

Untersuchungen am Ein-Atom-Maser mit externer Einkopplung

Dissertation der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von Christof Tilmann Bodendorf
aus Stuttgart

München, den 19. Januar 2000

1. Gutachter: Prof. Dr. H. Walther
2. Gutachter: Prof. Dr. A. Schenzle

Tag der mündlichen Prüfung: 17.1.2000

Zusammenfassung

Der Ein-Atom-Maser ist ein Instrument, mit dem die Wechselwirkung von Licht und Materie in ihrer fundamentalsten Form beobachtet werden kann: Einzelne Rydberg-Atome in einem hochkollimierten Strahl mit scharf definierter Geschwindigkeit werden in einen Resonator sehr hoher Güte injiziert, der auf den atomaren Übergang in einen energetisch wenig tiefer liegenden Rydberg-Zustand mit außergewöhnlich großem elektrischen Dipol-Übergangsmatrixelement abgestimmt ist. Durch die Kombination von hoher Resonatorgüte mit großem Übergangsmatrixelement ist die Bedingung für ein stark gekoppeltes Atom-Feld-System geschaffen. Es kommt daher zum periodischen, nahezu reversiblen Austausch eines Energiequants zwischen Atom und Feldmode. Nach aufeinanderfolgender Wechselwirkung vieler Atome baut sich im Resonator ein Feld auf, das von der stattfindenden Maser-Tätigkeit zeugt. Dabei besteht das verstärkende Medium immer aus einem einzelnen Atom. Anders als beim „makroskopischen“ Maser spiegelt deshalb das Ein-Atom-Maser-Feld unmittelbar die Dynamik der wechselwirkenden Atome wider.

Alle Information über das Feld erhält man indirekt durch Beobachtung des Energiezustandes der Atome nach Verlassen des Resonators. Ohne weitere Maßnahmen ist diese Observable des Feldes jedoch nicht sensitiv auf die *Phaseneigenschaften* des Feldes. Es sind nur Aussagen über die Photonenzustandstatistik möglich. Aus diesem Grund wird in der vorliegenden Arbeit sowohl auf theoretischer als auch auf experimenteller Ebene eine neue Meßmethode entwickelt, die es erlaubt, weitergehende Aussagen zu machen, welche die Kohärenzeigenschaften des Maser-Feldes einschließen. Dabei spielt die Kopplung des Maser-Resonators an eine externe monochromatische Strahlungsquelle eine zentrale Rolle: Ein kurzer Mikrowellenpuls, der einem Feldzustand überlagert wird, führt zu einer „Verschiebung“ im Phasenraum und stellt auf diese Weise eine phasensensitive Observable des Feldes durch Bestimmung der Besetzungswahrscheinlichkeit der atomaren Energieniveaus zur Verfügung. Dieses Meßprinzip besitzt gegenüber anderen, auf der *Kohärenz* der atomaren Superposition basierenden Methoden den Vorteil größerer Robustheit gegen experimentelle Störeinflüsse und den Vorzug sehr allgemeiner Anwendbarkeit.

Das „Meßpuls“-Verfahren wird durch zwei mögliche Anwendungen zur Bestimmung des quantenmechanischen Zustandes des Maser-Feldes konkretisiert. Es handelt sich um ein „Rekonstruktionsverfahren“, basierend auf einem „Set“ von Messungen, und ein Schema zur punktwisen Bestimmung einer Phasenraumfunktion, nämlich der charakteristischen Funktion der Wigner-Verteilung.

Außerdem wird das allgemeine Problem der Wechselwirkung eines Atoms mit einer Feldmode, die an einen klassischen harmonischen Oszillator gekoppelt ist, unter Berücksichtigung der Dämpfungsverluste des Resonators bei endlicher Temperatur behandelt. Für verschiedene Spezialfälle werden analytische Lösungen angegeben; insbesondere wird eine relativ allgemeine Drehwellennäherung gefunden. Der an eine externe Strahlungsquelle phasengekoppelte

Maser-Zustand wird ebenfalls untersucht.

Im experimentellen Teil wird der Aufbau und Test eines schwingungs-gedämpften Ein-Atom-Maser-Experiments beschrieben. Die Funktion des neuen Aufbaus wird durch Aufnahme der Resonanzkurve des Ein-Atom-Masers demonstriert.

Besondere Bedeutung für eine stabile Einkopplung in einen Resonator sehr hoher Güte (und mit entsprechend scharfer Resonanz) besitzt die Schwingungsdämpfung des Aufbaus. Daher wurde auf die konsequente Dämpfung mechanischer Schwingungen geachtet. Insbesondere ist der gesamte Vakuum-Bereich auf einem speziell angefertigten Lasertisch mit aktiver Luftkissen-Dämpfung angebracht. Durch verschiedene Mikrowellenexperimente wird gezeigt, daß die zunächst dominierende inhomogene Verbreiterung der Resonanzkurve des Resonators auf die homogene Linienform mit einer Breite von wenigen Hertz reduziert werden kann. Außerdem wird die *kohärente* „Verschiebung“ im Phasenraum mit Hilfe der Puls-Methode nachgewiesen.

Abschließend werden grundlegende Experimente zur Atom-Feld-Wechselwirkung bei externer Kopplung des Maser-Resonators durchgeführt, bei denen die erwarteten Rabi-Oszillationen der atomaren Besetzungsinversion als Funktion der eingestrahlten Leistung auf unterschiedliche Weise zu beobachten sind.

Inhaltsverzeichnis

• Zusammenfassung	3
1 Einleitung	7
1.1 Atome im modifizierten Vakuum	7
1.2 Der Ein-Atom-Maser im Überblick	10
1.3 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit	13
2 Das Jaynes-Cummings-Modell	15
2.1 Der Hamilton-Operator	15
2.2 Das Bild der „dressed states“	18
2.3 Dynamik im Jaynes-Cummings-Modell	20
3 Theorie des Ein-Atom-Masers	24
3.1 Dichtematrix-Formalismus und stationärer Zustand	24
3.1.1 Die Pumpphase	24
3.1.2 Die Dämpfungsphase	27
3.1.3 Mastergleichung des Ein-Atom-Masers	28
3.1.4 Stationäre Lösung	29
3.2 Kohärenz im Ein-Atom-Maser	33
3.2.1 Definition des Spektrums	33
3.2.2 Phasendiffusion semiklassisch	34
4 Der Ein-Atom-Maser mit externer Einkopplung	44
4.1 Die phasensensitive Beobachtungsebene	44
4.2 Der quantenmechanische Strahlteiler	45
4.3 Phaseninformation durch Meßpulse	48
4.4 Die vollständige Problemstellung	52
4.4.1 Verschiedene Darstellungen	52
4.4.2 Analytische Lösungen	55
4.5 Der phasengekoppelte Maser	61
5 Vermessung von Quantenzuständen im Resonator	66
5.1 Einleitung	66
5.2 Zustandsrekonstruktion	67
5.2.1 Übergang zur Fock-Darstellung	67
5.2.2 Separation der Diagonalen	69
5.2.3 Diskretisierung der Winkel	70

5.2.4	Fehlerabschätzung und numerische Methode	71
5.2.5	Computersimulation	74
5.3	Messung der Wigner'schen charakteristischen Funktion	78
5.3.1	Definition und Eigenschaften	78
5.3.2	Charakteristische Funktion als Beobachtungsgröße	80
5.3.3	Beispiel „Schrödingerkatze“	81
6	Aufbau des Experiments und vorbereitende Messungen	86
6.1	Hauptkomponenten des Experiments	86
6.1.1	Der Ein-Atom-Maser-Aufbau	86
6.1.2	Das Lasersystem	88
6.2	Laser-Spektroskopie mit Rydberg-Atomen	89
6.3	Geschwindigkeitsselektion	91
6.3.1	Schiefe Laseranregung	91
6.3.2	Stark-Verschiebung des Spektrums	92
6.4	Zustandsselektive Feldionisation	94
6.5	Magnetfeldkompensation	96
6.6	Die Resonanzkurve des Ein-Atom-Masers	98
7	Messungen mit externer Einstrahlung	100
7.1	Mikrowellen-Experimente	100
7.1.1	Der Resonator	100
7.1.2	Schwingungsdämpfung	101
7.1.3	Verschiebung im Phasenraum	105
7.2	Ein-Atom-Maser-Betrieb mit externer Kopplung	108
8	Zusammenfassung und Ausblick	116
A	Der Verschiebungsoperator	120
B	Der quantenmechanische Phasenraum	122
•	Literaturverzeichnis	125

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Atome im modifizierten Vakuum

Das 1911 aufgrund der *Rutherford'schen* Streuexperimente aufgestellte Atommodell demonstriert besonders dramatisch das tiefgreifende Unvermögen der klassischen Physik zur adäquaten Beschreibung mikroskopischer Vorgänge: Ähnlich der Planeten im Sonnensystem sollten sich die Elektronen auf beschleunigten Bahnen um einen Atomkern bewegen. Die dabei gemäß der Maxwell'schen Elektrodynamik auftretende Strahlungsdämpfung würde jedoch zum Sturz der Elektronen in den Kern, und damit zum Kollaps der Materie führen. Weitreichende Änderungen der theoretischen Grundlagen waren erforderlich.

Die in der Folge einsetzende Entwicklung einer neuen Theorie, der *Quantenmechanik*, war historisch eng verknüpft mit den Fortschritten im Verständnis des Atombaus; das Atom bildete einen „Archetyp“, an dem sie sich messen konnte. Die quantenmechanische Beschreibung des von seiner Umgebung isolierten Wasserstoffatoms lieferte die diskreten Energieniveaus der Elektronen, wodurch die Spektrallinien in zunächst guter Übereinstimmung mit der Beobachtung erklärt wurden.

Was aber das klassische Modell *zuviel* gehabt hatte, nämlich die unbeschränkte Dämpfung des Elektrons bis zum Sturz in den Kern, das hatte das neue Modell *zu wenig*: Der strahlende Zerfall angeregter Niveaus in den Grundzustand ohne (unmittelbar erkennbare) äußere Einwirkung, der ja im Experiment offensichtlich der *einzig* stabile ist, war nicht erfaßt. Elektronische Übergänge konnten lediglich durch die Einwirkung eines klassisch beschriebenen Lichtfeldes *induziert* werden. Damit waren keine Aussagen über so grundlegende Eigenschaften wie Zerfallsraten der Anregungszustände und die damit verbundenen spektralen Linienformen möglich. Der *spontane* Emissionsprozeß und die damit verbundene „natürliche“ Lebensdauer wurde zwar bereits 1917 von Albert Einstein im Rahmen seiner Herleitung der Planck'schen Formel für das Spektrum der Schwarzkörperstrahlung postuliert [1], er wurde jedoch nicht theoretisch begründet, sondern als zusätzliche unveränderbare Eigenschaft des Atoms alleine und unabhängig von äußeren Einflüssen eingeführt.

Ein tieferes Verständnis der Vorgänge bei der Spontanemission lieferten Weißkopf und Wigner 1930 [2], indem sie zeigten, daß das Atom nicht als los-

gelöst von seiner Umgebung betrachtet werden kann. Die bei einer quantenmechanischen Behandlung der elektromagnetischen Strahlung schon wegen der Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelation zwangsläufig auftretenden fluktuierenden Vakuumzustände des leeren Raumes (auch als „*Quantenrauschen des Vakuums*“ bezeichnet) „induzieren“¹ elektronische Übergänge in den Grundzustand. Damit war gleichzeitig die erste quantenmechanische *Reservoirtheorie* geschaffen: Die Anbindung des Atoms an das kontinuierliche Spektrum der Vakuummoden des freien Raums entspricht der Kopplung an ein „Wärmebad“ bei 0 Kelvin mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Dadurch erfolgt ein „Temperaturangleich“, d. h. Dämpfung angeregter Zustände in den Grundzustand. Es handelt sich also nicht mehr um die unitäre Dynamik eines abgeschlossenen, sondern um die *irreversible* eines offenen *dissipativen* Systems.

Ein weiterer Effekt der Kopplung des Atoms an das Vakuumfeld ist eine Verschiebung atomarer Energieniveaus hauptsächlich infolge einer virtuellen Emission und Reabsorption von Photonen. Er wurde 1947 von Lamb und Retherford durch Mikrowellenexperimente am Wasserstoffatom entdeckt [3]; erste Berechnungen erfolgten im gleichen Jahr von Bethe [4]. Heutige Präzisionsmessungen der Lamb-Verschiebung [5] dienen als Test genauer, störungstheoretisch in hoher Ordnung ermittelter Vorhersagen der Quantenelektrodynamik² [6].

Beide Phänomene zeigen den engen Zusammenhang zwischen Atomphysik und Quantenelektrodynamik. Während die Existenz von Vakuummoden sich dabei jedoch nur mittelbar – nämlich in atomaren Eigenschaften – zeigt, liefert der Casimir-Effekt [7] ihren direkten Nachweis. Er beruht auf der Modifikation des Modenspektrums des unbegrenzten Raums durch einschränkende Randbedingungen. So wird die Anzahl der möglichen Moden zwischen zwei leitenden Platten eines Kondensators mit deren gegenseitiger Annäherung zunehmend reduziert. Die Summe der Nullpunktsenergien aller Moden sowohl mit, als auch ohne Randbedingungen ist divergent. Dennoch ergibt die Differenz beider divergenter Energien einen endlichen und wohl definierten Wert, dessen Gradient auf eine attraktive „*Quantenkraft*“ ohne klassisches Analogon führt. Der Casimir-Effekt konnte neuerdings experimentell bestätigt werden [8].

Diese Betrachtung hat uns in das Gebiet der *Resonator-Quantenelektrodynamik* (Resonator-QED) geführt, das die Modifikation der elektromagnetischen Zustandsdichte durch leitende oder auch dielektrische Materialien und die damit verbundenen Effekte zum Thema hat. Nachdem Eigenschaften wie Spontanemission und Niveauverschiebungen bei Atomen erst durch die Anbindung an ihre Umgebung verständlich werden, erwartet man auch deren Beeinflussung durch die Veränderung der umgebenden Modenstruktur. Dieser Gedanke wurde bereits 1946 in einer kurzen Notiz von Purcell [9] ausgesprochen. Das Verhalten von Atomen im Resonator-modifizierten Vakuum läßt

¹Aus historischen Gründen spricht man jedoch weiterhin von „spontanen“ Prozessen.

²Weitere Beiträge zur Klärung atomarer Spektren, auf die wir hier aber nicht näher eingehen wollen, liefern die Feinstruktur-Aufspaltung gemäß der relativistischen Theorie des Elektrons nach Dirac und die Hyperfeinstruktur-Aufspaltung, die eine Wechselwirkung der Elektronen mit dem Kernspin berücksichtigt.

sich in zwei qualitativ unterschiedliche Bereiche einteilen:

i) **Schwache Kopplung oder „perturbative Resonator QED“:** Dieser störungstheoretisch erfaßbare Fall liegt vor, wenn die elektrischen Dipol-Kopplungskonstanten g aller atomaren Übergänge klein sind im Vergleich zur Dämpfungskonstanten γ des Resonators. Anders ausgedrückt ist dann die Energiespeicherzeit in der Kavität $t_E = 1/\gamma$, nach der die Energie auf $1/e$ des Anfangswertes abfällt, klein verglichen mit π/g , was im reversiblen Fall gerade die Periodendauer einer Vakuum-Rabi-Oszillation wäre. Anschaulich gesprochen dissipiert ein emittiertes Photon lange bevor es vom Atom reabsorbiert werden kann. Damit ist das Verhalten weiterhin *irreversibel* und dem im freien Raum ähnlich: Das Atom steht in Wechselwirkung mit einer großen Zahl von Moden des Resonators, deren adäquate Beschreibung nach wie vor durch eine – gegenüber dem leeren Raum allerdings modifizierte – Modendichte erfolgt. Atomare Zerfallsraten ändern sich jedoch quantitativ; sie können sowohl *verstärkt*, als auch *unterdrückt* werden, je nachdem, ob die Modendichte im Bereich wichtiger Zerfallskanäle erhöht oder erniedrigt wird. Beide Effekte konnten experimentell beobachtet werden [10].

Außerdem bewirkt die veränderte Modenstruktur eine Verschiebung atomarer Energieniveaus, die sich von dem Ergebnis im freien Raum unterscheidet [11]. Diese Modifikation der Lamb-Verschiebung konnte kürzlich im retardierten Regime (in dem van-der-Waals-artige elektrostatische Wechselwirkungen keine Rolle spielen) experimentell beobachtet werden. Die geringe Niveauverschiebung von etwa 100 Hz zwischen zwei leitenden Platten wurde bei Rubidium-Rydberg-Atomen mit Hilfe der Ramsey-Methode nachgewiesen [12].

ii) **Starke Kopplung oder „nicht-perturbative Resonator QED“:** In diesem Bereich zeigt sich ein qualitativ neues Verhalten. Im Gegensatz zum Modenkontinuum des perturbativen Regimes bestehen nur noch äußerst scharf definierte Schwingungsformen eines Resonators hoher Güte. Starke Kopplung liegt vor, wenn die elektrische Dipol-Kopplungskonstante g eines atomaren Übergangs an eine (quasi)resonante Mode groß ist im Vergleich zu deren Dämpfungsrate γ . In diese Mode emittierte Photonen werden dann so lange im Resonator gespeichert, daß sie nach einer Rabi-Periode (also nach der Zeit π/g) reabsorbiert werden können. Voraussetzung dafür ist aber, daß auch die Dämpfung der beteiligten atomaren Zustände durch andere Zerfallskanäle hinreichend gering, d. h. ihre Lebensdauern groß verglichen mit der Zeit für eine Rabi-Periode ist. Da die Unterdrückung des Zerfalls durch den Resonator nur in einem begrenzten Frequenzbereich technisch realisiert werden kann, ist man in der Regel auf Atome angewiesen, die bereits hohe *natürliche* Lebensdauern besitzen³. Es kommt dann zum periodisch oszillierenden, mehr oder weniger gedämpften Austausch eines Photons zwischen Atom und Feld mit der Rabi-Frequenz $\sqrt{n+1}g/2\pi$. Für Zeiten, die kurz gegen Dämpfungszeiten von Atom und Feld

³Zirkulare Zustände [10, 13] bilden hier eine Ausnahme. Für sie existiert nur *ein* Zerfallskanal, dessen resonatorbedingte Unterdrückung eine sehr deutliche Erhöhung der Lebenszeit bewirken kann.

sind, kann das System, bestehend aus zwei atomaren Niveaus und einer Mode des Feldes, nun als *abgeschlossen* betrachtet werden. Das Atom ist dann von seiner „natürlichen Umgebung“ entkoppelt. In diesem Regime läßt sich die *unitäre, reversible* Dynamik des *Jaynes-Cummings-Modells* (1963) [14] anwenden. Die starke Kopplung spielt bei der Realisierung des Ein-Atom-Masers [15] eine entscheidende Rolle. Der Betrieb eines Ein-Atom-Masers konnte 1985 erstmals nachgewiesen werden [16].

1.2 Der Ein-Atom-Maser im Überblick

Angenommen:

Ein Atom sei in einem angeregten Zustand $|a\rangle$ präpariert und werde in einen Resonator injiziert.

Eine Resonatormode befinde sich ursprünglich im Vakuumzustand. Diese sei resonant mit einem atomaren Übergang von $|a\rangle$ zu einem tiefer liegenden Niveau $|b\rangle$.

Das Atom stehe für die Durchflugszeit τ in Wechselwirkung mit der Lichtmode und hinterläßt im Resonator das Feld von maximal einem Photon.

Noch ehe dieses Feld dissipiert, erreiche den Resonator ein zweites Atom, präpariert wie das erste. Die Wechselwirkung erfolge nun mit dem Restfeld des ersten Atoms.

Dem zweiten Atom folge ein drittes, das mit dem Feld der ersten beiden in Kontakt tritt – und so fort.

Was passiert? Im Resonator baut sich das Feld eines Ein-Atom-Masers auf. Das verstärkende Medium besteht dabei immer aus *einem einzigen* Atom. Ein stationärer Zustand stellt sich ein, sobald ein Gleichgewicht zwischen Pumpleistung der Atome und Felddämpfung durch Resonatorverluste erreicht ist. Das ist die Funktionsweise eines Ein-Atom-Masers – im Prinzip. Wie sieht das tatsächliche Experiment aus?

Ein Atomofen sendet einen dünnen Strahl von Atomen aus, die im Hochvakuum durch einen UV-Laser geschwindigkeitselektiv unter Ausnutzung des Doppler-Effektes (siehe Abschnitt 6.3) in einen Rydberg-Zustand angeregt werden (Abb. 1.1). Die selektive Bevölkering hochliegender Rydberg-Zustände ist mit Hilfe schmalbandiger, durchstimmbarer Farbstoff-Laser möglich.

Die Atome durchqueren anschließend einen Resonator aus supraleitendem Material mit einer Mode sehr hoher Güte, die (quasi)resonant ist mit einem Übergang zu einem wenig tiefer liegenden Zustand. Die Temperatur des Resonators beträgt etwa 500 mK. Das entspricht bei der verwendeten Übergangsfrequenz von 21,5 GHz noch einer mittleren thermischen Photonenzahl von 0,15, d. h. einer dem Vakuumzustand⁴ nahekommenden Anfangsbedingung.

⁴Die Bezeichnung „Vakuumzustand“ bezieht sich nicht auf die Abwesenheit von Gasteilchen (ein Vakuum in diesem Sinne wird allerdings ebenfalls vorausgesetzt), sondern auf die Abwesenheit von Photonen. Gemeint ist also der Grundzustand der Feldmode.

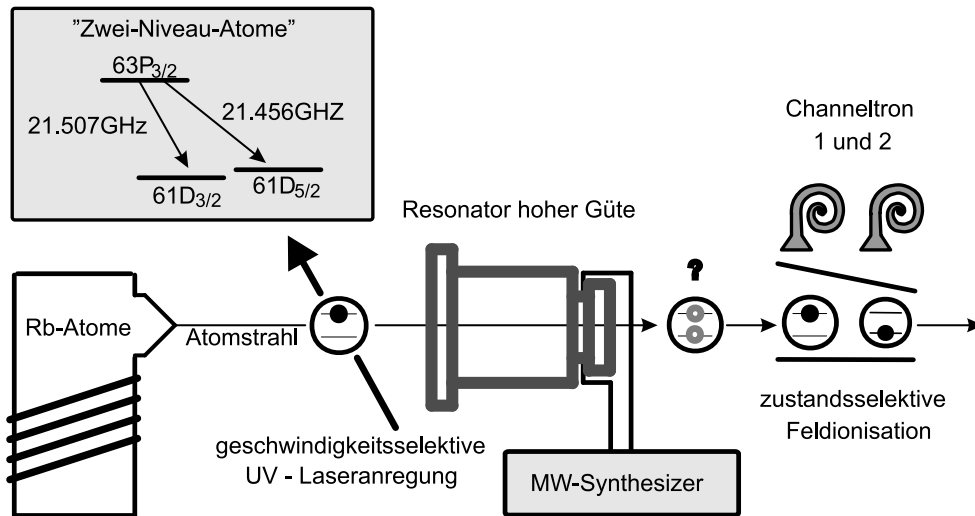


Abbildung 1.1: Prinzip eines Ein-Atom-Masers (siehe Text). Die Kopplung des Resonators an einen Mikrowellen-Synthesizer spielt in der vorliegenden Arbeit eine zentrale Rolle. Oben links: Im Experiment verwendete Maserniveaus des Isotops ^{85}Rb .

Während der Durchflugszeit τ durch den Resonator treten die Atome in Wechselwirkung mit der resonanten Mode. Sie „pumpen“ das Feld, das heißt, sie übertragen abhängig von τ mehr oder weniger Energie. Dabei sind drei Eigenschaften der verwendeten, sehr hoch angeregten Rydberg-Zustände zur experimentellen Realisierung der starken Atom–Feld-Kopplung besonders wichtig:

- Erstens besitzen sie eine hohe Lebensdauer.
- Zweitens führen die großen Dipol-Übergangs-Matrixelemente zwischen benachbarten Rydberg-Zuständen zu hohen Kopplungskonstanten.
- Drittens liegen die Übergangsfrequenzen dieser Zustände im Mikrowellenbereich, in dem supraleitende Resonatoren extrem hoher Güte zur Verfügung stehen.

Da Dämpfungsprozesse für die Zeit τ keine Rolle spielen, läßt sich die Wechselwirkung durch die unitäre, reversible Jaynes-Cummings-Dynamik eines abgeschlossenen Systems beschreiben (siehe Kapitel 2).

Nun besteht der Grundgedanke, der dem *Ein-Atom-Maser* seinen Namen gibt, darin, daß die Wechselwirkung *einzelner* Atome mit *einer* Feldmode studiert werden soll. Der Atomstrahl soll deshalb so stark verdünnt sein, daß sich zu jeder Zeit höchstens *ein* Atom im Resonator befindet. Da die Ankunftszeiten der Atome Poisson-verteilt sind, lassen sich Mehr-Atom-Ereignisse zwar nicht völlig vermeiden, sie werden aber sehr selten, wenn die Wechselwirkungszeit kurz im Vergleich zum mittleren zeitlichen Abstand der Atome t_{Atom} ist, wenn also gilt

$$\tau \ll t_{Atom}. \quad (1.1)$$

Während der Zeiten, in denen der Resonator leer steht [was nach Gl.(1.1) der wahrscheinlichste Fall ist], verursacht die unvermeidliche Dämpfung aufgrund der endlichen Güte $Q = \Omega/\gamma$ der Mode (Feldfrequenz Ω , Dämpfungskonstante γ) eine Relaxation des Feldes hin zum thermischen Zustand. Möchte man nun eine stimulierte Verstärkung d. h. *Masertätigkeit* im Resonator erzielen, so muß der zeitliche Abstand zwischen den Atomen kleiner sein als die Energie-Speicherzeit $t_E = 1/\gamma$ der Mode, d. h.

$$t_{Atom} < t_E. \quad (1.2)$$

Damit definiert folgende Ungleichung eine notwendige Bedingung für eine wirkliche Ein-Atom-Maser-Tätigkeit:

$$\tau \ll t_{Atom} < t_E. \quad (1.3)$$

Um sie erfüllen zu können, spielt der Einsatz von Resonatoren extrem hoher Güte im Experiment eine zentrale Rolle.

Der stationäre Zustand, gegen den das Feld strebt, ist geprägt durch das Gleichgewicht von Gewinnen durch den Pumpprozess und Verlusten durch die Dämpfung. Im Gegensatz zum „makroskopischen“ Maser, bei dem das verstärkende Medium aus einer sehr hohen (makroskopischen) Anzahl von Atomen besteht, widerspiegelt das Ein-Atom-Maser-Feld die Dynamik *einzelner* Atome, wie sie im Jaynes-Cummings-Modell in ihrer einfachsten und grundlegenden Weise beschrieben wird. Dabei treten neue *nicht-klassische* Eigenschaften des Feldes, wie Kollaps und Wiederaufleben der atomaren Inversionsoszillationen [17, 18] und sub-Poisson'sche Photonenzahlverteilung [19], zu Tage, die beim gewöhnlichen Maser wegen Mittelung über viele kollektive Wechselwirkungsprozesse nicht beobachtet werden können.

Der Ein-Atom-Maser – zum Teil in modifizierter Form – ermöglicht heute die experimentelle Untersuchung von Fragen, welche häufig seit der Pionierzeit der Quantenmechanik kontrovers diskutiert werden:

„Katzen-Zustände“ [20, 21], vergleichbar mit den 1935 von Erwin Schrödinger einst ironisch als „burleske“ Entlarvung der Quantentheorie erdachten, konnten als Zustände des Lichtes in Resonatoren präpariert werden [22].

Das Konzept der *Komplementarität* [23], das 1927 von Niels Bohr in die Physik übertragen wurde, ist ebenfalls einer quantenoptischen Überprüfung zugänglich geworden. Resonatoren können nämlich als praktisch störungsfreie „Welcher-Weg-Detektoren“ betrachtet werden [24]. Inzwischen wurde durch ein Atom-Interferenz-Experiment bestätigt, daß die Komplementarität aufrechterhalten wird, selbst wenn die Messung des Weges keinen entscheidenden Einfluß hat [25].

Auch die Erzeugung von verschränkten Atompaaren im Sinne des Gedankenexperiments von Einstein, Podolsky und Rosen (1935) [26] ist im Rahmen der Resonator-QED möglich geworden [27].

Neuerdings wurden mit dem Ein-Atom-Maser die sogenannten „Fangzustände“ beobachtet, die sich durch ihre dem Fock-Zustand nahekommende Photonenzahlstatistik auszeichnen [28]. Der Fock-Zustand selbst mit seiner scharf definierten Anzahl von Photonen konnte ebenfalls im Resonator präpariert und

nachgewiesen werden [29]. In Lit. [30] wird die QND-Messung eines einzelnen Photons berichtet.

Das Prinzip des Ein-Atom-Masers konnte inzwischen auch auf den optischen Bereich übertragen werden [31].

Die Theorie des Masers wurde für den Betrieb mit „ultrakalten“ Atomen erweitert. Dieser neue Parameterbereich erfordert eine *quantenmechanische* Behandlung der atomaren Schwerpunktsbewegung. Der sogenannte „Mazer“⁵ [32, 33] zeichnet sich durch eine zusätzliche Art der induzierten Emission aus, nämlich der *bewegungsinduzierten*. Der Mazer besitzt Eigenschaften, die als atomoptisches Analogon zum Fabry-Pérot-Interferometer betrachtet werden können und stellt damit einen Geschwindigkeitsfilter für kalte Atome dar [34].

1.3 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit

In dieser Arbeit wird der Ein-Atom-Maser mit Kopplung an eine externe, monochromatische Strahlungsquelle untersucht, und zwar sowohl auf theoretischer, als auch auf experimenteller Ebene. Dabei soll eine neue Meßmethode entwickelt werden, welche die *phasensensitive* Beobachtung des Maser-Feldes durch Sondierung mit Atomen ermöglicht, ohne auf die Überlagerungsphase der beiden atomaren Energiezustände Bezug zu nehmen. Dadurch wird die Messung wesentlich robuster gegen experimentelle Störeinflüsse.

In Kapitel 2 wird eine zusammenfassende Darstellung des Jaynes-Cummings-Modells mit besonderer Betonung der „dressed state“-Basis gegeben, auf die in Abschnitt 3.1 ein Überblick über die Theorie des Ein-Atom-Masers aufbaut. In Abschnitt 3.2 wird eine Starkfeld-Näherung der Jaynes-Cummings-Dynamik eingeführt, mit deren Hilfe ein semiklassisches, physikalisch intuitives Bild der charakteristischen Phasen-Eigenschaften des Ein-Atom-Maser-Feldes abgeleitet wird.

Eine theoretische Analyse des Ein-Atom-Masers mit Kopplung an eine externe Strahlungsquelle folgt in Kapitel 4. In Abschnitt 4.1 bis 4.3 wird die Idee des „Meßpulses“ entwickelt, der zu einer „Verschiebung“ des Feldzustandes im Phasenraum führt und so eine phasensensitive Observable des Feldes alleine durch Bestimmung der Besetzungswahrscheinlichkeit der atomaren Energieniveaus zur Verfügung stellt.

Das vollständige quantenmechanische Problem wird in Abschnitt 4.4 angegangen: die Wechselwirkung eines Atoms mit einer Feldmode, die an einen klassischen harmonischen Oszillator gekoppelt ist, unter Berücksichtigung der Dämpfungsverluste des Resonators bei endlicher Temperatur.

Beim phasengekoppelten Maser, der in Abschnitt 4.5 behandelt wird, baut sich eine Kohärenz zwischen Maser-Feld und externem Oszillator auf. Der so entstehende stationäre Zustand stellt bei der Untersuchung von Phaseneigenschaften des Ein-Atom-Maser-Feldes einen geeigneten Anfangszustand dar.

⁵Während das Kunstwort Maser die Abkürzung ist für „microwave amplification by stimulated emission of radiation“, steht Mazer für „microwave amplification via z-motion induced emission of radiation“.

Zwei Anwendungen der Methode des „Meßpulses“ im Hinblick auf die Bestimmung des quantenmechanischen Zustandes des Maser-Feldes werden in Kapitel 5 präsentiert. Es handelt sich um ein „Rekonstruktionsverfahren“ basierend auf einem „Set“ von Messungen (Abschnitt 5.2) und ein Schema zur Punktweisen Bestimmung einer Phasenraumfunktion, nämlich der charakteristischen Funktion der Wigner-Verteilung (Abschnitt 5.3).

Das im Rahmen dieser Arbeit vervollständigte schwingungsgedämpfte Ein-Atom-Maser-Experiment wird in Kapitel 6 beschrieben. Alle für die Funktion notwendigen Komponenten werden vorgestellt und getestet. Zum Abschluß des Kapitels wird die Funktion des neuen Aufbaus durch Aufnahme der Resonanzkurve des Ein-Atom-Masers demonstriert.

In Kapitel 7 werden verschiedene Experimente mit Einkopplung von Mikrowellenstrahlung in den Maser-Resonator durchgeführt. Dabei geht es in 7.1 zunächst um die Frage, inwieweit eine stabile Einkopplung in einen Resonator sehr hoher Güte (und entsprechend scharfer Resonanz) und die *kohärente* Superposition eines Meßpulses überhaupt technisch realisierbar sind.

Die experimentelle Untersuchung der Atom-Feld-Wechselwirkung bei externer Kopplung des Maser-Resonators folgt schließlich in Abschnitt 7.2.

In Kapitel 8 werden die Ergebnisse der Arbeit resümiert und mögliche weitere Entwicklungen diskutiert.

Kapitel 2

Atom-Feld-Wechselwirkung im Jaynes-Cummings Modell

Das Jaynes-Cummings-Modell [14] beschreibt ein ungleiches Paar: Zwei Energieniveaus *eines* Atoms und *eine* (dazu quasiresonante) Mode des quantisierten elektromagnetischen Feldes stehen in Wechselwirkung. Das Modell ist *bereits* kompliziert genug, um nicht trivial zu sein und *noch* einfach genug, um (in der „rotating wave“ und „Dipol“-Näherung, siehe unten) analytische Lösungen zu besitzen. Es beschreibt – reduziert auf die grundsätzlichen Prozesse – das Wechselspiel von Licht und Materie. Man kann es als einen „Archetyp“ für die Kopplung zweier Quantensysteme bezeichnen. Weitere Freiheitsgrade wie die Schwerpunktsbewegung des Atoms oder die Anbindung an die Umgebung (und damit die Dämpfung von Atom und Feld) werden nicht berücksichtigt. Im Rahmen der Ein-Atom-Maser-Theorie bildet es die adäquate Beschreibung des Pumpprozesses.

2.1 Der Hamilton-Operator

i) **Das Atom:** Es besitzt (nach Voraussetzung) zwei Energieniveaus und ist daher in seiner mathematischen Beschreibung einem Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen äquivalent. Die Eigenvektoren des Hamilton-Operators \mathcal{H}_A (wir bezeichnen den energetisch höher liegenden mit $|a\rangle$ und den tiefer liegenden mit $|b\rangle$) spannen den Hilbert-Raum des Zwei-Niveau-Systems auf. Wir wählen den Nullpunkt der Energieskala in der Mitte zwischen beiden Niveaus; dann sind die Energie-Eigenwerte gegeben durch $\pm\frac{1}{2}\hbar\omega$ und der Hamilton-Operator läßt sich schreiben als

$$\mathcal{H}_A = \frac{1}{2}\hbar\omega(\sigma^\dagger\sigma - \sigma\sigma^\dagger). \quad (2.1)$$

Der „spin-flip“-Operator $\sigma = |b\rangle\langle a|$ und sein konjugiert komplexes σ^\dagger gehorchen der Antikommutator-Relation (Fermi-Kommutator)

$$\sigma\sigma^\dagger + \sigma^\dagger\sigma \equiv [\sigma, \sigma^\dagger]_+ = 1. \quad (2.2)$$

Weiter gilt: $[\sigma^\dagger, \sigma]_- = \sigma_z$ mit der Pauli'schen Spinmatrix

$$\sigma_z = |a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b|. \quad (2.3)$$

Der Ortsoperator des Elektrons in Bezug auf den Schwerpunkt der positiven Ladung des Atoms

$$\hat{\vec{r}} = \sum_{i,j} |i\rangle\langle i| \hat{\vec{r}} |j\rangle\langle j| \quad \text{mit} \quad i, j \in \{a, b\} \quad (2.4)$$

vereinfacht sich unter der Voraussetzung, daß das Atom *kein permanentes Dipolmoment* besitzt (also $\langle a| e\hat{\vec{r}}|a\rangle = \langle b| e\hat{\vec{r}}|b\rangle = 0$, Elektronenladung e) zu

$$\hat{\vec{r}} = \vec{r}_{ab}(\sigma + \sigma^\dagger). \quad (2.5)$$

Dabei wurde das Übergangs-Matrixelement $\langle a| \hat{\vec{r}}|b\rangle \equiv \vec{r}_{ab} = \vec{r}_{ba}$ als reell vorausgesetzt, was durch geeignete Wahl der Quantisierungsachse möglich ist (siehe z.B. [36, 37]).

ii) **Die Feldmode:** Sie entspricht einem harmonischen Oszillator mit einer Eigenfrequenz Ω , dessen Hilbert-Raum im Gegensatz zu dem des Atoms abzählbar unendlichdimensional ist und beispielsweise aus den Eigenzuständen des Hamilton-Operators

$$\mathcal{H}_F = \frac{1}{2}\hbar\Omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger), \quad (2.6)$$

den Fock-Zuständen (Zahlenzuständen) aufgespannt wird. Die „Erzeugungs-“ und „Vernichtungsoperatoren“ \hat{a}^\dagger und \hat{a} mit den (ihren Namen erklärenden) Eigenschaften

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (2.7)$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (2.8)$$

genügen der Bose-Kommutator Beziehung:

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} \equiv [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]_- = 1. \quad (2.9)$$

Die gewählte Schreibweise betont die Analogie zwischen Atom und Feld unter Vertauschung von Bose- und Fermi-Kommutator.

Das elektrische Feld wird repräsentiert durch den Operator

$$\hat{\vec{E}} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}} \vec{u}(\vec{R})(\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (2.10)$$

Dabei ist $\vec{u}(\vec{R})$ die auf das Resonatorvolumen V normierte ($\int_V \vec{u}^2(\vec{R}) d^3\vec{R} = 1$), den Maxwell-Gleichungen gehorchende, räumliche *Modenfunktion*. Die Konstante

$$\mathcal{E} = \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{\epsilon_0 V}} \quad (2.11)$$

mit der Einheit einer Feldstärke wird oft als elektrisches Feld pro Photon bezeichnet; der Erwartungswert von $\hat{\vec{E}}^2$, integriert über das Modenvolumen, wächst nämlich pro Photon um \mathcal{E}^2 .

iii) **Der Wechselwirkungsterm:** Die Wellenlänge von Licht im optischen- und erst recht im Mikrowellenbereich ist sehr groß verglichen mit der räumlichen Ausdehnung eines Atoms. Man kann deshalb die elektromagnetische Feldstärke über die Ausdehnung eines Atoms als räumlich konstant betrachten. Dann ist die Energie der Ladungsverteilung eines neutralen Atoms im elektromagnetischen Feld maßgeblich bestimmt durch die Wechselwirkung des elektrischen Dipolmomentes $e\vec{r}$ (\vec{r} zeigt von positiver Ladung zum Elektron mit Ladung e) mit der elektrischen Feldstärke $\vec{E}(\vec{R}, t)$ am Ort des Atoms:

$$E = e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{R}, t). \quad (2.12)$$

Das ist die *elektrische Dipol-Näherung*. Höhere elektrische Multipole, die mit Ableitungen des elektrischen Feldes wechselwirken, sowie die Kopplung an das magnetische Feld spielen unter den genannten Bedingungen keine Rolle.

Soweit war die Betrachtung klassisch. Eine heuristische Übertragung in die Quantenmechanik, wie sie bereits 1952 von Lamb in der semiklassischen Theorie vorgeschlagen wurde, besteht nun einfach in der Ersetzung von \vec{r} und \vec{E} in Gl. (2.12) durch die entsprechenden Operatoren Gl.(2.5) und (2.10). Der Ort des Atoms \vec{R} wird weiterhin klassisch behandelt. Diese sogenannte $\vec{E} \cdot \vec{r}$ -Kopplung stellt eine für unsere Zwecke exzellente Näherung dar; man kann sie auch aus der *minimalen Kopplung* ($\vec{A} \cdot \vec{p}$ -Kopplung) nach vergleichsweise komplizierten Überlegungen ableiten (siehe z.B. Appendix 5 in Lit. [35]). Unter Einführung der *elektrischen Dipol-Kopplungskonstanten*

$$g(\vec{R}) = \frac{e\vec{r}_{ab}}{\hbar} \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}} \vec{u}(\vec{R}) \quad (2.13)$$

erhält man den Wechselwirkungs-Hamilton-Operator

$$\mathcal{H}_w = \hbar g(\vec{R})(\sigma + \sigma^\dagger)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (2.14)$$

Die beiden Kombinationen $\hat{a}\sigma^\dagger$ und $\hat{a}^\dagger\sigma$ in Gl.(2.14) beschreiben die Vernichtung eines Photons bei gleichzeitigem Übergang des Atoms vom unteren in den oberen Zustand und umgekehrt, also den Austausch eines Energiequants zwischen Atom und Feld, der für kleine Verstimmungen nahezu energieerhaltend ist.

Die Terme $\hat{a}\sigma$ und $\hat{a}^\dagger\sigma^\dagger$ entsprechen dagegen der Vernichtung eines Photons, während das Atom in den energetisch tiefer liegenden Zustand befördert wird, und umgekehrt; sie sind stark nicht-energieerhaltend. Diese antiresonanten Beiträge mitteln sich innerhalb weniger Lichtperioden heraus¹ (Lit. [36], Kapitel 13), während die ersten beiden im quasiresonanten Fall übrigbleiben. Auf sie kann man sich demnach beschränken, was der *Drehwellennäherung* („rotating-wave-approximation“) im semiklassischen Fall entspricht (siehe Lit. [36, 37, 38]).

Wir fassen nun alle Beiträge zusammen und erhalten den „Jaynes-Cummings-Hamilton-Operator“

$$\mathcal{H}_{JC} = \underbrace{\frac{1}{2}\hbar\omega(\sigma^\dagger\sigma - \sigma\sigma^\dagger)}_{\text{Atom}} + \underbrace{\frac{1}{2}\hbar\Omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger)}_{\text{Feldmode}} + \underbrace{\hbar g(\vec{R})(\hat{a}\sigma^\dagger + \hat{a}^\dagger\sigma)}_{\text{Wechselwirkung}}. \quad (2.15)$$

¹Sie geben allerdings Anlaß zu einer sehr geringen zusätzlichen Energie-Shift (Bloch-Siegert-Shift) siehe Lit. [35].

Einen intuitiven Einblick in das Jaynes-Cummings Modell und eine elegante Ableitung der aus Gl. (2.15) folgenden Dynamik bekommt man mit Hilfe der stationären Zustände des gekoppelten Systems, die im nächsten Abschnitt besprochen werden.

2.2 Das Bild der „dressed states“

Die Produktzustände $|j\rangle \otimes |n\rangle \equiv |j, n\rangle$, $j \in \{a, b\}$ bilden eine mögliche Orthonormalbasis für das gekoppelte System aus Atom und Feld, die Eigenzustände des Gesamt-Hamilton-Operators \mathcal{H}_{JC} eine andere; man nennt sie *dressed states*². Gl. (2.15) koppelt (infolge der rotating-wave-Näherung) für jedes n nur jeweils zwei Zustände $|a, n\rangle$ und $|b, n+1\rangle$ miteinander; die gesuchten stationären Lösungen sind daher geeignete Linearkombinationen von beiden:

$$\begin{aligned} |n-\rangle &= c_n |a, n\rangle - s_n |b, n+1\rangle \\ |n+\rangle &= s_n |a, n\rangle + c_n |b, n+1\rangle \end{aligned} \quad (2.16)$$

Zusammen mit dem Grundzustand $|b, 0\rangle$ sind sie vollständig. Aufgelöst nach den „bare“ states gilt dann:

$$\begin{aligned} |a, n\rangle &= c_n |n-\rangle + s_n |n+\rangle \\ |b, n+1\rangle &= -s_n |n-\rangle + c_n |n+\rangle. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Die Energie-Eigenwerte lauten

$$E_n^\pm = \hbar\Omega(n+1) \pm \frac{1}{2}\hbar\mathcal{R}_n, \quad (2.18)$$

wobei das \pm sich auf die Vorzeichen in den dressed-state-Symbolen bezieht und die „Quanten-Rabi-Frequenz“

$$\mathcal{R}_n = \sqrt{\delta^2 + 4g^2(n+1)} \quad (2.19)$$

mit der Atom-Feld-Verstimmung

$$\delta = \Omega - \omega \quad (2.20)$$

gleich der Energiedifferenz zwischen den dressed states ist. Ihre Bedeutung für die Dynamik des Systems wird in Abschnitt 2.3 deutlich. Die Koeffizienten c_n und s_n kann man als Cosinus und Sinus eines *Kopplungswinkels* θ_n betrachten. Sie sind gegeben durch

²Auf deutsch: „bekleidete Zustände“. Damit soll zum Ausdruck gebracht werden, daß Atome nicht mehr „nackt“ auftreten, sondern „umhüllt“ vom Feld. Genauer: Beide Systeme sind verschränkt.

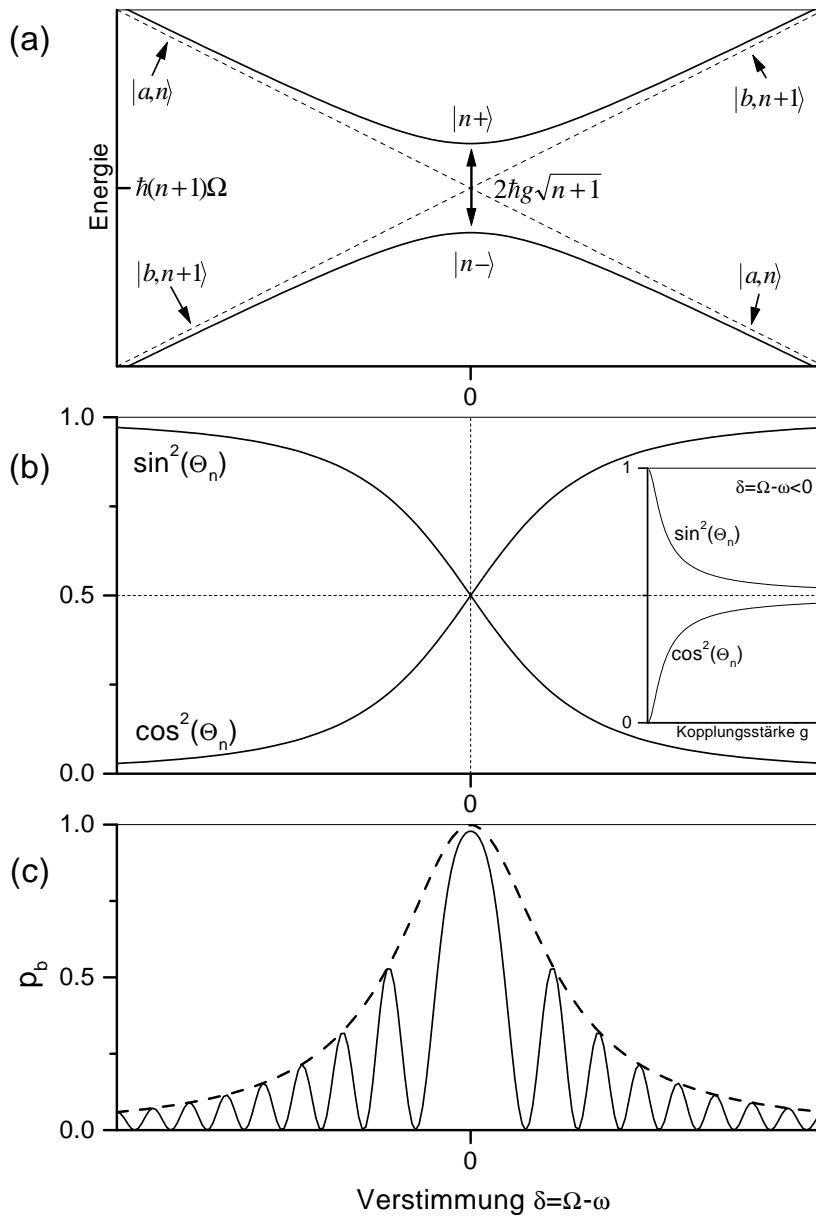


Abbildung 2.1: Abhängigkeit verschiedener Parameter der „dressed states“ von der Atom-Feld-Verstimmung δ . (a) Energiediagramm. Gestrichelte Linie: Hypothetische Situation ohne Wechselwirkung; die Energien der „bare states“ kreuzen sich. Durchgezogene Linie: Die Wechselwirkung verursacht eine Aufhebung der Energie-Entartung der dressed states („anticrossing“). (b) Wahrscheinlichkeiten, in einem „dressed state“ nach Gl. (2.21) die „bare states“ zu finden. Im Einschub ist sie über die Kopplungsstärke aufgetragen. (c) Wahrscheinlichkeit, das Atom nach einer festen Wechselwirkungszeit im Zustand $|b\rangle$ anzutreffen, wenn die Anfangssituation $|a, n\rangle$ war [Gl. (2.33)]. Die Enveloppe ist die Amplitude der Rabi-Oszillation.

$$\begin{aligned}
c_n \equiv \cos(\theta_n) &= \frac{\mathcal{R}_n + \delta}{\sqrt{(\mathcal{R}_n + \delta)^2 + 4g^2(n+1)}} \\
s_n \equiv \sin(\theta_n) &= \frac{2g\sqrt{(n+1)}}{\sqrt{(\mathcal{R}_n + \delta)^2 + 4g^2(n+1)}}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Für den *doppelten* Kopplungswinkel gelten die Beziehungen

$$\cos(2\theta_n) = \frac{\delta}{\mathcal{R}_n} \quad \text{und} \quad \sin(2\theta_n) = \frac{2g\sqrt{(n+1)}}{\mathcal{R}_n}. \tag{2.22}$$

Bevor wir uns im nächsten Abschnitt der Dynamik des Systems zuwenden, geben wir anhand von Abb. 2.1 eine kurze Interpretation der statischen Situation: Denkt man sich die Wechselwirkung zunächst „ausgeschaltet“, d. h. $g = 0$, so erfüllen die Produktzustände $|a, n\rangle$ und $|b, n+1\rangle$ die Eigenwertgleichung von $\mathcal{H}_o = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_F$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_o |a, n\rangle &= \hbar\{\frac{1}{2}\omega + (n + \frac{1}{2})\Omega\} |a, n\rangle \\
\mathcal{H}_o |b, n+1\rangle &= \hbar\{-\frac{1}{2}\omega + (n + 1 + \frac{1}{2})\Omega\} |b, n+1\rangle.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Die Energie-Eigenwerte sind in Abb. 2.1 (a) über die Verstimmung aufgetragen (gestrichelte Linien). Sie sind bei Resonanz ($\delta = 0$) entartet.

Bei eingeschalteter Wechselwirkung ist die Energie-Entartung an diesem Punkt aufgehoben; man spricht von „avoided crossing“, einem in der Physik wohlbekannten Effekt (siehe z. B. die Energiebänder in Festkörpern). Die stationären Zustände sind jetzt eine Superposition der Produktzustände (Einschub in Abb. 2.1 (b) und Gl.(2.16)).

Bei adiabatischem Durchlaufen der Verstimmung von (unendlich) großen negativen Werten kommend entwickelt sich nun z.B. der Zustand $|a, n\rangle$ durch Beimischung von $|b, n+1\rangle$ kontinuierlich in den dressed state $|n, +\rangle$, der im Resonanzfall aus beiden zu gleichen Teilen aufgebaut ist (siehe (b) und Gl. (2.16)). Durch weitere Erhöhung von δ ändert sich der Charakter des Zustandes zunehmend zugunsten von $|b, n+1\rangle$. Die adiabatische Entwicklung entlang der vermiedenen Kreuzung „zwingt“ also den Anfangszustand $|a, n\rangle$ in den Endzustand $|b, n+1\rangle$, wobei ein Photon im Resonator deponiert wird.

2.3 Dynamik im Jaynes-Cummings-Modell

Die Integration der Schrödinger-Gleichung birgt das Problem, daß \mathcal{H}_{JC} nach Gl.(2.15) *explizit* zeitabhängig wird, sobald sich das Atom (wie im Ein-Atom-Maser) durch eine räumlich veränderliche Feldmode bewegt. Dann hängt nämlich die Kopplungskonstante gemäß Gl.(2.13) von der Zeit ab. Der Ansatz

$$|\psi(\tau)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^\tau \mathcal{H}(t) dt} |\psi(0)\rangle \tag{2.24}$$

ist nur dann korrekt, wenn der Hamilton-Operator mit sich selbst zu unterschiedlichen Zeiten vertauscht (siehe z.B. [39]). Mit der Aufteilung $\mathcal{H}_{JC} =$

$\mathcal{H}_o + \mathcal{H}_w(t)$ und $\mathcal{H}_o = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_F$ gilt

$$[\mathcal{H}_{JC}(t_1), \mathcal{H}_{JC}(t_2)] = [\mathcal{H}_o, \mathcal{H}_w(t_2)] - [\mathcal{H}_o, \mathcal{H}_w(t_1)]. \quad (2.25)$$

Weiter leitet man aus den Kommutator-Relationen Gl.(2.2) und (2.9) ab

$$[\mathcal{H}_o, \mathcal{H}_w(t)] = \hbar\delta g(t) \sigma_z \quad (2.26)$$

und damit

$$[\mathcal{H}_{JC}(t_1), \mathcal{H}_{JC}(t_2)] = \hbar\delta\{g(t_2) - g(t_1)\}\sigma_z. \quad (2.27)$$

Die Anwendbarkeit von Gl.(2.24) beschränkt sich also auf zwei Fälle, nämlich

- exakte Resonanz $\delta = 0$, und
- eine während der Wechselwirkung konstante Kopplung g , wodurch die Zeitabhängigkeit in \mathcal{H}_{JC} entfällt.

Im ersten Fall bleibt im Integral von Gl.(2.24) nur noch $g(t)$ stehen und man kann über die Beziehung

$$\int_0^\tau g(t) dt = \bar{g} \tau \quad (2.28)$$

eine zeitlich gemittelte Rabi-Frequenz einführen. Man rechnet dann nicht mit der tatsächlichen, sondern mit einer konstanten Kopplung, die nach der Zeit τ gerade denselben ‘‘Nettoeffekt‘‘ bewirkt. Das ist die Aussage des *Pulsflächen-Theorems*.

Der zweite Fall entspricht der Wechselwirkung mit einer *Rechteck-Mode*, bei der die Feldamplitude sich sprunghaft von null auf einen konstanten Wert ändert und genauso plötzlich wieder abfällt. Es handelt sich um ein völlig *diabatisches* Ein- und Ausschalten der Kopplung. Wir behandeln *diesen* Fall, da er den ersten für $\delta = 0$ und bei Ersetzung von g durch \bar{g} als Spezialfall enthält.

Der Anfangszustand sei gegeben durch ein Atom im oberen Maserniveau, das mit einem Fock-Zustand in Wechselwirkung tritt. Wir rechnen nach Gl.(2.17) in der Basis der dressed states:

$$|\psi(0)\rangle = |a, n\rangle = c_n |n-\rangle + s_n |n+\rangle. \quad (2.29)$$

Die Zeitentwicklung nach Gl.(2.24) führt mit Hilfe der Energie-Eigenwerte Gl.(2.18) auf:

$$|\psi(\tau)\rangle = e^{-i(n+1)\Omega\tau} \left(c_n e^{+i\frac{\mathcal{R}_n}{2}\tau} |n-\rangle + s_n e^{-i\frac{\mathcal{R}_n}{2}\tau} |n+\rangle \right) \quad (2.30)$$

Man kann jetzt ins ursprüngliche Basissystem zurücktransformieren und erhält mit Hilfe von Gl.(2.22) nach einigen Umformungen folgendes Ergebnis:

$$|\psi(\tau)\rangle = u_n(\tau) |a, n\rangle + v_n(\tau) |b, n+1\rangle \quad (2.31)$$

mit

$$\begin{aligned}
u_n(\tau) &= \cos\left(\frac{\mathcal{R}_n}{2}\tau\right) + i\frac{\delta}{\mathcal{R}_n}\sin\left(\frac{\mathcal{R}_n}{2}\tau\right) \\
v_n(\tau) &= -ig\sqrt{n+1}\frac{\sin\left(\frac{\mathcal{R}_n}{2}\tau\right)}{\frac{\mathcal{R}_n}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Die gemeinsame Phase $\phi = -(n+1)\Omega$ wurde dabei weggelassen, was der Transformation in ein Wechselwirkungsbild entspricht [36].

Die Wahrscheinlichkeit, das Atom im unteren Niveau (und damit das Feld im Fock-Zustand mit $n+1$ Photonen) anzutreffen, ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned}
p_b = |v_n(\tau)|^2 &= (n+1)g^2\frac{\sin^2\left(\frac{\mathcal{R}_n}{2}\tau\right)}{\left(\frac{\mathcal{R}_n}{2}\right)^2} \\
&= 2(n+1)g^2\frac{1-\cos(\mathcal{R}_n\tau)}{\mathcal{R}_n^2}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Sie ist in Abb. 2.1 bei konstanter Wechselwirkungszeit gegen die Verstimmung aufgetragen. Bei Erhöhung von τ würden sich die Maxima entlang der gestrichelt eingezeichneten Enveloppe zum Nullpunkt hinbewegen.

Man kann das Ergebnis so interpretieren: Das diabatische Einschalten der Wechselwirkung bewirkt die Aufspaltung in die dressed states nach Gl.(2.29). Während der anschließenden Wechselwirkung ändert sich nach Gl.(2.30) nur noch die relative Phase, mit der diese sich überlagern. Insgesamt verschiebt sie sich um $\mathcal{R}_n\tau$. Diese „Interferenz“ zwischen den dressed states spiegelt sich nach Gl.(2.33) als sinusförmige Oszillation zwischen den Zuständen $|a, n\rangle$ und $|b, n+1\rangle$ wider. Gl.(2.33) läßt sich mit Hilfe von Gl.(2.22) schreiben als

$$p_b = \frac{1}{2} \left[1 - (c_n^2 - s_n^2)^2\right] \left[1 - \cos(\mathcal{R}_n\tau)\right]. \tag{2.34}$$

Der erste Ausdruck in eckigen Klammern ist die Amplitude der Rabi-Oszillationen (gestrichelte Linie in Abb. 2.1). Sie ist bestimmt durch die Wahrscheinlichkeiten für die beiden dressed states c_n^2 und s_n^2 . Kommen sie mit gleichen Anteilen vor ($c_n^2 = s_n^2$, das ist bei Resonanz der Fall), so erreichen die Rabi-Oszillationen maximale Amplitude. Je mehr ein dressed state gegenüber dem anderen dominiert (z.B. bei Verstimmung), desto kleiner werden die Oszillationen.

Zusammenfassend beschreibt das Jaynes-Cummings-Modell den reversiblen, periodischen Austausch eines Photons zwischen Atom und Feld, der allerdings nur bei Resonanz vollständig ist.

Die im Experiment verwendete Mode hat entlang der Atomstrahlachse einen sinusförmigen Verlauf, d. h. die Wechselwirkung setzt langsam ein. Bei Verstimmung ist man dann auf eine numerische Berechnung angewiesen. Man benötigt dazu eine allgemeinere Anfangsbedingung (zu einem Zeitpunkt t) als die in Gl.(2.29), nämlich

$$|\psi(t)\rangle = c_{an}(t) |a, n\rangle + c_{bn+1}(t) |b, n+1\rangle. \tag{2.35}$$

Die Lösung läßt sich wieder in der dressed-state-Basis berechnen. Man erhält für die Koeffizienten nach der Zeit δ :

$$\begin{pmatrix} c_{an}(t + \delta) \\ c_{bn+1}(t + \delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n(\delta) & v_n(\delta) \\ v_n(\delta) & u_n^*(\delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{an}(t) \\ c_{bn+1}(t) \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

mit u_n und v_n aus Gl.(2.32). Die Wechselwirkung über eine Dauer τ läßt sich damit durch Aufteilung in kleine Zeitschritte δ , innerhalb derer g als konstant betrachtet werden kann, iterativ berechnen (siehe Lit. [40]). Man kann dann die Dynamik jedes beliebigen Anfangszustandes in Fock-Darstellung numerisch ermitteln.

Kapitel 3

Theorie des Ein-Atom-Masers

3.1 Dichtematrix-Formalismus und stationärer Zustand

Der Dichtematrix-Formalismus liefert eine Beschreibung des Ensemblemittels über viele identische Realisierungen eines Ein-Atom-Masers. Er unterscheidet sich damit von einem individuellen, durch den quantenmechanischen Meßprozeß am Teilsystem der Atome in unvorhersagbarer Weise beeinflussten Versuch. Der Rechenweg teilt sich wie in Abschnitt 1.2 dargestellt in eine Pumpphase und eine Dämpfungsphase auf. Von besonderer Bedeutung ist der stationäre Zustand, der sich schließlich einstellt.

Die Grundzüge der Ein-Atom-Maser-Theorie werden in Lit. [41, 42] dargestellt; die Statistik der den Maser verlassenden Atome wird in Lit. [43] detailliert behandelt.

3.1.1 Die Pumpphase

Wir beschränken uns auf den Fall des inkohärenten Pumpens mit Atomen im oberen Maserniveau $|a\rangle$ (zum kohärenten Pumpen siehe Lit. [44]). Der Dichteoperator des Atom-Feld-Systems werde mit R bezeichnet, der des Feldes mit ρ . Zur Zeit $t=0$ vor der Wechselwirkung läßt sich R als direktes Produkt darstellen:

$$R(0) = \sum_{n,m} \rho_{n,m}(0) |n\rangle\langle m| \otimes |a\rangle\langle a| \equiv \sum_{n,m} \rho_{n,m}(0) |a, n\rangle\langle a, m| \quad (3.1)$$

Für das Feld wurde dabei ein ganz allgemeiner Ansatz in Fock-Darstellung gemacht.

Die nun einsetzende unitäre Zeitentwicklung während des Durchflugs eines Atoms $R(\tau) = U(\tau)R(0)U^\dagger(\tau)$ haben wir in Gl.(2.31) bereits für jeden Zustand $|a, n\rangle$ gelöst und brauchen das Ergebnis nur noch einzusetzen. Nach Ausmultiplikation und Indexverschiebung zur Ausklammerung von $|n\rangle\langle m|$ ergibt das

$$R(\tau) = \sum_{n,m} \left\{ \begin{array}{ll} \rho_{n,m}(0) u_n(\tau) u_m^*(\tau) & |a\rangle\langle a| \\ + \rho_{n,m-1}(0) u_n(\tau) v_{m-1}^*(\tau) & |a\rangle\langle b| \end{array} \right. \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
& + \rho_{n-1,m}(0) v_{n-1}(\tau) u_m^*(\tau) |b\rangle\langle a| \\
& + \rho_{n-1,m-1}(0) v_{n-1}(\tau) v_{m-1}^*(\tau) |b\rangle\langle b| \} \otimes |n\rangle\langle m|.
\end{aligned}$$

Infolge der Wechselwirkung entsteht ein „verschränkter Zustand“ (entangled state) des nun nicht mehr trennbaren Atom-Feld-Systems. Die Koeffizienten u_n, v_n sind im Falle einer Rechteckmode, oder bei Resonanz, durch Gl.(2.32) gegeben, im allgemeinen müssen sie jedoch numerisch berechnet werden.

Wir fragen nun nach der Wahrscheinlichkeit, das Atom nach Verlassen des Resonators unter Ignoranz des Feldzustandes im unteren Maserniveau zu detektieren¹. Sie ist durch den Erwartungswert des Projektionsoperators $|b\rangle\langle b|$ gegeben

$$p_b(\tau) = \text{Tr}[R(\tau) |b\rangle\langle b|] = \sum_n \rho_{nn}(0) |v_n(\tau)|^2. \quad (3.3)$$

Das Ergebnis ist anschaulich: Es ist die gewichtete Summe über alle bedingten Wahrscheinlichkeiten, das Atom in $|b\rangle$ zu finden, falls das Feld vorher im Fock-Zustand $|n\rangle$ gewesen ist.

Nachdem p_b lediglich von den Hauptdiagonalelementen des Feldzustandes vor der Wechselwirkung, d.h. von der Photonenstatistik, abhängt, enthält die Bestimmung der Energie des Atoms keine Information über die Schwingungsphase des Feldes. Wir werden in Kapitel 4 Möglichkeiten der phasensensitiven Beobachtung kennenlernen.

In Gleichung (3.3) überlagern sich viele Rabi-Oszillationen unterschiedlicher Frequenz. Bei nicht zu breiter Photonenstatistik (wie etwa der Poisson-Verteilung eines kohärenten Zustandes) führt das nach einer gewissen Zeit zu einer Interferenzerscheinung, die zur gegenseitigen Kompensation der Oszillationen und zu einer konstanten Gleichbesetzung beider Maserniveaus führt („Kollaps“). Die Diskretheit der Summe (und damit die Quantennatur des Feldes) führt aber zu einem wiederauflebenden Oszillieren („Revivals“) nach konstanten Zeiten [17, 18]. Dabei spiegelt sich die Photonenstatistik in der Enveloppe der Oszillationen wider (siehe Lit. [45]). Eine andere Interpretation geben wir in Abschnitt 3.2.2.

Wir fragen jetzt nach dem Feldzustand für den Fall, daß eine Messung am Atom das Ergebnis $|a\rangle$ geliefert hat. Das Feld wird dann auf den mit der Messung verträglichen Unterraum projiziert. Das ist der durch die Messung induzierte Kollaps der Wellenfunktion, der aber entsprechend der unvollständigen Messung nur am Atom ebenfalls nicht vollständig ist, d.h. im allgemeinen nicht in einen reinen Zustand erfolgt. Es gilt:

$$\rho(\tau) = \frac{1}{p_a} \mathcal{A}(\tau) \rho(0) \quad (3.4)$$

Wir haben dabei den (linearen) „Superoperator“ \mathcal{A} definiert über die Eigenschaft

$$\mathcal{A}(\tau) \rho(0) = \langle a| R(\tau) |a\rangle. \quad (3.5)$$

¹Wir beschränken uns auf ideale Detektoren. Beliebige Nachweiswahrscheinlichkeiten werden in Lit. [43] berücksichtigt

Demnach beschreibt \mathcal{A} , angewandt auf den Anfangszustand des Feldes, die Dynamik und anschließende Projektion auf den mit der Messung des Atoms im oberen Maserzustand verträglichen Unterraum (siehe auch Lit. [43]).

Der Faktor $1/p_a$ sorgt für die Normierung $\text{Tr}_F \rho = 1$. Durch die Messung wurden gewisse Möglichkeiten ausgeschlossen, die verbleibenden werden entsprechend „aufgewertet“. Die Information über den Feldzustand nimmt durch die Messung am Atom zu, und zwar um so mehr, je unwahrscheinlicher das eingetretene Ergebnis war.

Wurde das Atom in Zustand $|b\rangle$ beobachtet, so gilt entsprechend

$$\rho(\tau) = \frac{1}{p_b} \mathcal{B}(\tau) \rho(0) \quad (3.6)$$

mit

$$\mathcal{B}(\tau) \rho(0) = \langle b | R(\tau) | b \rangle. \quad (3.7)$$

Die explizite Darstellung der Operatoren \mathcal{A} und \mathcal{B} lautet offensichtlich

$$\mathcal{A}(\tau) \rho(0) = \hat{u}(\tau) \rho(0) \hat{u}^\dagger(\tau) \quad (3.8)$$

$$\mathcal{B}(\tau) \rho(0) = \hat{v}(\tau) \rho(0) \hat{v}^\dagger(\tau) \quad (3.9)$$

mit

$$\hat{u}(\tau) = \cos\left(\frac{\hat{\mathcal{R}}}{2}\tau\right) + i\frac{\delta}{\hat{\mathcal{R}}}\sin\left(\frac{\hat{\mathcal{R}}}{2}\tau\right) \quad , \quad \hat{v}(\tau) = -ig\hat{a}^\dagger \frac{\sin\left(\frac{\hat{\mathcal{R}}}{2}\tau\right)}{\hat{\mathcal{R}}/2} \quad (3.10)$$

und dem „Rabi-Frequenz-Operator“

$$\hat{\mathcal{R}} = \sqrt{\delta^2 + 4g^2\hat{a}\hat{a}^\dagger}. \quad (3.11)$$

Wir kennen nun die Rückwirkung beider Meßergebnisse am Atom auf das Maserfeld, können im Einzelfall aber nicht vorhersagen, welches Ereignis eintreten wird. Das ist die Undeterminiertheit des quantenmechanischen Meßprozesses. Man könnte ein Meßergebnis simulieren, indem man eine Möglichkeit „auswürfelt“ und mit dem Resultat weiterrechnet. Bei jedem detektierten Atom müßte man würfeln. Als Ergebnis erhielte man einen möglichen Weg, den ein individuelles Ein-Atom-Maser-Experiment einschlagen könnte (siehe Lit. [46, 47]). Für eine analytische Rechnung bleibt aber nur die Ignoranz der durch die Messung am Atom gewonnenen Information, d.h. die Spurbildung über die atomaren Freiheitsgrade (Tr_A).

$$\rho(\tau) = \text{Tr}_A R(\tau) = (\mathcal{A}(\tau) + \mathcal{B}(\tau)) \rho(0) \quad (3.12)$$

Diese Schreibweise betont die Tatsache, daß die so berechnete Dichtematrix gleich dem mit den Wahrscheinlichkeiten für beide möglichen Ausgänge der Messung gewichteten Mittel, und daher gleich dem Scharmittel über ein Ensemble identischer Ein-Atom-Maser ist. Die Atome werden als Reservoir behandelt, an das das Feld gekoppelt ist und über das dann gespurt wird. Dabei

geht Information über das Feld verloren, die Entropie wächst und die Dynamik wird irreversibel.

Die *mittlere* Änderung von ρ durch die Wechselwirkung mit *einem* Atom beträgt demnach mit dem „Pumpoperator“

$$\mathcal{M} = \mathcal{A} + \mathcal{B} - \mathbf{1} \quad (3.13)$$

($\mathbf{1}$ bezeichnet die Einheitsmatrix):

$$\rho(\tau) - \rho(0) = \delta\rho = \mathcal{M}(\tau)\rho(0). \quad (3.14)$$

Unter Einführung der Nomenklatur

$$\langle n | \rho | n + k \rangle \equiv \rho_n^{(k)} \quad (3.15)$$

ergibt das in Komponenten

$$\begin{aligned} \delta\rho_n^{(k)} &= M_{nm}^{(k)} \rho_m^{(k)}(0) \\ &= [u_n(\tau) u_{n+k}^*(\tau) - 1] \rho_n^{(k)}(0) + v_{n-1}(\tau) v_{n-1+k}^*(\tau) \rho_{n-1}^{(k)}(0). \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.1.2 Die Dämpfungsphase

Bislang wurde die Dämpfung vernachlässigt; wir berücksichtigen sie jedoch während der Zeiten, in denen sich kein Atom im Resonator aufhält. (Die Atom-Feld-Wechselwirkung bei gleichzeitiger Dämpfung wird in Lit. [48] behandelt, wir können darauf aber in guter Näherung verzichten.) Das Feld strebt dann gegen einen thermischen Zustand im Gleichgewicht mit seiner Umgebung (z.B. den Resonatorwänden). Eine solche Dynamik ist irreversibel, d. h. die Entropie vergrößert sich und ein reiner Zustand entwickelt sich in ein Gemisch. Sie gehorcht folgender Mastergleichung (siehe z.B. Lit. [38, 36]):

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\gamma}{2} (\bar{n}_{th} + 1) [\hat{a}\rho, \hat{a}^\dagger] + \frac{\gamma}{2} \bar{n}_{th} [\hat{a}^\dagger, \rho\hat{a}] + \text{h.ad.} = \mathcal{L}\rho \quad (3.17)$$

mit der mittleren Photonenzahl $\bar{n}_{th} = (e^{\frac{\hbar\Omega}{k_B T}} - 1)^{-1}$ des thermischen Reservoirs, das sich auf der Temperatur T befindet. Die Dämpfungskonstante γ ist maßgeblich für die Geschwindigkeit des Relaxationsvorgangs und hängt in unserem Fall von der Resonatorgüte Q über $\gamma = \Omega/Q$ ab. Weiter wurde in Gl. (3.17) ein Liouville-Operator \mathcal{L} definiert. In Fock-Darstellung und für die k -te Diagonale lautet Gl.(3.17):

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_n^{(k)} &= \gamma \left\{ \bar{n}_{th} \sqrt{n(n+k)} \rho_{n-1}^{(k)} \right. \\ &\quad - (\bar{n}_{th} + 1) \left(n + \frac{k}{2} \right) - \bar{n}_{th} \left(n + 1 + \frac{k}{2} \right) \rho_n^{(k)} \\ &\quad \left. + (\bar{n}_{th} + 1) \sqrt{(n+1)(n+1+k)} \rho_{n+1}^{(k)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.1.3 Mastergleichung des Ein-Atom-Masers

Die Ankunftszeiten der Atome sind statistisch unabhängig, und daher Poissonverteilt [40]. (Das ist zumindest bei einem hinreichend dünnen Atomstrahl richtig, bei dem die einzelnen Atome sich gegenseitig nicht behindern.) In diesem Fall läßt sich die zeitliche Änderung des *Ensemblemittelwertes* von ρ durch die Pumpatome einfach durch Multiplikation von Gl.(3.14) mit der Rate r berechnen, mit der die Atome im Mittel eintreffen. (Eine explizite Mittelwertbildung mit demselben Ergebnis wird in Lit. [41] durchgeführt.) Zusammen mit Gl.(3.17) erhält man dann zwei Differentialgleichungen:

$$\frac{d\rho}{dt} = r\mathcal{M}\rho \quad \text{für den Pumpprozeß} \quad (3.19)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}\rho \quad \text{für die Dämpfung} \quad (3.20)$$

Nachdem Gl.(3.19) auf der Basis des Jaynes-Cummings-Modells hergeleitet wurde, gilt sie streng genommen nur im reversiblen Fall ohne Dämpfung. Berücksichtigt man jedoch die spezielle Situation des Ein-Atom-Masers, bei dem die Pumpphasen sehr kurze („stroboskopische“) Ereignisse darstellen, so kann man die Dämpfung für die Wechselwirkungszeiten in sehr guter Näherung vernachlässigen. Die gesamte Änderung von ρ ergibt sich dann einfach durch Addition beider Beiträge. Die Mastergleichung des Ein-Atom-Masers lautet damit:

$$\frac{d\rho}{dt} = (r\mathcal{M} + \mathcal{L})\rho \quad (3.21)$$

Mit Gl. (3.16) und (3.18) läßt sich dieses Ergebnis sofort in Fock-Darstellung formulieren:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_n^{(k)} &= \left\{ r v_{n-1}(\tau) v_{n-1+k}^*(\tau) + \gamma \bar{n}_{th} \sqrt{n(n+k)} \right\} \rho_{n-1}^{(k)} \\ &+ \left\{ r (u_n(\tau) u_{n+k}^*(\tau) - 1) - \gamma (\bar{n}_{th} + 1) \left(n + \frac{k}{2} \right) - \gamma \bar{n}_{th} \left(n + 1 + \frac{k}{2} \right) \right\} \rho_n^{(k)} \\ &+ \left\{ \gamma (\bar{n}_{th} + 1) \sqrt{(n+1)(n+1+k)} \right\} \rho_{n+1}^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Das ist eine iterative Differentialgleichung, die jeweils drei Matrixelemente entlang einer Diagonalen miteinander koppelt. Beim kohärent gepumpten (siehe [44]), wie auch beim phasengekoppelten (Abschnitt 4.5) Maser dehnt sich die Kopplung auf alle direkten Nachbarn aus.

Für die Hauptdiagonale mit $\rho_n^{(0)} \equiv p_n$ und unter Beachtung der Normierungsbedingung $|u_n|^2 + |v_n|^2 = 1$ vereinfacht sich Gl.(3.22) zu:

$$\begin{aligned} \dot{p}_n &= r \left\{ \underbrace{|v_{n-1}|^2 p_{n-1}}_a - \underbrace{|v_n|^2 p_n}_b \right\} \\ &+ \gamma \left\{ (\bar{n}_{th} + 1) \left[\underbrace{(n+1)p_{n+1}}_c - \underbrace{np_n}_d \right] + \bar{n}_{th} \left[\underbrace{np_{n-1}}_e - \underbrace{(n+1)p_n}_f \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Diese sechs Terme lassen sich als „Wahrscheinlichkeitsflüsse“ über drei Niveaus physikalisch interpretieren (Abb. 3.1):

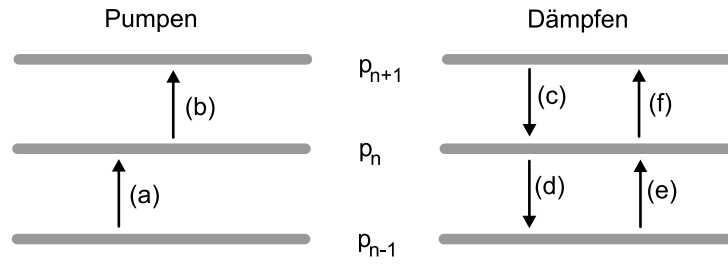


Abbildung 3.1: Zur Interpretation von Gl.(3.23) als „Wahrscheinlichkeitsfluß“ über drei Niveaus (siehe Text).

- Die zu r proportionalen Terme (a) und (b) beschreiben den nichtlinearen Pumpvorgang, der zu γ proportionale Rest die Dämpfung.
- (c) und (d) gelten der Absorption von Photonen aus dem Resonator durch das Wärmebad. Sie sind proportional zu Ausdrücken der Form np_n . Absorption findet auch für $T = 0K$ noch statt.
- (e) und (f) hingegen beschreiben die Emission von Photonen aus dem Wärmebad in den Resonator, was nur für eine endliche Temperatur möglich ist. Die Proportionalität zu $(n + 1)p_n$ weist neben den induzierten auf die spontanen Emissionsprozesse hin, die auch für $n = 0$ möglich sind und in (c) und (d) fehlen.

3.1.4 Stationäre Lösung

Im stationären Zustand sind die Nebendiagonalelemente $\rho_n^{(k)}$ mit $k > 0$ in Gl. (3.22) allesamt gleich null (Abschnitt 3.2.1). Es ist daher ausreichend, die stationäre Photonenzustand zu untersuchen. Zusätzlich zur Bedingung $\dot{p}_n = 0$ ist für eine stationäre Lösung von Gl.(3.23) zu fordern, daß ein Gleichgewicht der Wahrscheinlichkeitsströme zwischen zwei beliebigen Ebenen in Abb. 3.1 (*detailed balance*) herrscht. Das bedeutet $(a) + (d) + (f) = 0$ (mit den Vorfaktoren in Gl. (3.23)) bzw. dasselbe für die anderen drei Terme; beide Bedingungen sind identisch. Das führt auf folgende Iterationsformel

$$p_n = \left\{ \frac{\bar{n}_{th}}{\bar{n}_{th} + 1} + \frac{N_{ex}|v_{n-1}|^2}{n(\bar{n}_{th} + 1)} \right\} p_{n-1}, \quad (3.24)$$

und damit auf die stationäre Photonenzustand

$$p_n = p_0 \prod_{l=1}^n \left\{ \frac{\bar{n}_{th}}{\bar{n}_{th} + 1} + \frac{N_{ex}|v_{l-1}|^2}{l(\bar{n}_{th} + 1)} \right\}. \quad (3.25)$$

p_0 ist durch die Normierungsbedingung $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ bestimmt. Weiter wurde die „effektive Pumprate“ $N_{ex} = r/\gamma$ eingeführt. Die dimensionslose Größe ist gleich der Anzahl von Atomen, die den Resonator im Mittel während der

Dämpfungszeit durchqueren. Das sind diejenigen Atome, die wesentlich zum momentanen Feld beitragen.

Der Ein-Atom-Maser ist ein ergodisches System. Das abgeleitete Ensemblemittel ist daher gleich dem Zeitmittel des individuellen Masers. Ständige Messungen an den Atomen verhindern das Erreichen des stationären Zustandes. Der Langzeit-Mittelwert des fluktuierenden Feldes (und damit auch aller Observablen) konvergiert aber, unabhängig von der Art der Messungen, immer gegen das Ensemblemittel. Information über *bedingte* Wahrscheinlichkeiten, also Korrelationen, können im stationären Zustand allerdings nicht enthalten sein. Korrelationen entstehen ja gerade durch das kurzfristige Abweichen vom Langzeitmittel.

Die Atome haben beim Ein-Atom-Maser eine zweifache Aufgabe: Sie bauen das Feld auf, das sie gleichzeitig sondieren. Ihr Zustand bildet nämlich die einzige Observable, die zugänglich ist, ohne das Feld zu zerstören². Hinzu kommt, daß bislang (außer einzelner Atome) keine Mikrowellendetektoren existieren, die auf einzelne Photonen ansprechen. Daher spielt die Verknüpfung der Atomstatistik mit dem Feld eine entscheidende Rolle. Sie wird im Detail in Lit. [43] behandelt. Wir wollen uns hier nur auf eine einfache, aber grundlegende Beziehung beschränken: Löst man Gl.(3.24) nach $|v_{n-1}|^2 p_{n-1}$ auf und summiert über n , so erhält man nach Gl.(3.3) die Wahrscheinlichkeit p_b , das Atom hinter dem Resonator im unteren Niveau zu finden, als:

$$p_b = \sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^2 p_n = \frac{\langle n \rangle - \bar{n}_{th}}{N_{ex}} \quad (3.26)$$

Für 0 K bildet demnach N_{ex} eine obere Schranke für die mittlere Photonenzahl im Resonator. Sie wird erreicht, wenn alle Atome ein Photon in der Feldmode zurücklassen. Diese Bedingung kann jedoch nur annähernd erfüllt werden.

Im Resonanzfall erhält man $|v_{n-1}|^2 = \sin^2(\sqrt{n}g\tau)$. Das Argument des Sinus entspricht dem Winkel des atomaren Bloch-Vektors, der durch das quantisierte Feld allerdings nicht mehr scharf definiert ist. Man diskutiert nun die Funktion Gl.(3.25) häufig in Abhängigkeit eines *Pumpparameters*

$$\Theta = \sqrt{N_{ex}} g \tau, \quad (3.27)$$

der diesem Winkel nachempfunden ist. Das Argument des Sinus schreibt man dann als $\sqrt{n/N_{ex}} \Theta$. Für ein festes Θ ist die auf N_{ex} normierte Photonenzahl dann nur noch schwach abhängig von N_{ex} und $g\tau$.

In Abb. 3.2 wird die Photonenzahlstatistik anhand zweier charakteristischer Größen diskutiert, nämlich

$$\langle n \rangle = \sum_n n p_n \quad \text{und} \quad Q = \frac{\sigma^2}{\langle n \rangle} - 1 = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle} - 1. \quad (3.28)$$

Die in der rechten Gleichung definierte normierte Varianz (Mandel'scher Q-Parameter) hat einen Wertebereich von -1 bis ∞ . Für die Poisson-Verteilung,

²Das Feld wird durch die Detektion der Atome nicht zerstört, wohl aber wird es, wie wir gesehen haben, beeinflusst d. h. verändert.

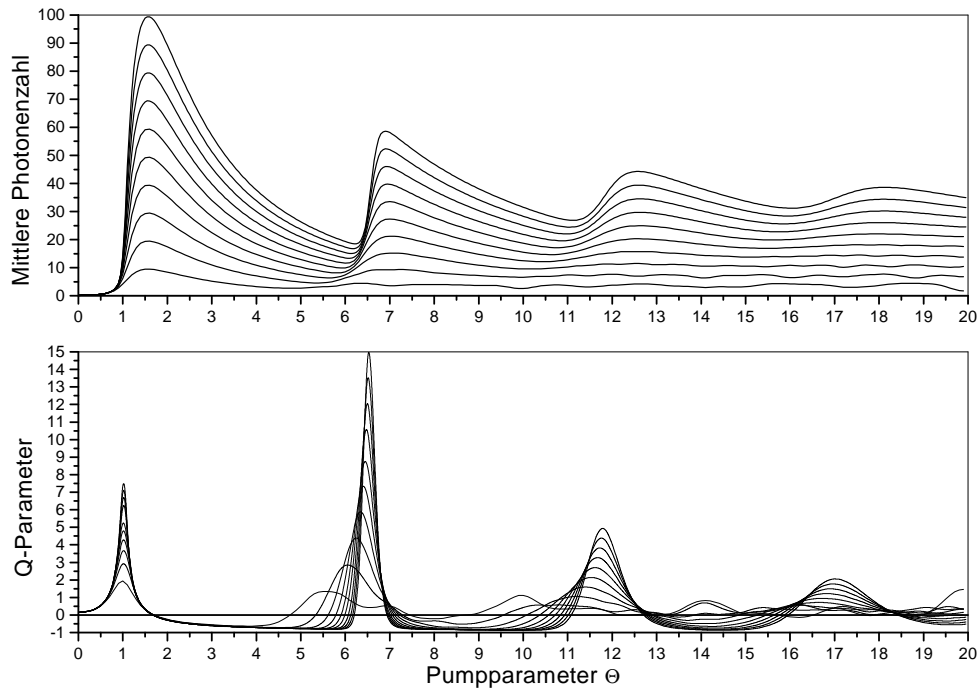


Abbildung 3.2: Oben: Mittlere Photonenzahl des Ein-Atom-Maser-Feldes in Abhängigkeit vom Pumpparameter $\Theta = \sqrt{N_{ex}}g\tau$ für $N_{ex} = 10, 20, \dots, 100$ und bei 0,15 thermische Photonen (was 500 mK entspricht). Für $\Theta = \pi/2$ erreicht $\langle n \rangle$ annähernd den Wert von N_{ex} . Man erkennt das für den Ein-Atom-Maser typische Auftreten mehrerer Maserschwellen, die mit größer werdendem N_{ex} zunehmend deutlicher ausgeprägt sind. Unten: Normierte Varianz des Feldes für dieselben Parameter wie oben. Die Bereiche mit negativem Q -Wert entsprechen einer sub-Poisson'schen Photonenzahlverteilung. Mit steigendem N_{ex} wird Q stärker negativ. Die Maxima treten vor den Maserschwellen auf. Ab der zweiten Schwelle entsprechen sie den bistabilen Bereichen. Mit zunehmendem N_{ex} steigt der Q -Wert dort an.

wie sie z.B. der kohärente Zustand besitzt, ist sie null, negative Werte werden als *sub-Poisson'sche*, positive als *super-Poisson'sche* bezeichnet.

Die Photonenzahlstatistik bei Masertätigkeit unterscheidet sich von der thermischen dadurch, daß ihr Maximum bei Werten von n größer 0 Photonen liegt. Daher kann man die (erste) Maserschwelle über die Bedingung $p_1 = p_0$ definieren. Eingesetzt in Gl.(3.24) führt das auf $N_{ex} \sin^2(g\tau) = 1$, und für nicht zu kleines N_{ex} gilt bei Ersetzung des Sinus durch sein Argument einfach $\Theta = 1$. Bei diesem Wert steigt die mittlere Photonenzahl in Abb. 3.2 steil an, während der Q -Parameter beim Übergang von der thermischen in eine Poisson-verteilte Photonenzahlstatistik (wie beim normalen Maser) stark super-Poissonsche Werte annimmt.

Die mittlere Photonenzahl erreicht bei $\Theta = \pi/2$ annähernd den nach Gl. (3.26) größtmöglichen Wert, nämlich N_{ex} . Die Atome führen hier im Mittel gerade einen π -Puls aus, d.h. sie geben ein Photon an das Feld ab und verlassen den Resonator im unteren Maserniveau. Gleichzeitig ist der Q -Wert gleich 0, wie man es weit oberhalb der Schwelle erwartet.

Übersteigt Θ den Wert von $\pi/2$, so befinden sich die Atome wieder auf dem Weg in den oberen Maserzustand. Sie sind im Begriff, ein bereits emittiertes Photon zu reabsorbieren. Entsprechend nimmt die Photonenzahl wieder ab. Zusätzlich tritt hier ein zunächst verblüffender Effekt auf: Der Q -Parameter nimmt negative Werte an, obgleich die Ankunftszeiten der Atome der Poisson-Statistik gehorchen. Ursache dafür ist die in diesem Bereich bestehende Abhängigkeit der Emissionswahrscheinlichkeit von der Photonenzahl, die Intensitätsschwankungen entgegenwirkt: Übersteigt die Photonenzahl kurzfristig den stationären Wert, so sinkt die Emissionswahrscheinlichkeit für kommende Atome, unterschreitet sie ihn, so steigt sie an. Daraus resultieren kleinere Intensitätsfluktuationen als beim kohärenten Zustand, also negative Q -Werte, ein typisch „unklassischer“ Bereich.

Dieser Steuermechanismus findet sich in der Atomstatistik wieder: Ist die Wartezeit zwischen zwei Atomen überdurchschnittlich lang, so fällt die Photonenzahl unter ihren Mittelwert ab, und die Emissionswahrscheinlichkeit für ein endlich doch eintreffendes Atom steigt über den stationären Wert an. Nach Detektion eines Atoms im unteren Niveau andererseits, wenn die Photonenzahl über ihrem Mittel liegt, verringert sich die Emissionswahrscheinlichkeit eines kurz darauf folgenden. Daher sind die Ankunftszeiten im unteren Niveau regelmäßiger, als es einem Poisson-Prozeß entspricht (*antibunching*), während für das obere Niveau das Gegenteil gilt (*bunching*). Eine quantitative Ableitung dieser Zusammenhänge findet sich in Lit. [43], Messungen in Lit. [12, 19, 49].

Bei weiterer Erhöhung von Θ durchläuft die mittlere Photonenzahl ein Minimum, um an der *zweiten* Maserschwelle erneut anzusteigen. Gleichzeitig nimmt der Q -Parameter große positive Werte an. Der Grund dafür ist das Entstehen eines *zweiten* Maximums in der Photonenzahlstatistik. Man erkennt das mit Hilfe von Gl.(3.24), indem man als Bedingung für einen Extremwert fordert $p_{n+1} = p_n$. Daraus ergibt sich die implizite Bedingung für n

$$N_{ex} \sin^2(g\tau\sqrt{n}) = n. \quad (3.29)$$

Am einfachsten löst man sie graphisch. Wegen der oszillierenden Sinus-Funktion besitzt diese Gleichung im allgemeinen viele Lösungen, d.h. es existieren mehrere Maxima in der Photonenzahlstatistik. Bei der zweiten Maserschwelle sind es zwei: Jenes bei niedrigerer Photonenzahl wird durch Atome erzeugt, die nur einmal ein Photon an das Feld abgeben, das bei höherer Photonenzahl hingegen durch solche, die ein Photon emittieren, reabsorbieren und dann ein zweites Mal emittieren. Dieser Bereich zeigt bistabiles Verhalten: Ein individueller Maser arbeitet mit kleinen Fluktuationen (quasi)stabil auf einer der beiden Intensitäten und führt mit einer verglichen mit der Dämpfungszeit des Resonators großen Zeitkonstante spontane Sprünge in die andere Intensität aus. Beide Maxima für sich betrachtet weisen einen negativen Q -Wert auf, zusammen ist er jedoch stark positiv. Untersuchungen zur Bistabilität findet man in Lit. [49, 50, 51].

Im Bereich des starken Anstiegs der mittleren Photonenzahl an der zweiten Maserschwelle setzt sich das Maximum bei höherer Photonenzahl schließlich durch. Dieses Verhalten wiederholt sich quasiperiodisch mit einer Periode in Θ

von etwa 2π . Dabei wird die Struktur zunehmend ausgewaschen, und zwar um so schneller, je kleiner N_{ex} gewählt ist. Man kann die typischen Eigenschaften des stationären Zustandes auch sehr anschaulich mit einem semiklassischen Modell beschreiben. Siehe dazu Lit. [40].

Ein essentielles Merkmal des Ein-Atom-Masers ist die exakte Kontrolle der Wechselwirkungszeiten. Sie ist notwendig für das Zustandekommen seiner typischen Eigenschaften. Bei breiter Wechselwirkungszeitverteilung mittelt sich $|v_n|^2$ (für Resonanz) zu $1/2$ und aus Gl.(3.25) leitet man für $\bar{n}_{th} = 0$ ab:

$$p_n = p_0 \frac{(N_{ex}/2)^n}{n!} \quad (3.30)$$

Das ist eine Poisson-Verteilung mit der mittleren Photonenzahl $N_{ex}/2$, wie beim gewöhnlichen Maser.

3.2 Kohärenz im Ein-Atom-Maser

3.2.1 Definition des Spektrums

Der Ein-Atom-Maser ist ein angetriebener Oszillator, dessen Schwingungsamplitude kleine Schwankungen um einen Mittelwert ausführt. Bei Abweichungen sorgt ein Rückkopplungsmechanismus, für eine rücktreibende „Kraft“, die eine Stabilisierung um den Mittelwert bewirkt. (Die Sprünge zwischen zwei quasistabilen Arbeitspunkten in den bistabilen Parameterbereichen bilden eine Ausnahme.)

Anders verhält es sich mit der *Phase* des Feldes: Sie unterliegt beim inkohärent gepumpten Maser einer freien *Diffusionsbewegung* ohne rücktreibenden Mechanismus. (Beim *kohärent* gepumpten Maser überträgt sich jedoch die atomare Kohärenz auf das Feld [44].) Der stationäre Zustand, der ja als Ensemble-Mittel definiert ist, besitzt daher keine ausgezeichnete Phase, sie mittelt sich zu null. Der einzige Phasen-gleichverteilte *reine* Zustand ist der Fock-Zustand; diese Eigenschaft geht bereits aus der Komplementarität zwischen Photonenzahl und Phase hervor (wir gehen hier nicht auf die Probleme bei der Definition eines Phasenoperators ein). Folglich ist der stationäre Zustand ein *inkohärentes* Gemisch aus Fock-Zuständen und damit in Fock-Darstellung *diagonal*. Kohärenzen zwischen einzelnen Fock-Zuständen führen zur Brechung der Phasen-Gleichverteilung.

Bei einem mit Kohärenzen ausgestatteten Anfangszustand erfahren die Nebendiagonalelemente demnach durch die Dynamik hin zum stationären Zustand eine Dämpfung gegen null. Dieses Verhalten spiegelt sich in der Zeitentwicklung der mittleren elektrischen Feldstärke wider, die von den Elementen der ersten Nebendiagonale, und damit von den Kohärenzen zwischen direkt benachbarten Fock-Zuständen, bestimmt ist:

$$\langle \vec{E}(t) \rangle \sim \text{Tr}(\rho \hat{a}^\dagger) + \text{h. ad.} = \sum_n \sqrt{n+1} \rho_n^{(1)}(t) + \text{h. ad.} \quad (3.31)$$

In der klassischen Physik ist das Spektrum des Lichtes ein geeignetes Maß für dessen Kohärenz. Die Übertragung auf die Quantenmechanik ist jedoch

wegen der Nicht-Vertauschbarkeit von Operatoren uneindeutig. Ein Überblick dazu wird in Lit. [52] gegeben. Eine sinnvolle, sich an die klassische Physik anlehrende Definition des Intensitätsspektrums $S(\omega)$ ist gegeben durch

$$S(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \langle E(t) \rangle e^{-i\omega t} dt \right|^2. \quad (3.32)$$

Allerdings ist die Anwendbarkeit dieses Ausdruckes beschränkt auf die Entwicklung eines anfänglich phasenbehafteten in den phasengleichverteilten, stationären Zustand und hängt (meist jedoch nur geringfügig) von der speziellen Wahl eines Anfangszustandes ab.

Die fehlende Information über die Schwingungsphase des Lichtes im stationären Zustand darf aber nicht verwechselt werden mit einer fehlenden Kohärenz der Strahlung, wie im Falle thermischen Lichtes. Das wird mit Hilfe der Zwei-Zeiten-Amplituden-Korrelationsfunktion im Heisenbergbild

$$K^{(1)}(t) = \langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(0) \rangle \quad (3.33)$$

deutlich. Dabei kann (muß aber nicht) zum Zeitpunkt 0 bereits der stationäre Zustand (mit $\langle \vec{E} \rangle = 0$) vorliegen; es ist nämlich keine *absolute* Feldphase relevant, sondern lediglich die *relative* Phase der Amplituden zu zwei unterschiedlichen Zeiten 0 und t . Für einen stationären Anfangszustand besitzt $K^{(1)}(t)$ die Zeitabhängigkeit von $\langle \vec{E}(t) \rangle$ nach Gl.(3.31) mit den speziellen Anfangsbedingungen [53]

$$\rho_n^{(1)}(0) = \sqrt{n+1} p_{n+1}. \quad (3.34)$$

Dabei ist p_n die stationäre Photonenzahlstatistik nach Gl.(3.25). Das Intensitätsspektrum wird dann definiert als [36, 53, 55]

$$S(\omega) = \text{Re} \int_0^{\infty} K^{(1)}(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.35)$$

3.2.2 Phasendiffusion semiklassisch

Phasendiffusion und spektrale Eigenschaften des Ein-Atom-Maser-Feldes waren bereits Thema unterschiedlicher theoretischer Untersuchungen. Sowohl genäherte analytische [54, 55, 56] als auch numerische [55, 53, 57] Methoden wurden dazu entwickelt; die Ergebnisse sind häufig sehr verschieden von denen des makroskopischen Masers [55, 57]. Doch worin liegt der physikalische Ursprung dieses unterschiedlichen Verhaltens? Kann man die Ursache der Phasendiffusion in einem anschaulichen Modell begreifen?

Alle bisherigen Berechnungen basieren auf der Quanten-Mastergleichung des Ein-Atom-Masers (3.22) bzw. (3.21). Der mächtige mathematische Apparat verschleiert dabei ein intuitives Bild, das in der folgenden semiklassischen Betrachtung zu Tage tritt.

Wir unterscheiden zunächst zwei Beiträge zur Phasendiffusion: Der erste wird einfach durch die unvermeidliche Kopplung an die thermische Umgebung verursacht (Dissipations-Fluktuations-Theorem). Dabei handelt es sich selbstverständlich nicht um eine einmalige Ein-Atom-Maser-Eigenschaft, von der wir

uns neue Einsichten erhoffen dürfen. Wir vernachlässigen ihn deshalb zunächst vollständig und konzentrieren uns ganz auf den zweiten Beitrag, der demnach das typische Verhalten beinhalten muß: die Wechselwirkung von Resonatorfeld und Atomen und zwar in folgender Näherung:

i) **Näherungslösung für das Jaynes-Cummings-Modell:** Wir gehen von folgender Situation aus: Das Feld befinde sich in einem kohärenten Anfangszustand

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (3.36)$$

während ein erstes Atom den Resonator im oberen Zustand $|a\rangle$ erreiche. Weiter sei die Rate der Atome gerade so gewählt, daß die mittlere Photonenzahl $\bar{n} = |\alpha|^2$ zeitlich konstant bleibt. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf exakte Resonanz. Dann ist der Hamilton-Operator Gl.(2.15) im mit der Lichtfrequenz rotierenden Wechselwirkungsbild alleine durch den Wechselwirkungsterm gegeben. Die unitäre Dynamik gehorcht somit dem Operator

$$U_{JC}(\tau) = \exp\left\{-i\bar{g}\tau(\sigma\hat{a}^\dagger + \sigma^\dagger\hat{a})\right\}, \quad (3.37)$$

der wie folgt dargestellt werden kann [58]:

$$\begin{aligned} U_{JC}(\tau) &= \cos(\bar{g}\tau\sqrt{\hat{n}+1}) |a\rangle\langle a| + \cos(\bar{g}\tau\sqrt{\hat{n}}) |b\rangle\langle b| \\ &- i\frac{\sin(\bar{g}\tau\sqrt{\hat{n}+1})}{\sqrt{\hat{n}+1}} \hat{a} |a\rangle\langle b| - i\frac{\sin(\bar{g}\tau\sqrt{\hat{n}})}{\sqrt{\hat{n}}} \hat{a}^\dagger |b\rangle\langle a|. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dabei ist $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ der Photonenzahl-Operator und \bar{g} die gemäß dem Pulsflächentheorem Gl.(2.28) gemittelte Kopplungskonstante. Der verschränkte Zustand $|\psi(\tau)\rangle$ des Systems aus Atom und Feld nach der Wechselwirkungszeit τ läßt sich daher schreiben als

$$\begin{aligned} |\psi(\tau)\rangle &= U_{JC}(\tau) [|\alpha\rangle \otimes |a\rangle] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(|a\rangle - \hat{a}^\dagger \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}} |b\rangle \right) e^{i\sqrt{\hat{n}+1}\bar{g}\tau} \right. \\ &\quad \left. + \left(|a\rangle + \hat{a}^\dagger \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}} |b\rangle \right) e^{-i\sqrt{\hat{n}+1}\bar{g}\tau} \right\} |\alpha\rangle. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Das ist die analytische Lösung der Jaynes-Cummings-Wechselwirkung für das gewählte Anfangsproblem in Operatorform. Man kann jetzt den kohärenten Zustand nach Gl.(3.36) in Fock-Darstellung einsetzen, wodurch die Wirkung der Operatoren unmittelbar ausgeführt werden kann. Die Lösung ist dann durch eine unendliche Summe gegeben und der Zusammenhang zu den Ergebnissen in Abschnitt 2.3 liegt auf der Hand.

Wir nutzen aber die Vorteile der übersichtlichen Operatorschreibweise und suchen eine einfache Näherungslösung. Dazu beschränken wir uns auf nicht zu kleine mittlere Photonenzahlen $\bar{n} \gg 1$, wodurch die Photonenzahlstatistik (Poisson-Verteilung) ein einziges, relativ scharfes Maximum aufweist. Dann

entwickeln wir die Wurzel im Exponenten der e-Funktion in eine Taylor-Reihe um \bar{n} bis zum linearen Term

$$\sqrt{\hat{n}+1} = \sqrt{\bar{n}+1} + \frac{\hat{n} - \bar{n}}{2\sqrt{\bar{n}+1}} - \dots \approx \frac{\hat{n}}{2\sqrt{\bar{n}+1}} + \frac{\sqrt{\bar{n}}}{2}. \quad (3.40)$$

Die Näherung ist adäquat, solange die Wechselwirkungszeit klein ist im Vergleich zur Wiederkehrzeit der Rabi-Oszillationen (Revival-Zeit), d. h. solange $\bar{g}\tau \ll 2\pi\sqrt{\bar{n}}$. Wir werden feststellen, daß sie für ein qualitatives Verständnis sogar darüber hinaus noch anwendbar ist.

Nun besteht die Wirkung der Exponentialfunktionen in Gl.(3.39) auf den kohärenten Zustand nur noch in einer Verschiebung der Schwingungsphase. Das ist unmittelbar ersichtlich, wenn man $|\alpha\rangle$ in Fock-Darstellung Gl.(3.36) schreibt

$$e^{i\sqrt{\hat{n}+1}\bar{g}\tau}|\alpha\rangle \approx e^{i\frac{1}{2}\sqrt{\bar{n}}\bar{g}\tau} e^{i\frac{\hat{n}}{2\sqrt{\bar{n}+1}}\bar{g}\tau}|\alpha\rangle = e^{i\frac{1}{2}\sqrt{\bar{n}}\bar{g}\tau}|\alpha e^{i\frac{\bar{g}\tau}{2\sqrt{\bar{n}+1}}}\rangle. \quad (3.41)$$

Diese Verschiebung der Phase, in der das Feld schwingt, ist entscheidend für das Verständnis der Phasendiffusion.

Weiter betrachten wir den normierten Erzeugungsoperator $\hat{a}^\dagger \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}}$ in Gl. (3.39). Er taucht in Verbindung mit dem atomaren Grundzustand $|b\rangle$ auf und ist physikalisch leicht zu interpretieren: Wird das Atom nach der Wechselwirkung im unteren Niveau gemessen, so ist ein Photon im Resonator verblieben und die gesamte Photonenstatistik wird um eins erhöht: $\hat{a}^\dagger \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}}|n\rangle = |n+1\rangle$.

Folgende Überlegung führt uns hier zur gesuchten Näherung: Nachdem wir oben bereits die Anbindung an die Umgebung und damit die Verluste durch Dämpfung *nicht* berücksichtigt haben, vernachlässigen wir nun *auch* den Energiegewinn des Pumpeffektes. Beide heben sich nämlich gegenseitig auf, abgesehen von geringfügigen Intensitätsfluktuationen, die jedoch für das Spektrum des Masers im Vergleich zur Phasendiffusion unwesentlich sind. Wir setzen also einen konstanten Betrag $|\alpha|$ der Feldamplitude voraus. Die bistabilen Betriebszustände bilden hier eine Ausnahme, für die diese Näherung nicht anwendbar ist; wir kommen am Ende des Abschnittes darauf zurück. Mit der komplexen Amplitude $\alpha := \sqrt{\bar{n}} e^{i\phi}$ und unter Verwendung von Gl. (3.36) schreiben wir

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger \frac{1}{\sqrt{\hat{n}+1}}|\alpha e^{i\frac{\bar{g}\tau}{2\sqrt{\bar{n}+1}}}\rangle &= e^{-i(\phi+\frac{\bar{g}\tau}{2\sqrt{\bar{n}+1}})} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{\bar{n}}} \frac{(\alpha e^{i\frac{\bar{g}\tau}{2\sqrt{\bar{n}+1}}})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &\approx e^{-i(\phi+\frac{\bar{g}\tau}{2\sqrt{\bar{n}+1}})} |\alpha e^{i\frac{\bar{g}\tau}{2\sqrt{\bar{n}+1}}}\rangle. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Dabei wurde $\sqrt{\frac{n}{\bar{n}}}$ mit 1 genähert, was für die wichtigen Beiträge der Summe in der Umgebung von \bar{n} nur eine kleine Abweichung bedeutet. Photonenzahlen *oberhalb* von \bar{n} werden dabei aber etwas *unterestimiert*, *darunter* liegende hingegen leicht *überbewertet*. Man kann die Näherung unabhängig vom Maserbetrieb, bei dem sich Gewinne und Verluste die Waage halten, auch als „Starkfeld-Approximation“ interpretieren, bei der es nicht auf ein Photon mehr oder weniger ankommt. Wichtig ist die zeitabhängige Phase, die nun vor dem

kohärenten Zustand steht. Mathematisch gesprochen wurde die Wirkung des Operators wie eine Eigenwert-Gleichung genähert.

Damit haben wir alle nötigen Zutaten. Wir müssen nur noch Gl.(3.41) und (3.42) in (3.39) einsetzen und erhalten die folgende Näherungslösung für die Jaynes-Cummings Dynamik:

$$|\psi(\tau)\rangle \approx \frac{1}{2} \left\{ \left(|a\rangle - e^{-i(\phi + \frac{\bar{g}\tau}{2\sqrt{n+1}})} |b\rangle \right) e^{+\frac{i}{2}\sqrt{n}\bar{g}\tau} |\alpha\rangle e^{+i\frac{\bar{g}\tau}{2\sqrt{n+1}}} \right. \\ \left. + \left(|a\rangle + e^{-i(\phi - \frac{\bar{g}\tau}{2\sqrt{n+1}})} |b\rangle \right) e^{-\frac{i}{2}\sqrt{n}\bar{g}\tau} |\alpha\rangle e^{-i\frac{\bar{g}\tau}{2\sqrt{n+1}}} \right\}. \quad (3.43)$$

Diese Formel ist verglichen mit der exakten Lösung Gl.(3.39) relativ einfach, beinhaltet jedoch die meisten relevanten Aussagen des Modells. Sie ist in Übereinstimmung mit einem Resultat, das auf anderem Wege und mit anderer Motivation (nämlich der Interpretation des Feldes als quantenmechanischen Meßapparat) in Lit. [59] abgeleitet wurde. Wir machen einen kleinen Exkurs über das Ziel der semiklassischen Beschreibung der Phasendiffusion hinaus, und besprechen ein paar typische Eigenschaften, die durch Gl.(3.43) enthüllt werden:

Auffälligstes Merkmal ist die Superposition zweier kohärenten Zustände, die sich während der Wechselwirkung im Phasenraum auf einem Kreis um den Ursprung in entgegengesetzter Richtung zueinander bewegen [siehe Abb. 3.3 (a) und (b)]. Ursache dieser symmetrischen Aufspaltung des Feldes in zwei Komponenten mit verschiedener Phase ist die Energiedifferenz der dressed states, die gleich der Rabi-Frequenz \mathcal{R}_n nach Gl.(2.19) ist. Jeder der beiden Feldanteile ist korreliert mit einer atomaren Superposition. Für kleine Zeiten verglichen mit der Revival-Zeit d. h. $\bar{g}\tau \ll 2\pi\sqrt{n}$ kann man die atomaren Zustände mit den orthonormalen semiklassischen dressed states

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|a\rangle \pm e^{-i\phi} |b\rangle \right) \quad (3.44)$$

nähern und erhält

$$|\psi(\tau)\rangle \approx \frac{1}{2} \left\{ e^{+\frac{i}{2}\sqrt{n}\bar{g}\tau} |-\rangle \otimes |\alpha\rangle e^{+i\frac{\bar{g}\tau}{2\sqrt{n+1}}} + e^{-\frac{i}{2}\sqrt{n}\bar{g}\tau} |+\rangle \otimes |\alpha\rangle e^{-i\frac{\bar{g}\tau}{2\sqrt{n+1}}} \right\}. \quad (3.45)$$

Dieser Zustand kann im Sinne des Schrödinger'schen Katzen-Paradoxons [20] interpretiert werden: die Verschränkung zweier mikroskopischer Zustände $|\pm\rangle$, von denen jeder mit makroskopisch unterscheidbaren Zuständen korreliert ist. Das wäre für großes $|\alpha|$ die Feldphase.

Wir bleiben aber beim Ein-Atom-Maser; dort sondieren die Atome die Strahlung, und nicht umgekehrt. Gl.(3.45) demonstriert unmittelbar die *Rückwirkung* der Messung am Atom auf das Feld: Projiziert man das Atom nach der Wechselwirkung in die Basis $|\pm\rangle$ (was im Prinzip durch einen $\pi/2$ -Puls eines klassischen Mikrowellen-Feldes mit Phase ϕ nach der Wechselwirkung und anschließende zustandsselektive Feldionisation möglich ist [13, 60]), so wird das Feld in *eine* der beiden Phasen projiziert. Allerdings muß man nach jedem detektierten Atom und je nach Ausgang der Messung die Phase der Mikrowelle

nachstellen, da diese ja in der Basis $|\pm\rangle$ auftaucht und eine Symmetrieachse festlegt, bezüglich der die Projektion des Feldzustandes erfolgt. Dadurch wird das Feld immer wieder in einen kohärenten Zustand mit fluktuierender Phase gezwungen („random phase walk“). Die Beobachtung der Phasendynamik schließt jedoch die gleichzeitige Beobachtung der Photonenzahl aus. Die intensitätssensitive Beobachtung ist die Projektion des Atoms in die Basis $|a\rangle$, $|b\rangle$, bei der wiederum die Information über die Feldphase verloren geht (siehe dazu auch Lit. [60]). Beide sind zueinander *komplementär*.

Eine weitere bemerkenswerte Erscheinung tritt bei der *halben Revival-Zeit* $\bar{g}\tau = \pi\sqrt{\bar{n}}$ auf: Dann befinden sich Atom und Feld nach Gl.(3.43) nämlich nicht mehr in einem verschränkten, sondern in einem einfachen Produktzustand. Messungen an *einem* Teilsystem haben folglich keine Rückwirkung mehr auf das *andere*. Die Aufhebung der Verschränkung ist allerdings in der exakten Dynamik Gl.(3.39) nicht vollständig, sondern nur annähernd realisiert [59].

Das Phänomen von Kollaps und Wiederaufleben der Besetzungszillationen beider Energieniveaus des Atoms bekommt mit Gl.(3.43) eine besonders anschauliche Interpretation. Die Wahrscheinlichkeit $p_b(\tau)$, das Atom im unteren Maserniveau anzutreffen, ist dann nämlich gegeben durch

$$p_b(\tau) = \langle \psi(\tau) | b \rangle \langle b | \psi(\tau) \rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\sqrt{\bar{n}}\bar{g}\tau} \langle \alpha e^{-i\frac{\bar{g}\tau}{2\sqrt{\bar{n}+1}}} | \alpha e^{+i\frac{\bar{g}\tau}{2\sqrt{\bar{n}+1}}} \rangle \right\}. \quad (3.46)$$

Die Enveloppe der Rabi-Oszillationen ist demnach durch den *Überlapp*³ der beiden Feldanteile bestimmt. Das Auseinanderlaufen beider Phasen führt zum Kollaps, ihre Kollisionen, die jeweils nach halben Umläufen im Phasenraum erfolgen, zu den Revivals. Numerisch wurde dieser Zusammenhang bereits in Lit. [61] beobachtet.

Nach Auswertung des Skalarproduktes erhält man aus Gl.(3.46) eine die Revivals enthaltende analytische Form:

$$p_b(\tau) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp \left\{ -2\bar{n} \sin^2 \left(\frac{\bar{g}\tau}{2\sqrt{\bar{n}}} \right) \right\} \cos \left\{ \bar{n} \sin \left(\frac{\bar{g}\tau}{\sqrt{\bar{n}}} \right) + \sqrt{\bar{n}} \bar{g}\tau \right\}. \quad (3.47)$$

Die e -Funktion beschreibt eine in der Revival-Zeit periodische Enveloppe, der Cosinus die Rabi-Oszillationen. Die lineare Näherung der beiden Sinus-Funktionen für kleine Zeiten verglichen mit der Revival-Zeit in Gl. (3.47) führt zurück zur bekannten „Kollaps-Formel“

$$p_b(\tau) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\bar{g}^2\tau^2} \cos \left(2\sqrt{\bar{n}} \bar{g}\tau \right). \quad (3.48)$$

Die Grenzen der Gültigkeit von Gl.(3.43) bestehen darin, daß durch die lineare Näherung der Wurzelfunktion in Gl.(3.41) aus einem in der Revival-Zeit *quasi*periodischen Verhalten ein *periodisches* gemacht wird. Die Form der im Phasenraum auseinanderlaufenden Hügel wird dabei als zeitlich konstant genähert. In der exakten Lösung *zerlaufen* die Hügel aber im Laufe der

³mit „Überlapp“ ist anschaulich das Überlappen der beiden Hügel im Phasenraum gemeint. Mathematisch gesprochen handelt es sich um das Skalarprodukt, das wegen der Übervollständigkeit kohärenter Zustände einen Beitrag liefert.

Zeit; sie werden in der Winkelverteilung breiter und in der Intensitätsverteilung gequetscht (siehe Abb. 3.3 (a) und (b) und Ref [61]). Dadurch werden die Revivals zunehmend breiter und niedriger, bis sie sich überlagern und zu sogenannten „fractional Revivals“ [62] führen. Berücksichtigt man den quadratischen Term in Gl.(3.41), so wird dieser Effekt bereits in erster Ordnung erfaßt.

ii) **Übergang zum klassischen Phasenraum:** Nach diesem Exkurs kehren wir zurück zum Problem der Phasendiffusion. Wir gehen davon aus, daß wir vom Zustand der Atome nach Verlassen des Resonators keine Notiz nehmen, spüren also über die atomaren Freiheitsgrade. Dann verbleibt das Feld nach der ersten Wechselwirkung in einer (je nach Wechselwirkungszeit mehr oder weniger kohärenten) Überlagerung zweier ausgezeichneten Phasen, die bezüglich des Anfangszustandes $|\alpha\rangle$ nun um den Winkel

$$\pm\Delta\varphi = \frac{\bar{g}\tau}{2\sqrt{\bar{n}+1}} \quad (3.49)$$

versetzt und auf einem zum Ursprung konzentrischen Kreis mit Radius $\sqrt{\bar{n}}$ lokalisiert sind [siehe Abb. 3.3 (b)]. Im resonanten Fall, den wir hier betrachten, sind beide Feld-Phasen gleich stark ausgeprägt. Die anschließende Wechselwirkung mit einem zweiten Atom teilt jeden der beiden Anteile noch einmal in zwei Hügel auf, wobei sich zwei davon wieder beim Ausgangspunkt treffen [siehe Abb. 3.3 (c)]. Die Phase teilt sich also in eine zunehmende Anzahl von Komponenten. Dieser fortschreitende Prozeß [Abb. 3.3 (d)-(f)] ist im Ein-Atom-Maser (zumindest bei hoher Resonatorgüte und niedriger Temperatur) die *maßgebliche Ursache* für die Phasendiffusion.

Um eine analytische Näherung für die Zeitabhängigkeit der mittleren elektrischen Feldstärke abzuleiten, ästimieren wir jeden Hügel nicht mit allen Details seiner Gestalt, sondern einfach durch einen komplexen Feldstärke-Vektor $E_l = e^{il\Delta\varphi}$ ($l = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$), der in dessen Mittelpunkt endet. Das entspricht dem Übergang von einem quantenmechanischen zum klassischen Phasenraum. Jede Komponente E_l hat ihr Gewicht, das wir jetzt als Wahrscheinlichkeit interpretieren können. In Abb. 3.3 (a) ist E_0 natürlich mit 1 zu gewichten, in (b) beträgt die Gewichtung beider Anteile $\frac{1}{2}$, in (c) werden $E_{\pm 2}$ mit jeweils $\frac{1}{4}$ und E_0 mit $\frac{1}{2}$ berücksichtigt.

Damit kommt man schließlich auf folgenden Zusammenhang: Nach j aufeinanderfolgenden Atomen ist das Gewicht G_{lj} der Komponente E_l gegeben durch die Formel

$$G_{lj} = \begin{cases} \binom{j}{\frac{l+j}{2}} 2^{-j} & \text{falls } l+j \text{ geradzahlig und } |l| \leq j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.50)$$

Um aus den Gewichten nach einer gewissen Anzahl von Atomen auf die Gewichte nach einer bestimmten *Zeit* zu schließen, müssen wir die Ankunftszeit-Verteilung der Atome berücksichtigen. Diese sind unkorreliert, also Poisson-

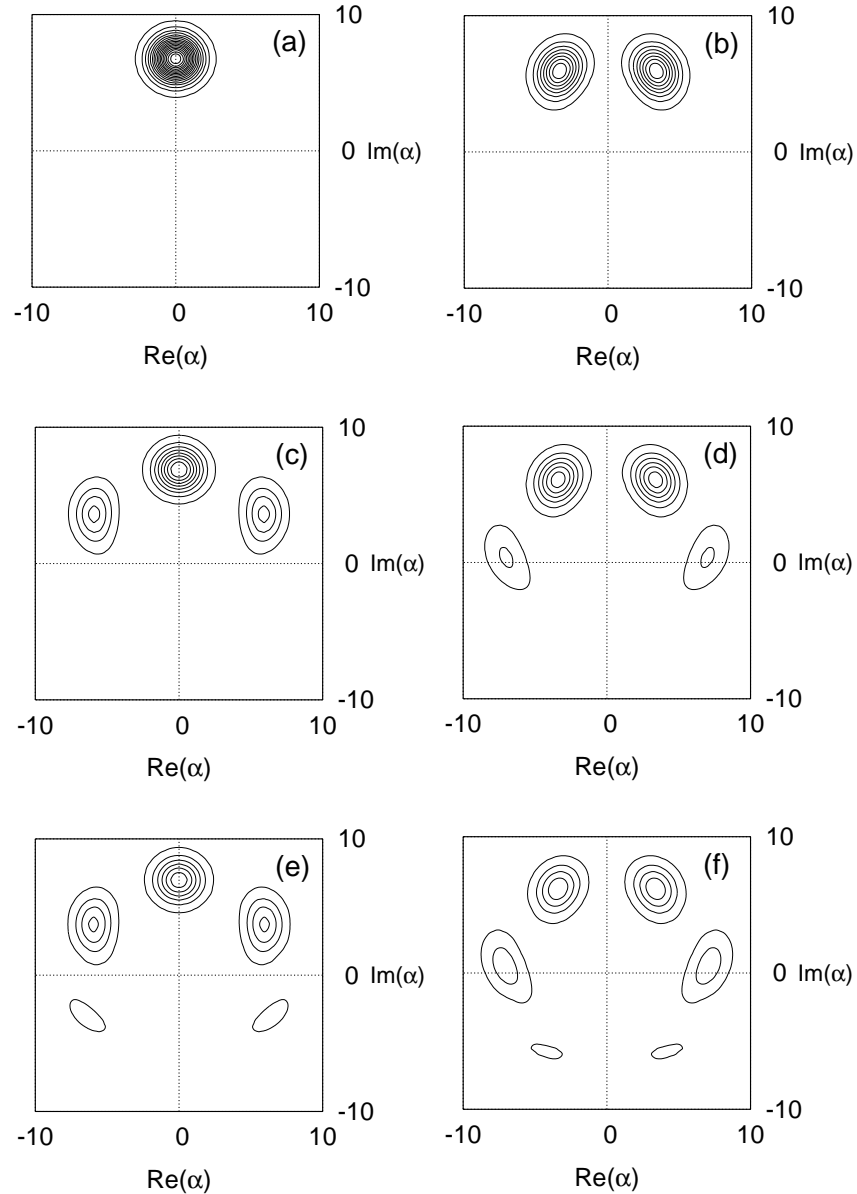


Abbildung 3.3: Konturlinien der Q -Funktion des Resonatorfeldes nach Spurbildung über das atomare Teilsystem. (a) Die Feldmode ist ursprünglich in einem kohärenten Zustand $|\alpha = 7\rangle$. (b)-(f) Fünf aufeinanderfolgende Atome führen zur Aufspaltung der Phase in viele Komponenten, die bei ganzzahligen Vielfachen der Winkel $\Delta\varphi = \frac{\bar{q}\tau}{2\sqrt{\bar{n}+1}} = 30^\circ$ auf einem zum Ursprung konzentrischen Kreis im Phasenraum angeordnet sind. Resonatorverluste sind nicht berücksichtigt. Die Aufspaltung ist der grundlegende Mechanismus der Phasendiffusion im Ein-Atom-Maser. Zur Verdeutlichung wurde der Aufspaltwinkel größer gewählt, als typischerweise im Experiment der Fall.

verteilt. Daher ist die Wahrscheinlichkeit $p_j(t)$, daß j Atome in einem Zeitfenster t ankommen, gegeben durch

$$p_j(t) = e^{-rt} \frac{(rt)^j}{j!}. \quad (3.51)$$

Hier bezeichnet r wieder die atomare Rate (Atome pro Zeit) und rt demnach den Mittelwert der Verteilung.

Das Gewicht $\bar{G}_l(t)$ für die Feldkomponente E_l nach der Zeit t ist folglich

$$\bar{G}_l(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) W_{lj}. \quad (3.52)$$

Schließlich müssen wir noch das gewichtete Mittel über alle Feld-Bestandteile E_l bilden

$$\langle E(t) \rangle = \sum_{l=-\infty}^{\infty} E_l \bar{G}_l(t) = e^{-rt} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{l=-j \\ l+j \text{ gerade}}}^j e^{il\Delta\varphi} \frac{(rt/2)^j}{\left(\frac{j+l}{2}\right)! \left(\frac{j-l}{2}\right)!}. \quad (3.53)$$

Mit Hilfe der Substitutionen $\tilde{l} = \frac{1}{2}(l+j)$, $a = (rt/2)e^{i\Delta\varphi}$ und $b = (rt/2)e^{-i\Delta\varphi}$ können wir die Summation ausführen:

$$\langle E(t) \rangle = e^{-rt} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\tilde{l}=0}^j \frac{a^{\tilde{l}} b^{j-\tilde{l}}}{\tilde{l}! (j-\tilde{l})!} = e^{-rt} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^l}{l!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^j}{j!} = e^{-rt} e^a e^b. \quad (3.54)$$

Hier wurde die Cauchy'sche Produkt-Formel angewendet. Durch Rücksubstitution von a und b kommen wir auf folgendes einfaches Ergebnis:

$$\langle E(t) \rangle = e^{-\frac{1}{2}D_a t} \quad \text{mit} \quad D_a = 4r \sin^2 \left(\frac{\bar{g}\tau}{4\sqrt{\bar{n}+1}} \right). \quad (3.55)$$

Der Index a steht für den *atomaren* Anteil. Zusammen mit dem meist um Größenordnungen kleineren thermischen Anteil $D_{th} = \gamma(2\bar{n}_{th} + 1)/(4\bar{n})$ [mit der mittleren thermischen Photonenzahl \bar{n}_{th} und der Resonator-Dämpfungs-konstanten γ], den wir nach Voraussetzung nicht berücksichtigt haben, ist die Gleichung in Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus Lit. [54, 55]. Im Unterschied dazu sind wir aber nicht von der Mastergleichung des Ein-Atom-Masers ausgegangen, sondern direkt von der elementaren Atom-Feld-Wechselwirkung.

$D = D_a + D_{th}$ wird als *Phasendiffusionskonstante* bezeichnet. Das Spektrum ist dann gemäß Gl.(3.32) gegeben durch $S(\omega) \sim (\omega^2 + (D/2)^2)^{-1}$. Das ist eine einfache Lorentz-Linie mit D als voller Breite auf halber Höhe.

iii) **Interpretation der Phasendiffusion:** Maßgebliche physikalische Ursache der Phasendiffusion beim Ein-Atom-Maser ist die Aufspaltung, die die Phase durch jedes Atom erfährt. Der halbe Aufspaltungswinkel Gl.(3.49) steht im Argument des Sinus in Gl.(3.55). Man kann eine „Geschwindigkeit im Phasenraum“ definieren, mit der sich die einzelnen Komponenten des Feldes während der

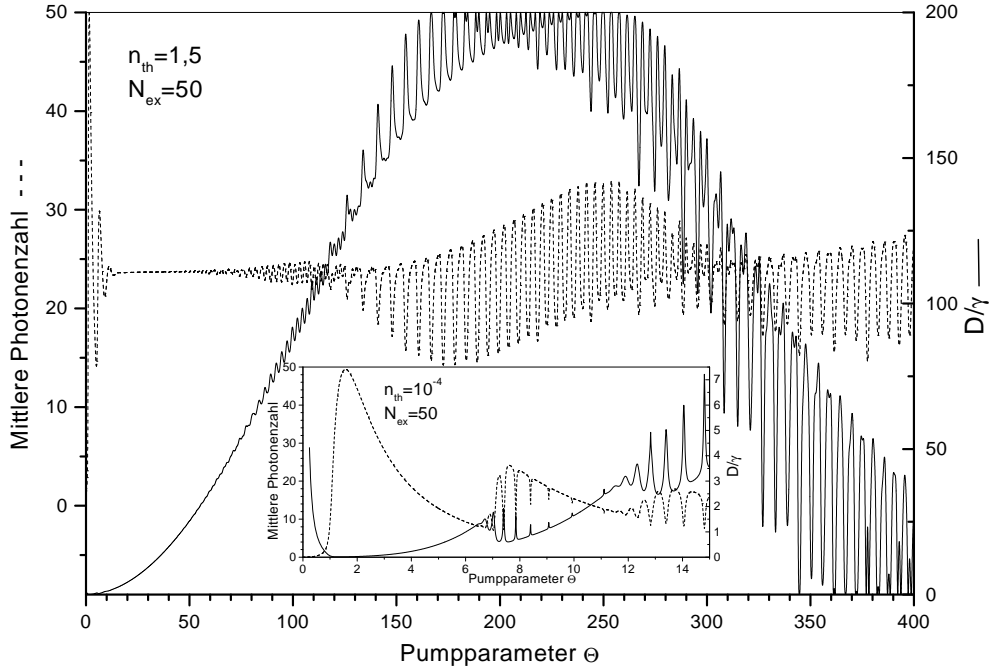


Abbildung 3.4: Durchgezogene Linie: Phasendiffusionskonstante $D = D_a + D_{th}$ in Einheiten der Dämpfungsconstanten γ als Funktion des Pumpparameters Θ nach Gl. (3.55). Die komplizierte Struktur kommt durch die Abhängigkeit von der mittleren Photonenzahl (gestrichelte Linie) zustande. D/γ nimmt dort ihren Maximalwert von $4N_{ex}$ (plus den vernachlässigbar kleinen thermischen Beitrag) an, wo die Bedingung für das erste „Revival“ erfüllt ist. Wegen des oszillatorischen Verlaufes der mittleren Photonenzahl wird diese Bedingung mehrfach für unterschiedliche Werte von Θ erfüllt. Ein Minimum erreicht die Phasendiffusion beim zweiten „Revival“. Auch diese Bedingung wird mehrfach erfüllt. In der semiklassischen Näherung trägt dort nur der thermische Anteil bei. Ursache für die Phasendiffusion ist die in Abb. 3.3 dargestellte Aufspaltung der Feldphase. Im Einschub ist eine vergrößerte Darstellung für niedrige Temperatur gegeben. Bei den Fangzuständen („trapping states“) des Feldes zeigt die Phasendiffusionskonstante scharfe Maxima.

Wechselwirkung bewegen: $v = (\Delta\phi\sqrt{\bar{n}+1})/\tau = \bar{g}/2$. Sie hängt *nur* von der Kopplungsstärke ab. Entsprechend ist die „Winkelgeschwindigkeit im Phasenraum“ $\Delta\phi/\tau = \bar{g}/(2\sqrt{\bar{n}+1})$, und damit die Aufspaltung pro Atom um so größer, je kleiner die mittlere Photonenzahl ist. Das ist die Ursache für die \bar{n} -Abhängigkeit in Gl.(3.55), die z. B. bei den Fangzuständen des Feldes [28] besonders dramatische Auswirkungen hat (siehe Einschub in Abb. 3.4).

Für $\Delta\phi = \pi$ erreicht die Phasendiffusion ein Maximum. Das ist die Bedingung für das erste Revival, bei dem sich die beiden Hügel auf der gegenüberliegenden Seite im Phasenraum wieder vereinigen. Mit jedem Atom erfährt die Feldphase also einen Sprung um π . Nachdem aber die Atome keine regelmäßigen, sondern Poisson-verteilte Ankunftszeiten besitzen, weist das *Scharmittel* des Feldes keine Sprünge auf, sondern den schnellstmöglichen Zerfall von $\langle E(t) \rangle$, und D_a nimmt ihr Maximum ein (Abb. 3.4).

Beim zweiten Revival für $\Delta\phi = 2\pi$ treffen sich beide Feldanteile nach

einer vollständigen Drehung um den Ursprung im Phasenraum wieder am Ausgangspunkt; die Phase bleibt durch die Atome also (auch im Ensemble-Mittel) effektiv unverändert und D_a nimmt entsprechend ein Minimum an (Abb. 3.4). Dieser Effekt ist im Vergleich zum „normalen“ Maser vollständig neu. Er entsteht durch die exakte Kontrolle über die Wechselwirkungszeit, die nur beim Ein-Atom-Maser gegeben ist.

Allerdings geht das quantenmechanisch exakte Ergebnis [53] nicht wie die Näherung auf $D_a = 0$ zurück. Das liegt, abgesehen von dem kleinen Beitrag durch D_{th} , vor allem daran, daß die beiden Feldkomponenten nach einem Umlauf um den Ursprung in ihrer Winkelverteilung bereits deutlich verbreitert sind.

Schließlich entspricht der Übergang von den Feldstärke-Verteilungen zu den klassischen Feldern E_l einer Näherung mit scharfer Intensität. Daraus resultiert der einfache exponentielle Zerfall von $\langle E(t) \rangle$ mit nur *einer* Zeitkonstanten. In der quantenmechanisch exakten Rechnung zeigt sich, daß in den Bereichen mit einem einzigen Maximum in der Photonenstatistik der wesentliche Beitrag zur Phasendiffusion tatsächlich nur von *einer* Konstanten herrührt. In Bereichen mehrerer Maxima spielen jedoch mehrere Zeitkonstanten eine Rolle. In unserem semiklassischen Modell ist das zumindest qualitativ leicht verständlich: Es ließe sich dann für jedes Maximum der Photonenstatistik ein lokaler Mittelwert und eine zugehörige Phasendiffusionskonstante definieren. Die elektrische Feldstärke zerfiel dann als Summe von e -Funktionen, genau wie in der exakten Rechnung [53].

Kapitel 4

Der Ein-Atom-Maser mit externer Einkopplung

4.1 Die phasensensitive Beobachtungsebene

Die Rolle der Atome beim Ein-Atom-Maser-Aufbau ist eine zweifache: sie erzeugen das Strahlungsfeld, das sie selbst auch detektieren. Der „normale“ Aufbau, bei dem die Atome unmittelbar nach der Wechselwirkung durch zustandsselektive Feldionisation gemessen werden, ist jedoch nicht phasensensitiv: Wie man an Gl.(3.3) erkennt, ist die Besetzungswahrscheinlichkeit der beiden Energieniveaus alleine von der Photonenstatistik abhängig; es handelt sich daher um eine *intensitätssensitive* Messung. Mit jedem detektierten Atom wird die Frage beantwortet, ob ein weiteres Photon im Resonator deponiert wurde, oder nicht. Information über die Phase, in der das Resonatorfeld schwingt, kann schon deshalb nicht verfügbar sein, weil kein Referenzfeld existiert, mit dessen Schwingungsphase ein Vergleich vorgenommen werden könnte.

Zentrales Thema dieser Arbeit ist die *phasensensitive* Beobachtung des Maserfeldes. Um dieses Ziel zu erreichen, gibt es im wesentlichen zwei Möglichkeiten:

Die erste Möglichkeit ist die bereits anhand von Gl.(3.45) erläuterte Erweiterung des Aufbaus durch klassische Mikrowellenfelder. Die Pumpatome können damit in eine kohärente Überlagerung beider Energiezustände präpariert werden, wodurch die Schwingungsphase des Resonatorfeldes an diejenige der Mikrowelle gekoppelt wird. Ein $\pi/2$ -Puls hinter dem Resonator ermöglicht den phasensensitiven Nachweis [44, 54, 63]. Der Aufbau entspricht der Ramsey-Methode, wobei allerdings zwischen beiden klassischen Feldern zusätzlich der Resonator des Ein-Atom-Masers angebracht ist. Auch beim inkohärent gepumpten Maser beobachtet man die durch den phasensensitiven Nachweis induzierten Fluktuationen der Phase, die dann jedoch im Langzeitmittel gleichverteilt ist [13, 60, 64].

Diese Methode erscheint vom theoretischen Standpunkt aus reizvoll, ist jedoch in experimenteller Hinsicht problematisch. Die Phaseninformation der Felder wird nämlich durch die Schwingung des atomaren Dipols räumlich transportiert. Rydberg-Atome sind aber hochempfindlich gegen geringe Stör-

einflüsse. Insbesondere führt die hohe Polarisierbarkeit (siehe Abschnitt 6.3.2) zu einer extremen Stark-Verschiebung der beiden Energieniveaus bereits durch geringe elektrostatische Felder. Nachdem die Polarisierbarkeit beider Niveaus verschieden groß ist, ändert sich dann auch ihre Energiedifferenz. Im Experiment beobachtet man eine unsymmetrische Verbreiterung der Maserlinie mit charakteristischem Zackenmuster, die auf elektrische Streufelder an den Resonator-Koppellöchern zurückzuführen ist [49, 51, 65, 40]. Vermutlich entstehen die Streufelder beim Zusammentreffen von makroskopischen einkristallinen Domänen verschiedener Kristallorientierung mit unterschiedlicher Austrittsarbeit der Elektronen. Die Domänen bilden sich während des (für Resonatoren hoher Güte notwendigen) Temperierens bei etwa 1750°C . Das Aufdampfen von Atomen an den Resonatoröffnungen könnte ein weiterer Effekt sein. Im Inneren der Resonatoren hingegen, wo die Wechselwirkung stattfindet, spielen die Streufelder kaum eine Rolle, da sie mit dem typischen Domänendurchmesser exponentiell abfallen. Nachdem die Streufelder räumlich stark inhomogen sind, verstimmt sich aber die Frequenz des schwingenden atomaren Dipols abhängig vom Weg der einzelnen Atome innerhalb des Atomstrahldurchmessers. Die Folge davon ist der Verlust der Kohärenz der atomaren Superposition, und damit auch der Verlust der Information über die Phase der Schwingung der Felder. Abschätzungen zeigen, daß der Phasenunterschied verschiedener Atome um ca. einen Faktor 1000 zu hoch ist [49, 65, 40]. Die Methode scheint daher höchstens mit zirkularen Zuständen [13] oder mit einem anderen Resonatordesign realistisch zu sein.

Die zweite Möglichkeit ist von der Kohärenz der Überlagerung der atomaren Zustände gänzlich unabhängig, da sie alleine die Information der *Populationsdifferenz* beider Energieniveaus (Inversion) nutzt. Sie wurde in Zusammenarbeit mit Gunter Antesberger [66] entwickelt. Die grundlegende Idee besteht darin, das Resonatorfeld mit einer klassischen Mikrowellenstrahlung zu überlagern, die zusätzlich in den Resonator eingekoppelt wird. Die anschließende Sondierung mit einem Atom liefert *Phaseninformation*, die in der *Inversion* des Atoms enthalten ist, und zwar auch dann noch, wenn die Kohärenz der Überlagerung zerstört ist. Phasensensitive Messungen basieren aber aufgrund der Natur des Problems zwangsläufig auf dem Vorhandensein irgendeiner Art von Kohärenz; in diesem Fall ist es die Kohärenz der beiden zu überlagernden Felder. Auch diese kann, wie wir noch genau untersuchen werden, durch verschiedene Störeinflüsse verloren gehen. Wir werden aber in dieser Arbeit sehen, daß sie sich durch geeignete Maßnahmen tatsächlich aufrechterhalten läßt.

4.2 Der quantenmechanische Strahlteiler

Wie kann eine Resonatormode, die an eine externe Strahlungsquelle gekoppelt ist, quantenmechanisch beschrieben werden? Wir beginnen mit dem einfachsten Fall: ohne Atome, ohne Felddämpfung und in Resonanz.

Das Koppelloch stellt einen Hohlleiter dar, dessen Grenzfrequenz für die Ausbreitung von Mikrowellenstrahlung weit oberhalb der Resonanzfrequenz

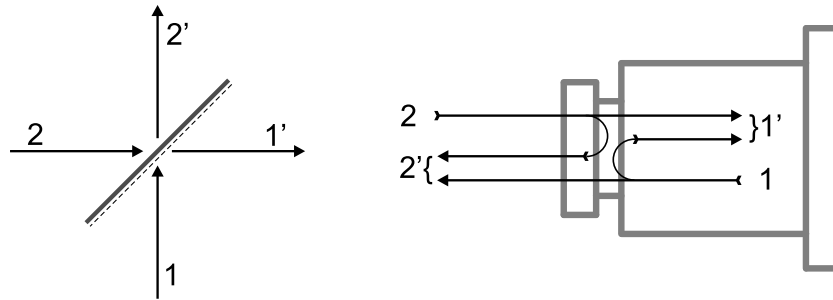


Abbildung 4.1: Die Einkopplung in einen Resonator kann in Analogie zu einem quantenmechanischen Strahlteiler betrachtet werden.

der verwendeten Mode liegt. Eine eingestrahlte Mikrowelle fällt dann exponentiell ab. Der am Ende des Koppelochs noch vorhandene Teil wird transmittiert, der bei weitem größere Rest hingegen zurückreflektiert. Dadurch wird sichergestellt, daß die Güte des Resonators durch die Koppelgüte nicht maßgeblich beeinträchtigt ist. Die Mischung des Resonatorfeldes mit der externen Strahlung kann man sich durch einen Strahlteiler mit Reflexionskoeffizient r und Transmissionskoeffizient t modelliert vorstellen (siehe Abb. 4.1). Aus der Energieerhaltung folgt für den verlustfreien Strahlteiler die Bedingung $|r|^2 + |t|^2 = 1$. Außerdem soll gelten $|r| \gg |t|$.

Die klassische Strahlteiler-Transformation überträgt sich in die Quantenmechanik unmittelbar für die Amplituden kohärenter Zustände (siehe z. B. Lit. [67]). Dabei können die zwei Eingänge und die zwei Ausgänge als insgesamt vier unabhängige Moden behandelt werden. Wir schreiben die Modenbezeichnung nach Abb. 4.1 als Index an die Zustandsvektoren. Außerdem rechnen wir im Wechselwirkungsbild, in dem die Feldfrequenz wegtransformiert ist. Einfallende kohärente Zustände $|\beta\rangle_1$ und $|\gamma\rangle_2$ werden dann folgendermaßen in auslaufende kohärente Zustände überführt

$$|\beta\rangle_1 \otimes |\gamma\rangle_2 \mapsto |r\beta + t\gamma\rangle_{1'} \otimes |t\beta - r\gamma\rangle_{2'}. \quad (4.1)$$

Das Minuszeichen berücksichtigt den Phasensprung um π .

Die Mode 1, die dem anfänglichen Resonatorfeld entspricht, befindet sich in einem beliebigen Zustand ρ , den wir mit Hilfe der Glauber-Sudarshan'schen P -Funktion schreiben als

$$\rho = \int d^2\beta P(\beta) |\beta\rangle_1 \langle\beta|. \quad (4.2)$$

Diese Darstellung ist immer möglich, wenn $P(\beta)$ als Distribution betrachtet wird. Man kann sie daher für Rechnungen ohne Beschränkung der Allgemeinheit verwenden. Als graphisch darstellbare Funktion existiert $P(\beta)$ allerdings nur für diejenigen Fälle, die man sinnvollerweise als „klassische Zustände“ bezeichnet, nämlich inkohärente Gemische kohärenter Zustände (siehe dazu Anhang B).

Der kohärente Zustand $|\gamma\rangle_2$ der Mode 2 korrespondiert mit der klassischen Strahlungsquelle. Dann erhält man mit Hilfe von Gl.(4.1) folgenden

verschränkten Zustand der beiden auslaufenden Moden

$$\rho_{1'2'} = \int d^2\beta P(\beta) |r\beta + t\gamma\rangle_{1'} \langle r\beta + t\gamma| \otimes |t\beta - r\gamma\rangle_{2'} \langle t\beta - r\gamma|. \quad (4.3)$$

Wir interessieren uns nicht für die Mode 2', sondern nur für die dem Resonatorfeld nach der Einstrahlung entsprechende 1', die wir durch Spurbildung in kohärenten Zuständen $|\delta\rangle_{2'}$ erhalten:

$$\rho_{1'} = \frac{1}{\pi} \int d^2\delta {}_2'\langle\delta|\rho_{1'2'}|\delta\rangle_{2'}. \quad (4.4)$$

Das führt auf ein Integral über die Q -Funktion eines kohärenten Zustandes, das auf 1 normiert ist (Anhang B). Mit Hilfe der Substitution $u = r\beta$ und unter Verwendung des *Verschiebungsoperators* (siehe Anhang A)

$$D(\alpha, \alpha^*) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}, \quad (4.5)$$

und dessen Wirkung auf kohärente Zustände nach Gl.(A.8) ergibt das

$$\rho_{1'} = D(t\gamma) \left\{ \int d^2u \frac{P(u)}{|r|^2} |u\rangle_{1'} \langle u| \right\} D^\dagger(t\gamma). \quad (4.6)$$

Wir betrachten nun den Grenzfall $r \rightarrow 1$ und $\gamma \rightarrow \infty$, und zwar in der Weise, daß $t\gamma := \alpha$ konstant bleibt. In diesem Limes erhalten wir einfach

$$\rho_{1'} = D(\alpha)\rho D^\dagger(\alpha). \quad (4.7)$$

Das ist der um die komplexe Amplitude α im Phasenraum verschobene Anfangszustand.

Wir wollen dieses Resultat mit folgendem semiklassischen Ansatz vergleichen: Der Hamilton-Operator, der die Kopplung des Resonatorfeldes an einen klassischen Oszillator mit skaliertem komplexer Amplitude f (für Resonanz und im Wechselwirkungsbild) beschreibt, ist gegeben durch (siehe z. B. Lit. [68])

$$\mathcal{H}_s = \hbar(f\hat{a}^\dagger + f^*\hat{a}). \quad (4.8)$$

Demnach ist der Zeitentwicklungs-Operator

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_s t} = e^{-i(f\hat{a}^\dagger + f^*\hat{a})t} = D(\alpha = -ift) \quad (4.9)$$

bei Identifikation von

$$\alpha = -ift \quad (4.10)$$

identisch mit dem Verschiebungsoperator Gl.(4.5) und die Dynamik $U\rho U^\dagger$ in Übereinstimmung mit Gl.(4.7).

Wir kennen nun den Limes, in dem die semiklassische Beschreibung gültig ist. Die Bedingungen dafür sind in den hier beschriebenen Experimenten immer gegeben. Außerdem ist nach Gl.(4.10) die Verschiebungsstrecke α im Phasenraum proportional zu Zeitdauer und Amplitude der Einstrahlung.

4.3 Phaseninformation durch Meßpulse

Die Superposition eines Resonatorfeldes mit einem klassischen Mikrowellenpuls resultiert nach Gl.(4.7) in einer Verschiebung des Resonatorzustandes im Phasenraum. Die Richtung, in der die Verschiebung erfolgt, ist durch die relative Phase beider Felder zueinander bestimmt. Daraus ergeben sich neue, wegen der Phasenabhängigkeit sehr weitreichende Beobachtungsmöglichkeiten des Feldes. Wir wollen diese Zusammenhänge zunächst anschaulich an einem Beispiel diskutieren:

Angenommen, man möchte entscheiden, ob ein Feldzustand eine Phasenauszeichnung besitzt, oder ob seine Phase gleichverteilt ist (siehe Abb. 4.2). Man könnte sich beispielsweise einerseits einen kohärenten Zustand, und andererseits einen solchen mit identischer Photonenzahlverteilung, aber ohne Kohärenzen zwischen den einzelnen Fock-Zuständen, und damit auch ohne bevorzugte Phase vorstellen. Mathematisch geht der zweite aus dem ersten durch Nullsetzen aller Elemente der Nebendiagonalen der Dichtematrix in Fock-Darstellung hervor¹. Entscheidend ist also Information über diese *Nebendiagonalelemente*.

Die unmittelbare Sondierung mit Atomen liefert, wie bereits diskutiert, keine Unterscheidungsmöglichkeit, da die Besetzung beider Energieniveaus (auf die wir uns aus den in Abschnitt 4.1 genannten Gründen beschränken) in beiden Fällen identisch ist. Die Situation ändert sich jedoch nach Superposition eines Meßpulses. In Abb. 4.2 wurde dieser so gewählt, daß die Amplitude des phasenbehafteten Zustandes sich etwa verdoppelt. Die Information über die *Nebendiagonalelemente* der Zustände *vor der Verschiebung* geht nun in die *Photonenstatistiken* (d.h. die Hauptdiagonalen) der „*verschobenen*“ Zustände ein. Die unterschiedlichen Photonensstatistiken wiederum machen sich in unterschiedlichen *Besetzungsinversionen* der Atome bemerkbar. Damit stellt die Inversion der Atome in Kombination mit einem Meßpuls eine *phasensensitive* Observable dar.

In Abb. 4.3 sind numerische Beispiele für Feldzustände vor und nach einem Meßpuls dargestellt (siehe Bildunterschrift).

Messungen nach der beschriebenen Puls-Methode sollten folgenden Kriterien genügen:

- Ein zu untersuchender Quantenzustand im Resonator muß reproduzierbar erzeugt werden können. Sollen Phaseneigenschaften dieses Zustandes untersucht werden, so muß die Kohärenz zu dem anschließenden Meßpuls gegeben sein. Methoden zur kohärenten Zustandspräparation werden in Abschnitt 4.5 besprochen.
- Die Zeitdauer des Meßpulses (während der kein angeregtes Atom den Resonator durchqueren soll) muß kurz sein im Vergleich zur Energiespeicherzeit der Kavität, so daß der Zustand tatsächlich unter Beibehal-

¹Der zweite ist kein reiner, sondern ein gemischter Zustand, d.h. nicht alle im Prinzip verfügbare Information ist tatsächlich vorhanden. Phasengleichverteilte Zustände müssen in der Quantenmechanik aber nicht notwendigerweise Gemische sein, der Fock-Zustand ist ein *reiner* Zustand mit vollständiger Phasensymmetrie.

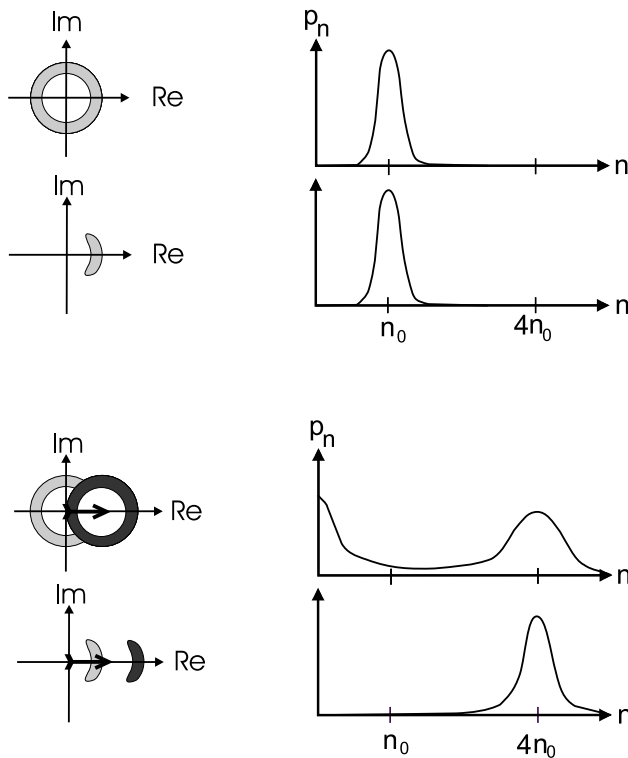


Abbildung 4.2: Phasensensitive Beobachtung durch Meßpulse. Oben: Zwei Zustände mit unterschiedlichen Phaseneigenschaften (schematisch durch die Konturlinien der Q -Funktion dargestellt), aber identischer Photonenstatistik lassen sich durch Messung der Besetzungsinversion wechselwirkender Atome nicht unterscheiden. Unten: Die Superposition eines klassischen Feldes bewirkt eine „Verschiebung im Phasenraum“. Die Photonenstatistiken der „verschobenen“ Zustände sind deutlich unterschiedlich. Sie enthalten Information über die Phase der Zustände vor der Verschiebung, die mit Hilfe von Atomen ausgelesen werden kann.

tung seiner Form gemäß Gl.(4.7) im Phasenraum verschoben wird. Das ist nach Gl.(4.10) immer möglich, indem die Feldamplitude f hinreichend groß gewählt wird.

- Das erste Atom, das den Resonator nach dem Puls erreicht, liest Information über das Feld aus. Nur wenn die Wartezeit bis zu diesem Ereignis verglichen mit der Energie-Speicherzeit klein ist, wird die Messung berücksichtigt. Anderenfalls würde der thermische Zerfall zu einer Verfälschung führen. Um das Verfahren effizient zu machen, sollte daher die Rate der Atome hinreichend groß sein.
- Die Wechselwirkungszeit soll ebenfalls klein gegen die Energie-Speicherzeit sein, so daß eine unitäre Atom-Feld-Wechselwirkung angenommen werden darf. Das ist bei den Ein-Atom-Maser-Experimenten in sehr guter Näherung der Fall.

Wir leiten jetzt einen analytischen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit p_b ab, das erste wechselwirkende Atom nach dem Meßpuls im unteren Maserniveau zu finden. Unter der Voraussetzung, daß die oben genannten Bedingungen gegeben sind, kann die Rechnung unter Vernachlässigung der Dämpfung erfolgen. Der Feldzustand vor dem Puls sei repräsentiert durch den Dichteoperator ρ , das Atom werde im oberen Maserzustand $|a\rangle$ injiziert. Dann befindet sich

Stationärer Maserzustand
 $\theta=1,5$; $N_{\text{ex}}=11,8$; $T=500\text{mK}$

Phasengekoppelter Maserzustand
 $\theta=1,5$; $N_{\text{ex}}=9$; $\langle n_s \rangle=1,2$; $T=500\text{mK}$

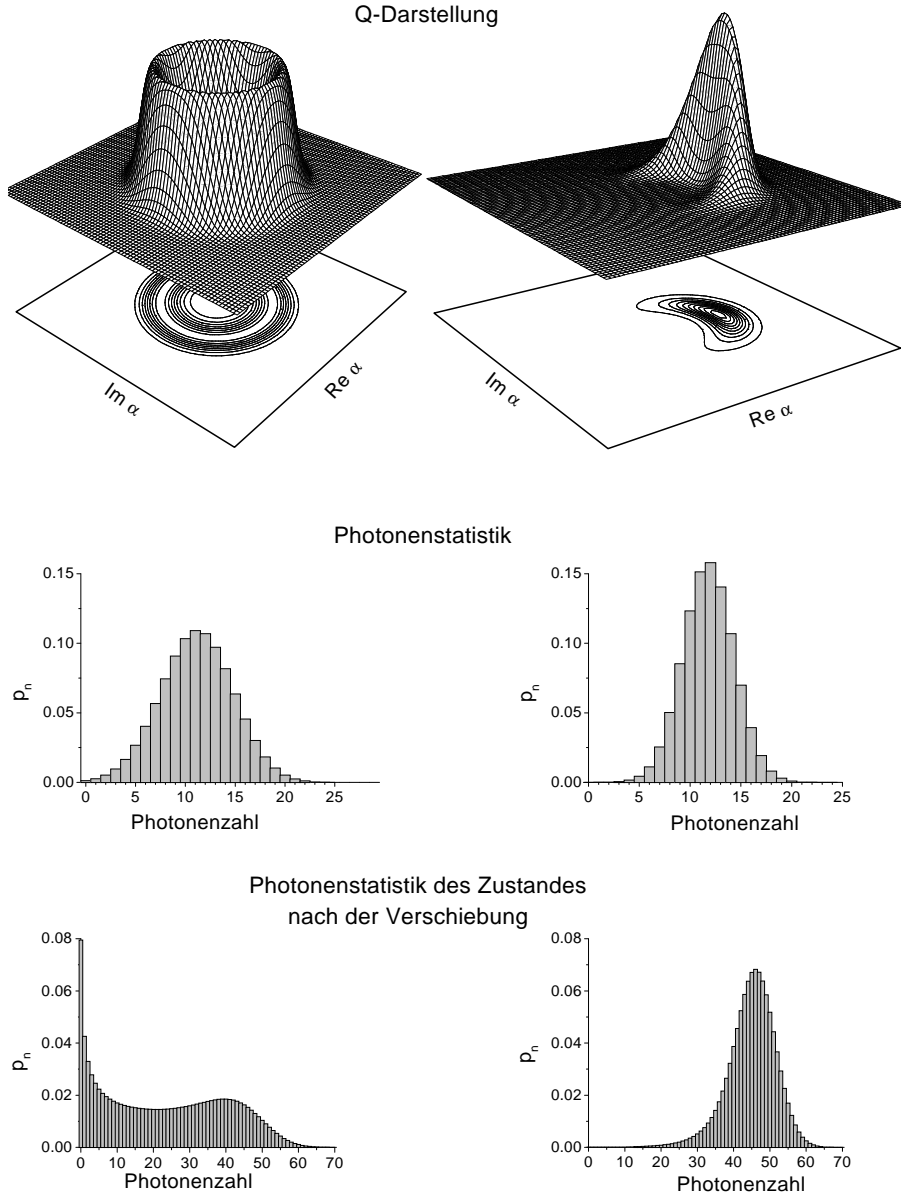


Abbildung 4.3: Oben: Der stationäre Ein-Atom-Maser-Zustand ist phasensymmetrisch, der an eine externe Mikrowelle gekoppelte übernimmt hingegen deren Schwingungsphase (siehe Abschnitt 4.5 bezüglich der Erzeugung phasengekoppelter Zustände). Die Parameter wurden so gewählt, daß beide Zustände dieselbe mittlere Photonenzahl besitzen. Ihre Photonenspektren (Dargestellt in den Abbildungen in der Mitte) sind daher ähnlich. Jedoch ist die Photonenzahlverteilung mit Einkopplung in diesem Fall sogar schmaler als ohne. Die zusätzliche externe Einstrahlung hat einen ähnlichen Effekt, wie die Erhöhung von Θ , wodurch der Maser in einen sub-Poisson'schen Arbeitsbereich gelangt. Es ist bemerkenswert, daß die Mischung mit einem klassischen Feld zu einer nicht-klassischen Erscheinung führen kann. Unten: Ein Mikrowellenpuls bewirkt (wie in Abb. 4.2 schematisch dargestellt) eine Verschiebung um $\alpha = \sqrt{12}$ im Phasenraum, was zu qualitativ deutlich verschiedenen Photonenspektren führt. Diese enthalten nun Information über die Phase des Zustandes vor der Verschiebung.

das verschränkte System aus Atom und Feld nach der Wechselwirkungszeit τ im Zustand

$$R(\alpha, \tau) = U_{JC}(\tau) \left[D(\alpha) \rho D^\dagger(\alpha) \otimes |a\rangle\langle a| \right] U_{JC}^\dagger(\tau). \quad (4.11)$$

U_{JC} ist der Jaynes-Cummings-Zeitentwicklungs-Operator nach Gl.(3.37) bzw. (3.38).

Die Wahrscheinlichkeit $p_b = \langle |b\rangle\langle b| \rangle$ berechnet sich dann, unter Ausnutzung der zyklischen Vertauschbarkeit bei der Spurbildung und des Kommutators $[\hat{O}_A, \hat{O}_R] = 0$ für beliebige Operatoren der beiden Teilsysteme Atom und Resonatorfeld *alleine*, zu

$$\begin{aligned} p_b(\alpha, \tau) &= \text{Tr} \{ R(\alpha, \tau) |b\rangle\langle b| \} \\ &= \text{Tr} \left\{ U_{JC}(\tau) \left[D(\alpha) \rho D^\dagger(\alpha) \otimes |a\rangle\langle a| \right] U_{JC}^\dagger(\tau) |b\rangle\langle b| \right\} \\ &= \text{tr}_f \left\{ D(\alpha) \rho D^\dagger(\alpha) \langle a| U_{JC}^\dagger(\tau) |b\rangle\langle b| U_{JC}(\tau) |a\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Tr bezeichnet die Spurbildung über das Gesamtsystem, während tr_f sich nur auf die Feld-Freiheitsgrade bezieht. Mit Hilfe von Gl.(3.38) findet man schließlich

$$p_b(\alpha, \tau) = \text{tr}_f \left\{ \rho D^\dagger(\alpha) \sin^2(\sqrt{\hat{n} + 1} g\tau) D(\alpha) \right\}. \quad (4.13)$$

Die Sondierung mit Atomen ermöglicht somit die Bestimmung des im Zustand ρ (also vor der Verschiebung durch den Meßpuls) gebildeten Erwartungswertes

$$\begin{aligned} p_b(\alpha, \tau) &= \left\langle D^\dagger(\alpha) \sin^2(\sqrt{\hat{n} + 1} g\tau) D(\alpha) \right\rangle \\ &= \left\langle \sin^2 \left(\sqrt{\hat{n} + \hat{a}^\dagger \alpha + \hat{a} \alpha^* + |\alpha|^2 + 1} g\tau \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Im letzten Schritt wurde von der für unitäre Operatoren U und Operator-Funktionen $f(\hat{O})$, die als Potenzreihe darstellbar sind, gültigen Formel

$$U^\dagger f(\hat{O}) U = f(U^\dagger \hat{O} U) \quad (4.15)$$

Gebrauch gemacht – und von Gl.(A.7). Die Observable p_b *ohne* den Meßpuls wäre lediglich eine Funktion des Photonenzahl-Operators \hat{n} und enthielte daher keine Information über die Feldphase. Erst in Kombination *mit* dem Meßpuls kommen Potenzen von a und a^\dagger vor und die Observable Gl.(4.14) wird *phasensensitiv*.

Das Wissen über einen ursprünglich unbekanntem Feldzustand erhöht sich durch die Bestimmung eines *einzelnen* Erwartungswertes nach Gl.(4.14) allerdings nur wenig. Dem zweidimensionalen Hilbertraum des Atoms steht schließlich der hochdimensionale (streng genommen: unendlich-dimensionale) Hilbertraum des Feldes entgegen. Im Experiment besteht aber die Möglichkeit, sowohl die Verschiebung α in Betrag und Phase zu variieren, als auch die Wechselwirkungszeit zu verändern. Auf diese Weise können verschiedene Feld-eigenschaften beobachtet und sogar komplette Rekonstruktionen durchgeführt werden. Die mathematischen Zusammenhänge zwischen den Observablen Gl.(4.14) und dem Feld werden in Kapitel 5 im Detail untersucht.

4.4 Die vollständige Problemstellung

Wir betrachten nun die Wechselwirkung eines Atoms mit einer Feldmode, die zusätzlich an einen klassischen harmonischen Oszillator gekoppelt ist. Außerdem werden die Dämpfungsverluste des Resonators bei endlicher Temperatur berücksichtigt.

4.4.1 Verschiedene Darstellungen

Die Problemstellung wird in diesem Abschnitt mathematisch formuliert und dann durch geeignete Transformationen, die auch in Lit. [69] angewendet werden, auf eine besonders günstige Form gebracht.

i) **Das Schrödinger-Bild** Der unitäre Anteil der Dynamik wird im Schrödinger-Bild durch den Hamilton-Operator

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \underbrace{\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z}_{Atom} + \underbrace{\hbar\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}_{Feldmode} \\ & + \underbrace{\hbar g(\vec{R})(\hat{a}\sigma^\dagger + \hat{a}^\dagger\sigma)}_{Atom-Feld-WW} + \underbrace{\hbar(\hat{a}f^*e^{i\omega_s t} + \hat{a}^\dagger f e^{-i\omega_s t})}_{Feld-Oszillator-WW} \end{aligned} \quad (4.16)$$

bestimmt. Er geht aus dem Jaynes-Cummings-Hamilton-Operator Gl. (2.15) durch Addition des Wechselwirkungsterms von Feld (im Resonator) und externem Oszillator mit Schwingungsfrequenz ω_s hervor. Das entspricht der physikalischen Situation, daß die externe Mikrowelle in die Mode des Resonators eingekoppelt wird, wie es im experimentellen Aufbau tatsächlich realisiert ist. Eine andere (bei offenen Resonatoren realisierbare) Situation wäre die Bestrahlung des Atoms, das sich im Resonator befindet, ohne daß das externe Feld direkt an die Mode koppelt. Im entsprechenden Wechselwirkungsterm stünden dann nicht die Feldamplituden a und a^\dagger , sondern die Pauli-Matrizen σ und σ^\dagger . Wir sehen aber im folgenden, daß beide Fälle durch geeignete Transformationen mathematisch ineinander überführt werden können.

σ_z ist die Pauli'sche Spinmatrix nach Gl.(2.3). Die konstante Nullpunktenergie der Feldmode ist für die Dynamik irrelevant; sie wurde der Kürze wegen weggelassen.

Wir bezeichnen den Dichteoperator des Systems aus Atom und Feld wieder mit R ; er genügt folgender Mastergleichung

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, R] + \mathcal{L}R. \quad (4.17)$$

\mathcal{L} ist der Liouville-Operator gemäß Gl.(3.17). Damit ist das Problem formuliert.

ii) **Ein Wechselwirkungsbild** Der Hamilton-Operator Gl.(4.16) ist explizit periodisch zeitabhängig. Periodische Zeitabhängigkeiten kann man durch unitäre Transformationen eliminieren. Der Ansatz

$$R = UR^W U^\dagger, \quad (4.18)$$

mit $U^\dagger U = \hat{1}$, eingesetzt in Gl.(4.17) und aufgelöst nach $\frac{d}{dt}R^W$ ergibt eine neue Mastergleichung für die transformierte Dichtematrix

$$\frac{dR^W}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}^W, R^W] + U^\dagger \mathcal{L}(UR^W U^\dagger) U \quad (4.19)$$

mit dem transformierten Hamilton-Operator

$$\mathcal{H}^W = U^\dagger \mathcal{H} U + \frac{\hbar}{i} U^\dagger \frac{dU}{dt}. \quad (4.20)$$

Für den Spezialfall, daß U gleich dem Zeitentwicklungs-Operator für einen Teil des Hamilton-Operators („ungestörtes Problem“) ist, entspricht das dem Wechselwirkungsbild, wie es in der gängigen Lehrbuchliteratur dargestellt wird. Wir wählen

$$U = e^{-i\omega_s t (\frac{1}{2}\sigma_z + \hat{a}^\dagger \hat{a})}, \quad (4.21)$$

transformieren also in ein mit der Oszillatorfrequenz rotierendes System. Wir wollen es der Einfachheit halber auch als das „Wechselwirkungsbild“ bezeichnen, obgleich es sich streng genommen um eine Verallgemeinerung davon handelt. Unter Verwendung der Relationen (die man durch Summendarstellung des Exponential-Operators Gl.(4.21) erhält)

$$U^\dagger \hat{a} U = \hat{a} e^{-i\omega_s t} \quad U^\dagger \hat{a}^\dagger U = \hat{a}^\dagger e^{i\omega_s t} \quad (4.22)$$

$$U^\dagger \sigma U = \sigma e^{-i\omega_s t} \quad U^\dagger \sigma^\dagger U = \sigma^\dagger e^{i\omega_s t}, \quad (4.23)$$

führt das auf den neuen Hamilton-Operator

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^W &= U^\dagger \mathcal{H} U - \hbar\omega_s (\frac{1}{2}\sigma_z + \hat{a}^\dagger \hat{a}) \\ &= \frac{1}{2}\hbar\Delta_A \sigma_z + \hbar\Delta_R \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g(\vec{R}) (\hat{a}\sigma^\dagger + \hat{a}^\dagger\sigma) + \hbar(\hat{a} f^* + \hat{a}^\dagger f) \end{aligned} \quad (4.24)$$

mit den Differenzfrequenzen

$$\Delta_A = \omega - \omega_s \quad \text{und} \quad \Delta_R = \Omega - \omega_s. \quad (4.25)$$

Ohne Atome und für $\Delta_R = 0$ führt Gl.(4.24) wieder auf Gl.(4.8) – wie es sein muß.

Der Liouville-Operator ist gegen diese Transformation invariant, da \hat{a} und \hat{a}^\dagger nur gemeinsam auftreten und sich deshalb die Rotation gemäß Gl.(4.22) aufhebt, d.h.

$$U^\dagger \mathcal{L}(UR^W U^\dagger) U = \mathcal{L}R^W. \quad (4.26)$$

Bei der Berechnung von Erwartungswerten

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr} \{ R \hat{O} \} = \text{Tr} \{ UR^W U^\dagger \hat{O} \} = \text{Tr} \{ R^W U^\dagger \hat{O} U \} \quad (4.27)$$

muß im allgemeinen Fall die Rücktransformation vorgenommen (bzw. der Operator \hat{O} transformiert) werden. Bei allen Observablen, die mit U vertauschen, ist das jedoch nicht notwendig. Das sind nach Gl.(4.21) z. B. alle Funktionen von \hat{n} , σ_z oder die Besetzungswahrscheinlichkeiten der Maserniveaus.

iii) **Transformation mit dem Verschiebungsoperator** Wir schließen eine zweite unitäre Transformation an, und zwar mit dem Verschiebungsoperator D nach Gl.(A.1)

$$\tilde{R} = D^\dagger(\zeta) R^W D(\zeta). \quad (4.28)$$

Mit Hilfe der Eigenschaften Gl.(A.2) und (A.7) können wir jetzt die Mastergleichung für \tilde{R} schreiben als

$$\frac{d\tilde{R}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [D^\dagger \mathcal{H}^W D, \tilde{R}] + \mathcal{L}\tilde{R} - \frac{\gamma}{2} [\hat{a}^\dagger \zeta - \hat{a} \zeta^*, \tilde{R}] \quad (4.29)$$

mit $D^\dagger \mathcal{H}^W D = \tilde{\mathcal{H}} + \mathcal{H}_{Rest}$, wobei

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \hbar \Delta_A \sigma_z + \hbar \Delta_R \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g(\vec{R}) (\hat{a} \sigma^\dagger + \hat{a}^\dagger \sigma) + \hbar g(\vec{R}) (\sigma^\dagger \zeta + \sigma \zeta^*) \quad (4.30)$$

und

$$\mathcal{H}_{Rest} = \hbar \{ \hat{a} (\Delta_R \zeta^* + f^*) + \hat{a}^\dagger (\Delta_R \zeta + f) \} + \text{Konst.} \quad (4.31)$$

In Konst. sind skalare Konstanten zusammengefaßt; sie haben keinen Einfluß auf die Dynamik.

Nun kann die Verschiebung ζ so gewählt werden, daß der letzte Kommutator in Gl.(4.29) sich gerade mit dem Beitrag durch \mathcal{H}_{Rest} aufhebt, es soll also gelten

$$\frac{\gamma}{2} [\hat{a}^\dagger \zeta - \hat{a} \zeta^*, \tilde{R}] + \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_{Rest}, \tilde{R}] = 0. \quad (4.32)$$

Das ist für beliebiges \tilde{R} der Fall, wenn man die Verschiebung wählt als

$$\zeta = \frac{f}{i\frac{\gamma}{2} - \Delta_R}. \quad (4.33)$$

Dann gehorcht der so transformierte Dichteoperator wieder der Mastergleichung

$$\frac{d\tilde{R}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{R}] + \mathcal{L}\tilde{R}. \quad (4.34)$$

Bei Kenntnis der zeitlichen Entwicklung $\tilde{R}(t)$ muß zur Berechnung physikalischer Größen im allgemeinen Fall zunächst die Rücktransformation erfolgen. Die Transformation von $\tilde{R}(t)$ nach $R^W(t)$ ist jedoch für alle Observablen \hat{O}_A , die sich *alleine* auf das Atom beziehen überflüssig. Wegen $[\hat{O}_A, D(\zeta)] = 0$ und der zyklischen Vertauschbarkeit bei der Spurbildung gilt

$$\langle \hat{O}_A \rangle = \text{Tr} \{ R^W(t) \hat{O}_A \} = \text{Tr} \{ \tilde{R}(t) D^\dagger(\zeta) \hat{O}_A D(\zeta) \} = \text{Tr} \{ \tilde{R}(t) \hat{O}_A \}. \quad (4.35)$$

Auffälliges Merkmal der gewählten Darstellung ist, daß die Kopplung des klassischen Feldes nun nicht mehr wie in Gl.(4.16) und (4.24) an die Resonatormode erfolgt, sondern nach Gl.(4.30) *direkt an das Atom*. Die Vorteile dieser Transformation werden im nächsten Abschnitt deutlich.

4.4.2 Analytische Lösungen

Gl.(4.34) ist in aller Allgemeinheit analytisch vermutlich nicht lösbar. Immerhin ist es aber möglich, verschiedene Spezialfälle zu behandeln:

i) **Stationäre Lösung ohne Atome** Der stationäre Zustand des extern getriebenen Resonatorfeldes ρ unter Abwesenheit von Atomen ist nach Gl.(4.34) und (4.30) bestimmt durch die Bedingung

$$-i\Delta_R [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \rho] + \mathcal{L}\rho = 0, \quad (4.36)$$

die offensichtlich vom thermischen Zustand

$$\rho_{th} = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega_s \hat{a}^\dagger \hat{a}}{k_B T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega_s}{k_B T}}} \quad (4.37)$$

(mit Boltzmann-Konstante k_B und Temperatur T) erfüllt wird. Dann ergibt aber die Rücktransformation ins Wechselwirkungsbild gemäß Gl.(4.28) aufgelöst nach R^W den *verschobenen thermischen Zustand*

$$\rho_{th}^D = D(\zeta)\rho_{th}D^\dagger(\zeta), \quad (4.38)$$

der für den Grenzfall $T \rightarrow 0$ nach Gl.(A.9) gegen den kohärenten Zustand $|\zeta\rangle$ konvergiert. Damit wird gleichzeitig der eigentliche Hintergrund der Transformation nach Gl.(4.28) deutlich: Für den Fall, daß sich vor Beginn der Atom-Feld-Wechselwirkung im Resonator bereits die stationäre Situation eingestellt hat, wird das Resonatorfeld so weit wie möglich (d.h. bis auf den thermischen Zustand) wegtransformiert und durch eine direkte Kopplung an das Atom ersetzt. Im Phasenraum entspricht das dem „Zurückschieben“ in den Ursprung. Deshalb ist diese Darstellung auch für numerische Auswertungen außerordentlich vorteilhaft. Die Dimension des Fock-Raums, der berücksichtigt wird, kann nämlich zu Gunsten der Rechengeschwindigkeit reduziert werden.

Die Feldfrequenz stellt sich, wie man es erwartet, auf die von außen aufgeprägte ein, nämlich ω_s . Die mittlere Photonenzahl im Resonator berechnet sich zu

$$\langle \hat{n} \rangle = \text{Tr}[D(\zeta)\rho_{th}D^\dagger(\zeta)\hat{n}] = \text{Tr}[\rho_{th}D^\dagger(\zeta)\hat{n}D(\zeta)] \quad (4.39)$$

$$= |\zeta|^2 + \bar{n}_{th} = \frac{|f|^2}{(\gamma/2)^2 + \Delta_R^2} + \bar{n}_{th} \quad (4.40)$$

mit der mittleren thermischen Photonenzahl $\bar{n}_{th} = (e^{\frac{\hbar\omega_s}{k_B T}} - 1)^{-1}$. Dabei wurde von der zyklischen Vertauschbarkeit bei der Spurbildung und einmal mehr von Gl.(A.7) Gebrauch gemacht. Die Lorentz-förmige Abhängigkeit der eingestrahnten Intensität von der Resonator-Feld-Verstimmung spiegelt die Linienform der Feldmode wider. Bei Resonanz wird maximal eingekoppelt.

Die stationäre Lösung nach Gl.(4.38) ist übrigens der zur Dynamik nach Gl.(4.11) entgegengesetzte Grenzfall. Dort wurde die Dämpfung für einen kurzen Mikrowellenpuls vernachlässigt, während sie hier gerade im Gleichgewicht mit einer andauernden Einstrahlung steht.

ii) **Resonanz zwischen Kavität und externem Feld** Für $\Delta_R = 0$ läßt sich der Hamilton-Operator Gl.(4.30) schreiben als (siehe auch Lit. [70])

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\hbar\Delta_A \sigma_z + \hbar g(\vec{R}) \left[\sigma^\dagger(\hat{a} + \zeta) + \sigma(\hat{a}^\dagger + \zeta^*) \right] = D^\dagger(\zeta) \mathcal{H}_{JC}^W D(\zeta). \quad (4.41)$$

Das ist der mit dem Verschiebungsoperator (Anhang A) transformierte Jaynes-Cummings-Hamilton-Operator Gl.(2.15) im Wechselwirkungsbild nach Gl.(4.18) und (4.21)

$$\mathcal{H}_{JC}^W = \frac{1}{2}\hbar\Delta_A \sigma_z + \hbar g(\vec{R}) (\sigma^\dagger \hat{a} + \sigma \hat{a}^\dagger). \quad (4.42)$$

Der Zeitentwicklungs-Operator für den unitären Anteil der Dynamik wird dann mit Hilfe von Gl.(4.15) zu

$$e^{-\frac{i}{\hbar}D^\dagger(\zeta)\mathcal{H}_{JC}^W D(\zeta)t} = D^\dagger(\zeta) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_{JC}^W t} D(\zeta). \quad (4.43)$$

Angenommen, der Anfangszustand des Feldes sei der thermische nach Gl. (4.37). Dann liefert die Dämpfung in der Mastergleichung (4.34) im ersten Augenblick keinen Beitrag. Es ist weiterhin plausibel anzunehmen, daß das extern getriebene Atom (repräsentiert durch ρ^A) das Feld nur langsam verändern wird. Wir vernachlässigen daher die Dämpfung vollständig und erhalten folgende unitäre zeitliche Entwicklung

$$\tilde{R}(t) = D^\dagger(\zeta) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_{JC}^W t} D(\zeta) \rho_{th} D^\dagger(\zeta) \rho^A e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_{JC}^W t} D(\zeta), \quad (4.44)$$

die wir unmittelbar in das Wechselwirkungsbild zurück transformieren können:

$$R^W(t) = D(\zeta) \tilde{R}(t) D^\dagger(\zeta) = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_{JC}^W t} \rho_{th}^D \otimes \rho^A e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_{JC}^W t}. \quad (4.45)$$

Das ist die Dynamik des gewöhnlichen Jaynes-Cummings-Modells! Der externe Oszillator, der an das Atom koppelt, geht dabei nur noch durch die nach Gl. (4.38) geänderte Anfangsbedingung des Feldes ein. Wenn Oszillator und Resonatormode *in Resonanz* sind, läßt sich demnach die Wirkung des Oszillators durch ein entsprechendes Feld im Resonator ersetzt denken. Die Vernachlässigung der Dämpfung im mit dem Verschiebungsoperator transformierten Bild entspricht also der Vernachlässigung von Dämpfung *und* externer Kopplung im Wechselwirkungsbild bei gleichzeitiger Modifikation der Anfangsbedingungen. Die Resonatorverluste gehen aber implizit über die Transformation mit $\zeta = \frac{f}{i(\gamma/2)}$ weiterhin in die Rechnung ein.

In gewisser Weise wurde hier natürlich ein Zirkelschluß gemacht: Zunächst wurde für den allgemeinen Fall in das „verschobene“ Bild transformiert und anschließend für einen Spezialfall wieder zurück in das Wechselwirkungsbild. Man hätte auch unmittelbar im Wechselwirkungsbild mit dem stationären Anfangszustand ρ_{th}^D beginnen und sowohl Dämpfung als auch externe Kopplung vernachlässigen können – mit der Begründung, daß sich dann ja beide kompensieren, zumindest für nicht zu lange Wechselwirkungszeiten. Die Hin- und Rücktransformation liefert aber eine zusätzliche, besonders anschauliche Begründung für diese Näherung.

Es ist wichtig zu betonen, daß die Rückführung auf das Jaynes-Cummings-Modell nur für $\Delta_R = 0$ möglich ist. Stimmt die Frequenz des externen Oszillators *nicht* mit der des Resonatorfeldes überein, so läßt sich das treibende Feld auch *nicht* durch ein Feld im Resonator ersetzt denken.

iii) **Eine Drehwellennäherung** Das Jaynes-Cummings-Modell ist durch zwei Frequenzen geprägt, nämlich die von Atom und Feld. Mit externer Kopplung kommt eine dritte dazu. In einem geeigneten Wechselwirkungsbild läßt sich [wie in Gl.(4.24) geschehen] eine davon eliminieren – übrig bleiben zwei, im Jaynes-Cummings-Modell jedoch nur eine. Der *allgemeine* Fall *mit* Kopplung läßt sich daher prinzipiell nicht auf dieses Modell zurückführen. Wir suchen deshalb nach einer neuen Vorgehensweise, die es erlaubt, eine möglichst allgemeine analytische Lösung für die vom Hamilton-Operator Gl.(4.30) bestimmte Dynamik zu finden.

Zunächst machen wir die Aufteilung

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_A + \tilde{\mathcal{H}}_R + \tilde{\mathcal{H}}_I \quad (4.46)$$

und wechseln die Basis, in der wir den Hilbertraum der Atome aufspannen:

$$\tilde{\mathcal{H}}_A = \frac{1}{2}\hbar\Delta_A \sigma_z + \hbar g(\bar{\mathcal{R}}) (\sigma^\dagger \zeta + \sigma \zeta^*) = \hbar \mathcal{R} S^z \quad (4.47)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_R = \hbar \Delta_R \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_I &= \hbar g(\bar{\mathcal{R}}) (\hat{a} \sigma^\dagger + \hat{a}^\dagger \sigma) \\ &= \hbar g(\bar{\mathcal{R}}) \left[\hat{a} \left(\sin(2\Theta) S^z - \cos^2 \Theta S^\dagger + \sin^2 \Theta S \right) \right. \\ &\quad \left. + \hat{a}^\dagger \left(\sin(2\Theta) S^z - \cos^2 \Theta S + \sin^2 \Theta S^\dagger \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Wir setzen ζ im folgenden als *reell* voraus, indem wir nach Gl.(4.33) die Phase von f geeignet wählen. Da diese bisher auf keine andere Weise definiert ist, wird die Allgemeingültigkeit durch jene speziellen Anfangsbedingung nicht eingeschränkt.

$\tilde{\mathcal{H}}_A$ enthält bereits die Kopplung an den klassischen Oszillator. Die zugehörige Eigenwert-Gleichung

$$\tilde{\mathcal{H}}_A |\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} \mathcal{R} |\pm\rangle \quad (4.50)$$

mit der semiklassischen Rabi-Frequenz

$$\mathcal{R} = \sqrt{\Delta_A^2 + (2g\zeta)^2} \quad (4.51)$$

definiert die schon in Gl.(3.44) eingeführten semiklassischen dressed states. Für den allgemeineren Fall mit Atom-Feld-Verstimmung lauten sie

$$|+\rangle = \cos \Theta |a\rangle + \sin \Theta |b\rangle \quad (4.52)$$

$$|-\rangle = \sin \Theta |a\rangle - \cos \Theta |b\rangle, \quad (4.53)$$

wobei der Kopplungswinkel Θ bestimmt ist durch

$$\tan \Theta = (\mathcal{R} - \Delta_A)/(2g\zeta). \quad (4.54)$$

Die Vollständigkeitsrelation für das System der Atome lautet dann

$$|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-| = \hat{1}_A. \quad (4.55)$$

Außerdem sind die transformierten Pauli'schen Spinmatrizen definiert als

$$S = |- \rangle \langle + |, \quad S^\dagger = | + \rangle \langle - | \quad \text{und} \quad S^z = \frac{1}{2}(| + \rangle \langle + | - | - \rangle \langle - |). \quad (4.56)$$

Auf der Suche nach einer Vereinfachung schauen wir uns das Problem im mit dem ungestörten Anteil des Hamilton-Operators $\tilde{\mathcal{H}}_0 = \tilde{\mathcal{H}}_A + \tilde{\mathcal{H}}_R$ rotierenden Wechselwirkungsbild an. Das Vorgehen ist wieder ähnlich wie in Abschnitt 4.4.1 (ii), wobei der transformierte Hamilton-Operator nach Gl.(4.20) nun einfach gegeben ist durch $\tilde{\mathcal{H}}^W = \exp\{\frac{i}{\hbar}\tilde{\mathcal{H}}_0 t\}\tilde{\mathcal{H}}_I \exp\{-\frac{i}{\hbar}\tilde{\mathcal{H}}_0 t\}$. Das führt auf (siehe auch Lit. [69])

$$\tilde{\mathcal{H}}^W = \hbar g(\vec{R}) a e^{-i\Delta_R t} \left(\sin(2\Theta) S^z - \cos^2\Theta S^\dagger e^{i\mathcal{R}t} + \sin^2\Theta S e^{-i\mathcal{R}t} \right) + \text{h.ad.} \quad (4.57)$$

Zusätzlich zur Oszillation mit der Differenzfrequenz Δ_R schwingen die Terme, die die Spinmatrizen S und S^\dagger enthalten, noch mit der Rabi-Frequenz \mathcal{R} . Ist diese hinreichend hoch, so erwartet man, daß sich die entsprechenden Beiträge im Sinne einer Drehwellennäherung (rotating wave approximation) herausmitteln. Die Argumentation entspricht dem Vorgehen bei der Ableitung des Jaynes-Cummings-Hamilton-Operators in Gl.(2.15), allerdings dürfen wir keine ganz so gute Übereinstimmung erwarten, da die Rabi-Oszillation im Normalfall wesentlich niederfrequenter sein wird. Vom Hamilton-Operator Gl.(4.49) berücksichtigen wir also nur den Anteil

$$\tilde{\mathcal{H}}_{RWA} = \hbar \mathcal{R} S^z + \hbar \Delta_R \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g(\vec{R}) \sin(2\Theta) S^z (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (4.58)$$

Er ist diagonal in den dressed states und läßt sich schreiben als

$$\tilde{\mathcal{H}}_{RWA} = \mathcal{H}^+ | + \rangle \langle + | + \mathcal{H}^- | - \rangle \langle - |, \quad (4.59)$$

wobei

$$\mathcal{H}^\pm = \hbar \Delta_R \hat{a}^\dagger \hat{a} \pm \frac{\hbar}{2} \left\{ \mathcal{R} + g(\vec{R}) \sin(2\Theta) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \right\}. \quad (4.60)$$

Dann ist aber der nach Gl.(A.7) transformierte Operator

$$D(\pm\eta) \mathcal{H}^\pm D^\dagger(\pm\eta) = \hbar \Delta_R \hat{a}^\dagger \hat{a} \pm \frac{\hbar}{2} \mathcal{R} - \hbar \Delta_R \eta^2 \quad (4.61)$$

mit

$$\eta = \frac{g}{2 \Delta_R} \sin(2\Theta) \quad (4.62)$$

der simple harmonische Oszillator. Aus seiner Eigenwert-Gleichung folgt sofort diejenige von \mathcal{H}^\pm :

$$D(\pm\eta) \mathcal{H}^\pm D^\dagger(\pm\eta) | n \rangle = E_n^\pm | n \rangle \quad (4.63)$$

$$\mathcal{H}^\pm D^\dagger(\pm\eta) | n \rangle = E_n^\pm D^\dagger(\pm\eta) | n \rangle \quad (4.64)$$

mit den Fock-Zuständen $| n \rangle$ und den Energie-Eigenwerten

$$E_n^\pm = \hbar \Delta_R n \pm \frac{\hbar}{2} \mathcal{R} - \hbar \Delta_R \eta^2. \quad (4.65)$$

Damit ist das Eigenwert-Problem für $\tilde{\mathcal{H}}_{RWA}$ gelöst. Es lautet:

$$\tilde{\mathcal{H}}_{RWA} \left[D^\dagger(\pm\eta) |n\rangle \otimes |\pm\rangle \right] = E_n^\pm \left[D^\dagger(\pm\eta) |n\rangle \otimes |\pm\rangle \right]. \quad (4.66)$$

Folglich besitzt der Zeitentwicklungs-Operator die Darstellung

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\tilde{\mathcal{H}}_{RWA}t} = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}^+t} |+\rangle\langle +| + e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}^-t} |-\rangle\langle -|. \quad (4.67)$$

Das erkennt man auch explizit mit Hilfe der Summendarstellung der e-Funktion und unter Berücksichtigung der Relation

$$(\mathcal{H}^+ |+\rangle\langle +| + \mathcal{H}^- |-\rangle\langle -|)^\nu = (\mathcal{H}^+)^\nu |+\rangle\langle +| + (\mathcal{H}^-)^\nu |-\rangle\langle -|. \quad (4.68)$$

Gl.(4.67) läßt sich wegen der Eigenschaft Gl.(4.61) und unter Verwendung von Gl.(4.15) in eine für die Rechnung besonders günstige Form bringen, nämlich

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i}{\hbar}\tilde{\mathcal{H}}_{RWA}t} &= e^{-i\frac{\mathcal{R}}{2}t} D^\dagger(\eta) e^{-i\Delta_R \hat{a}^\dagger \hat{a} t} D(\eta) |+\rangle\langle +| \\ &+ e^{i\frac{\mathcal{R}}{2}t} D^\dagger(-\eta) e^{-i\Delta_R \hat{a}^\dagger \hat{a} t} D(-\eta) |-\rangle\langle -|. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Man liest daraus bereits anschaulich die Wirkung auf einen Zustand ab: Er wird durch die Projektion auf die Zustände $|\pm\rangle$ in zwei Anteile gespalten, die in entgegengesetzter Richtung verschoben, um den Winkel $-\Delta_R t$ in der Phase gedreht und anschließend zurückgeschoben werden.

Als Anfangsbedingung wählen wir für die Feldmode das Vakuum $|0\rangle$. Physikalisch entspricht dies dem kohärenten Zustand $|\zeta\rangle$, der für niedrige Temperaturen dem stationären Zustand des extern getriebenen Resonatorfeldes Gl.(4.38) nahekommt. Für nicht zu lange Wechselwirkungszeit können wir uns daher wieder auf die unitäre Dynamik unter Vernachlässigung der Dämpfung beschränken. Das Atom erreiche den Resonator, wie im Experiment üblich, im oberen Maserzustand $|a\rangle$. Der Anfangszustand lautet also:

$$|\tilde{\psi}_0\rangle = |a\rangle \otimes |0\rangle = [\cos\Theta |+\rangle + \sin\Theta |-\rangle] |0\rangle. \quad (4.70)$$

Dann ist die zeitliche Entwicklung gegeben durch

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\tilde{\mathcal{H}}_{RWA}t} |\tilde{\psi}_0\rangle &= \cos\Theta e^{-i\frac{\mathcal{R}}{2}t} D^\dagger(\eta) e^{-i\Delta_R \hat{a}^\dagger \hat{a} t} D(\eta) |0\rangle |+\rangle \\ &+ \sin\Theta e^{i\frac{\mathcal{R}}{2}t} D^\dagger(-\eta) e^{-i\Delta_R \hat{a}^\dagger \hat{a} t} D(-\eta) |0\rangle |-\rangle. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Die Wirkung der Operatoren läßt sich unter Verwendung der Eigenschaften Gl.(A.8) und (A.9) der Reihe nach ausführen, wobei mit den Ket-Vektoren immer kohärente Zustände gemeint sind:

$$\begin{aligned} D^\dagger(\pm\eta) e^{-i\Delta_R \hat{a}^\dagger \hat{a} t} D(\pm\eta) |0\rangle &= D^\dagger(\pm\eta) e^{-i\Delta_R \hat{a}^\dagger \hat{a} t} |\pm\eta\rangle \\ = D^\dagger(\pm\eta) |\pm\eta e^{-i\Delta_R t}\rangle &= e^{-i\eta^2 \sin(\Delta_R t)} |\pm\eta(e^{-i\Delta_R t} - 1)\rangle. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Wir definieren

$$\beta(t) := \eta(e^{-i\Delta_R t} - 1) = \frac{g}{2\Delta_R} \sin(2\Theta) (e^{-i\Delta_R t} - 1) \quad (4.73)$$

und erhalten die gesuchte Dynamik:

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \cos \Theta e^{-i\frac{\mathcal{R}}{2}t} |\beta(t)\rangle |+\rangle + \sin \Theta e^{i\frac{\mathcal{R}}{2}t} |-\beta(t)\rangle |-\rangle. \quad (4.74)$$

Die gemeinsame Phase wurde weggelassen. Dieses Ergebnis können wir mit Gl. (4.52) und (4.52) wieder in der ursprünglichen Basis des Atoms ausdrücken:

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(t)\rangle &= \left[\cos^2 \Theta e^{-i\frac{\mathcal{R}}{2}t} |\beta(t)\rangle + \sin^2 \Theta e^{i\frac{\mathcal{R}}{2}t} |-\beta(t)\rangle \right] |a\rangle \\ &+ \frac{1}{2} \sin 2\Theta \left[e^{-i\frac{\mathcal{R}}{2}t} |\beta(t)\rangle + e^{i\frac{\mathcal{R}}{2}t} |-\beta(t)\rangle \right] |b\rangle \end{aligned} \quad (4.75)$$

Damit läßt sich schließlich die im Experiment zugängliche Observable berechnen, nämlich die Wahrscheinlichkeit $p_b(t)$, das Atom im unteren Maser-niveau zu finden. Nach Gl.(4.35) ist die Rücktransformation überflüssig. Mit Hilfe des Überlapps $\langle \beta | -\beta \rangle = e^{-2|\beta|^2}$ erhält man

$$\begin{aligned} p_b(t) &= \langle \tilde{\psi}(t) | b \rangle \langle b | \tilde{\psi}(t) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 2\Theta \left[1 - \exp \left\{ -\frac{1}{2} (gt)^2 \sin^2 2\Theta \frac{\sin^2(\frac{\Delta_R t}{2})}{(\frac{\Delta_R t}{2})^2} \right\} \cos(\mathcal{R}t) \right]. \end{aligned} \quad (4.76)$$

In Abschnitt 4.4.2 (ii) haben wir gesehen, daß sich das behandelte Problem für $\Delta_R = 0$ auf das Jaynes-Cummings-Modell zurückführen läßt. Wir wollen überprüfen, ob diese Eigenschaft in unserer Näherung Gl.(4.74) als Spezialfall enthalten ist. Wir wählen der Einfachheit halber auch $\Delta_A = 0$. Dann gilt

$$\mathcal{R} = 2\zeta g, \quad \Theta = \frac{\pi}{4}, \quad \lim_{\Delta_R \rightarrow 0} \beta(t) = -i\frac{gt}{2} \quad (4.77)$$

und Gl.(4.74) reduziert sich auf

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\zeta gt} \left| -i\frac{gt}{2} \right\rangle |+\rangle + e^{i\zeta gt} \left| i\frac{gt}{2} \right\rangle |-\rangle \right]. \quad (4.78)$$

Unter Berücksichtigung der Wirkung des Verschiebungsoperators auf die kohärenten Zustände

$$D(\zeta) \left| \pm i\frac{gt}{2} \right\rangle = e^{\mp \frac{i}{2} \zeta gt} \left| \zeta \left(1 \pm i\frac{gt}{2\zeta} \right) \right\rangle \quad (4.79)$$

ergibt die Rücktransformation in das Wechselwirkungsbild aus Abschnitt 4.4.1 (ii)

$$\begin{aligned} |\psi^W(t)\rangle &= D(\zeta) |\tilde{\psi}(t)\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-\frac{i}{2} \zeta gt} \left| \zeta \left(1 - i\frac{gt}{2\zeta} \right) \right\rangle |+\rangle + e^{\frac{i}{2} \zeta gt} \left| \zeta \left(1 + i\frac{gt}{2\zeta} \right) \right\rangle |-\rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Wir vergleichen dieses Ergebnis mit Gl.(3.45), die aus dem Jaynes-Cummings-Modell unter der Voraussetzung großer Feldamplitude $|\alpha| = \sqrt{\bar{n}} \gg 1$ und hinreichend kurzer Wechselwirkungszeit, d.h. $\bar{g}\tau \ll 2\pi\sqrt{\bar{n}}$, abgeleitet wurde. Unter diesen Umständen kann man dort die zeitliche Entwicklung der kohärenten Zustände bis zum linearen Term nähern und erhält bei Identifikation von

$\sqrt{\bar{n}} = \zeta$ und $\tau = t$ tatsächlich Übereinstimmung mit Gl.(4.80). Die Drehwellennäherung, die wir für hohe Rabi-Frequenzen gemacht haben, entspricht bei Resonanz ebenfalls einer Starkfeld-Näherung. Außerdem zeigt der Vergleich, daß sie offensichtlich auf Wechselwirkungszeiten kurz gegen die Revival-Zeit beschränkt ist.

Die Emissionswahrscheinlichkeit Gl.(4.76) geht im Limes $\Delta_R \rightarrow 0$ über in

$$p_b(t) = \frac{1}{2} \sin^2 2\Theta \left[1 - \exp \left\{ -\frac{1}{2} (gt)^2 \sin^2 2\Theta \right\} \cos(\mathcal{R}t) \right], \quad (4.81)$$

was für $\Delta_A = 0$ mit der „Kollaps-Formel“ Gl.(3.48) übereinstimmt.

4.5 Der phasengekoppelte Maser

In der Lasertechnik werden manchmal leistungsstarke Laser, um deren Kohärenzeigenschaften zu verbessern, an solche mit niedriger Intensität, dafür aber sehr schmaler Linienbreite gekoppelt. Eine ähnliche Idee läßt sich auf den Ein-Atom-Maser übertragen: Im inkohärent gepumpten Fall ist die Phase des Feldes an keine Referenz angekoppelt und im Ensemble folglich gleich verteilt. Strahlt man jedoch zusätzlich schwach mit einer externen Quelle ein, so erwartet man, daß sich zunächst die Phase beider Felder synchronisiert; sie werden also kohärent zueinander. Erst bei stärkerer Einstrahlung wird die Photonenzahlstatistik deutlich verändert. Auf diese Weise läßt sich also die für die Puls-Meßmethode aus Abschnitt 4.3 benötigte feste Phasenbeziehung herstellen. Der „phasengesähte“ Feldzustand (*seeded state*) besitzt dann bei günstiger Einstrahlstärke bereits eine deutliche Phasenausprägung, während typische nicht-klassische Eigenschaften wie die sub-Poisson'sche Photonenzahlverteilung bei geeigneter Wahl der Maserparameter im wesentlichen erhalten bleiben. Dadurch stellt sich eine dem „gequetschten Zustand“ (*squeezed state*) ähnliche Situation ein.

Anders als im Abschnitt 4.4.2, wo wir die Dynamik des Systems aus Feldmode *und* Atom untersucht haben, interessieren wir uns nun für den Zustand des Feldes *alleine*, behandeln also neben dem Wärmebad auch die Atome als ein Reservoir.

Zunächst transformieren wir den Hamilton-Operator Gl.(4.16) in das Wechselwirkungsbild, in dem wir schon die Mastergleichung (3.21) für den Ein-Atom-Maser abgeleitet haben. Mit

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathcal{H}_A + \mathcal{H}_R)t} = e^{-\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \hbar\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}} \quad (4.82)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^w &= U^\dagger \mathcal{H} U = \mathcal{H}_{JC}^w + \mathcal{H}_s^w \\ &= \hbar g(\vec{R}) (\hat{a}\sigma^\dagger e^{-i\delta t} + \hat{a}^\dagger\sigma e^{i\delta t}) + \hbar(\hat{a} f^* e^{-i\Delta_R t} + \hat{a}^\dagger f e^{i\Delta_R t}), \end{aligned} \quad (4.83)$$

wobei die Verstimmungen wie bisher definiert sind als

$$\delta = \Omega - \omega, \quad \Delta_R = \Omega - \omega_s. \quad (4.84)$$

Für die Zeiten, in denen sich kein Atom im Resonator befindet, gilt dann

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}_s^w, \rho] + \mathcal{L}\rho = (\mathcal{S} + \mathcal{L})\rho. \quad (4.85)$$

Wir haben hier den „Superoperator“ \mathcal{S} definiert.

Der Poisson'sche Pumpprozess wird durch Gl.(3.19) beschrieben:

$$\frac{d\rho}{dt} = r\mathcal{M}\rho \quad (4.86)$$

Wir erinnern uns, daß dieses Ergebnis aus dem normalen Jaynes-Cummings-Modell, also ohne Dämpfung und externe Kopplung, abgeleitet wurde. Wir argumentieren nun ebenso, wie bei der Mastergleichung (3.21) für den Ein-Atom-Maser und vernachlässigen beide Effekte für die stroboskopischen Wechselwirkungen. Dann darf man die Gln. (4.85) und (4.86) addieren und erhält die Mastergleichung für das Resonatorfeld bei externer Einkopplung und unter Nichtbeachtung der Endzustände der Atome:

$$\frac{d\rho}{dt} = (r\mathcal{M} + \mathcal{S} + \mathcal{L})\rho. \quad (4.87)$$

Ein qualitativer Unterschied zu Gl.(3.21) besteht darin, daß sich die Kopplung in Fock-Darstellung nun nicht mehr auf Matrixelemente nur einer Diagonalen beschränkt. Zu Gl.(3.22) kommt noch der Beitrag von \mathcal{S} , der alle direkten Nachbarn verknüpft:

$$\begin{aligned} \langle n|\mathcal{S}\rho|m\rangle &= if^* e^{-i\Delta_R t} (\sqrt{m}\rho_{n,m-1} - \sqrt{n+1}\rho_{n+1,m}) \\ &+ if e^{i\Delta_R t} (\sqrt{m+1}\rho_{n,m+1} - \sqrt{n}\rho_{n-1,m}). \end{aligned} \quad (4.88)$$

Von der Hauptdiagonalen ausgehend können damit die Nebendiagonalen bevölkert werden; das ist der mathematische Grund für den Aufbau von Kohärenzen.

Gesucht ist nun der stationäre Zustand, der die Bedingung

$$(r\mathcal{M} + \mathcal{S} + \mathcal{L})\rho_{stat} = 0 \quad (4.89)$$

erfüllt. Dabei ist man auf numerische Ergebnisse angewiesen. Für die mittlere Photonenzahl läßt sich jedoch eine analytische Näherungsformel ableiten: Die zeitliche Änderung von $\langle n \rangle$ ist gegeben durch

$$\frac{d}{dt}\langle n \rangle = \text{tr} \left[\hat{n} \frac{d}{dt}\rho \right] = \text{tr} [\hat{n}(r\mathcal{M} + \mathcal{S} + \mathcal{L})\rho]. \quad (4.90)$$

Wir beschränken uns der Übersichtlichkeit wegen auf Resonanz² d. h. $\delta = \Delta_R = 0$. Dann lautet der Pumpterm

$$\begin{aligned} r\mathcal{M}\rho &= r \left[\cos(\sqrt{\hat{n}+1}g\tau) \rho \cos(\sqrt{\hat{n}+1}g\tau) \right. \\ &\left. + \hat{a}^\dagger \frac{\sin(\sqrt{\hat{n}+1}g\tau)}{\sqrt{\hat{n}+1}} \rho \frac{\sin(\sqrt{\hat{n}+1}g\tau)}{\sqrt{\hat{n}+1}} \hat{a} - 1 \right], \end{aligned} \quad (4.91)$$

²Der Fall mit Verstimmung kann jedoch analog behandelt werden.

und damit

$$\begin{aligned} & r \operatorname{tr} [\hat{n} \mathcal{M} \rho] \\ &= r \operatorname{tr} \left[\rho \left(\sin^2(\sqrt{\hat{n} + 1} g \tau) + \cos^2(\sqrt{\hat{n} + 1} g \tau) - 1 \right) \hat{n} + \rho \sin^2(\sqrt{\hat{n} + 1} g \tau) \right] \\ &= r \langle \sin^2(\sqrt{\hat{n} + 1} g \tau) \rangle. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Weiter findet man (zum Dämpfungsterm siehe z. B. Lit. [38])

$$\operatorname{tr}[\hat{n} \mathcal{L} \rho] = -\gamma (\langle n \rangle - \bar{n}_{th}) \quad \text{und} \quad \operatorname{tr}[\hat{n} \mathcal{S} \rho] = i \left(f^* \langle \hat{a} \rangle - f \langle \hat{a}^\dagger \rangle \right). \quad (4.93)$$

Bei Resonanz hat die treibende Kraft f zum Feld die Phase $\pi/2$ [siehe Gl. (4.33)]. Dann gilt $i \left(f^* \langle \hat{a} \rangle - f \langle \hat{a}^\dagger \rangle \right) = 2|f| |\langle \hat{a} \rangle|$. Im stationären Fall ist also folgende Gleichgewichtsbedingung zwischen den beiden Pumpstermen und der Dämpfung erfüllt:

$$r \langle \sin^2(\sqrt{\hat{n} + 1} g \tau) \rangle + 2|f| |\langle \hat{a} \rangle| = \gamma (\langle n \rangle - \bar{n}_{th}). \quad (4.94)$$

Soweit war die Rechnung exakt. Nun machen wir zwei Näherungen: Für eine scharfe Photonenstatistik mit nur einem Maximum kann man den Mittelwert des Sinus als Sinus des Mittelwertes schreiben. Genau würde das für einen Fock-Zustand zutreffen. Außerdem kann man den Erwartungswert der Feldamplitude $\langle \hat{a} \rangle$, wenn die Feldphase bereits gut ausgeprägt ist, mit $\sqrt{\langle n \rangle}$ abschätzen, wie es beim kohärenten Zustand der Fall ist. Aufgelöst nach der Feldstärke

$$\sqrt{\langle n_s \rangle} = \frac{2|f|}{\gamma}, \quad (4.95)$$

die sich im Resonator gemäß Gl.(4.40) ohne thermische Photonen und ohne Atome einstellt, ergibt das

$$\sqrt{\langle n_s \rangle} = \frac{-N_{ex} \sin^2(\sqrt{\langle n \rangle + 1} g \tau) + \langle n \rangle - \bar{n}_{th}}{\sqrt{\langle n \rangle}}. \quad (4.96)$$

Bei abgeschaltetem externen Feld, also für $f = 0$, ist dies eine implizite Bedingung für die sich im „normalen“ Maserbetrieb einstellende mittlere Photonenzahl. Man kann sie leicht graphisch lösen (Lit. [40]).

Setzt man in Gl.(4.96) für $\langle n \rangle$ einen Wert ein, der den stationären übersteigt, so kann man die Stärke der Einstrahlung berechnen, die notwendig ist, damit dieser sich einstellt. Der sich daraus ergebende Kurvenverlauf ist in Abb. 4.4 dargestellt (durchgezogene Linie). Zusätzlich ist das Resultat aus einer numerischen Rechnung, die in Abb. 4.5 präsentiert wird, gestrichelt eingezeichnet. Im Bereich mit nur *einem* (relevanten) Maximum in der Photonenstatistik besteht gute Übereinstimmung. Die leichte Abweichung rührt hauptsächlich daher, daß bei mäßiger Phasenausprägung die Ungleichung $|\langle \hat{a} \rangle| < \sqrt{\langle n \rangle}$, und nicht wie vorausgesetzt die Gleichung $|\langle \hat{a} \rangle| = \sqrt{\langle n \rangle}$ gültig ist.

Es fällt auf, daß die mittlere Photonenzahl im Resonator mit der externen Einkopplung zunächst nur *sehr schwach* ansteigt. Die Emissionswahrscheinlichkeit für die Atome nimmt nämlich bei Erhöhung des Feldes ab. Dadurch wird der Feldzunahme entgegengesteuert. Ohne diesen Regelmechanismus würde sich $\langle n_s \rangle$ zur Photonenzahl ohne externes Feld einfach aufaddieren.

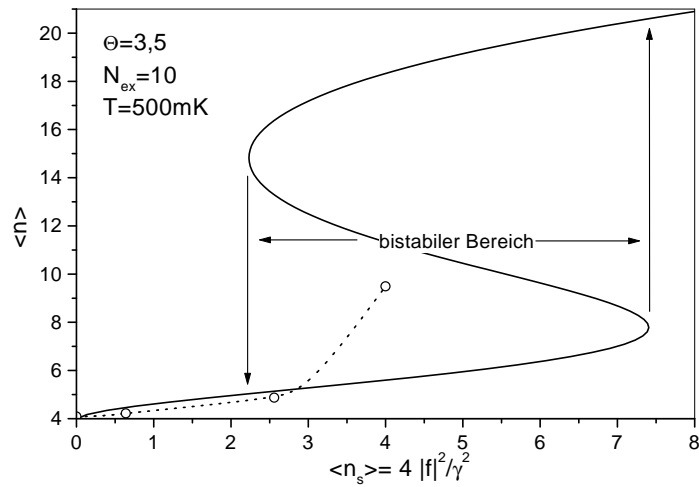


Abbildung 4.4: Durchgezogene Linie: Mittlere Photonenzahl im Resonator bei externer Einstrahlung gemäß der Näherung in Gl.(4.96). Im bistabilen Bereich liefert sie drei Lösungen, von denen zwei mit den beiden Maxima der Photonenzahl korrespondieren. Die dritte ist instabil gegen kleine Fluktuationen, und wird daher nicht realisiert. Gestrichelte Linie: Resultat einer numerischen Rechnung. Die mit Kreisen markierten Stellen entsprechen den in Abb. 4.5 dargestellten Feldzuständen. Die mittlere Photonenzahl erhöht sich bei Einkopplung zunächst kaum. Das ist eine Folge des Regelmechanismus beim Ein-Atom-Maser.

Der bistabile Bereich zeichnet sich durch *zwei* Maxima in der Photonenzahl aus (Abb. 4.5, unten). Die Situation ist dann ähnlich der Bistabilität, die beim freilaufenden Ein-Atom-Maser für gewisse Θ -Werte ebenfalls auftritt (Abschnitt 3.1.4). Die Näherung liefert dann zwei Lösungen, die diesen beiden Maxima entsprechen. Die dritte Lösung der Näherung ist instabil und wird daher nicht realisiert.

Weitere Beispiele für phasengekoppelte Zustände sind in den Abbildungen 4.3, 5.2 und 5.3 gegeben. Je höher die mittlere Photonenzahl des Ausgangsfeldes und je geringer die Rate r der Atome, desto langsamer wird eine Feldphase durch Phasendiffusion wieder abgebaut (siehe Gl.(3.55) und Abschnitt 3.2.2). Entsprechend nimmt die benötigte relative Einstrahlstärke zur Ausbildung einer Vorzugsphase mit wachsender mittlerer Photonenzahl stetig ab.

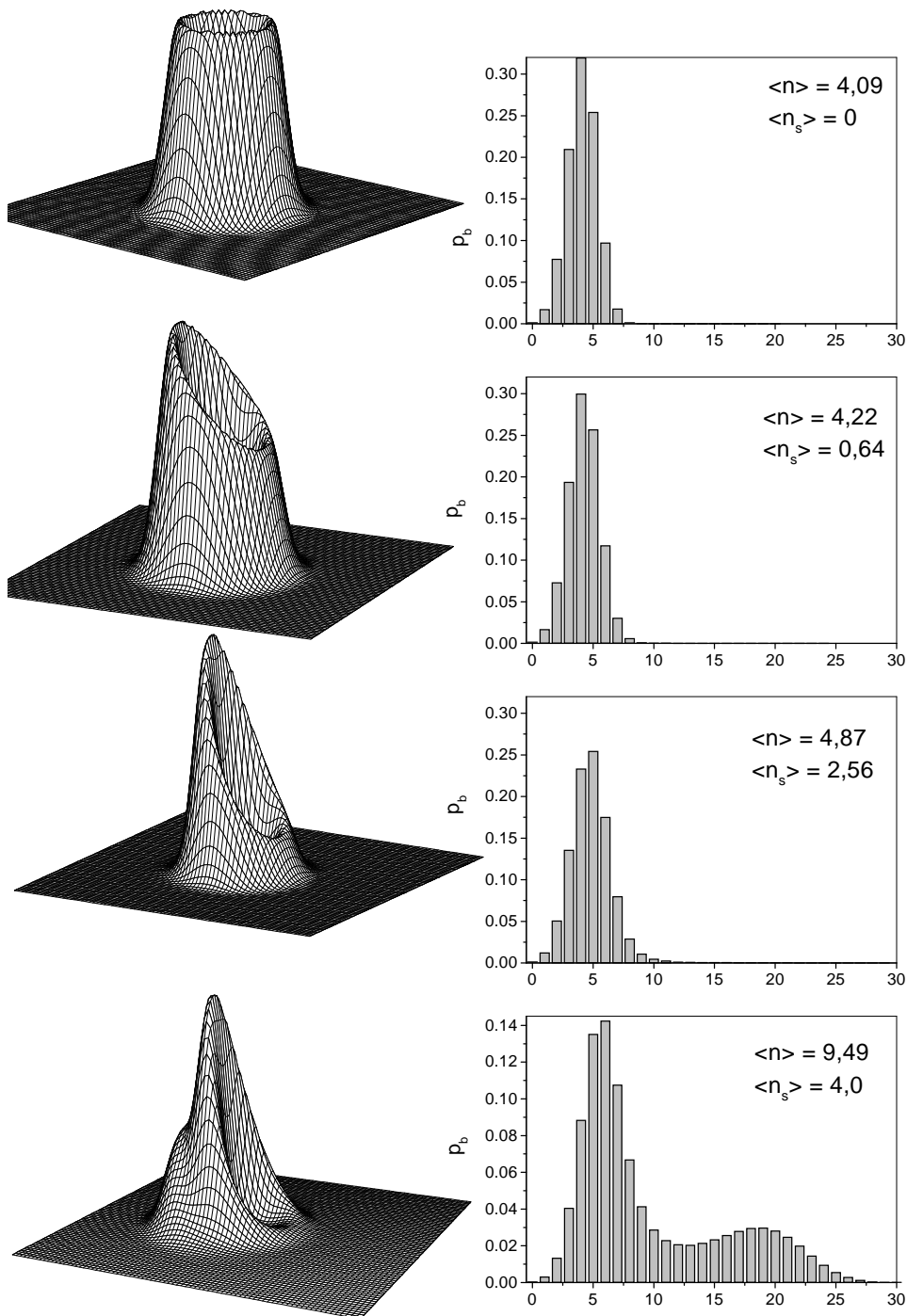


Abbildung 4.5: *Q-Funktion und Photonenzahlverteilung beim phasengekoppelten Maser. Während die Photonenzahlverteilung sich durch die externe Einstrahlung zunächst kaum ändert, nimmt das Feld bereits die von außen vorgegebene Phase an. Bei stärkerer Einstrahlung entsteht ein zweites Maximum in der Photonenzahlverteilung. Ein bistabiler Arbeitsbereich wird erreicht. Maserparameter wie in Abb. 4.4.*

Kapitel 5

Vermessung von Quantenzuständen im Resonator

5.1 Einleitung

Das Konzept des *Quantenzustandes* gehört zu den grundlegenden Axiomen der Quantenmechanik. Maximales Wissen über ein physikalisches System ist gleichbedeutend mit der Kenntnis des Zustandsvektors. Ist das System abgeschlossen, so lassen sich damit Vorhersagen über alle seine Beobachtungsgrößen machen, und zwar mit der größten in der Quantenmechanik prinzipiell zulässigen Präzision.

Der Quantenzustand selbst ist jedoch *keine* Meßgröße, er beinhaltet nämlich bereits die potentiellen Ausgänge komplementärer Beobachtungen. Der Meßprozeß *manipuliert* das System derart, daß vorher nichtobjektivierbare Eigenschaften nach der Messung objektiv existieren; er bewirkt also die Umwandlung von Möglichkeiten in Tatsachen. Eine *gleichzeitige* Verwirklichung komplementärer Eigenschaften ist jedoch ausgeschlossen, obgleich sie im Quantenzustand bereits erfaßt sind – als Möglichkeiten, nicht als Tatsachen. (Siehe dazu den Beitrag von P. Mittelstaedt in Lit. [21] und Lit. [71]).

Man kann Quantenzustände also nicht messen, man kann sie aber aus einer geeignet gewählten Menge (im allgemeinen nicht-vertauschbarer) Meßgrößen *rekonstruieren*. Die Kenntnis jeder einzelnen Meßgröße enthüllt – so wie der Schattenwurf eines Gegenstandes – einen speziellen Aspekt. Die Summe aller Aspekte entspricht dem Wissen über den Quantenzustand. Jedes Set von Observablen legt eine *Beobachtungsebene* fest, indem es zu einer gewissen Charakterisierung des Zustandes führt. Die vollständige Beobachtungsebene, die alle Aspekte einschließt, ermöglicht eine komplette Rekonstruktion. (Siehe auch Lit. [72, 74])

Neben der Wahl geeigneter Observablen ist für eine Rekonstruktion auch die reproduzierbare Präparation eines Zustandes essentiell. Im Gegensatz zur klassischen Physik kann ein Quantenzustand, dessen Erzeugung nicht wiederholt werden kann, auch nicht vermessen werden. In der Praxis hat man es normalerweise (wie auch beim Ein-Atom-Maser) mit offenen Quantensystemen zu tun, bei denen die Reproduzierbarkeit nicht vollständig ist. Ein Maß

dafür ist die Entropie. Je niedriger sie ist, desto höher ist die Reproduzierbarkeit, beim reinen Zustand ist sie null.

Die Vermessung von Quantenzuständen ist neben ihrer prinzipiellen Bedeutung auch von ganz praktischem Interesse: Mit stetig fortschreitenden Präparationsmöglichkeiten entsteht ein wachsender Bedarf an Verfahren zum Nachweis quantenmechanischer Lichtfelder. In den letzten Jahren wurde dieses Thema daher intensiv diskutiert [67, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85].

Basierend auf der Homodyne-Messung und mit Hilfe der tomographischen Methode [75] wurde in Lit. [77] der Zustand von „gequetschtem“ laufendem Licht in Fock-Darstellung rekonstruiert. Alternative Rekonstruktionsmethoden im Zusammenhang mit der Homodyne-Messung wurden in Lit. [78, 79, 80, 81] vorgeschlagen.

Verschiedene theoretische Studien zur Rekonstruktion eines Resonatorfeldes durch Sondierung mit Atomen wurden in Lit. [82] durchgeführt. Dort wird allerdings durchgängig von der Information der Überlagerungsphase der atomaren Zustände Gebrauch gemacht, was wir aus den in Abschnitt 4.1 genannten experimentellen Gründen vermeiden wollen.

Schemata zur Bestimmung des Schwingungszustandes von in Fallen gefangenen Atomen wurden in Lit. [83] vorgeschlagen. In Lit. [84] konnte erstmals die Rekonstruktion des Bewegungszustandes eines ${}^9\text{Be}^+$ -Ions in einer Ionenfalle experimentell demonstriert werden.

In Abschnitt 5.2 stellen wir eine Rekonstruktionsmethode vor, die auf der Sondierung eines Resonatorfeldes mit Atomen basiert (das ist für Resonatorfelder im Mikrowellenbereich die einzige Möglichkeit) und dabei vollständig *unabhängig* von der *Kohärenz* der atomaren Zustände ist [86]. Ähnlich wie in Lit. [84] führen wir dabei „Verschiebungen“ des Zustandes entlang von Kreisen im Phasenraum durch.

Eine Alternative zur Rekonstruktion von Quantenzuständen auf der Basis eines Sets von Messungen stellt die unmittelbare Vermessung einzelner Punkte von Phasenraumfunktionen dar [76]. In Lit. [87] wird gezeigt, daß auch die Wigner-Funktion im Prinzip einer direkten punktweisen Beobachtung zugänglich ist.

Wir werden in Abschnitt 5.3 ein Schema vorstellen, das es erlaubt, die charakteristische Funktion der Wigner-Verteilung durch Sondierung mit Atomen unmittelbar zu beobachten [88]. Dabei verzichten wir wieder auf die Information über die Überlagerungsphase der atomaren Zustände, wodurch die experimentelle Realisierung erheblich vereinfacht wird. Alternative Vorschläge zur Messung der charakteristischen Funktion durch die gleichzeitige Kopplung von Atomen an *zwei* Moden werden in Lit. [89, 90] diskutiert.

5.2 Zustandsrekonstruktion

5.2.1 Übergang zur Fock-Darstellung

Ein zu rekonstruierender Lichtzustand der Resonatormode sei repräsentiert durch seinen Dichteoperator ρ . Wir schließen nun an die in Abschnitt 4.3

beschriebene Pulsmethode an. Ausgangspunkt ist die in Gl.(4.13) gegebene Wahrscheinlichkeit p_b , das nach der Verschiebung des Feldzustandes im Phasenraum um die Amplitude α wechselwirkende Atom im unteren Maserniveau anzutreffen. Das Ziel besteht nun darin, einen geeigneten Zusammenhang zwischen dieser experimentell zugänglichen Observable und dem Zustand des Feldes abzuleiten.

Die Spurbildung führen wir in Fock-Basis aus:

$$p_b(\alpha, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | D(\alpha) \rho D^\dagger(\alpha) | n \rangle \sin^2(\sqrt{n+1}g\tau). \quad (5.1)$$

In diese Formel geht die Photonenstatistik des „verschobenen“ Feldzustandes, beziehungsweise anders interpretiert, die Verteilung „verschobener“ Fock-Zustände im ursprünglichen Feldzustand ein. Wir stellen nun ρ und $D(\alpha)$ in der Basis der Zahlenzustände dar:

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^{(0)} |n\rangle\langle n| + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^{(k)} |n\rangle\langle n+k| + \text{h.ad.} \right\} \quad (5.2)$$

$$D(\alpha) = \sum_{n,m=0}^{\infty} d_{nm}(\alpha) |n\rangle\langle m| \quad (5.3)$$

Die Matrixelemente d_{nm} sind in Gl.(A.4) angegeben. Durch Substitution der Gleichungen (5.2) und (5.3) in Gl.(5.1) und mit $\alpha = r e^{i\phi}$ erhalten wir folgenden Ausdruck für die Emissionswahrscheinlichkeit des Atoms (zur Vereinfachung der Nomenklatur unterdrücken wir die Wechselwirkungszeit τ im Argument von p_b , die wir im Moment als konstant betrachten):

$$p_b(r, \phi) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \sin^2(\sqrt{m+1}g\tau) \mathcal{X}_{mn}^{(0)}(r) \rho_n^{(0)} + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n,m=0}^{\infty} \sin^2(\sqrt{m+1}g\tau) \mathcal{X}_{mn}^{(k)}(r) \rho_n^{(k)} e^{ik\phi}. \quad (5.4)$$

Wir haben dabei folgende Definition eingeführt

$$d_{mn}(\alpha) d_{(n+k)m}(-\alpha) := \mathcal{X}_{mn}^{(k)}(r) e^{ik\phi} \quad (5.5)$$

mit der *reellen* Funktion

$$\mathcal{X}_{mn}^{(k)}(r) = \begin{cases} \frac{m!}{\sqrt{n!(n+k)!}} e^{-r^2} r^{2(n-m)+k} (-1)^k \mathcal{L}_m^{n-m}(r^2) \mathcal{L}_m^{n-m+k}(r^2) & \forall m \leq n \\ \sqrt{\frac{n!}{(n+k)!}} e^{-r^2} r^k (-1)^{n-m+k} \mathcal{L}_n^{m-n}(r^2) \mathcal{L}_m^{n-m+k}(r^2) & \forall n \leq m \leq n+k \\ \frac{\sqrt{n!(n+k)!}}{m!} e^{-r^2} r^{2(m-n)-k} \mathcal{L}_n^{m-n}(r^2) \mathcal{L}_{n+k}^{m-n-k}(r^2) & \forall m \geq n+k. \end{cases}$$

Die drei unterschiedlichen Fälle folgen aus der Fallunterscheidung in Gl.(A.4).

Die Observable p_b hängt nach Gl.(5.4) (im Prinzip) von allen Matrixelementen des Anfangszustandes ρ ab. Man könnte eine hinreichende Anzahl

von Wahrscheinlichkeiten durch Messungen ermitteln, und das entstehende lineare Gleichungssystem in einem sinnvoll begrenzten Fock-Raum nach den Unbekannten $\rho_n^{(k)}$ auflösen. Der praktische Nutzen dieser Methode wäre jedoch gering, da das Gleichungssystem in der Regel so schlecht konditioniert ist, daß seine Inversion bei Berücksichtigung des Rauschens in den Messergebnissen zu meist sinnlosen Ergebnissen führen würde. Deshalb werden wir im nächsten Abschnitt Gleichungen ableiten, in denen die einzelnen Diagonalen der Dichtematrix separiert auftreten.

5.2.2 Separation der Diagonalen

Betrachtet man $p_b(r, \phi)$ als 2π -periodische Funktion des Winkels ϕ bei konstantem Betrag r , so erkennt man, daß es sich um eine Fourier-Summe handelt. Die Fourier-Amplituden der Schwingungen $e^{ik\phi}$ sind gegeben durch ($k' = 0, 1, \dots$)

$$q^{(k')}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_b(r, \phi) e^{-ik'\phi} d\phi. \quad (5.6)$$

Mit Hilfe der Fourier-Darstellung des Kronecker-Symbols

$$\delta_{k,k'} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-k')\phi} d\phi \quad (5.7)$$

erhält man (wir ersetzen k' wieder durch k)

$$q^{(k)}(r) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \sin^2(\sqrt{m+1}g\tau) \mathcal{X}_{mn}^{(k)}(r) \rho_n^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Y}_n^{(k)}(r) \rho_n^{(k)}. \quad (5.8)$$

Im letzten Schritt haben wir die Summe über m zusammengefaßt als

$$\mathcal{Y}_n^{(k)}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \sin^2(\sqrt{m+1}g\tau) \mathcal{X}_{mn}^{(k)}(r). \quad (5.9)$$

Kennt man also die Funktion $p_b(r, \phi)$ auf allen Punkten entlang eines zum Ursprung konzentrischen Kreises im Phasenraum mit konstantem Radius r (Abb. 5.1) und berechnet man das diskrete Amplitudenspektrum dieser Funktion, so ist nach Gl.(5.8) jede Fourier-Amplitude $q^{(k)}$ *ausschließlich* abhängig von der k -ten Diagonale der Dichtematrix in Fock-Darstellung. In der Fourier-Repräsentation sind damit die einzelnen Diagonalen von ρ *separiert*¹.

Diese Eigenschaft birgt verschiedenartige Anwendungsmöglichkeiten. Beispielsweise spiegelt das zeitliche Verhalten der Amplituden $q^{(k)}(t)$ dasjenige der k -ten Diagonale der Dichtematrix wider. Insbesondere ist dann $q^{(1)}(t)$ ein Maß für die zeitliche Entwicklung der mittleren elektrischen Feldstärke Gl. (3.31), die ebenfalls von der ersten Nebendiagonale bestimmt ist. Dieser Zusammenhang und die Möglichkeit, dadurch das Spektrum des Ein-Atom-Masers zu messen, wird in Lit. [66] im Detail untersucht. Wir konzentrieren uns hier jedoch auf die Zustandsrekonstruktion.

¹Es ist bemerkenswert, daß dieselbe Separation auch bei den Fourier-Spektren von Phasenraumfunktionen wie der P-, Q-, oder Wigner-Funktion entlang konzentrischer Kreise auftritt. Siehe Fußnote auf Seite 76.

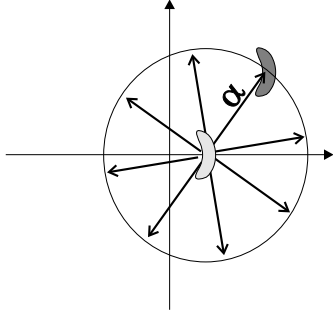


Abbildung 5.1: Verschiebung eines Lichtzustandes zu Orten entlang eines Kreises im Phasenraum durch Mikrowellenpulse gleicher Amplitude aber unterschiedlicher Phase.

5.2.3 Diskretisierung der Winkel

Integrale wie in Gl.(5.6) stellen eine mathematische Abstraktion dar. In Wirklichkeit kann man die Meßgröße p_b nicht kontinuierlich für alle Punkte entlang eines Kreises bestimmen. Man muß sich auf eine endliche Anzahl L von Winkeln

$$\phi_l = 2\pi l/L \quad \text{mit} \quad l = 0, 1, \dots, L-1 \quad (5.10)$$

beschränken und Gl.(5.6) durch eine *diskrete* Fourier-Transformation ersetzen. Wir bezeichnen sie mit einem zusätzlichen L :

$$q_L^{(k')} (r) = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} p_b(r, \phi_l) e^{-ik'\phi_l}. \quad (5.11)$$

Angewandt auf Gl.(5.4) führt das nun nicht mehr auf das Kronecker-Symbol Gl.(5.7), sondern auf

$$\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{i(k-k')\phi_l}. \quad (5.12)$$

Dieser Ausdruck verhält sich ebenfalls wie das Kronecker-Symbol, solange $k - k'$ kein ganzzahliges Vielfaches von L ist. Für $k - k' = \pm sL$ mit $s = 1, 2, \dots$ erhält man allerdings eine „1“ anstelle einer „0“. Daher führt die diskrete Fourier-Transformation Gl.(5.11) auf Gl.(5.8) zuzüglich folgender Restterme

$$q_L^{(k)} (r) = q^{(k)} (r) + \sum_{n,m=0}^{\infty} \sin^2(\sqrt{m+1}g\tau) \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \mathcal{X}_{mn}^{(qL+k)} \rho_n^{(qL+k)} \right. \\ \left. + \sum_{sL-k>0} \mathcal{X}_{mn}^{(sL-k)} [\rho_n^{(sL-k)}]^* + \sum_{-sL+k>0} \mathcal{X}_{mn}^{(-sL+k)} \rho_n^{(-sL+k)} \right\}. \quad (5.13)$$

Wir untersuchen nun diesen Ausdruck im Zusammenhang mit einem beschränkten Fock-Raum und nehmen an, daß $\rho_n^{(k)} \approx 0$, d.h. vernachlässigbar klein ist, falls $n + k > N$. Demnach ist N die größte berücksichtigte Photonenzahl. Für eine sinnvolle Wahl von N ist eine gewisse a-priori-Information über den Feldzustand unvermeidlich. Das Problem ist aber nicht schwerwiegend, da man sich bei der Rekonstruktion an einen geeigneten Wert herantasten kann, der bei der Aufnahme der Meßdaten noch nicht exakt festgelegt zu sein braucht.

Fordern wir die Bedingung $L - k \geq N + 1$, so liegen alle Matrixelemente von ρ in den zusätzlichen Termen von Gl.(5.13) bereits außerhalb des betrachteten Raums. Dies gilt für *alle* Fourier-Amplituden, wenn wir für k den größtmöglichen Wert in dem beschränkten Raum wählen, das ist N . Damit ist die dem $N + 1$ -dimensionalen Fock-Raum angepaßte Anzahl L von Winkeln gegeben durch

$$L = 2N + 1. \quad (5.14)$$

Oberschwingungen, welche durch die daraus folgende Winkel-Schrittweite nicht mehr erfaßt werden, sind vernachlässigbar, vorausgesetzt, die Wahl von N ist sinnvoll.

Wir kehren zurück zu Gl.(5.8), nun aber umgeschrieben für einen $N + 1$ -dimensionalen Fock-Raum und L diskrete Winkel:

$$q_L^{(k)}(r_j, \tau) = \sum_{n=0}^{N-k} \mathcal{Y}_n^{(k)}(r_j, \tau) \rho_n^{(k)}. \quad (5.15)$$

Die Summe über m , Gl.(5.9), wird für Berechnungen natürlich ebenfalls abgeschnitten, und zwar bei einer dem *verschobenen* Zustand angepaßten höchsten Photonenzahl M . (M kann man abschätzen mit $M = (c r_j + \sqrt{N+1})^2$, wobei die Konstante c in der Größenordnung von 3 liegt.)

Gl.(5.15) bildet ein lineares Gleichungssystem für die $N + 1 - k$ Unbekannten $\rho_n^{(k)}$ der k -ten Diagonale der Dichtematrix. Für eine eindeutige Lösung benötigt man zumindest ebenso viele Gleichungen. Im Experiment bieten sich dazu zwei variierbare Parameter an: die Wechselwirkungszeit τ und der Radius r . Man kann Messungen auf *einem* Radius mit $N + 1 - k$ unterschiedlichen Zeiten τ_i sammeln oder für *ein* festes τ auf $N + 1 - k$ unterschiedlichen Radien oder jede beliebige Kombination beider Möglichkeiten. Experimentell ist es zunächst am einfachsten, bei fester Wechselwirkungszeit nur die Radien zu variieren. Daher fokussieren wir diesen Fall. Für jeden Radius werden $N + 1 + k$ Winkel benötigt. Die Bestimmung der Matrixelemente einer k -ten Diagonale erfordert also $(N + 1 - k)(N + 1 + k) = (N + 1)^2 - k^2$ Phasenraumpunkte, für die p_b bekannt sein muß. Damit alle Diagonalen rekonstruiert werden können, sind das $2N + 1$ Winkel [Gl.(5.14)] auf $N + 1$ Radien d.h.

$$(N + 1)^2 + N^2 + N \quad (5.16)$$

Wahrscheinlichkeiten p_b , die zu bestimmen sind. Andererseits ist die Zahl der Unbekannten gleich $(N + 1)^2$, wobei die komplexen Nebendiagonalelemente doppelt gezählt werden.

5.2.4 Fehlerabschätzung und numerische Methode

Wir wenden uns nun dem Problem zu, wie Gl.(5.15) sinnvoll nach den Matrixelementen $\rho_n^{(k)}$ aufgelöst werden kann. Der Übersichtlichkeit halber gehen wir zunächst zur Matrix-Schreibweise über:

$$\vec{\mathbf{q}}^{(k)} = \mathbf{Y}^{(k)} \vec{\rho}^{(k)}. \quad (5.17)$$

Dann gilt für die Matrixelemente der $J \times (N + 1 - k)$ Matrix $\mathbf{Y}^{(k)}$ mit $J \geq N + 1$ verschiedenen Radien r_j : $\mathbf{Y}_{jn}^{(k)} \equiv \mathcal{Y}_n^{(k)}(r_j)$. Der Vektor $\vec{\rho}^{(k)}$ enthält die Unbekannten $\rho_n^{(k)}$, und $\vec{\mathbf{q}}^{(k)}$ die Fourier-Amplituden $\mathbf{q}_j^{(k)} \equiv q_L^{(k)}(r_j)$. Um die Nomenklatur zu vereinfachen, unterdrücken wir ab jetzt den Index (k) .

Bei der Inversion von Gl.(5.17) können zwei Fälle auftreten: Sie kann unterbestimmt sein, dann gibt es nichttriviale Lösungen zur homogenen Gleichung $\mathbf{Y} \vec{\rho} = \vec{\mathbf{0}}$. \mathbf{Y} ist dann nicht invertierbar und die Lösung nicht eindeutig. Eindeutig bestimmt ist dann der Vektor $\vec{\rho}_{\min}$ mit der Zusatzbedingung, die kleinste Norm $|\vec{\rho}_{\min}|$ unter allen möglichen Lösungsvektoren zu besitzen. Man definiert mit ihm die *Pseudoinverse* $\bar{\mathbf{Y}}$ der Matrix \mathbf{Y} über die Gleichung [91, 92]

$$\vec{\rho}_{\min} = \bar{\mathbf{Y}} \vec{\mathbf{q}}. \quad (5.18)$$

Der zweite Fall tritt ein, wenn Gl.(5.17) überbestimmt, d.h. J größer als $N + 1$ ist und die Gleichungen nicht linear abhängig sind. Verrauschte Meßdaten sind widersprüchlich. Man erwartet daher bei Berücksichtigung von Meßungenauigkeiten, daß das Gleichungssystem überhaupt keine exakte Lösung mehr besitzt und interessiert sich folglich für die beste Näherung im Sinne der Minimierung des Ausdrucks (siehe dazu auch Lit. [81])

$$\chi^2 = |\vec{\mathbf{q}} - \mathbf{Y} \vec{\rho}|^2. \quad (5.19)$$

Der Lösungsvektor ist auch hier durch $\vec{\rho}_{\min}$ nach Gl.(5.18) gegeben, mit der Pseudoinversen von \mathbf{Y} , die wir in Gl.(5.21) explizit angeben werden.

Für eine detaillierte Diagnose und Fehlerabschätzung bietet die *Singularwert-Zerlegung* [91, 92] die geeigneten Hilfsmittel. Sie basiert auf folgender Darstellung der Matrix \mathbf{Y} , die immer möglich ist:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U} \mathbf{W} \mathbf{V}^T. \quad (5.20)$$

\mathbf{U} ist eine zeilenorthogonale, \mathbf{W} eine diagonale und \mathbf{V} eine orthogonale Matrix. Die eindeutig bestimmten Diagonalelemente $\mathbf{W}_{nn} \equiv w_n$ sind die Singularwerte. Die Pseudoinverse $\bar{\mathbf{Y}}$ ist gegeben durch

$$\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{V} \bar{\mathbf{W}} \mathbf{U}^T, \quad (5.21)$$

wobei für die Matrixelemente von $\bar{\mathbf{W}}$ gilt $\bar{\mathbf{W}}_{nm} = (1/w_n) \delta_{nm}$, falls $w_n \neq 0$. Die Kehrwerte von verschwindenden Singularwerten sind gleich null zu setzen. Damit ist also sowohl das Problem nach Gl.(5.18), als auch jenes nach Gl.(5.19) gelöst.

Nun wollen wir experimentelle Meßungenauigkeiten in Betracht ziehen. Diese treten vorwiegend über die gemessenen Wahrscheinlichkeiten p_b in den Fourier-Amplituden q_L in Gl.(5.11) auf. Deshalb ist es von besonderem Interesse, den von einer Störung $\Delta \vec{\mathbf{q}}$ verursachten Fehler $\Delta \vec{\rho}_{\min}$ in der Lösung des modifizierten Systems $\vec{\mathbf{q}} + \Delta \vec{\mathbf{q}} = \mathbf{Y} (\vec{\rho} + \Delta \vec{\rho})$ zu untersuchen. Er ist gegeben durch

$$\Delta \vec{\rho}_{\min} = \bar{\mathbf{Y}} \Delta \vec{\mathbf{q}}. \quad (5.22)$$

Mit Hilfe des kleinsten nicht verschwindenden und des größten Singularwertes w_{\min} und w_{\max} läßt sich der absolute und der relative Fehler abschätzen zu [92]

$$|\Delta \vec{\rho}_{\min}| \leq \frac{1}{w_{\min}} |\Delta \vec{q}| \quad (5.23)$$

und

$$\frac{|\Delta \vec{\rho}_{\min}|}{|\vec{\rho}_{\min}|} \leq \frac{w_{\max}}{w_{\min}} \frac{|\Delta \vec{q}|}{|\mathbf{P}_{\text{map}}(\mathbf{Y}) \vec{q}|}. \quad (5.24)$$

Dabei bedeutet $\mathbf{P}_{\text{map}}(\mathbf{Y})$ die Projektion in den Rang von \mathbf{Y} . Der Quotient w_{\max}/w_{\min} , der in Gl.(5.24) die bestimmende Größe ist, wird als *Konditionszahl* bezeichnet. (Das ist nicht die einzige Definition einer Konditionszahl, aber eine sehr nützliche.)

Häufig tritt das Problem schlecht konditionierter Matrizen auf. Winzige Fehler in \vec{q} werden dann durch eine riesige Konditionszahl verstärkt, und führen zu enormen Fehlern im Lösungsvektor $\vec{\rho}$. In diesem Fall kann man von $\bar{\mathbf{Y}}$ zu einer *regularisierten* Matrix $\bar{\mathbf{Y}}^{\text{reg}}$ übergehen, indem man alle Diagonalelemente von $\bar{\mathbf{W}}$, die einen gewissen Regularisierungs-Parameter überschreiten, gleich 0 setzt. Auf diese Weise erhält man die Lösung $\vec{\rho}_{\min}^{\text{reg}} = \bar{\mathbf{Y}}^{\text{reg}} \vec{q}$ für das regularisierte Gleichungssystem $\vec{q} = \mathbf{Y}^{\text{reg}} \vec{\rho}^{\text{reg}}$ mit gegenüber Gl.(5.17) verbesserter Kondition. Die Empfindlichkeit gegenüber Störungen wird dann nach Gl.(5.23) und (5.24) reduziert.

Allerdings handelt man sich dabei einen systematischen Fehler ein. Die Dimension des Lösungsraumes, in dem man den Vektor $\vec{\rho}$ sucht, ist gleich der Anzahl von Matrixelementen $\bar{\mathbf{W}}_{nn}$, die ungleich 0 sind. Durch Regularisierung reduziert man diese Dimension, und gleichbedeutend damit auch die Zahl freier Fit-Parameter, die bestimmt werden müssen. Ein mathematisch gesehen überbestimmtes System wird dabei faktisch zu einem unterbestimmten. Die regularisierte Lösung ist die bestmögliche in dem verbleibenden Raum, in dem die exakte im allgemeinen jedoch gar nicht mehr enthalten ist. Die Singularwertzerlegung spannt das Problem dabei in einer Basis auf, in der die Dimensionen entsprechend ihres Beitrags zum Lösungsvektor entfernt werden können, die „unwichtigsten“ zuerst. Dabei tendiert der Betrag des Lösungsvektors dazu, kleiner zu werden. In einem sinnvoll regularisierten Problem besteht nur eine schwache Abhängigkeit der Lösung von der exakten Zahl vorgenommener Regularisierungen. Der systematische Fehler kann kontrolliert werden, indem man mit der Näherungslösung $\vec{\rho}_{\min}^{\text{reg}}$ die Größe χ^2 nach Gl.(5.19) berechnet. Mit jeder Regularisierung nimmt sie zu². Gleichzeitig werden die Meßdaten glatter angepaßt, d.h. ohne die Details des Rauschens zu berücksichtigen. Das ist genau der gewünschte Effekt.

Bei den Ursachen für das Rauschen in den Meßdaten ist der statistische Fehler aufgrund einer endlichen Anzahl von Messungen von grundsätzlicher Bedeutung. Nimmt man zur Bestimmung jeder Wahrscheinlichkeit p_b eine

²Falls χ^2 durch Regularisierung *kleiner* wird, liegt das an den Rundungsfehlern in der numerischen Berechnung.

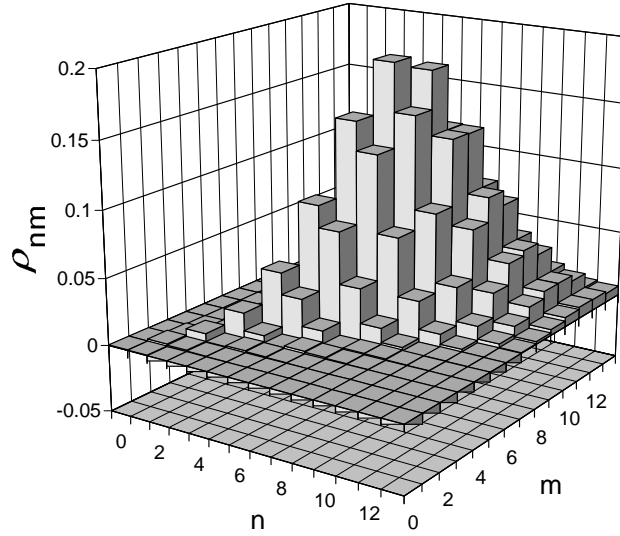


Abbildung 5.2: *Phasengekoppelter Ein-Atom-Maser-Zustand in Fock-Darstellung. Die Schwingungsphase ist mit einem externen Oszillator synchronisiert. Auf diese Weise lässt sich eine sub-Poisson'sche Photonenzustand mit einer definierten Feldphase kombinieren. Die verwendeten Parameter sind: $N_{ex} = 10$, $\theta = 3$, $\langle n_s \rangle = 4|f|^2/\gamma^2 = 6,25$, $T = 500\text{mK}$, $\langle n \rangle = 7,4$ und $Q = -0,42$.*

Anzahl von Z Messungen vor, so beträgt die Standardabweichung $\Delta p_b = \sqrt{p_b(1-p_b)/Z} \leq 1/(2\sqrt{Z})$. Davon sind die Fourier-Amplituden $q_L^{(k)}$ betroffen mit der Standardabweichung $\Delta q_L^{(k)} = (1/\sqrt{L})\Delta p_b \leq 1/(2\sqrt{LZ})$. In Abschnitt 5.2.5 berücksichtigen wir den Effekt dieses statistischen Fehlers für eine simulierte Rekonstruktion.

5.2.5 Computersimulation

Wir wollen die beschriebene Methode nun anhand einer Computersimulation unter Berücksichtigung verrauschter Meßdaten demonstrieren. Der stationäre Zustand des Ein-Atom-Masers ist phasen-gleichverteilt (Abschnitt 3.1.4). In diesem Fall ist die Emissionswahrscheinlichkeit $p_b(r, \phi)$ in Gl.(5.4) unabhängig vom Winkel ϕ . Außerdem gilt dann $q_L^{(0)}(r) = p_b(r)$ und $q_L^{(k)}(r) = 0$ für alle $k > 0$ [Gl.(5.11)]. Daher reduziert sich Gl.(5.15) wie auch Gl.(5.4) einfach zu

$$p_b(r_j) = \sum_{n=0}^N \mathcal{Y}_n^{(0)}(r_j) \rho_n^{(0)}. \quad (5.25)$$

Damit steht eine alternative Methode zur Rekonstruktion der Photonenzustand zur Verfügung. Im Gegensatz zu Lit. [18], wo die Photonenzustand durch Variation der Wechselwirkungszeiten bestimmt wurde, kann man sich auf ver-

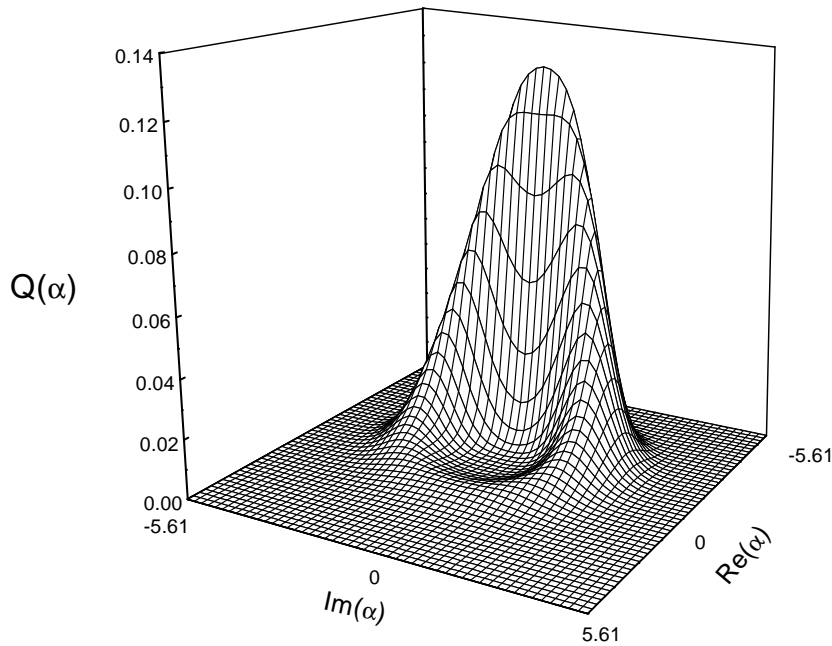


Abbildung 5.3: Derselbe Zustand wie in Abb. 5.2, hier aber in Q Darstellung.

schiedene Verschiebungsbeträge r_j beschränken und τ konstant auf einen Wert einstellen, bei dem hohe Zählraten erzielt werden.

Unser Rekonstruktionsschema entfaltet seine vollen Möglichkeiten aber erst bei einem Zustand mit Phasenausprägung. Wir gehen daher von einem phasengekoppelten Maserzustand aus, wie in Abschnitt 4.5 beschrieben. Als Maserparameter wählen wir $N_{ex} = 10$ und $\Theta = 3$. Noch ohne externe Einstrahlung stellt sich dann eine mittlere stationäre Photonenzahl von $\langle n \rangle = 5,2$ und ein Q -Wert nach Gl.(3.28) von $Q = -0,56$ ein. Es handelt sich damit um einen deutlich sub-Poisson'schen Arbeitsbereich.

Wir wählen nun die Amplitude f des externen Synthesizers so, daß sich oh-

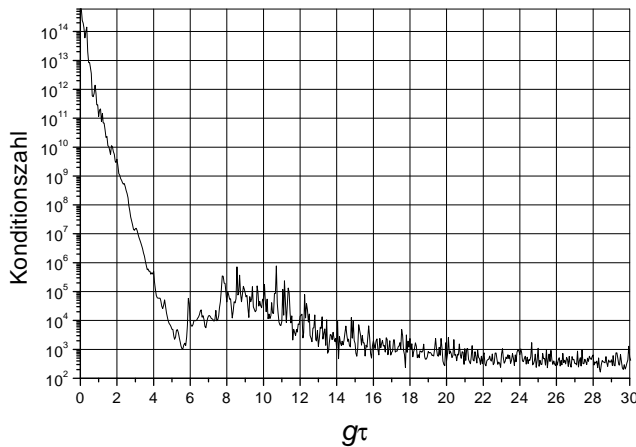


Abbildung 5.4: Abhängigkeit der Konditionszahl w_{max}/w_{min} von der (skalierten) Wechselwirkungszeit $g\tau$ für das Beispiel der Hauptdiagonalen der Dichtematrix. Große Wechselwirkungszeiten verbessern die Kondition stark.

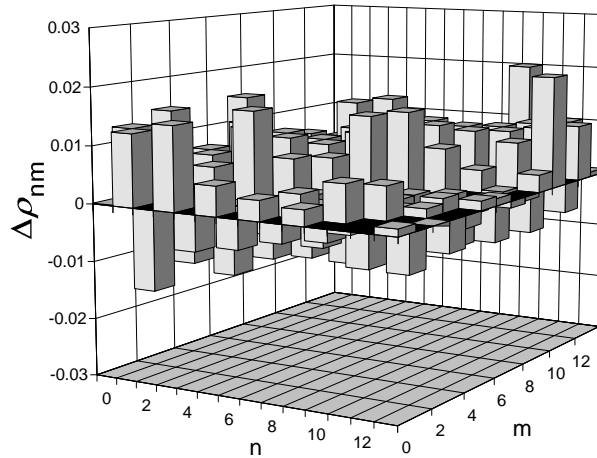


Abbildung 5.5: Abschätzung des statistischen Fehlers nach Gl.(5.22) bei der Rekonstruktion der Dichtematrix. Die Störung $\Delta\vec{q}$ wurde dabei gleich der Standardabweichung gesetzt, die sich aus einer Anzahl von 2500 Messungen ergibt. Die Konditionszahl wurde durch Regularisierung des Gleichungssystems auf einen Wert in der Größenordnung von 10 bis 100 gebracht.

ne Atome (und bei 0K) die mittlere Photonenzahl $\langle n_s \rangle = 4|f|^2/\gamma^2 = 6,25$ einstellen würde. Der daraus resultierende stationäre Zustand wurde gemäß der Mastergleichung (4.87) numerisch berechnet. Er weist eine mittlere Photonenzahl von $\langle n \rangle = 7,4$ und einen noch deutlich negativen Q -Wert von $Q = -0,42$ auf.

Abb. 5.2 zeigt die Feld-Dichtematrix in Fock-Darstellung; die Nebendiagonalen sind bereits deutlich ausgeprägt. Zur Veranschaulichung wurde die zugehörige Q -Funktion (Anhang B) berechnet. Der Zusammenhang ist gegeben durch³

$$Q(|\alpha\rangle, \varphi) = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \rho_n^{(0)} + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n+k}}{\sqrt{n!}\sqrt{(n+k)!}} \rho_n^{(k)} e^{ik\varphi} \right]. \quad (5.26)$$

Sie ist in Abb. 5.3 dargestellt. Man erkennt hier gut die entstandene Vorzugsphase.

Für die Rekonstruktion beachten wir die *Spiegelsymmetrie* des Zustandes Abb. 5.3 im Phasenraum zur reellen Achse. (Die Feldstärke f des externen Oszillators haben wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit rein imaginär gewählt.) Gl.(5.26) entnimmt man, daß in diesem Fall alle Matrixelemente $\rho_n^{(k)}$ *rein reell* sind. Die Anzahl von Unbekannten reduziert sich dadurch auf $(N+1)(N+2)/2$. Weiter gilt dann nach Gl.(5.4) $p_b(r, \phi) = p_b(r, -\phi)$.

³Die Darstellung hat die Form einer Fourier-Summe. Man beachte die Analogie zu Gl.(5.4).

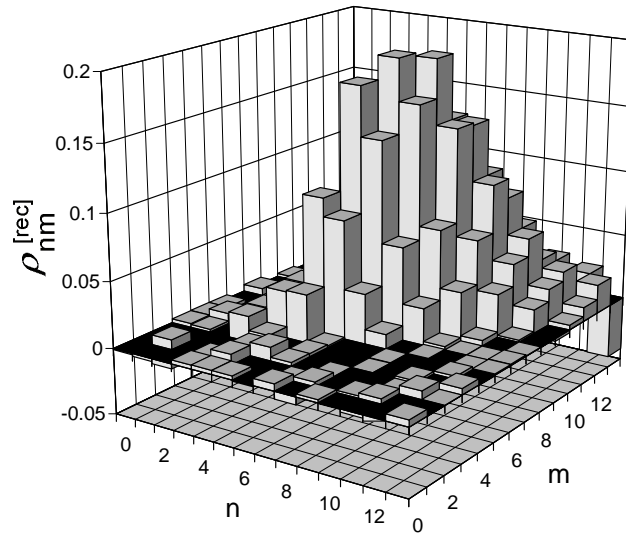


Abbildung 5.6: Ergebnis der Rekonstruktion des in Abb. 5.2 dargestellten Zustandes. Messungenauigkeiten wurden dabei durch ein Gauß-verteilttes Rauschen mit einer Standardabweichung von 0,01 berücksichtigt.

Die entsprechend verschobenen Zustände besitzen nämlich identische Photonstatistiken. Demnach ist es hinreichend, die Verschiebungen entlang von *Halbkreisen* im Phasenraum mit nur positivem (oder nur negativem) Imaginärteil auszuführen. Dadurch verringert sich die Mindestzahl erforderlicher Wahrscheinlichkeiten p_b nach Gl.(5.16) auf $(N + 1)^2$ für eine gerade, und auf $(N + 1)^2 + (N + 1)/2$ für eine ungerade Anzahl L von diskreten Winkeln. (Im ersten Fall ist nur eine Verschiebung α reell, im zweiten sind es zwei; das ist der Unterschied.)

In unserem Beispiel sammeln wir Meßdaten für 16 Winkel entlang 30 Halbkreisen mit Radien, die um eine Schrittgröße von 0.4 anwachsen. Bei der Wahl einer geeigneten Dimension $N+1$ des Fock-Raums ist ein Kompromiß zwischen dem systematischen Fehler durch die Begrenzung und der mit N wachsenden Anzahl von Unbekannten zu machen. Wir wählen $N = 13$ als höchste Photonenanzahl.

Nun betrachten wir die in Gl.(5.24) definierte Kondition des Gleichungssystems. Sie ist in Abb. 5.4 für das Beispiel der Hauptdiagonalen in Abhängigkeit von der (skalierten) Wechselwirkungszeit $g\tau$ aufgetragen. Man erkennt eine sehr starke, bis zu einem Wert von $g\tau \approx 5,5$ annähernd exponentielle Abhängigkeit. Lange Wechselwirkungszeiten begünstigen die Rekonstruktion erheblich. Wir machen einen Kompromiß zwischen guter Kondition und experimentell typischerweise gut erreichbaren Parametern und wählen $g\tau = 3,16$. Weiter berücksichtigen wir den statistischen Fehler bei der Bestimmung von p_b . Für jede Wahrscheinlichkeit gehen wir von $Z = 2500$ Messungen aus, wo-

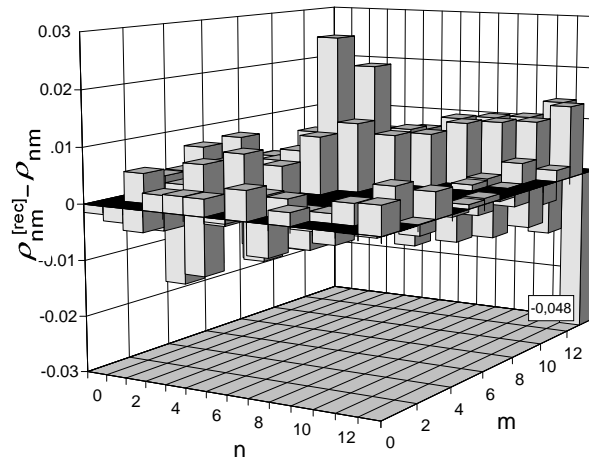


Abbildung 5.7: Differenz zwischen exakten und rekonstruierten Matrixelementen der Dichtematrix.

raus sich ein Gauß-verteiles Rauschen mit einer Standardabweichung von 0,01 ergibt, das wir zu jeder ermittelten Meßgröße p_b aufaddieren. Nach Gl.(5.24) sollte die Konditionszahl die Größenordnung von 100 dann nicht stark überschreiten, um sinnvolle Ergebnisse zu erhalten. Abb. 5.5 zeigt eine individuelle Fehlerabschätzung für die einzelnen Matrixelemente. Dabei wurde der Fehler $\Delta \vec{\rho}_{\min}$ nach Gl.(5.22) für das regularisierte Problem berechnet, indem alle Komponenten von $\Delta \vec{q}$ gleich der in Abschnitt 5.2.4 angegebenen Standardabweichung $\Delta q_L^{(k)}$ gesetzt wurden.

Das Ergebnis der Rekonstruktion ist in Abb. 5.6 dargestellt. Abb. 5.7 zeigt die Differenz zwischen exakten und rekonstruierten Matrixelementen. Die Übereinstimmung ist sehr befriedigend. Einen anschaulichen Eindruck vermittelt die Q -Darstellung des rekonstruierten Feldes Abb. 5.8, in der alle charakteristischen Eigenschaften qualitativ gut wiedergegeben werden.

5.3 Messung der Wigner'schen charakteristischen Funktion

5.3.1 Definition und Eigenschaften

Die charakteristische Funktion der Wigner-Verteilung (siehe auch Anhang B) läßt sich mit Hilfe des Verschiebungsoperators Gl.(A.1) definieren als

$$C(\mu, \mu^*) = \text{Tr}[\rho D(\mu)]. \quad (5.27)$$

Sie ist die von der komplexen Variable μ und ihrer konjugierten μ^* im „reziproken Phasenraum“ abhängige (komplexwertige) Fourier-Transformierte der

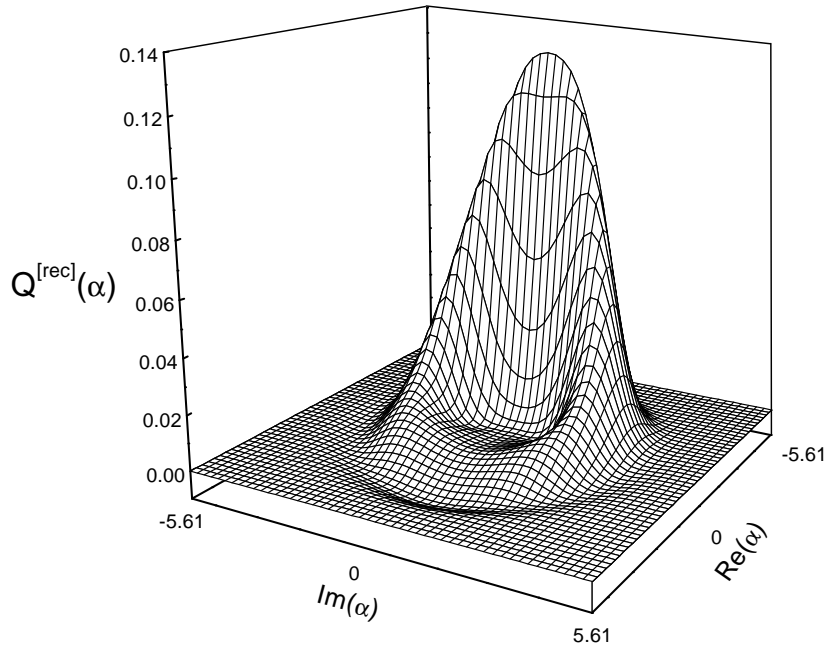


Abbildung 5.8: Q -Darstellung des in Abb. 5.6 dargestellten rekonstruierten Resonatorfeldes. Die charakteristischen Eigenschaften sind in der Rekonstruktion deutlich zu erkennen.

Wigner-Funktion $W(\alpha)$, d. h.

$$C(\mu) = \int e^{\mu\alpha^* - \mu^*\alpha} W(\alpha) d^2\alpha. \quad (5.28)$$

Der Zusammenhang zum Dichteoperator ist gegeben durch die Integraltransformation

$$\rho = \frac{1}{\pi} \int C(\mu) D(-\mu, -\mu^*) d^2\mu. \quad (5.29)$$

Drückt man ρ in Fock-Darstellung aus, so spielen die Matrixelemente d_{nm} des Verschiebungsoperators nach Gl.(A.4) die Rolle einer sogenannten „*Pattern-Funktion*“.

Die charakteristische Funktion stellt aber selbst bereits eine vollwertige Repräsentation eines Quantenzustandes dar. Besonders eng ist sie über ihre Ableitungen mit den Erwartungswerten der symmetrisch geordneten Momente von $a^\dagger a$ verknüpft über die Beziehung

$$\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^n \left(-\frac{\partial}{\partial\mu^*}\right)^m C(\mu)\Big|_{\mu=\mu^*=0} = \langle \{a^\dagger{}^n a^m\}_{sym} \rangle. \quad (5.30)$$

Die symmetrisch geordneten Produkte kann man dabei folgendermaßen allgemein definieren:

$$\{a^\dagger{}^n a^m\}_{sym} = \left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^n \left(-\frac{\partial}{\partial\mu^*}\right)^m D(\mu, \mu^*)\Big|_{\mu=\mu^*=0}. \quad (5.31)$$

Beispielsweise gilt demnach: $\{a^\dagger a\}_{sym} = \frac{1}{2}(a^\dagger a + a a^\dagger)$. Die Möglichkeiten zur Beobachtung der Phasendiffusion mit Hilfe der charakteristischen Funktion werden in Lit. [66] untersucht.

5.3.2 Charakteristische Funktion als Beobachtungsgröße

Wir gehen wieder von der in Abschnitt 4.3 beschriebenen Pulsmethode aus und schreiben Gl.(4.13) in der Form

$$p_b(\alpha, \tau) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \rho D^\dagger(\alpha) \cos(2g\tau\sqrt{\hat{n}+1}) D(\alpha) \right\}. \quad (5.32)$$

Dabei repräsentiert ρ wieder das zu untersuchende Lichtfeld im Resonator.

Nun betrachten wir diese Gleichung für große Verschiebungsbeträge, d.h. $|\alpha|^2 \gg \bar{n} = \text{tr}\{\rho \hat{n}\}$. Wir entwickeln das Argument der Cosinus-Funktion in eine Taylor-Reihe um die mittlere Photonenzahl $\bar{n}_D = \text{tr}\{\rho D^\dagger(\alpha) \hat{n} D(\alpha)\}$ des *verschobenen* Zustandes, die dann durch $|\alpha|^2$ genähert werden kann

$$2g\tau\sqrt{\hat{n}+1} = 2g\tau \left[\sqrt{|\alpha|^2+1} + \frac{1}{2} \frac{\hat{n}-|\alpha|^2}{\sqrt{|\alpha|^2+1}} - \frac{1}{8} \frac{(\hat{n}-|\alpha|^2)^2}{\sqrt{(|\alpha|^2+1)^3}} + \dots \right]. \quad (5.33)$$

Die Photonenzahlstatistik nach der Verschiebung (mit der Breite Δn_D) genügt dann folgender Ungleichung

$$1 \ll \Delta n_D \ll \bar{n}_D. \quad (5.34)$$

Unter diesen Umständen zeigen die Rabi-Oszillationen in der Besetzungsinversion der Atome als Funktion der Wechselwirkungszeit einen klaren Kollaps, dem mehrere Bereiche des Wiederauflebens („Revivals“) mit erneutem Kollaps folgen. Der erste Term in der Taylor-Entwicklung bestimmt dabei die Frequenz der Rabi-Oszillationen, der zweite Term ist verantwortlich für die periodische Wiederkehr von Kollaps und Revivals, während der dritte Term die *Form* der Revivals modifiziert. Dieser Zusammenhang wird in Lit. [62] ausführlich diskutiert. Wir interessieren uns hier lediglich für die Enveloppe der Rabi-Oszillationen *vor* dem ersten Revival, das bei der skalierten Wechselwirkungszeit $g\tau = 2\pi\sqrt{\bar{n}_D}$ auftritt. Daher können wir die Taylor-Reihe nach dem zweiten Term abbrechen. Wir schreiben wieder in Polarkoordinaten $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$, ziehen mit Hilfe von Gl.(4.15) die Verschiebungsoperatoren in das Argument des Cosinus und erhalten mit Gl.(A.7) für die Inversion I des Atoms:

$$\begin{aligned} I(\alpha, \tau) &\equiv p_a(\alpha, \tau) - p_b(\alpha, \tau) \\ &\approx \text{Tr} \left[\rho \cos \left\{ \left(2\sqrt{|\alpha|^2+1} + \frac{\hat{n}}{|\alpha|} + a^\dagger e^{i\phi} + a e^{-i\phi} \right) g\tau \right\} \right] \\ &= \text{Re} \left\{ e^{2i\sqrt{|\alpha|^2+1}g\tau} \text{Tr} \left[\rho \exp \left(i \left(\frac{\hat{n}}{|\alpha|} + a^\dagger e^{i\phi} + a e^{-i\phi} \right) g\tau \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Nun fordern wir noch $g\tau \ll 2\pi|\alpha|/\bar{n}$ (\bar{n} ist die mittlere Photonenzahl *vor* der Verschiebung!). Diese Bedingung ist ähnlich der ohnehin schon gemachten

Annahme, daß die Wechselwirkungszeit klein sei, verglichen mit der Revival-Zeit. Dann können wir den Term $\hat{n}/|\alpha|$ vernachlässigen, und die Spur in der letzten Zeile von Gl.(5.35) ergibt gemäß Gl.(5.27) gerade die charakteristische Funktion. Wir erhalten somit ein einfaches Resultat:

$$I(\alpha, \tau) \approx C_r(\mu) \cos\left(2\sqrt{|\alpha|^2 + 1} g\tau\right) - C_i(\mu) \sin\left(2\sqrt{|\alpha|^2 + 1} g\tau\right). \quad (5.36)$$

$C_r(\mu)$ und $C_i(\mu)$ bezeichnen den Real- und Imaginärteil von $C(\mu) = \text{Tr}[\rho D(\mu)]$ an der Stelle

$$\mu = ig\tau e^{i\phi} \quad (5.37)$$

im „reziproken Phasenraum“. Der Betrag $|\mu| = g\tau$ ist gleich der skalierten Wechselwirkungszeit, während der Winkel ϕ durch die Phase des externen Oszillators bestimmt ist. Die im Experiment beobachtete Inversion ist an den Nullstellen des Sinus gleich dem Real- und an denen des Cosinus gleich dem Imaginärteil der charakteristischen Funktion. Mit $n = 0, 1, 2, \dots$ gilt also:

$$I = (-1)^n C_r(\mu) \quad \text{für} \quad g\tau = n\pi / \left(2\sqrt{|\alpha|^2 + 1}\right) \quad (5.38)$$

$$I = (-1)^{n+1} C_i(\mu) \quad \text{für} \quad g\tau = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi / \left(2\sqrt{|\alpha|^2 + 1}\right). \quad (5.39)$$

Man kann auf diese Weise beliebige Punkte von $C(\mu)$ vermessen.

Nach Gl.(5.38) und (5.39) sind Real- und Imaginärteil der charakteristischen Funktion auf einen Wertebereich zwischen -1 und +1 beschränkt. Dieser bekannten Eigenschaft wird hier eine physikalische Bedeutung gegeben.

5.3.3 Beispiel „Schrödingerkatze“

Die Methode zur Messung der charakteristischen Funktion soll nun anhand einer quantenmechanischen Superposition zweier kohärenter Felder $|\pm\beta\rangle$ demonstriert werden. Die Resonatormode befinde sich also in folgendem Zustand

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} (|\beta\rangle + |-\beta\rangle) \quad \text{mit} \quad \mathcal{N}^2 = (2 + 2e^{-2|\beta|^2})^{-1}. \quad (5.40)$$

Man bezeichnet ihn auch als „Schrödinger-Katzen-Zustand“ in Anlehnung an Schrödingers berühmtes Gedankenexperiment⁴ [20]. Wie wir auf Seite 38 gesehen haben, ist es prinzipiell möglich, solche Zustände im Ein-Atom-Maser (näherungsweise) zu präparieren.

Die charakteristische Funktion für Gl.(5.40) läßt sich mit Hilfe der Definition Gl.(5.27) analytisch angeben:

$$\begin{aligned} C(\mu) &= \mathcal{N}^2 \left(\langle\beta| D(\mu) |\beta\rangle + \langle-\beta| D(\mu) |-\beta\rangle + \langle\beta| D(\mu) |-\beta\rangle + \langle-\beta| D(\mu) |\beta\rangle \right) \\ &= 2\mathcal{N}^2 e^{-2|\beta|^2 - \frac{1}{2}|\mu|^2} \left\{ \cos[2(\mu_i\beta_r - \mu_r\beta_i)] + \cosh[2(\mu_r\beta_r + \mu_i\beta_i)] \right\}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Dabei haben wir von Gl.(A.8) Gebrauch gemacht und die komplexen Größen μ und β in Real- und Imaginärteil aufgespalten.

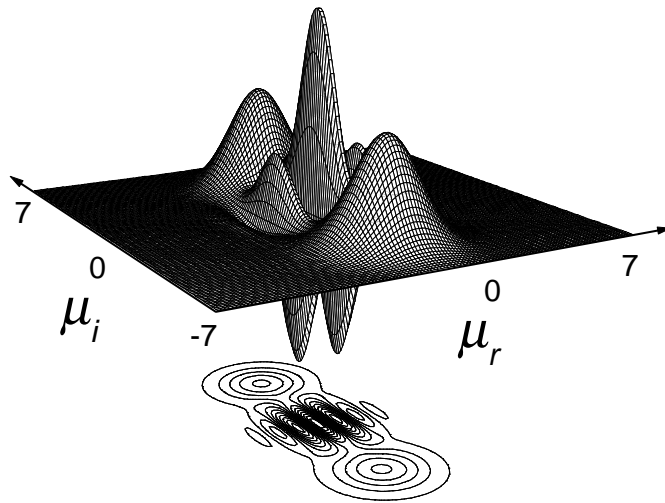


Abbildung 5.9: Wigner'sche charakteristische Funktion für einen „Schrödinger-Katzen-Zustand“ nach Gl. (5.40) mit den Amplituden $\beta = \pm 2i$. Die Gestalt ist in diesem Fall identisch mit derjenigen der Wigner-Funktion, die Interpretation der Gauß'schen Hügel und der Oszillationen um den Ursprung jedoch gerade entgegengesetzt.

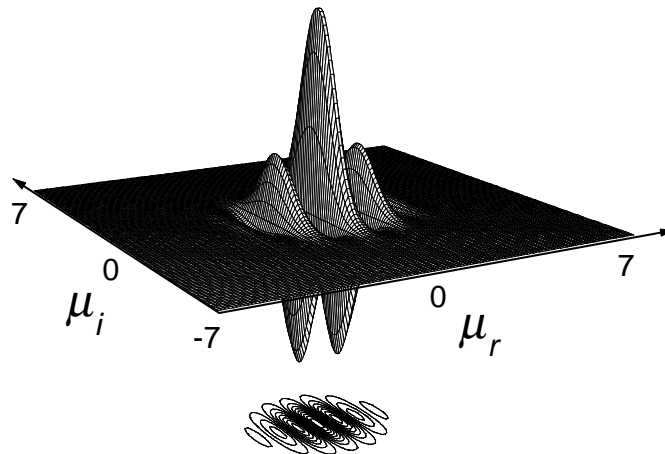


Abbildung 5.10: Wigner'sche charakteristische Funktion für ein klassisches Gemisch zweier kohärenter Zustände mit Amplituden $\beta = \pm 2i$.

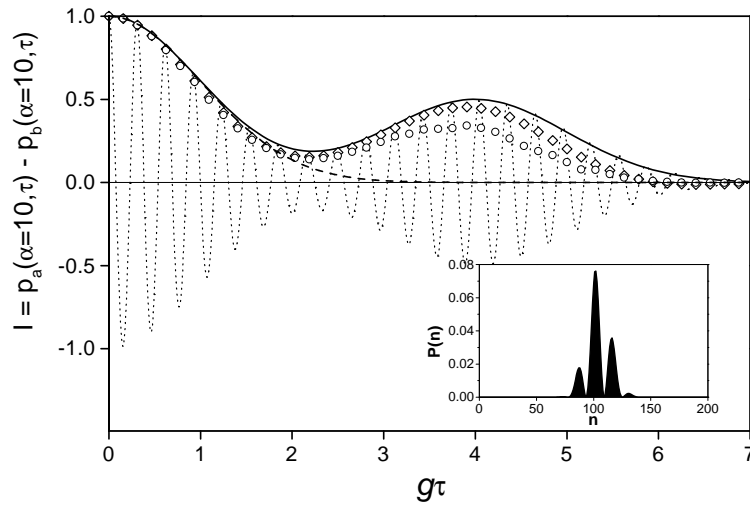


Abbildung 5.11: Vergleich zwischen Inversion der Atome als Funktion der skalierten Wechselwirkungszeit $g\tau$ (punktierte Kurve) und einem Schnitt durch die charakteristische Funktion $C(\mu = ig\tau)$ in Abb. 5.9 entlang der imaginären Achse (durchgezogene Linie) für konstantes $\alpha = 10$. Die Wechselwirkungszeiten, die der Bedingung Gl. (5.38) genügen, sind mit Rauten markiert. Eine Wechselwirkungszeit-Verteilung von $\Delta\tau/\tau = 1\%$ führt zu einem schwächeren Kontrast (markiert mit Kreisen). Die gestrichelte Kurve zeigt den entsprechenden Schnitt für den Fall des klassischen Gemischs in Abb. 5.10. Im Einschub ist die Photonenzustand-Verteilung des verschobenen Katzenzustandes dargestellt.

Für Wigner-Verteilungen, die zum Ursprung punktsymmetrisch sind, ist die zugehörige charakteristische Funktion (wie man sich anhand von Gl.(5.28) klar macht) rein reell, so auch Gl.(5.41). Sie ist in Abb. 5.9 für $\beta = 2i$ dargestellt. Weiter hat der Katzenzustand Gl.(5.40) die Eigenschaft, daß die Matrixelemente ρ_{mn} in Fock-Darstellung für ungerades m allesamt gleich null sind. In diesem Fall besitzen Wigner- und zugehörige charakteristische Funktion *dieselbe Gestalt*, obgleich umskaliert und in unterschiedlichen Räumen definiert (Gl. (5.104) in Lit. [67]). Die *Interpretation* ist für beide jedoch gerade entgegengesetzt: Während die beiden spiegelsymmetrischen Gauß'schen Hügel der Wigner-Verteilung das klassische Gemisch der beiden Amplituden $\pm\beta$ repräsentieren, entstehen diese Hügel bei der charakteristischen Funktion durch die *Kohärenz* der Überlagerung. Die Oszillationen um den Ursprung hingegen, die bei der Wigner-Verteilung bekanntlich die Kohärenz der Superposition anzeigen, entstehen bei der charakteristischen Funktion durch den inkohärenten Anteil. Der Fall des klassischen Gemischs ohne definierte Phasenbeziehung ist in Abb. 5.10 dargestellt. Der Cosinus Hyperbolicus in Gl.(5.41) fällt dann weg.

Nun betrachten wir in Abb. 5.11 die Inversion I als Funktion der Wechselwirkungszeit, die nach Gl.(5.32) für den um den konstanten Wert $\alpha = 10$

⁴Dem ursprünglichen Gedanken von Schrödinger kommt allerdings der verschränkte Atom-Feld-Zustand in Gl.(3.45) auf Seite 37 wesentlich näher.

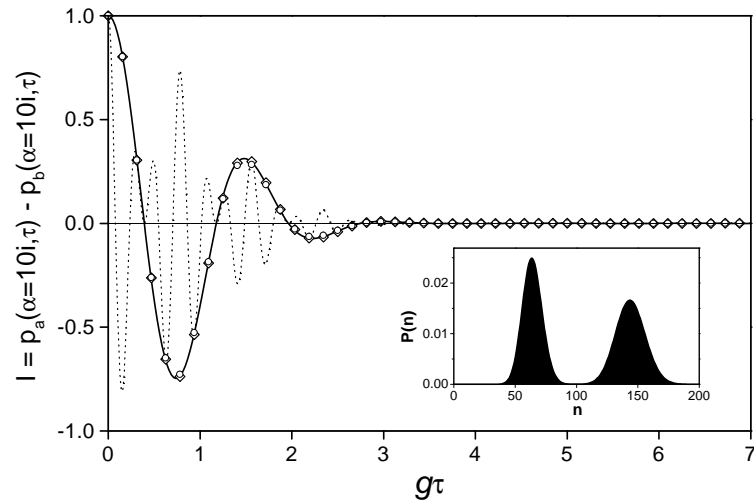


Abbildung 5.12: Dargestellt ist dasselbe wie in Abb. 5.11, nun jedoch für $\alpha = 10i$. Das entspricht einem Schnitt durch die charakteristische Funktion in Abb. 5.9 entlang der reellen Achse.

verschobenen Katzenzustand Gl.(5.40) berechnet wurde (punktierte Kurve). Die Enveloppe der schnellen Rabi-Oszillationen gibt in sehr guter Näherung den Schnitt durch die charakteristische Funktion entlang der imaginären Achse $\mu = ig\tau$ (durchgezogene Linie) wieder, wie von der analytischen Näherung Gl.(5.36) vorhergesagt. Der entsprechende Schnitt für den Fall des inkohärenten Gemischs (Abb. 5.10) ist gestrichelt eingezeichnet. Auch er wird von der Einhüllenden der Rabi-Oszillationen praktisch perfekt wiedergegeben, die der Übersichtlichkeit halber nicht eingezeichnet wurden.

Die mit Rauten markierten Stellen bezeichnen I für die der Bedingung in Gl.(5.38) genügenden Wechselwirkungszeiten. Im allgemeinen Fall [für komplexwertige Funktion $C(\mu)$] ist diese Bedingung entscheidend. Man erkennt, daß die Phase der Rabi-Oszillationen leicht von derjenigen der Näherung Gl.(5.36) abweicht. Das ist nicht überraschend, da $|\alpha|$ nur mäßig groß gewählt wurde. Dennoch wird die entscheidende Eigenschaft, nämlich das Wiederaufleben der Rabi-Oszillationen, das die *Kohärenz* der Überlagerung anzeigt, klar aufgelöst. Das gilt auch dann noch, wenn man eine Gauß'sche Geschwindigkeitsverteilung mit einer normierten Standardabweichung von $\Delta\tau/\tau = 1\%$ (wie sie im Experiment in etwa erreicht werden kann) zugrunde legt (kreisförmige Markierungen).

Der Einschub in Abb. 5.11 zeigt die Photonenzahlstatistik der verschobenen Schrödingerkatze. Die Kohärenz der Überlagerung erscheint hier als *Interferenzmuster* (siehe Lit. [95]). So wie die Energiedifferenz zwischen den einzelnen Photonenzahlen für die Revivals in den Inversionsoszillationen (die erst bei viel größeren Wechselwirkungszeiten auftreten und in unserer Näherung nicht enthalten sind) verantwortlich ist, so entsteht das Wiederaufleben der Oszillationen hier bereits bei kurzen Wechselwirkungszeiten aufgrund der Energie-

differenz zwischen den einzelnen Maxima in der Photonenzahlstatistik. Im Fall des statistischen Gemischs sind die Photonenzahlen einfach Poisson-verteilt, und die Oszillationen zeigen kein entsprechendes „Satelliten-Revival“.

Abb. 5.12 zeigt die Situation für $\alpha = 10i$, die einem Schnitt durch die charakteristische Funktion entlang der *reellen* Achse entspricht. Die beiden Maxima in der Photonenzahlstatistik des verschobenen Zustandes (siehe Einschub) entsprechen in diesem Fall den beiden Amplituden $\pm\beta$. Ihre Differenzfrequenz ist für die Modulation der Rabi-Oszillationen verantwortlich, wodurch auch hier der Verlauf der charakteristischen Funktion in sehr guter Übereinstimmung wiedergespiegelt wird. Kohärente Überlagerung und Gemisch sind in diesem Schnitt praktisch ununterscheidbar.

Kapitel 6

Aufbau des Experiments und vorbereitende Messungen

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde zusammen mit Gunter Antesberger [66] der bereits im Lit. [96] begonnene Aufbau eines neuen, schwingungsgedämpften Ein-Atom-Maser-Experimentes vervollständigt.

6.1 Hauptkomponenten des Experiments

6.1.1 Der Ein-Atom-Maser-Aufbau

Der Ein-Atom-Maser besteht im wesentlichen aus einem Atomofen, einem Diagnosetopf und einem Kryostaten. Diese drei Komponenten bilden zusammen das Hochvakuum-System, das im gekühlten Zustand mit Hilfe von Turbomolekularpumpen auf einen Enddruck von ca. $2 \cdot 10^{-7}$ mbar gebracht wird.

Im Atomofen befindet sich ein mit Rubidium gefülltes Edelstahlgefäß, das im Betrieb elektrisch auf etwa 200°C geheizt wird. Der Rubidiumdampf entweicht über eine Düse von 0,3 mm Durchmesser, die separat geheizt werden kann, um das Kondensieren an der Öffnung (und damit deren Verstopfung) zu verhindern. Da die Austrittswahrscheinlichkeit der Atome aus dem Ofen proportional zu ihrer Geschwindigkeit ist, weisen sie eine *modifizierte* Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung auf [97]. Die *wahrscheinlichste* Geschwindigkeit (Maximum der Verteilung) liegt bei $\sqrt{3k_B T/m}$ und beträgt etwa 380 m/s. Die *mittlere* Geschwindigkeit ist um den Faktor $\sqrt{3\pi/8}$ höher, also ca. 412 m/s. Um das Hochvakuum aufrecht zu erhalten, werden die entwichenen Atome, abgesehen von einem begrenzten Raumwinkel in Richtung Kryostat, sofort wieder an einem stickstoffgekühlten Kupferschild kondensiert .

Ein schräg nach oben laufender Teil des divergenten Atomstrahls gelangt in den Diagnosetopf (Abb. 6.1). Er dient als Hilfsmittel, um das Laserlicht auf die Anregungsfrequenz der Atome in den gewünschten Rydberg-Zustand zu stabilisieren. Da die Laserfrequenz zur Geschwindigkeitsselektion der Atome jedoch gegenüber diesem Übergang verstimmt werden muß (Abschnitt 6.3), geschieht die Laseranregung im homogenen elektrostatischen Feld eines Kondensators unter Ausnutzung des Stark-Effekts. Der Nachweis der Rydberg-Atome er-

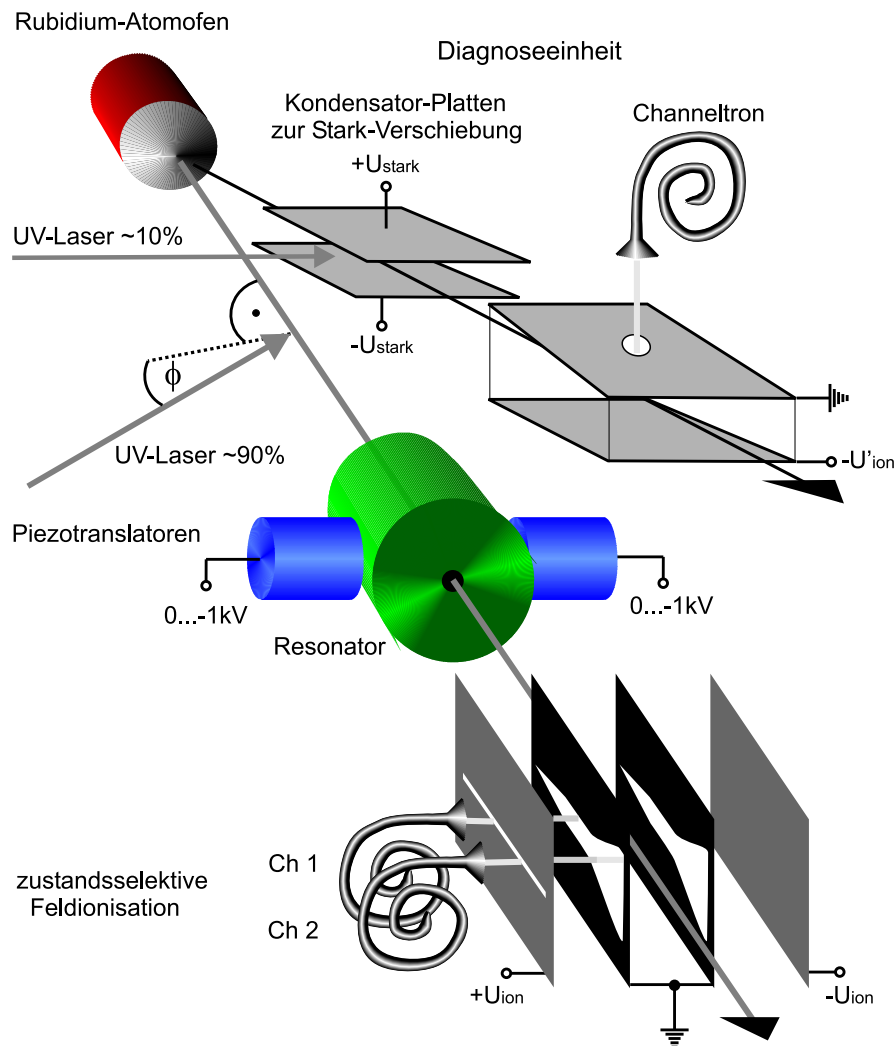


Abbildung 6.1: Schema des Ein-Atom-Maser-Aufbaus. Rubidium-Atome in einem dünnen, hochkollimierten Strahl werden durch einen UV-Laser unter dem Winkel Φ zur Senkrechten geschwindigkeitsselektiv in einen Rydberg-Zustand angeregt. Während der Durchflugszeit durch einen mit Piezotranslatoren stimbaren, supraleitenden Resonator hoher Güte findet die Atom-Feld-Wechselwirkung statt. Die TE_{121} -Mode ist dabei auf einen atomaren Übergang zu einem energetisch wenig tiefer liegenden Rydberg-Zustand mit außergewöhnlich großem elektrischen Dipol-Übergangsmatrixelement gestimmt. Zusammen mit der hohen Resonatorgüte ist dann die Bedingung für ein stark gekoppeltes Atom-Feld-System geschaffen. Der Übersichtlichkeit wegen ist die Ankopplung eines externen Synthesizers an den Resonator nicht eingezeichnet (siehe dazu Abb. 1.1). Der Zustand der Atome nach Verlassen des Resonators wird anschließend durch Ionisation im sanft ansteigenden, durch zwei Schlitzplatten greifenden elektrischen Feld bestimmt. Zur Stabilisierung der Laserfrequenz dient die Diagnoseeinheit, zu der ein zweiter Atomstrahl geleitet wird. Dort geschieht die Laseranregung im homogenen elektrostatischen Feld eines Kondensators unter Ausnutzung des Stark-Effekts. Die als Referenz dienenden Energieniveaus können dadurch beliebig verschoben werden. (Das dargestellte Schema ist identisch mit einem zweiten Garckinger Maser-Aufbau.)

folgt durch Ionisation in einem allmählich ansteigenden elektrischen Feld. Für den im Experiment verwendeten $63P_{3/2}$ Zustand des Isotops ^{85}Rb beträgt die Ionisationsfeldstärke nur noch 24,1 V/cm. Die dabei freigesetzten Valenzelektronen werden von einem Elektronenvervielfacher (Channeltron) detektiert.

Zentraler Bestandteil des Aufbaus ist der supraleitende Mikrowellenresonator aus Niob (Sprungtemperatur $T_c = 9,2$ K), in dem (nach Kollimation des Atomstrahls durch ein Peilrohr von 0,3 mm Durchmesser und Laseranregung in einen Rydberg-Zustand) die Atom-Feld-Wechselwirkung stattfindet. Er befindet sich in einem ^3He -Verdampfungskryostaten¹, in dem mit komplettem Versuchsaufbau eine Temperatur von 700 mK erreicht wird. Einzelheiten zum Kryostaten werden in Lit. [96] beschrieben.

Die Abstimmung der Modenfrequenz auf den atomaren Übergang erfolgt durch mechanische Deformation des Resonators in der Mitte des Zylindermantels (Abb. 6.1). Der Resonator sitzt dazu in einer Quetschvorrichtung, die zunächst über eine Schraubenzieher-Durchführung von außen grob, und dann mit zwei Piezotranslatoren fein bedient wird. Im ideal kreisrunden Zylinder-Resonator existieren zwei zueinander senkrecht polarisierte, entartete Moden. Durch Deformation wird einer der Dipolpartner zu höheren, der andere zu niedrigeren Frequenzen verstimmt. Gleichzeitig erfolgt eine Zwangspolarisation: Die Moden richten sich jetzt entlang der Hauptachsen der Deformationsellipse aus [98].

Die aus dem Resonator austretenden Atome werden im sanft anwachsenden elektrischen Feld zwischen zwei geerdeten Schlitzplatten (Abb. 6.1) ionisiert. Dabei lassen sich beide Maser-Zustände aufgrund ihrer unterschiedlichen Ionisationsenergien voneinander unterscheiden (Abschnitt 6.4).

Ein wichtiger Aspekt bei den in der vorliegenden Arbeit gemachten Untersuchungen mit externer Einkopplung in einen Resonator sehr hoher Güte ist eine starke Dämpfung mechanischer Schwingungen. Aus diesem Grund wurde der gesamte Ein-Atom-Maser-Aufbau auf einen speziell angefertigten, aktiv schwingungsgedämpften Lasertisch² gestellt. Die Tischplatte wird bei Aktivierung der Schwingungsdämpfung durch Druckluft um einen knappen Zentimeter angehoben und auf $\pm 0,2$ mm in der Höhe stabil gehalten.

6.1.2 Das Lasersystem

Zur einstufigen Anregung des oberen Maser-Zustandes (das ist der $63P_{3/2}$ Zustand des Isotops ^{85}Rb) wird kontinuierlich abstimmbares, schmalbandiges Laserlicht einer Wellenlänge von etwa 297 nm benötigt.

Zu diesem Zweck wird mit einem Argon-Ionenlaser³ mit einer Ausgangsleistung von ca. 6 W im Multilinen-Betrieb ein Farbstoff-Ringlaser⁴ gepumpt, der mit dem Farbstoff Rhodamin 6G betrieben wird. In der Ringmode des Farbstoff-Lasers befindet sich ein nichtlinearer Kristall zur internen Frequenzverdopplung einer Wellenlänge von 594 nm. Das entstehende UV-Laser-Licht

¹Es wird ein kommerzieller Kryostat der Firma *Oxford Instruments* eingesetzt.

²der Firma *Melles Griot*

³Modell Innova 300 der Firma *Coherent*.

⁴Modell 380D der Firma *Spectra-Physics*.

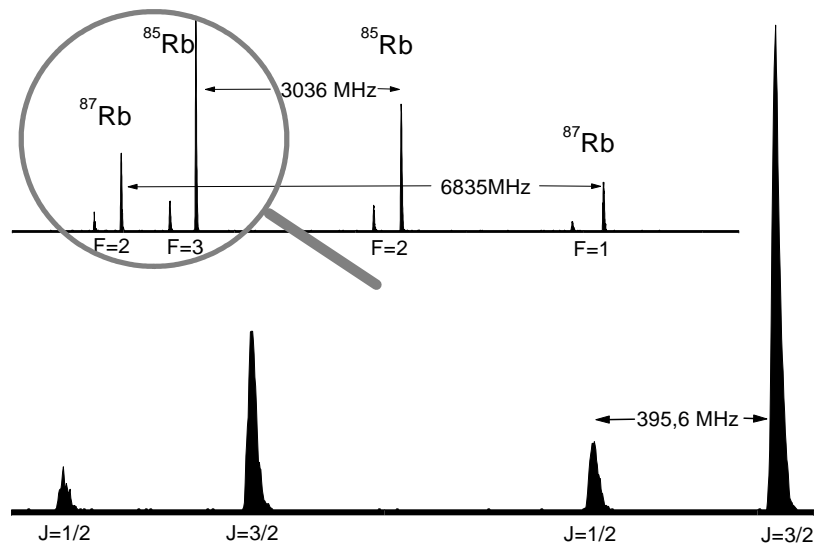


Abbildung 6.2: Hochauflösende Laserspektroskopie an einem Rubidium-Atomstrahl. Dargestellt ist das Anregungsspektrum von den $5S_{1/2}$ in die $6P$ -Zustände. Die acht beobachteten Linien werden im Termschema Abb. 6.3 erklärt. Die untere Aufnahme ist eine Vergrößerung des Bereichs der „Lupe“.

hat bei der gewünschten Wellenlänge eine Linienbreite von etwa 2 MHz und liefert eine Leistung von ca. 6 mW. Es eignet sich damit gut zur selektiven Anregung der im Experiment verwendeten hochliegenden Rydberg-Zustände.

Zur Frequenzmessung wurde ein Wellenzahl-Messer (Lambdameter) aufgebaut. Ein geringer Teil des Lichtes wird dazu aus der Farbstoff-Laser Ringmode ausgekoppelt und mit demjenigen eines frequenzstabilisierten Helium-Neon-Lasers⁵ gemischt, der als Referenzfrequenz dient. In einem Michelson-Interferometer wird die Wegstrecke beider interferierender Wege mit einem auf einem Luftkissen fahrenden Wagen variiert und die Anzahl der Interferenzmaxima für beide Frequenzen gezählt. Aus ihrem Verhältnis wird die unbekannte Wellenlänge bestimmt. Die Frequenzauflösung dieses Lambdameters ist lediglich durch die auf dem Weg des Wagens zustandekommende Anzahl von Interferenzstreifen begrenzt und liegt im verwendeten Wellenlängenbereich bei 300 MHz.

6.2 Laser-Spektroskopie mit Rydberg-Atomen

Rubidium ist ein Alkaliatom. Es besitzt daher ein schwach gebundenes Valenzelektron und im übrigen nur abgeschlossene Schalen (kugelsymmetrisch und Drehimpuls null) aus $(Z-1)$ kernnahen Rumpfelektronen (Kernladungszahl Z). In großer Entfernung vom Kern spürt das Valenzelektron praktisch ein reines Coulomb-Potential, bei Annäherung an den Kern hingegen eine

⁵Modell 200 der Firma *Coherent*.

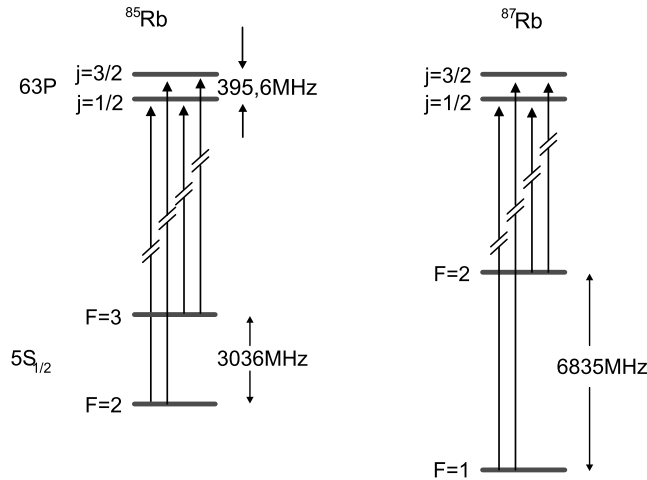


Abbildung 6.3: Ausschnitt aus dem Termschema von Rubidium zur Erklärung des Spektrums in Abb. 6.2 (die Energieniveaus sind nicht maßstabsgetreu).

zunehmende Abweichung von der $1/r$ -Abhängigkeit. Diesem Umstand wird in der Quantendefekt-Theorie [99] durch Einführung einer *effektiven* (nicht ganzzahligen) *Hauptquantenzahl* n^* Rechnung getragen. Viele Eigenschaften von Alkali-Rydberg-Zuständen skalieren mit einfachen Potenzen von n^* (siehe z. B. [51]). So gilt beispielsweise für die Energieniveaus die Rydberg-Formel (mit Rydberg-Konstante R)

$$E_{n,l} = -\frac{R}{[n^*(n,l)]^2}. \quad (6.1)$$

Mit den in Lit. [100, 101] experimentell bestimmten Quantendefekten für Rubidium lassen sie sich sehr genau berechnen und damit im Experiment die entsprechenden Spektrallinien auffinden.

In Abb. 6.2 ist das Anregungsspektrum von den $5S_{1/2}$ Grundzuständen in die $63P$ -Rydberg-Zustände dargestellt. Die Messungen wurden bei der Temperatur des flüssigen Stickstoffs (77 K) durchgeführt. Natürliches Rubidium kommt in den Isotopen ^{85}Rb (72,1%, Kernspin $I = 5/2$) und ^{87}Rb (27,9%, $I=3/2$) vor (siehe Lit. [102]; dort findet man auch weitere charakteristische Eigenschaften von Rubidium). Dem Termschema (Abb. 6.3) entnimmt man das Zustandekommen der acht beobachteten Linien. Die *Hyperfeinstruktur-Aufspaltung* der Grundzustände ist wesentlich größer als die *Feinstruktur-Aufspaltung* der Rydberg-Zustände.

Die Breite der Spektrallinien von ca. 10 MHz kommt hauptsächlich durch Doppler-Verbreiterung aufgrund nicht perfekt senkrechter Anregung zustande. Das ungewöhnliche Intensitätsverhältnis der Feinstrukturkomponenten beruht auf relativistischen Effekten, die erst bei Rydberg-Atomen in Erscheinung treten (siehe z. B. Lit. [103]).

6.3 Geschwindigkeitsselektion

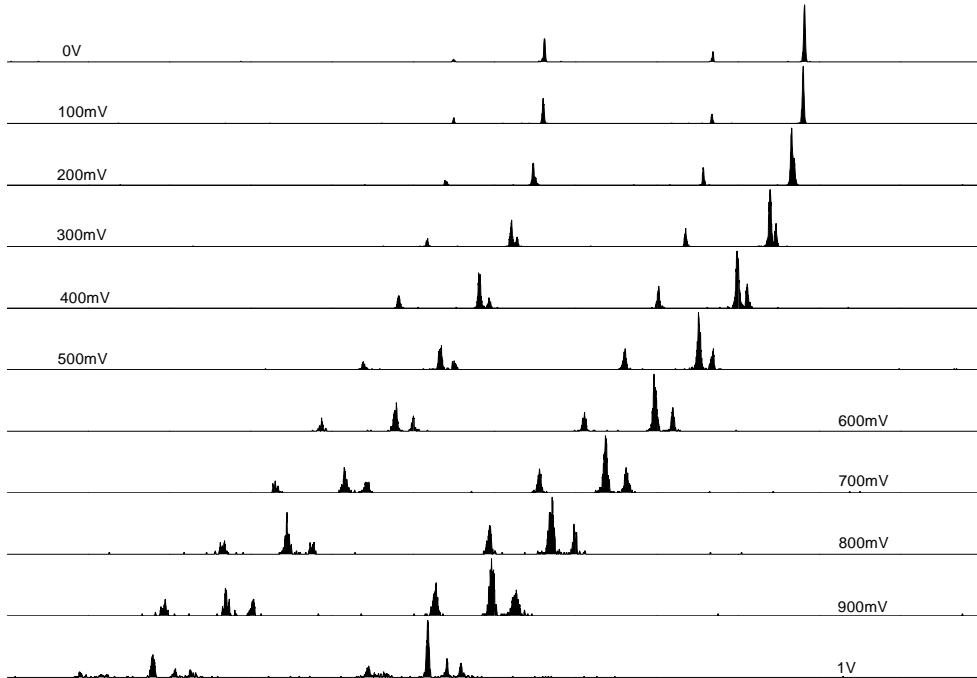


Abbildung 6.4: Stark-Verschiebung der in Abb. 6.2 vergrößert dargestellten vier Spektrallinien der Rubidium-63P-Zustände im homogenen elektrischen Feld. Bei jedem Spektrum ist die an den Kondensatorplatten anliegende Spannung angegeben. Man erkennt die quadratische Abhängigkeit der Frequenzverschiebung von der Feldstärke. Außerdem spalten die $j = 3/2$ -Zustände in zwei Linien auf.

Die exakte Kontrolle der Wechselwirkungszeit zwischen Atom und Feld spielt im Ein-Atom-Maser eine zentrale Rolle. Er unterscheidet sich dadurch stark vom gewöhnlichen Maser, bei dem die Unbestimmtheit dieses Parameters die typischen mikroskopischen Effekte herausmittelt [Abschnitt 3.1.4, Gl. (3.30)]. Die Wechselwirkungszeit ist gleich der Durchflugszeit der Atome durch den Resonator; man benötigt daher eine gute Geschwindigkeitsselektion.

6.3.1 Schiefe Laseranregung

Wir verwenden die Methode der *schiefen Anregung*. Dabei wird, unter Ausnutzung des Doppler-Effektes, nur eine gewisse Geschwindigkeitsklasse der Atome angeregt, während alle anderen das Experiment im Grundzustand passieren. Der Laser wird dazu unter einem Winkel ϕ zur Orthogonalen auf den Atomstrahl gerichtet, und zwar so, daß die Atome sich der parallelen Komponente des Lichtes entgegenbewegen (Abb. 6.1). Sie „sehen“ daher eine *blauverstimmte* Lichtfrequenz. Verstimmt man nun den Laser gegenüber der Resonanz ν_0 bei *ruhendem* Atom (bzw. bei senkrechter Anregung) um den Wert $\Delta\nu$ ins Rote, so erfüllen nur diejenigen Atome die Resonanzbedingung, die eine Ge-

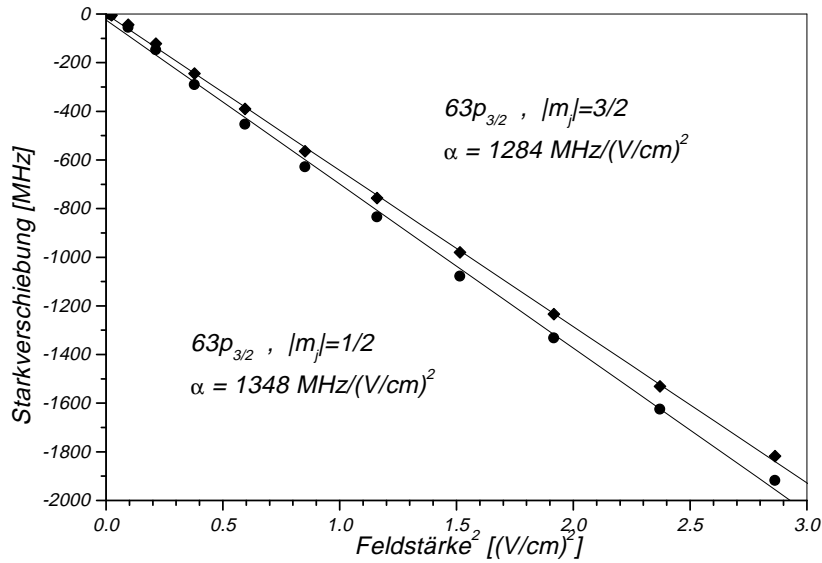


Abbildung 6.5: Bestimmung der Polarisierbarkeiten für die im E-Feld aufgespaltenen $^{85}\text{Rb } 63P_{3/2}$ -Zustände aus der Messung in Abb. 6.4. Das Ergebnis ist im Bild eingetragen.

schwindigkeit

$$v = \frac{c}{\nu_0} \frac{1}{\sin \phi} \Delta\nu \quad (6.2)$$

besitzen (nichtrelativistischer Doppler-Effekt).

Die Schärfe des selektierten Geschwindigkeitsintervalls wird bestimmt durch die Divergenz des Atomstrahls, die Durchflugverbreiterung der Atome, die Linienbreite des Lasers und durch die Größe des Winkels ϕ . Je größer er gewählt wird, desto stärker muß der Laser zur Selektion einer gewissen Geschwindigkeit verstimmt werden. Daher wird die Selektivität mit zunehmendem Winkel besser. Die Rate der angeregten Atome nimmt natürlich entsprechend ab. Im Experiment wurde ein Winkel von etwa 12° gewählt. Die relative Auflösung der Wechselwirkungszeit $\Delta\tau/\tau$ läßt sich mit Flugzeitmessungen bestimmen; sie liegt im Prozentbereich [40].

6.3.2 Stark-Verschiebung des Spektrums

Zur definierten Rotverstimmung um einen Wert $\Delta\nu$ nach Gl.(6.2) benötigt man eine Referenz, auf die man den Lasers stabilisieren kann. Dazu dient der Diagnosetopf. Dort wird das Spektrum unter Ausnutzung des Stark-Effektes im homogenen elektrostatischen Feld eines Plattenkondensators (Abb. 6.1) zu niedrigeren Frequenzen hin verschoben. Die Messung des Stark-verschobenen Spektrums der in Abb. 6.2 vergrößert dargestellten vier Linien wird in Abb. 6.4 präsentiert. Die Niedrigdrehimpuls-Zustände zeigen einen in niedrigster

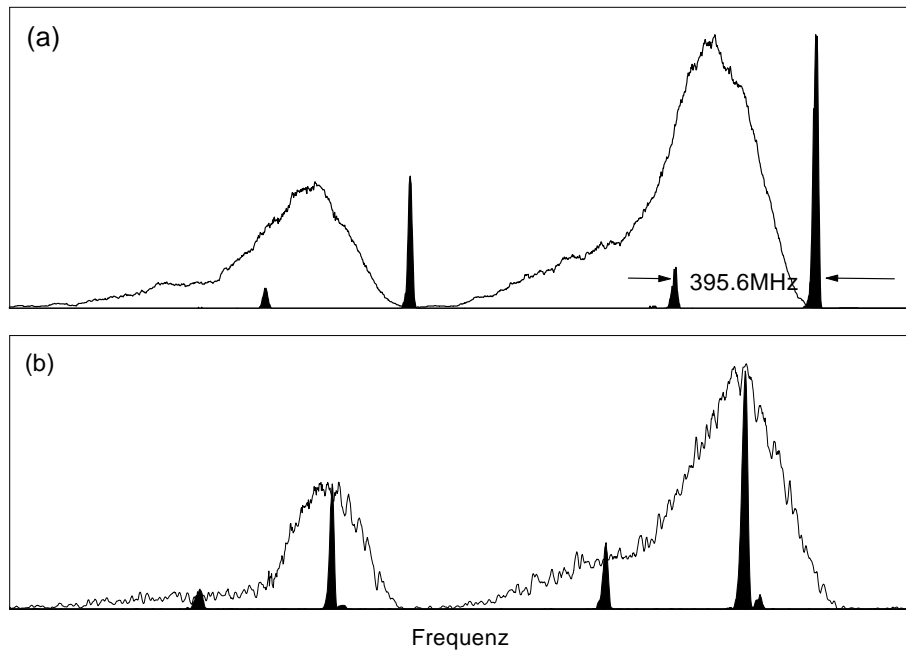


Abbildung 6.6: (a): Die ersten vier Spektrallinien der Rubidium-63P-Zustände (s. Abb. 6.2, unten) bei senkrechter Anregung in der Diagnoseeinheit (scharfe Resonanzen) und bei schräger Anregung (unter einem Winkel von 12° zur Senkrechten) im Kryostaten (Doppler-verbreiterte Linien). Bei den verbreiterten Linien wird proportional zur Frequenz nur eine gewisse Geschwindigkeitsklasse angeregt. (b): Das unverbreiterte Spektrum wird zusätzlich durch den Stark-Effekt verschoben. Die ^{85}Rb $63P_{3/2}$, $|m_j| = 1/2$ -Linie kann jetzt als Frequenzreferenz für den Laser dienen. Sie wurde hier zum Maximum der verbreiterten Linie hingeschoben. Die $|m_j| = 3/2$ -Linie wird durch lineare Polarisierung des Lasers parallel zum E-Feld unterdrückt.

Ordnung quadratischen Stark-Effekt [104, 105, 106] der Form

$$\Delta\nu = -\frac{1}{2}\alpha E^2 \quad (6.3)$$

mit der Polarisierbarkeit α und der elektrischen Feldstärke E . Die $P_{3/2}$ -Zustände spalten zusätzlich auf in $|m_j| = 1/2$ mit etwas kleinerer, und $|m_j| = 3/2$ mit etwas größerer Polarisierbarkeit.

In Abb. 6.5 wurde die Stark-Verschiebung für den $63P_{3/2}$ -Zustand von ^{85}Rb gegen das Quadrat der elektrischen Feldstärke aufgetragen und die enorm hohe Polarisierbarkeit des Rydberg-Zustandes bestimmt.

Nimmt man am Kryostaten das durch die schräge Anregung Doppler-verbreiterte, und gleichzeitig dazu am Diagnosetopf das unverbreiterte und *nicht* Stark-verschobene Spektrum auf, so ergibt sich die in Abb. 6.6 (a) dargestellte Situation. Proportional zur Frequenz ändert sich nach Gl.(6.2) beim Doppler-verbreiterten Spektrum auch die Geschwindigkeit der angeregten Atome.

Nun kann man das Spektrum, das am Diagnosetopf aufgenommen wird, durch Einschalten der Plattenspannung an beliebige Stelle (allerdings nur nach

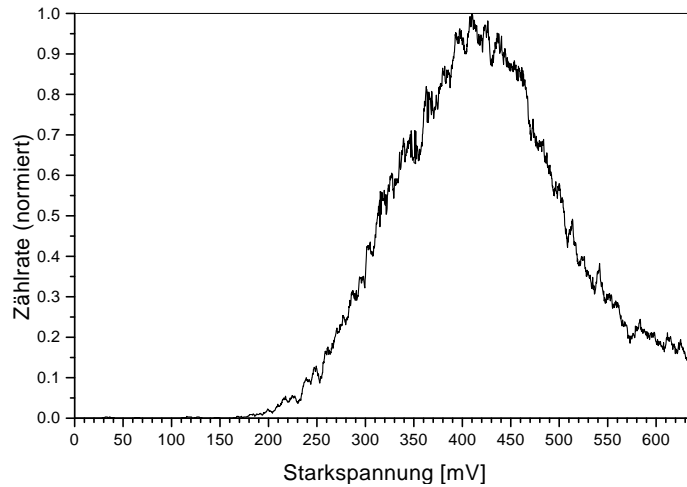


Abbildung 6.7: Bei langsamer Veränderung der Plattenspannung U_{Stark} in der Diagnoseeinheit folgt die Laserfrequenz der verursachten Frequenzverschiebung. Dadurch stimmt sich die Laserfrequenz über die im Kryostaten aufgenommene Doppler-verbreiterte Linie. Auf diese Weise läßt sich eine exakt kontrollierte Variation der Wechselwirkungszeit durchführen.

„links“) verschieben und die Frequenz des Lasers auf eine geeignete Spektrallinie stabilisieren. In Abb. 6.6 (b) wurde beispielsweise die starke $^{85}\text{Rb } 63P_{3/2}$ -Linie mit einer Plattenspannung von $U_{Stark} = \pm 410\text{mV}$ gerade zum Maximum der Doppler-verbreiterten Linie geschoben. Die Aufspaltung in $|m_j| = 3/2$ und $|m_j| = 1/2$ wurde durch lineare Polarisierung des Laserlichtes parallel zur E-Feld Richtung mit einem $\lambda/4$ -Plättchen verhindert. Dann gilt die Auswahlregel $\Delta m_j = 0$, und die $|m_j| = 3/2$ Linie wird vom $5S_{1/2}$ -Zustand aus nicht angeregt. Man erkennt sie in der Abbildung nur noch andeutungsweise.

Die Stabilisierung des Lasers auf eine Spektrallinie geschieht dadurch, daß seine Frequenz ständig computergesteuert zwischen zwei Werten hin- und herspringt, deren Differenz klein ist verglichen mit der Breite der Linien am Diagnostopf. Aus der Differenzzählrate wird ein Fehlersignal berechnet, das die Laserfrequenz in der Regel für mehrere Stunden bei maximaler Zählrate stabilisiert. Man kann sogar durch langsames Verändern der Spannung U_{Stark} an den Kondensatorplatten die Referenzlinie zeitlich bewegen, während die Stabilisierung dieser Veränderung folgt. Dadurch läßt sich ein exakt kontrollierter Frequenz-Scan und gleichbedeutend damit ein Scan über die Wechselwirkungszeiten durchführen (Abb. 6.7).

6.4 Zustandsselektive Feldionisation

Der Nachweis der Rydberg-Zustände nach der Wechselwirkung erfolgt durch Feldionisation und Detektion der freigesetzten Elektronen durch Channeltrons. Die Tunnelrate hängt dabei – unter der Voraussetzung eines adiabatischen Ionisationspfades – so empfindlich von der Feldstärke ab, daß sich eine kriti-

sche Feldstärke angeben läßt, bei der die Ionisation fast sprunghaft einsetzt [104, 106]. Durch Anlegen eines äußeren Feldes wird das Potential asymmetrisch verkippt, wodurch ein Sattelpunkt entsteht. Eine einfache Analyse ergibt für den kritischen Wert E_{kr} , bei dem die Energie des Elektrons mit dem Sattelpunkt zusammenfällt, das Elektron also im klassischen Sinne ungebunden ist, folgenden Ausdruck [106]:

$$E_{kr} = \frac{3,2 \cdot 10^8}{n^{*4}} [V/cm]. \quad (6.4)$$

Er ist bereits in recht guter Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen [106, 104]. Für das obere Maserniveau (also den $63P_{3/2}$ -Zustand) ergibt das eine Feldstärke von 24,1 V/cm, für das untere Maserniveau (das ist der $61D_{5/2}$ -Zustand) hingegen 25,3 V/cm.

Der Aufbau zur zustandsselektiven Feldionisation ist folgender (siehe Abb. 6.1): Zwei geerdete Schlitzzplatten befinden sich innerhalb zweier Kondensatorplatten, die symmetrisch auf einer Spannung von $\pm U_{ion}$ (Größenordnung 100 V) liegen. Die Atome erfahren ein durch die Schlitze greifendes, in Atomstrahlrichtung *sanft* anwachsendes elektrisches Feld. Der Feldanstieg muß hinreichend langsam erfolgen, um einen *adiabatischen* Ionisationspfad zu gewährleisten. Nur dann ist ein eindeutiger Rückschluß von der Ionisationsenergie auf den Zustand vor der Ionisation möglich. Im Bereich zwischen Channeltron 1 und 2 haben die Schlitze einen konstanten Abstand, wodurch das Feld hier nur äußerst schwach ansteigt. Bei geeigneter Spannung an den Kondensatorplatten ionisiert der energetisch höherliegende zweier zu unterscheidender Zustände am Anfang dieses Bereichs, und das frei werdende Elektron wird am Channeltron 1 nachgewiesen. Der tieferliegende Zustand wird hingegen erst im Bereich etwas höherer Feldstärke bei Channeltron 2 ionisiert und folglich von diesem detektiert.

Am „Trichter“ der Channeltrons liegt eine Spannung von ca. +200 V, am Ende des spiralförmigen Fortsatzes sind es etwa +3 kV. Ein einzelnes eintreffendes Elektron wird durch Sekundärelektronenemission lawinenartig verstärkt und der Strompuls elektronisch weiterverarbeitet. Der kleine Krümmungsradius vermeidet ein „Elektronenecho“ durch rückbeschleunigte Ionen.

Der Ohm'sche Widerstand der Channeltrons liegt bei Raumtemperatur bei ca. 600 M Ω . Er sollte durch Abkühlung nicht mehr als etwa zwei Größenordnungen steigen, da anderenfalls mangels nachgelieferter Elektronen ein Sättigungseffekt eintritt. Deshalb werden die Channeltrons leicht geheizt.

Um die Zustandsselektivität zu testen, kann man sich die Tatsache zunutze machen, daß die jeweils drei Zustände $(n+2)S$, $(n+1)P$ und nD durch Feldionisation praktisch nicht zu unterscheiden sind, da ihre Ionisationspfade bei sehr ähnlichen Feldstärken enden [106]. Man kann demnach den unteren Maserszustand $61D_{5/2}$ durch den $62P_{3/2}$ -Zustand ersetzen, der durch einstufige Laseranregung (Auswahlregel $\Delta l = \pm 1$) direkt erzeugbar ist.

In Abb. 6.8 ist die Zählrate beider Channeltrons über die Plattenspannung U_{ion} des Kondensators aufgetragen. Für den $63P_{3/2}$ -Zustand (obere Abbildung) steigt die Zählrate an Channeltron 2 bei etwa 65 V steil an. Die Ionisationsfeldstärke ist dort erreicht. Sobald die Atome aber bei weiterer Erhöhung

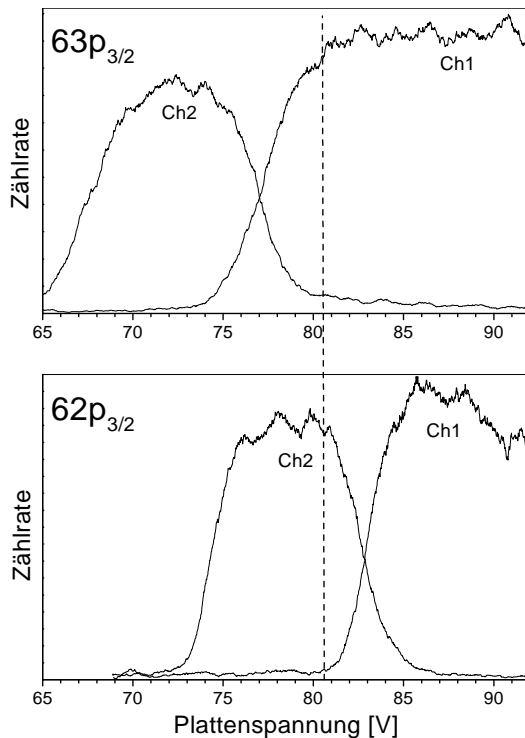


Abbildung 6.8: Test und Kalibrierung der Einheit zur zustandsselektiven Feldionisation. Bei niedriger Ionisationsspannung U_{ion} an den Kondensatorplatten werden die Rydberg-Zustände zuerst bei der höheren Feldstärke an Channeltron 2 ionisiert. Wird die Spannung erhöht, so kommt es bereits im Bereich von Channeltron 1 zur Ionisation. Durch Vergleich des Ionisationsverhaltens zweier Energieniveaus läßt sich die zu ihrer Unterscheidung geeignete Plattenspannung ermitteln (gestrichelte Linie bei 80,5 V).

der Spannung bereits an Channeltron 1 – bei der niedrigeren Feldstärke – ionisiert werden (ab ca. 75 V), steigt dessen Zählrate, während die von Channeltron 2 entsprechend abfällt, da die Atome dort ja bereits ionisiert eintreffen.

Dasselbe Ionisationsspektrum ist in der unteren Abbildung für den $62P_{3/2}$ -Zustand dargestellt. Die Ionisation erfolgt nun insgesamt bei etwas höherer Plattenspannung. Bei konstanter Spannung von 80,5 V (gestrichelte Linie) lassen sich beide Zustände unterscheiden. Die beiden Maser-Niveaus mit einer Energiedifferenz von gerade 3,8 meV können also zustandsselektiv detektiert werden.

6.5 Magnetfeldkompensation

Magnetische Felder müssen aus zwei Gründen sorgfältig kompensiert werden: Erstens führen im Resonator eingefrorene magnetische Flußschläuche zu normalleitenden Gebieten, welche die Güte stark reduzieren, und zweitens verursacht der Zeeman-Effekt eine Abweichung vom Modell des Zwei-Niveau-Atoms, die zur Aufspaltung der Resonanzkurve des Ein-Atom-Masers führt.

Zur Kompensation dienen drei Spulenpaare in Helmholtz-Konfiguration (Abstand = Radius), die mit Präzisionsstromgebern⁶ betrieben werden. Ein erster Abgleich von anfänglichen Werten um 500 mG bis unter etwa 30 mG geschieht mit einer Förster-Sonde.

Anschließend erfolgt eine wesentlich empfindlichere Methode: Die Beob-

⁶Modell Digistant 6426 der Firma *burster*

achtung der Präzessionsbewegung der magnetischen Momente einzelner Atome im Feld. Dazu ist es notwendig, die Hyperfeinstruktur-Aufspaltung des $5P_{3/2}$ -Zustandes auflösen zu können. Zu diesem Zweck wurde mit einem Diodenlaser eine Polarisationspektroskopie (Lit. [107]) an einer Rubidium-Zelle aufgebaut, mit deren Hilfe die dreifache Aufspaltung beobachtet werden kann. Die Laserfrequenz wird über einen Rückkopplungsmechanismus, der die Stromstärke des Diodenlasers regelt, auf den Übergang

$$5S_{1/2}, F = 3 \rightarrow 5P_{3/2}, F = 4 \quad (6.5)$$

im Infraroten bei 780 nm stabilisiert.

Kurz vor dem Resonator werden die Atome durch *optisches Pumpen* magnetisch ausgerichtet. Dazu wird *zirkular* polarisiertes Licht auf diesem Übergang eingestrahlt. Die Anregung erfolgt also mit der Auswahlregel $\Delta m_F = \pm 1$ (je nach Drehsinn des Lichtes), während der Zerfall zurück in den Grundzustand isotrop ist, d. h. $\Delta m_F = 0, \pm 1$. Dabei ist der Übergang in den Grundzustand $5S_{1/2}$ mit $F = 2$ nicht möglich (Auswahlregel $\Delta F = 0, \pm 1$), so daß aus dem Pumpprozeß keine Atome verlorengehen. Der Übergang ist gesättigt und es werden während der Wechselwirkung sogar mehrere hundert Pumpzyklen durchlaufen. Unmittelbar nach Durchqueren des Laserstrahls liegt daher der Grundzustand $5S_{1/2}, F = 3$ praktisch nur noch mit der extremalen magnetischen Quantenzahl $m_F = +3$ (bzw. $m_F = -3$ bei entgegengesetzt zirkular polarisiertem Lichtes) vor. Der Drehimpuls des Atoms ist also in Laserstrahlrichtung ausgerichtet.

So präpariert führt nun der Erwartungswert des Gesamt-Spins eine Präzessionsbewegung auf einem Kegelmantel um das verbleibende Restmagnetfeld aus. Die Wahrscheinlichkeit, den Spin nach einer Zeit t wieder in seiner ursprünglichen Richtung zu finden, also mit der magnetischen Quantenzahl $m_F = +3$, ist gegeben durch

$$P_{m_F=+3}(t) = 1 - \sin^2 \alpha \sin^2(\omega t) \quad (6.6)$$

mit dem Winkel α zwischen Magnetfeld und Laserstrahlrichtung und der Larmor-Frequenz $\omega = g_F \frac{eB}{2m}$ (SI-System). Die Konstante g_F ist dabei der Landé-Faktor der Hyperfeinstruktur (hier $1/3$).

Am Ende der Meßstrecke erfolgt die Anregung in einen Rydberg-Zustand mit parallel zum Diodenlaser eingestrahlt, ebenfalls zirkular polarisiertem Laserlicht. Die Anregungswahrscheinlichkeit ist nun aber abhängig von der m_F -Quantenzahl (Lit. [49, 108]). Bei σ^+ -polarisiertem Licht und der Anregung in einen $P_{1/2}$ -Zustand erhöht sie sich mit wachsendem m_F . Man beobachtete daher in Abhängigkeit von der Stromstärke in den Helmholtz-Spulen ein oszillatorisches Verhalten der Zählrate, mit der die Rydberg-Zustände detektiert werden. Jede Oszillation entspricht einer vollständigen Rotation des Spins. Verwendet man einen Atomstrahl mit breiter thermischer Geschwindigkeitsverteilung der Rydberg-Zustände (also mit senkrechter Laseranregung), so mitteln sich die Oszillationen höherer Ordnung weitgehend heraus. Dadurch läßt sich die nullte Ordnung (bei der der Gesamt-Spin zeitlich konstant

bleibt) von den höheren Ordnungen (bei denen der Gesamt-Spin für die mittlere Wechselwirkungszeit eine ganzzahlige Anzahl von Umdrehungen ausführt) unterscheiden. Mit diesem Verfahren kann das Magnetfeld (wie in Lit. [40, 49] im Detail ausgeführt wird) auf wenige mG kompensiert werden.

6.6 Die Resonanzkurve des Ein-Atom-Masers

Die Funktionsfähigkeit aller beim Betrieb des Ein-Atom-Masers beteiligten Komponenten wird durch Aufnahme der Resonanzkurve überprüft. Dabei wird die Resonanzfrequenz der Feldmode unter Einsatz der Piezotranslatoren langsam über die Resonanzfrequenz des Maserübergangs hinweg gestimmt. Gleichzeitig wird zur Bestimmung der Emissionswahrscheinlichkeit die Zählrate der Atome aufgenommen, die den Resonator im oberen bzw. im unteren Maserniveau verlassen. Wichtige Parameter des Experiments sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Verwendeter Maserübergang:	$^{85}\text{Rb } 63P_{3/2} \rightarrow 61D_{5/2}$
Übergangsfrequenz:	21,45602 GHz
Lebensdauer 63P (61D):	488 μs (244 μs)
Polarisierbarkeit 63P (61D):	1300 MHz/(V/cm) ² (270 MHz/(V/cm) ²)
Kopplungskonstante g :	40 \pm 10 krad/s
Wechselwirkungszeit:	50 μs
Resonatorgüte:	1 \cdot 10 ⁹
Temperatur des Resonators:	0,7 K
Detektoreffizienz:	0,4 \pm 0,1

In Abb. 6.9 sind Ein-Atom-Maser-Resonanzkurven für verschiedene Zählraten der Atome dargestellt. Die Umbesetzung in den unteren Maserzustand erfolgt nur in einem gewissen Frequenzintervall in der Umgebung der Atom-Feld-Resonanz. In Abb. (a) bei geringer Zählrate ist die Linienbreite sehr niedrig. Es handelt sich um die schärfste Resonanzkurve, die im Experiment für diesen Übergang bisher beobachtet wurde. Sie liegt nahe am theoretisch erwarteten Limit [49]. Dieses Ergebnis läßt auf gute Kompensation des Magnetfeldes sowie scharfe Geschwindigkeitsselektion der Atome schließen. Mit zunehmender Zählrate [Abb. (b) und (c)] erkennt man deutlich eine *Leistungsverbreiterung* der Resonanzkurve. Dabei verschiebt sich die linke Flanke hin zu niedrigeren Frequenzen, wodurch die Kurve eine unsymmetrische Gestalt annimmt. Die Details dieses charakteristischen Verhaltens sind inzwischen im Zusammenhang mit den an den Resonatoröffnungen auftretenden elektrostatischen Streufeldern (Abschnitt 4.1) gut verstanden. Sie werden in Lit. [49] ausführlich behandelt. Siehe auch Lit. [40, 51, 65] und Abschnitt 7.2.

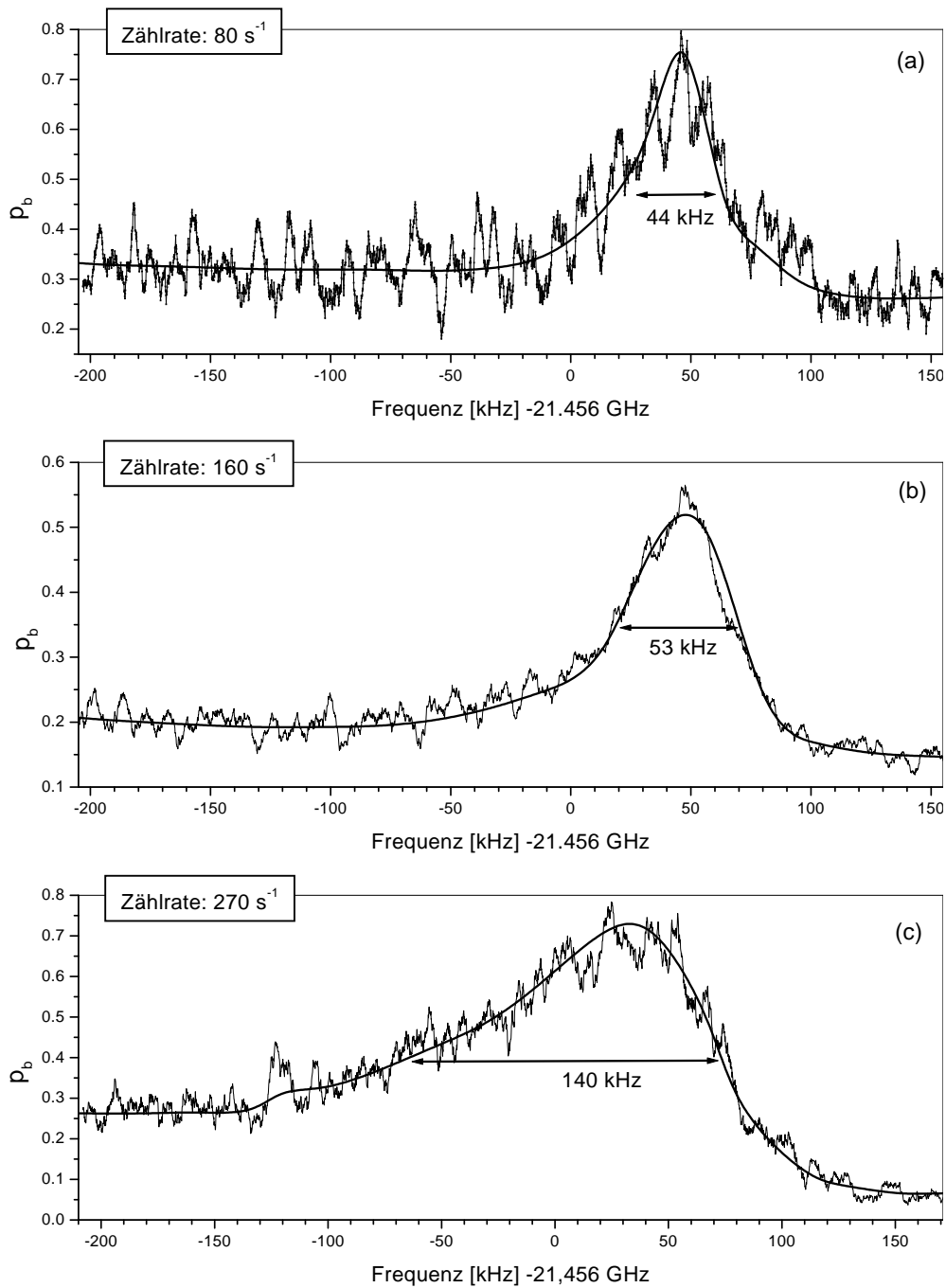


Abbildung 6.9: Resonanzkurve des Ein-Atom-Masers bei verschiedenen Zählraten der Atome. Die Wahrscheinlichkeit p_b , die Atome nach der Wechselwirkung im unteren Maserniveau zu detektieren, ist gegen die Resonanzfrequenz der Feldmode aufgetragen. Die Linienbreite bei kleiner Zählrate in (a) ist äußerst gering, während sich mit zunehmender Zählrate [(b) und (c)] deutlich eine Leistungsverbreiterung bemerkbar macht. Die unsymmetrische Verbreiterung des niederfrequenten Randes rührt von schwachen elektrischen Streufeldern an den Resonator-Koppellöchern her.

Kapitel 7

Messungen mit externer Einstrahlung

7.1 Mikrowellen-Experimente

7.1.1 Der Resonator

Jeder reale Resonator ist verlustbehaftet. Ein geeignetes Maß für die Resonatorverluste ist der Güte- oder Qualitätsfaktor Q (kurz: die Güte). Er ist definiert als:

$$Q = \Omega_0 \frac{W(t)}{-dW(t)/dt} \quad (7.1)$$

mit

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \text{Resonanz-Kreisfrequenz für den ungedämpften Fall} \\ W(t) &= \text{im Resonator gespeicherte Energie zur Zeit } t \\ -dW(t)/dt &= \text{Verlustleistung durch Resonatorverluste.} \end{aligned}$$

Nach Gl.(7.1) klingt die Energie im Resonator exponentiell ab:

$$W(t) = W(0) e^{-\frac{\Omega_0}{Q} t}. \quad (7.2)$$

Man faßt die Größe $\Omega_0/Q \equiv \gamma$ zu einer Dämpfungskonstanten zusammen. Beachtet man noch die durch die Dämpfung verursachte geringfügige Verschiebung der Resonanz zu dem kleineren Wert $\Omega_1 \approx \Omega_0(1 - \frac{1}{2Q})$ (siehe Lit. [109]), so folgt für die Zeitabhängigkeit des elektrischen Feldes wegen $|E(t)| \sim \sqrt{W(t)}$:

$$E(t) = E(0) e^{(-i\Omega_1 - \frac{\gamma}{2})t} + \text{k.k.} \quad (7.3)$$

Dann ist die spektrale Intensitätsverteilung (Betragsquadrat der Fourier-Transformierten) eine um Ω_1 zentrierte *Lorentz-Linie* mit $\gamma \equiv \Delta\Omega$ als voller Breite auf halber Höhe. Es gilt also einfach (mit $\nu = \Omega/2\pi$):

$$Q = \frac{\Omega_1}{\Delta\Omega} = \frac{\nu_1}{\Delta\nu}. \quad (7.4)$$

Für die beobachtete Gesamtgüte Q_{ges} sind mehrere Verlustmechanismen (mit Verlustleistungen P_i) verantwortlich, denen man getrennte Gütefaktoren

Q_i zuordnen kann. Dann gilt:

$$\frac{1}{Q_{ges}} = \frac{1}{\Omega_0} \frac{\sum_i P_i}{W} = \sum_i \frac{1}{Q_i}. \quad (7.5)$$

Die in Garching hergestellten geschlossenen zylindrischen Niob-Resonatoren weisen extrem hohe Güten von bis zu $3 \cdot 10^{10}$ auf. Bei Temperaturen unterhalb etwa 1K ist der die Güte begrenzende Faktor ein temperaturunabhängiger Restwiderstand der Resonatoroberfläche, der stark von der Präparation der Oberfläche und von deren Reinheit abhängig ist [98, 110, 111]. Hinzu kommen die *Koppelgüten* durch die an den Stirnflächen der Resonatoren abgestrahlte Leistung.

Für die in der vorliegenden Arbeit ausgeführten Experimente mit externer Einkopplung soll jedoch – um eine konstante Einkopplung überhaupt technisch realisieren zu können – die homogene Linienbreite des Resonators einen gewissen Wert *nicht* unterschreiten. Zu diesem Zweck wurde ein neuer Resonator angefertigt, dessen Koppelgüte auf $5 \cdot 10^9$ ausgelegt ist, so daß die Gesamtgüte *koppelgütebegrenzt* ist [66]. Alle vorgestellten Experimente wurden mit diesem Resonator durchgeführt.

7.1.2 Schwingungsdämpfung

Bei bisherigen Ein-Atom-Maser Aufbauten haben sich mechanische Schwingungen auf das Experiment übertragen, die insbesondere von den Drehschieberpumpen ausgehen, welche zur Erzeugung des Vorvakuums für die Turbomolekularpumpen dienen. Diese Schwingungen machen sich in einer deutlichen inhomogenen Verbreiterung der Resonanzfrequenz des Maser-Resonators auf ca. 2 kHz bemerkbar [40].

Bei den Experimenten mit externer Einkopplung sind jedoch zwei Bedingungen zu erfüllen:

- Erstens ist es zur Phasenkopplung des Maserfeldes (Abschnitt 4.5) notwendig, die *inhomogene* Verbreiterung der Resonanz klein zu halten im Vergleich zur *homogenen* Linienbreite der Resonatormode. Nur dann erfolgt die Einstrahlung mit konstanter Stärke, so daß sich ein stationärer Zustand einstellt.
- Zweitens muß die *Kohärenz* zwischen Resonatormode und externem Synthesizer bei der Puls-Methode nach Abschnitt 4.3 zum Zeitpunkt der Superposition des Meßpulses noch gegeben sein. Nur dann erfolgt die Verschiebung des Zustandes im Phasenraum (Abb. 4.2) tatsächlich in die beabsichtigte und nicht in eine willkürliche Richtung.

Der hohe Anspruch, den beide Bedingungen an die Schwingungsdämpfung des Aufbaus stellen, wird durch folgende Abschätzung deutlich: Die Verformung des Resonators an den Punkten, an denen die Piezotranslatoren ansetzen, um einen einzigen Nanometer bewirkt nach Lit. [96] bereits eine Verschiebung der Resonanz um ca. 160 Hz. Andererseits beträgt die homogene Linienbreite bei der höchsten vorgesehenen Güte von $5 \cdot 10^9$ gerade noch etwa 4 Hz.

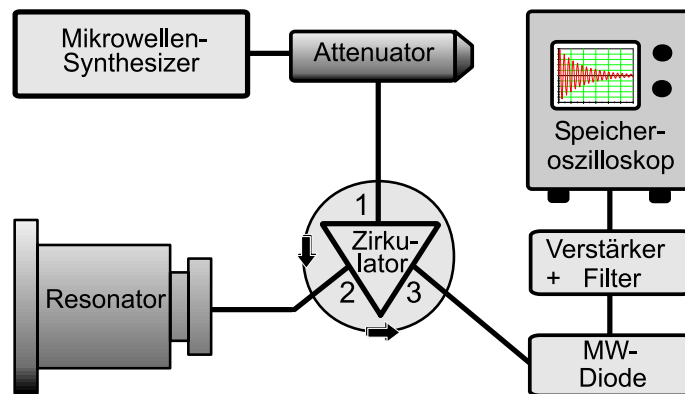


Abbildung 7.1: Aufbau zur Mikrowellen-Diagnose des Maser-Resonators. Der Resonator wird durch den Synthesizer mit Energie „geladen“. Anschließend wird das vom Resonator abgestrahlte Signal mit einer um etwa 2 kHz verstimmten Mikrowellenstrahlung überlagert. So entsteht ein an der Mikrowellen-Diode gemessenes, mit der Differenzfrequenz oszillierendes „Beat-Signal“.

Beim Aufbau des Experimentes wurde daher auf eine konsequente Dämpfung aller maßgeblichen Schwingungsquellen geachtet:

- Die Drehschieberpumpen befinden sich auf Kunststoff-Puffern in einem Schallschutzgehäuse zur akustischen Isolation. Die Verbindung des Ansaugstutzens der Pumpen erfolgt über vakuumtaugliche Gummischläuche, in denen die Schwingungen bereits deutlich gedämpft werden, zunächst zu massiven, am Boden fest verankerten Vierkantrohren, die die Vibrationen abführen, und dann erst zum eigentlichen Versuchsaufbau.
- Von den drei im Experiment integrierten Turbomolekularpumpen wird im eingekühlten Zustand nur noch eine benötigt (der Kryostat wirkt dann selbst als Sorbtionspumpe). Diese ist zur Vermeidung hochfrequenter Schwingungen, die sich über das Lager übertragen, mit magnetischer Lageraufhängung ausgerüstet.
- Die Entkopplung von Gebäudeschwingungen jeder Art (verursacht durch Trittschall, Maschinen in Nachbarlabors, Aufzüge und ähnliches) erfolgt schließlich dadurch, daß der gesamte Vakuumbereich (Atomofen, Diagnosetopf und Kryostat) auf einem speziell angefertigten Lasertisch angebracht ist. Dieser Tisch kann durch Druckluft angehoben werden, so daß die Platte auf einem aktiv höhenstabilisierten Luftpolster gelagert ist.

Der Test der Schwingungsdämpfung erfolgt mit dem in Abb. 7.1 skizzierten Aufbau: Ein Mikrowellen-Synthesizer¹ wird auf die Resonanzfrequenz der Kavität gestimmt. Die Linienbreite dieses Synthesizers beträgt, wie mit Hilfe eines Spektrum-Analysators nachgewiesen wurde, nur etwa *ein* Herz. Über einen

¹Modell 68063B der Firma *Willtron*

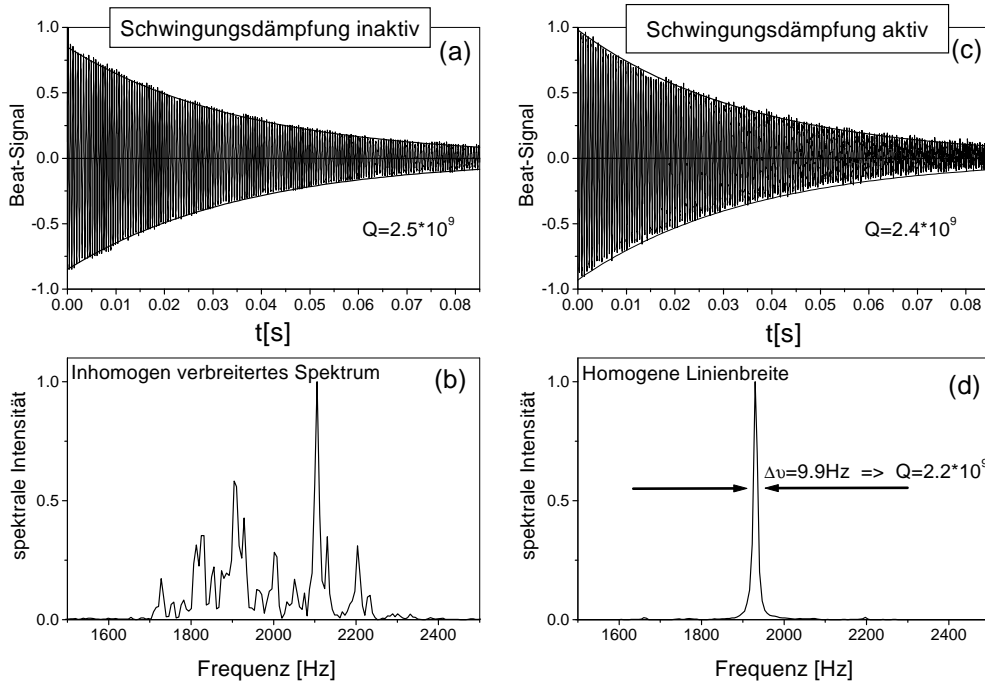


Abbildung 7.2: „Beat-Signal“ nach der in Abb. 7.1 dargestellten Methode. Die Messung in (a) wurde ohne aktive Luftkissen-Schwingungsdämpfung durchgeführt. Das entsprechende Intensitätsspektrum in (b) ist deutlich inhomogen verbreitert. Mit aktiver Schwingungsdämpfung in (c) reduziert sich das Spektrum auf die homogene Linienform (d).

Zirkulator wird der Resonator mit Energie „geladen“. Die Einkopplung erfolgt über einen Mikrowellen-Hohlleiter am Koppelloch, das sich an der Stirnfläche des Zylinder-Resonators befindet. Anschließend wird der Synthesizer um etwa 2 kHz verstimmt. Die exponentiell abfallende, aus dem Koppelloch entweichende Strahlung überlagert sich jetzt mit dem Signal des Synthesizers, das wegen der Verstimmung nun nicht mehr eingekoppelt, sondern an der Resonatoröffnung reflektiert wird. Am Ausgang 3 des Zirkulators liegt also eine elektrische Feldstärke mit folgender Zeitabhängigkeit an (Synthesizer mit Kreisfrequenz Ω_s , Resonator Ω_1):

$$E(t) = E_s e^{i\Omega_s t} + E_{Res} e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i\Omega_1 t}. \quad (7.6)$$

Die anschließende Detektion durch eine Mikrowellen-Diode liefert ein zur Intensität proportionales Signal:

$$I \sim |E(t)|^2 = |E_s|^2 + |E_{Res}|^2 e^{-\gamma t} + 2|E_s| \cdot |E_{Res}| e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos[(\Omega - \Omega_1)t + \varphi] \quad (7.7)$$

Der erste Term ist lediglich ein Gleichspannungsanteil, der zweite ist wegen der geringen Amplitude der Strahlung aus dem Resonator sehr schwach und zeitlich nur langsam veränderlich („Fast-Gleichspannung“). Von Interesse ist der mit der Differenzfrequenz (ca. 2 kHz) oszillierende dritte Term, der mit

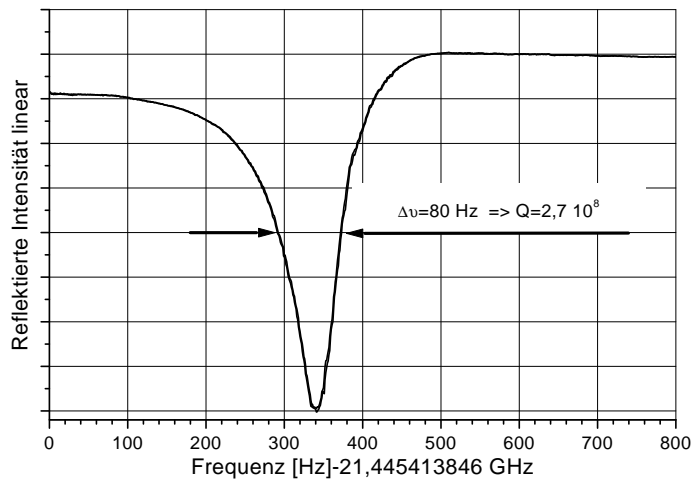


Abbildung 7.3: Die Schwingungsdämpfung des Ein-Atom-Maser-Aufbaus ermöglicht die unmittelbare Aufnahme der Resonanzlinie des Resonators mit einem Spektrum-Analysator.

Filtern einfach zu separieren ist. Die Enveloppe der Schwingung fällt mit der halben Dämpfungskonstanten ab.

In Abb. 7.2 (a) ist ein so aufgenommenes Schwebungssignal („Beat-Signal“) dargestellt. Aus dem Abfall der Einhüllenden wurde der Gütefaktor bestimmt. Er liegt mit $2,5 \cdot 10^9$ genau in der gewünschten Größenordnung. Der Laserisch wurde bei dieser Messung *nicht* durch Druckluft angehoben („Schwingungsdämpfung inaktiv“). Das Intensitätsspektrum (Betragsquadrat der Fourier-Transformierten) in Abb. (b) zeigt eine deutlich inhomogene Verbreiterung von ca. 400 Hz. Obgleich dieses Ergebnis im Vergleich zu Aufbauten, bei denen keine Vorkehrungen zur Schwingungsdämpfung durchgeführt wurden [40], bereits erheblich verbessert ist, dominiert die inhomogene Verbreiterung noch stark gegenüber der homogenen Linienform.

Die entsprechende Situation mit aktiviertem Luftkissen des Lasertisches ist in Abb. 7.2 (c) und (d) dargestellt. Aus dem Abfall des Beat-Signals ergibt sich mit $Q = 2,4 \cdot 10^9$ eine Linienbreite von 8,9 Hz, während die Breite des Intensitätsspektrums gerade noch um *ein* Herz darüber liegt. Die inhomogene Verbreiterung wird damit für Güten dieser Größenordnung durch die aktive Schwingungsdämpfung praktisch eliminiert.

Durch die Schwingungsisolation ist es nun möglich, die Linienform der Resonatormode mit einem Spektrum-Analysator² *direkt* aufzunehmen (Abb. 7.3). Dabei fährt die Frequenz eines Synthesizers langsam über die Resonanzfrequenz, während das vom Resonator zurückkommende Signal aufgezeichnet wird. Im Bereich der Resonanz koppelt die Mikrowelle in den Resonator ein; das reflektierte Signal nimmt entsprechend ab. Die Linienbreite, die auf diese unmittelbare Weise gemessen wird, stimmt mit derjenigen überein, die sich

²Spectrum Analyzer Modell SNA-33 mit Synthesizer TG-23 der Firma *Wandel & Goltermann*

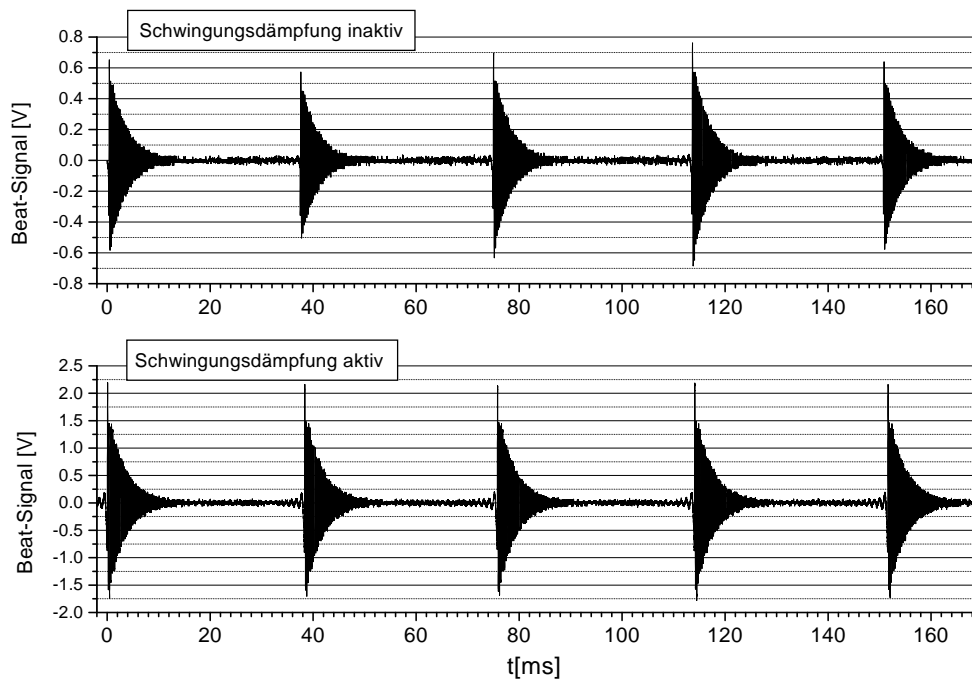


Abbildung 7.4: Eine Sequenz unmittelbar hintereinander aufgenommener „Beat-Signale“ zeigt anhand der Anfangsamplitude die Schwankungen der eingekoppelten Intensität. Auch hier erkennt man den Unterschied zwischen inaktiver und aktiver Schwingungsdämpfung. Im zweiten Fall sind praktisch keine Intensitätsfluktuationen mehr zu erkennen.

aus dem exponentiellen Abfall bei der Beat-Messung ergibt. Es findet keine feststellbare inhomogene Verbreiterung statt. Im dargestellten Fall ist die Güte allerdings nach mehrfacher Belüftung des Vakuumsystems etwas reduziert.

In Abb. 7.4 wurden mehrere Beat-Messungen nacheinander ausgeführt, um anhand der Anfangsamplitude des Interferenz-Signals zu überprüfen, wie stark die Schwankungen der eingekoppelten Intensität sind. Bereits ohne Aktivierung der Luftdämpfung (obere Abbildung) sind sie gering. Bei Aufbauten ohne Maßnahmen zur Schwingungsdämpfung wird bei solchen Messungen die Resonanz nur hin und wieder zufällig getroffen. Bei aktiver Luftkissen-Dämpfung erkennt man kaum noch Unterschiede in der Größe der Beat-Pulse (untere Abbildung).

7.1.3 Verschiebung im Phasenraum

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt die hohe Leistungsfähigkeit der Schwingungsdämpfung demonstriert wurde, soll nun ein Experiment vorgestellt werden, bei dem die Kohärenz zwischen Resonatormode und externem Synthesizer getestet wird. Sie stellt bei der Puls-Methode nach Abschnitt 4.3 eine wichtige Voraussetzung dar.

Wir betrachten den Aufbau nach Abb. 7.5: Der Synthesizer 1 wird auf Re-

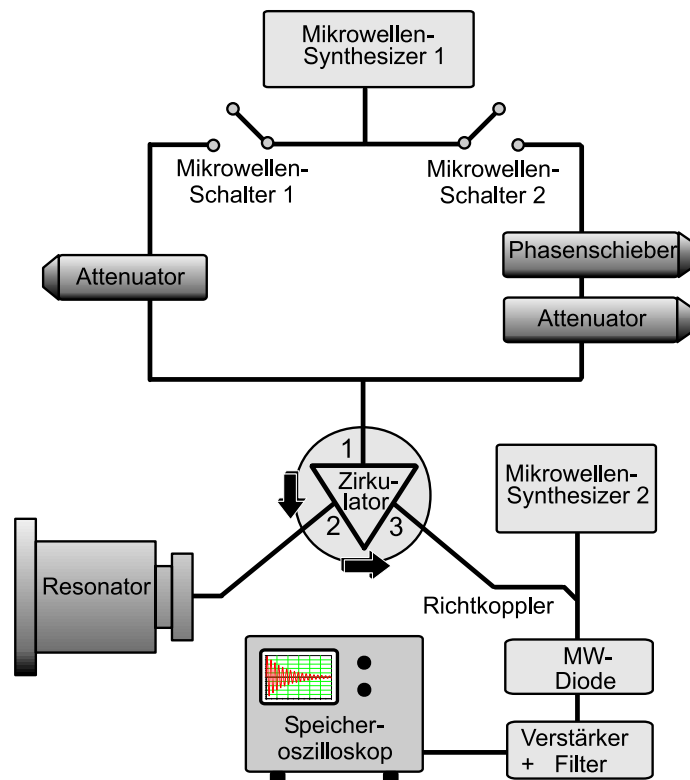


Abbildung 7.5: Aufbau bei der „Puls-Methode“. Der Resonator wird zunächst von Synthesizer 1 über Mikrowellen-Schalter 1 mit Energie geladen. Dann wird nach einer gewissen Wartezeit, während der Resonator und Synthesizer 1 frei schwingen, ein zweiter Puls über Schalter 2 in den Resonator gegeben. Je nach der am Phasenschieber eingestellten Phase kommt es im Resonator zu konstruktiver oder destruktiver Interferenz. Nach der Mischung mit dem um etwa 2 kHz verstimmt Signal aus Synthesizer 2 wird das „Beat-Signal“ an der Mikrowellen-Diode detektiert. Im Experiment kann so die Zeit bestimmt werden, innerhalb der sich beide Oszillatoren kohärent zueinander entwickeln.

sonanz mit der Feldmode gestimmt. Dann wird für kurze Zeit der Mikrowellen-Schalter 1 (ein „Pin-Switch“ mit Schaltzeiten um 250 ns) geschlossen, so daß der Resonator über den Zirkulator mit Energie geladen wird. Sobald Schalter 1 wieder geschlossen ist, strahlt der Resonator ein Signal ab, das nun hinter dem Ausgang 3 des Zirkulators mit der Mikrowellenstrahlung von Synthesizer 2, die um etwa 2 kHz gegenüber der Resonanzfrequenz verstimmt ist, überlagert wird. Dadurch entsteht wieder das bekannte exponentiell gedämpfte Schwebungssignal, das sich mit einer Mikrowellen-Diode detektieren und mit einem Speicheroszilloskop aufzeichnen läßt.

Nach einer einstellbaren Wartezeit (ehe jedoch das Feld im Resonator abgeklungen ist) wird nun ein *zweiter* Mikrowellenpuls in den Resonator einstrahlt, und zwar durch Schließen von Schalter 2. Die Phase des zweiten Pulses relativ zum ersten kann mit einem Phasenschieber beliebig gewählt werden. Im Resonator wird also das noch vorhandene Feld vom ersten Puls mit demje-

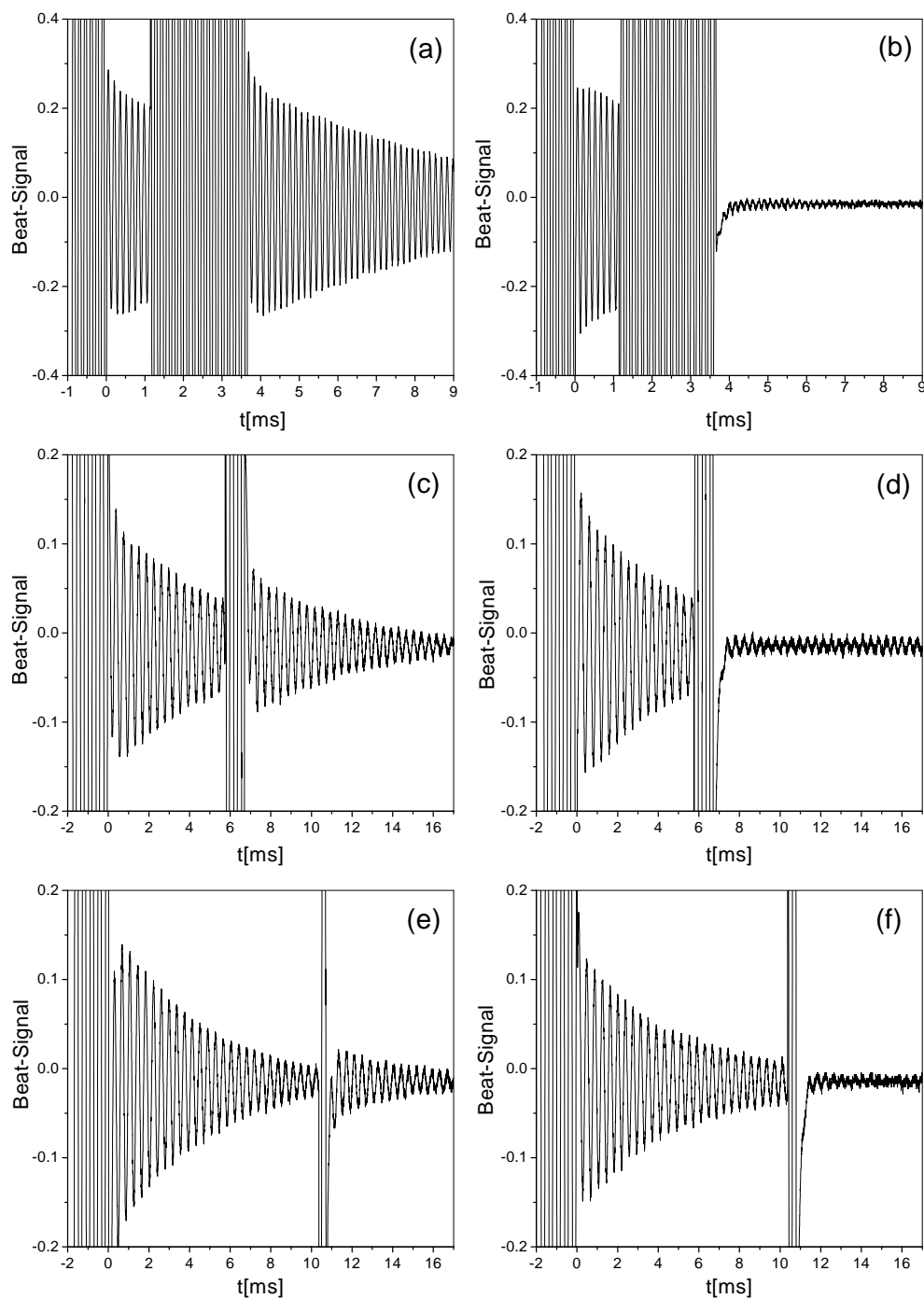


Abbildung 7.6: Puls-Experimente nach der in Abb. 7.5 dargestellten Methode. Einem ersten Mikrowellenpuls wird ein zweiter überlagert. In der linken Spalte ist die Phase des zweiten Pulses so gewählt, daß sich beide konstruktiv superponieren; in der rechten Spalte hingegen erfolgt die Überlagerung destruktiv. Das Experiment wurde für unterschiedliche Wartezeiten bis zum zweiten Puls durchgeführt. Die Kohärenzzeit zwischen Synthesizer und Resonator liegt hier oberhalb von 10 ms.

nigen des zweiten superponiert. Die zentrale Fragestellung besteht nun darin, ob sich beide Felder mit reproduzierbarer Phasenbeziehung überlagern, die Kohärenz also aufrechterhalten wird, oder aber ob die Phase, in der die Felder zusammentreffen, zufällig und nicht reproduzierbar ist.

Dazu betrachten wir die Messungen in Abb. 7.6. In (a) sehen wir eine Situation, in welcher der zweite Puls sich mit dem ersten *konstruktiv* überlagert. Die Amplitude des Beat-Signals nimmt dementsprechend nach dem zweiten Puls zu. Durch Variation der Phase des zweiten Pulses mit Hilfe des Phasenschiebers um π verändert sich das Bild nun wie in (b) dargestellt. Beide Pulse interferieren nun *destruktiv* miteinander. Der zweite Puls löscht den ersten aus.³ Im Phasenraum entspricht der erste Fall [Abb. (a)] einer radialen Verschiebung des Feld-Zustandes nach außen (vom Ursprung weg), während im zweiten Fall die Verschiebung zum Ursprung zurück erfolgt.

In den Abbildungen 7.6 (c)-(f) werden analoge Messungen mit längeren Wartezeiten bis zum zweiten Puls präsentiert. Auch bei Verzögerungen von reichlich 10 ms [Abb. (e) und (f)] ist die Kohärenz noch gegeben. Synthesizer und Resonator schwingen also nach 250 Millionen Perioden noch mit fester Phasenbeziehung zueinander!

7.2 Ein-Atom-Maser-Betrieb mit externer Kopplung

Im Gegensatz zu den Experimenten in Abschnitt 7.1 werden nun Messungen vorgestellt, bei denen das Feld im Resonator mit Hilfe von *Atomem* sondiert wird. Entsprechend der enormen Empfindlichkeit der verwendeten Rydberg-Zustände auf Mikrowellenstrahlung werden die auftretenden Feldstärken dabei um Größenordnungen kleiner gewählt.

Der Mikrowellen-Hohlleiter, der die Verbindung von außen zum Resonator im Kryostaten herstellt, ist mit einer Kupferklappe ausgerüstet, welche auf die Temperatur des flüssigen Heliums (4,2 K) gekühlt wird und über eine Schraubenzieher-Durchführung von außerhalb bedient werden kann. Im geschlossenen Zustand wird so die Einkopplung thermischer Strahlung durch diesen Hohlleiter verhindert. Es zeigt sich, daß die geschlossene Klappe geeignet ist, als *gekühlter* Attenuator die gewünschten sehr schwachen Intensitäten im Resonator zu erzeugen. Eine entsprechend starke Abschwächung im *warmen* Zustand außerhalb des Kryostaten würde zu einem von der thermischen Strahlung dominierten Feld führen.

In Abb. 7.7 wird die Resonanzkurve des Ein-Atom-Masers bei abgeschaltetem (obere Darstellung) und bei eingeschaltetem (untere Darstellung) Synthesizer miteinander verglichen. Die Synthesizer-Frequenz beträgt 21,45604 GHz. Seine Ausgangsleistung von 20,3 dBm wird zunächst mit einem Attenuator um 70 dB abgeschwächt, dann folgt die Abschwächung durch die geschlossene Kupferklappe.

³Das experimentelle Vorgehen ist dabei gerade andersherum: Zuerst wird mit Phasenschieber *und* Attenuator die Bedingung für destruktive Interferenz gesucht; anschließend kann *alleine* durch Betätigung des Phasenschiebers zwischen konstruktiver [Abb. (a)] und destruktiver [Abb. (b)] Interferenz gewechselt werden.

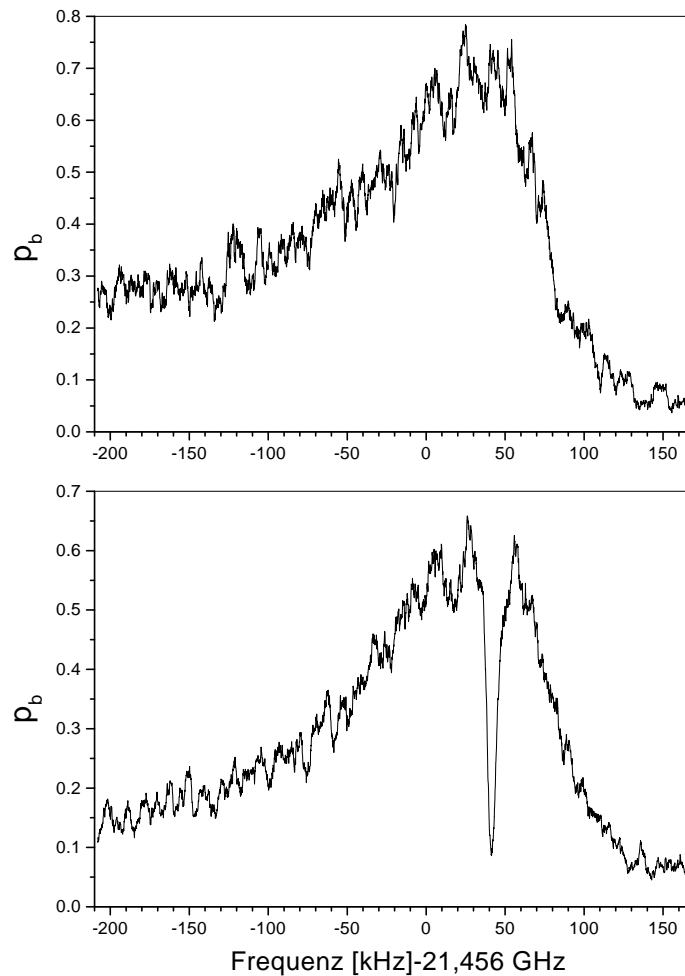


Abbildung 7.7: Resonanzkurve des Ein-Atom-Masers bei abgeschaltetem (obere Abbildung) und bei eingeschaltetem (untere Darstellung) Synthesizer. Im Bereich der Synthesizer-Frequenz von 21,45605 GHz erfolgt ein scharfer Einbruch. Dabei handelt es sich nicht um einen Mikrowellen-Ionisations-Effekt.

Man erkennt einen scharfen Einbruch im Bereich der Synthesizer-Frequenz. Dort erfolgt praktisch keine Umbesetzung in das untere Maser-Niveau. Dabei bleibt die *Gesamtzählrate* der Atome (abgesehen von einer geringen Asymmetrie in der Nachweiswahrscheinlichkeit für beide Zustände) konstant. Eine Ionisation durch die Mikrowellenstrahlung ist damit *ausgeschlossen*. Dieser Effekt kann im Experiment ebenfalls beobachtet werden – jedoch erst bei deutlich stärkerer Intensität.

Außerhalb eines schmalen Frequenzbereichs, in dem die externe Strahlung in den Resonator einkoppelt, bleibt die Resonanzkurve gegenüber dem Fall ohne Einstrahlung praktisch unverändert. Demnach spielt eine Beeinflussung der Atome durch Strahlung außerhalb des Resonators (z. B. im Bereich des Einkoppel-Hohlleiters) keine Rolle.

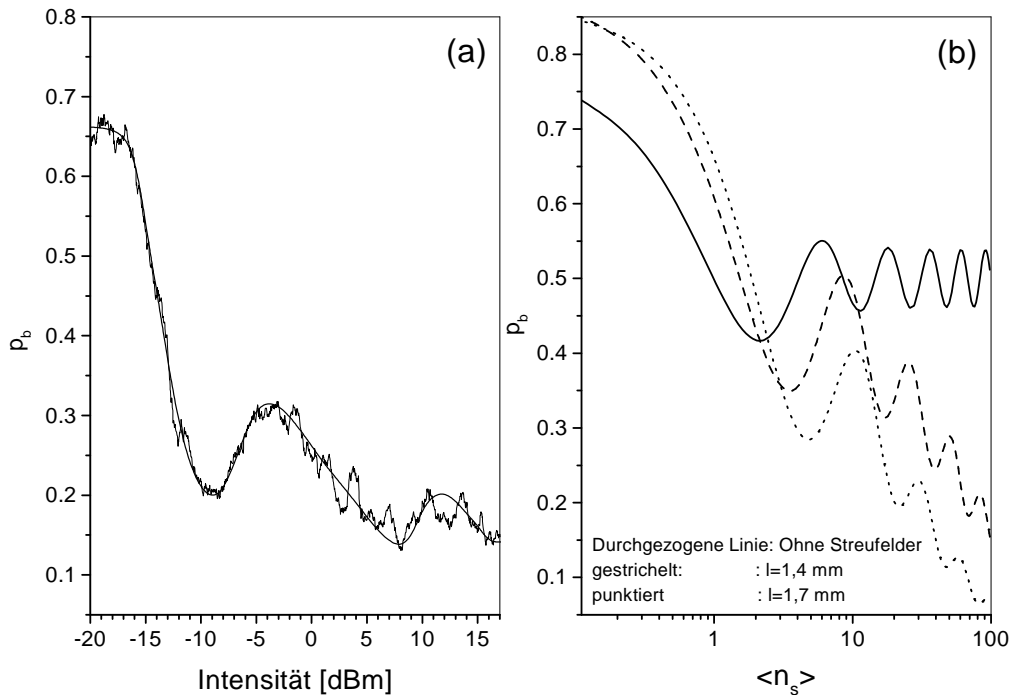


Abbildung 7.8: Emissionswahrscheinlichkeit p_b der Atome als Funktion der in den Resonator eingekoppelten Intensität. Atome, Resonator und Synthesizer sind in Resonanz. In der Messung [Abb. (a)] erkennt man deutliche Rabi-Oszillationen. Durch das reine Jaynes-Cummings-Modell [durchgezogene Linie in Abb. (b)] läßt sie sich allerdings nicht vollständig erklären. Die Berücksichtigung schwacher elektrischer Streufelder im Bereich der Koppellöcher des Resonators, die mit einer Abfall-Länge l in der Größenordnung der Domänendurchmesser der einkristallinen Bereiche auf der Resonatoroberfläche exponentiell abfallen (gestrichelte und gepunktete Kurve), ergibt hingegen bereits eine qualitativ gute Übereinstimmung mit der Messung. $\langle n_s \rangle = 4|f|^2/\gamma$ ist die bei Resonanz und 0 K vom Synthesizer im Resonator erzeugte mittlere Photonenzahl.

Die Tiefe des Einbruchs in Abb. 7.7 ist zunächst verblüffend. Die Emissionswahrscheinlichkeit für die Atome geht nahezu auf Null zurück. Nach dem reinen Jaynes-Cummings-Modell würde man hingegen bei Resonanz gemäß Gl. (3.48) Rabi-Oszillationen um den Wert $1/2$ erwarten. Eine AC-Stark-Verschiebung der Resonanzfrequenz aufgrund der dispersiven Kopplung eines dritten Niveaus [112] (das wäre der um 50 MHz gegenüber dem Maser-Übergang verstimme $61D_{3/2}$ -Zustand) könnte zu einer so starken Atom-Feld-Verstimmung führen, daß keine Umbesetzungen der atomaren Niveaus mehr zustande kommen. Dieser Effekt läßt sich zur Erklärung jedoch ausschließen, er kann nämlich auf maximal 10 Hz pro Photon abgeschätzt werden [49]. Ein deutlich ausgeprägter „Dip“ wird hingegen bereits bei Feldern beobachtet, die – wie sich durch Messung der Gesamtdämpfung abschätzen läßt – aus einigen 10 Photonen bestehen und folglich zu keiner relevanten Verstimmung führen.

Um das Zustandekommen des Einbruchs im Detail zu untersuchen, wurde in Abb. 7.8 (a) die Emissionswahrscheinlichkeit p_b als Funktion der eingestrah-

ten Intensität aufgenommen. Atome, Kavität und Synthesizer sind dabei in Resonanz. Die Güte des Resonators beträgt hier $2,2 \cdot 10^8$; dann ist bei einer Zählrate von 270 s^{-1} das durch die Atome aufgebaute Feld im Vergleich zur eingestrahlten Leistung noch gering. Man erwartet daher im Wesentlichen die Wechselwirkung mit einem „verschobenen“ thermischen Zustand nach Gl.(4.38). Der entsprechende Verlauf der Emissionswahrscheinlichkeit p_b ist in Abb. 7.8 (b) als *durchgezogene* Linie in Abhängigkeit von der durch den Synthesizer erzeugten mittleren Photonenzahl $\langle n_s \rangle = 4|f|^2/\gamma$ dargestellt. Die Temperatur beträgt $0,7 \text{ K}$, die skalierte Wechselwirkungszeit $g\tau$ ist gleich $1,8$. In Übereinstimmung mit der Theorie erkennt man im Experiment [Abb. (a)] deutlich die Rabi-Oszillationen in der Besetzungswahrscheinlichkeit. Zusätzlich beobachtet man jedoch einen Zerfall der Funktion gegen Null. Um diesen Effekt zu verstehen, müssen die elektrostatischen Streufelder an den Resonator-Koppellöchern (Abschnitt 4.1) in Betracht gezogen werden:

Durch den quadratischen Stark-Effekt verstimmen sich die beiden Maser-Niveaus der Atome zu niedrigeren Frequenzen, und zwar der P -Zustand stärker als der D -Zustand. Dadurch kommt es zu einer Rotverstimmung des Maser-Übergangs von ca. $-500 \text{ MHz}/(\text{V}/\text{cm})^2$. Die elektrische Streufeld-Stärke im Bereich der Koppellöcher wird in Lit. [49, 51] auf etwa $300 \text{ mV}/\text{cm}$ abgeschätzt. Das führt in der Ein- und der Austrittsöffnung zu einer beträchtlichen Verschiebung der Resonanz in der Größenordnung von -50 MHz . Entlang der Atomstrahlachse zur Resonatormitte hin erwartet man eine schnelle Abnahme der elektrischen Feldstärke, da die Atome dort – im Vergleich zur typischen Größe der einkristallinen Domänen – weit vom Resonatorrand entfernt sind. Wir gehen von der einfachen und plausiblen Näherung eines exponentiellen Abfalls der Form

$$E_{Str}(x) = E_0 e^{-\frac{x}{l}} \quad (7.8)$$

mit einer Abfallkonstanten l in der Größenordnung des typischen Domänen-durchmessers aus. Die Gesamtverstimmung δ nach Gl.(2.20) wird dann ortsabhängig. Sie ist gegeben durch

$$\delta(x) = \Omega - \left(\omega - 2\pi \cdot 500 \text{ MHz}/(\text{V}/\text{cm})^2 |E_{Str}(x)|^2 \right). \quad (7.9)$$

Außerdem gilt für die Kopplungskonstante g wegen des in Atomstrahlrichtung Sinus-förmigen Verlaufs der TE_{121} -Mode mit Länge L :

$$g(x) = \frac{\pi}{2} \bar{g} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right). \quad (7.10)$$

Man erhält also für die Aufspaltung der „dressed states“ um die Rabi-Frequenz nach Gl.(2.19)

$$\mathcal{R}_n(x) = \sqrt{\delta^2(x) + 4g^2(x) (n+1)}. \quad (7.11)$$

Durch die Ortsabhängigkeit der Atom-Feld-Verstimmung ist nun die Resonanzbedingung nicht mehr für die gesamte Wechselwirkungszeit erfüllt. Das Pulsflächen-Theorem Gl.(2.28) läßt sich folglich nicht anwenden. Man kann

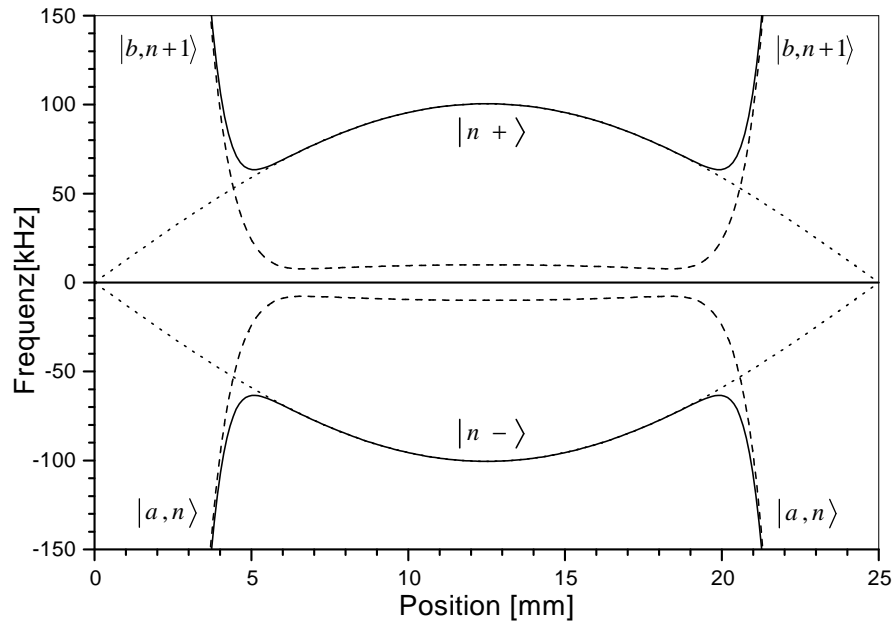


Abbildung 7.9: Energien der dressed states nach Gl.(7.11) für Resonanz (d. h. $\Omega = \omega$) als Funktion des Ortes entlang der Durchflugachse der Atome durch den Resonator. Punktiert: Ohne Streufelder und für $n = 100$ Photonen. Die dressed states sind vor Eintritt in den Resonator energetisch entartet. Gestrichelt: mit Streufeldern ($l = 1,4$ mm) und für $n=0$ Photonen. Durchgezogen: mit Streufeldern und für $n = 100$ Photonen. Hohe Photonenzahlen treiben die dressed-state-Energien auseinander und führen dadurch zu einem zunehmend adiabatischen Verlauf der Wechselwirkung.

aber die Emissionswahrscheinlichkeit nach der im Zusammenhang mit Gl. (2.36) dargestellten Methode numerisch bestimmen.

Das Resultat einer solchen Rechnung ist in Abb. 7.8 (b) für zwei verschiedene Abfall-Längen l des elektrischen Streufeldes dargestellt (gestrichelte Linie: $l = 1,4$ mm, punktierte Linie: $l = 1,7$ mm). Trotz der relativ einfachen Annahmen besteht bereits eine gute qualitative Übereinstimmung mit der Messung. Ein vollständig quantitatives Übereinstimmen ist nicht zu erwarten, da die Details des Verlaufs der Streufelder, deren Inhomogenität im Bereich des Atomstrahls, die Verteilung der Wechselwirkungszeiten sowie der Pumpeffekt der Atome hier nicht berücksichtigt sind. Es ist jedoch nicht beabsichtigt, das Experiment in allen Details zu modellieren, sondern das grundsätzliche Verhalten zu verstehen.

Es mag zunächst überraschend erscheinen, daß die Amplitude der Rabi-Oszillationen durch die Streufelder *zunimmt* [siehe Abb. 7.8 (b)]. Der Grund dafür ist die effektive Verkürzung der Wechselwirkungszeit durch die starke Verstimmung am Anfang und am Ende des Resonators. Die Betriebsparameter sind dadurch weiter vom „Kollaps“-Bereich entfernt.

Da die *Anzahl* von Rabi-Oszillationen als Funktion der Intensität von der Abfall-Konstanten l des elektrischen Streufeldes (und auch von den Details dessen Verlaufs [49]) nur schwach abhängig ist, läßt sich mit Hilfe der Messung

in Abb. 7.8 eine recht gute Kalibrierung der durch die Einstrahlung erzeugten mittleren Photonenzahl $\langle n_s \rangle$ durchführen.

Ein physikalisch anschauliches Verständnis der Vorgänge, die zur Veränderung der Emissionswahrscheinlichkeit führen, läßt sich mit Hilfe von Abb. 7.9 gewinnen. Dort sind die dressed-state-Energien nach Gl.(7.11) (für $l = 1,4$ mm) als Funktion des Ortes dargestellt, wie sie von den Atomen bei der Durchquerung des Resonators durchlaufen werden.

Der Sinus-förmige Verlauf bei Resonanz und *ohne* Streufelder (also für $\delta(x) \equiv 0$) ist für $n = 100$ Photonen punktiert eingezeichnet. Die Energie-Entartung vor Eintritt in den Resonator wird erst durch die Kopplung aufgehoben. Ein Anfangszustand $|a, n\rangle$ spaltet dann zu gleichen Teilen in die dressed states $|n+\rangle$ und $|n-\rangle$ auf, deren Interferenz – wie wir anhand von Gl. (2.34) diskutiert haben – zu den Rabi-Oszillationen führt.

Anders ist das Verhalten hingegen *mit* Streufeldern. Die dressed-state-Energien sind aufgrund der Verstimmung im Bereich der Koppellöcher an keinem Ort entartet. (durchgezogene Linie für $n = 100$, gestrichelte für $n = 0$ Photonen im Resonator). Ob sich ein Anfangszustand $|a, n\rangle$ nun gemäß dem *Adiabatsatz* (siehe z. B. Lit. [113, 114]) entlang des Energiepfades in den dressed state $|n-\rangle$ und anschließend zurück nach $|a, n\rangle$ entwickelt, oder ob es zu *diabatischen* Umbesetzungen kommt, hängt zum einen von der Geschwindigkeit ab, mit der die Energie durchlaufen wird, und zum anderen von der Größe der Energie-Aufspaltung zwischen den dressed states. Letztere wird aber durch die Anzahl n der Photonen im Resonator bestimmt. Großes n „drängt“ die dressed state Energien auseinander (durchgezogene Linie: $n = 100$) und bewirkt dadurch ein zunehmend adiabatisches Durchlaufen des Resonators. Im Endeffekt bleibt der Zustand nach Verlassen des Resonators dann unverändert. Die Atome werden folglich mit zunehmender Photonenzahl – in Übereinstimmung mit dem Meßergebnis Abb. 7.8 – vorwiegend im oberen Maser-Niveau beobachtet. Im Inneren (dort, wo die durchgezogene Linie sich an die punktierte schmiegt) ist der Einfluß der Streufelder zwar vernachlässigbar klein; die *Aufspaltung* in die dressed states ist jedoch stark verschieden vom Fall ohne Streufelder. Die Streufelder beeinflussen nämlich maßgeblich die *Anfangsbedingungen*, unter denen dann im praktisch streufeldfreien Innenraum die Wechselwirkung stattfindet.

Für kleine Photonenzahlen (gestrichelte Kurve: $n = 0$) kommen sich die dressed states so nahe, daß zunehmend diabatische Umbesetzungen erfolgen. Entsprechend beobachtet man Rabi-Oszillationen als „Interferenz-Erscheinung“ zwischen den dressed states.

Beim Stimmen der Modenfrequenz über diejenige des Synthesizers, wie in Abb. 7.7, erfolgt die Einkopplung der Intensität gemäß Gl. (4.40) mit einem Lorentz-Profil. Man erwartet daher die in Abb. 7.10 für verschiedene Einstrahlstärken numerisch berechnete, verzerrte Darstellung der in Abb. 7.8 beobachteten Rabi-Oszillationen. Dabei wurde wieder die Wechselwirkung mit dem „verschobenen“ thermischen Zustand nach Gl.(4.38) zugrunde gelegt. Die Parameter sind: $T = 0,7$ K, $g\tau = 1,8$, $l = 1,7$ und $Q = 2,2 \cdot 10^8$. Die in den Bildern angegebenen Werte von $\langle n_s \rangle = 4|f|^2/\gamma$ bezeichnen wieder die bei Resonanz und 0 K durch den Synthesizer erzeugte mittlere Photonenzahl im Resonator.

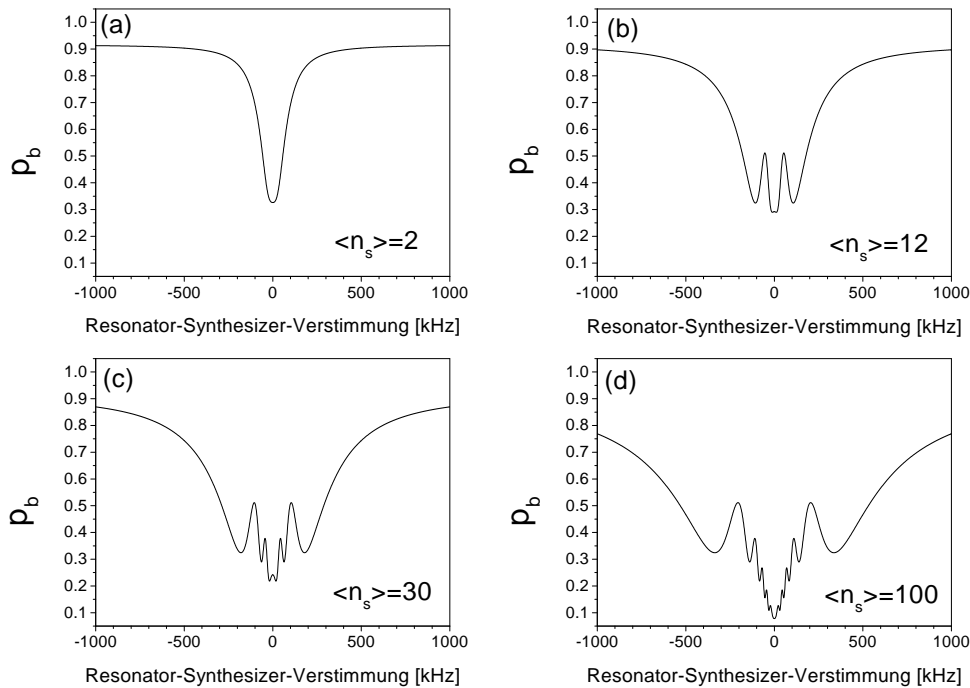


Abbildung 7.10: Numerisch berechneter Verlauf des Einbruchs in der Resonanzlinie für unterschiedliche Einkoppelstärken. Die Sub-Struktur ist eine verzerrte Abbildung der Rabi-Oszillationen. Bei schwacher Einstrahlung [Abb. (a)] reduziert sich die Breite nahezu auf die Linienbreite des Resonators von 100 Hz. Mit Erhöhung der eingestrahlten Leistung [Abb. (b) - (d)] nimmt die Breite deutlich zu. Außerdem wird eine zunehmende Anzahl von Rabi-Oszillationen sichtbar.

In Abb. 7.7 kann die feine Sub-Struktur in dem scharfen Einbruch wegen der noch zu großen Frequenz-Schrittweite nicht aufgelöst werden. Deshalb wurde in Abb. 7.11 dieser Bereich stark vergrößert aufgenommen. Durch Verringerung der Intensität reduziert sich dabei die Linienbreite nochmals erheblich. In der oberen Darstellung bei einer Einstrahlung mit 10,3 dBm (und der Abschwächung wie bisher) beträgt sie noch 500 Hz. Die Situation entspricht in etwa derjenigen in Abb. 7.10 (c). Man erkennt jetzt die durch die Rabi-Oszillationen erzeugte Sub-Struktur zumindest partiell.

In Abb. 7.11 unten erfolgt die Einstrahlung nur noch mit -10 dBm. Dabei wird die homogene Linienbreite des Resonators von 100 Hz nahezu erreicht – in Übereinstimmung mit der Berechnung in Abb. 7.10 (a).

Die Frequenzänderung von 100 Hz entspricht dem minimalen Hub der Piezotranslatoren von unter einem Nanometer. Entsprechend hoch ist die mechanische Stabilität des Aufbaus in Bezug auf Vibrationen und Erschütterungen.

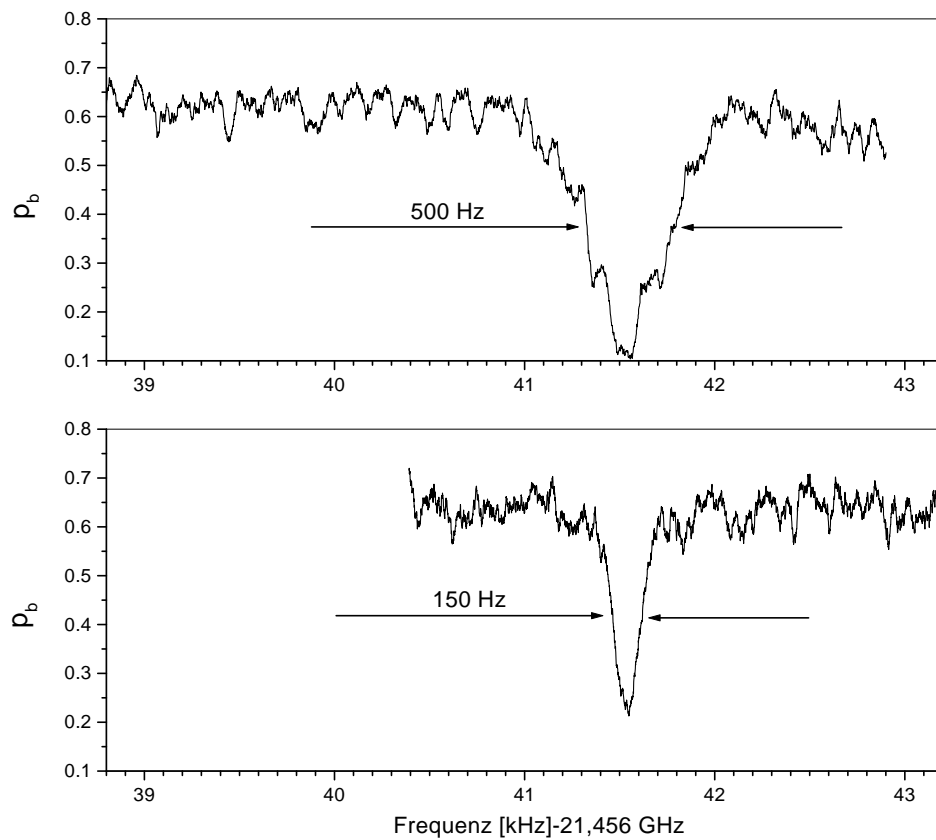


Abbildung 7.11: Stark vergrößerter Ausschnitt der Resonanzkurve des Ein-Atom-Masers in der Umgebung der Synthesizer-Frequenz. Die obere Messung entspricht in etwa der Situation in Abb. 7.10 (c). Die Einstrahlung erfolgt mit 10,3 dBm (und mehrfacher Abschwächung, siehe Text). Man erkennt die durch die Rabi-Oszillationen erzeugte Sub-Struktur zumindest partiell. Bei der unteren Messung wurde die Einstrahlung nochmals stark reduziert auf nur noch -10 dBm. Dabei verringert sich die Breite, wie in der Theoriekurve Abb. 7.10 (a) vorhergesagt, nahezu auf die homogene Linienbreite des Resonators.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde der Ein-Atom-Maser mit Kopplung an eine externe, monochromatische Strahlungsquelle untersucht, und zwar sowohl auf theoretischer als auch auf experimenteller Ebene. Zentrales Thema sind dabei die Kohärenz-Eigenschaften des Maser-Feldes und deren Beobachtbarkeit.

In Kapitel 2 wurde eine zusammenfassende Darstellung des Jaynes-Cummings-Modells mit besonderer Betonung der „dressed state“-Basis gegeben, auf die in Abschnitt 3.1 ein Überblick über die Theorie des Ein-Atom-Masers aufbaute. In Abschnitt 3.2 wurde eine Starkfeld-Näherung der Jaynes-Cummings-Dynamik eingeführt, mit deren Hilfe ein semiklassisches, physikalisch intuitives Bild der charakteristischen Phasen-Eigenschaften des Ein-Atom-Maser-Feldes abgeleitet wurde.

Eine theoretische Analyse des Ein-Atom-Masers mit Kopplung an eine externe Strahlungsquelle folgte in Kapitel 4. In Abschnitt 4.1 bis 4.3 wurde die Idee des „Meßpulses“ entwickelt, der zu einer „Verschiebung“ des Feldzustandes im Phasenraum führt und so eine phasensensitive Observable des Feldes durch Bestimmung der Besetzungswahrscheinlichkeit der atomaren Energieniveaus liefert. Dieses Meßprinzip besitzt gegenüber anderen Methoden, die auf der *Kohärenz* der atomaren Superposition basieren, den Vorteil größerer Robustheit gegenüber experimentellen Störeinflüssen.

Das vollständige quantenmechanische Problem wurde in Abschnitt 4.4 angegangen: die Wechselwirkung eines Atoms mit einer Feldmode, die an einen klassischen harmonischen Oszillator gekoppelt ist, unter Berücksichtigung der Dämpfungsverluste des Resonators bei endlicher Temperatur. Obwohl eine analytische Lösung des allgemeinsten Falls nicht gefunden werden konnte, wurden immerhin verschiedene Spezialfälle explizit gelöst. Insbesondere wurde mit Hilfe einer Drehwellennäherung eine relativ allgemeine analytische Lösung angegeben. Jedoch ist diese grundlegende Problemstellung vom theoretischen Standpunkt aus sicherlich noch nicht erschöpfend behandelt und daher weiterhin interessant.

Beim phasengekoppelten Maser, der in Abschnitt 4.5 behandelt wurde, baut sich eine Kohärenz zwischen Maser-Feld und externem Oszillator auf. Mit Hilfe der dort abgeleiteten Mastergleichung läßt sich der stationäre Feldzustand numerisch berechnen, während für die sich einstellende mittlere Pho-

tonenzahl ein einfacher analytischer Näherungsausdruck angegeben werden konnte. Der stationäre Zustand zeichnet sich (bei geeigneter Parameterwahl) ähnlich einem „gequetschten“ Zustand durch eine sub-Poisson'sche Photonenzahlverteilung bei verhältnismäßig gut definierter Schwingungsphase aus. Für die Untersuchung von Phaseneigenschaften des Ein-Atom-Maser-Feldes stellt er einen geeigneten Anfangszustand dar.

Zwei detailliert ausgearbeitete Anwendungen der Methode des „Meßpulses“ im Hinblick auf die Bestimmung des quantenmechanischen Zustandes des Maser-Feldes wurden in Kapitel 5 präsentiert. Es handelt sich um ein „Rekonstruktionsverfahren“ basierend auf einem „Set“ von Messungen (Abschnitt 5.2) und ein Schema zur punkweisen Bestimmung einer Phasenraumfunktion, nämlich der charakteristischen Funktion der Wigner-Verteilung (Abschnitt 5.3).

Die erste Methode liefert bei einem geeigneten Set von Messungen bereits den (in einem begrenzten Fock-Raum) *vollständigen* Feldzustand. Voraussetzung ist allerdings eine hinreichende Menge von Meßdaten, die mit der mittleren Photonenzahl des Feldes aufgrund der zunehmenden Anzahl von Unbekannten stetig anwächst. Die Kondition der entstehenden Gleichungssysteme als Maß für die zu erwartende Empfindlichkeit gegen Meßungenauigkeiten spielt eine entscheidende Rolle. Noch detailliertere Untersuchungen ihrer Abhängigkeit von der Wahl der verwendeten Parameter (das sind insbesondere die Wechselwirkungszeit und die Radian, auf denen die Verschiebung erfolgt) sind daher von Interesse.

Bei der zweiten Methode besteht der Vorteil eines unmittelbaren Zusammenhangs zwischen Meßgröße und Phasenraumfunktion. Die Messung *einzelner* Observablen liefert bereits eine physikalische Aussage über die zugehörigen Phasenraumpunkte. Damit ist die Bestimmung des *kompletten* Feldzustandes nicht obligatorisch. Man kann sich folglich auf die Untersuchung begrenzter Phasenraum-Bereiche besonderen Interesses konzentrieren, wodurch sich die Meßzeit, während der alle Parameter des Experimentes konstant gehalten werden müssen, entsprechend reduziert. Ein hoher Anspruch ist im Experiment allerdings an die Selektion der Wechselwirkungszeiten zu stellen, da die Auflösung der schnellen Rabi-Oszillationen entscheidend ist.

Die Anwendungsmöglichkeiten der Meßpuls-Methode beim Ein-Atom-Maser sind damit sicherlich längst nicht ausgeschöpft. In Lit. [115] wurde kürzlich die auf diesem Prinzip basierende Vermessung eines verschränkten Zwei-Moden-Feldes vorgeschlagen. Möglicherweise eignet sich das Verfahren sogar zu einem Test der Bell'schen Ungleichungen anhand eines Kriteriums der Wigner'schen charakteristischen Funktion [116]. Unterschiedliche Spezialisierungen auf die gezielte Untersuchung bestimmter physikalischer Größen wie z. B. der Phasendiffusion [66] sind ebenfalls möglich.

Das im Rahmen dieser Arbeit vervollständigte schwingungsgedämpfte Ein-Atom-Maser-Experiment wurde in Kapitel 6 beschrieben. Alle für die Funktion notwendigen Komponenten wurden erfolgreich aufgebaut und getestet. Die im Zusammenhang mit der Geschwindigkeitsselektion verwendete Stark-Verschiebung stellt eine wertvolle Weiterentwicklung dar, die es nun ermöglicht, beliebige Wechselwirkungszeiten zu selektieren und diese kontinuierlich zu va-

rieren. Zum Abschluß des Kapitels wurde die Funktion des neuen Aufbaus durch Aufnahme der Resonanzkurve des Ein-Atom-Masers demonstriert.

In Kapitel 7 wurden schließlich verschiedene Experimente mit Einkopplung von Mikrowellenstrahlung in den Maser-Resonator durchgeführt. Dabei ging es in 7.1 zunächst um die Frage, inwieweit eine stabile Einkopplung in einen Resonator sehr hoher Güte (und entsprechend scharfer Resonanz) überhaupt technisch realisierbar ist. Durch konsequente Dämpfung mechanischer Schwingungen konnte die inhomogene Verbreiterung der Resonanzkurve um viele Größenordnungen reduziert werden, so daß diese bei Güten in der Größenordnung von $2 \cdot 10^9$ praktisch keine Rolle mehr spielt. Die *kohärente* „Verschiebung“ im Phasenraum mit Hilfe der Puls-Methode wurde ebenfalls nachgewiesen.

Die Atom-Feld-Wechselwirkung bei externer Kopplung des Maser-Resonators wurde in Abschnitt 7.2 experimentell untersucht. Dabei konnten die erwarteten Rabi-Oszillationen der atomaren Besetzungsinversion als Funktion der eingestrahlten Leistung auf unterschiedliche Weise beobachtet werden. Die Details der gemessenen Kurvenverläufe wurden im Zusammenhang mit einer ortsabhängigen Atom-Feld-Verstimmung aufgeklärt, die im Experiment durch leichte elektrische Streufelder zustande kommt.

Der Ein-Atom-Maser-Betrieb mit Kopplung an eine externe Strahlungsquelle stellt damit eine realistische Alternative mit einem breiten – sich in der Zukunft voraussichtlich weiter vergrößernden – Anwendungspotential dar. Allerdings ist der Resonator bislang nicht *aktiv* auf eine Referenzfrequenz stabilisiert. Es handelt sich um einen zwar ausgesprochen stabil, jedoch nach wie vor *frei*, schwingenden Oszillator, bei dem eine geringe Drift der Resonanzfrequenz um wenige Hertz aufgrund von Relaxationserscheinungen des Materials und der Piezotranslatoren innerhalb von einigen Minuten beobachtet wird. Da jedoch die Methode der Meßpulse bereits empfindlich auf so geringe Veränderungen reagiert, wäre eine aktive Stabilisierung von großem Nutzen und für aufwendigere Meßverfahren wie beispielsweise die Rekonstruktion von Quantenzuständen, bei denen längere Meßzeiten benötigt werden, voraussichtlich sogar unverzichtbar. Zu diesem Zweck könnte man eine in der Frequenz hinreichend weit entfernte Resonatormode verwenden, in die man eine leicht modulierte Mikrowellenstrahlung einkoppelt, um die Linienform aufzunehmen (wie in Abb. 7.3). Ein auf die Piezotranslatoren rückwirkender Regelkreis würde die Frequenz auf dem gewünschten Wert stabilisieren, während gleichzeitig in der Maser-Mode das eigentliche Experiment durchgeführt werden könnte. Falls sich dabei störende Einflüsse bemerkbar machen sollten (in Lit. [30] wird von einer Leck-Rate in die Maser-Mode berichtet), könnte man die Stabilisierung alternativ auch mit der Maser-Mode selbst vornehmen. Die sensitivste Möglichkeit wäre es dann – während kurzer Unterbrechungen des Versuchs – mit der Puls-Methode die Bedingung für destruktive Interferenz zu überprüfen und gegebenenfalls wiederherzustellen. All das könnte in einem Computerprogramm automatisiert werden. Die gekühlte Kupferklappe wäre durch einen ansteuerbaren Attenuator zu ersetzen.

Weitere Optionen für die Zukunft könnten darin bestehen, den Resonator mit Elektroden auszustatten, die es erlauben, den atomaren Übergang

unter Ausnutzung des Stark-Effekts so weit gegenüber der Resonanz zu verstimmen, daß sich die Wechselwirkung während des Durchflugs der Atome durch den Resonator beliebig ein- und auszuschalten läßt [117]. Man könnte dann *im Inneren* des Resonators kohärente Überlagerungen der beiden Maser-Niveaus präparieren, die dort keinen Streufeldern ausgesetzt wären: Im Resonator würde man ein klassisches Feld erzeugen und eine definierte Wechselwirkungszeit (z. B. einen $\pi/2$ -Rabi-Puls) einstellen. Anschließend könnte das klassische Feld durch einen zweiten Puls ausgelöscht, und die Wechselwirkung nochmals für eine definierte Zeit eingeschaltet werden. Auf diese Weise wäre auch eine Ramsey-Anordnung innerhalb eines Resonators denkbar.

Ich verbleibe mit der zuversichtlichen Hoffnung, daß mit der vorliegenden Arbeit zusammen mit Lit. [66] die Grundlagen für eine neue Art von Ein-Atom-Maser-Experimenten geschaffen werden konnten.

Anhang A

Der Verschiebungsoperator

Der Verschiebungsoperator (displacement operator) D ist in der Quantenoptik von zentraler Bedeutung. Er spielt auch bei der Definition von Quasiwahrscheinlichkeiten (Anhang B) eine entscheidende Rolle. Wir stellen seine wichtigsten Eigenschaften zusammen: D ist definiert als

$$D(\alpha, \alpha^*) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}. \quad (\text{A.1})$$

mit komplexem Parameter α . Wegen des antihermiteschen Exponenten $(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})^\dagger = -(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})$ ist D unitär, d.h.

$$D^\dagger D = DD^\dagger = \hat{1} \quad \text{bzw.} \quad D^{-1} = D^\dagger \quad (\text{A.2})$$

mit dem Einheitsoperator $\hat{1}$. Die inverse Operation ist gleich der Verschiebung in entgegengesetzter Richtung

$$D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha). \quad (\text{A.3})$$

Die Matrixelemente $\langle n | D(\alpha) | m \rangle \equiv d_{nm}(\alpha)$ in Fock-Darstellung mit $\alpha = r e^{i\phi}$ sind analytisch gegeben durch den Ausdruck [118, 119]

$$d_{nm}(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{m!}{n!}} e^{-\frac{1}{2}r^2} r^{n-m} e^{i(n-m)\phi} \mathcal{L}_m^{n-m}(r^2) & \text{falls } n \geq m \\ d_{mn}^*(-\alpha) & \text{falls } n \leq m \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

mit den verallgemeinerten Laguerre-Polynomen

$$\mathcal{L}_m^n(x) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \binom{m+n}{m-\nu} \frac{x^\nu}{\nu!}. \quad (\text{A.5})$$

Dann gilt nach Gln. (A.2) und (A.3) für die Matrixelemente

$$d_{mn}^*(\alpha) = d_{nm}(-\alpha) \quad (\text{A.6})$$

Für die Transformation des Erzeugungs- und Vernichtungsoperators findet man

$$D^\dagger(\alpha) \hat{a} D(\alpha) = \hat{a} + \alpha \quad \text{und} \quad D^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger D(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*. \quad (\text{A.7})$$

Der Verschiebungsoperator wirkt auf kohärente Zustände $|\beta\rangle$ folgendermaßen („Im“ bezeichnet den Imaginärteil)

$$D(\alpha) |\beta\rangle = e^{i\text{Im}(\alpha\beta^*)} |\alpha + \beta\rangle. \quad (\text{A.8})$$

Die Amplitude β wird demnach im Phasenraum um den Parameter α verschoben. Insbesondere gilt dann auch

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle. \quad (\text{A.9})$$

Kohärente Zustände sind verschobene Vakuumzustände.

Anhang B

Der quantenmechanische Phasenraum

Die Darstellung der Dynamik eines physikalischen Systems im Phasenraum, der durch einen Satz konjugierter Variablenpaare (im eindimensionalen Fall z. B. x und p) aufgespannt wird, ist in der klassischen Physik ein wohlbekanntes und bewährtes Hilfsmittel. Eine Übertragung in die Quantenmechanik scheint im ersten Augenblick jedoch nicht nur überflüssig, sondern sogar ausgeschlossen zu sein: Erstens ist ein Quantenzustand bereits in der Darstellung nur *einer* der konjugierten Variablenpaare (z. B. nur des Ortes oder nur des Impulses) eindeutig festgelegt, und zweitens verbietet die Nicht-Vertauschbarkeit eine gleichzeitige scharfe Bestimmung beider Variablen im Phasenraum.

Glücklicherweise gibt es aber Möglichkeiten, dieses in der klassischen Mechanik so erfolgreiche Konzept in die moderne Physik zu übertragen. Allerdings ist die Definition von quantenmechanischen Phasenraumverteilungen nicht eindeutig; es existieren verschiedene sinnvolle Alternativen mit unterschiedlichen „nicht-klassischen“ Eigenschaften. Die Interpretation als Wahrscheinlichkeitsverteilung im strengen Sinne wie in der klassischen Beschreibung ist dann nicht mehr möglich. Außerdem wird ein System sogar bei vollständiger Kenntnis im Allgemeinen nicht mehr durch einen Punkt, sondern durch eine der Unbestimmtheitsrelation genügende Verteilung repräsentiert. Diese Verteilung enthält (bei reinen Zuständen) genau wie die Wellenfunktion die komplette quantenmechanisch zugängliche Information und stellt damit eine gleichwertige physikalische Beschreibung dar. Die *Quantenmechanik im Phasenraum* ist aber oftmals anschaulicher und intuitiver.

Die sogenannten „s-parametrisierten Verteilungen“ stellen eine ganze Schar von Phasenraumfunktionen dar. Man kann sie allgemein mit Hilfe der „s-parametrisierten charakteristischen Funktion“ [$D(\mu)$ ist wieder der von der komplexen Variable μ abhängige Verschiebungsoperator aus Anhang A]

$$C(\mu, \mu^*, s) = \text{Tr}[\rho D(\mu)] e^{\frac{1}{2}s|\mu|^2} \quad (\text{B.1})$$

definieren als deren zweidimensionale Fourier-Transformierte (siehe z. B. Lit. [120]):

$$V(\alpha, \alpha^*, s) = \frac{1}{\pi^2} \int C(\mu, \mu^*, s) e^{\mu^* \alpha - \mu \alpha^*} d^2 \mu. \quad (\text{B.2})$$

Eine andere nützliche Darstellung ist die Entwicklung in einer Summe über die Photonenstatistik verschobener Zustände [93]:

$$V(\alpha, \alpha^*, s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1+s)^n}{(1-s)^{n+1}} \langle n | D^\dagger(\alpha) \rho D(\alpha) | n \rangle. \quad (\text{B.3})$$

Eine weitere, die *Quanten-Tomographie* begründende Form wird in Lit. [75] abgeleitet. Der Zusammenhang zum Dichteoperator ist gegeben durch die Integraltransformation

$$\rho = \frac{1}{\pi} \int C(\mu, \mu^*, s) D(-\mu, -\mu^*) e^{-\frac{1}{2}s|\mu|^2} d^2\mu. \quad (\text{B.4})$$

Von besonderer praktischer Bedeutung sind folgende drei Spezialfälle:

i) $s = +1$: Die Glauber-Sudarshan'sche P-Funktion

Sie wurde ursprünglich definiert als diejenige Funktion $P(\alpha)$, mit der sich der Dichteoperator in „Pseudo-Diagonaldarstellung“ mit kohärenten Zuständen¹ entwickeln läßt

$$\rho = \int |\alpha\rangle\langle\alpha| P(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha \quad (\text{B.5})$$

und ist die *schmalste* der „s-parametrisierten Verteilungen. Als „normale“ Funktion existiert sie nur für Zustände, die als Gemisch kohärenter Zustände (ohne Kohärenzen) darstellbar sind. Solche Zustände können sinnvollerweise als „klassische Zustände“ bezeichnet werden. Der kohärente Zustand selbst bildet die Grenze: seine P-Funktion ist offensichtlich eine δ -Funktion. Für „nicht-klassische“ Zustände wird P zunehmend singulär. Sie ist aber weiterhin im Sinne einer Distribution anwendbar. Analog einer klassischen Phasenraumverteilung lassen sich mit ihr Mittelwerte berechnen. Wegen der Nicht-Vertauschbarkeit gilt das aber nur für *normal geordnete* Operatoren (alle \hat{a}^\dagger stehen links, alle \hat{a} rechts).

ii) $s = 0$: Die Wigner-Funktion

Sie wurde bereits 1932 eingeführt und ist daher der „Klassiker“ unter den Phasenraum-Funktionen. Ursprünglich wurde sie in den Koordinaten x und p formuliert als

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int e^{-2\frac{i}{\hbar}\zeta p} \langle x + \zeta | \rho | x - \zeta \rangle d\zeta. \quad (\text{B.6})$$

Man erhält die Wigner-Verteilung auch durch Mittelung der P-Funktion über eine Gauß-Glocke [67]; es handelt sich also um eine „verschwommene P-Funktion“. Sie ist entsprechend breiter und existiert für jede (physikalische) Dichtematrix. Nach Gl.(B.3) ist die Wigner-Funktion auch einfach als alternierende Summe über die Photonenstatistik verschobener Zustände darstellbar. Wie

¹Wegen der Übervollständigkeit kohärenter Zustände handelt es sich nicht tatsächlich um eine Diagonaldarstellung. Nur deshalb ist die Anwendbarkeit so relativ allgemein.

bei einer klassischen Verteilungsfunktion ergibt das Integral über den Ort die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Impulses und umgekehrt. Außerdem lassen sich mit $W(x, p)$ ebenfalls Mittelwerte berechnen, nämlich für *symmetrisch geordnete* Operatoren (siehe z. B. Lit. [120]). Der charakteristische Unterschied zur klassischen Physik: Wigner-Funktionen können *negative* Werte annehmen. „Negativitäten“ sind sichere Indikatoren für nicht-klassische Zustände.

iii) $s = -1$: Die Q-Funktion

Sie ist gegeben durch die Diagonal-Matrixelemente des Dichteoperators in kohärenten Zuständen:

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle. \quad (\text{B.7})$$

Es handelt sich um die breiteste der s -parametrisierten Verteilungen. Man kann sie auch als Mittelung der Wigner-Funktion über eine Gauß-Glocke darstellen [67]. Mit $Q(\alpha, \alpha^*)$ lassen sich schließlich Mittelwerte für *antinormal geordnete* Operatoren berechnen.

Andere, als die auf kohärenten Zuständen basierenden s -parametrisierten Phasenraumfunktionen sind ebenfalls denkbar, sie besitzen aber bislang kaum praktische Bedeutung.

Literaturverzeichnis

- [1] A. Einstein, Phys. Zeitschr. **18**, 121 (1917).
- [2] V. Weißkopf und E. Wigner, Z. Phys. **63**, 54 (1930).
- [3] W. E. Lamb Jr. und R. C. Retherford, Phys. Rev. **72**, 241 (1947).
- [4] H. A. Bethe, Phys. Rev. **72**, 339 (1947).
- [5] B. de Beauvoir, F. Nez, L. Julien, B. Cagnac, F. Biraben, D. Touahri, L. Hilico, O. Acef, A. Clairon und J. J. Zondy, Phys. Rev. Lett. **78**, 440 (1997); T. Udem, A. Huber, B. Gross, J. Reichert, M. Prevedelli, M. Weitz und T. W. Hänsch, Phys. Rev. Lett. **79**, 2646 (1997).
- [6] K. Pachucki, Phys. Rev. Lett. **72**, 3154 (1994).
- [7] H. B. G. Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).
- [8] S. K. Lamoreaux, Phys. Rev. Lett. **78**, 5 (1997).
- [9] E. M. Purcell, Phys. Rev. **72**, (1946).
- [10] *Zur verstärkten Spontanemission*: R. G. Hulet, E. Hilfer und D. Kleppner, Phys. Rev. Lett. **55**, 2137 (1985). *Zur unterdrückten Spontanemission*: P. Goy, J. M. Raimond, M. Gross und S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **50**, 1903 (1983).
- [11] H. B. G. Casimir und D. Polder, Phys. Rev. **73**, 360 (1948).
- [12] M. Marrocco, M. Weidinger, R. T. Sang und H. Walther, Phys. Rev. Lett. **81**, 5784 (1998); M. Weidinger, *Dissertation*, Ludwig-Maximilians-Universität München (1998) (MPQ-Report 239).
- [13] C. Wagner, *Dissertation*, Ludwig-Maximilians-Universität München (1994).
- [14] E. T. Jaynes und F. W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963); *einen aktuellen Überblick findet man in* B. W. Shore und P. L. Knight, J. Mod. Opt. **40**, 1195 (1993).
- [15] *Zusammenfassende Darstellungen über den Ein-Atom-Maser finden sich in* G. Raithel, C. Wagner und H. Walther, L. M. Narducci und M. O. Scully, in *Advances in Atomic, Molecular und Optical Physics*, Supplement

- 2, Hrsg. P. Berman (Academic Press, New York, 1994); H. Walther in *Quantum Optics and the Spectroscopy of Solids*, Hrsg. T. Hakioglu und A. S. Shumovsky (Kluwer, Dordrecht, 1997).
- [16] D. Meschede, H. Walther und G. Müller, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 551 (1985).
- [17] G. Rempe, H. Walther und N. Klein, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 353 (1987).
- [18] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond und S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1800 (1996).
- [19] G. Rempe, F. Schmidt-Kaler und H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2783 (1990).
- [20] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **23**, 807, 823, 844 (1935). *Das berühmte „Katzen-Paradoxon“ findet sich auf Seite 812.*
- [21] J. Audretsch und K. Mainzer (Hrsg), *Wieviele Leben hat Schrödingers Katze?*, Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich (1990).
- [22] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond und S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4887 (1996).
- [23] N. Bohr, *Naturwissenschaften*, **16**, 245 (1928).
- [24] M. O. Scully, B. -G. Englert und H. Walther, *Nature* **351**, Heft 6322, 111 (1991); für eine populärwissenschaftlichere Darstellung sei verwiesen auf: B. -G. Englert, M. O. Scully, und H. Walther, *Scientific American*, **12/1994**, 86 (1994); dasselbe auf deutsch in: B. -G. Englert, M. O. Scully, und H. Walther, *Spektrum der Wissenschaft*, **2/1995**, 50 (1995).
- [25] S. Dürr, T. Nonn, G. Rempe, *Nature* **395**, 33 (1998).
- [26] A. Einstein, B. Podolsky und N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [27] E. Hagley, X. Maître, G. Nogues, C. Wunderlich, M. Brune, J. M. Raimond und S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1 (1997).
- [28] M. Weidinger, B. T. H. Varcoe, R. Heerlein und H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3795 (1999).
- [29] B. T. H. Varcoe, S. Brattke, M. Weidinger und H. Walther, *Generation and Detection of Fock States*, eingereicht bei *Nature* (1999).
- [30] G. Nogues, A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi, M. Brune, J. M. Raimond und S. Haroche, *Nature* **400**, 239 (1999).
- [31] K. An, J. J. Childs, R. R. Dasari und M. S. Feld, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3375 (1994).
- [32] M. O. Scully, G. M. Meyer und H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4144 (1996).

- [33] M. Löffler, *Dissertation*, Ludwig-Maximilians-Universität München (1998), erschienen als MPQ-Bericht Nr. 235.
- [34] M. Löffler, G. M. Meyer und H. Walther, *Europhys. Lett.* **41**, 593 (1998).
- [35] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc und G. Grynberg, *Atom-Photon-Interactions*, New York: Wiley (1992).
- [36] P. Meystre und M. Sargent III, *Elements of Quantum Optics*, Springer (1990).
- [37] M. Sargent III, M. O. Scully und W. E. Lamb Jr. , *Laser Physics*, Addison-Wesley Publishing Company (1974).
- [38] H. J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 1*, Springer (1999).
- [39] E. Fick, *Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie*, Aula-Verlag Wiesbaden (1988).
- [40] C. T. Bodendorf, *Diplomarbeit*, Ludwig-Maximilians-Universität München (1995).
- [41] P. Filipowicz, J. Javanainen und P. Meystre, *Phys. Rev. A* **34**, 3077 (1986).
- [42] L. A. Lugiato, M. O. Scully und H. Walther, *Phys. Rev. A* **36**, 740 (1987).
- [43] H. J. Briegel, B. G. Englert, N. Sterpi und H. Walther, *Phys. Rev. A* **49**, 2962 (1994).
- [44] J. Krause, M. O. Scully und H. Walther, *Phys. Rev. A* **34**, 2032 (1986).
- [45] M. Fleischhauer und W. P. Schleich, *Phys. Rev. A* **47**, 4258 (1993).
- [46] P. Meystre und E. M. Wright, *Phys. Rev. A* **37**, 2524 (1988).
- [47] P. Meystre, *Opt. Lett.* **12**, 669 (1987).
- [48] H. J. Briegel und B. -G. Englert, *Phys. Rev. A* **47**, 3311 (1993).
- [49] G. Raithel, *Habilitationsschrift*, Ludwig-Maximilians-Universität München (1995).
- [50] O. Benson, G. Raithel und H. Walther, *Phys. Rev. Lett* **72**, 3506 (1994).
- [51] O. Benson, *Dissertation*, Ludwig-Maximilians-Universität München (1995).
- [52] J. D. Cresser, *Phys. Rep.* **94**, 47 (1983); L. Mandel und E. Wolf, *Optical coherence and quantum optics*, Cambridge University Press (1995).
- [53] K. Vogel, W. P. Schleich, M. O. Scully, H. Walther, *Phys. Rev. A* **48**, 813 (1993).

- [54] M. O. Scully, und H. Walther, *Phys. Rev. A* **44**, 5992 (1991).
- [55] T. Quang, G. S. Agarwal, J. Bergou, M. O. Scully, H. Walther, K. Vogel und W. P. Schleich, *Phys. Rev. A* **48**, 803 (1993).
- [56] R. R. McGowan und W. C. Schieve, *Phys. Rev. A* **55**, 3813 (1997).
- [57] N. Lu, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 912 (1993).
- [58] S. Stenholm, *Phys. Rep.* **6C**, 1 (1973).
- [59] J. Gea-Banacloche, *Phys. Rev. A* **44**, 5913 (1991); J. Gea-Banacloche, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3385 (1990);
- [60] C. Wagner, R. J. Brecha, A. Schenzle, und H. Walther, *Phys. Rev. A* **47**, 5068 (1993).
- [61] J. Eiselt und H. Risken, *Phys. Rev. A* **43**, 346 (1991).
- [62] C. Leichtle, I. Sh. Averbukh und W. P. Schleich, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3999 (1996); C. Leichtle, I. Sh. Averbukh und W. P. Schleich, *Phys. Rev. A* **54**, 5299 (1996); N. B. Narozhny, J. J. Sanches-Mondragon und J. H. Eberly, *Phys. Rev. A* **23**, 236 (1981).
- [63] R. J. Brecha, A. Peters, C. Wagner und H. Walther, *Phys. Rev. A* **46**, 567 (1992);
- [64] C. Wagner, R. J. Brecha, A. Schenzle und H. Walther, *Phys. Rev. A* **46**, R5350 (1992).
- [65] G. Raithel, O. Benson und H. Walther, *Phys. Rev. Lett* **75**, 3446 (1995).
- [66] G. Antesberger, *Dissertation*, Ludwig-Maximilians-Universität München (1999).
- [67] U. Leonhardt, *Measuring the quantum state of light* (Cambridge UP, Cambridge, 1997).
- [68] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (Wiley, New York, 1973).
- [69] G. S. Agarwal, W. Lange und H. Walther, *Phys. Rev. A* **48**, 4555 (1993).
- [70] I. V. Jyotsna und G. S. Agarwal, *Optics Communications* **99**, 344 (1993).
- [71] C. F. v. Weizäcker, *Zeit und Wissen*, Carl Hanser Verlag (1992).
- [72] E. Fick und G. Sautermann, *Quantenstatistik dynamischer Prozesse, Band 1*, Velag Harri Deutscher (1983).
- [73] *Journal of Modern Optics*, no. 11/12, *Spezialausgabe über Quantum State Preparation and Measurement* (1997).
- [74] V. Bužek, G. Adam und G. Drobný, *Phys. Rev. A* **54**, 804 (1996).

- [75] K. Vogel und H. Risken, Phys. Rev. **A 40**, 2847 (1989); K. Vogel und W. Schleich, Phys. Rev. **A 44**, 7642 (1991);
- [76] N. G. Walker und C. A. Carroll, Opt. Quant. Electronics **18**, 355 (1986); J. W. Noh, A. Fougères und L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **71**, 2579 (1993); D. T. Smithey, M. Beck, M. Belsley und M. G. Raymer, Phys. Rev. Lett. **69**, 2620 (1992).
- [77] S. Schiller, G. Breitenbach, S. F. Pereira, T. Müller und J. Mlynek, Phys. Rev. Lett. **77**, 2933 (1996).
- [78] S. Wallentowitz und W. Vogel, Phys. Rev. **A 53**, 4528 (1996).
- [79] K. Banaszek und K. Wódkiewicz, Phys. Rev. Lett. **76**, 4344 (1986).
- [80] T. Opartný und D. -G. Welsch, Phys. Rev. **A 55** 1462 (1997).
- [81] T. Opartný, D. -G. Welsch und W. Vogel, Phys. Rev. **A 56**, 1788 (1997).
- [82] P. J. Bardroff, E. Mayr und W. P. Schleich, Phys. Rev. **A 51**, 4963 (1995); L. G. Lutterbach und L. Davidovich, Phys. Rev. Lett. **78** 2547 (1997).
- [83] S. Wallentowitz und W. Vogel, Phys. Rev. Lett. **75**, 2932 (1995); J. F. Poyatos, R. Walser, J. I. Cirac und P. Zoller, Phys. Rev. **A 53**, 1966 (1996); C. D'Helon und G. J. Milburn, Phys. Rev. **A 54**, 25 (1986); P. J. Bardroff, C. Leichtle, G. Schrade und W. P. Schleich, Phys. Rev. Lett. **77**, 2198 (1996); M. Freiberger, Phys. Rev. **A 55**, 4120 (1997).
- [84] D. Leibfried, D. M. Meekhof, B. E. King, C. Monroe, W. M. Itano und D. J. Wineland, Phys. Rev. Lett. **77**, 4281 (1996).
- [85] M. Fortunato, P. Tombesi und W. Schleich, Phys. Rev. **A 59**, 1371 (1999).
- [86] C. T. Bodendorf, G. Antesberger, M. S. Kim und H. Walther, Phys. Rev. **A 57**, 1371 (1998).
- [87] L. G. Lutterbach und L. Davidovich, Phys. Rev. Lett. **78** 2547 (1997).
- [88] M. S. Kim, G. Antesberger, C. T. Bodendorf und H. Walther, Phys. Rev. **A 58**, R65 (1998).
- [89] M. Wilkens und P. Meystre, Phys. Rev. **A 43**, 3832 (1991).
- [90] S. M. Dutra, P. L. Knight und H. Moya-Cessa, Phys. Rev. **A 48**, 3168 (1993); S. M. Dutra und P. L. Knight, Phys. Rev. **A 49**, 1506 (1994).
- [91] G. H. Golub und C. F. van Loan, *Matrix Computations* (Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1989); W. H. Press, S. A. Teukolsky, W T. Vetterling und B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995).

- [92] G. Hämmerlin und K. H. Hoffman, *Numerische Mathematik* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991).
- [93] H. Moya-Cessa und P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **48**, 2479 (1993).
- [94] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano, und D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1796 (1996).
- [95] W. Schleich und J. A. Wheeler, *Nature* **326**, 574 (1987); W. Schleich, D. F. Walls und J. A. Wheeler, *Phys. Rev. A* **38**, 1177 (1988).
- [96] G. Antesberger, *Diplomarbeit*, Ludwig-Maximilians-Universität München (1995).
- [97] N. F. Ramsey, *Molecular Beams* (Oxford Univ. Press, Oxford, 1956).
- [98] N. Klein, *Externer Bericht*, Universität-Gesamthochschule Wuppertal (1985).
- [99] C. Fabre und S. Haroche in *Rydberg States of Atoms and Molecules*, R. F. Stebbings, F. B. Dunning (Hrsg.), Cambridge University Press (1983).
- [100] D. Meschede, *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, 413 (1987).
- [101] C. J. Lorenzen und K. Niemax, *Physica Scripta* **27**, 300 (1983).
- [102] W. F. Buell, *A Report*, MPI für Quantenoptik, München (1991).
- [103] D. Meschede, *Dissertation*, LMU-München (1984).
- [104] S. Liberman und J. Pinard, *Phys. Rev. A* **20**, 507 (1979).
- [105] M. L. Zimmerman, M. G. Littman, M. M. Kash und D. Kleppner, *Phys. Rev.* **20**, 2251 (1979).
- [106] D. Kleppner, M. G. Littman und M. L. Zimmerman in *Rydberg States of Atoms and Molecules*; R. F. Stebbings und F. B. Dunning (Hrsg.), Cambridge University Press (1983).
- [107] C. Wiemann und T. W. Hänsch, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1170 (1976).
- [108] G. Babst, *Dissertation*, Ludwig-Maximilians-Universität München (1989).
- [109] J. D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, Walter de Gruyter (1983).
- [110] G. Müller, *Dissertation*, Universität-Gesamthochschule Wuppertal (1983).
- [111] N. Klein, *Externer Bericht*, Universität-Gesamthochschule Wuppertal (1989).

- [112] M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich und N. Zagury, Phys. Rev. **A 45**, 5193 (1992).
- [113] A. Messiah, *Quantenmechanik 2*, Walter de Gruyter (1990).
- [114] D. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice-Hall (1951).
- [115] M. S. Kim und G. S. Agarwal, Phys. Rev. **A 59**, 3044 (1999).
- [116] M. S. Kim *private Mitteilung*.
- [117] S. Brattke und B. T. H. Varcoe *private Mitteilung*.
- [118] K. E. Cahill und R. J. Glauber, Phys. Rev. **177**, 1857 (1969).
- [119] F. A. M. de Oliveira, M. S. Kim, P. L. Knight und V. Buzek, Phys. Rev. A **41**, 2645 (1990).
- [120] C. W. Gardiner, *Quantum Noise*, Springer 1991.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Herbert Walther. Seine vertrauensvolle Förderung meiner Arbeit und die Bereitstellung hervorragender Arbeitsbedingungen trugen sehr zum Gelingen bei. Von der inspirierenden Atmosphäre am MPI, welche durch die Bekanntschaft mit vielen internationalen Gastwissenschaftlern bereichert wird, habe ich sehr profitiert.

Bei Herrn Prof. Dr. Myung-Shik Kim möchte ich mich für die wunderbare Zusammenarbeit bedanken, aus der die in Kapitel 5 vorgestellten Quantenzustands-Meßmethoden hervorgingen.

Vielen Dank an Herrn Prof. Dr. Girish S. Agarwal für seine wertvolle Unterstützung bei den analytischen Rechnungen zum Jaynes-Cummings-Modell mit externer Einstrahlung.

Meinem Mitarbeiter Herrn Gunter Antesberger danke ich für die gute Zusammenarbeit, zahlreiche interessante Diskussionen und für seine kompetente Hilfe bei Computer-Simulationen und sonstigen Computer-Innovationen (Gunter gilt als der LINUX-Vorreiter dieser Abteilung).

Herzlichen Dank an Dr. Natalia Karapanagioti, die bei allen Fragen zu Feinheiten der englischen Sprache die richtige Ansprechpartnerin war.

Für das gewissenhafte und sehr hilfreiche Korrekturlesen dieser Arbeit bin ich Herrn Simon Brattke, Herrn Klaus Bodendorf und Frau Friederike Kukula sehr dankbar.

Meinen Kolleginnen und Kollegen von der Uni-Gruppe Dr. Oliver Benson, Simon Brattke, Dr. Sihong Gu, Frédéric Grosshans, Dr. Hermann Held, Dr. Natalia Karapanagioti, Dr. Victoria Ossadnik, Jochen Philippi, Gernot Stania, Dr. Benjamin Varcoe, Dr. Matthias Weidinger, René Weidner und Dr. Philip Wenzel danke ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre und die stete Hilfsbereitschaft.

Bei Herrn Dr. Miroslav Steiner und Herrn Dr. Siegfried Herbst bedanke ich mich für die Betreuung der PCs und der Work-Stations. Herr Steiner verdanke ich darüber hinaus hilfreiche Hinweise zur Mikrowellen- und Hochfrequenz-Technik.

Ein herzliches Dankeschön an Herrn Herbert Käsbauer für das Ausheizen der Resonatoren.

Bei allen Mitarbeitern der mechanischen und der elektronischen Werkstatt unter Leitung von Herrn Rolf Oehm und Herrn Dr. Sven Hegewisch bedanke ich mich für die schnelle und präzise Ausführung der vielen Aufträge.

Danke an alle Leute von D'aCHOR für den guten Ton.

Zum Schluß möchte ich mich bei meinen lieben Eltern Kristin und Klaus bedanken, die mich bei der langen Ausbildung stets optimal unterstützt haben, welche die Voraussetzung zu dieser Arbeit bildet.

Lebenslauf

Name : Christof Tilmann Bodendorf
Geburtsdatum : 16. Februar 1967
Geburtsort : Stuttgart
Familienstand : ledig
Staatsangehörigkeit : deutsch
Eltern : Klaus Bodendorf
Kristin Bodendorf (geborene Kapp)

1973 - 1978 : Grundschule in Stuttgart Botnang
1978 - 1987 : Gymnasium Königin-Olga-Stift in Stuttgart
1987 - 1989 : Zivildienst beim Roten Kreuz in Stuttgart
1989 - 1994 : Studium der Physik an der Universität Ulm
1995 : externe Diplomarbeit an der
Ludwig-Maximilians-Universität München
am Lehrstuhl Prof. H. Walther zum Thema
*Untersuchungen an einem neuen Ein-Atom-Maser
im Hinblick auf die Verwendung zweier Resonatoren*
Seit 1996 : Promotionsstudium an der
Ludwig-Maximilians-Universität München;
Promotionsstipendium durch das
Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Garching.

