SERVOMECANISME

Volume d'air de la chambre de l'éclateur :

1,283 litres .

Débit nécessaire pour que l'air ne s'échauffe au delà de 3°

80 lit/min d'air à la pression atmosphérique.

Projet de servomécanisme (fig. 1)

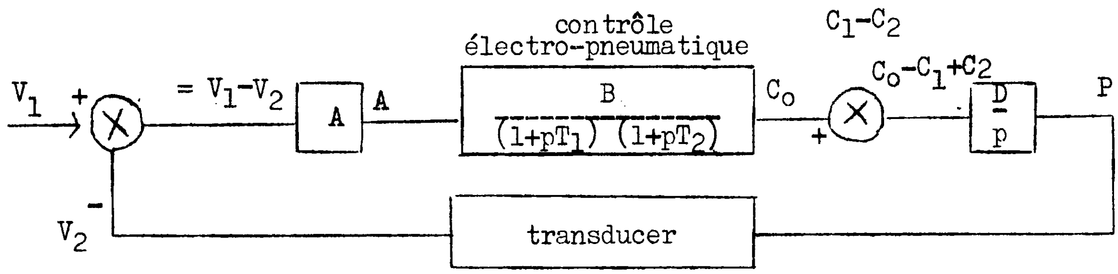

Fig. 1

Système à boucle fermée avec deux entrées :

- entrée en tension ( )
- deuxième entrée en débit $(C_1 - C_2)$

Chaîne principale (transmittance G)

- Amplificateur opérationnel de gain A
- Système de régulation électro-pneumatique avec amortissement du second ordre et présentant par suite 2 constantes de temps T_1 et T_2 (Honeywell).

$C_1 - C_2$ est un débit programmé dans le temps donnant la pression P d'une manière grossière (fig. 2). Le réglage fin étant fait sur C_o par le servo à l'aide d'une valve de course plus faible.

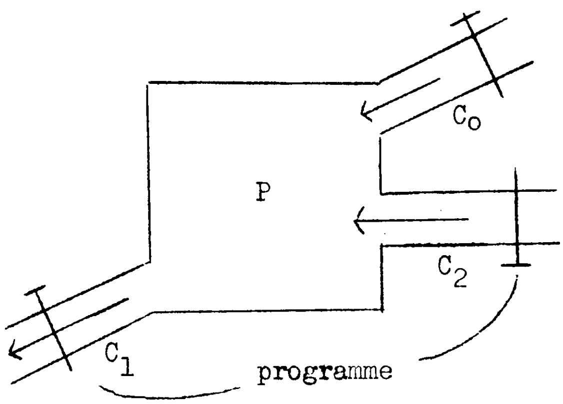

Fig. 2

<u>Chaîne de retour</u> (transmittance H)

Transducer de chez Bourns (modèle 2302) par variation de la reluctance.

Sa fonction de transfert peut se présenter sous deux formes :

soit une constante $H = E$, si le retard dans la réponse du transducer est négligeable;

soit une fonction de la forme $H = \frac{E}{1+pT_3}$ où la constante de temps T_3 simule le retard dans la réponse du transducer.

Les fonctions de transfert sont les suivantes :

$$\frac{P}{V_1} = \frac{\frac{ABD}{p(1+pT_1)\,(1+pT_2)}}{1 + \frac{ABDE}{p(1+pT_1)\,(1+pT_2)}} = \frac{ABD}{p(1+pT_1)\,(1+pT_2) + ABDE}$$

et

$$\frac{P}{C_1 - C_2} = \frac{\frac{D}{p}}{1 + \frac{ABDE}{p(1+pT_1)\,(1+pT_2)}}$$

soit

$$\frac{P}{C_1 - C_2} = \frac{D(1+pT_1)\,(1+pT_2)}{p(1+pT_1)\,(1+pT_2) + ABDE}$$

Dans le cas où la fonction de transfert de la chaîne de retour est une constante E et

$$\frac{P}{V_1} = \frac{ABD\,(1+pT_3)}{p(1+pT_1)\cdot(1+pT_2)\,(1+pT_3) + ABDE}$$

$$\frac{P}{C_1 - C_2} = \frac{D(1+pT_1)\,(1+pT_2)\,(1+pT_3)}{p(1+pT_1)\,(1+pT_2)\,(1+pT_3) + ABDE}$$

dans le second cas.

Considérations de stabilité

1er cas H = E

La transmittance en boucle ouverte est $GH = \dfrac{K}{p(1+pT_1)\ (1+pT_2)}$

avec $K = ABDE$

Critère de Routh

$$K + T_1T_2p^3 + (T_1 + T_2)\ p^2 + p = 0$$

On pose $T_1T_2 = a \quad T_1 + T_2 = b$,

d'où $a\ p^3 + b\ p^2 + p + K = 0$.

Pour que le système soit stable, il faut que

$$\begin{matrix} a > 0 \\ b > 0 \end{matrix} \qquad \text{et} \qquad K < \frac{b}{a}$$

en considérant que K est 0 comme produit de gain .

Plan de Nyquist (Fig. 3)

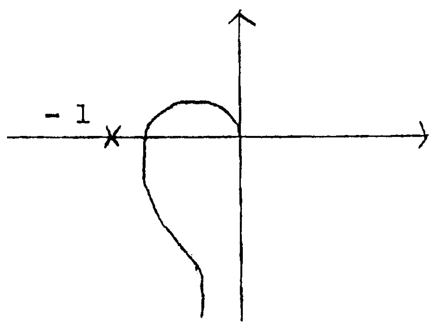

Fig. 3

Mesure de la stabilité:

$$GH = \frac{K}{p(1+pT_1(\ )1+pT_2)}$$

1. <u>Marge de gain</u>

$|GH| < -10$ ou -15 db environ .

Pour arg GH $= 180^{o}$.

$$\arg GH = -\frac{\pi}{2} - \text{arctg}\ \omega T_1 - \text{arctg}\ \omega T_2$$

d'où

$$\frac{\omega T_1 + \omega T_2}{1 - \omega^2 T_1 T_2} \longrightarrow \infty$$

soit

$$a\,\omega^2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad \omega^2 = \frac{1}{a}$$

Par suite

$$|GH|^2 = \frac{K^2}{\omega^2 (1+\omega^2 T_1^{\,2})(1+\omega^2 T_2^{\,2})} = \frac{K^2}{\frac{1}{a}(1+\frac{T_1^{\,2}}{a})(1+\frac{T_2^{\,2}}{a})}$$

$$|GH|^2 = \frac{a^3 K^2}{2a^2 + T_1^{\,2} + T_2^{\,2}} = \frac{a^2 K^2}{b^2}$$

$$|GH| = \frac{ak}{b} \quad \text{puisque a, b et K} = 0$$

Il faut donc que

$$10 \log_e \frac{aK}{b} < -1^{o} \quad \text{ou} \quad -25 \text{ db}$$

2. <u>Marge de phase</u> (Fig. 4)

$$|GH| = 1$$

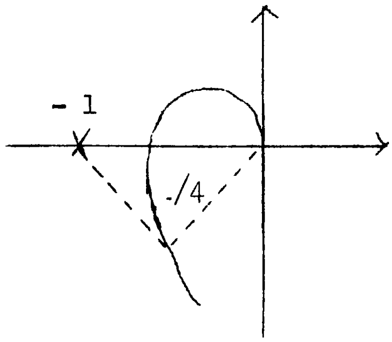

Fig. 4

On veut que

$$\arg GH \geqslant -\frac{3\pi}{4}$$

c'est à dire

$$-\frac{\pi}{2} - \text{Arctg } \omega T_1 - \text{Arctg } \omega T_2 \geqslant -\frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Arctg } \omega T_1 + \text{Arctg } \omega T_2 \leqslant \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{b\omega}{1-a\omega^2} \leqslant 1 \implies a\omega^2 + b\omega - 1 \leqslant 0$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_1 < \omega < \omega_2$$

ω_1 et ω_2 racines de $a\omega^2 + b\omega - 1 = 0$

$$\frac{K^2}{\omega^2(1+\omega^2 {T_1}^2)\ (1+\omega^2 {T_2}^2)} = 1$$

$$a^2\omega^6 + (b^2 - 2a)\ \omega^4 + \omega^2 = K^2 \qquad (1)$$

Si la marge de phase était égale à $\frac{\pi}{4}$ on aurait

$$a\omega^2 + b\omega - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow \omega^2 = \frac{1 - b\omega}{a} \qquad (2)$$

En remplaçant dans (1) $\Rightarrow K^2 = \frac{b^2}{a^2}(1 - b\omega)^2$

soit

$$K = \frac{b}{a} \left|(1 - b\omega)\right|$$

or

$1 - b\omega = a\omega^2$, donc est > 0

Par suite K prendra pour les deux racines ω_1 et ω_2 de l'équation (2) les valeurs:

$$K_1 = \frac{b}{2a^2}\left(2a + b^2 + b\sqrt{b^2 + 4a}\right)$$

et

$$K_2 = \frac{b}{2a^2}\left(2a + b^2 - b\sqrt{b^2 + 4a}\right)$$

On aura donc

$$a^2\omega_1^{\ 6} + (b^2 - 2a)\ \omega_1^{\ 4} + \omega_1^{\ 2} = K_1^{\ 2}$$

PS/4732 et

$$a^2\omega_2^{\ 6} + (b^2 - 2a)\ \omega_2^{\ 4} + \omega_2^{\ 2} = K_2^{\ 2}$$

Donc pour que

$\omega_1 < \omega < \omega_2$ $\qquad$ $K < K_2$; $K_1 < K$

avec toujours $\qquad K < \frac{b}{a}$

or $\qquad K_1 > \frac{b}{a}$

Donc la condition est que

$$K < \frac{b}{a} + \frac{b^2}{2a^2} \left(b - \sqrt{b^2 + 4a}\right)$$

La solution $K > K_1$ correspond à la figure 6 .

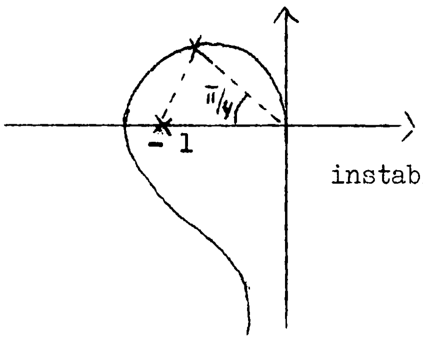

Fig. 6

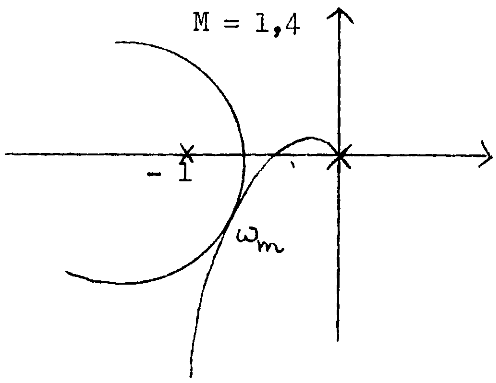

Fig. 7

Critère de Hall

Un autre critère mesurant la stabilité est le critère de Hall :

Le max du module du gain en boucle fermée doit être inférieur ou égal à 1,4 . C'est à dire, la courbe au maximum tangente au cercle de module constant égale à 1,4 .

Transmittanc en boucle fermée :

$$\frac{G}{1 + GH} = \frac{ABD}{p(1+pT_1)(1+pT_2) + ABDE}$$

Pour des gains donnés

$$\left|\frac{G}{1+ GH}\right| \text{ max pour } \left|p(1+pT_1)(1+pT_2)\right| \text{ minimum}$$

soit

$a^2\omega^6 + (b^2 - 2a)\,\omega^4 + \omega^2$ minimum .

Solutions

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad 6a^2\,\omega^4 + (b^2 - 2a)\,\omega^2 + 2 = 0$$

Donc

$$\omega_M^2 = \frac{2a - b^2}{3a^2} \pm \frac{\sqrt{b^4 + a^2 - 4ab^2}}{3a^2}$$

qui correspond à

$$\left|\frac{G}{1+GH}\right|^2 = \left|\frac{(ABD)^2}{(K-b\omega^2)^2 + \omega^2(1- a\omega^2)^2}\right| \text{ d'où la condition}$$

$$\frac{(ABD)^2}{\sqrt{(K- b\omega^2)^2 + \omega^2(1-a\omega^2)^2}} \leqslant 1{,}4 \quad \text{pour } \omega = \omega_M$$

Méthode d'Evans (Fig. 8)

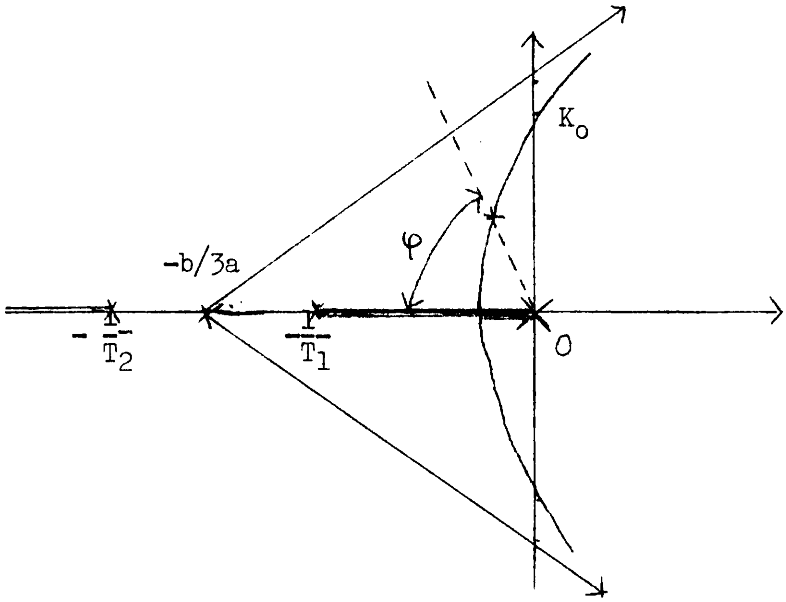

Fig. 8

Lieu $1 + GH = 0 \quad \Rightarrow \quad K + ap^3 + bp^2 + p = 0$

On a 3 pôles, soit trois réels, soit 1 réel et deux imaginaires conjugués .

Premier cas (3 pôles réels) : $b^2 > 4a$

3 asymptotes : $\frac{\pi}{3}$, π et $\frac{2\pi}{3}$

stable si $K < K_o$

Valeur pour $p = j\omega$

$$k_o - aj\omega^3 - b\omega^2 + j\omega = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} aj\omega^2 = 1 \\ K_\delta - b\omega^2 = 0 \end{array}\right) \Rightarrow K_o = \frac{b}{a}$$

On retrouve bien $K < \frac{b}{a}$.

Compromis entre la stabilité et la précision pour $\varphi = 67^0$

$\mathrm{tg}\ \varphi = 2{,}3$

d'où

$p = \alpha\,(-1 + 2{,}3\ j)$

d'où les deux équations : $K = -15\ a\alpha^3 + 4{,}3\ b\alpha^2 + \alpha$
avec la solution positive de
$2{,}3\ a\alpha^2 + 2\ b\alpha - 1 = 0$

<u>Second cas</u> (1 pôle réel, 2 pôles imaginaires conjugués)

$b^2 < 4a$

On peut avoir plusieurs diagrammes, 9a, 9b ou 9c.

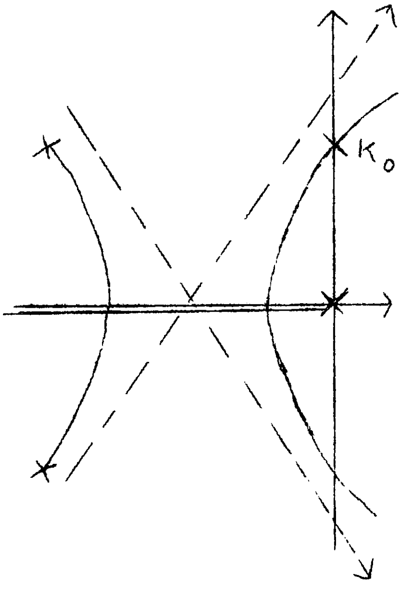

Fig. 9 a

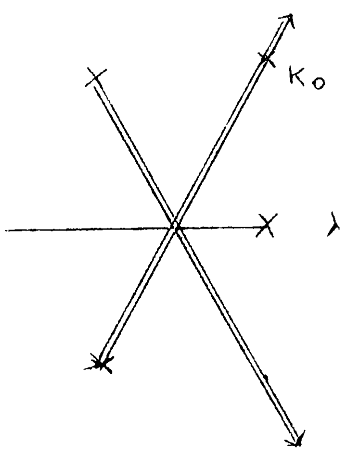

Fig. 9b

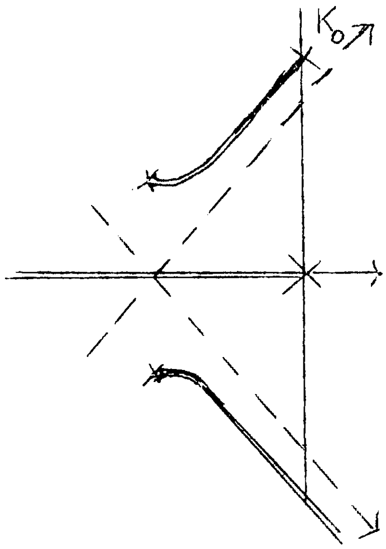

Fig. 9c

Mais les conditions de stabilité restent les mêmes.

Influence des variations de $C_1 - C_2$ sur la valeur de P

On a

$$\varepsilon(p) = V_1 - V_2 = \frac{1}{1 + \frac{ABDE}{p(1+pT_1)(1+pT_2)}} V_1(p) - \frac{D/p}{1+\frac{ABDE}{p(1+pT_1)(1+pT_2)}} (C_1-C_2)$$

soit

$$\varepsilon(p) = \frac{p(1+pT_1)(1+pT_2)}{p(1+pT_1)(1+pT_2)+K} V_1(p) - \frac{mD(1+pT_1)(1+pT_2)}{p(1+pT_1)(1+pT_2)+K} (C_1-C_2)$$

$$\text{et } P = \frac{D(1+pT_1)(1+pT_2)}{p(1+pT_1)(1+pT_2)+K} (C_1 - C_2)$$

Pour une entrée V, constante, une perturbation $\Delta (C_1 - C_2)$ sur le débit programmé entraîne une variation sur la pression

$$\Delta P = \frac{D}{p + \frac{K}{(1pT_1)(1+pT_2)}} \Delta (C_1 - C_2)$$

Pour une fréquence nulle une variation $(C_1 - C_2)$ sur le débit programmé entraîne une variation de pression égale à

$$\Delta P = \frac{D}{K} \Delta (C_1 - C_2) \Rightarrow \Delta P = \frac{\Delta (C_1 - C_2)}{ABE}$$

Deuxième cas $H = \frac{E}{1+pT_3}$

La transmittance en boucle ouverte est alors :

$$GH = \frac{K}{p(1+pT_1)(1+pT_2)(1+pT_3)}$$

<u>Critère de stabilité de Routh</u>

$$ap^4 + bp^3 + cp^2 + p + K = 0$$

$$a = T_1T_2T_3 \qquad b = \sum_{i \neq j} T_iT_j \qquad \text{et} \qquad c = \sum T_i$$

$$\begin{array}{lll}
a & c & 1 \\
b & 1 & \\
\frac{bc-a}{b} & k & \\
\frac{\frac{bc-a}{b} - kb}{\frac{bc-a}{b}} & 0 & \\
k & &
\end{array}$$

conditions $a > 0$
$b > 0$

$bc - a > 0 \Rightarrow bc > a$

ou $c > \frac{a}{b}$

et $\frac{bc - a}{b} - kb > 0$

$bc - a - Kb^2 > 0$

$K < \frac{bc - a}{b^2}$

seule condition subsistant car elle suppose que $bc - a$ est > 0 puisque K est > 0.

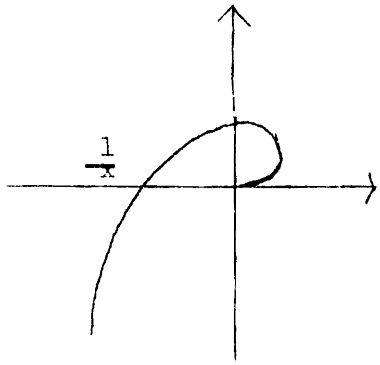

Fig. 10

Méthode de Nyquist (Fig. 10)

$$\text{Marge de gain } GH = \frac{K}{ap^4 + bp^3 + cp^2 + p}$$

Pour $\arg GH = \pi$

C'est à dire :

$$-\frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\, \omega T_1 - \text{Arctg}\, \omega T_2 - \text{Arctg}\, \omega T_3 = \pi$$

$$\text{Arctg}\, \omega T_1 + \text{Arctg}\, \omega T_2 + \text{Arctg}\, \omega T_3 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{b}$$

D'où

$$|GH|^2 = \frac{K^2}{\omega^2(1+\omega^2 T_1^{\,2})(1+\omega^2 T_2^{\,2})(1+\omega^2 T_3^{\,2})} = \frac{b^4 K^2}{(b+T_1^{\,2})(b+T_2^{\,2})(b+T_3^{\,2})}$$

$$|GH|^2 = \frac{b^4 K^2}{b^3 + b^2(c^2 - 2b) + b(b^2 - 2ac) + a^2}$$

$$|GH| = \frac{b^2 K}{bc - a}$$

il faut que

$$10 \log_e \frac{b^2 K}{bc - a} < -10 \text{ ou } -15 \text{ db}$$

Marge de phase

$$\arg |GH| = -\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}\,\frac{c\omega - a\omega^3}{1 - b\omega^2}$$

il faut que

$$\arg |GH| \geqslant -\frac{3\pi}{4}$$

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{c\omega - a\omega^3}{1 - b\omega^2} \leqslant \frac{\pi}{4}$$

ou

$$c\omega - a\omega^3 \leqslant 1 - b\omega^2$$

$$a\omega^3 - b\omega^2 - c\omega + 1 \geqslant 0$$

pour ω solution de

$$\frac{K^2}{\omega^2(1+\omega^2T_1{}^2)(1+\omega^2T_2{}^2)(1+\omega^2T_3{}^2)} = 1$$

$$K^2 = a^2\omega^8 + (c^2 - 2b)\omega^6 + (b^2 - 2\,ac)\,\omega^4 + \omega^2$$

Méthode de Evans

Lieu des racines $ap^4 + bp^3 + cp^2 + p + K = 0$

Si les poles sont réels : $0 - \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}$

4 asymptotes : $\frac{\pi}{4}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$

Point d'intersection d'abscisse :
$-\frac{b}{4a}$

T_3 étant supposé faible devant T_1 et T_2 puisque elle simule le retard dans la réponse du transducer.

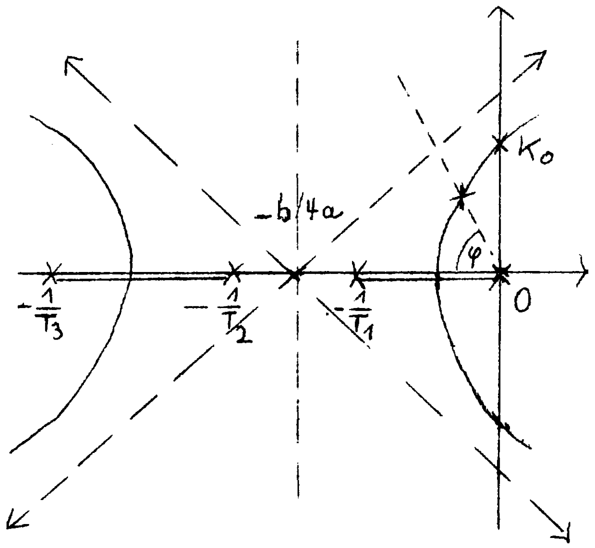

Fig. 11

Si on considère que pour la stabilité le système peut se réduire au système du second ordre dont le comportement est représenté par la partie de courbe à droite sur la figure 11, on peut écrire que le système ne sera stable que si

$$\underline{\underline{K < K_o}}$$

et le compromis entre la précision et la stabilité se fera comme dans le premier cas en prenant $\varphi = 67^o$ environ, d'où une valeur de K correspondante.

Une fois que les constantes de temps seront connues, il sera possible d'étudier graphiquement le système par les méthodes de Black ou d'Evans et rechercher des circuits correcteurs séries ou parallèles mécessaires pour améliorer la précision et la stabilité.

B. de Fornel

Etudiant de vacances
de L'ENSEEHT de Toulouse

Distribution : (ouverte)
Personnel scientifique de la Division MPS

PS/4732/mt