Quel est le prix d'un ticket ?

Fais tes calculs dans ce cadre.

```
 300 | 24
- 24 |----
 060 | 12
- 48 |
  12 |
```

Réponse : Le prix d'un ticket est de 12 euros.

Production de Pierre

J'achète 24 tickets d'entrée à un parc de loisirs. Le prix total est de 300 €. Quel est le prix d'un ticket ?

Fais tes calculs dans ce cadre.

```
 300 | 24
- 24 |------
  60 | 12,41
- 48 |
 120 |
- 96 |
  24 |
- 24 |
   0 |
```

Réponse : Le billet coûtent 12,41€

Production de François

J'achète 24 tickets d'entrée à un parc de loisirs. Le prix total est de 300 €. Quel est le prix d'un ticket ?

Fais tes calculs dans ce cadre.

```
 300   | 24
- 24   |------
  6,0  | 12,50
- 48   |
  120  |
  120  |
  0000 |
 - 00  |
    0  |
```

Réponse : Le prix d'un ticket est de 12,50.

EXERCICES ÉLABORÉS
À PARTIR
DES CONCOURS BLANCS
ET EXAMENS
PROPOSÉS DANS LES ESPE

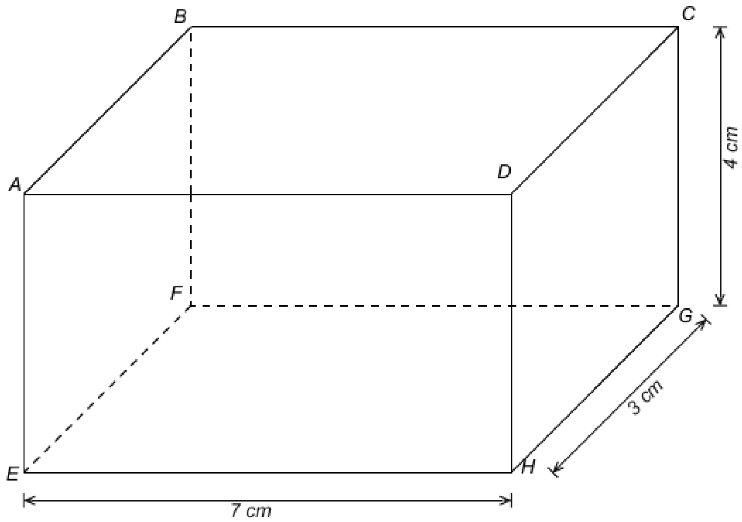
CORRIGÉS

EXERCICES
d'après divers sujets d'examens

EXERCICE 1

Géométrie dans l'espace d'après un sujet de Besançon

On considère un pavé droit ABCDEFGH de dimensions 3 cm, 4 cm et 7 cm, comme indiqué sur la figure (qui n'est pas en vraie grandeur).



PARTIE A

1) Calcul de AF

AEFB est une face rectangle du pavé droit ABCDEFG donc AFE est un triangle rectangle en E.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AFE rectangle en E, on a :

$$\mathrm{AF}^2 = \mathrm{AE}^2 + \mathrm{EF}^2 = (4\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2 = 25\text{ cm}^2 \quad \text{donc} \quad \mathbf{AF = 5\ cm}.$$

Remarque

On peut utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle ABF rectangle en B.

2) Calcul de *FD*

ABCDEFGH est un pavé droit donc [AD] est perpendiculaire à la face ABFE.
La droite (AD) est donc orthogonale à toutes les droites du plan (AFB), en particulier (AD).
Donc les droites (AD) et (AF) sont perpendiculaires.
Ainsi, le triangle AFD est rectangle en A.
$\mathrm{AF} = 5$ cm et $\mathrm{AD} = 7$ cm.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AFD rectangle en A, on a :

$$\mathrm{DF}^2 = \mathrm{AF}^2 + \mathrm{AD}^2 = (5\text{ cm})^2 + (7\text{ cm})^2 = 25\text{ cm}^2 + 49\text{ cm}^2 = 74\text{ cm}^2$$

donc $\mathbf{DF} = \sqrt{\mathbf{74}}$ **cm** soit **DF** $\approx$ **8,6 cm à 1 mm près.**

3) Contenance du pavé droit

Le pavé droit a pour volume $\mathrm{EH} \times \mathrm{HG} \times \mathrm{GC} = 7\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 4\text{ cm} = 84\text{ cm}^3$.
$84\text{ cm}^3 = 84\text{ mL} = 8{,}4\text{ cL}$.

Le pavé droit a une contenance de 8 cL au cL près.

PARTIE B

1) Calcul de DN

M appartient au segment [AD], N appartient au segment [DH] et les droites (MN) et (AH) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès dans les triangles DMN et DAH, on a donc :

$\frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{DA}} = \frac{\mathrm{DN}}{\mathrm{DH}}$

d'où $\mathrm{DN} = \frac{\mathrm{DH} \times \mathrm{DM}}{\mathrm{DA}}$.

Or DA = 7 cm et AM = 3 cm.
Donc DM = AD – AM = 7 cm – 3 cm = 4 cm.
Comme DH = 4 cm, on a :

$\mathbf{DN} = \frac{\mathbf{4\ cm \times 4\ cm}}{\mathbf{7\ cm}} = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{7}}\ \mathbf{cm}.$

2) Nature de DCN

Les arêtes [DC] et [DH] du pavé droit sont perpendiculaires et N appartient à l'arête [DH], donc l'angle formé par (DC) et (DN) est droit.

Ainsi DNC est un triangle rectangle en D.

3) a) Nom du solide MDNQPC

MDNQ est un rectangle par hypothèse.

P est un point du segment [BC], M est un point du segment [AD].
Or (AD) est parallèle à (BC) car ABCD étant une face rectangle du pavé droit ; donc (PC) est parallèle à (MD).
De plus P est le point de l'arête [BC] tel que BP = 3 cm, donc PC = 4 cm.
De même MD = 4 cm.
Donc [PC] et [MD] sont parallèles et de même longueur, donc PCDM est un parallélogramme.
Son angle en C est droit, comme angle d'une face rectangle d'un pavé droit, donc **PCDM est un rectangle**.

Dans le rectangle QNDM, QN = MD = 4 cm et (QN) est parallèle à (MD).
Or, dans le rectangle MDCP, MD = PC = 4 cm et (MD) est parallèle à (PC).
Donc, par transitivité, QN = PC = 4 cm et (QN) est parallèle à (PC).
Donc PCNQ est un parallélogramme.
Dans le pavé droit, (PC) est perpendiculaire à la face DCGH, donc à la droite (NC) contenue dans le plan (DCG). Donc l'angle en C du parallélogramme PCNQ est droit, donc **PCNQ est un rectangle**.

Les côtés des triangles CDN et MQP sont respectivement des côtés égaux des rectangles MDNQ, PCDM et PCNQ (CD = PM, DN = MQ et NC = QP) donc **CDN et MQP sont des triangles isométriques**.

Les trois faces MDNQ, MDCP et QNCP du solide MDNQPC sont donc des rectangles et les deux faces CDN et PMQ des triangles isométriques.

Le solide MDNQPC est donc un prisme droit à base triangulaire.

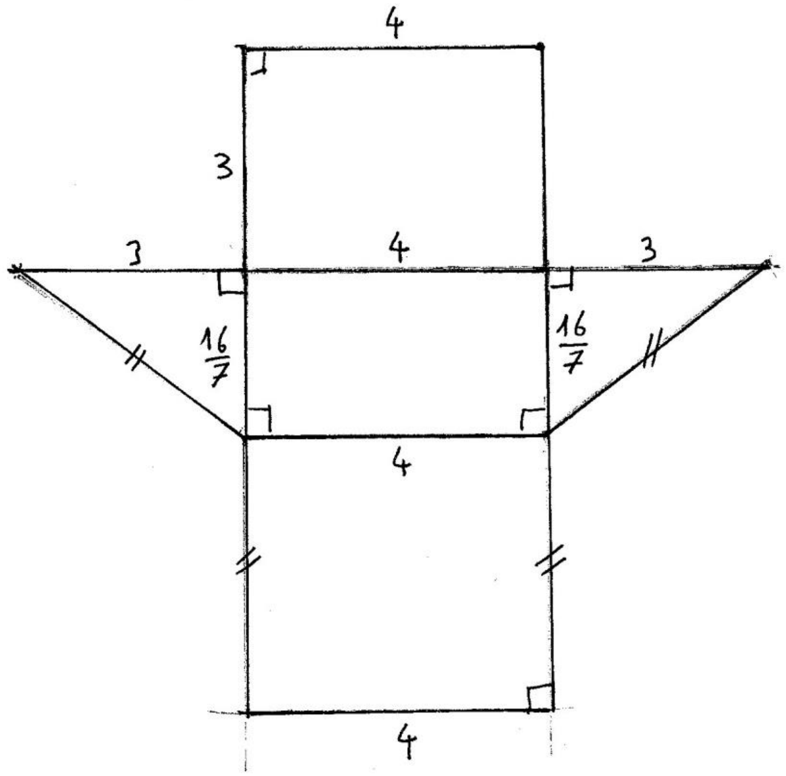
3) b) Contenance du solide MDNQPC

Volume de MDNQPC = Aire de DNC $\times$ DM $= \frac{1}{2}\mathrm{DN} \times \mathrm{DC} \times \mathrm{DM} = \frac{1}{2} \times \frac{16}{7}\ \mathrm{cm} \times 3\ \mathrm{cm} \times 4\ \mathrm{cm} = \frac{96}{7}\ \mathrm{cm}^3$.

Donc V $\approx 13{,}7\ \mathrm{cm}^3$ soit $\mathbf{1{,}37\ cL \approx 1\ cL}$ **au cL près**.

PARTIE C

3) Un patron du solide MDNQPC



2) Nombre d'arêtes et de face du solide MDNQPC

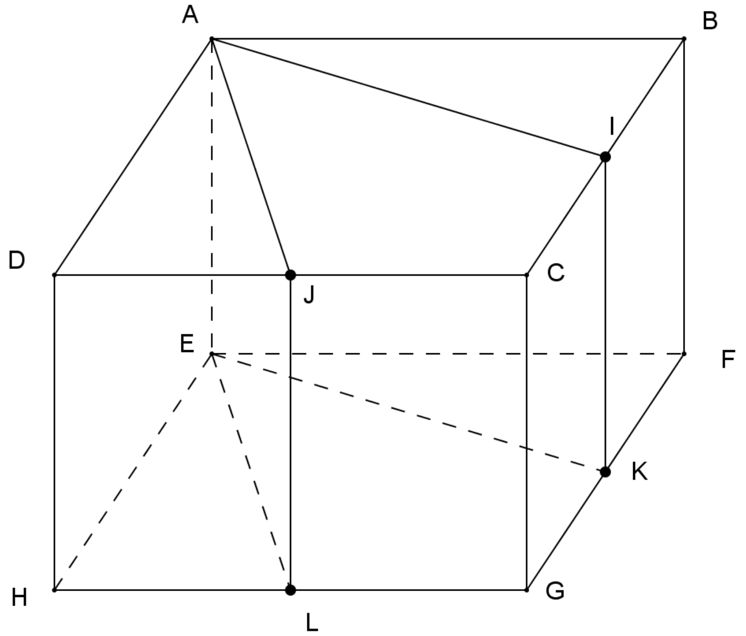
Le solide MDNQPC a **5 faces et 9 arêtes.**

(sujet page 163)

EXERCICE 2

Géométrie dans l'espace d'après un sujet de Toulouse

1) Le solide AICJEKGL



a) Nature de la face AJLE

Montrons dans un premier temps que c'est un parallélogramme

Le solide AICJEKGL étant un parallélépipède rectangle, toutes ses faces sont des rectangles.
[JL] est une médiane d'une de ses faces, le rectangle DCGH. [JL] est donc parallèle à [DH] et de même longueur.
La face ADHE est un rectangle, donc ses côtés[DH] et [AE] sont parallèles et de même longueur.
Ainsi, [AE] et [JL] sont tous deux parallèles et de même longueur que [DH].
On en déduit que AJLE a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, c'est donc un parallélogramme.

Montrons de plus qu'il a un angle droit

(AE) étant une arête du parallélépipède rectangle ABCDEFGH, (AE) est orthogonale au plan (ADB). Donc (AE) est orthogonale aux droites de ce plan. En particulier (AE) est perpendiculaire à (AJ).

Conclusion

AJLE est un parallélogramme ayant un angle droit donc **c'est un rectangle.**

b) Tracé en vraie grandeur du quadrilatère AJCI

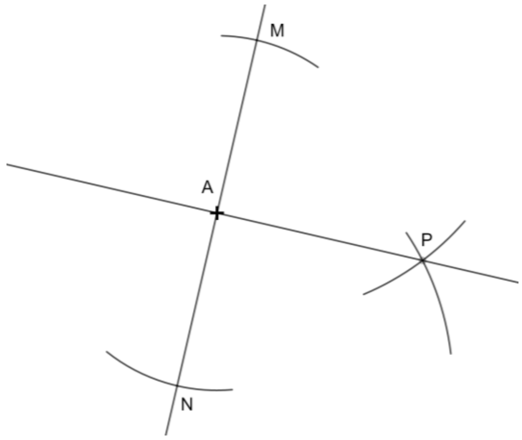
Remarque

Nous détaillons ici les étapes du tracé pour faciliter sa compréhension même si cela n'est pas demandé dans l'exercice. Les reproductions imprimées des tracés ne sont pas forcément à l'échelle.

1ère étape : construction d'un angle droit en A

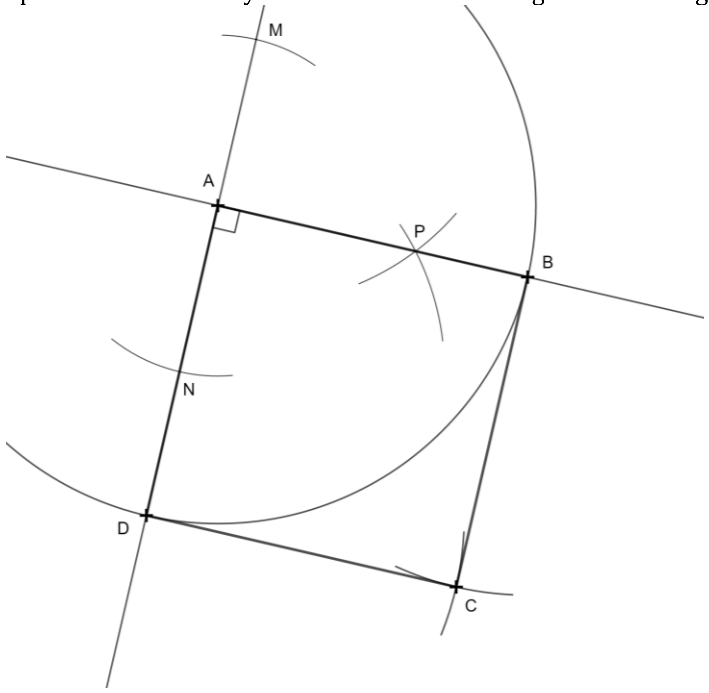
Traçons un point A, une droite passant par A et un cercle de centre A.
Il coupe la droite en deux points M et N.
Traçons les cercles de centre M et N et de même rayon (plus grand que MA).
Ils se coupent en un point P.
On a ainsi construit la médiatrice (AP) du segment [MN] et implicitement utilisé les propriétés suivantes :

- un point équidistant des extrémités d'un segment est sur sa médiatrice ;
- la médiatrice d'un segment passe par son milieu et lui est perpendiculaire.



2ème étape : construction du carré ABCD

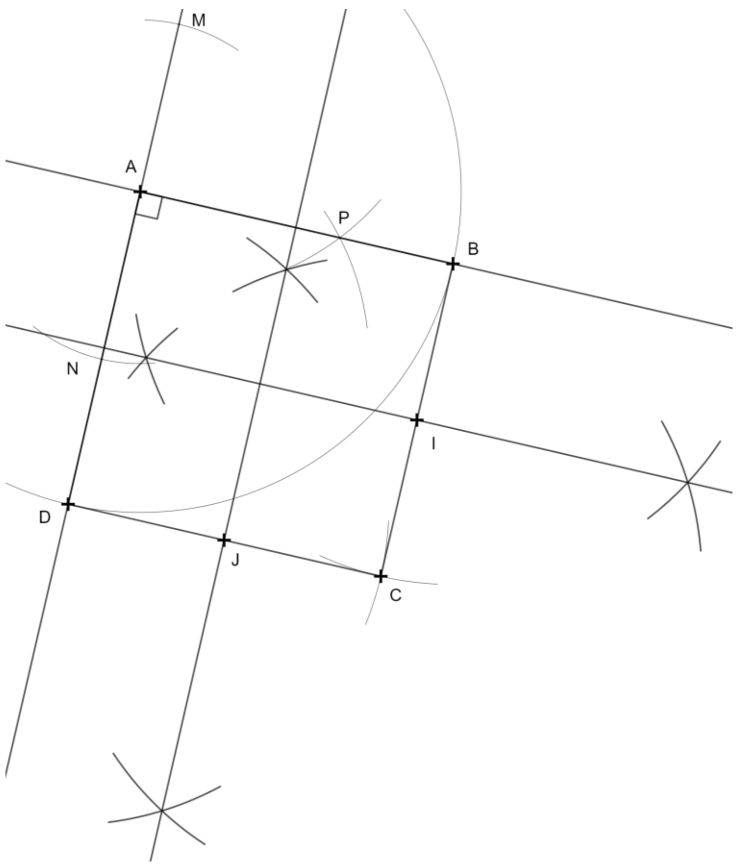
Traçons le cercle de centre A et de rayon 6 cm.
Il coupe (AP) et (AN) respectivement en B et D.
Traçons les cercles de centre B et D passant par A. Ils se recoupent en C.
On a ainsi construit un quadrilatère ABCD ayant 4 côtés de même longueur et un angle droit donc un carré.



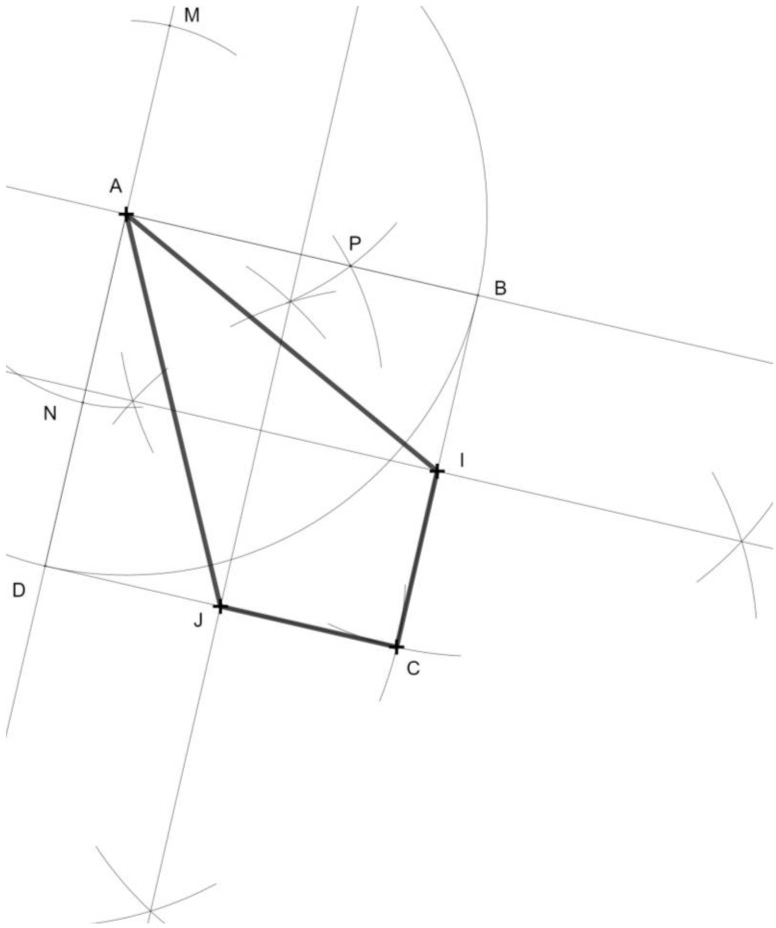
3ème étape : construction des points I et J

Nous allons tracer les médiatrices de [BC] et [DC] qui les couperont en leurs milieux respectifs I et J.
Traçons les cercles de centre B passant par C et de centre C passant par B. La droite joignant leurs points d'intersection coupe [BC] en son milieu I. On construit de même le point J.
On a implicitement utilisé les propriétés suivantes :

- un point équidistant des extrémités d'un segment est sur sa médiatrice ;
- la médiatrice d'un segment passe par son milieu.



4ème étape : tracé de AJCI

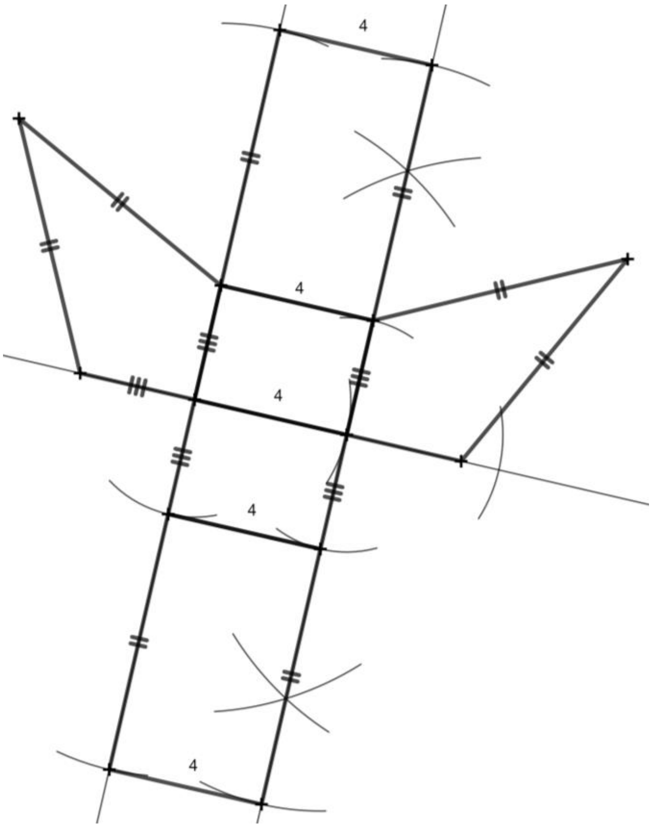


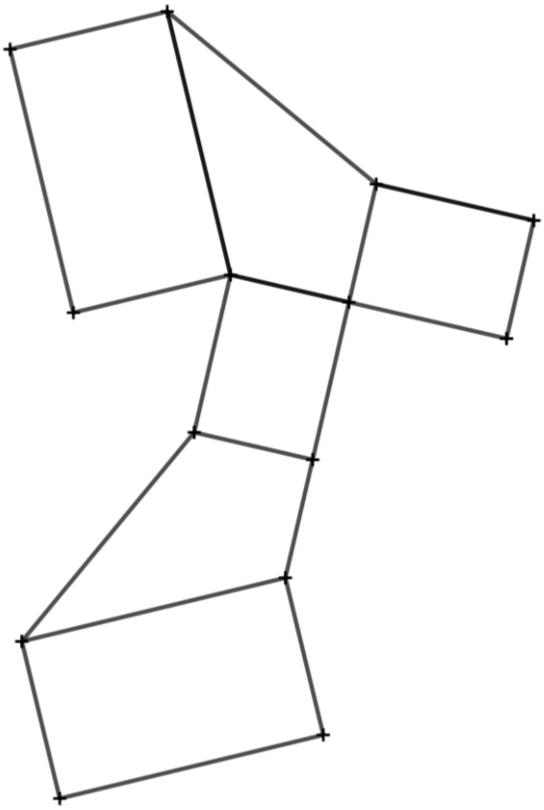
c) Tracé en vraie grandeur d'un patron du solide AICJEKGL

Le solide AICJEKGL est un pavé droit ayant pour base le quadrilatère AJCI.
Son patron est donc constitué de 6 faces :

- 2 quadrilatères identiques à AJCI ;
- 4 rectangles dont deux ont pour largeur 4cm et pour longueur le grand côté de AJCI, et deux ont pour longueur 4cm et pour largeur le petit côté de AJCI.

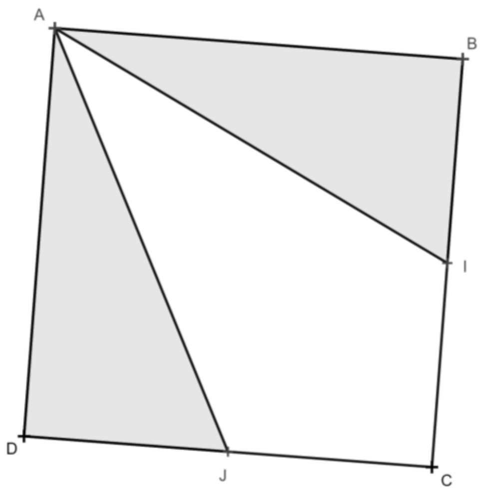
À partir du quadrilatère AJCL tracé à la question précédente on trace un patron à la règle et au compas, en reprenant les techniques utilisées en b).
Voici ci-dessous à gauche un patron possible avec le détail des constructions.
D'autres dispositions des faces sont possibles, en voici un exemple à droite. Ces dessins ne sont pas à l'échelle.





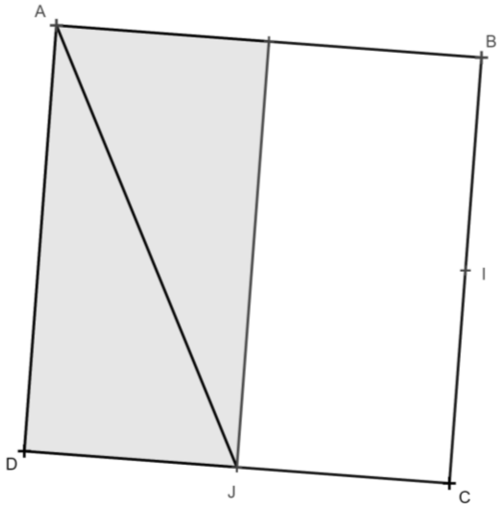
2) La peinture du solide

a) Calcul de l'aire de AJCI



Méthode 1

L'aire du quadrilatère AJCI s'obtient en ôtant les aires des deux triangles ABI et ADJ de l'aire du carré ABCD. En déplaçant un des deux triangles, on constate que cela correspond à la moitié de l'aire du carré.



$$\frac{6\text{ cm} \times 6\text{ cm}}{2} = 18\text{ cm}^2$$

L'aire de AJCI est égale à 18 cm².

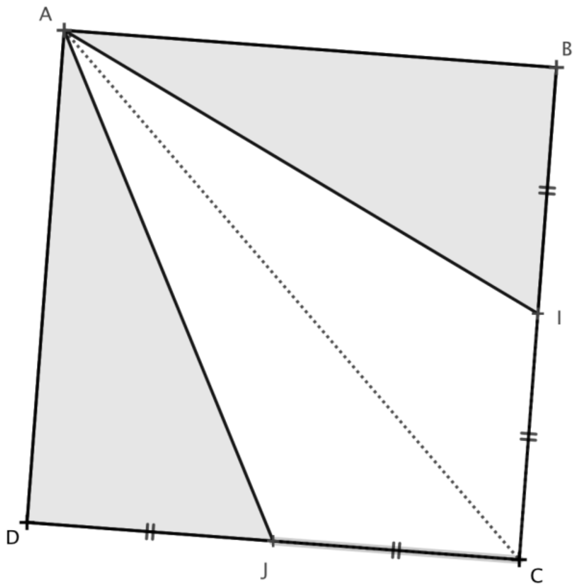
Méthode 2

L'aire blanche est égale à l'aire du grand carré à laquelle on soustrait l'aire des deux triangles gris.

$$\text{AB}^2 - \frac{\text{DJ} \times \text{AD}}{2} - \frac{\text{BI} \times \text{AB}}{2} = (6\text{ cm})^2 - \frac{3\text{ cm} \times 6\text{ cm}}{2} - \frac{3\text{ cm} \times 6\text{ cm}}{2} = 36\text{ cm}^2 - 9\text{ cm}^2 - 9\text{ cm}^2 = 18\text{ cm}^2.$$

L'aire de AJCI est égale à 18 cm².

Méthode 3



La diagonale [AC] partage le carré en deux triangles ADC et ABC dont l'aire est la moitié de celle du carré. Chacun de ces triangles est lui-même partagé en deux triangles de même aire par une médiane. Les quatre triangles ADJ, AJC, ACI, AIB ont tous la même aire, qui vaut le quart celle du carré ABCD.
AICJ est formée de deux de ces triangles, son aire est donc égale à la moitié de celle du carré ABCD.

L'aire de AJCI est égale à 18 cm².

b) Calcul de l'aire totale des faces du solide AICJEKGL (en cm², arrondie à l'unité près)

En reprenant le patron tracé en 1)c), l'aire totale du solide AICJEKGL est égale à deux fois l'aire de la base AJCI calculée en a) plus l'aire latérale de ce pavé droit ; c'est-à-dire l'aire d'un rectangle de largeur 4 cm et de longueur, le périmètre de la base AJCI.

Calcul de AJ

ABCD étant un carré, le triangle ADJ est rectangle en D donc d'après le théorème de Pythagore :
$AJ^2 = AD^2 + DJ^2$
$AJ^2 = (6\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2 = 45\text{ cm}^2$
$AJ = \sqrt{45}\text{ cm} = 3\sqrt{5}\text{ cm}$.

Calcul du périmètre de AJCI

$\text{Périmètre (AJCI)} = AJ + JC + CI + IA = 3\sqrt{5}\text{ cm} + 3\text{ cm} + 3\text{ cm} + 3\sqrt{5}\text{ cm} = (6 + 6\sqrt{5})\text{ cm}$.

Aire totale des faces du solide AICJEKGL

$$\begin{aligned}\text{Aire totale} &= 2 \times \text{Aire (AJCI)} + \text{Aire latérale}\\ &= 2 \times 18\text{ cm}^2 + 4\text{ cm} \times \left(6 + 6\sqrt{5}\right)\text{ cm} = (60 + 24\sqrt{5})\text{ cm}^2.\end{aligned}$$

L'aire totale des faces du solide AICJEKGL, arrondie au cm², près est de 114 cm².

c) Nombre de solides identiques au solide AICJEKGL que le menuisier peut peindre avec un pot de peinture

Aire qu'il peut peindre avec 5L

Le volume de peinture est proportionnel à l'aire de la surface à peindre.

Volume de peinture	8 L	5 L
Aire peinte en m²	100 m²	?

On peut par exemple utiliser un produit en croix pour déterminer la valeur manquante :

$$\frac{100\text{ m}^2 \times 5\text{L}}{8\text{ L}} = 62{,}5\text{ m}^2.$$

Nombre de solides

$62{,}5\text{ m}^2 = 625\,000\text{ cm}^2$.
$625\,000\text{ cm}^2 \div \left(60 + 24\sqrt{5}\right)\text{ cm}^2 \approx 5498{,}6$.

Le menuisier peut donc peindre 5498 solides avec un pot de peinture de 5 litres.

EXERCICE 3

Géométrie dans l'espace (cône) d'après un sujet de Paris

1) Calcul de la longueur de [SB]

Méthode 1 : avec le théorème de la droite des milieux dans le plan OBS

Le cône de révolution de sommet S, de base le disque de centre O et dont un diamètre est [AB], a pour hauteur [OS] ; (OB) est donc perpendiculaire à (OS).
De même, le cône de révolution de sommet S, de base le disque de centre O' et de diamètre est [A'B'], a pour hauteur [O'S] ; (O'B') est donc perpendiculaire à (O'S).
O, O' et S sont alignés, donc (OS) et (O'S) sont confondues. Les droites (OB) et (O'B') sont ainsi perpendiculaires à la même droite : elles sont donc parallèles.

Remarque

On peut également justifier le parallélisme de (OB) et (O'B') en disant que (OB) et (O'B') sont les intersections respectives du plan (SOB) avec le plan contenant la base du grand cône et avec le plan contenant la base du petit cône. Ces deux plans étant parallèles, les droites (OB) et (O'B') le sont aussi.

On considère alors le triangle OBS : O' est le milieu de [OS] et (O'B') est parallèle à (OB).
On utilise la propriété suivante : dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté, et qui est parallèle à un deuxième côté du triangle coupe le troisième côté en son milieu.
On en déduit que B' est le milieu de [BS], et par suite, que SB' = BB'.

On a donc **SB** = 2 x SB' = 2 x BB' = 2 x 240 cm = **480 cm.**

Méthode 2 : avec le théorème de Thalès dans le triangle SAB

On démontre d'abord, comme dans la méthode 1, que les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.
Dans le triangle SAB, A' est un point de [SA], B'est un point de [SB], et (AB) est parallèle à (A'B') ;
donc, d'après le théorème de Thalès, le triangle SAB est un agrandissement du triangle SA'B',
avec $\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{AB}{A'B'} = 2$ et donc $SB = 2\ SB' = 2 \times (SB - BB')$.
Ainsi SB = 2 SB – 2 BB', d'où l'on déduit que :

SB = 2 BB' = 2 x 240 cm = **480 cm.**

Méthode 3 : en considérant une réduction appliquée à un solide

Le cône de sommet S et de diamètre [A'B'] a été obtenu par la section du cône de sommet S et de diamètre [AB] par un plan <u>parallèle à la base de ce dernier</u> : on sait que l'on peut en déduire que le petit cône est une réduction du grand cône .

Le rapport de la réduction est égal au rapport des deux diamètres : A'B' = $\frac{1}{2}$ AB donc toutes les longueurs sont divisées par 2 lors de la réduction. Par conséquent SB' est égale à la moitié de SB.
Le complément de SB' dans SB, à savoir la longueur BB', est donc aussi égale à la moitié de SB ; autrement dit, SB est le double de BB' :

SB = $2 \times$ BB' = 2×240 cm = **480 cm.**

Méthode 4

On peut montrer que B' est le milieu de [SB] en justifiant que l'image du segment [SA] dans la symétrie par rapport à la droite (SO) est le segment [SB] et que l'image du point A' dans cette même symétrie est le point B': comme A' est le milieu de [SA], on peut en déduire, par propriété de la symétrie axiale, que B' est le milieu de [SB].
On conclut alors comme dans la méthode 1.

La longueur de [SB] est donc égale à 480 cm.

2) Calcul de la longueur de [SO]

On a déjà démontré que (AB) et (SO) sont perpendiculaires en O. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle SOB rectangle en O.
$SO^2 + OB^2 = SB^2$ soit $SO^2 = SB^2 - OB^2 = (480\text{ cm})^2 - (30\text{ cm})^2 = 229\,500\text{ cm}^2$.
SO est une longueur, donc $SO = \sqrt{229\,500}$ cm.

La longueur de [SO] est ainsi égale à 479 cm, au cm près.

3) Volume d'air qui se trouve dans la manche à air.

On note :

- V_C le volume du cône de révolution C de sommet S et de base le disque de centre O et de diamètre [AB] ;
- $V_{C'}$ le volume du cône de révolution C'de sommet S et de base le disque de centre O' et de diamètre [A'B'] ;
- V_T le volume du tronc de cône.

V_T s'obtient par différence du volume des deux cônes : $V_T = V_C - V_{C'}$.

Le cône C' est une réduction du cône C, par une réduction de coefficient $\frac{1}{2}$ (cf. méthode 3 vue dans la question 1).

Ainsi, $V_{C'} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times V_C = \left(\frac{1}{2^3}\right) \times V_C\ \frac{1}{8} \times V_C$, et par conséquent, $V_T = V_C - \frac{1}{8} \times V_C = \frac{7}{8} \times V_C$.
Calculons V_C :

$$V_C = \frac{\pi \times OA^2 \times SO}{3} = \frac{\pi \times (30\text{ cm})^2 \times \sqrt{229\,500}\text{ cm}}{3}$$
soit $V_C \approx 451\,505\text{ cm}^3$ au cm^3 près.
Ainsi,
$$V_T = \frac{7}{8} \times \frac{\pi \times (30\text{ cm})^2 \times \sqrt{229\,500}\text{ cm}}{3}$$
soit $V_T \approx 395\,067\text{ cm}^3$ au cm^3 près.
Le volume d'air qui se trouve dans la manche à air est, arrondi au cm^3 près, égal à 395 067 cm^3.

EXERCICE 4

Division euclidienne, probabilités et algorithmique d'après un sujet de Dijon

1) Probabilité d'entendre « Gagné ! »

Si l'on note q le quotient de a dans sa division euclidienne par 2, alors :

- le reste sera égal à 0 lorsque $a = 2q$; c'est-à-dire lorsque a est un multiple de 2, donc lorsque a est un nombre pair ;
- le reste sera égal à 1 lorsque $a = 2q + 1$; c'est-à-dire lorsque a est un nombre impair.

Lors de l'expérience aléatoire simulée par ce script, il y a 5 choix possibles et équiprobables pour le nombre a : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ou 5.
Pour entendre « Gagné ! » à l'issue de ce script, il faut choisir une valeur qui réalise la condition « le reste de a dans sa division euclidienne par 2 est égal à 1 » qui est équivalente à la condition « le nombre a est un nombre impair ».
Parmi les cinq nombres possibles, trois sont des nombres impairs : 1 ; 3 et 5.
Ainsi il y a 3 cas favorables sur 5 cas possibles.
La probabilité d'entendre « Gagné ! » à l'issue du script est alors :
$$\mathbf{\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6.}$$

2) a) Ce que « dira » le programme du script n°2 si a = 4 et b = 2

Si lors de l'exécution des lignes 2 et 3 du script n°2, les valeurs engendrées pour a et b sont respectivement 4 et 2, alors :

- en ligne 4, c prendra pour valeur $c = 4 + 2 = 6$;
- en ligne 5, comme 6 est pair son reste dans la division euclidienne par 2 est nul, la condition « c modulo 2 = 1 » ne sera pas remplie et le script ira directement à la ligne 7 ;
- puis en ligne 8 et **le programme « dira » finalement « Perdu ! ».**

2) b) Probabilité d'entendre « Gagné ! » à l'issue de l'exécution du script n°2

L'expérience aléatoire simulée par ce script consiste à :

- choisir au hasard un nombre entier compris entre 1 et 5 (cinq issues équiprobables possibles) ;
- choisir au hasard un nombre compris entre 1 et 6 indépendamment du premier choix (six issues équiprobables possibles).

Méthode 1 : à l'aide d'un tableau à double entrée

Cela revient à choisir au hasard un couple (a ; b) parmi les $5 \times 6 = 30$ issues possibles et toutes équiprobables. On peut utiliser un tableau à double entrée pour représenter l'ensemble des issues possibles en indiquant dans chaque case la valeur de c obtenue (somme de a et b). (voir tableau en page suivante)
Pour entendre « Gagné ! », il faut que la condition « c mod 2 = 1 » soit réalisée, c'. Les cas favorables sont donc ceux où c est un nombre impair. Ces cas favorables sont au nombre de 15.
Comme toutes les issues sont équiprobables :
la probabilité d'entendre « Gagné ! » à l'issue du script est de : $\mathbf{\frac{15}{30} = \frac{1}{2} = 0,5.}$

a \ b	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	**3**	4	**5**	6	**7**
2	**3**	4	**5**	6	**7**	8
3	4	**5**	6	**7**	8	**9**
4	**5**	6	**7**	8	**9**	10
5	6	**7**	8	**9**	10	**11**

Méthode 1-bis : à l'aide d'un tableau à double entrée

On indique dans chaque case du tableau à double entrée, le reste de c dans la division euclidienne par 2. Les cas favorables correspondent alors à la valeur 1 et les cas défavorables à la valeur 0 :

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	0	**1**	0	**1**	0	**1**
2	**1**	0	**1**	0	**1**	0
3	0	**1**	0	**1**	0	**1**
4	**1**	0	**1**	0	**1**	0
5	0	**1**	0	**1**	0	**1**

Méthode 2 : *à l'aide d'un arbre*

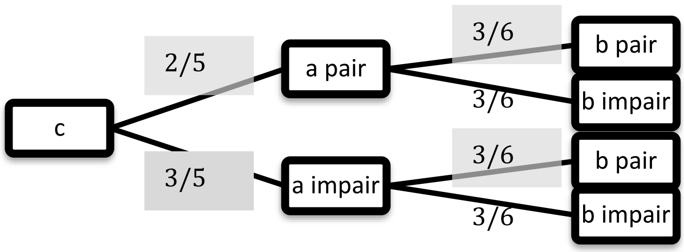
Cela revient à choisir au hasard un couple (a ;b) parmi les $5 \times 6 = 30$ issues possibles et toutes équiprobables. On peut utiliser un arbre pour représenter les différents cas possibles : on retrouve alors les 30 cas possibles vues en méthode 1.

Méthode 3 : à l'aide d'un arbre pondéré

Les cas favorables sont ceux où c, somme de a et de b, est un nombre impair.
Or :

- la somme de deux nombres pairs est un nombre pair : en effet deux nombres pairs peuvent s'écrire $2m$ et $2n$ (avec m et n deux entiers naturels non nuls) ; leur somme est alors égale à $2m + 2n = 2 \times (m + n)$; c'est donc un nombre pair ;
- la somme de deux nombres impairs est un nombre pair : en effet deux nombres impairs peuvent s'écrire $2m + 1$ et $2n + 1$ (avec m et n deux entiers naturels) ; leur somme est alors égale à $(2m + 1) + (2n + 1) = 2m + 2n + 2 = 2 \times (m + n + 1)$; c'est donc un nombre pair ;
- la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair : en effet un nombre pair peut s'écrire $2m$, un nombre impair $2n + 1$ (avec m et n deux entiers naturels, m non nul) ; leur somme est alors égale à $2m + (2n + 1) = 2m + 2n + 1 = 2 \times (m + n) + 1$; c'est donc un nombre impair.

On considère alors les cas où a, puis b, sont des nombres pairs ou impairs. Les valeurs de a sont comprises entre 1 et 5, il y a donc deux chances sur cinq pour que ce soit un nombre pair et trois sur cinq pour que ce soit un nombre impair. Les valeurs de b sont comprises entre 1 et 6, il y a donc trois chances sur six pour que ce soit un nombre pair et trois sur six pour que ce soit un nombre impair. On peut regrouper ces informations sur un arbre pondéré :



Les cas favorables sont donc ceux où a et b sont de parité différente (probabilités en « grisé » dans l'arbre ci-dessus).
La probabilité pour que c soit un nombre impair est alors égale à :

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{6} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{6} = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) \times \frac{3}{6} = \frac{3}{6} = 0{,}5.$$

La probabilité d'entendre « Gagné ! » à l'issue du script est donc de $\mathbf{0,5}$.

Méthode 4 : par un raisonnement arithmétique

Les cas favorables sont ceux où c, somme de a et de b, est un nombre impair.
Or la somme de deux nombres entiers est un nombre impair si, et seulement si, l'un des nombres est impair et l'autre est pair (la justification est donnée dans la méthode 3). Les cas favorables sont donc ceux où a et b sont de parité différente.
Or les deux tirages pour a et pour b sont deux évènements indépendants. De plus, b peut prendre trois valeurs paires (2, 4 ou 6) ou trois valeurs impaires (1, 3 ou 5).
Alors quel que soit le choix initial de a, qu'il soit pair ou impair, il y a toujours 3 chances sur 6 pour que b soit de parité différente, soit une probabilité de :

$$\mathbf{\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5.}$$

La probabilité d'entendre « Gagné ! » à l'issue du script est donc de $\mathbf{0,5}$.

3) a) Probabilité d'entendre « Gagné ! » à l'issue du script n°2 modifié

Pour entendre « Gagné ! », il faut que la condition « c mod 2 = 1 » soit réalisée. Les cas favorables sont donc ceux où c est un nombre impair.

Méthode 1 : à l'aide d'un tableau à double entrée

On peut, comme précédemment, utiliser un tableau à double entrée pour représenter l'ensemble des issues possibles. Ce qui change est uniquement la valeur de c indiquée dans chaque case, le produit (et non plus la somme) de a et de b.

a \ b	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	**1**	2	**3**	4	**5**	6
2	2	4	6	8	10	12
3	**3**	6	**9**	12	**15**	18
4	4	8	12	16	20	24
5	**5**	10	**15**	20	**25**	30

Les cas favorables sont ceux où c est un nombre impair. Ces cas favorables sont au nombre de 9.

La probabilité d'entendre « Gagné ! » à l'issue du script est donc de : $\mathbf{\frac{9}{30} = \frac{3}{10} = 0,3}$.

Remarque
On pourrait, comme pour la question précédente, représenter la situation par un arbre.

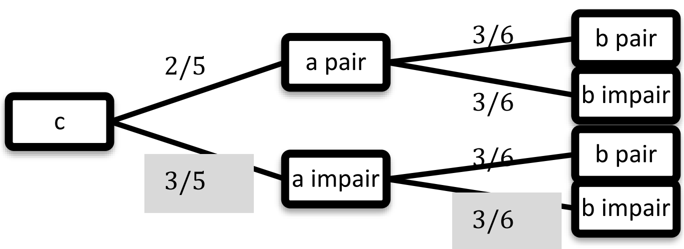
Méthode 1 bis : à l'aide d'un tableau à double entrée
On indique dans chaque case du tableau à double entrée, le reste de c dans la division euclidienne par 2, les cas favorables correspondants alors à la valeur 1 et les cas défavorables à la valeur 0.

a \ b	**1**	2	**3**	4	**5**	6
1	**1**	0	**1**	0	**1**	0
2	0	0	0	0	0	0
3	**1**	0	**1**	0	**1**	0
4	0	0	0	0	0	0
5	**1**	0	**1**	0	**1**	0

Remarque
Dans les tableaux des méthodes 1 et 1 bis, les cases favorables s'obtiennent en croisant les lignes où a est impair avec les colonnes où b est impair. Ce qui motive les méthodes suivantes.

Méthode 2 : à l'aide d'un arbre pondéré
Les cas favorables sont ceux où c, produit de a et de b, est un nombre impair.
Or un produit est un nombre impair uniquement lorsque tous ses facteurs sont des nombres impairs :
- le produit d'un nombre quelconque par un nombre pair est toujours un nombre pair : en effet un nombre pair peut s'écrire $2m$ (avec m entier naturel non nul) ; si n est un nombre entier non nul quelconque, leur produit est alors égal à $2m \times n = 2 \times (m \times n)$; c'est donc un nombre pair ;
- le produit de deux nombres impairs est un nombre impair : en effet deux nombres impairs peuvent s'écrire $2m + 1$ et $2n + 1$ (avec m et n deux entiers naturels) ; leur produit est alors égal à $(2m + 1) \times (2n + 1) = 2m \times (2n + 1) + 2n + 1 = 2 \times [m \times (2n + 1) + n] + 1$ c'est donc un nombre impair.

On considère alors les cas où a, puis b, sont des nombres pairs ou impairs. On regroupe ces informations sur un arbre pondéré :



Les cas favorables sont donc ceux où a et b sont tous les deux des nombres impairs (probabilités en « grisé » sur l'arbre ci-dessus).

La probabilité pour que c soit un nombre impair est alors égale à : $\frac{3}{5} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 0{,}3$.

La probabilité d'entendre « Gagné ! » à l'issue du script est donc de $\mathbf{0,3}$.

Méthode 3 : par un raisonnement arithmétique
Les cas favorables sont ceux où c, produit de a et de b, est un nombre impair.
Or un produit est un nombre impair uniquement lorsque tous ses facteurs sont des nombres impairs En effet, le produit de deux nombres pairs ou d'un nombre pair par un nombre impair est pair (voir méthode précédente).

L'évènement « c est un nombre impair » se décompose donc en : « a est un nombre impair » ET « b est un nombre impair ».

On sait que la probabilité de « a est un nombre impair » est de : $\frac{3}{5} = 0{,}6$ (cf question 1).

On a vu que la probabilité de « b est un nombre impair » est de : $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

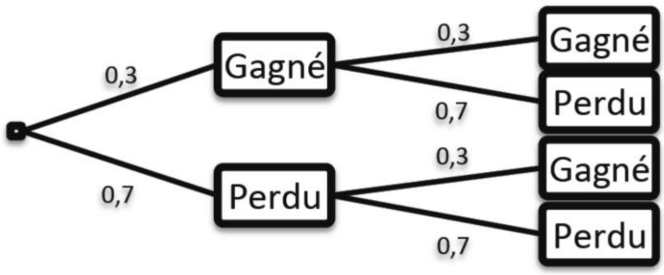
La probabilité que c soit un nombre impair et que l'on entende « Gagné ! » est donc la suivante :

$\boldsymbol{\frac{3}{5} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 0{,}3}$, **ou tout simplement** $\boldsymbol{0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3}$.

3) b) Probabilité d'entendre une seule fois « Gagné ! »

La question précédente permet d'affirmer qu'à chaque exécution du script la probabilité d'entendre « Gagné ! » est de 0, 3 et donc que celle de l'évènement complémentaire entendre « Perdu ! » est de 0,7.

On peut représenter la situation par un arbre pondéré :



La probabilité que l'on entende une seule fois « Gagné ! » est donc la suivante :

$\boldsymbol{0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21 + 0{,}21 = 0{,}42.}$

EXERCICE 5

Fractions et décimaux d'après un sujet de Marseille

1) Identification des nombres décimaux

Pour le nombre $\boldsymbol{\frac{17}{8}}$

Trois méthodes sont possibles :

Méthode 1

$\frac{17}{8} = \frac{17}{2^3} = \frac{17 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{2125}{10^3}$

$\frac{17}{8}$ peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec a et n entiers naturels, c'**est donc un nombre décimal.**

Méthode 2

$\frac{17}{8} = \frac{17}{2^3 \times 5^0}$

$\boldsymbol{\frac{17}{8}}$ est de la forme $\frac{a}{2^n \times 5^p}$ avec a, n et p entiers naturels, c'**est donc un nombre décimal**.

Méthode 3

$\frac{17}{8} = 2{,}125$

Dans la division de 17 par 8, on parvient à un reste nul après un certain nombre fini d'étapes.

$\boldsymbol{\frac{17}{8}}$ **est donc un nombre décimal.**

Pour le nombre $15,\overline{27}$

Deux méthodes sont possibles.

Méthode 1

$15,\overline{27}$ admet un développement décimal périodique infini dont la période est différente de 0 et de 9, c'**est donc un nombre rationnel non décimal**.

Méthode 2

On pose $x = 15,\overline{27}$.
Comme sa période 27 est de longueur 2, on multiplie x par 100 et on obtient : $100x = 1527,\overline{27}$.
On forme ensuite la différence : $100x - x = 1527,\overline{27} - 15,\overline{27}$ qui donne : $99x = 1512$.
Par conséquent $x = \dfrac{1512}{99} = \dfrac{1512 \div 9}{99 \div 9} = \dfrac{168}{11}$.
Comme $\dfrac{168}{11}$ est une fraction irréductible dont le dénominateur est le nombre premier 11 distinct de 2 et de 5, **$15,\overline{27}$ est donc un nombre rationnel non décimal.**

Pour $\dfrac{2794}{55}$

Deux méthodes sont possibles.

Méthode 1

$\dfrac{2794}{55} = \dfrac{2794 \div 11}{55 \div 11} = \dfrac{254}{5} = \dfrac{254 \times 2}{5 \times 2} = \dfrac{508}{10}$ est de la forme $\dfrac{a}{10^n}$ avec a et n entiers naturels.
$\dfrac{2794}{55}$ est donc un nombre décimal.

Méthode 2

$2794 : 55 = 50,8$.
Dans la division de 2794 par 55, on parvient à un reste nul après un certain nombre fini d'étapes.
$\dfrac{2794}{55}$ est donc un nombre décimal.

Pour le nombre $\dfrac{1096}{152}$

$\dfrac{1096}{152} = \dfrac{1096 : 8}{152 : 8} = \dfrac{137}{19}$.
$\dfrac{1096}{152}$ est une fraction irréductible dont le dénominateur est le nombre premier 19 distinct de 2 et de 5.
$\dfrac{1096}{152}$ est donc un nombre rationnel non décimal.

2) Comparaison des fractions $\frac{n+2}{n+3}$ et $\frac{n+3}{n+4}$ (n entier naturel)

Méthode 1

On forme la différence :

$$\frac{n+2}{n+3} - \frac{n+3}{n+4} = \frac{(n+2)(n+4) - (n+3)(n+3)}{(n+3)(n+4)} = \frac{n^2 + 4n + 2n + 8 - n^2 - 6n - 9}{(n+3)(n+4)} = \frac{-1}{(n+3)(n+4)}$$

$(n+3)(n+4)$ est positif, donc $\dfrac{-1}{(n+3)(n+4)}$ est négatif.

On en conclut que $\dfrac{n+2}{n+3} < \dfrac{n+3}{n+4}$.

Méthode 2

$\dfrac{n+2}{n+3} = \dfrac{n+3-1}{n+3} = 1 - \dfrac{1}{n+3}$ *et* $\dfrac{n+3}{n+4} = \dfrac{n+4-1}{n+4} = 1 - \dfrac{1}{n+4}$.

Or $n+3 < n+4$ donc $\dfrac{1}{n+3} > \dfrac{1}{n+4}$ et $1 - \dfrac{1}{n+3} < 1 - \dfrac{1}{n+4}$ d'où : $\dfrac{n+2}{n+3} < \dfrac{n+3}{n+4}$.

Méthode 3

Les fractions $\dfrac{n+2}{n+3}$ et $\dfrac{n+3}{n+4}$ sont des nombres strictement positifs.

Pour les comparer, on peut comparer leur quotient Q à 1 :

$$Q = \frac{\frac{n+2}{n+3}}{\frac{n+3}{n+4}} = \frac{n+2}{n+3} \times \frac{n+4}{n+3} = \frac{n^2+6n+8}{n^2+6n+9}$$

et comme $n^2 + 6n + 8 < n^2 + 6n + 9$, $Q < 1$ et $\dfrac{n+2}{n+3} < \dfrac{n+3}{n+4}$.

3) Nombre initial de gâteaux dans le paquet

Au goûter, Solène mange $\dfrac{1}{4}$ des gâteaux du paquet qu'elle vient d'ouvrir. Il reste donc $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)$ soit $\dfrac{3}{4}$ des gâteaux du paquet.

De retour du collège, sa sœur Élisa mange les $\dfrac{2}{3}$ des gâteaux restant dans le paquet entamé par Solène, elle mange donc $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4}$ des gâteaux du paquet, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}$ des gâteaux.

À toutes les deux, elles ont mangé les $\dfrac{3}{4}$ des gâteaux du paquet $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}\right)$. Il ne reste donc plus que $\dfrac{1}{4}$ des gâteaux dans le paquet, ce qui correspond à 5 gâteaux.

On en déduit que le paquet contenait initialement 4×5 , soit 20 gâteaux.

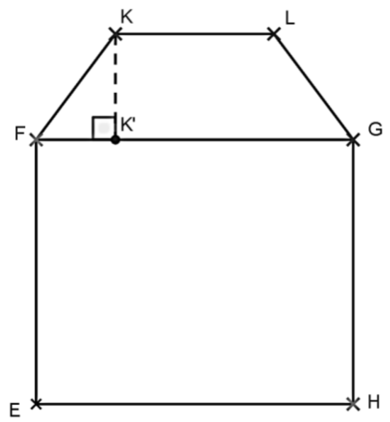
Remarque

On peut s'aider d'une schématisation du problème en s'appuyant sur un partage en quatre (« quart »). Le partage en trois (« tiers ») de ce qui reste après que Solène ait mangé est aisé.

PROBLEME DE GÉOMÉTRIE, GRANDEURS ET MESURES d'après un sujet de Dijon

A - Forme du toit EHGLKF

1) Vérification de trois affirmations



Puisque ABCJIDEHGLKF est un prisme droit, les deux bases EFKLGH et ADIJCB sont superposables. Par conséquent, EFGH et ABCD sont superposables aussi.

On en déduit : FG = EH = AB = 30 m.

Dans le plan (EFKLGH), on nomme K' le projeté orthogonal de K sur le segment [FG]. Le segment [KK'] correspond à la hauteur du trapèze FGLK, superposable au trapèze DCIJ. Donc : KK' = 10 m et $\widehat{\mathrm{GFK}} = \widehat{\mathrm{CDI}} = 53°$.

Affirmation 1

L'arrondi au dm près de la longueur FK est 12,5 m.

Dans le triangle FK'K rectangle en K', on a :

$\sin \widehat{\mathrm{K'FK}} = \dfrac{\mathrm{KK'}}{\mathrm{FK}}$; $\quad \sin 53° = \dfrac{10\ \mathrm{m}}{\mathrm{FK}} \quad$ donc $\mathrm{FK} = \dfrac{10}{\sin 53°}$ m.

FK ≈ 12,52 m que l'on peut arrondir, au dm près, à 12,5 m.

L'affirmation 1 est vérifiée.

Affirmation 2

La valeur approchée par excès au dm près de KL est de 15 m.

Dans le triangle FK'K rectangle en *K'*, on a :

$\tan \widehat{\mathrm{K'FK}} = \dfrac{\mathrm{KK'}}{\mathrm{FK'}} \quad$ soit $\tan 53° = \dfrac{10\ \mathrm{m}}{\mathrm{FK'}} \quad$ donc $\mathrm{FK'} = \dfrac{10}{\tan 53°}$ m.

FGLK est un trapèze isocèle donc :

$\mathrm{KL} = \mathrm{FG} - 2 \times \mathrm{FK'} = 30\ \mathrm{m} - 2 \times \dfrac{10}{\tan 53°}$ m .

Alors : KL ≈ 14,93 m arrondi au centième.

On en déduit que la valeur approchée par excès au dm près de KL est 15 m.

L'affirmation 2 est vérifiée.

Affirmation 3

L'aire du toit de l'immeuble est d'environ 975 m².

L'aire du toit de l'immeuble correspond à la somme de l'aire du rectangle EFGH et de l'aire du trapèze FKLG (principe d'additivité des aires) :

$$\mathrm{A}_{\mathrm{EHGLKF}} = \mathrm{A}_{\mathrm{EHGF}} + \mathrm{A}_{\mathrm{FGLK}} \approx 30\ \mathrm{m} \times 25\ \mathrm{m} + \frac{(30+15)\times 10}{2}\ \mathrm{m}^2 \approx 975\ \mathrm{m}^2.$$

L'affirmation 3 est vérifiée.

2) Représentation de la face EHGLKF à l'échelle $\frac{1}{500}$

On représente EHGLKF en traçant le rectangle EFGH dont on connaît les dimensions ainsi que le trapèze isocèle FKLG.

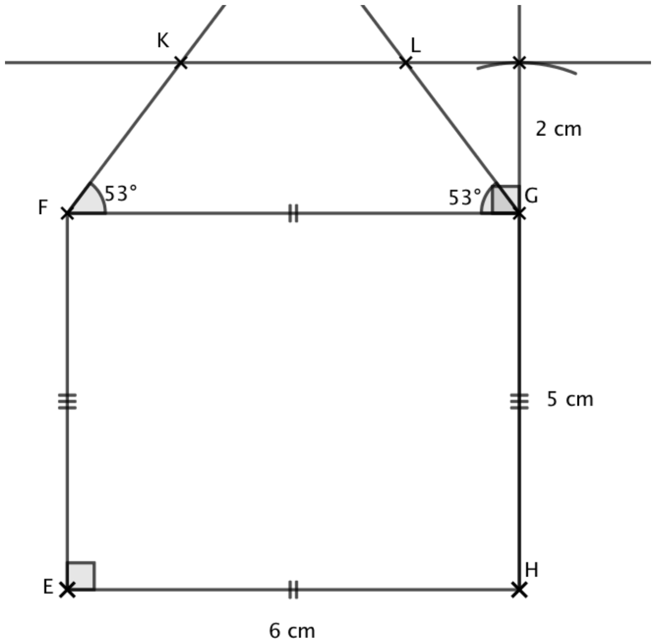
Méthode 1

On trace le trapèze isocèle FKLG à partir de la hauteur KK' et de l'angle $\widehat{K'FK}$.

À l'échelle $\frac{1}{500}$, 1 cm sur le plan représente 500 cm en réalité. De plus : 1 m $=$ 100 cm.

On peut regrouper les informations dans le tableau suivant :

	Référence échelle	EH	EF	KK'
Dimensions en réalité	5 m	30 m	25 m	10 m
	500 cm	3 000 cm	2 500 cm	1 000 cm
Dimensions sur le plan	1 cm	6 cm	5 cm	2 cm



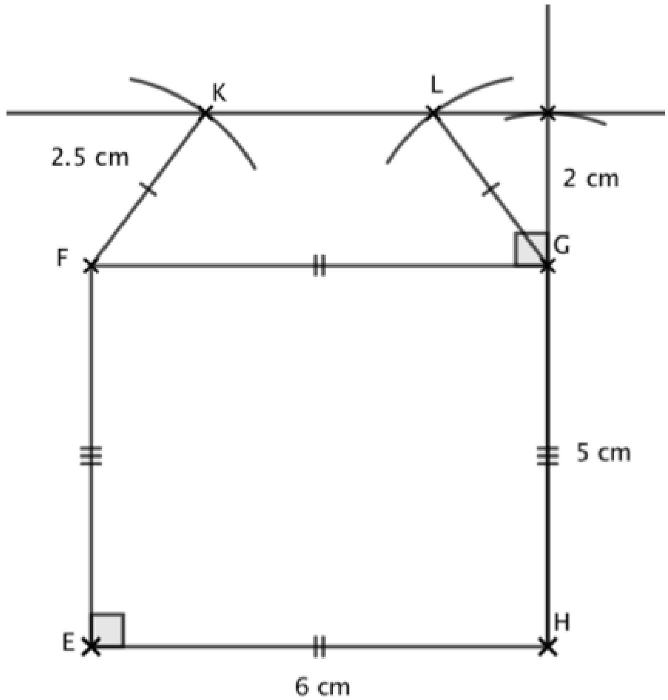
Méthode 2

On trace le trapèze isocèle FKLG à partir de la hauteur KK' et des longueurs FK et GL qui valent environ 12,5 m dans la réalité.

À l'échelle $\frac{1}{500}$, 1 cm sur le plan représente 500 cm en réalité, c'est-à-dire 5 m dans la réalité.

On peut regrouper les informations dans le tableau suivant :

	Référence échelle	*EH*	*EF*	*KK'*	*FK* et *GL*
Dimensions en réalité	5 m	30 m	25 m	10 m	12,5 m
	500 cm	3 000 cm	2 500 cm	1 000 cm	1 250 cm
Dimensions sur le plan	1 cm	6 cm	5 cm	2 cm	2,5 cm



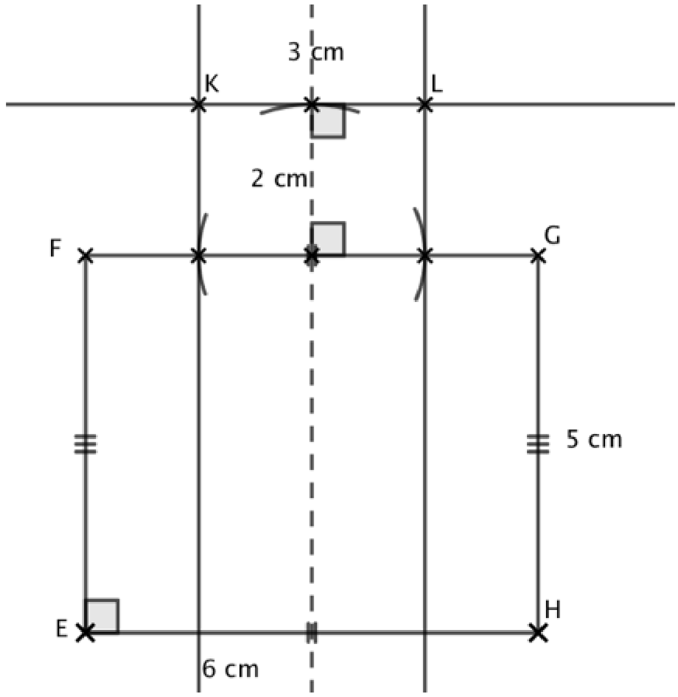
Méthode 3

On trace le trapèze isocèle FKLG à partir de la hauteur KK' et de la longueur KL, en prenant appui sur l'axe de symétrie de la figure (qui correspond à la médiatrice des segments [EH], [FG] et [KL]).

À l'échelle $\frac{1}{500}$, 1 cm sur le plan représente 500 cm en réalité, c'est-à-dire 5 m dans la réalité.

On peut regrouper les informations dans le tableau suivant :

	Référence échelle	*EH*	*EF*	*KK'*	*KL*
Dimensions en réalité	5 m	30 m	25 m	10 m	15 m
	500 cm	3 000 cm	2 500 cm	1 000 cm	1 500 cm
Dimensions sur le plan	1 cm	6 cm	5 cm	2 cm	3 cm



B - Production d'électricité par des panneaux solaires

L'énergie économisée par les panneaux solaires dépend de leur superficie. Les panneaux solaires couvrent la façade sud ainsi que le toit de l'immeuble donc leur aire est égale à la somme des aires de EFKLGH et de ABHE :
$\text{Aire(panneaux solaires)} = \text{Aire (EFKLGH)} + \text{Aire (ABHE)} \approx 30\text{ m} \times 54\text{ m} + 975\text{ m}^2 \approx 2595\text{ m}^2$.
On a utilisé dans le calcul ci-dessus la valeur approchée au m^2 près de l'aire du toit calculée dans la partie A.

Puisque ABCJIDEHGLKF est un prisme droit, ses faces latérales sont des rectangles.
Par conséquent ABHE est un rectangle.
Donc : $\text{Aire (ABHE)} = \text{AB} \times \text{AH} = 30\text{ m} \times 54\text{ m} = 1620\text{ m}^2$.

De plus d'après la question A.1 : $\text{Aire (EFKLGH)} \approx 975\text{ m}^2$.

On en déduit : $\text{Aire(panneaux solaires)} \approx 1620\text{ m}^2 + 975\text{ m}^2 \approx 2595\text{ m}^2$.

D'après la carte, l'immeuble est implanté dans la zone pour laquelle le gisement solaire est compris entre 1350 et 1490 $\text{kWh/m}^2\text{/an}$. Ainsi en un an, 1 m^2 de panneaux solaires permet d'économiser entre 1350 kWh et 1490 kWh.
Notons Ec l'énergie économisée par an, exprimée en kWh, on peut encadrer Ec de la manière suivante :

$$2595 \times 1350 \leq \text{Ec} \leq 2595 \times 1490$$
$$3\,503\,250 \leq \text{Ec} \leq 3\,866\,550$$

L'énergie économisée par an est **comprise entre 3 503 250 kWh (ou 3 503,250 MWh ou 3,503250 GWh) et 3 866 550 kWh (ou 3 866,550 MWh ou 3, 866550 GWh).**

C - Production d'électricité par des éoliennes

Remarque

Attention aux deux grandeurs mises en relation dans le graphique. En abscisse, il s'agit de la vitesse du vent (exprimée en m/s) et non d'une durée. Ce graphique indique, pour chaque vitesse de vent, la puissance fournie par une éolienne.

1) Vitesse du vent pour que l'éolienne fonctionne

D'après le graphique, l'éolienne fonctionne lorsque le vent dépasse une vitesse de **4m/s.** Pour toute valeur inférieure, la puissance est nulle.

2) Vitesse du vent pour que l'éolienne fournisse une puissance supérieure à 600 kW

On identifie d'abord les points de la courbe dont les ordonnées sont supérieures ou égales à 600, c'est-à-dire les points de la courbe situés au-dessus la droite d'équation y = 600. Les abscisses de ces points correspondent alors aux vitesses de vent recherchées : elles sont comprises entre 15 et 21.

Si la vitesse du vent est comprise entre 15m/s et 21m/s, alors la production sera supérieure à 600kW.

3) Vitesse à partir de laquelle on arrête volontairement l'éolienne

On arrête l'éolienne pour des vitesses supérieures à 25 m/s. Cela se traduit sur le graphique par le fait que pour ces vitesses, il n'y a plus de puissance fournie.

Conversion de la vitesse en km/h

Méthode 1

$25\text{ m} = 0{,}025\text{ km}$. $\quad 1\text{ s} = \dfrac{1}{3600\text{ h}}$.

Donc : $\dfrac{25\text{ m}}{\text{s}} = 0{,}025\dfrac{\text{km}}{\text{s}} = 0{,}025 \times 3600\dfrac{\text{km}}{\text{h}} = \mathbf{90\ \dfrac{km}{h}}$.

Méthode 2

Si le vent parcourt 25 m en 1 s, il parcourt 25×3600 m en 1 h car $1\text{ h} = 3600\text{ s}$.
Il parcourt donc 90 000 m en 1 h.

90 000 m = 90 km.
Donc le vent parcourt 90 km en 1 h.
Sa vitesse est donc de 90 km/h.

D - Isolation de la façade Nord

1) Coût de l'isolation

Puisque ABCJIDEHGLKF est un prisme droit, ses faces latérales sont des rectangles.
Par conséquent IJKL est un rectangle.
Donc : Aire (IJKL) = KL $\times$ JL.
D'après la question A.1 : KL $\approx$ 15 m.
JL correspond à la hauteur du prisme, donc : JL = AE = 54 m.
Donc : Aire (IJKL) $\approx$ 15 m $\times$ 54 m $\approx$ 810 m^2.

Puisque les baies vitrées représentent 22% de l'aire de la façade Nord, l'aire de la surface à recouvrir correspond à 78% de l'aire du rectangle IJKL ($1 - 22/100 = 78/100$).
Or : 810 m^2 $\times$ 0,78 = 631,8 m^2 .

L'aire de la surface à isoler est donc d'environ 631,8 m^2.
L'isolant végétal a un coût de 15 € par m^2, et : 631,8 $\times$ 15 = 9 477.

Le coût de l'isolation de la face nord est donc d'environ 9 477 €.

2) a) Puissance nécessaire au chauffage du séjour

L'appartement a une hauteur sous plafond de 2,50 m et l'aire du séjour est de 24 m^2.
Le volume du séjour est donc : V = 24 m^2 $\times$ 2,50 m = 60 m^3.

La différence entre la température extérieure minimale et la température souhaitée est donnée par :
$DT = 21°C - (-10)°C = 31°C$.
Le coefficient d'isolation est $t = 1{,}5$.

Ainsi, la puissance nécessaire exprimée en Watts est : $\boldsymbol{P = 1{,}5 \times 60 \times 31 = 2790.}$

2) b) Valeur du coefficient *t* avant l'isolation

Le coefficient t est égal à 1,5 après réduction de 20% de sa valeur.
La valeur initiale du coefficient t est notée $t_{initial}$.

La réduction correspond à l'application à $t_{initial}$ du coefficient multiplicateur : $1 - \frac{20}{100} = 0{,}8$.

On peut alors écrire :
$t_{initial} \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 1{,}5$
Soit : $t_{initial} \times 0{,}8 = 1{,}5$.
On en déduit :
$t_{initial} = \frac{1{,}5}{0{,}8} = 1{,}875$.

La valeur de ***t* avant isolation était de 1,875.**

GÉOMÉTRIE PLANE ET DANS L'ESPACE d'après un sujet de Paris

A - Vrai/Faux

L'affirmation 1 est fausse.

Rappel affirmation 1

Un cube, une pyramide à base pentagonale et un prisme droit à base triangulaire totalisent 34 sommets.

Un cube possède **8** sommets.

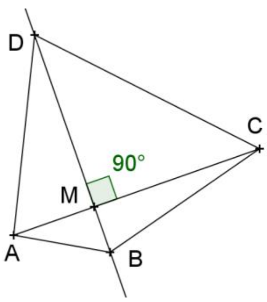
Une pyramide à base pentagonale possède **6** sommets : 5 sommets pour le pentagone et un sommet hors du plan de base.
Un prisme droit à base triangulaire possède **6** sommets : 3 sommets sur chacune des bases triangulaires.
Au total, ces trois solides totalisent donc 20 sommets (et non 34).

L'affirmation 2 est fausse.

Rappel affirmation 2

Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

Pour le justifier, il suffit de considérer un contre-exemple comme celui représenté ci-contre : ABCD est un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires mais il n'est pas un losange.



Remarque

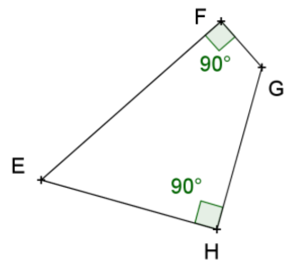
Pour qu'un quadrilatère soit un losange, il ne suffit pas que ses diagonales soient perpendiculaires, il faut ajouter une contrainte sur les diagonales : elles se coupent en leur milieu. Ou une contrainte sur d'autres éléments : deux côtés consécutifs de mêmes longueurs.

L'affirmation 3 est fausse.

Rappel affirmation 3

Un quadrilatère qui a deux angles droits est un trapèze rectangle.

Pour le justifier, il suffit de considérer un contre-exemple comme celui représenté ci-contre : EFGH est un quadrilatère qui a exactement deux angles droits, mais ce n'est pas un trapèze rectangle.



Remarque

Pour qu'un quadrilatère qui a deux angles droits soit un trapèze rectangle,
il faut ajouter une contrainte sur leur position : les angles droits sont consécutifs.

L'affirmation 4 est vraie.

Rappel affirmation 4

On peut construire un seul triangle ABC isocèle avec AB $= 3$ cm et BC $= 7$ cm.

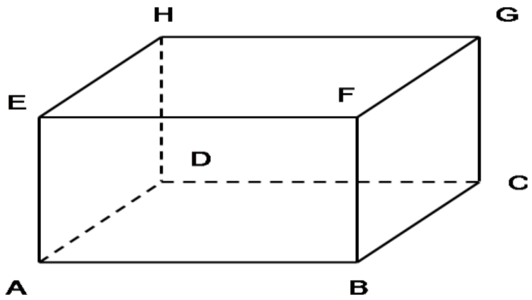
Pour pouvoir construire un triangle, les longueurs des côtés doivent vérifier l'inégalité triangulaire (la somme des longueurs de deux côtés d'un triangle est supérieure strictement à la longueur du troisième côté).

Ici, le triangle peut être isocèle en C avec CB $=$ CA $= 7$ cm et AB $= 3$ cm et 3 cm $+ 7$ cm > 7 cm (et 7 cm $+ 7$ cm > 3 cm).

Le triangle ABC ne peut pas être isocèle en A avec AB $=$ AC $= 3$ cm et BC $= 7$ cm, car l'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée (3 cm $+ 3$ cm < 7 cm). On ne peut donc pas construire ce triangle.

Le seul triangle ABC possible est donc le triangle isocèle en C.

Pour les **affirmations 5 à 7**, on considère le prisme droit à base carrée représenté ci-contre.



L'affirmation 5 est vraie.

Rappel affirmation 5
Dans la réalité, EFGH est un rectangle.

Un prisme droit à base carrée est un pavé droit, donc toutes ses faces sont des rectangles.

L'affirmation 6 est vraie.

Rappel affirmation 6
Dans la réalité, les longueurs EH et FB sont égales.

ABCDEFGH est un prisme droit à base carrée, donc au moins deux de ses faces sont des carrés. Sur cette représentation, seules les faces EFBA et HGCD sont des rectangles non carrés conformes à la réalité. On en déduit que ce prisme a exactement deux faces carrées et quatre faces rectangulaires non carrées superposables donc les deux faces carrées sont représentées par les parallélogrammes EHDA et FGCB.

Les segments [EH] et [FB] sont des côtés de ces carrés et ils ont donc la même longueur.

L'affirmation 7 est fausse.

Rappel affirmation 7
Dans la réalité, les points E, D et B sont alignés.

Si le point D était aligné avec les points E et B, il appartiendrait à la droite (EB), qui est incluse dans la face EABF du pavé droit (diagonale du rectangle EABF). Or D appartient à la face HDGC, qui est strictement parallèle à la face EABF, et n'a donc pas de point commun avec elle, D n'appartient pas à la droite (EB).

Contrairement à ce que pourrait laisser croire la représentation du solide, les points D, E et B ne sont pas alignés.

Remarque
On pourrait, par un raisonnement analogue, montrer que B n'appartient pas à la droite (ED).

B - Étude de figures planes

1) Nature du quadrilatère ABCD

Dans le quadrilatère ABCD, les codages permettent d'affirmer que les droites (AD) et (BC) sont toutes les deux perpendiculaires à (AB) ; donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
De plus, AD $=$ BC.
Le quadrilatère non-croisé ABCD a donc deux côtés opposés parallèles et de même longueur [AD] et [BC], on en déduit que c'est un parallélogramme.

Comme le quadrilatère ABCD a aussi deux angles droits, on en déduit que c'est un rectangle.

Remarque
Un seul angle droit suffit pour en déduire que ABCD est un rectangle.

Le rectangle ABCD a trois côtés consécutifs de même longueur, on en déduit que c'est un carré.

Remarque
Deux côtés consécutifs de même longueur suffisent pour affirmer que le rectangle ABCD est un carré.

Conclusion : **le quadrilatère ABCD est un carré**.

2) Construction en vraie grandeur de la figure à partir du segment [AB] de l'annexe 1, en utilisant uniquement la règle non graduée et le compas

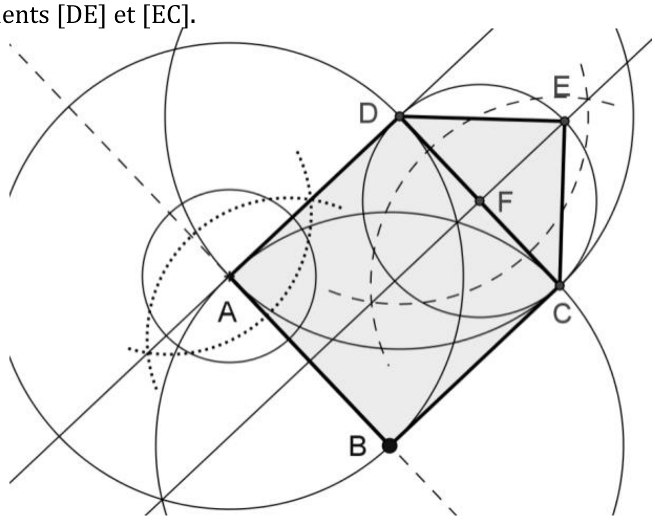
Un premier programme de construction respectant ces contraintes

Construction du carré

- tracer la perpendiculaire en A à [AB] (tracé d'une médiatrice d'un segment de milieu A porté par la droite (AB)),
- construire le point D sur cette perpendiculaire tel que AD = AB (arc de cercle de centre A et de rayon AB),
- construire un parallélogramme ABCD (C est le point d'intersection des cercles de centres respectifs D et B et de rayon AB distinct de A).

Construction de la médiatrice de [DC]

- placer le point F, milieu de [DC] (intersection du segment [DC] et de sa médiatrice),
- construire le cercle de diamètre [DC] pour obtenir le point E à l'extérieur du carré, comme intersection de ce cercle avec la médiatrice de [DC],
- tracer les segments [DE] et [EC].



Un autre programme de construction respectant ces contraintes

Construction de la médiatrice de [AB]

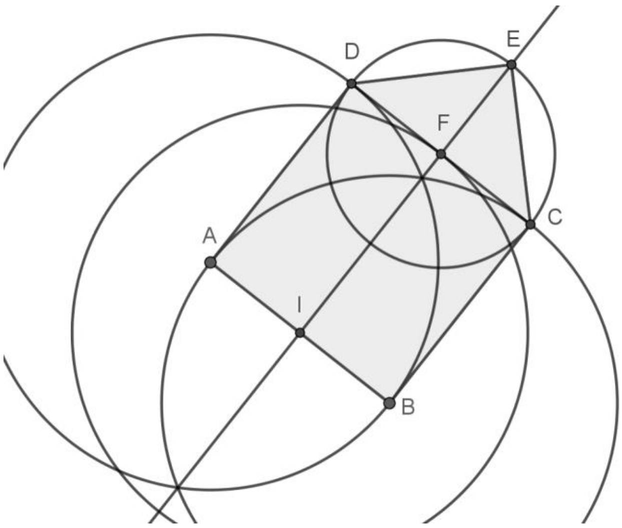
- placer le point I milieu de [AB] (intersection du segment et de sa médiatrice),
- sur la médiatrice placer F tel que IF = AB (report au compas de la longueur AB à partir de I).

Construction des parallélogrammes AIFD et BIFC

- placer le point D, intersection des cercles de centres respectifs A et F et de rayons respectifs AB et AI),
- placer le point C, intersection des cercles de centres respectifs B et F et de rayons respectifs AB et AI),

Construction du triangle CDE isocèle en E

- construire le cercle de diamètre [DC] pour obtenir le point E à l'extérieur du carré, comme intersection de ce cercle avec la médiatrice de [DC],
- tracer les segments [DE] et [EC].



3) Situation de communication (de type émetteur–récepteur) donnée à des élèves de cycle 3

a) Rupture

La rupture entre la géométrie étudiée en début de cycle 3 (CM1) et celle étudiée en fin de cycle 3 (sixième) est marquée par le passage d'une géométrie où les propriétés des figures sont vérifiées par des instruments, à une géométrie où les propriétés sont prouvées par un raisonnement. Par exemple, en présence d'un triangle inscrit dans un cercle dont un côté est le diamètre du cercle, les élèves, en début de cycle 3, vérifieront en utilisant l'équerre que ce triangle est rectangle, alors qu'en fin de cycle 3, ils pourront être amenés à utiliser le symétrique de ce triangle par rapport au centre du cercle et, en raisonnant à partir des diagonales (diamètres du cercle, donc de même longueur et se coupant en leur milieu, conclure que le quadrilatère obtenu est un rectangle). Le théorème correspondant n'est enseigné qu'au cycle 4.

b) Aide

Le fait de devoir prendre en compte les informations sur la figure codée devrait aider l'élève émetteur à passer d'une géométrie à l'autre. En effet, traduire le codage et désigner les points par des lettres incite à se détacher des instruments (on n'a pas besoin des instruments pour reconnaître les égalités de longueurs et les angles droits). De plus, la situation de communication incite l'émetteur à analyser la figure en sous-figures et à trouver une chronologie de construction.

Remarque

On aurait pu rendre encore plus explicite le changement de « contrat » en proposant une figure faite à main levée avec la présence du codage.

4) Analyse de quatre productions d'élèves émetteurs

a) Erreurs commises par William

De par sa position non prototypique (figure « posée sur la pointe »), ABCD est vu comme un losange par William, et non comme un carré : les angles droits sont ignorés.
Le triangle DFE est vu comme un triangle « équilatéral rectangle », soit deux propriétés incompatibles ; DFE est en fait un triangle rectangle isocèle. Il en est de même du triangle CEF.

Explications possibles

Pour le losange : le carré est dans une position prototypique qui correspond au losange.

Pour les triangles :
- il peut s'agir d'une confusion des termes « isocèle » et « équilatéral »,
- ou d'une volonté de prise en compte de l'angle droit et des égalités de longueurs FD = FC = FE.

b) Production de Gabriel

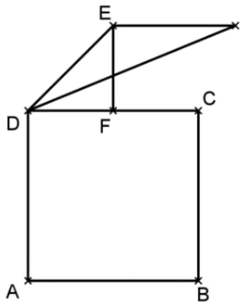
La production de Gabriel, bien que correcte, **ne permet pas nécessairement d'obtenir la figure attendue** car il existe deux triangles rectangles isocèles ayant comme hypoténuse [DC] : un à l'extérieur du carré, l'autre à l'intérieur.

c) Production de Neila

Neila utilise un point E qui est quelconque. Dans une classe, pour montrer que le programme de construction de Neila ne convient pas, il suffirait de **demander à un autre élève d'exécuter son programme** et il est probable que l'instruction "Trace le segment [DE]"conduirait l'élève récepteur à demander des précisions.

d) Construction d'une figure qui correspond à l'énoncé produit par Raphaëlle mais qui ne répond pas au problème posé

La figure suivante est construite à partir de l'énoncé produit par Raphaëlle mais ne répond pas au problème posé : la figure obtenue n'est pas semblable à la figure modèle. L'information donnée par Raphaëlle « un triangle isocèle en E » n'est pas assez précise : elle ne nomme pas le triangle isocèle en E dont elle parle.

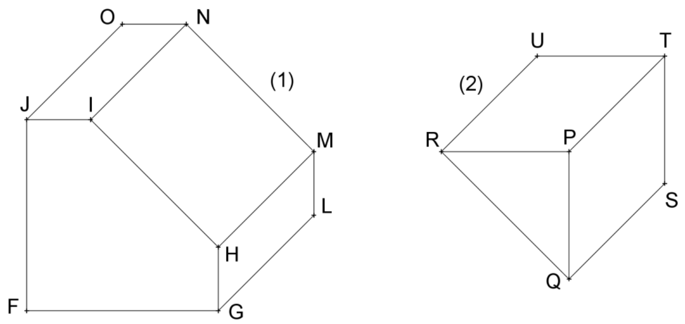


e) Une compétence qui n'est maîtrisée ni par Raphaëlle ni par Neila et une compétence qui est maîtrisée par l'ensemble des quatre élèves

Écrire un programme de construction pour un élève qui n'a pas vu la figure nécessite de se mettre à la place de l'autre qui aura à exécuter dans l'ordre les différentes instructions.
Cette compétence de **se décentrer** (c'est-à-dire vérifier que son programme de construction ne comporte pas d'implicite) ne semble pas être une compétence maitrisée par Raphaëlle, ni par Neila.

Une **compétence nécessaire pour réussir cet exercice et maitrisée par ces quatre élèves** pourrait être : reconnaître le milieu d'un segment. On peut remarquer également que tous utilisent un vocabulaire géométrique même s'il n'est pas toujours suffisamment précis ou exact. Tous les élèves utilisent aussi des lettres pour désigner les objets.

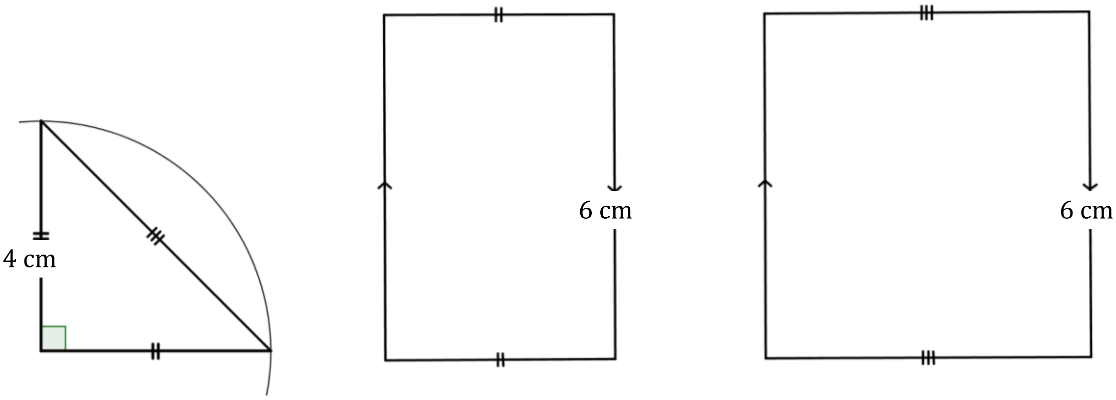
C - Étude de solides



1) Construction en vraie grandeur des pièces (a), (d) et (e), gabarits des faces du prisme droit

L'arête du cube a pour longueur 6 cm et JI = HG = 2 cm, tous les instruments sont autorisés, les traits de construction doivent rester apparents. On ne sait pas quelle face désignent les lettres (a), (d) et (e).
Les cinq faces du prisme sont : deux rectangles superposables, un autre rectangle, deux triangles rectangles isocèles.

PQ = PR = TU = TS = 6 cm – 2 cm = 4 cm et RU = PT = QS = 6 cm.
Les figures ci-dessous ne sont pas aux bonnes dimensions.



2) Le solide (1)

a) Nombre de faces, d'arêtes et de sommets du solide (1)

Le solide (1) (cube tronqué) a **7 faces** (5 faces latérales rectangulaires et 2 bases pentagonales). Les 6 faces « issues » des faces du cube et une septième face (rectangle) crée par la section.

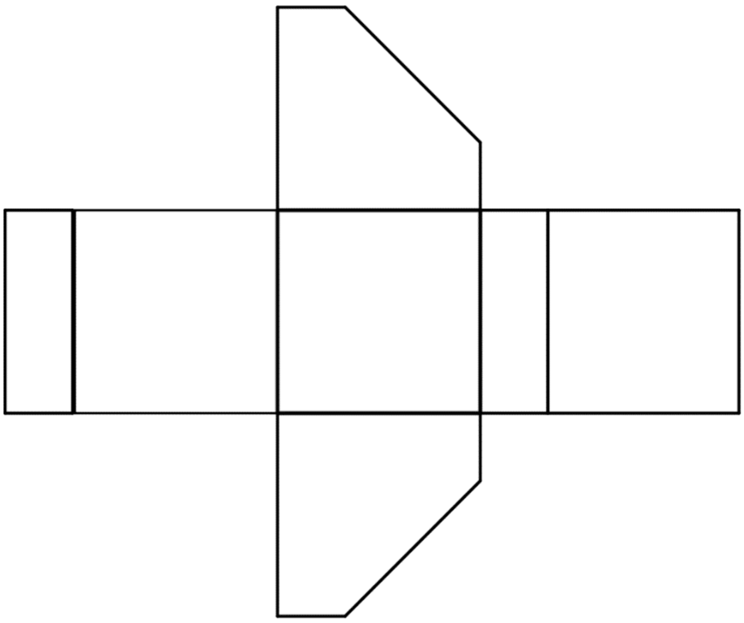
On peut donc affirmer que c'est un **prisme droit à base pentagonale**.

Il a donc 5 arêtes par base et 5 arêtes reliant les sommets de la base deux à deux, c'est-à-dire
5 arêtes × 3 = **15 arêtes**.

Il a 5 sommets par base donc 5 sommets × 2 = **10 sommets**.

b) Construction en vraie grandeur d'un patron de ce solide

Tous les instruments sont autorisés. On assemble deux pentagones et cinq rectangles qui « se ferment » pour reconstituer le prisme droit à base pentagonale.



Différents patrons sont aussi possibles et corrects.

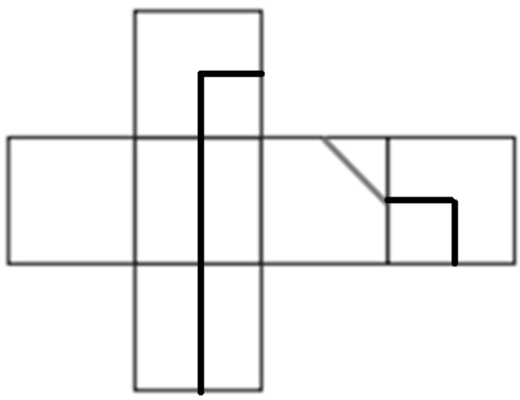
c) Commande d'un nombre de morceaux de Scotch® pour construire le solide à partir du patron construit en c)

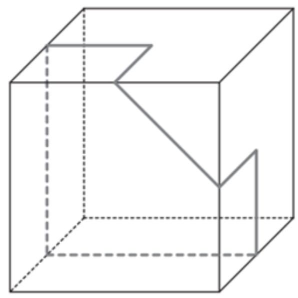
Les morceaux de Scotch® solidarisent deux côtés de deux polygones formant les faces du cube tronqué pour former une arête du cube tronqué. Le nombre de morceaux de Scotch correspond donc au nombre de languettes qu'il faudrait mettre sur le patron, c'est-à-dire 9. En effet, le cube tronqué possède 15 arêtes mais

6 sont déjà "soudées" sur le patron (plis à effectuer), il en reste donc 9 à former. Il est nécessaire de commander **9 morceaux de Scotch**.

On peut aussi raisonner sur le patron en considérant les arêtes à reconstituer : $4 + 4 + 1$.

3) Ligne brisée complétée sur le patron



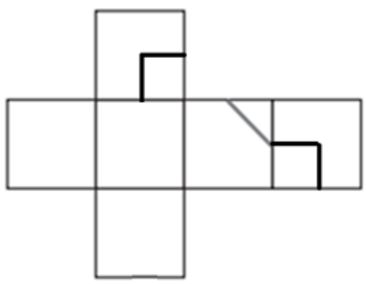


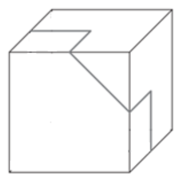
À noter que la face de référence est « devant dans la représentation en perspective ».
Tous les segments à tracer ont au moins une extrémité qui est le milieu de deux arêtes du cube, l'autre extrémité peut être le centre d'une face.
Le segment déjà tracé sur le patron correspond à un segment d'extrémités les milieux de deux côtés consécutifs de la face frontale du cube.

Décomposition des tracés

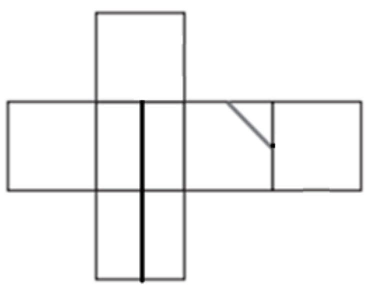
Les motifs utilisés s'appuient sur deux milieux d'arêtes d'une même face.

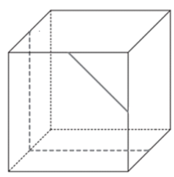
- Soit ces milieux sont sur des arêtes qui correspondent au milieu de côtés consécutifs d'une face (le motif est soit un segment, soit il représente un angle droit) ; de plus ces motifs sont sur des faces qui ont deux à deux une arête commune (ligne fermée).





- Soit ces milieux sont sur des arêtes qui correspondent à des côtés opposés d'une face (le motif est un segment).





PROBLÈME (tableur, grandeurs et division euclidienne) d'après un sujet de Paris

PARTIE I

1) Prix de la tente

1 € = 13,8775 ZAR

donc le prix de la tente est égal à $\dfrac{6\,000 \text{ ZAR}}{13{,}8775 \frac{\text{ZAR}}{€}}$.

On obtient environ 432,3545 € soit, **arrondi** au centime d'euro près, 432,35 €.

Remarque

*Le choix de 5 comme chiffre des centimes (centièmes d'euro) est lié au fait que le chiffre des millièmes d'euro est 4 compris entre 0 et 5 exclu. 432,35 représente ici **l'arrondi par défaut** au centième du nombre 432,3545 ; 432,36 est **l'arrondi par excès** au centième du nombre 432,3545. 432,35 est **la troncature** au centième du nombre 432,3545.*

2) Loterie

a) Nombre de billets vendus pour couvrir le prix de la tente

$\dfrac{6\,000 \text{ ZAR}}{20 \frac{\text{ZAR}}{\text{billet}}} = 300$ billets

donc 300 billets vendus rapportent 300×20 ZAR $= 6\,000$ ZAR.

Il faut vendre 300 billets pour couvrir le prix de la tente.

b) Nombre de billets à vendre pour obtenir un bénéfice de 1000 ZAR

Le nombre de billets à vendre pour gagner 1000 ZAR est : $\dfrac{1000 \text{ ZAR}}{20 \frac{\text{ZAR}}{\text{billet}}} = 50$ billets.

Pour faire un bénéfice de 1 000 ZAR, il faut couvrir le prix de la tente et vendre 50 billets supplémentaires : il faut donc vendre 350 billets en tout puisque $350 \times 20\ ZAR = 7\,000$ ZAR.
Les 7 000 ZAR alors récoltés couvrent le prix de la tente (6 000 ZAR) et génèrent un bénéfice de :
7 000 ZAR−6 000 ZAR = 1 000 ZAR.

Il faut donc vendre 350 billets pour obtenir un bénéfice de 1000 ZAR.

c) Calcul du bénéfice

Il faut soustraire du bénéfice obtenu à la question précédente le coût d'impression des 350 billets :

$$1\,000 \text{ ZAR} - 1{,}50 \text{ ZAR} \times 350 = 1\,000 \text{ ZAR} - 525 \text{ ZAR} = 475 \text{ ZAR}.$$

Le bénéfice réalisé est donc 475 ZAR.

3) Tableur

Les formulas qui peuvent avoir été saisies sont :

c) =B3*350–B1–1,5*350 ; d) = B3*350–6000–1,5*350 et e) =(B3–1,5)*350–6000.

4) Prix et nombre de billets

a) Pourcentage d'augmentation du prix du billet par rapport au prix choisi dans la question 2

Méthode 1

On calcule 25 ZAR ÷ 20 ZAR = 1,25

donc, pour passer de 20 ZAR à 25 ZAR, on multiplie par 1,25,
ou encore $1 + \frac{25}{100}$, c'est à dire qu'on applique une augmentation de 25 %.

Méthode 2
L'augmentation est de 25 ZAR – 20 ZAR soit 5 ZAR
et $\frac{5 \text{ ZAR}}{20 \text{ ZAR}} = \frac{5 \times 5}{20 \times 5} = \frac{25}{100}$.

Méthode 3
Le prix du billet passe de 20 ZAR à 25 ZAR.
On a ajouté 5 ZAR, c'est une proportion de $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ donc 25 %.
Le prix du billet est augmenté de 25 %.

Remarque
Le pourcentage d'augmentation se calcule à partir de la valeur initiale.

b) Nombre de billets à vendre pour avoir un bénéfice d'au moins 10 000 ZAR

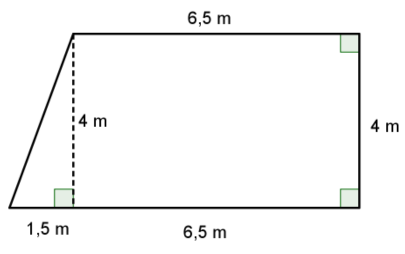
Appelons N le nombre minimal de billets à vendre à 25 ZAR pour avoir un bénéfice de 10 000 ZAR ; N est la plus petite solution entière de l'inéquation suivante :
$N \times (25 \text{ ZAR} - 1{,}50 \text{ ZAR}) - 6\,000 \text{ ZAR} \geq 10\,000 \text{ ZAR}$.
N doit donc vérifier :
$N \times 23{,}50 \text{ ZAR} \geq 10\,000 \text{ ZAR} + 6\,000 \text{ ZAR}$
donc $N \geq \frac{16\,000 \text{ ZAR}}{23{,}50 \text{ ZAR}}$.
Or $\frac{16\,000}{23{,}50} \approx 680{,}85$.
Donc $N = 681$ est la plus petite valeur entière solution de l'inéquation (I).
Il faut vendre au moins 681 billets à 25 ZAR pour faire un bénéfice d'au moins 10 000 ZAR.

Vérification :
$681 \times (25 \text{ ZAR} - 1{,}50 \text{ ZAR}) - 6\,000 \text{ ZAR} = 10\,003{,}5 \text{ ZAR}$
tandis que $680 \times (25 \text{ ZAR} - 1{,}50 \text{ ZAR}) - 6\,000 \text{ ZAR} = 9\,980 \text{ ZAR}$ et $9\,980 \text{ ZAR} < 10\,000 \text{ ZAR}$.

PARTIE II

1) Calcul de l'aire de l'emplacement B

Méthode 1
On peut décomposer l'emplacement B en un rectangle et un triangle rectangle :



$A_{\text{emplacement B}} = (6{,}5\text{m} \times 4\text{m}) + \frac{(1{,}5\text{m} \times 4\text{m})}{2}$
$A_{\text{emplacement B}} = 26 \text{ m}^2 + 3 \text{ m}^2 = 29 \text{ m}^2$.
L'aire de l'emplacement B est égale à 29 m².

Méthode 2
On peut aussi utiliser la formule qui permet de calculer l'aire d'un trapèze :
$A_{\text{emplacement B}} = \frac{(8 \text{ m} + 6{,}5 \text{ m}) \times 4 \text{ m}}{2} = \frac{58 \text{ m}^2}{2} = 29 \text{ m}^2$.

2) Calcul du volume d'eau nécessaire

On assimile la piscine à un cylindre dont la base est un disque de 7 m de diamètre ; son rayon est donc 7 m : 2 = 3,5 m et sa hauteur est $\frac{3}{4}$ de 2 m soit $\frac{3}{4} \times 2$ m = 1,5 m.

D'où V_{eau} = $Aire_{base}$ × hauteur = $(3{,}5 \text{ m})^2 \times \pi \times 1{,}50$ m = $12{,}25 \text{ m}^2 \times \pi \times 1{,}50$ m = $18{,}375\ \pi \text{ m}^3$ (valeur exacte).

On obtient $V_{eau} \approx 57{,}7267 \text{ m}^3$,

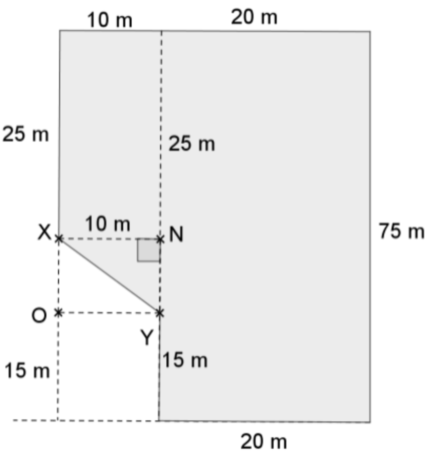
soit $V_{eau} \approx 57{,}727 \text{ m}^3$ à 0,001 m^3 près ou 1 dm^3 près.

Et comme 1 m^3 = 1 000 L, **V_{eau} ≈ 57 727 L à 1 L près.**

Remarque

On se référera à la question 1 de la première partie pour la précision sur la valeur approchée demandée.

3) Étude du périmètre du camping



a) Longueur XY

Pour calculer la longueur XY, on utilise le triangle NXY rectangle en N dans lequel les dimensions sont :
NX = 10 m et NY = 75 m – (25 m + 15 m) = 35 m.

On peut alors appliquer le théorème de Pythagore :
$XY^2 = (10 \text{ m})^2 + (35 \text{ m})^2 = 100 \text{ m}^2 + 1225 \text{ m}^2 = 1325 \text{ m}^2$.
On en déduit que la longueur XY (dont la mesure en m est positive) est :

XY = $\sqrt{1325}$ m

soit **XY ≈ 36,40 m à 0,01 m près (ou 1 cm près).**

b) Périmètre du camping.

Le périmètre du terrain de camping est donc :
$P_{camping}$ = 30 m + 75 m + 20 m + 15 m + $\sqrt{1325}$ m + 25 m = 165 m + $\sqrt{1325}$ m
$P_{camping}$ ≈ 201,40 m à 1 cm près.

4) La pelouse

a) Aire de la pelouse

L'aire de la pelouse est l'aire totale du terrain de laquelle on enlève l'aire de la piscine, celle de la cuisine, celle des sanitaires, et celles des emplacements A, B et C représentés sur le plan.

On calcule d'abord l'aire totale du terrain.
L'aire de ce terrain s'obtient en soustrayant de l'aire d'un rectangle l'aire d'un trapèze.
On retrouve pour le calcul de l'aire du trapèze les deux méthodes exposées en B.1.

$A_{terrain} = 30 \text{ m} \times 75 \text{ m} - (10 \text{ m} \times 15 \text{ m} + \frac{(10 \text{ m} \times 35 \text{ m})}{2})$
ou

$A_{terrain} = 30 \text{ m} \times 75 \text{ m} - \left(10 \text{ m} \times \dfrac{(15 \text{ m} + 50 \text{ m})}{2}\right)$.

D'où l'aire de la pelouse :

$A_{pelouse} = A_{terrain} - (21 \text{ m}^2 + 42 \text{ m}^2 + 35 \text{ m}^2 + 76 \text{ m}^2 + 29 \text{ m}^2 + 12{,}25\pi \text{ m}^2)$
$A_{pelouse} = 1925 \text{ m}^2 - (203 \text{ m}^2 + 12{,}25\,\pi \text{ m}^2)$
$A_{pelouse} = 1722 \text{ m}^2 - 12{,}25\pi \text{ m}^2$
$A_{pelouse} \approx 1684 \text{ m}^2$ à 1 m^2 près (on lit 1683,515489 sur la calculatrice).

L'aire de la pelouse est égale à 1684 m² à 1 m² près.

b) Masse de semence

On suppose que la masse de semence est proportionnelle à l'aire de la surface à ensemencer.
On peut consigner les données dans un tableau de proportionnalité permettant de visualiser la relation entre les deux grandeurs :

Masse de semence (en kg)	10	?
Aire (en m²)	500	1700

Pour calculer la masse cherchée, différentes procédures sont possibles, comme par exemple :

- *par propriété de linéarité pour la multiplication*

Pour 100 m^2, on utilise 2 kg de semence (10 kg : 5 = 2 kg),
donc pour 1700 m^2 ($17 \times 100 \text{ m}^2 = 1700 \text{ m}^2$), on utilise 34 kg de semence ($17 \times 2 \text{ kg} = 34 \text{ kg}$).

- *par propriété de linéarité pour la multiplication avec un passage par l'unité*

Pour 1 m^2, on utilise 0,02 kg de semence (10 kg : 500 = 0,02 kg),
donc pour 1700 m^2, on utilise 34 kg de semence ($1700 \times 0{,}02 \text{ kg} = 34 \text{ kg}$).

- *par un produit en croix*

La masse de semence recherchée est $\dfrac{1700 \text{ m}^2 \times 10 \text{ kg}}{500 \text{ m}^2} = 34$ kg.

Pour une pelouse de 1 700 m², il faut acheter 34 kg de semence.

Remarque
On aurait aussi pu décomposer 1700 m² sous la forme

$$1700 \text{ m}^2 = 500 \text{ m}^2 + 500 \text{ m}^2 + 500 \text{ m}^2 + \frac{500 \text{ m}^2}{5} \times 2$$

et calculer, en utilisant les propriétés de linéarité pour l'addition et la multiplication, la masse de semence comme suit :

$$M = 10 \text{ kg} + 10 \text{ kg} + 10 \text{ kg} + \frac{10 \text{ kg}}{5} \times 2 \qquad \text{soit } M = 34 \text{ kg.}$$

PARTIE III

1) Regroupements par 3

Méthode 1

Notons N le nombre de participants. Si on regroupe tous les participants dans des canots de 6 places, il reste 3 personnes sur le dernier canot. Donc N vérifie $N = 6 \times p + 3$ avec p un nombre entier.
Donc $N = 3 \times 2 \times p + 3 = 3 \times (2p + 1)$; comme p est un nombre entier, $2p + 1$ l'est aussi, donc N est un multiple de 3.

Donc si l'on regroupait 3 participants par canot, il n'en resterait pas.

Méthode 2

On sait que si on regroupe tous les participants dans des canots de 6 places, il reste seulement 3 personnes ; or à chaque canot de 6 places complet, correspondent deux canots de 3 places complets ; si l'on regroupait les participants par canots de 3 places, les trois personnes restantes pourraient remplir exactement un nouveau canot de trois places.
On en conclut que si l'on regroupait les participants par canots de 3 places, il ne resterait pas de participants.

2) Regroupements par 2

Méthode 1

Le nombre de participants vérifie $N = 6 \times p + 3$ avec p un nombre entier.
Donc $N = 6 \times p + 2 + 1 = 2 \times 3 \times p + 2 + 1 = 2 \times (3 \times p + 1) + 1$, où $3p + 1$ est un entier, ce qui assure que N est impair.

Donc si l'on regroupait 2 participants par canot, il en resterait exactement 1.

Méthode 2

On sait que si on regroupe tous les participants dans des canots de 6 places, il reste seulement 3 personnes ; or à chaque canot de 6 places complet, correspondraient trois canots de 2 places complets ; si l'on regroupait les participants par canots de 2 places, deux des trois personnes restantes pourraient remplir un nouveau canot : il resterait alors un participant.

3) Nombre de participants

Méthode 1

Le nombre de participants vérifie $N = 6 \times p + 3$ (avec p un nombre entier) et c'est un multiple de 5.
Il suffit de dresser la liste des nombres N en partant de $p = 0$ et de relever dans cette liste les multiples de 5, jusqu'à atteindre 100.
La liste est : 3 ; 9 ; 15 ; 21 ; 27 ; 33 ; 39 ; 45 ; 51 ; 57 ; 63 ; 69 ; 75 ; 81 ; 87 ; 93 et 99.

Il y a donc trois possibilités : **15 ou 45 ou 75 participants.**

Méthode 2

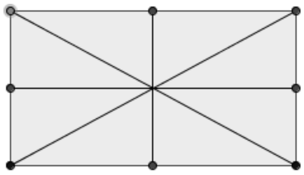
On a vu que si on l'on regroupait les participants par canots de 3 places, il ne resterait aucun participant : le nombre de participants est donc un multiple de 3.
Par ailleurs, l'énoncé nous dit que si l'on regroupait les participants par canots de 5 places, il ne resterait aucun participant : le nombre de participants est donc un multiple de 5.
3 et 5 étant premiers entre eux, on en déduit que le nombre de participants est un multiple de 3 x 5, donc de 15, inférieur à 100.
Par ailleurs, si on regroupe les participants par 6, il reste 3 participants ; le reste dans la division euclidienne par 6 du nombre cherché est donc égal à 3.
Les solutions sont donc à chercher parmi les multiples de 15 inférieurs à 100 dont le reste dans la division euclidienne par 6 est égal à 3.
Les multiples de 15 inférieurs à 100 sont : 0, 15, 30, 45, 60, 75, 90.
Dans cette liste, on élimine 0, 30, 60 et 90, qui sont divisibles par 6.

Pour les autres : $15 = 6 \times 2 + 3$; $45 = 6 \times 7 + 3$; $75 = 6\,x \times 12 + 3$: ces trois nombres conviennent.

ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES SUR LES AIRES d'après un sujet de Dijon

1) Analyse de procédures non numériques

Les procédures non numériques s'appuient sur la grandeur et n'utilisent pas les mesures. Les groupes d'élèves 1 et 2 cherchent à mettre en évidence que les surfaces ont la même aire. L'égalité des aires entre les parts de Marie et Sara d'un côté, et celles de Charles et Luc de l'autre, semble immédiate (probablement en lien avec le fait qu'elles sont symétriques selon l'axe vertical ou horizontal). Ils s'appuient également sur le tracé supplémentaire des deux médianes qui, avec les diagonales, partagent le rectangle en 8 triangles rectangles superposables :



Le groupe d'élèves 1 décompose la part de Luc selon son axe de symétrie. Il obtient deux triangles rectangles qu'il recompose différemment pour obtenir une forme superposable à la part de Marie (découpage/recollement sans perte ni superposition). Il en conclut alors l'égalité des aires des deux parts.

Les propriétés mathématiques mises en œuvre par le groupe 1 sont les suivantes :

- le principe de conservation des aires ;
- le fait que deux parties symétriques selon une droite sont superposables.

Le groupe d'élève 2 décompose chacune des parts en deux triangles rectangles. En s'appuyant sur les diagonales du rectangle comme axes de symétrie, il identifie alors des couples de triangles symétriques donc superposables dans la figure, qu'il colorie de la même couleur. Ce jeu des couleurs fait alors apparaître l'égalité des parts de Luc et Marie (chacune composée d'un triangle rouge et d'un triangle bleu), puis de Charles et Sara (chacune composée d'un triangle jaune et d'un triangle vert).

Les propriétés mathématiques mises en œuvre par le groupe 2 sont les suivantes :

- le principe d'additivité des aires ;
- le fait que deux parties symétriques selon une droite sont superposables.

2) Étapes de la procédure suivie par le groupe 3 et analyse de leur(s) erreur(s)

Remarque

L'unité utilisée par ces élèves dans leurs calculs, le centimètre (cm), était un indice important à relever pour interpréter correctement leur production : les grandeurs qu'ils considèrent sont clairement des longueurs, et celle qu'ils calculent est donc un périmètre.

Comme les groupes précédents, les élèves de ce groupe ont repéré que les parts de Luc et de Charles étaient superposables (de même par ailleurs que celles de Sara et de Marie). Ils ont également identifié que chacune de ces deux formes étaient des triangles isocèles. Ils ont alors procédé pour chacune au mesurage de deux côtés, puis calculé (correctement) leur périmètre. Ils ont conclu à la non égalité des aires des parts en comparant ces deux périmètres.
L'erreur commise (la seule) provient de la confusion entre deux des grandeurs que l'on peut associer à une surface, l'aire et le périmètre.

3) a) Trois compétences qui semblent maitrisées par les élèves du groupe 4

La production des élèves du groupe 4 semble indiquer :

- qu'ils connaissant et savent utiliser à bon escient la formule de calcul donnant l'aire d'un triangle ;
- qu'ils sont capables de repérer sur un triangle la hauteur et la base correspondante pour appliquer la formule ;
- qu'ils sont capables de mesurer des longueurs au millimètre près ;

- qu'ils savent mettre en œuvre la technique opératoire posée en colonne de la multiplication entre deux nombres décimaux ;
- qu'ils sont capables de calculer la moitié d'un nombre décimal.

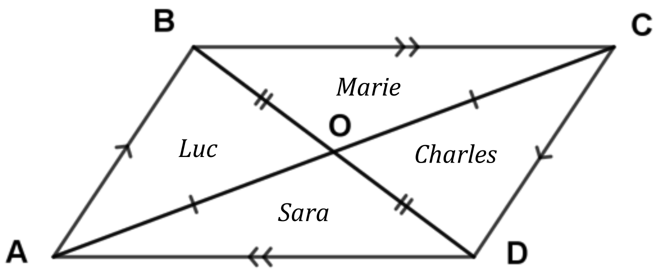
3) b) Difficulté à l'origine de l'erreur du groupe 2

La difficulté que ces élèves ont rencontrée est liée au fait qu'ils utilisent une règle graduée au millimètre près alors que les longueurs qu'ils mesurent ne sont pas (toutes) égales à un nombre entier de millimètres. Ainsi 2,5 cm n'est pas la moitié de 4,9 cm, de même que 3,1 cm n'est pas le double de 1,5 cm.
Bien que la méthode utilisée par ces élèves soit correcte dans son principe, comme leurs mesures sont (et ne peuvent qu'être) approchées, le résultat auquel ils aboutissent est erroné.

Remarque
Notons d'ailleurs que les aires obtenues par les calculs de ce groupe pour chacune des deux types de parts ne diffèrent que très légèrement. On reste dans la zone d'incertitude, ou dans la marge d'erreur, inhérente à tout calcul s'appuyant sur des mesures, qui sont par nature toujours approchées.

4) Cas du parallélogramme

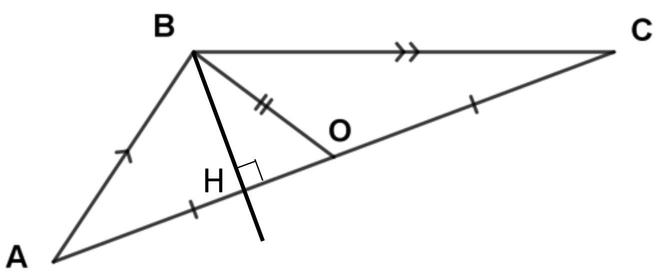
Méthode 1 : géométrique
Considérons un parallélogramme ABCD de centre O tel que les triangles AOB, BOC, COD et DOA correspondent respectivement aux parts de Luc, Marie, Charles et Sara.



Le point d'intersection des diagonales est le centre de symétrie du parallélogramme. Ainsi les triangles AOB et COD sont symétriques l'un de l'autre par rapport à O.
Il en est de même des triangles BOC et DOA.
Les parts de Luc et de Charles sont donc superposables et ont même aire ; de même que les parts de Marie et de Sara.

Remarque
On aurait aussi pu montrer que les triangles BOC et DOA sont isométriques en reconnaissant un cas d'isométrie : $\widehat{BOC} = \widehat{AOD}$ $(angles\ opposés\ par\ le\ sommet)$ *et* $OB = OD$ *et* $OC = OA$.
On aurait aussi pu reconnaître une configuration de Thalès (puisque (BC)//(AD) et (AC) et (BD) sécantes en O). Les triangles BOC et DOA sont donc semblables et le rapport d'agrandissement est égal à $\frac{OB}{OD}$.
Or $\frac{OB}{OD} = 1$. *Les triangles sont donc isométriques.*

Pour conclure il nous reste à comparer, par exemple, les parts de Luc et de Marie.
Plaçons-nous dans le triangle ABC.



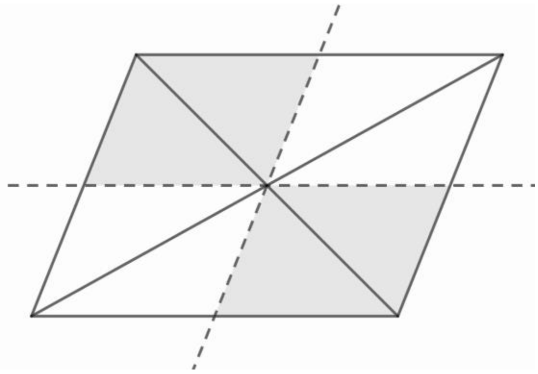
O étant le milieu de [AC], le segment [BO] est une médiane de ce triangle. Il le partage donc en deux triangles AOB et BOC qui ont la même aire : en effet, les segments [AO] et [OC] ont même longueur (O est le milieu de [AC]) et les triangles respectifs AOB et BOC ont une hauteur commune issue de B (on la notera [BH]) ; par conséquent, Aire (ABO) $= \frac{1}{2} \times \mathrm{AO} \times \mathrm{BH} = \frac{1}{2} \times \mathrm{BO} \times \mathrm{BH} =$ Aire (BCO).
Ainsi les parts de Luc et de Marie ont même aire.

Et l'**on peut conclure que les quatre parts ont la même aire.**

Méthode 2 : à l'aide d'une décomposition type pavage

De façon analogue à la procédure de décomposition-recomposition vue en question 1, on peut partager le parallélogramme en 8 triangles en traçant les droites passant par le centre du parallélogramme et parallèles à chaque paire de côtés.
Les 8 triangles obtenus ne sont pas tous superposables entre eux, comme c'était le cas avec le rectangle, mais par contre ils le sont 4 par 4.
On peut s'en convaincre sur la figure ci-dessous en remarquant que l'on peut passer de l'un des triangles grisés à un autre triangle grisé en utilisant, soit une translation, soit une symétrie, c'est-à-dire une transformation qui conserve l'aire.

Chacun des 4 enfants reçoit donc une part qui peut se décomposer en deux triangles, un blanc et un grisé.
Les quatre parts ont donc la même aire.



ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES SUR LA DURÉE d'après un sujet de Dijon

1) a) Résolution du problème

Pour être qualifié, il faut réussir à parcourir la distance en moins de 12 minutes et 40 secondes.
Alain est à 2 minutes et 36 secondes de la qualification : cela signifie qu'il met 2 minutes et 36 secondes de plus que le temps maximal requis.
Or : 12 min 40 s + 2 min 36 s = 14 min 76 s = 15 min 16 s.

Actuellement, Alain met 15 minutes et 16 secondes pour parcourir les 2 000 mètres.

1) b) Classement des six productions en fonction de la représentation du problème sous-jacente

Les élèves E et F ont une représentation correcte de la situation.
Ils associent bien le fait de ne pas être encore qualifié à celui d'avoir une durée de parcours supérieure à 12 minutes et 40 secondes.

Les autres élèves, A, B, C et D ont une représentation erronée de la situation.

Tous les quatre l'identifient à un problème de soustraction.

1) c) Intention de l'enseignante lors de la mise en commun

La situation proposée est singulière et plutôt inhabituelle pour les élèves puisqu'ici une performance insuffisante signifie que le temps de parcours est supérieur au seuil fixé. Les productions des élèves montrent que beaucoup d'entre eux n'ont pas pris conscience de cet implicite puisqu'ils ont effectué une soustraction et non pas une addition.

Mettre en avant la production de l'élève E lors de la mise en commun permet à l'enseignante de revenir sur la modélisation de la situation : le choix de l'opération à effectuer. Il s'agit d'amener les élèves à relire l'énoncé et à le formuler avec leurs mots, et pour les élèves qui se sont trompés à reconsidérer leur choix d'opération.

L'enseignant peut aussi rappeler aux élèves que la présence de certaines expressions ou mots inducteurs tels que « plus que », « moins que », ou ici « il est à » n'indique pas toujours la « bonne » opération à effectuer.

2) a) Comparaison des productions des élèves A, B, C et D du point de vue des techniques de calcul

Les quatre élèves effectuent une soustraction mais ils utilisent des techniques de calcul différentes.

L'élève A pose sa soustraction en colonnes en utilisant la méthode dite « usuelle », basée sur la propriété de conservation des écarts et l'échange dix contre un (la « retenue » traduit l'ajout d'une même quantité aux deux nombres, mais sous deux formes différentes, dix unités ou une unité d'ordre supérieur).

L'élève B effectue la soustraction en écrivant un calcul en ligne, mais rien ne permet d'identifier la technique qu'il utilise.

L'élève C effectue une addition à trous qu'il pose en colonnes. Il cherche ce qu'il faut ajouter à 2 min 36 s pour obtenir 12 min 40 s.

L'élève D pose sa soustraction en colonnes en utilisant la méthode dite « par emprunt » ou « par cassage de l'unité du rang supérieur » (les modifications d'écriture ne concernent que le nombre du haut : l'une des 4 dizaines de secondes est dégroupée – il en reste donc 3 – puis échangée en 10 unités du rang inférieur).

2) b) Analyse de la nature des nombres mobilisés et de leurs écritures dans les productions des élèves A, B, C et D

Les durées données dans l'énoncé le sont sous forme de nombres complexes, composés de deux parties, l'une exprimée en minute, l'autre en seconde. Chacun des élèves, à un moment ou à un autre, regroupe ces deux parties en un seul nombre, comme ils ont appris à le faire dans le système décimal. Toutes ces écritures sont erronées puisqu'elles reviennent à considérer qu'une minute est égale à 100 secondes. Elles

témoignent de la part de ces élèves d'insuffisances dans la compréhension de notre système décimal en appliquant sans discernement ses règles d'écriture à un système d'une autre base (sexagésimal pour les heures, minutes secondes).
Des différences apparaissent toutefois entre élèves, dans la nature des nombres, entiers ou décimaux, de leurs écritures et dans la présence ou non d'unités.

Les élèves A et D semblent ne faire aucune différence entre, d'une part des écritures complexes exprimées en minutes et secondes (12 min 40 s, 2 min 36 s, 10 min 4 s), et d'autre part les écritures à virgule utilisées pour les nombres décimaux.
L'élève A semble en outre utiliser la virgule comme séparateur entre les minutes et les secondes comme dans les écritures à virgule des nombres décimaux où celle-ci sépare les unités entières de la partie décimale et où elle est très souvent lue « unités ». On peut faire l'hypothèse que cet usage de la virgule l'autorise dans son esprit à ne plus indiquer l'unité minutes.
Pour l'élève D, l'absence d'unité semble indiquer qu'il travaille sur des nombres sans se référer aucunement à des durées.

L'élève B utilise ponctuellement l'écriture à virgule 10,04 dans le résultat de son calcul en ligne. Il le fait probablement par analogie avec le calcul « 12,40 – 2,36 » qui peut être effectué mentalement en traitant séparément partie entière et décimale.

L'élève C regroupe les deux parties, exprimées en minutes et en secondes, en un seul nombre entier. Il s'agit probablement dans son esprit d'une transformation d'écriture nécessaire pour poser son opération, dans laquelle ne figure aucune unité. Il opère alors sur des nombres sans se demander à quelle grandeur ils correspondent.

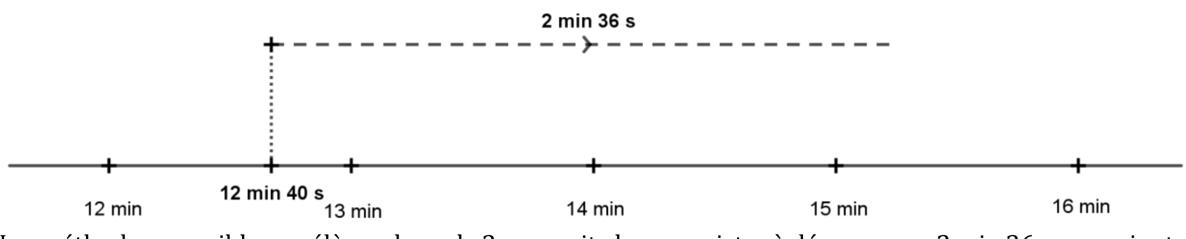
2) c) Différentes étapes du calcul de l'élève F

L'élève F met en œuvre la technique opératoire de l'addition posée en colonne en la transposant au système sexagésimal (de base 60) : il sépare les minutes et les secondes en deux « zones » et précise les unités.

Il ajoute d'abord (sûrement mentalement) les secondes, puis les dizaines de secondes en effectuant la somme de 3 et 4.
Il inscrit un résultat intermédiaire, 7.
Le résultat obtenu (76 secondes) semble être identifié à « 1 minute et 16 secondes », puisqu'il écrit 1 en retenue au-dessus de la « zone des minutes » et pose 16 dans la « zone des secondes » du résultat.
Il ajoute (sûrement mentalement) la retenue aux 12 minutes et 2 minutes déjà écrites et écrit 15 dans la « zone des minutes » du résultat (ou bien il procède rang par rang en ajoutant la retenue aux unités de minutes, puis en ajoutant les dizaines de minutes entre elles).

3) Proposition d'une résolution par schématisation

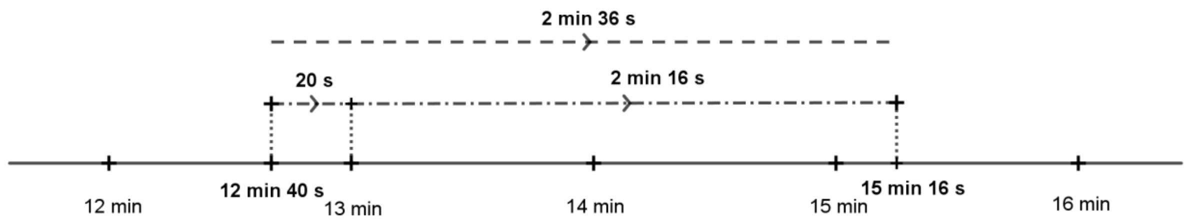
L'opération à effectuer peut se reformuler en « 2 min 36 s de plus que 12 min 40s ».
L'enseignante pourrait proposer la représentation utilisée pour les calculs de durées, situations usuellement schématisées par une frise horaire s'appuyant sur une droite, graduée ici en minutes :



Une méthode accessible aux élèves de cycle 3 pourrait alors consister à décomposer 2 min 36 s pour ajouter en plusieurs étapes cette durée à 12 min 40 s.

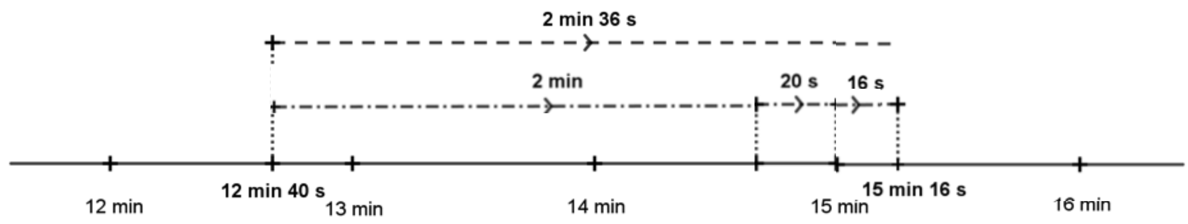
Procédure 1

Ajouter dans un premier temps 20 secondes à 12 min 40 s pour obtenir 13 minutes.
Puis ajouter les 2 minutes restantes pour obtenir 15 minutes, et terminer en ajoutant 16 secondes, ce qui donne : 15 min 16 s. (Ou bien d'abord ajouter les 16 secondes restantes pour obtenir 13 min 16 s et terminer en ajoutant 2 minutes, ce qui donne : 15 min 16 s).



Procédure 2

Ajouter dans un premier temps 2 minutes à 12 min 40 s pour obtenir 14 min 40 s. Il reste alors 36 secondes à ajouter.
Ajouter 20 secondes à 14 min 40 s pour obtenir 15 min.
En ajoutant les 16 secondes restantes on obtient 15 min 16 s.



ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES (PROPORTIONNALITÉ) d'après un sujet de Paris

1) Résolution du problème par une procédure au choix

Remarque préliminaire

Cet exercice vise manifestement à travailler la comparaison de proportions dans des mélanges de peinture. On aurait pu poser directement la question de savoir quel mélange était le plus clair. En contextualisant le problème avec la comparaison des couleurs des murs, on se place sous l'hypothèse que la quantité de peinture est suffisante pour peindre uniformément les murs.

a) Comparaison de la couleur des deux mélanges

La procédure la plus simple consiste à se ramener à une quantité commune pour l'un des deux ingrédients, en utilisant la propriété de linéarité pour la multiplication :

- soit en se ramenant à la même quantité de peinture verte : avec les proportions du mélange A, pour 2 tubes de peinture verte, on doit utiliser 4 litres de peinture blanche (deux fois plus que dans le descriptif du mélange), alors que pour le mélange B, pour 2 tubes de peinture verte, on utilise seulement 3 litres de peinture blanche ; le mélange A contient donc *en proportion* plus de peinture blanche et le mur peint avec ce mélange est donc plus clair.
- soit en se ramenant à la même quantité de peinture blanche (pour privilégier le travail avec les entiers, on peut choisir comme mesure de la quantité un multiplie commun à 2 et 3 soit 6) : avec les proportions du mélange A, pour 6 litres de peinture blanche, on doit utiliser 3 tubes de peinture verte (trois fois plus que dans le descriptif du mélange A), alors que pour le mélange B, pour 6 litres de peinture blanche, on doit utiliser 4 tubes de peinture blanche (deux fois plus que dans le descriptif du mélange B) : le mélange A contient donc *en proportion* moins de peinture verte : le mur peint avec ce mélange est donc plus clair.

Remarque

On aurait pu dans les deux cas se ramener respectivement à 1 tube de peinture verte et 1 litre de peinture blanche. Cela aurait alors conduit à comparer des fractions.

b) Calcul du volume de peinture blanche à prévoir

Différentes méthodes sont possibles ;nous en proposons quelques-unes ci-dessous.

Par propriété de linéarité pour l'addition et la multiplication

Pour 2 tubes de peinture verte, il faut 3 litres de peinture blanche, donc en conservant les mêmes proportions :

- pour 6 tubes de peinture verte, il faut 3 fois plus de peinture blanche, donc 9 litres de peinture blanche ;
- pour 1 tube de peinture verte, il faut 1,5 litre de peinture blanche (deux fois moins que pour 2 tubes de peinture verte) ;
- pour 7 tubes de peinture verte, il faut donc 10,5 litres de peinture blanche (car 9 L + 1,5 L = 10,5 L).

Par propriété de linéarité pour la multiplication, en passant par un multiple commun à 2 et 7

Pour 2 tubes de peinture verte, il faut 3 litres de peinture blanche, donc en conservant les mêmes proportions :

- pour 14 tubes de peinture verte, il faut 7 fois plus de peinture blanche, donc 21 litres de peinture blanche ;
- pour 7 tubes de peinture verte, il faut 2 fois moins de peinture blanche, donc 10,5 litres de peinture blanche.

En utilisant le coefficient de proportionnalité qui lie le nombre de tubes de peinture verte et le nombre de litres de peinture blanche

$3 = 2 \times 1{,}5$, donc le rapport du nombre de nombre de litres de peinture blanche sur le nombre de tubes de peinture verte est égal à 1,5.
Pour 7 tubes de peinture verte, il faut donc $7 \times 1{,}5$ L de peinture blanche, soit 10,5 L.

Par la règle de trois (basée sur la propriété de linéarité pour la multiplication)

Pour 1 tube de peinture verte (retour à l'unité), il faut 1,5 L de peinture blanche ($\frac{3}{2}L$) ; pour 7 tubes de peinture verte, il faut 7 fois plus de peinture blanche soit $7 \times 1{,}5$ L de peinture blanche, soit 10,5 L.

2) Variable didactique et choix pour la valeur de cette variable

Le problème posé dans la question b) est un problème de recherche de 4ème proportionnelle entre deux grandeurs, dans lequel trois valeurs sont connues, et une valeur est inconnue.

Une variable didactique importante dans ce type de problème est le **rapport entre les deux valeurs connues de la même grandeur,** à savoir ici le nombre de tubes de peinture verte.

Ici, les deux valeurs connues sont 2 et 7, et 7 n'est pas un multiple de 2 : il n'est donc pas immédiat d'obtenir la valeur cherchée par propriété de linéarité pour la multiplication.
Si en revanche on avait demandé la quantité de peinture blanche à prévoir pour 8 tubes de peinture verte (4 fois plus que dans le descriptif du mélange), il aurait été facile de procéder par linéarité multiplicative.

3) Analyse des productions

Nour a calculé le nombre de litres de peinture blanche à prévoir pour chaque nombre de tubes compris entre 1 et 7, en rangeant les données et les valeurs obtenues dans un tableau.
On n'a pas accès aux détails de ses calculs, ni à l'ordre dans lequel elle les a effectués, mais on peut penser qu'elle a d'abord calculé le nombre de litres de peinture blanche associé à 1 tube de peinture verte, et qu'elle a ensuite calculé le nombre de litres de peinture blanche pour 3 tubes, 4 tubes, etc.
Pour ce calcul, elle a pu :

- soit effectuer des multiplications (pour 1 tube, 1,5 litre de peinture blanche, donc pour 3 tubes, 3 fois plus) ;
- soit effectuer des additions : pour 1 tube, 1,5 litre de peinture blanche, pour 2 tubes, 3 litres de peinture blanche (donnée ou 1,5L + 1,5L), donc pour 3 tubes, on ajoute 1,5 litre, et on poursuit jusqu'à obtenir de proche en proche 7 tubes et le volume de peinture blanche correspondant.

Son raisonnement est correct et **semble s'appuyer sur la propriété de linéarité pour la multiplication** (méthode 1) ou **la propriété de linéarité pour l'addition** (méthode 2).

La procédure de **Camille** est également correcte : elle procède en utilisant la **propriété de linéarité pour la multiplication**, en cherchant, *via* une division posée, le rapport multiplicatif entre 7 et 2.
Elle obtient 3,5, et multiplie alors par 3,5 le nombre de litres de peinture blanche associés à 2 tubes de peinture verte.

4) Aides envisagées

Réponse d'Alix

Dans la première question, il est possible qu'**Alix** tienne le raisonnement suivant : le mélange constitué de 2L de peinture blanche et 1 tube de peinture verte permettra de couvrir une surface d'aire inférieure à celui constitué de 3L de peinture blanche et 2 tubes de peinture verte puisqu'il contient moins de matière.
Dans ces conditions, son raisonnement serait acceptable.
Si on veut amener Alix à travailler sur les proportions, il semble nécessaire de lever avec elle les implicites mentionnés dans la remarque préliminaire.
Une fois ce travail réalisé, et si le besoin persiste de distinguer la comparaison sur les quantités de celle sur les proportions, on pourrait utiliser du **matériel,** par exemple une boisson colorée (comme de la grenadine), et montrer par exemple qu'avec 1 dose de grenadine et 1 dose d'eau, on obtient un mélange plus foncé qu'avec 3 doses de grenadine et 6 doses d'eau, alors qu'il y a moins de grenadine dans le premier mélange.
Ce matériel pourrait servir aussi pour revenir sur la deuxième question, en montrant que des mélanges avec 1 dose de grenadine et 2 doses d'eau, 2 doses de grenadine et 3 doses d'eau, 3 doses de grenadine et 4 doses

d'eau, etc. n'ont pas tous la même couleur, alors que dans tous ces cas, l'écart entre les nombres de doses d'eau et de grenadine est égal à 1.

Réponse de Mathilde

Mathilde semble considérer que dans un tableau de proportionnalité, on peut obtenir les valeurs d'une nouvelle colonne en ajoutant les mêmes nombres aux deux valeurs d'une colonne donnée (sans doute par une analogie erronée avec les flèches souvent utilisées lors de l'application de la linéarité multiplicative).
On pourrait lui suggérer de prolonger son raisonnement en lui faisant construire une nouvelle colonne avec un « 0 » sur la deuxième ligne et en lui demandant par exemple s'il est possible d'avoir deux mélanges de même teinte avec d'une part 3 litres de peinture blanche et 2 tubes de peinture verte, et d'autre part 1 litre de peinture blanche et pas de peinture verte.
Pour remettre en cause sa procédure de remplissage du tableau, on pourrait aussi l'inciter à poursuivre son remplissage : pour 4L de peinture blanche, on obtient 3 tubes de peinture verte et lui demander de comparer les relations existantes entre 2 et 4 (le double) et 1 et 3 (le triple).

Réponse de Camille

Camille se trompe uniquement lors de la comparaison des deux mélanges. Il (elle ?) cherche à comparer les rapports entre les deux types de peinture.
Pour le mélange A, « le double de vert est ajouté » est une formulation maladroite, mais dont l'idée paraît correcte, pour dire que le nombre de litres de peinture blanche (2) est égal au double du nombre de tubes de peinture verte (1).
Pour le mélange B, en revanche, le nombre de litres de peinture blanche n'est pas égal au tiers du nombre de tubes de peinture verte, mais les deux nombres sont dans le rapport 1,5.
On pourrait peut-être lui proposer un mélange C avec 4 litres de peinture blanche et 1 tube de peinture verte, pour l'amener à calculer pour chacun des mélanges A et C le coefficient multiplicateur permettant de passer du nombre de tubes de peinture verte au nombre de litres de peinture blanche, avant de revenir au mélange B.
On peut également l'inciter à travailler sur les nombres en jeu. Camille se perd dans le sens des relations établies entre les nombres en effectuant : $3 = 2 + \frac{1}{3} \times 3$.
On peut lui demander de mettre 3 en relation avec 2 uniquement sous la forme : $3 = 2 + \frac{1}{2} \times 2$. Cela pourra lui permettre d'établir le rapport qu'il existe entre le nombre de litres de peinture blanche et le nombre de tubes de peinture verte ($1+\frac{1}{2}$).

ANALYSE DE SITUATIONS SUR LE CALCUL AUX CYCLES 2 ET 3 d'après un sujet de La Roche sur Yon

A - Calcul de soustractions

1) a) Procédure attendue

La procédure attendue est de soustraire le nombre de centaines, dizaines, unités demandées à ce qui est proposé dans le cadre en faisant un échange préalable lorsque la soustraction n'est pas possible.

Exemple pour le premier cas : soustraire 3 dizaines des 4 dizaines, il reste 1 dizaine. Il n'est pas possible de soustraire 7 unités à 6 unités donc commencer par échanger la dizaine restante contre 10 unités puis soustraire 7 unités à 16 unités. Il reste en tout : 8 centaines, 0 dizaine, 9 unités.

1) b) Propriétés de notre système de numération

Cette procédure s'appuie uniquement sur la connaissance d'une des propriétés du système décimal, les règles d'échanges : 10 unités = 1 dizaine (et aussi 1 dizaine = 10 unités), 10 dizaines = 1 centaine, etc.

Remarque

La lecture de gauche à droite « 10 unités égalent 1 dizaine » illustre bien l'idée de groupement alors que la lecture « 1 dizaine égale 10 unités » est plutôt associée à l'idée de cassage.
Les règles de position de notre système décimal ne sont pas mobilisées ici puisque les unités de numération sont explicitées.

1) c) Aides à proposer

On pourrait proposer les aides suivantes :

- utiliser des étiquettes manipulables pour procéder à des échanges, comme dans un «jeu de marchand» : un élève ou le maître peut jouer le rôle du «banquier» à qui on demande les échanges (on lui donne 1 dizaine et on lui demande 10 unités par exemple).
- utiliser un matériel de numération (celui qui fait référence dans la classe) pour rappeler les relations entre unités de numération : soit en évoquant juste le matériel, soit en le montrant voire en le laissant manipuler par les élèves pour faire les échanges.

2) Technique opératoire de la soustraction dans l'exercice 4

Il ne s'agit pas de la technique traditionnelle française (par conservation des écarts) mais de la technique «par emprunt» ou « cassage »:

$$\begin{array}{cccc} & 2 & & \\ & 3 & {}_{1}2 & 5 \\ - & 1 & 4 & 3 \\ \hline & 1 & 8 & 2 \end{array}$$

En effet cette technique s'appuie sur la conversion d'une centaine en 10 dizaines afin de pouvoir soustraire 4 dizaines (car on ne peut pas soustraire 4 dizaines de 2 dizaines) : c'est le même principe que dans l'exercice 3 du manuel.

B - Calcul de divisions

Remarques préalables

- *Trois des quatre élèves ont marqué quatre petits points au quotient. Sans avoir de trace du travail effectué pour cela, ils ont commencé par chercher le nombre de chiffres au quotient.*
- *Les quatre élèves ont écrit des éléments de la table de multiplication de 38. Rien ne permet de dire si cela a été fait avant ou pendant le calcul.*
- *Deux techniques différentes sont utilisées par les élèves :*
  - *le nombre 38 742 est décomposé en unités de numération : nombre de milliers, nombre de centaines, nombre de dizaines et nombre d'unités. Les élèves divisent par 38 le nombre de milliers (38), puis en abaissant le 7 le nombre de centaines (7), puis en abaissant le 4 le nombre de dizaines (74), puis enfin en abaissant le 2 le nombre d'unités (362) ;*
  - *le nombre 38 742 est considéré globalement, i.e en unités simples. L'élève cherche à approcher les dividendes partiels par des multiples de 38.*

Analyse des productions

Élève	Vérification des résultats	Étude de la procédure	Analyse des erreurs et hypothèse sur leur origine
A	Quotient faux Reste juste	La technique utilisée est la première. L'élève écrit 4 points au quotient pour indiquer que celui-ci possède 4 chiffres. Il écrit à gauche les lignes de la table de 38 qui lui permettent de trouver le 2ème et 3ème chiffre du quotient. Le répertoire est incomplet ce qui laisse supposer qu'il estime le plus grand multiple qu'il pourra utiliser (pour se rapprocher le plus possible de 362, 38×10 est trop grand mais 38×9 convient). Il surligne 38, divise 38 par 38 et écrit 1 au quotient. Il abaisse 74 ou 7 puis 4, retranche à 74 le plus grand multiple de 38 (1 fois), sans poser la soustraction, mais en écrivant (− 38) à côté de 74. Il écrit le reste 36. Il écrit 1 comme deuxième chiffre du quotient. Il abaisse 2 et retranche à 362 le plus grand multiple de 38 (9 fois), sans poser la soustraction mais en écrivant (− 342) à côté de 362, il écrit le reste 20. Il écrit 9 comme troisième chiffre du quotient. Il écrit enfin 0 pour compléter le 4ème chiffre du quotient.	Le 2ème chiffre du quotient est faux. Soit l'élève a abaissé d'abord le 7 et comme 7 est plus petit que 38, il a ensuite abaissé le 4 et a retranché 1 fois 38 à 74 en ayant écrit qu'il ne peut pas retrancher 2 fois 38. Il n'a pas tenu compte de la valeur positionnelle des chiffres dans le quotient : le dividende partiel 74 représente des dizaines donc le deuxième chiffre 1 du quotient devrait être à la position du chiffre des dizaines Le 3ème chiffre est aussi faux car il est décalé (il devrait être à la positon des unités). Le 4ème chiffre est faux. L'élève a complété le dernier point par un 0. Il ne fait pas de vérification.
B	Quotient faux Reste faux	La technique utilisée est la deuxième. L'élève écrit à gauche quelques lignes de la table de 38 et en particulier 10 fois 38 et 20 fois 38. Il retranche à 38 742 le plus grand multiple possible de 38 par une	La seule erreur est une erreur de retenue dans la soustraction posée 742 – 380. Il trouve 462 au lieu de 362. Sinon, la suite des calculs est cohérente même si les résultats

		puissance de 10, ici 38 000 sans écrire comment il le trouve. Il écrit 1 000 dans la colonne quotient. Il pose l'opération et écrit le reste 742. Il retranche à 742 le plus grand multiple de 38 par une puissance de 10, ici 380. Il écrit 10 dans la colonne quotient sous le 1 000 de la première ligne. Au reste trouvé 462, il retranche à nouveau 380. Le reste est 82. Il écrit à nouveau 10 dans la colonne quotient. Au reste 82, il retranche le plus grand multiple possible de 38, ici 76. Il écrit 2 dans la colonne quotient. Le reste est 6. Il ajoute les nombres écrits et bien positionnés dans la colonne quotient et obtient 1022.	sont différents de la bonne réponse. Il ne fait pas de vérification.
C	Quotient juste Reste juste	Il semble utiliser les deux techniques. Il semble commencer par la première pour le 1er chiffre du quotient, ensuite la deuxième car il abaisse tous les chiffres et écrit 380 au lieu de 38 s'il avait travaillé sur les dizaines plutôt que les unités. Cependant, il surligne bien 74 dizaines dans 742. L'élève écrit 4 petits points au quotient pour indiquer qu'il a 4 chiffres. Il écrit à gauche la table de 38 in extenso. Il surligne 38, divise 38 par 38. Il écrit 1 comme 1er chiffre du quotient. Il écrit le reste 0 sous 38 sans poser la soustraction. Il a pu abaisser le 7 puis écrire 0 comme deuxième chiffre du quotient avant d'abaisser 42. Il surligne 74, retranche à 742 le plus grand multiple de 38 (10 fois), pose la soustraction, il écrit le reste 362. Au quotient, il écrit 1 dans la colonne des dizaines. Au reste 362, il retranche 342 le plus grand multiple de 38 (9 fois). Il pose la soustraction et écrit le reste 20. Il écrit 9 au quotient. Il vérifie ensuite en posant la multiplication du diviseur par le quotient trouvé. À noter qu'il n'ajoute pas le reste 20.	L'élève ne commet pas d'erreur. Il ne fait pas apparaitre comment il trouve le 2ème chiffre 0 du quotient. De même il ne fait pas apparaitre s'il finit ou pas la vérification. Il a pu vérifier mentalement que $38\,722 + 20 = 38\,742$.

D	Quotient faux Reste faux	La technique utilisée est la première. L'élève écrit 4 petits points au quotient pour indiquer qu'il a 4 chiffres. Il écrit quelques multiples de 38 à partir de 10 fois. Il surligne 38, divise 38 par 38. Il écrit 1 comme 1er chiffre du quotient. Il écrit le reste 00 sous 38 sans poser la soustraction. Il abaisse 74, en une fois ou chiffre par chiffre (pas de trace). Il retranche à 74 le plus grand multiple possible de 38 (1 fois). Il pose la soustraction. Il calcule le reste (46, erroné) et il écrit 1 comme 2ème chiffre du quotient. Il abaisse le 2. Au nombre 462, il retranche le plus grand multiple possible de 38 (12 fois). Il pose la soustraction et écrit le reste 6. Il complète alors le quotient avec le 12.	Le 2ème chiffre du quotient est faux. Soit l'élève a abaissé d'abord le 7 et comme 7 est plus petit que 38, il a ensuite abaissé le 4 et a retranché 1 fois 38 à 74 en ayant écrit qu'il ne peut pas retrancher 2 fois 38 mais sans tenir compte que 74 représente des dizaines et non des centaines ce qui entraîne l'erreur de placement du 1 dans le quotient. Le reste de la soustraction est faux. Il semble avoir marqué la retenue à gauche du 4 de 74, mais n'en tient pas compte dans la suite de son calcul. En ayant retranché 12 fois 38 à 462, il complète les deux derniers petits points par 12 pour terminer son opération. Il ne fait pas de vérification.

C - Calculs avec des nombres décimaux

1) Analyse de la cause des écarts

Bien que la technique de la soustraction soit plus complexe que celle de l'addition, on remarque ici une meilleure réussite qui est due aux nombres en jeu dans les deux opérations.

Les nombres proposés pour la soustraction sont deux nombres décimaux, au même format (autant de chiffres dans la partie décimale) et qui ne nécessitent pas le recours à des « retenues ». L'élève peut appliquer ici ses compétences liées aux nombres entiers. Il peut aligner les chiffres les uns en dessous des autres en partant de la droite vers la gauche et soustraire le chiffre de dessous au chiffre du dessus.

En revanche concernant l'addition, les nombres proposés ne sont pas au même format puisqu'il y a un nombre entier et un nombre avec une partie décimale de deux chiffres. L'alignement des chiffres les uns en dessous des autres en alignant les chiffres les plus à droite dans les nombres ne fonctionne pas puisqu'ils ne sont pas au même format.

2) Analyse des productions

Élève A

Procédure

Il pose l'opération en alignant en colonnes les chiffres à partir de la droite et en plaçant en premier le nombre comportant le plus de chiffres. Il effectue ensuite une soustraction à la place de l'addition. Enfin, il place une virgule entre le 2ème et le 3ème chiffre du résultat.

Erreurs

L'élève fait une soustraction au lieu d'une addition. Ceci est peut-être dû à de l'inattention du fait que l'autre opération de l'exercice est une soustraction.

Sa deuxième erreur est de ne pas aligner correctement les chiffres. Ceci peut être dû au fait qu'il considère que pour poser une addition, il faut aligner les chiffres à partir de la droite, qui est une règle valable pour les entiers, qu'il transpose aux nombres décimaux.

Remarque

La virgule n'est pas à la bonne place mais il y a une cohérence avec l'erreur de positionnement des chiffres dans l'opération.

Élève B

Procédure

Il pose l'opération en alignant en colonnes les chiffres à partir de la droite. Il effectue l'addition rang à rang sans erreur, puis place la virgule.

Erreur

Tout comme l'élève A, il n'aligne pas correctement les chiffres, en appliquant le théorème élève : « pour poser une addition, on aligne les chiffres en partant de la droite », non valable pour les nombres décimaux.

Élève C

Procédure

Cet élève transforme la donnée 13,75 en 13,5. Il pose l'opération en alignant les 3 chiffres des deux nombres (on ne sait pas si c'est par la droite ou par la gauche). Il effectue l'addition rang à rang sans erreur et sans marquer la retenue, puis place la virgule.

Erreurs

Il prend la donnée 13,5 à la place de 13,75, et, deuxième erreur, les chiffres ne sont pas alignés correctement. Ces deux erreurs sont peut-être dues à une volonté d'avoir autant de chiffres dans 13,5 que dans 208, afin de pouvoir faire correspondre, colonne par colonne, chaque chiffre de 208 à un chiffre de 13,5.

ANALYSE DE SITUATIONS SUR LA NUMÉRATION d'après un sujet de Paris

A - Étude de manuels de cycle 3

1) Étude de l'exercice 1 d'un manuel de cycle 3

a) Deux procédures différentes, dont une à privilégier en classe

Le support proposé est constitué de timbres, de bandes et de plaques. Chacune des plaques comporte 100 timbres (plaque de 10 rangées de 10 timbres), et chacune des barres comporte 10 timbres alignés.
Différentes procédures sont envisageables pour dénombrer cette collection de timbres, c'est-à-dire pour déterminer le nombre total de timbres.

Procédure 1 : additive (calcul en ligne ou opération posée)

Additionner des unités (en organisant ou pas les différents éléments) :
$100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 100 + 100 + 1 + 1 + 1 + 100 + 100 + 10 + 1 + 100 + 10 + 10 + 1 + 1 + 10 + 10 = 876$
ou
$100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 876$.

Procédure 2 : multiplicative (calcul en ligne)

Dénombrer les éléments de chaque catégorie puis multiplier les nombres obtenus (8 et 6) par le nombre de timbres correspondant :
$8 \times 100 + 7 \times 10 + 6 \times 1 = 800 + 70 + 6 = 876$
ou
$8 \times 100 + 7 \times 10 + 6 = 800 + 70 + 6 = 876$.

Procédure 3 : s'appuyant sur les unités de numération

Dénombrer les éléments de chaque catégorie, les associer aux unités de numération et placer le chiffre au rang correspondant dans l'écriture chiffrée du nombre attendu :
8 centaines 7 dizaines 6 unités s'écrit 876.
Le nombre de plaques, le nombre de barres et le nombre de timbres seuls sont tous inférieurs à dix donc il n'y a pas de conversion à effectuer.
La troisième procédure est à privilégier : c'est celle qui exploite au mieux le sens des écritures chiffrées (par codage direct, sans calcul). Dans cette écriture, les unités de numération n'apparaissent plus ; c'est la position du chiffre dans l'écriture du nombre qui donne l'information.

b) Intention des auteurs vis-à-vis des procédures visées chez les élèves

L'intention des auteurs est d'obliger l'élève à considérer les groupements proposés : les plaques sont toutes identiques (se superposent) et chaque plaque est une centaine (de timbres), chaque barre une dizaine (de timbres) et l'unité est le timbre. Pour dénombrer cette collection organisée, le dénombrement un par un des timbres peut être évité. Il s'agit de dénombrer les éléments de chaque catégorie. Ce qui est visé est la traduction directe de cette organisation de la collection en écriture chiffrée du nombre.

2) Étude de l'exercice 2

a) Réponse à la question posée dans l'exercice

Le support proposé est constitué de boîtes de différentes tailles portant des inscriptions (10 ou 100) indiquant le nombre de perles qu'elles contiennent.
Le nombre total de perles peut se calculer en dénombrant les boîtes de chaque sorte :
16 boîtes de 100 perles et 11 boîtes de 10 perles.
On peut envisager plusieurs méthodes pour terminer le calcul.

Méthode 1 : par un calcul

$16 \times 100 + 11 \times 10 = 1600 + 110 = 1710$
ou
$16 \times 100 + 11 \times 10 = 16 \times 100 + 10 \times 10 + 10 = 17 \times 100 + 10 = 1700 + 10 = 1710$

Méthode 2 : par « échange »

Par « échange » de 10 boîtes de 10 perles, on obtient une boîte de plus de 100 perles, c'est-à-dire 17 boîtes de 100 perles et 1 boîte de 10 perles, soit 1 710 perles.

Méthode 3 : en s'appuyant sur les unités de numération

En s'appuyant sur les unités de numération, on utilise des conversions et on place chaque chiffre au rang correspondant :
16 centaines 11 dizaines = 10 centaines 6 centaines 10 dizaines 1 dizaine
= 1 millier 6 centaines 1 centaine 1 dizaine
= 1 millier 7 centaines 1 dizaine
= 1710.

b) Trois difficultés présentées par cet exercice

Relativement au travail sur le dénombrement de collections et l'exploitation du système de numération décimale), cet exercice peut présenter les difficultés suivantes :

- les boîtes sont toutes mélangées (difficulté pour s'organiser lors du dénombrement, pour réaliser l'énumération des boîtes de chaque type (100 ou 10)) ;
- le nombre de boîtes de chaque catégorie dépasse dix (passage à l'unité supérieure : 10 centaines constituent un millier et 10 dizaines, une centaine) ; le nombre de boîtes de 100 et de boîtes de 10 ne permet donc pas d'obtenir immédiatement l'écriture chiffrée ; il faut auparavant convertir 10 dizaines en 1 centaine et 10 centaines en 1 millier ;
- il n'y a pas d'unités seules, et l'écriture chiffrée du cardinal comporte donc un zéro au rang des unités ;
- la taille des boites ne correspond pas au cardinal. Les boîtes d'une même catégorie (100 ou 10) ne sont pas identiques (grosses boîtes de 10, petites boîtes de 100…).

3) Étude des exercices 3, 4, 5 et 6

a) Réponses aux questions posées dans ces quatre exercices

Exercice 3

Une unité de mille = 10 centaines.

Méthode 1

7 unités de mille = 70 centaines.

Méthode 2 : raisonnement sur les unités de numération

7 unités de mille, c'est 7 fois dix centaines, soit
$10\ centaines + 10\ centaines + 10\ centaines + 10\ centaines + 10\ centaines + 10\ centaines + 10\ centaines$
ou $7 \times 10\ centaines = 70$ centaines.

Méthode 3 : passage par les écritures chiffrées (en unité)

7 unités de mille = 7 000 = 70 centaines.

Exercice 4

Une unité de mille = 100 dizaines.

Une unité de mille, c'est dix centaines ; une centaine, c'est dix dizaines ;
donc une unité de mille, c'est $10 \times 10\ dizaines\ =\ 100$ dizaines.

5 unités de mille = 500 dizaines.

Une unité de mille, c'est 100 dizaines,
donc 5 unités de mille, c'est $100\ dizaines + 100\ dizaines + 100\ dizaines + 100\ dizaines + 100\ dizaines$ ou $5 \times 100\ dizaines$ soit 500 dizaines.

Exercice 5

a. 34 centaines = 3 400
34 centaines = 30 centaines + 4 centaines = 3 unités de mille 4 centaines qui s'écrit 3 400.

b. 164 dizaines = 1 640
164 dizaines = 100 dizaines + 60 dizaines + 4 dizaines
= 10 centaines + 6 centaines + 4 dizaines
= 1 unité de mille 6 centaines 4 dizaines
qui s'écrit 1 640.

c. 7 unités de mille = 7 000 (7 se place au quatrième rang dans l'écriture du nombre).

Exercice 6

a. 8 unités de mille 5 centaines 7 dizaines et 4 unités = 8 574 (en plaçant chaque chiffre à son rang dans l'écriture du nombre).

b. 3 unités de mille et 4 dizaines = 3 040 (en plaçant chaque chiffre à son rang dans l'écriture du nombre et en plaçant les « 0 » nécessaires).

c. 6 centaines 5 unités de mille et 2 unités = 5 602 (en plaçant chaque chiffre à son rang dans l'écriture du nombre et en plaçant le « 0 » nécessaire).

b) Deux variables didactiques pour construire les trois questions de l'exercice 6

Dans cet exercice, les nombres dont les écritures chiffrées comporteront toutes quatre chiffres, sont donnés par leur décomposition en unités de numération et le nombre correspondant à chaque unité est inférieur à dix.

Ce qui distingue les trois sous questions, c'est l'ordre dans lequel sont énoncées les unités de numération (qui correspond ou non à l'ordre des chiffres dans l'écriture chiffrée) et la présence ou non des quatre unités de numération dans la décomposition proposée.

Dans la question a), le chiffre pour chaque classe est donné et l'ordre correspond.

Dans la question b), seules les unités de mille et les dizaines sont présentes dans la décomposition proposée, 3 et 4 seront donc à inscrire au quatrième et au deuxième rang et des « 0 » seront à placer au troisième et au premier rangs.

Dans la question c), seules trois unités de numération sont présentes et elles ne sont pas dans le même ordre dans la décomposition que l'ordre des chiffres de l'écriture chiffrée (les centaines avant les unités de mille).

4) Étude de l'exercice 10

a) Réponse à la question posée pour 3 275

Mots utilisés : deux, trois, quinze, soixante, cent, mille

Écriture en lettres : **trois-mille-deux-cent-soixante-quinze**.

b) Cinq autres nombres

En utilisant exactement les mêmes mots-nombres que ceux qui sont utilisés pour 3275, en changeant l'ordre des six mots-nombres, on peut dire :

Deux-mille-trois-cent-soixante-quinze : 2 375
Soixante-quinze-mille-trois-cent-deux : 75 302
Soixante-quinze-mille-deux-cent-trois : 75 203
Trois-cent-soixante-quinze-mille-deux : 375 002
Deux-cent-soixante-quinze-mille-trois : 275 003
Deux-cent-trois-mille-soixante-quinze : 203 075
Trois-cent-deux-mille-soixante-quinze : 302 075
Soixante-trois-mille-deux-cent-quinze : 63 215
Soixante-deux-mille-trois-cent-quinze : 62 315

5) Étude de la partie « Les petits matheux »

a) Intérêt de proposer un exercice portant sur un autre système de numération que notre système de numération décimale

L'intérêt d'un tel exercice est de comparer ce système de numération (similitudes et différences) avec les nôtres, pour (re)mettre en évidence un (ou des) principe(s) de nos systèmes de numération (désignations orale (en mots) et écrite (en chiffres)).

b) Un point commun et une différence entre les règles de construction du système de numération décimale et celles du système de numération proposé

Points communs

Dans les deux systèmes, on utilise un nombre fini de symboles. Les unités sont constituées dans des groupements réguliers de 10 ; la valeur apportée par un symbole dépend de la place qu'occupe ce symbole dans l'écriture du nombre ; la valeur du nombre s'obtient par des additions et des multiplications.

Différences

Écriture « verticale », les unités simples sont « en bas ».
Le système chinois ne nécessite pas de symbole pour coder l'absence d'unité d'un rang donné (pas de « 0 »).
Les puissances de 10 intervenant dans la décomposition sont explicitées, elles sont marquées par un symbole qui suit le symbole indiquant le nombre d'unités considérées. Il faudra donc un nouveau symbole pour les dizaines de mille, les centaines de mille, les millions…
Le système chinois est assez proche de la numération orale : un symbole pour chaque chiffre de 1 à 9 (« un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf » pour les mots-nombres) puis pour chaque unité de numération, comme les mots : dix, cent, mille, … Ici « 4 10 » pour « quarante », « 3 100 4 » pour « trois cent quatre »…

6) Recours à un autre manuel

a) Trois réponses correctes pour cet exercice

Ici les données à considérer sont le nombre 1 580 présent dans le texte et les nombres sur l'illustration : gros sachet de « 100 ballons » et petit sachet de « 10 ballons ». Pour répondre à la question posée, les élèves doivent trouver une décomposition en centaines et dizaines du nombre proposé. Plusieurs réponses sont possibles :

- par « lecture directe » de l'écriture chiffrée (par troncature)

1 580 = 158 dizaines donc elle achètera 158 « sachets de 10 ».
1 580 = 15 centaines 8 dizaines donc elle achètera 15 « sachets de 100 » et « 8 « sachets de 10 ».

- par « lecture » de l'écriture chiffrée et décomposition

1 580, 14 centaines et 18 dizaines donc elle achètera 14 « sachets de 100 » et « 18 « sachets de 10 ».
1 580, 10 centaines et 58 dizaines donc elle achètera 10 « sachets de 100 » et « 58 « sachets de 10 ».

b) Modification de l'énoncé pour qu'une seule réponse correcte soit possible

Pour qu'une seule réponse correcte soit possible, il faut ajouter une contrainte dans l'énoncé. Par exemple :

> « Maria souhaite acheter le moins de sachets possibles. Combien de sachets de chaque sorte achètera-t-elle ? »

ou

> « Il ne reste plus que neuf sachets de dix ballons, combien de sachets de chaque sorte achètera-t-elle ? »

c) Complémentarité ou redondance de cet exercice.

Cet exercice fait travailler **l'interprétation d'une écriture chiffrée** en termes de nombres de centaines et de nombres de dizaines composant un nombre, en référence éventuellement à des collections, autrement dit la tâche « inverse » de celle du premier exercice du premier manuel, qui consistait à produire l'écriture chiffrée du cardinale de la collection représentée, codage dans ce cas et décodage dans l'autre.
Cette interprétation est très peu travaillée dans le 1er manuel : elle est travaillée en contexte, comme dans le second manuel, dans la première question du « problème » en fin de première page.

Remarque

La seconde question du problème est très différente et présente une tâche plus complexe puisqu'il s'agit de trouver un nombre d'unités d'une collection à partir d'une organisation décrite par une phrase « non standard » : un carton, c'est « 100 boîtes de 10 crayons » correspondent à « 100 dizaines », donc 10 centaines (10 dizaines pour une centaine), soit une unité de mille, et « 10 cartons » correspondent alors à 10 unités de mille, soit une dizaine de mille, qui s'écrit 10 000.

L'exercice du second manuel paraît donc complémentaire, et pourrait s'insérer après les exercices proposés dans le premier manuel.

B - Travail en base huit

1) Écriture chiffrée en base huit du cardinal de chacune des collections de timbres

Collection A : $\overline{\mathbf{452}}^{\text{huit}}$

En effet, chaque plaque contient 8^2 petits carrés (huit huitaines) et chaque barre contient 8 petits carrés (une huitaine). En dénombrant chaque sorte de matériel, et en plaçant chaque nombre obtenu tous inférieurs à 8 (4 plaques, 5 barres, 2 carrés) au bon rang dans l'écriture, on obtient : $\overline{\mathbf{452}}^{\text{huit}}$**.**

Remarque

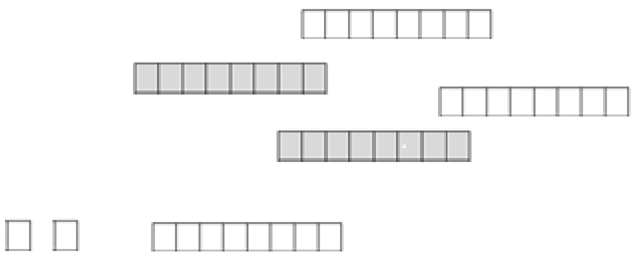
Proposer une méthode qui passerait par le dénombrement en base dix (on trouverait 298), ferait perdre le codage direct, et obligerait, par exemple, à réécrire par divisions successives par 8 le résultat interprété à partir du matériel (groupements en 8^2, groupements en 8 et unités).

Collection B : $\overline{\mathbf{120}}^{\text{huit}}$

La collection B est composée de 10 barres de 8 carrés. Avec 8 barres, en les regroupant, il est possible de constituer une plaque. La collection est donc constituée d'1 plaque et 2 barres. L'écriture chiffrée en base huit du cardinal de la collection B est donc $\overline{\mathbf{120}}^{\text{huit}}$**.**

2) Dessin d'une collection de $\overline{\mathbf{52}}^{\text{huit}}$ timbres

Cette écriture chiffrée correspond au cardinal d'une collection organisée composée de 5 barres de 8 timbres (cinq huitaines) et 2 timbres isolés. Toute autre organisation de la collection de timbres est envisageable ($5 \times 8 + 2 = 42$ timbres).



3) Écriture en base dix les nombres qui s'écrivent $\overline{\mathbf{231}}^{\text{huit}}$ et $\overline{\mathbf{700}}^{\text{huit}}$

Il faut décoder l'écriture en base huit en considérant la valeur de chaque chiffre suivant le rang qu'il occupe :

$\overline{231}^{\text{huit}} = \mathbf{2} \times 8^2 + \mathbf{3} \times 8^1 + \mathbf{1} \times 8^0 = 2 \times 64 + 3 \times 8 + 1 = 128 + 24 + 1 = \mathbf{153}$.

$\overline{700}^{\text{huit}} = \mathbf{7} \times 8^2 + \mathbf{0} \times 8^1 + \mathbf{0} \times 8^0 = 7 \times 64 = \mathbf{448}$.

4) Écriture en base huit du nombre qui s'écrit $\overline{\mathbf{1580}}^{\text{dix}}$

Procédure 1

Il s'agit de trouver une décomposition du nombre 1 580 suivant les puissances de 8, c'est-à-dire $8^3 = 512$, $8^2 = 64$, $8^1 = 8$ et $8^0 = 1$, avec des coefficients inférieurs à 8.

On effectue les divisions euclidiennes $1\,580 = 512 \times 3 + 44$, puis $44 = 5 \times 8 + 4$.
$\overline{1580}^{\text{dix}} = 3 \times 512 + 5 \times 8 + 4 = \mathbf{3} \times 8^3 + \mathbf{0} \times 8^2 + \mathbf{5} \times 8^1 + \mathbf{4} \times 8^0 = \overline{\mathbf{3054}}^{\textbf{huit}}$.

Procédure 2

Pour déterminer le nombre des différents groupements, on procède par divisions successives par 8.
$1\,580 = 8 \times 197 + 4$ soit 197 groupes de huit et 4 (ce reste 4 correspondra au chiffre des unités),
puis $197 = 8 \times 24 + 5$ soit 24 groupes de 8 huitaines et 5 huitaines (ce chiffre 5 correspond aux « paquets de huit » qui s'écrira deuxième rang),
puis $24 = 8 \times 3$ soit 3 groupes de 8 fois 8 huitaines.
Ainsi une collection de 1580 objets peut être organisée en 3 groupes de 8 x 8 x 8 et 5 groupes de 8 et 4 objets
D'où $\overline{1580}^{\text{dix}} = \overline{\mathbf{3054}}^{\textbf{huit}}$.

ANALYSE DE SITUATIONS SUR LA DIVISION
d'après un sujet de Besançon

A – Un problème en classe de CE2

1) Définition de la division euclidienne

Soient a et b deux entiers naturels avec $b \neq 0$.
Il existe toujours deux entiers naturels **uniques** q et r tels que $a = b \times q + r$ et $0 \leq r < b$.
Déterminer le couple $(q\ ;\ r)$, c'est effectuer la division euclidienne de a par b.
On appelle a le dividende, b le diviseur, q le quotient euclidien et r le reste euclidien.

2) Procédures d'élèves de CE2

De nombreuses procédures sont envisageables pour des élèves de CE2.

Procédure n°1 : basée sur le dessin

On peut envisager une procédure basée sur le dessin des mains des élèves et de tous les doigts. Par groupe de 5 doigts, un élève peut dessiner une main. Des comptages et recomptages du tout permettront à cet élève de connaître le nombre total de doigts et donc de mains. En dénombrant le nombre de groupes de 5 ainsi dessinés, l'élève peut parvenir à trouver la réponse correcte 11 mains.

Procédure n°2 : basée sur le calcul additif

On peut envisager une procédure basée sur le calcul additif avec des essais successifs du type :
$5 + 5 = 10$ puis $10 + 5 = 15,\ 15 + 5 = 20,\ 20 + 5 = 25,\ 25 + 5 = 30,\ 30 + 5 = 35,\ 35 + 5 = 40,$
$40 + 5 = 45, 45 + 5 = 50$ et $50 + 5 = 55$.
En pointant et en comptant le nombre de 5 ainsi ajoutés, l'élève peut parvenir à trouver la réponse correcte 11 mains.

Remarque

Ce sont dans ces procédures que des écrits additifs erronés dans leur formalisme apparaissent du type :
$5 + 5 = 10 + 5 = 15 + 5 = 20 + 5 = 25 + 5 = 30 + 5 = 35 + 5 = 40 + 5 = 45 + 5 = 50 + 5 = 55$.

Procédure n°2 bis : variante basée sur le calcul additif

La procédure précédente étant longue, des adaptations ont souvent lieu.
À partir de $5 + 5 = 10$, apparaissent des prises de conscience que $10 + 10 = 20$ et que $20 + 20 = 40$ ou que $10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50$.
Il convient là encore de bien dénombrer le nombre de 5 ainsi utilisés (2 à chaque apparition du 10) pour conclure correctement à 11 mains.

Procédure n°3 : basée sur le calcul soustractif

On peut envisager une procédure basée sur le calcul soustractif avec des essais successifs du type :
$55 - 5 = 50$ donc 1 main, puis $50 - 5 = 45$ donc 2 mains, etc. jusqu'à $5 - 5 = 0$ donc 11 mains avec un double décompte à tenir.

Procédure n°3 bis : variante basée sur le calcul soustractif

La procédure précédente étant longue, des adaptations peuvent avoir lieu.
Après avoir pris conscience que $5 + 5 = 10$ donc que 10 c'est 2 mains, on peut envisager une procédure basée sur le calcul soustractif avec des essais successifs du type :
$55 - 10 = 45$ donc 2 mains, puis $45 - 10 = 35$ donc 2 mains de plus, etc. jusqu'à $15 - 10 = 5$ donc 2 mains de plus et encore $5 - 5 = 0$ donc encore 1 main de plus avec un double décompte à tenir.

Procédure n°4 : basée sur le calcul multiplicatif et la maîtrise de la table de 5

En lien avec la table de 5, un élève peut essayer 5 fois 5 c'est 25, encore 5 fois 5 c'est 25, donc 50 et encore 5 c'est 55 donc au total 11 mains.

Procédure n°5 : basée sur le calcul multiplicatif, la maîtrise de la table de 5, et des essais/ajustements

Une procédure basée sur des essais/ajustements peut avoir lieu.
4 fois 5 c'est 20 pas assez, 6 fois 5 c'est 30 pas assez, 8 fois 5 c'est 40, pas assez, 10 fois 5 c'est 50 pas assez il manque encore 5, donc 10 mains + 1 main = 11 mains.

Procédure n°5 bis : basée sur le calcul multiplicatif, la maîtrise de la table de 5 et « 5 fois 10 c'est 50 »

On s'appuie sur la connaissance « 50, c'est 10 fois 5 ».
On en déduit que comme $55 = 50 + 5$, 55 c'est « 10 fois 5 » et encore « 1 fois 5 », c'est donc « 11 fois 5 ».
Il faut donc lever 11 mains.

Procédure n°6 : basée sur la très bonne connaissance de la numération décimale

On s'appuie sur la connaissance du système décimal : 55 c'est 5 dizaines et 5 unités.
Dans une dizaine il y a 2 fois 5. 55 est donc égal à 10 fois 5 et encore 5, soit 11 fois 5.

Remarque

Le jour de l'épreuve, on veillera à se contenter de répondre à la question en ne proposant que trois procédures d'élèves.

3) a) Type de problème proposé

Le problème de l'énoncé est **un problème de groupement**. Il fait référence aux problèmes dans lesquels on cherche « **combien de fois une grandeur contient une autre grandeur ».**

Remarque

On connaît ici le nombre total de doigts et le nombre de doigts dans chaque main et on cherche le nombre de mains de 5 doigts : on définit aussi cette division comme la division-quotition (recherche du nombre de parts).

3) b) Énoncé de problème de l'autre type

Ce nouveau problème doit être **un problème de partage**. Il doit faire référence à un problème **« où l'on partage une grandeur en un nombre donné de grandeurs ».**
On peut par exemple proposer :
« 5 enfants se sont partagés équitablement 55 bonbons au chocolat. Quelle est la part de chaque enfant ».
(Cet énoncé avec 45 (au lieu de 55) est proposé par exemple dans le fichier *J'apprends les maths CE2*, Retz, 2016, page 83).

Remarque

On connaît ici le nombre total de bonbons et le nombre d'enfants qui vont recevoir équitablement les bonbons. On cherche le nombre de bonbons reçus par chaque enfant : on définit aussi cette division comme la division-partition (recherche de la valeur d'une part).

B - Un problème en classe de CE1 : procédures utilisées

Production d'Édouard

Édouard utilise une procédure basée sur le schéma et le calcul additif en ligne. Il a interprété correctement ce problème.
Il dessine correctement les trois rangées de salades et en met bien le même nombre par rangée (15). Dans son organisation, à chaque « correspondance terme à terme de colonne » il considère que cela fait 3 salades et il accompagne son dessin par des écrits chiffrés 3 et les ajoute. Il transforme en fait ce problème de partage en un problème de groupement (« 45 partagés en 3 », devient « dans 45 combien de groupes de 3 »).
Il peut chercher le nombre d'ajouts de 3 nécessaires pour obtenir un total égal à 45.

Mais il se trompe en ne faisant que 13 flèches et en n'écrivant que 13 nombres égaux à 3 dans ses deux additions en ligne (au lieu de 15). Sa réponse « 15 rangées de 3 salades » témoigne de sa reformulation du problème en un problème de groupement. La réponse attendue est « 3 rangées de 15 salades».

Production de Philippe

Philippe reconnaît dans ce problème un problème multiplicatif. Mais il ne l'interprète pas correctement comme une multiplication à trou. Il utilise au contraire les données numériques fournies dans l'énoncé et les multiplie entre elles en effectuant un calcul multiplicatif posé en colonne.
Son résultat à la multiplication posée est également erroné. Il ne semble pas totalement maîtriser la multiplication posée par un nombre à un chiffre.
Il calcule correctement 3 fois 5, c'est 15 écrit correctement le 5 au rang des unités et pose correctement une retenue de 1 dizaine à côté de sa multiplication posée. La suite de son calcul posé est erronée puisqu'il obtient 3 dizaines au résultat au lieu des 13 attendues. Son erreur semble provenir de son interprétation finale du 13 dizaines obtenues : « 3 fois 4 dizaines, c'est 12 dizaines auquel j'ajoute 1 dizaine de retenue que je barre, cela donne 13 dizaines. Donc j'écris 3 dizaines au rang des dizaines du résultat et je retiens une retenue égale à 1 centaine posée à côté de la multiplication posée. ».
Son résultat numérique est erroné. Sa réponse au problème est également erronée.
Il oublie le s du pluriel à « rangées ».

Production de Marlène

Marlène ne reconnaît pas le modèle multiplicatif et ne donne pas de sens à l'opération en jeu dans ce problème. Elle utilise les seules données numériques fournies dans l'énoncé et les ajoute par un calcul additif posé en colonne. Son résultat de l'addition posée est correct mais sa réponse au problème est erronée. Elle oublie le s du pluriel à « salades ».

C - Un problème en classe de CE1 : analyse d'erreurs

La division euclidienne de 4 318 par 14 donne $4\ 318 = 14 \times 308 + 6$. Les deux élèves trouvent le reste égal à 6 mais pas le quotient.

Production de Francine

Francine met en œuvre une technique opératoire posée de la division basée sur le partage successif des ordres de groupements du dividende. Elle partage les 43 centaines de 4318 dans un premier temps.
Francine évalue mal le premier chiffre de son quotient. Elle se trompe en écrivant 2 (centaines) au lieu de 3 (centaines). Elle ne se rend pas compte que son reste, 15, est trop grand (en regard du diviseur 14). Le reste de sa technique est « cohérente ». Ainsi son deuxième calcul soustractif (– 14) qui devrait correspondre encore à des centaines est considéré par Francine comme des dizaines.
Elle commet également une erreur dans le calcul du produit de 14 par 8 (elle trouve 102 au lieu de 112) mais curieusement, la soustraction également fausse lui permet de trouver le reste correct.
Francine gagnerait à évaluer l'ordre de grandeur de son résultat pour valider son opération. En effet, ici son quotient est clairement trop grand. Elle pourrait pour cela s'appuyer sur la décomposition du nombre et prendre conscience qu'à la première étape elle partage 43 centaines en 14 et que le nombre qu'elle va obtenir correspond au chiffre des centaines du quotient.
Il est à noter que même en ne trouvant pas le plus grand multiple de 14 s'approchant de 48 à la première étape, Francine aurait pu poursuivre l'algorithme en remarquant qu'elle pouvait encore soustraire au rang des centaines 1 fois 14 à 15. Il aurait alors fallu adopter pour l'écriture du quotient une présentation permettant de distinguer la position des chiffres suivant leur valeur dans le nombre.

	4	3	1	8	1	4	
-	2	8			2		
	1	5			1		
-	1	4				0	
		1	1	8			8
	-	1	1	2	3	0	8
				6			

Production de Farid

Comme Francine, Farid met en œuvre une technique opératoire posée de la division basée sur le partage successif des ordres de groupements du dividende. Il partage les 43 centaines de 4 318 dans un premier temps.
Mais Farid, à la deuxième étape de son calcul posé, oublie le zéro en chiffre des dizaines.
On peut formuler deux hypothèses : soit il a abaissé les deux chiffres 1 et 8 en une seule fois, ou alors, il a abaissé le 1 d'abord, s'est rendu compte que le nouveau dividende, 11, « *était trop petit* » et a abaissé le 8 sans tenir compte de cette nouvelle étape dans son quotient.
Farid lui aussi gagnerait à évaluer l'ordre de grandeur de son résultat pour valider son opération. En effet, ici son quotient est clairement trop petit.
<u>Remarque : à propos du quotient 0</u>
« En 11 combien de fois 14 ? » : la réponse spontanée chez certains élèves est : « C'est impossible ».
« Si je partage équitablement 11 objets entre 14 personnes, combien chacun recevra-t-il ? ». La réponse est le plus souvent « Rien ». Il faut donc accepter psychologiquement que rien est quelque chose, ou du moins qu'il se note 0. 0 indique l'absence et il faut se convaincre de noter l'absence.

D – Un problème avec quotient décimal

a) Division euclidienne

Ce problème ne relève pas de la division euclidienne. On cherche ici un quotient non entier et on veut que le reste soit nul. Le quotient cherché est décimal, c'est une division décimale.
Dans les programmes 2016 du cycle 3, cela renvoie à « la division de deux nombres entiers avec quotient décimal».

b) Cycle et classe

D'après les programmes 2016, ce problème peut être proposé au cycle 3. Au cycle 2, seule la division euclidienne est approchée.
Dans les repères de progressivité proposés dans les programmes du cycle 3, on peut lire :
« La pratique du calcul mental s'étend progressivement des nombres entiers aux nombres décimaux, et les procédures à mobiliser se complexifient : division euclidienne dès le début de cycle, **division de deux nombres entiers avec quotient décimal, division d'un nombre décimal par un nombre entier à partir du CM2**. »
On peut donc envisager de proposer cet énoncé de problème au cycle 3 dans les classes de CM2 et de 6ème.

c) Analyse de productions d'élèves

Production de Catherine

Catherine n'a pas compris que ce problème ne relevait pas de la division euclidienne, mais de la division décimale.
Elle pose correctement une division euclidienne de 300 par 24.
Son calcul posé est correct : on a bien $24 \times 12 + 12 = 300$.
Mais elle ne prolonge pas sa division pour obtenir un quotient décimal et elle ne pense pas à encore partager le reste obtenu 12.
Sa réponse 12 euros est donc erronée.

Production de Pierre

Pierre utilise une technique opératoire de la division posée par partage successif des ordres de groupements du dividende. Ses premières étapes sont correctes et bien maîtrisées.
Il pose correctement le calcul posé de la division décimale mais ne trouve pas le bon quotient décimal : il trouve 12,41 au lieu de 12,5.
Son erreur est à rapprocher de celle de Francine dans la partie **C**.
En effet, Pierre évalue mal le chiffre des dixièmes de son quotient. Il se trompe en écrivant 4 (dixièmes) au lieu de 5 (dixièmes).
Il ne se rend pas compte que son reste, 24, est encore trop grand (en regard du diviseur 24). Il considère donc que « les 24 qui restent » sont des centièmes et qu'il peut encore distribuer 1 centième pour le quotient.

Ainsi son dernier calcul soustractif (– 24) qui devrait correspondre encore à des dixièmes est considéré par Pierre comme des centièmes.
Sa réponse est donc erronée mais il interprète bien que le quotient décimal trouvé est le prix d'un ticket.
Des erreurs non mathématiques à relever : son verbe « coutent » est accordé au pluriel avec pour sujet « le billet » .et ne comporte pas d'accent circonflexe sur le « u ».

Production de François

La production de François est correcte. La technique opératoire de la division posée par partage successif des ordres de groupements du dividende est maîtrisée. Il pose correctement le calcul posé de la division décimale et trouve le bon quotient décimal 12,5 (12,50 dans ce contexte de prix). Sa réponse est également correcte et il interprète bien que le quotient décimal trouvé est le prix d'un ticket.
La seule erreur n'est pas mathématique : elle porte sur son « s » final erroné à « un ticket**s** ».