



JOURNÉES  
FIABILITÉ DES MATÉRIAUX ET DES STRUCTURES  
26-28 MARS 2008, NANTES

RECUEIL DES ARTICLES



Avec le soutien des pôles de compétitivité



# Table des matières

## Session TS1-A

<b>Modélisation des données</b>	<b>4</b>
Prise en compte des données expérimentales dans un modèle probabiliste de propagation de fissures. F. Perrin, B. Sudret . . . . .	5
Modélisation de l'erreur lors de mesures de paramètres sur des structures : application aux structures marines. F. Schoefs, S. Bonnet, J. Boero, A. Clément . . . . .	17
La fusion de données de contrôle non destructif au service du diagnostic de l'état du béton : qualité des données et réduction des incertitudes. M-A Ploix, D. Breyse, V. Garnier, M. Sbartai . . . . .	27
Méthodologie d'évaluation possibiliste de la performance d'ouvrages de génie civil. A. Talon, C. Curt, D. Boissier . . . . .	29
Prise en compte de la variabilité des propriétés élastiques du béton dans le calcul de la tenue des enceintes de confinement. T. de Larrard, JB. Colliat, F. Benboudjema, JM. Torrenti . . . . .	40

## Session TS1-B

<b>Modélisation des données</b>	<b>51</b>
Identification de variable aléatoire sur le chaos polynomial : application aux données d'inspection et d'instrumentation de structures existantes. A. Clement, H. Yáñez-Godoy, F. Schoefs, A. Nouy . . . . .	52
Méthode MCMC pour l'actualisation bayésienne des déformations différées du béton d'une enceinte de confinement modélisée par éléments finis. M. Berveiller, Y. Le Pape, B. Sudret, F. Perrin . . . . .	66
Evaluation fiabiliste de l'impact des conditions environnementales sur la corrosion des structures en béton armé sujettes à la pénétration de chlorures. J. El Hassan, A. Chateaneuf, P. Bressolette . . . . .	77
Application aux barrages et aux bâtiments de la méthodologie d'évaluation possibiliste de la performance. A. Talon, C. Curt, D. Boissier . . . . .	88

## Session TS2-A

<b>Méthodes de calcul, propagation d'incertitudes</b>	<b>99</b>
Analyse de sensibilité par éléments finis stochastiques d'un essai d'arrachement. J. Humbert, J. Baroth, L. Daudeville . . . . .	100
Fluid Bearing Failure Probability Evaluation using Finite Element Modelling. A. Charki, D. Bigaud, S. Cloupet, F. Guérin . . . . .	111
Développements par chaos polynomiaux creux et adaptatifs - application à l'analyse de fiabilité. G. Blatman, B. Sudret . . . . .	125
Méthode éléments finis stochastiques étendus pour la prise en compte des incertitudes géométriques dans le calcul de structures. A. Clément, A. Nouy, F. Schoefs . . . . .	137

## Session TS2-B

<b>Méthodes de calcul, propagation d'incertitudes</b>	<b>149</b>
L'algorithme du gradient projeté avec contrôle d'erreur pour la fiabilité structurale. F. Duprat, A. Sellier, X.S. Nguyen . . . . .	150

Dimensionnement probabiliste de la durabilité des bétons en environnement marin. F. Deby, M. Carcasses, A. Sellier . . . . .	161
<sup>2</sup> SMART : SVM et Subset pour la fiabilité. F. Deheeger, M. Lemaire, T. Yalamas . . . . .	172
Propagation d'incertitude : Analyse de la variation paramétrique d'une surface de réponse polynomiale. A. Yaméogo . . . . .	183
Approche multi-échelle du transport d'incertitude pour les matériaux composites. A. Alzina, F. Dau, L. Guillaumat . . . . .	194
<b>Session TS3</b>	
<b>Maîtrise des risques et décision</b>	<b>205</b>
Une approche fiabiliste fonction du temps appliquée au vieillissement des structures navales à comportement non-linéaire. M. Cazuguel, M. Mejri, J.Y. Cognard . . . . .	206
Optimisation de l'inspection de structures protégées à dégradation multiphasique. D. Breyse, F. Schoefs, A. O'Connor, E. Sheils . . . . .	217
<b>Session TS4-A</b>	
<b>Problèmes transverses</b>	<b>230</b>
Estimation of fragility curves for seismic probabilistic risk assessment by means of numerical experiments. I. Zentner, A. Nadjarian, N. Humbert, E. Viallet . . . . .	231
Analyse probabiliste du tassement de consolidation primaire d'une fondation superficielle. L. Rouaski, S. Belkacemi . . . . .	249
Etude d'une cabane d'ostréiculteur. S. Yotte, SM Elachachi . . . . .	250
Extrapolation des effets extrêmes du trafic sur un pont autoroutier. D. Siegert, B. Jacob . . . . .	251
<b>Session TS4-B</b>	
<b>Problèmes transverses</b>	<b>260</b>
Mieux appréhender la durabilité des bétons par l'approche probabiliste. N. Hyvert, A. Sellier, F. Duprat, P. Francisco . . . . .	261
La fiabilité au service de la gestion d'un ouvrage. M. Pendola, T. Yalamas . . . . .	273
Du parc de structures à la structure : avantages et inconvénients du i-form. O. Priou, F. Schoefs, A. Nouy, M. Birades, V. Quiniou . . . . .	274

---

Session TS1-A  
Modélisation des données

---



# **Prise en compte des données expérimentales dans un modèle probabiliste de propagation de fissures.**

F. Perrin, B. Sudret

---

---

# Prise en compte des données expérimentales dans un modèle probabiliste de propagation de fissure

**Frédéric Perrin\* — Bruno Sudret\*\***

\* *Phimeca Engineering S.A.,  
Centre d'Affaires du Zénith  
34, rue de Sarliève  
63800 COURNON d'Auvergne  
perrin@phimeca.com*

\*\* *Electricité de France - R&D Division, Site des Renardières,  
F-77818 Moret-sur-Loing*

---

*RÉSUMÉ. On s'intéresse dans ce papier à prédire l'évolution de la longueur d'une fissure sous l'action d'un chargement cyclique à partir d'un modèle de propagation de fissure. Il s'agit dans un premier temps d'identifier l'incertitude aléatoire des paramètres du modèle de Paris-Erdogan en utilisant 68 courbes de propagation de fissure obtenues sur des éprouvettes identiques en aluminium. Dans un second temps, une méthode d'actualisation inspirée du formalisme bayésien classique est développée et permet d'actualiser la cinétique de propagation d'une fissure pour une éprouvette particulière.*

*ABSTRACT. The present paper deals with the identification of a probabilistic model of fatigue crack growth under homogeneous cycling loading. First, a semi-parametric maximum likelihood approach is proposed to identify the aleatoric uncertainty of the Paris-Erdogan parameters, considering a 68 trajectories alloy data set. Then, a general Bayesian updating scheme is introduced to combine prior information on model parameters and monitoring data related to a given specimen.*

*MOTS-CLÉS : identification probabiliste ; actualisation probabiliste ; propagation de fissure.*

*KEYWORDS: probabilistic identification ; probabilistic updating ; crack propagation.*

---

## 1. Introduction

La fatigue des matériaux est un de mécanisme qui sous l'action de contraintes ou déformations cycliques modifie les propriétés locales d'un matériau et peut entraîner la formation de fissures et éventuellement la rupture de la pièce. Les étapes principales du processus sont l'amorçage de fissures (à partir de défauts déjà présents dans le matériau ou en surface), la propagation des fissures et la rupture finale.

On s'intéresse dans ce papier à prédire l'évolution de la longueur d'une fissure sous l'action d'un chargement cyclique à partir d'un modèle de propagation de fissure [PER 08]. Virkler *et al.* [VIR 80] ont montré que ce phénomène présente une dispersion expérimentale assez forte. La base de données obtenue par Virkler *et al.* a donné lieu à différentes analyses statistiques [DIT 86, KOT 98] dont l'objectif est l'identification des paramètres probabilisés de la loi de propagation utilisée (*i.e.* la loi de Paris-Erdogan).

A partir des données de propagation de fissure obtenues par Virkler *et al.*, l'objectif de ce papier est double. Dans un premier temps, une méthode d'identification semi-paramétrique est appliquée sur l'ensemble des données disponibles, dans le but d'identifier le meilleur modèle probabiliste *a priori* des paramètres d'entrée de la loi de Paris-Erdogan. On s'intéresse ensuite à une cinétique de propagation particulière et l'objectif est de prédire la trajectoire de la longueur à partir des premières mesures disponibles après l'application de quelques cycles de chargement. Pour ce faire, une méthode d'actualisation bayésienne est proposée.

## 2. Modèle numérique et données expérimentales

Virkler *et al.* ont étudié la dispersion de données de propagation de fissure à partir d'une campagne d'essais réalisée sur 68 éprouvettes en aluminium 2024-T3. Les éprouvettes correspondent à des plaques rectangulaires identiques comme illustré sur la figure 1 (longueur  $L = 558,8$  mm, largeur  $w = 152,4$  mm et épaisseur  $d = 2,54$  mm).

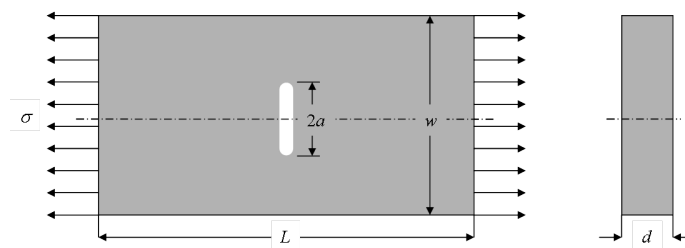


Figure 1 – Géométrie des éprouvettes

Chaque trajectoire de propagation contient 164 points de mesure de la taille de fissure  $a$ . L'amplitude de traction alternée est  $\Delta\sigma = 48,28$  MPa et le rapport de contraintes est  $R = 0,2$ . Les données récoltées présentent une dispersion importante (figure 2) : la longueur de fissure maximale pour laquelle l'expérience est arrêtée, *i.e.*  $a_{lim} = 49,8$  mm est atteinte entre 215000 et 310000 cycles, suivant l'éprouvette testée.

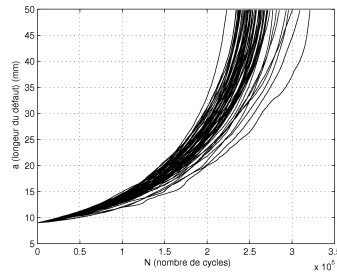


Figure 2 – Données expérimentales obtenues par Virkler *et al.*

Le modèle utilisé pour représenter le phénomène de propagation de fissure est le modèle de Paris-Erdogan [PAR 63] :

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K)^m \quad [1]$$

Dans cette expression,  $a$  est la longueur du défaut,  $\Delta K$  est l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes pour un cycle d'amplitude  $\Delta\sigma$  et  $(C, m)$  sont des paramètres caractéristiques de la loi de propagation pour le matériau étudié. L'amplitude du facteur d'intensité de contraintes  $\Delta K$ , dans le cas d'une pièce finie contenant une fissure en mode I, peut être évaluée par :

$$\Delta K = \Delta\sigma F\left(\frac{a}{w}\right) \sqrt{\pi a} \quad [2]$$

où  $F\left(\frac{a}{w}\right)$  est le facteur de correction de Feddersen, défini pour une éprouvette de forme rectangulaire par :

$$F\left(\frac{a}{w}\right) = \frac{1}{\sqrt{\cos\left(\pi \frac{a}{w}\right)}}, \text{ pour } \frac{a}{w} < 0.7 \quad [3]$$

où  $w$  représente la largeur de l'éprouvette.

### 3. Identification semi-paramétrique

#### 3.1. Approximation d'une variable aléatoire par des polynômes de gaussiennes

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}(\cdot))$  un espace de probabilité, où  $\Omega$  est l'ensemble des résultats possibles,  $\mathcal{F}$  est une  $\sigma$ -algèbre de  $\Omega$  et  $\mathbb{P}(\cdot)$  est la mesure de probabilité. Soit  $X(\omega)$  une variable aléatoire ( $\omega$  représentant l'aléa), dont la densité de probabilité est notée  $f_X$ . L'espace des variables aléatoires de moments d'ordre 2 finis muni du produit scalaire  $\langle X, Y \rangle \stackrel{\text{def}}{=} E[XY]$  est un espace de Hilbert, noté  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}(\cdot))$ . On montre que toute variable aléatoire de  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}(\cdot))$  peut s'écrire comme une série polynomiale d'une variable aléatoire gaussienne, centrée et réduite  $\xi$  [PUI 02] :

$$X(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j H_j(\xi(\omega)) \quad [4]$$

Dans cette expression,  $\{H_j(x), j \in \mathbb{N}\}$  sont les polynômes d'Hermite, qui sont orthogonaux par rapport à la mesure gaussienne  $\varphi(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$  :

$$\langle H_i, H_j \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H_i(x) H_j(x) \varphi(x) dx = \delta_{ij} i! \quad [5]$$

En d'autres termes, les coefficients  $\mathcal{A} = \{a_j, j \in \mathbb{N}\}$  de (4) sont les coordonnées de  $X$  dans la base des polynômes d'Hermite de  $\xi$ .

#### 3.2. Méthode d'identification par maximum de vraisemblance

Le calcul de la densité de probabilité de la variable aléatoire  $X$  peut se faire par simulations de Monte-Carlo. Soit  $\mathcal{N} = \{\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(N_{\text{sim}})}\}$  un échantillon synthétique d'une variable aléatoire gaussienne, centrée et réduite. Connaissant le vecteur  $\mathcal{A}$ , une estimation par noyau [WAN 95] permet d'approcher la densité de probabilité  $f_X$  au point  $x$  :

$$\hat{f}_X(x, \mathcal{A}) \approx \hat{f}_{X\text{PC}}(x, \mathcal{A}) = \frac{1}{N_{\text{sim}} h} \sum_{k=1}^{N_{\text{sim}}} K\left(\frac{x - \sum_{j=0}^p a_j H_j(\xi^{(k)})}{h}\right) \quad [6]$$

où  $K$  est une fonction noyau (*e.g.* gaussien, triangulaire, Epanechnikov, etc.) et  $h$  est la largeur de bande. En pratique, le nombre  $N_{\text{sim}}$  de tirages nécessaire pour une bonne approximation de la densité  $\hat{f}_X$  doit être suffisamment grand (*e.g.* 1 000 - 10 000).

Supposons maintenant une collection d'*observations réelles* de  $X$ , notée  $\mathcal{X} = \{x^{(1)}, \dots, x^{(Q)}\}$ . La vraisemblance des données s'exprime comme suit :

$$L(\mathcal{A}; \mathcal{X}) = \prod_{q=1}^Q \hat{f}_X(x^{(q)}, \mathcal{A}) \quad [7]$$

et l'estimateur du maximum de vraisemblance est obtenu en résolvant :

$$\hat{\mathcal{A}} = \arg \max \prod_{q=1}^Q \hat{f}_X(x^{(q)}, \mathcal{A}) \quad [8]$$

Ce qui revient finalement à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\hat{\mathcal{A}} = \arg \min - \sum_{q=1}^Q \ln(\hat{f}_X(x^{(q)}, \mathcal{A})) \quad [9]$$

Le problème (9) est un problème d'optimisation qui doit être résolu avec une méthode numérique adaptée. Les méthodes classiques de Quasi-Newton requièrent l'évaluation du gradient de la fonction de vraisemblance, obtenue par différences finies. L'algorithme CONDOR (*CONstrained, Non-linear, Direct, parallel Optimization using trust Region method for high-computing load function*), développé par Vandenberg [Van 04] est un outil particulièrement adapté à la résolution de ce problème d'optimisation.

### 3.3. Application au modèle de propagation de fissure

#### 3.3.1. Modèle probabiliste alternatif pour la loi de Paris-Erdogan

Pour chaque trajectoire expérimentale de la figure 2, on peut identifier le meilleur couple  $(m, \log C)$  à partir de la relation (1). Pour une trajectoire donnée, *i.e.* pour un jeu de données  $\{a^{(q)}, N^{(q)}\}$ ,  $q = \{1, \dots, 164\}$ , le problème à résoudre est le suivant :

$$(m^*, \log C^*) = \arg \min_{m, \log C} \sum_{q=1}^{164} \left[ N^{(q)} - N_{\text{calc}}(a^{(q)}) \right]^2 \quad [10]$$

où  $N_{\text{calc}}$  est le nombre de cycles évalué à partir de (1). Les valeurs estimées des 68 couples  $(m, \log C)$  sont représentées sur la figure 3.

De par la forte dépendance linéaire qui existe entre  $m$  et  $\log C$ , on peut choisir de représenter un des paramètres (*e.g.*  $m(\omega)$ ) en fonction de l'autre en utilisant une méthode de régression linéaire, *i.e.* chercher la droite  $\log C = Am + B$  qui passe au plus près des 68 couples  $(m, \log C)$ . Selon la méthode des moindres carrés, cela revient à rendre minimale la somme des écarts des points à la droite :

$$\chi^2 = \sum_{q=1}^{68} \left[ \log C^{(q)} - Am^{(q)} - B \right]^2 \quad [11]$$

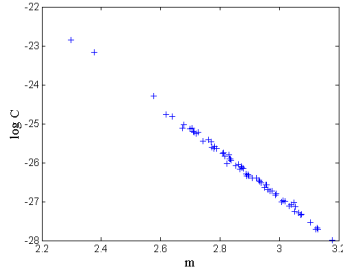


Figure 3 – Propagation de fissure – Identification des couples  $(m, \log C)$  à partir des données de [VIR 80]

où  $A$  et  $B$  sont les paramètres inconnus à estimer, respectivement le coefficient directeur de la droite et l'ordonnée à l'origine. Les paramètres qui minimisent la quantité (11) sont  $A = -5,911$  et  $B = -9,198$ .

L'écart résiduel entre mesure et prédiction du modèle est donné par :

$$\epsilon^{(q)} = \log C^{(q)} - Am^{(q)} - B \quad [12]$$

On suppose ensuite que les variables aléatoires  $m(\omega)$  et  $\epsilon(\omega)$  représentant respectivement les échantillons  $m^{(q)}$  et  $\epsilon^{(q)}$ ,  $q = \{1, \dots, 68\}$  sont indépendantes. Ainsi, le modèle probabiliste des paramètres de la loi de Paris-Erdogan est représenté par deux variables aléatoires,  $m$  et  $\epsilon$ , et deux paramètres déterministes,  $A$  et  $B$ .

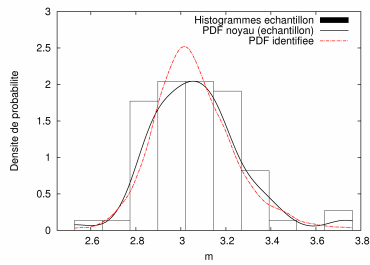
### 3.3.2. Identification des variables aléatoires $m$ et $\epsilon$

Un chaos polynomial de dimension 1 et d'ordre 3 est utilisé pour représenter chaque variable aléatoire, soit 4 coefficients inconnus  $\mathcal{A}^l = \{a_0^l, a_1^l, a_2^l, a_3^l\}$ ,  $l = m, \epsilon$ . Un noyau gaussien est utilisé dans l'approximation de la densité des observations avec  $N = 10\,000$  tirages. Les coefficients identifiés par maximum de vraisemblance (cf. relation (9)), pour chacune des deux variables aléatoires, sont rassemblés dans le tableau 1.

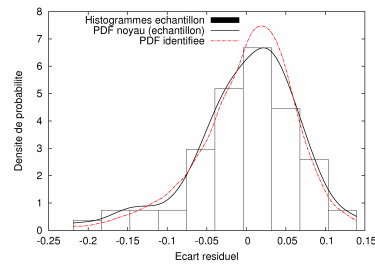
De manière générale, les moments statistiques identifiés (tableau 1) sont assez proches des moments empiriques calculés à partir des deux échantillons expérimentaux. Ces résultats sont confirmés par les représentations graphiques des densités de probabilité (figure 4). Ces densités sont obtenues à partir d'une estimation à noyau sur un échantillon généré à partir des coefficients du chaos polynomial. Chaque densité identifiée est comparée d'une part à l'histogramme de l'échantillon et d'autre part à la densité à noyau estimée directement sur l'échantillon. Les densités identifiées donnent une bonne approximation en tendance centrale et sont moins précises dans les queues de distribution. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'il est difficile d'évaluer les queues de distribution d'une variable aléatoire identifiée à partir d'un échantillon de taille  $Q = 68$ .

Tableau 1 – Propagation de fissure – Identification des variables aléatoires  $m$  et  $\epsilon$

Moments statistiques	Identifiés	Échantillon	Erreur relative (%)
Moyenne ( $m$ )	3,0973	3,0713	0,08
Ecart-type ( $m$ )	0,2094	0,2051	2,07
Asymétrie ( $m$ )	1,0446	0,8018	30,29
Aplatissement ( $m$ )	6,3776	4,4974	28,91
Moyenne ( $\epsilon$ )	0,0020	-0,0001	–
Ecart-type ( $\epsilon$ )	0,066	0,0659	0,67
Asymétrie ( $\epsilon$ )	-0,9779	-0,8779	11,39
Aplatissement ( $\epsilon$ )	5,7076	4,2947	32,90



(a)  $m$



(b)  $\epsilon$

Figure 4 – Densités de probabilité des paramètres de loi de Paris-Erdogan

#### 4. Actualisation de la longueur du défaut pour une plaque fissurée

On s'intéresse maintenant à prédire la trajectoire de la propagation d'une fissure à partir de mesures de la longueur d'une fissure sur *une éprouvette donnée*. Une courbe de propagation est choisie parmi les 68 essais disponibles dans la base de données de Virkler : elle correspond à une propagation de fissure lente (la longueur limite du défaut  $a_{lim} = 49,8$  mm est atteinte après 310 000 cycles de chargement alterné). A partir de 5 mesures de la longueur du défaut observées sur la plage  $[0; 100000]$  cycles, on s'intéresse à prédire la trajectoire de la propagation de cette fissure en utilisant une méthode d'actualisation probabiliste.



#### 4.1. Formulation du problème

Le modèle de propagation de fissure (*i.e.* la loi de Paris-Erdogan) peut s'écrire  $a(N) = \mathcal{M}(\mathbf{x}, N)$  où  $\mathbf{x} = (m, \log C)$ . Soit  $\tilde{a}(N)$  la valeur réelle de la réponse du système. Si le modèle  $\mathcal{M}$  est "parfait" et si la réalisation  $\tilde{\mathbf{x}}$  des paramètres d'entrée est connue alors on peut écrire :

$$\tilde{a}(N) = \mathcal{M}(\tilde{\mathbf{x}}, N) \quad [13]$$

Supposons que l'on dispose par ailleurs d'observations expérimentales, regroupées dans le vecteur  $\mathcal{Y} = \{a^{(1)}, \dots, a^{(Q)}\}$ , correspondant à la longueur de fissure d'une éprouvette aux différents instants  $\{N^{(1)}, \dots, N^{(Q)}\}$ . Les observations expérimentales diffèrent du modèle, on suppose donc qu'il existe une réalisation  $e^{(q)}$  d'une variable aléatoire  $E$  gaussienne centrée d'écart-type  $\sigma_E$ , considérée ici comme *erreur de modèle*, vérifiant :

$$a^{(q)} = \mathcal{M}(\tilde{\mathbf{x}}, N^{(q)}) + e^{(q)} \quad [14]$$

La densité de probabilité conditionnelle de la variable aléatoire  $A_q$  est donnée par :

$$f_{A_q|\mathbf{X}}(a, \mathbf{x}, N^{(q)}) = \varphi\left(\frac{a - \mathcal{M}(\mathbf{x}, N^{(q)})}{\sigma_E}\right) \quad [15]$$

où  $\varphi$  est la densité de probabilité normale centrée réduite.

Le théorème de Bayes permet d'évaluer la distribution *a posteriori* de  $\mathbf{X}$ , notée  $f_{\mathbf{X}}$  :

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = c p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) L(\mathbf{x}; \mathcal{Y}) \quad [16]$$

où  $p_{\mathbf{X}}$  est la densité de probabilité jointe de  $m$  et  $\log C$  identifiée dans la première partie de l'étude,  $c$  est la constante de normalisation et  $L$  est la fonction de vraisemblance des observations :

$$L(\mathbf{x}; \mathcal{Y}) = \prod_{q=1}^Q f_{A_q|\mathbf{X}}(a, \mathbf{x}, N^{(q)}) \quad [17]$$

La difficulté du calcul de  $f_{\mathbf{X}}$  dans la relation (16) réside dans l'évaluation de la constante de normalisation  $c$ . L'approche utilisée ici consiste à générer directement un échantillon selon la densité (16) sans calculer la constante  $c$  : il s'agit d'une méthode de simulation de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC) [O'H 04]. L'algorithme utilisé est celui de Metropolis-Hastings en cascade [TAR 05]. Pour plus de détails, consulter [PER 08].

#### 4.2. Application à la propagation de fissure

La figure 5 présente les densités de probabilité *a priori* et *a posteriori* des paramètres  $\log C$  et  $m$ . Les mesures utilisées dans la procédure d'actualisation MCMC

sont au nombre de 5 avec  $\sigma_E = 0,2$  mm pour l'écart-type de l'erreur de modèle. La dispersion des paramètres d'entrée du modèle de Paris-Erdogan est sensiblement identique : les coefficients de variation de  $\log C$  et  $m$  ont des valeurs *a posteriori* de 7,3% et 4,7% contre des valeurs initiales de 6,8% et 4,5%. Cependant, les distributions évoluent fortement : les densités de probabilité *a posteriori* présentent deux modes distincts dont un qui correspond au mode de la densité *a priori*.

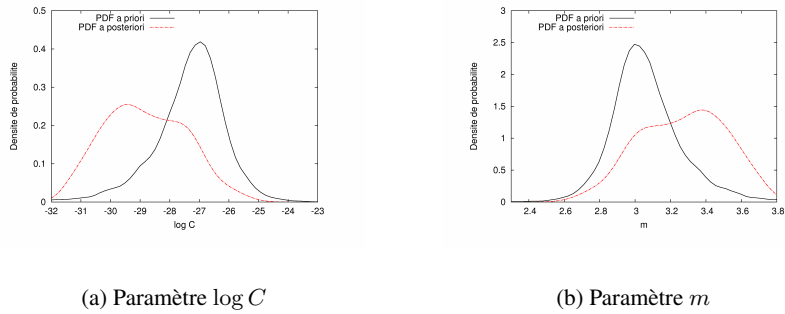


Figure 5 – Comparaison des densités de probabilité *a priori* et actualisées

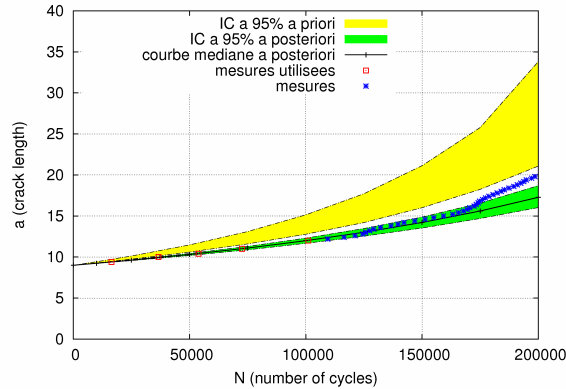


Figure 6 – Intervalles de confiance à 95% de la longueur de fissure

En propageant les tirages de la chaîne de Markov finale à travers le modèle de propagation de fissure, les valeurs de la longueur de fissure sont calculées pour différents nombres de cycles appliqués. A partir de ces valeurs, on peut évaluer l'évolution de l'intervalle de confiance à 95% de la longueur du défaut (figure 6). L'intervalle de

confiance actualisé permet de mieux prévoir la cinétique expérimentale de la propagation du défaut dans l'éprouvette.

## 5. Conclusion

Dans ce papier, on a cherché à tester et à valider des méthodes probabilistes permettant de mieux exploiter des données expérimentales. L'exemple choisi traite de l'utilisation de mesures de longueur de fissure sur des éprouvettes en aluminium 2024-T3. La loi permettant de calculer la longueur du défaut, pour un nombre de cycles de chargement donné, est la loi de Paris-Erdogan.

A partir de la base de données de Virkler *et al.*, une méthode d'identification semi-paramétrique permet d'identifier l'incertitude aléatoire portant sur chaque paramètre de la loi de Paris-Erdogan. Une projection sur une base de chaos polynomial est utilisée : les coefficients du chaos polynomial sont calculés à partir de l'ensemble des 68 trajectoires expérimentales de longueur de fissure. Le modèle identifié permet de prédire de manière satisfaisante l'ensemble des trajectoires observées expérimentalement. La deuxième étape de l'étude consiste à prédire la cinétique complète de propagation d'une fissure sur une éprouvette particulière, à partir des premières mesures expérimentales de la longueur de fissure. Une méthode probabiliste d'actualisation est proposée et appliquée sur le modèle identifié. Le modèle probabiliste des paramètres d'entrée actualisé par l'approche MCMC permet de mieux prédire la cinétique de propagation que le modèle identifié *a priori*. En effet, ce dernier conduit à une dispersion importante pour la prédiction de la taille de fissure et ne permet pas de prévoir une trajectoire particulière (*i.e.* sur une éprouvette donnée) avec précision.

Les résultats obtenus permettent de montrer qu'une démarche d'identification probabiliste peut être menée de la conception à la maintenance. Appliquées sur des modèles représentatifs de structures réelles, les méthodes proposées permettraient d'apporter des informations significatives en vue d'optimiser les stratégies de maintenance.

## Références

- [DIT 86] DITLEVSEN O., OLESEN R., « Statistical analysis of the Virkler data on fatigue crack growth », *Eng. Fracture Mechanics*, vol. 25, 1986, p. 177-195.
- [KOT 98] KOTULSKI Z. A., « On efficiency of identification of a stochastic crack propagation model based on Virkler experimental data », *Arch. Mech.*, vol. 50(5), 1998, p. 829-847.
- [O'H 04] O'HAGAN A., FORSTER J., *Kendall's advanced theory of statistics, Vol. 2B Bayesian inference*, Arnold, 2004.
- [PAR 63] PARIS P., ERDOGAN F., « A critical analysis of crack propagation laws », *Trans. the ASME, J. of Basic Eng.*, , 1963, p. 528-534.

- [PER 08] PERRIN F., « Prise en compte des données expérimentales dans les modèles probabilistes pour la prévision de la durée de vie des structures », PhD thesis, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 2008.
- [PUI 02] PUIG B., POIRION F., SOIZE C., « Non-Gaussian simulation using Hermite polynomial expansion : convergences », *Prob. Eng. Mech.*, vol. 17, 2002, p. 253-264.
- [TAR 05] TARANTOLA A., *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2005.
- [Van 04] VANDEN BERGHEN F., BERSINI H., « CONDOR, a new parallel, constrained extension of Powell's UOBYQA algorithm : experimental results and comparison with the DFO algorithm », *J. of Comput. Appl. Math.*, vol. 181, 2004, p. 157-175.
- [VIR 80] VIRKLER D. A., HILLBERRY B. M., GOEL P. K., « The statistical nature of fatigue crack propagation », *Trans. the ASME, J. Eng. Mat. Tech.*, vol. 101, 1980, p. 148-153.
- [WAN 95] WAND M., JONES M., *Kernel smoothing*, Chapman and Hall, 1995.

**Modélisation de l'erreur lors de mesures de paramètres sur des structures :  
application aux structures marines.**

F. Schoefs, S. Bonnet, J. Boero, A. Clément

---

---

# Modélisation de l'erreur lors de mesures de paramètres sur des structures

## Application aux structures marines : bilan des projets Gerom et Medachs

Frank Schoefs\*, Stéphanie Bonnet\*, Jérôme Boero\* \*\*, Alexandre Clément \*

\* GeM, Institut de Recherches en Génie Civil et Mécanique, UMR CNRS 6183, Université de Nantes

\*\* OXAND SA, Lyon

franck.schoefs@univ-nantes.fr

---

*RÉSUMÉ. Les mesures de grandeurs physiques, géométriques ou mécaniques permettent souvent de proposer une modélisation de paramètres d'entrée de modèles par calcul direct ou analyse inverse. Leur rôle est aussi étendu à la calibration de modèles et la mise à jour de modèles probabilistes. L'erreur de mesure est alors souvent négligeable car contrôlée. Lors d'inspections de structures in-situ, ce contrôle est rendu plus délicat parce qu'un grand nombre de paramètres ne peut être maîtrisée. On présente dans ce papier une méthode générique de modélisation de l'erreur de mesure et de la capacité de mesure basée sur l'analyse du signal. Une application aux mesures dans les bétons et sur structures en acier est présentée.*

*ABSTRACT. Quite a lot of parameters of models lie on the measurements of mechanical, geometrical or physical quantities through direct or inverse analysis. Their role is extended to the models calibration. The error of measurement is often negligible because controlled. In case of on-site inspection, the control is hard because of the great amount of parameters that affect the measure. This paper presents a general methodology for modeling the error of measurement. Applications to concrete and steel structures are selected.*

*MOTS-CLÉS: CND, erreur de mesure, béton, acier, corrosion, inspection, contrôle.*

*KEYWORDS: NDT, error of measurement, concrete, steel, corrosion, inspection, survey..*

---

## **1. Introduction**

La mesure in-situ de caractéristiques de matériaux est souvent une étape essentielle de mise à jour des paramètres de dégradations des structures en vue d'un calcul de fiabilité. De nombreux travaux ont été développés pour analyser les paramètres ou groupes de paramètres physiques les plus pertinents, les outils non ou faiblement destructifs pour les mesurer et l'optimisation des périodes de mesure au sens d'une approche basée sur les risques.

Ce dernier point nécessite de fournir des caractéristiques de performance des appareils. On utilise alors les mesures de probabilité appropriées et on définit la probabilité de détection d'un défaut existant et la probabilité de fausse alarme. Dans de nombreux projets, des campagnes d'inter-calibration permettent d'accéder directement à ces grandeurs et de définir notamment le seuil de détection. Ces projets sont coûteux et il est parfois nécessaire de modifier l'approche.

Cet article se place dans ce contexte où aucune campagne d'intercalibration n'est disponible. On a montré que dans ce cas (Schoefs et Clément 2004), des courbes dites ROC (Receiver Operating Characteristics) peuvent être introduites dans des schémas d'aide à la décision. Elles relient les valeurs des probabilités de détection et de fausse alarme pour toute la gamme de seuils de détection possibles.

La modélisation de l'erreur dans le protocole de mesure est alors nécessaire. Cet article développe une approche générale de l'erreur de mesure basée sur la sommation de deux niveaux d'erreurs : l'erreur due à l'opérateur et l'erreur due au protocole. On décompose alors l'erreur en un biais déterministe et une erreur centrée.

L'article se propose d'évaluer cette erreur dans deux situations d'inspections de structures de nature très différente :

- le cas où l'ensemble du contrôle est réalisé in-situ : cas de l'inspection par ultrasons de structures métalliques corrodées. On montre alors que l'erreur a une dépendance spatiale importante.
- le cas où un prélèvement est réalisé et des mesures effectuées en laboratoire : cas de la mesure du taux d'ions chlorures dans le béton.

On conclut sur les principes de prise en compte de l'impact de cette erreur dans les outils d'aide à la décision mais aussi dans l'évaluation de la fiabilité de composants structurels.

## **2. Modélisation de l'erreur de mesure**

L'erreur de mesure suite à un contrôle peut avoir de multiples causes. Toutefois, pour être évaluée, elle doit correspondre à un suivi de protocole normalisé, disposant d'un suivi qualité. Dans ce cas on peut distinguer les sources d'erreur suivante :

- erreur due au protocole (erreur organisationnelle et technologique),
- erreur due à l'opérateur (facteur humain),

Seuls de rares cas (Barnouin *et al.*, 1993) ont permis d'évaluer ces erreurs. Dans la majeure partie des cas l'erreur est globalisée dans un même terme. On considère ici qu'elle peut s'écrire [1] :

$$e = e_p + e_s + e_h \quad [1]$$

Où  $e$  désigne l'erreur totale,  $e_p$  l'erreur de protocole et technologique,  $e_h$  l'erreur humaine et  $e_s$  l'erreur due à la dispersion des échantillons dans le cas d'une calibration sur des échantillons non-rigoureusement identiques. On fait alors l'hypothèse d'indépendance entre ces erreurs, ce qui en première approche peut se comprendre : le protocole ne dépend pas de l'échantillon et l'opérateur de l'échantillon (sauf cas exceptionnels).

Dans le cas général, on décompose l'erreur de mesure en un biais  $b$  et une erreur centrée  $\varepsilon$ .

$$e = b + \varepsilon \quad [2]$$

The bias is written with the equation 3 is :

$$b = \bar{e} - C_t \quad [3]$$

où  $\bar{e}$  désigne la moyenne des mesures et  $C_t$  la valeur théorique attendue.

### 3. Modélisation des capacités de détection par l'aide à la décision

#### 3.1. Théorie de la décision

On considère ici une inspection in situ. L'erreur de mesure est alors amplifiée dans certains cas par des difficultés à mettre en œuvre les protocoles sur site. La cause peut en être une sensibilité de la technique à des paramètres comme la température ou l'humidité ou à des difficultés de visibilité. On remplace alors  $e_t$  par une grandeur aux sources d'incertitude plus délicates à identifier : le bruit  $\eta$ . La théorie de la décision (Arques, 1982) fournit les bases nécessaires à la définition de la Probabilité de Détection (PoD) et de la Probabilité de Fausse Alarme (PFA) et des points de fonctionnements ROC (Receiver Operating Characteristics). Connaissant le seuil de détection  $a_d$ , On définit alors la probabilité de détection d'un défaut mesuré (ou signal)  $\hat{d}$  en [4] (Rouhan *et al.*, 2003)..



$$PoD = P(\hat{d} \geq a_d) \quad [4]$$

La mesure du défaut peut être décrite comme la somme de la mesure du défaut  $d$  et du bruit  $\eta$ . On définit alors la PFA à partir de [5].

$$PFA = P(\eta \geq a_d) \quad [5]$$

### 3.2. Cas de l'erreur de mesure en laboratoire

Dans le cas de l'erreur [1], on définit :

$$PoD = P(d + e_t \geq a_d) ; PFA = P(e_t \geq a_d) ; PoD = b + \int_{\substack{d-a_d; \\ d-a_d > 0}}^{+\infty} f_\varepsilon(x) dx \quad [6]$$

où  $f_\varepsilon$  est la fonction de densité de probabilité de l'erreur  $\varepsilon$ .

### 3.3. Cas de l'erreur de mesure in-situ

Des projets ont permis d'accéder à une mesure discrète de ces probabilités, en classant ces défauts par classe (Rudlin *et al.*, 1996, Rudlin, 1996). La procédure d'inter-calibration permet alors de définir le seuil de détection et d'évaluer les mesures de probabilités en [4] et [5] à partir des statistiques de détection. Les campagnes associées sont alors très coûteuses et on se doit montrer leur pertinence au regard des enjeux associés. On présente ici une approche basée sur la théorie du signal. Ainsi, on définit les probabilités [4] et [5] en [6].

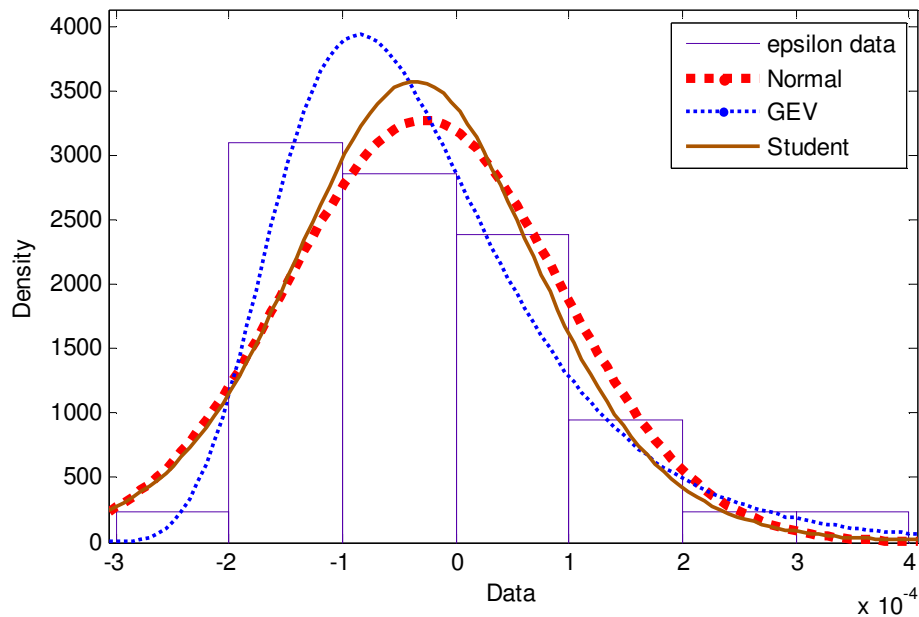
$$PoD = \int_{a_d}^{+\infty} f_{signal}(\hat{d}) \partial \hat{d} \quad ; \quad PFA = \int_{a_d}^{+\infty} f_{bruit}(\eta) \partial \eta \quad [6]$$

#### 4. Cas d'études et utilisation en maintenance des structures

On présente en 4.1, les résultats obtenus pour des essais en laboratoire dans le cas du projet européen Medachs (<http://www.medachs.u-bordeaux1.fr/>, Bonnet *et al.*, 2008). En 4.2, on présente les résultats obtenus dans ce même projet et dans le projet GEROM (Boéro *et al.*, 2008).

##### 4.1. Cas de l'erreur de mesure en laboratoire

On a évalué lors d'une campagne de mesure l'erreur de mesure  $e$  lors de la mesure d'ions chlorures dans le béton à partir de carottes prélevées in-situ. L'essentiel de l'erreur de mesure provient alors du protocole en laboratoire. La campagne de mesure a consisté en des tests réalisés sur des échantillons à teneur en chlorures connus. La distribution de l'erreur centrée  $\varepsilon$  est présentée en figure 1 et ajustée par trois pdf : une fonction de distribution de valeurs extrêmes généralisées (GEV), une fonction de distribution normale et une fonction de distribution de Student. Le biais a été évalué à  $0,37 \cdot 10^{-3}$ .



**Figure 1.** Distribution de l'erreur de mesure centrée  $\varepsilon$  ajustée par 3 pdf

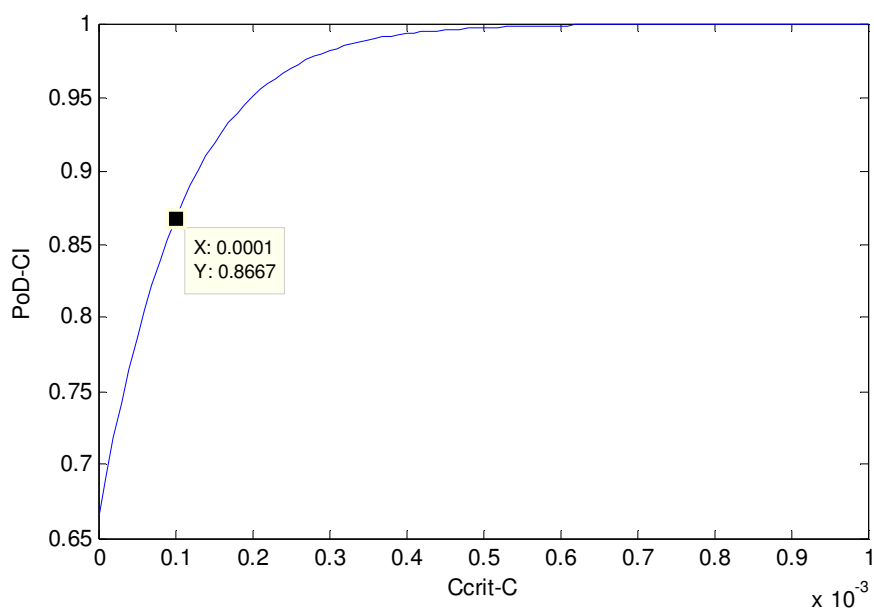
La valeur de l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) est donné pour ces trois pdf dans le tableau 1.

Pdf	GEV	Normale	Student
EMV	323	319	320

**Tableau 1.** Valeurs des EMV pour les trois distributions

On choisit donc un ajustement par une GEV. Les paramètres obtenus par l'identification sont :  $K = 0.016$  ;  $\sigma = 9.3 \cdot 10^{-5}$  ;  $\mu = -8.4 \cdot 10^{-5}$ .

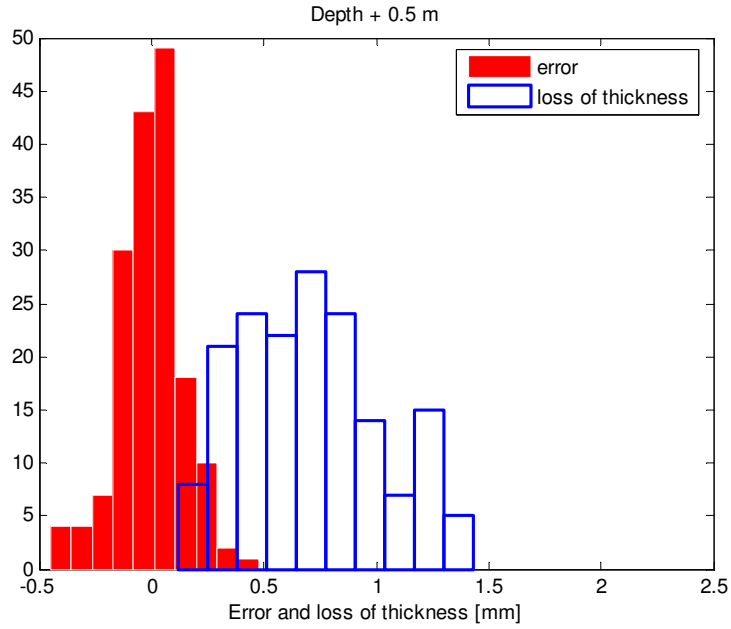
On peut alors calculer la probabilité de détection. Elle est tracée en fonction de ' $C_{crit} - C$ ' où  $C_{crit}$  désigne la concentration critique en ions chlorures en figure 2.



**Figure 2.** Courbe PoD en fonction de  $C_{crit} - C$

#### 4.2. Cas de l'erreur de mesure in situ

On a procédé à une campagne de mesure de corrosion pour des structures portuaires en acier. Le protocole du CETMEF, décrit dans (Schoefs *et al.*, 2008) consiste en la réalisation de trois points de mesures par ultrasons après meulage des produits de corrosion : on admet alors qu'il donne un biais nul. On obtient alors les distributions du signal et du bruit en zone immergée et en zone de marnage respectivement en figure 3 et 4.



**Figure 3.** Distribution de l'erreur et du signal en zone immergée

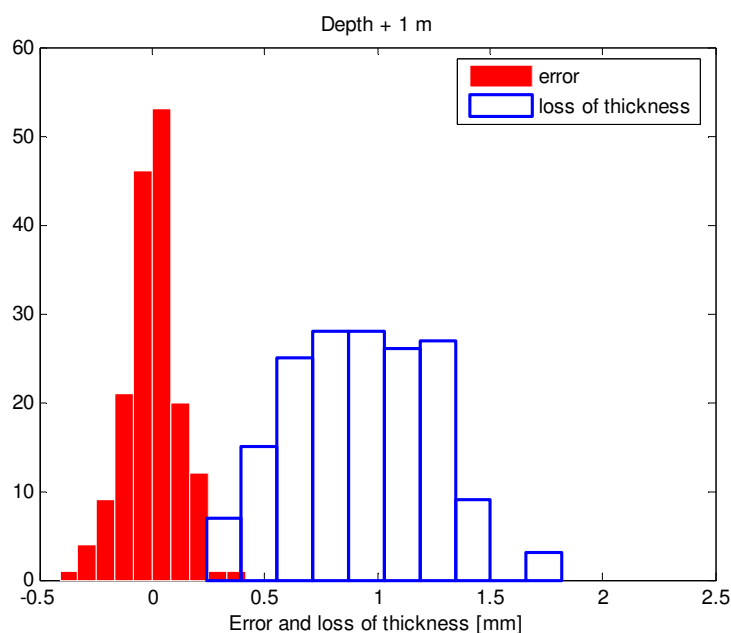
On peut ainsi calculer la probabilité de fausse alarme et la probabilité de détection pour chaque seuil de détection selon les équations [7] et [8].

$$PoD \approx \frac{Card(A)}{N_d}; A = \{j \in \{1, \dots, N_d\}; \hat{d}(\theta_j) > a_d\} \quad [7]$$

$$PFA \approx \frac{Card(B)}{N_\eta}; B = \{j \in \{1, \dots, N_\eta\}; \eta(\theta_j) > a_d\} \quad [8]$$

Où  $N_d$  et  $N_\eta$  désignent respectivement le nombre de mesures de la taille et de l'erreur.

La courbe reliant ces points dans le plan (PoD-PFA) est appelée courbe ROC.



**Figure 4.** *Distribution de l'erreur et du signal en zone de marnage*

#### 4.3. Utilisation en maintenance des structures

Les analyses de risque en maintenance des structures nécessitent les évaluations des bonnes ou mauvaises décisions et de la probabilité de défaillance (Kong *et al.*, 2003, Rouhan *et al.*, 2003, Sheils *et al.*, 2008). Le signal non bruité permet le calcul de la probabilité de défaillance alors que le bruit et le signal bruité permet d'évaluer les probabilités de non détection de défauts existants (scénario engendrant une défaillance) ou de détection d'un défaut inexistant (scénario engendrant une réparation inutile).

#### 5. Conclusion

La réalisation de contrôles intrusifs ou non sur structures de grandes échelles nécessite d'utiliser des techniques hors du contexte maîtrisé du laboratoire. Parfois les techniques de laboratoire nécessitent des phases de calibration ou encore un grand nombre d'étapes qui peuvent être autant de facteurs d'erreurs. Les résultats sont alors sensibles à l'environnement qui va les entacher d'erreur, biaisée ou non, ou au nombre d'étapes. Cet article présente tout d'abord les concepts nécessaires à la prise en compte d'erreur de mesure dans un contexte de décision. Des applications à des protocoles de mesure d'ions chlorures ou à des inspections de structures corrodées sont alors proposées.

Les auteurs tiennent à remercier le projet européen Medachs, le projet GEROM, en particulier le Port Autonome de Nantes Saint Nazaire et la Société Oxand pour leur soutien.

## 12. Bibliographie

- Arques PY. *Decisions en traitement du signal*. Editions Masson, Paris, 1982.
- Bonnet S., Schoefs F., Ricardo J., Salta M.M., «Statistical study and probabilistic modelling of error when building chloride profiles», *Proceeding of 1st International Conference on Applications Heritage and Constructions in Coastal and Marine Environment*, (MEDACHS'08), 8 pages, 28-30 January 2008, Lisbon (LNEC), Portugal 2008.
- Boéro J., Schoefs F., Roisin M., «Projet GEROM : Résultats d'enquête nationale et méthodologie de gestion par les risques d'un parc d'ouvrages portuaires», *Annales du BTP*, No 5/Octobre 2007, 6 pages, Ed. ESKA (2007).
- Barnouin B, Lemoine L, Dover WD, Rudlin J, Fabbri S, Rebourcet G, Topp D, Kare R, Sangouard D., «Underwater inspection reliability trials for offshore structures», In: ASME NY, editor. *Proceeding of the 12th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, vol. 3B,1993, p. 883–90.
- Kong J S, Frangopol DM. «Life-cycle reliability-based maintenance cost optimization of deteriorating structures with emphasis on bridges», *Journal of Structural Engineering ASCE*, June 2003.
- Rouhan A, Schoefs F., «Probabilistic modeling of inspection results for offshore structures», *Journal of Structural Safety*, vol 25, pp. 379-399, 2003.
- Rudlin JR, Dover WD. «The ICON database. Assisting underwater inspections». In: *Offshore technology*, vol. 4, 1996.
- Rudlin JR. «Reliability of inspection for fatigue cracks in offshore structures». In: *Colloque IEE*, 1996. p. 6/1–6/3.
- Schoefs F, Clement A., «Multiple inspection modeling for decision making and management of jacket off-shore platforms: effect of false alarms». *First International Forum on Engineering Decision Making (IFED'04)*, december 5-9 2004, Stoos, Switzerland.
- Schoefs F., Clément A., Memet J.B., Nouy A., «Inspection of Steel structures in Coastal Area with NDT tools: use of polynomial chaos decomposition for building Receiver Operating Curves», *Proceeding of 1st International Conference on Applications Heritage and Constructions in Coastal and Marine Environment*, (MEDACHS'08), 28-30 January 2008, Lisbon (LNEC), Portugal, 2008.
- Sheils E., O'Connor A., Breysse D., Schoefs F., et Yotte S., «Development of a two stage inspection process for the assessment of deteriorating bridge structures», *Journal of Bridge Engineering* (Publication of the American Society of Civil Engineers), Ed. Ref BE/2007/023379, 41 pages, to be published 2008.

**La fusion de données de contrôle non destructif au service du diagnostic de l'état du béton : qualité des données et réduction des incertitudes.**

M-A Ploix, D. Breysse, V. Garnier, M. Sbartai

---

# La fusion de données de C.N.D. au service du diagnostic de l'état du béton : qualité des données et réduction des incertitudes

Marie-Aude PLOIX<sup>1</sup>, Denys BREYSSE<sup>2</sup>, Vincent GARNIER<sup>1</sup>, Mehdi SBARTAI<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LCND, IUT Aix-en-Provence, [marie-aude.ploix@univmed.fr](mailto:marie-aude.ploix@univmed.fr)

<sup>2</sup> Université Bordeaux 1, Ghymac, [d.breysse@ghymac.u-bordeaux1.fr](mailto:d.breysse@ghymac.u-bordeaux1.fr)

<sup>3</sup> Université Bordeaux 1, US2B, [zm.sbartai@us2b.u-bordeaux1.fr](mailto:zm.sbartai@us2b.u-bordeaux1.fr)

*Mots clés: béton, contrôle non destructif, diagnostic, fusion de données, incertitudes*

La dégradation des ouvrages en béton armé sous l'effet des actions climatiques et environnementales (corrosion, carbonatation, micro-fissuration...) induit des coûts de maintenance importants, de manière à garantir les conditions d'un fonctionnement satisfaisant et à réduire les probabilités de défaillance brutale des ouvrages. Le recours au contrôle non destructif se développe, dans la mesure où il peut fournir des informations utiles dans une stratégie d'entretien qui serait optimisée.

L'estimation de l'état de dégradation du béton des ouvrages souffre cependant de plusieurs difficultés :

- les observables issus des mesures de contrôle non destructif sont des données pour lesquelles on ne sait pas si la variabilité spatiale, voire temporelle, est caractéristique de la variabilité réelle du matériau, ou si elle est induite par des variations des conditions de mesure,
- les observables usuels sont sensibles à de nombreuses caractéristiques de la microstructure (porosité, teneur en eau, degré de saturation...) et l'impossibilité de découpler ces effets nuit au diagnostic,
- les mesures elles-mêmes sont imparfaites et leur reproductibilité est imparfaite,
- le couplage de techniques fournit en théorie une piste intéressante pour réduire les incertitudes, mais il est le plus souvent proposé sans qu'une réelle stratégie y préside. La valeur ajoutée qui peut résulter de la multiplication des mesures est alors discutable.

Une vaste campagne expérimentale de caractérisation non destructive du béton a été entreprise dans le cadre du Projet ANR-SENSO. Elle a permis, dans sa première phase, d'étudier la sensibilité de nombreux observables à des variations d'indicateurs essentiels des propriétés physiques et mécaniques du matériau, tels que sa porosité (et sa résistance mécanique) et sa teneur en eau. Une étude approfondie de la variabilité des mesures à différentes échelles a été entreprise. A partir de la qualité des mesures et de la sensibilité aux indicateurs recherchés, une batterie d'observables ont été identifiés, pour lesquels les corrélations empiriques entre les indicateurs et les observables ont été établies.

Ces corrélations sont, dans un deuxième temps, exploitées dans le cadre de la fusion de données. Celle-ci consiste à tirer le meilleur parti de deux (ou plusieurs) mesures d'observables pour améliorer l'estimation des indicateurs recherchés. En exploitant la base de données expérimentales, nous montrerons sur quels principes repose la procédure de fusion (bases du formalisme, forme des opérateurs) et comment sa mise en œuvre peut contribuer à l'amélioration du diagnostic. Nous illustrerons aussi clairement la notion de complémentarité des observables, ouvrant ainsi la voie à une approche plus rationnelle de la combinaison des techniques de CND.



## **Méthodologie d'évaluation possibiliste de la performance d'ouvrages de génie civil.**

A. Talon, C. Curt, D. Boissier

---

---

# Méthodologie d'évaluation possibiliste de la performance d'ouvrages de génie civil

Aurélie Talon\* — Corinne Curt\* — Daniel Boissier\*\*

\* CEMAGREF, Unité Ouvrages Hydrauliques et Hydrologie  
3275 route Cézanne, CS40061, 13182 Aix en Provence Cedex 5  
aurelie.talon@cemagref.fr, corinne.curt@cemagref.fr

\*\* Polytech' Clermont-Ferrand/LGC  
Campus Universitaire des Cézeaux – BP 206, 63174 Aubière Cedex  
daniel.boissier@cust.univ-bpclermont.fr

---

*RÉSUMÉ.* Dans le contexte économique, sociologique et environnemental actuel, le maintien, dans le temps, de la performance des ouvrages de génie civil (aptitude de l'ouvrage à remplir les fonctions de résistance mécanique et d'usage) est l'une des clés de voûte de la maîtrise des risques et du développement durable. Nous proposons une démarche d'évaluation possibiliste de cette performance en quatre phases : (1) l'analyse de la qualité des données disponibles, (2) la fuzzification ou transformation des données sous un format flou, (3) l'unification par fusion et / ou agrégation des données permettant d'exploiter la complémentarité des données disponibles et (4) la défuzzification ou extraction de l'information juste nécessaire pour la prise de décision. Deux applications comparées (barrages et bâtiments) de cette démarche sont proposées dans un deuxième article.

*ABSTRACT.* In the current economic, sociological and environmental context, the maintain overtime of the performance (capacity of the work to fulfill functions of mechanical resistance and of usage) of works of civil engineering is one of the keystones of the risks control. We propose a possibility approach of this performance assessment in four phases: (1) the quality analysis of the available data, (2) the fuzzification, either transformation with a fuzzy format, (3) the unification by fusion and / or aggregation of the data that allows to run the complementarity of the available data and (4) the defuzzification, or extraction of the necessary information for the decision aiding resulting from the knowledge of this performance. Two compared applications (dams and buildings) of this approach are proposed in the second article.

*MOTS-CLÉS :* agrégation des données, barrages, bâtiments, données multi-échelles, données multi-sources, fusion des données, incertitude, incomplétude, imprécision, logique floue, qualité des données, théorie des possibilités.

*KEYWORDS:* data aggregation, dams, buildings, evidence theory, fuzzy logic, multi-scale data, multi-source data, data fusion, uncertainty, imprecision, incompleteness, data quality.

---

## 1. Introduction

Dans le contexte économique, sociologique et environnemental actuel, le maintien, dans le temps, de la performance des ouvrages de génie civil est l'une des clés de voûte de la maîtrise des risques et du développement durable. Nous considérons la performance d'un ouvrage de génie civil comme une représentation de son comportement fonctionnel global en service : l'ensemble des fonctions de résistance mécanique et d'usage intrinsèques à l'ouvrage sont prises en compte ainsi que les interactions de cet ouvrage avec son environnement climatique (pluie, vent, température,...) et les caractéristiques de son usage (exploitant, tiers personnes,...).

Différentes approches ont été développées pour modéliser au mieux, dans un contexte incertain et imprécis, le comportement des ouvrages de génie civil dans le temps et ainsi déduire leur niveau de performance : les approches probabilistes, les approches statistiques, les approches possibilistes...

Les approches probabilistes sont bien adaptées lorsque les phénomènes étudiés sont bien connus, c'est-à-dire que l'on dispose de suffisamment d'information pour définir la loi de probabilité modélisant au mieux le phénomène traité ainsi que les paramètres de cette loi de probabilité. Les approches statistiques sont pertinentes lorsqu'un nombre conséquent de données associées à un même problème sont disponibles afin d'avoir un échantillon représentatif. Les approches statistiques et probabilistes permettent de prendre en compte plusieurs variables aléatoires, cependant ces approches n'utilisent que des données homogènes, de part leur format et de part leur niveau de granularité, et les résultats obtenus sont difficilement transposables à d'autres études ou extrapolables.

Les approches possibilistes permettent de représenter tous les formats de données et ainsi de prendre en compte l'ensemble des données disponibles quelque soit leur format et leur niveau de granularité. Cependant ces approches requièrent une bonne connaissance des conditions d'obtention des données utilisées afin de leur affecter une masse de croyance (degré de confiance accordée à la donnée). Les approches possibilistes utilisent des sous-ensembles flous (*cf.* Figure 1).

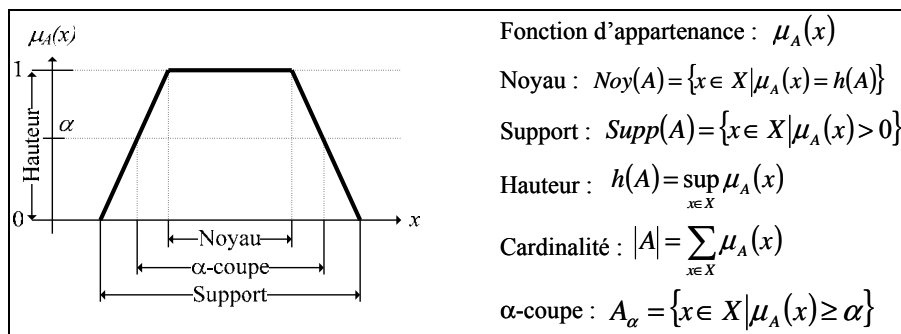


Figure 1. Principales caractéristiques d'un sous-ensemble flou

## 2. Présentation globale de la démarche

Toute problématique dans le domaine du génie civil (par exemple, la modélisation du comportement mécanique, physique, chimique et thermique des matériaux et des ouvrages, l'évaluation de la stabilité des ouvrages...) peut être vue comme un problème multi-échelles, c'est-à-dire qu'il intègre plusieurs niveaux de granularité, et multi-sources car l'origine des informations permettant de résoudre ce problème n'est généralement pas unique. Une schématisation de ces deux aspects (multi-échelle et multi-source) de toute problématique et le positionnement de la démarche possibiliste que nous proposons vis-à-vis de ces aspects sont présentés à la Figure 2.

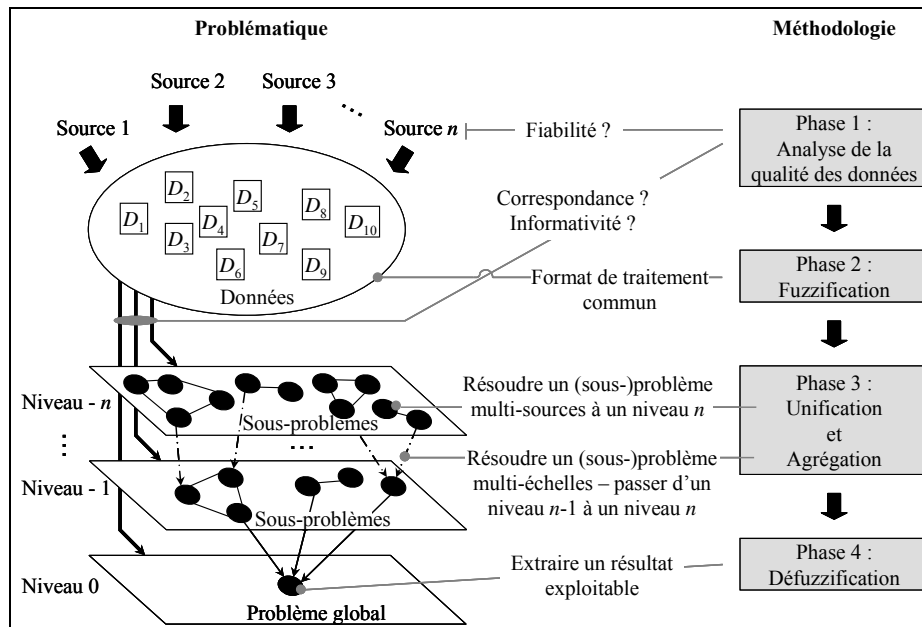


Figure 2. Principe de la méthodologie proposée

Les quatre phases de la méthodologie présentées à la Figure 2 sont détaillées dans les quatre paragraphes suivants.

## 3. Phase d'analyse de la qualité des données

La modélisation d'un problème nécessite un ensemble d'informations de base, ou données, qui proviennent d'une ou plusieurs sources (observations visuelles, expérimentations en laboratoire, essais in-situ, auscultations, simulations,

probabilités, statistiques, dires d'experts) et sont mono ou multi-échelles. En effet, les données peuvent être collectées soit directement au niveau du problème à résoudre, soit à un niveau de granularité supérieur, soit à un niveau de granularité inférieur (sous-problème), soit encore à plusieurs de ces niveaux. Disposant d'un ensemble de données multi-sources et multi-échelles pour résoudre un problème, il est essentiel pour pouvoir estimer la qualité du résultat final, de définir la fiabilité de ces données et leur informativité, c'est-à-dire la part relative de résolution du problème apportée par chacune de ces données.

L'analyse de la qualité des données consiste alors à estimer la confiance que l'on peut accorder à chacune des données collectées et qui est modélisée ici par une masse de croyance. Cette analyse s'appuie sur la méthode NUSAP (« Numerical Unit Spread Assessment Pedigree ») développée par Funtowicz et Ravetz (1990) ; outil d'analyse et de diagnostic de l'incertitude de l'information, cette méthode permet de qualifier et de quantifier une information suivant cinq critères (les termes du nom de la méthode). Nous avons adapté cette méthode à notre problème : les critères d'analyse que nous avons définis permettent d'estimer d'une part la fiabilité des données et d'autre part leur informativité vis-à-vis du problème à résoudre. Les critères permettant d'estimer la fiabilité des données ont été déterminés à partir d'une analyse des imperfections (incertitudes, imprécisions et incomplétudes) susceptibles d'entacher les données manipulées ; nous distinguons :

- imperfection intrinsèque : elle intègre la fiabilité de la procédure d'obtention de cette donnée, la fiabilité de la source d'information, la censure (due à la durée et aux moyens d'observation), l'incomplétude ;
- imperfection liée à la représentation : elle correspond à la pertinence du modèle physique choisi pour représenter des résultats issus de statistiques ou d'essais de vieillissement ou de retours d'expérience... ;
- imperfection liée à l'utilisation : elle représente la correspondance entre la donnée collectée et le cas étudié.

L'informativité est calculée à partir de l'entropie de Shannon (1948) ; elle est formulée au Tableau 1.

Pour assurer l'homogénéité de l'évaluation de la qualité des données nous proposons une grille de qualité applicable à tout type de données. La grille présentée au Tableau 1 a été développée pour l'évaluation de la durée de vie des produits de construction et nécessite donc des adaptations pour être appliquée à d'autres domaines ; cet aspect est détaillé dans (Talon *et al.* 2008).

Le résultat de cette phase est un ensemble de couples {donnée ; masse de croyance}. La masse de croyance correspond à une agrégation des notes obtenues pour les critères de fiabilité et d'informativité des données définies précédemment ; nous avons choisi d'agrèger ces notes par une moyenne (Talon, 2006).

Critères	Valeurs				
	1	2/3	1/3	0	
Fiabilité	Modélisation	Théorie corroborée	Théorie non corroborée	Etude statistique	Non modélisée
	Hypothèses de modélisation	Très faible	Faible	Forte	Très forte
	Mode d'obtention	Plan d'expérience	Retour d'expérience	Estimation « éduquée »	Estimation « non éduquée »
	Source	Référencée	Interne	Conférence	Isolée
	Censure	Non censurée	Partiellement censurée	Censurée	Non prise en compte
	Représentativité	Parfaite	Correcte	Faible	Pauvre
	Correspondance vis-à-vis du cas étudié	Entière	Correcte	Faible	Pauvre
Informativité	Entropie	$\frac{\sum_{x \in X} f_{mc}(x) \ln(f_{mc}(x))}{\ln(1/\Theta)}$ où X représente l'intervalle de valeurs de la donnée, x une valeur de la donnée discrétisée, $\Theta$ le cadre de discernement (ou période d'observation), et $f_{mc}(x)$ la fonction de masse de croyance associée à la valeur x.			

Tableau 1. Grille d'analyse de la qualité des données (Talon et al. 2007)

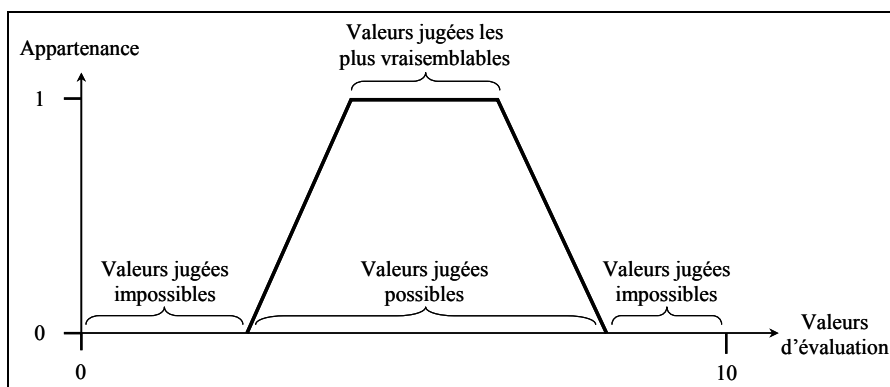
#### 4. Phase de fuzzification

Les données collectées sont généralement hétérogènes du point de vue de leur format ; en effet il peut s'agir d'une notation issue d'une inspection visuelle faite par un expert, d'une donnée provenant d'un instrument d'auscultation ou d'un essai in situ, d'une probabilité... Toutefois, il est nécessaire d'avoir un format commun entre ces données pour pouvoir les combiner. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi une représentation sous un format possibiliste qui permet de modéliser tout type de données puis de les fusionner ou de les agréger.

La phase de fuzzification consiste à transformer les données, collectées dans leur format propre, dans un format possibiliste, ici une fonction d'appartenance. Cette fonction d'appartenance peut être déclarée par un expert, calculée par un modèle mathématique ou encore obtenue de manière automatique par la prise en compte de l'évaluation de la qualité des données issue de la première phase de la méthodologie. Par ailleurs, des modèles ont été développés pour transformer différents formats dans un format possibiliste : nous pouvons citer les travaux de Baudrit *et al.* (2003 et 2007) permettant de transformer un format probabiliste en un sous-ensemble flou du moment que la médiane, le mode, la moyenne ou les fractiles sont connus ; ou encore les travaux de Masson et Denoeux (2006) permettant de transformer des données statistiques en sous-ensemble flou.

A titre d'exemple, nous fournissons sur la Figure 3 la représentation d'un dire d'expert sous la forme d'un sous-ensemble flou dont le noyau représente les valeurs jugées par l'expert comme les valeurs les plus vraisemblables (4-6 sur une échelle

de 0 à 10) et le support (3-8 sur l'échelle de 0 à 10), les valeurs jugées possibles (Curt, 2008).



**Figure 3.** Signification d'un sous-ensemble flou dans le domaine des barrages

### 5. Phase d'unification et d'agrégation des données

Cette troisième phase de la méthodologie consiste à combiner l'ensemble des données collectées afin d'obtenir une donnée consensuelle (une solution au problème) et un indicateur de la qualité de la donnée obtenue. Le type de combinaison, unification ou agrégation des données, dépend du type de relation « problème – données » considérée :

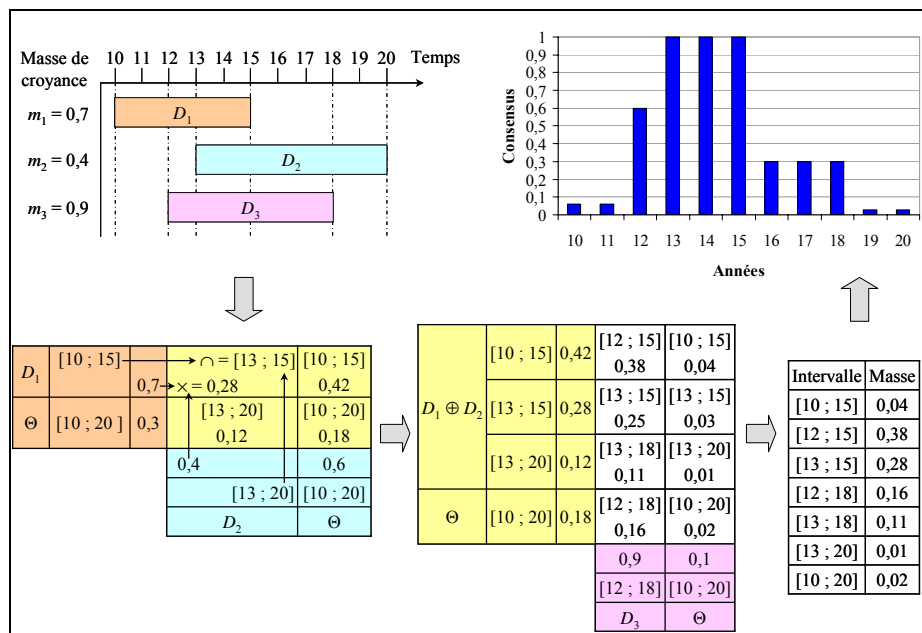
- l'unification par fusion des données est basée sur la théorie de l'évidence ; elle consiste à combiner l'ensemble des données disponibles relatives à un même problème et provenant de sources différentes. Par exemple, plusieurs sources (statistiques, dires d'expert...) donnent une estimation de la durée de vie d'un produit ; ces sources n'ont pas la même fiabilité et les estimations fournies n'ont donc pas la même qualité. La fusion construira une durée de vie consensuelle obtenue à partir des estimations provenant des différentes sources ;

- l'agrégation des données est basée sur la théorie des sous-ensembles flous et consiste à exploiter au mieux l'ensemble des données disponibles relatives à différents sous-problèmes distincts du problème.

Le principe de fusion de  $n$  données, définies par un intervalle de valeurs (ou un singleton) et une masse de croyance, consiste : (1) à prendre deux données et à calculer, selon une méthode de fusion, la masse affectée à l'intersection de leurs intervalles, à leur union, au cadre de discernement, ... (2) à réitérer ce calcul en combinant la donnée résultante et l'une des  $n-2$  données restantes jusqu'à ce que les  $n$  données aient été combinées.

Il existe plusieurs méthodes de fusion, telles que l'intersection de Dempster-Shafer (1976), l'union de Dubois et Prade (1992), le report sur l'ignorance de Yager (1994) ou l'intersection avec faible cohérence de Lair (2000), qui permettent de plus ou moins bien gérer les caractéristiques des données disponibles, nombre de données, cohérence entre les données, conflit entre les données... J. Lair (2000) a proposé un algorithme de choix de méthode de fusion permettant de sélectionner au mieux la méthode de fusion à utiliser.

Un exemple de fusion de trois données de durée de vie par la méthode d'intersection de Dempster-Shafer est présenté à la Figure 4.



**Figure 4.** Exemple de fusion de trois durées de vie par la méthode d'intersection

Comme le schématise la Figure 2, un problème peut être décomposé en plusieurs sous-problèmes, le modèle d'agrégation doit être choisi pour représenter au mieux la ou les relations existant entre ces sous-problèmes et le problème.

Il existe, comme pour la fusion des données, de nombreux modèles d'agrégation floue, tels que les opérateurs conjonctifs, les opérateurs disjonctifs, la somme pondérée, le maximum, les intégrales floues ; ils sont détaillés par Bouchon-Meunier et Marsala (2003).

Par exemple, sur la Figure 5, la performance d'un barrage vis-à-vis d'un mode de rupture ( $\mu MR$ ), tel que l'érosion interne dans un remblai, est évaluée en combinant la performance de fonctions ( $\mu Fi$ ) elles-mêmes établies à partir de la



combinaison d'indicateurs indépendants ( $I_i$ ), issus de l'observation visuelle (fontis, fuite...), de mesures d'auscultation et des données issues de modèles (gradient hydraulique...). Le  $\mu_{MR}$  correspond au problème et les  $\mu_{Fi}$  représentent les sous-problèmes. Les experts évaluent les différents indicateurs sous une forme floue ou précise lorsque cela est possible (cas I4 sur la Figure 5). Les distributions de possibilités sont ensuite propagées dans le modèle d'agrégation en mettant en œuvre l'arithmétique floue et la logique floue. Une évaluation floue de la performance des fonctions et de la performance vis-à-vis du mode de rupture est ensuite obtenue.

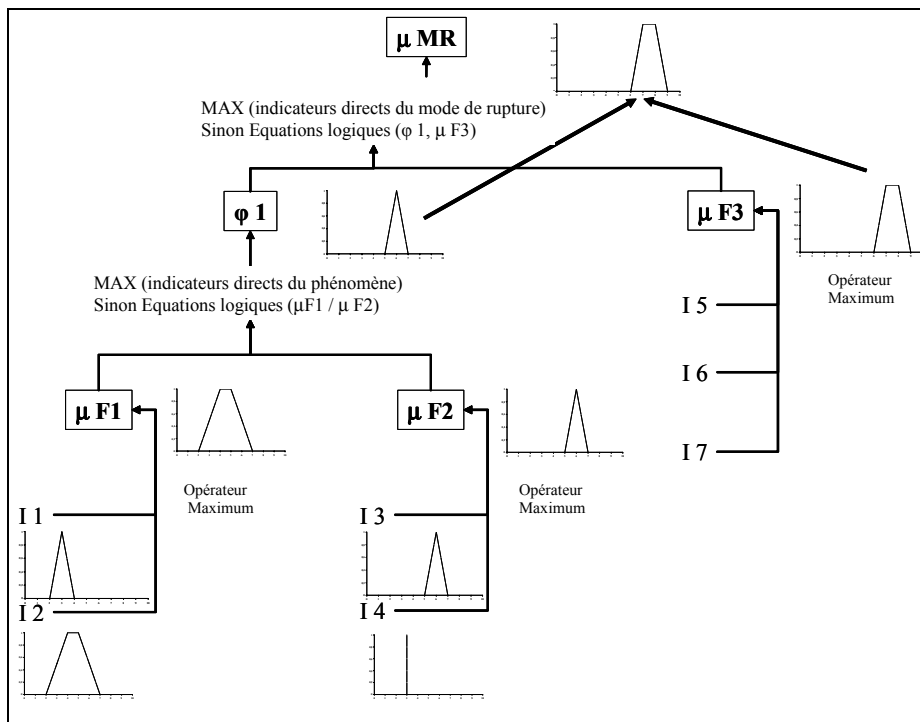


Figure 5. Exemple d'agrégation d'indicateurs de performance (Curt, 2008)

## 6. Phase de défuzzification

La défuzzification consiste à extraire l'information juste nécessaire pour l'aide à la décision associée au problème traité et représentant au mieux les résultats de la fusion et/ou de l'agrégation des données. Différentes méthodes existent, telles que les méthodes COG, BADD, SLIDE, détaillées entre autre par Liu (2007), la plausibilité, la croyance (Shafer, 1976), la probabilité de Smets (Dubois, 1990). Ces méthodes conduisent à des résultats différents, il est donc essentiel de faire un choix

de méthode pertinent car le résultat obtenu constitue la variable sur laquelle s'appuie la prise de décision ultérieure (réparation, maintenance...).

Un exemple de résultat de défuzzification que l'on peut obtenir pour l'exemple présenté à la Figure 4, est illustré à la Figure 6. De cette dernière figure, nous pouvons par exemple estimer que la durée de vie est de 14 ans avec une probabilité de 60 % et un intervalle d'incertitude de [12 ;15] ans.

La largeur de l'intervalle d'incertitude est liée à la fiabilité des données collectées, à l'informativité de ces données et au modèle d'agrégation. Selon, l'utilisation envisagée du résultat de défuzzification (évaluation de premier ordre, évaluation précise) on pourra être amené à vouloir réduire cet intervalle d'incertitude en améliorant la fiabilité des données collectées et / ou la fiabilité du modèle d'unification et d'agrégation des données.

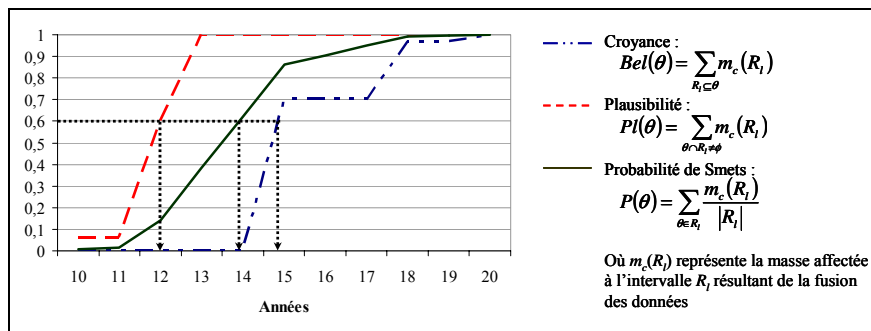


Figure 6. Exemple de défuzzification des durées de la Figure 4

## 7. Conclusion

Nous avons présenté une méthodologie permettant (i) de résoudre une problématique du domaine du génie civil lorsque des données multi-sources et multi-échelles sont disponibles, (ii) de prendre en compte les imperfections qui entachent ces données et (iii) de fournir une indication de la qualité du résultat obtenu en intégrant la fiabilité et l'informativité des données collectées et la fiabilité du modèle d'unification et d'agrégation des données. Nous avons également montré qu'il était possible de modéliser, de combiner et d'exploiter la complémentarité de données hétérogènes de part leur format en utilisant une approche possibiliste. Nous avons développé cette méthodologie dans un objectif d'évaluation de la performance d'ouvrages de génie civil et l'avons appliquée sur deux types d'ouvrages de génie civil : les bâtiments et les barrages. Cette démarche générique devrait pouvoir être étendue à d'autres ouvrages de génie civil. Par ailleurs, il faut souligner que dans chaque phase de la méthodologie, différentes méthodes sont disponibles et sont à décliner en fonction des besoins explicites de l'application traitée.

## 8. Bibliographie

- Baudrit C., Couso I., Dubois D., « Joint propagation of probability and possibility in risk analysis: Towards a formal framework », *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 45, 2007, p.82-105.
- Baudrit C., Dubois D., Fargier H., « Représentation de la connaissance probabiliste incomplète », *Actes de la conférence Logique Floue et Applications LFA'03*, Tours, 26-27 novembre 2003.
- Bouchon-Menier B., Marsala C., *Logique floue, principes, aide à la décision*, Paris, Lavoisier, 2003.
- Curt C., Evaluation de la performance des barrages en service basée sur une formalisation et une agrégation des connaissances, Thèse de doctorat, Université de Clermont-Ferrand, CEMAGREF et LGC, 2008.
- Dubois D., Prade H., « On the relevance of non-standard theories of uncertainty in modeling and pooling expert opinions », *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 36, 1992, p. 95-107.
- Dubois D., Prade H., « Consonant approximations of belief functions », *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 4, 1990, p. 244-264.
- Funtowicz S.O., Ravetz J.R., *Uncertainty and Quality in Science for Policy*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1990.
- Lair J., Evaluation de la durabilité des systèmes constructifs du bâtiment, Thèse de doctorat, Université de Clermont-Ferrand, CSTB et LERMES, 2000.
- Liu X., « Parameterized defuzzification with maximum entropy weighting function—Another view of the weighting function expectation method », *Mathematical and computer modelling*, vol. 45, 2007, p. 177-188.
- Masson M.H., Denoeux T., « Inferring a possibility distribution from empirical data », *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 157, 2006, p. 319-340.
- Shafer G., *A mathematical theory of evidence*, Chichester, Princeton University Press, 1976.
- Shannon C.E., « A Mathematical Theory of Communication », *The Bell System Technical Journal*, vol. 27, 1948, p. 379-423 et 623-656.
- Talon A., Curt C., Boissier D., « Application aux barrages et aux bâtiments de la méthodologie d'évaluation possibiliste de la performance », *Actes de la conférence Fiabilité des matériaux et des structures*, Nantes, 26-28 mars 2008.
- Talon A., Evaluation des scénarii de dégradation des produits de construction, Thèse de doctorat, Université de Clermont-Ferrand, CSTB et LGC, 2006.
- Talon A., Boissier D., Hans J., « Durée de vie des produits de construction - Evaluation de la qualité des données », *Annales du BTP*, vol. 5, 2007, p. 66-70.
- Yagger R.R., Kacprzyk J., Fedrizzi M., *Advances in the Dempster-Shafer Theory of Evidence*, New-York, John Wiley & Sons, 1994.

**Prise en compte de la variabilité des propriétés élastiques du béton dans le calcul de la tenue des enceintes de confinement.**

T. de Larrard, JB. Colliat, F. Benboudjema, JM. Torrenti

---

---

# **Prise en compte de la variabilité des propriétés élastiques du béton dans le calcul de la tenue des enceintes de confinement**

**Fiabilité des Matériaux et des Structures  
Nantes, 26-28 mars 2008**

**Thomas de Larrard — Jean-Baptiste Colliat  
Farid Benboudjema — Jean-Michel Torrenti**

*LMT Cachan  
(ENS Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris)  
61 av. du Président Wilson  
F-94230 Cachan, France  
delarrard@lmt.ens-cachan.fr*

---

*RÉSUMÉ. Le but de cette étude est d'observer l'influence que peut avoir dans le comportement mécanique d'une structure la variation spatiale d'un paramètre matériau. Cette étude a été menée en application de la méthode de Monte-Carlo. La génération du champ aléatoire de module d'Young a été mise en œuvre grâce à la décomposition de Karhunen-Loève. Les calculs mécaniques ont été réalisés par un logiciel de calculs par éléments finis, FEAP. Un traitement probabiliste a été mené sur les quantités d'intérêt (contraintes et déformations) extraites des calculs mécaniques.*

*ABSTRACT. The study presented here aimed at observing the influence of the spatial variation of one mechanical parameter of the material over its mechanical behavior. This study was lead applying the Monte-Carlo Method. The Young modulus random field was generated thanks to the Karhunen-Loève expansion. The mechanical calculations were achieved with FEAP, a finite elements calculation program. A probabilistic study was eventually lead on outputs of interest (orthoradial stresses and strains).*

*MOTS-CLÉS : variation du module d'Young, génération de champ aléatoire, méthode de Monte-Carlo, décomposition de Karhunen-Loève, CTL, contrainte orthoradiale, déformation orthoradiale*

*KEYWORDS: variation of the Young modulus, generation of a random field, Monte-Carlo Method, Karhunen-Loève expansion, CTL, orthoradial stress, orthoradial strain*

---

## 1. Introduction

Les ouvrages de génie civil sont soumis à un certain nombre de variabilités, de part leurs dimensions, leurs modes de réalisation, leurs expositions à diverses sollicitations, leur durée de vie . . . Parmi ces variabilités, on en trouve qui concernent les propriétés du matériau, qui évoluent au cours du temps et qui ne sont pas nécessairement homogènes dans l'ensemble de la structure. D'autres portent sur les sollicitations auxquelles sont soumises ces structures.

Les travaux présentés ici portent sur une variation du module d'Young dans la géométrie de la structure. Cette hétérogénéité du module dans la structure peut avoir diverses explications : une variation dans le matériau lui-même, sa composition ou sa mise en œuvre (les gâchées du chantier), ou encore un vieillissement ou une exposition du béton variant dans la structure en raison de la géométrie de celle-ci ou des conditions extérieures.

Pratiquement le point de départ de ce travail a été la seule connaissance d'un jeu de valeur statistique sur le module d'Young : une valeur moyenne et un écart-type<sup>1</sup>. A partir de ceci et sans rien savoir de plus sur cette répartition du module, il a été décidé d'introduire dans la structure une variation spatiale du module, suivant une loi lognormale garantissant le maximum d'entropie.

Il a ensuite été observé l'influence de cette variation sur le comportement mécanique de la structure et plus particulièrement sur les contraintes et les déformations maximales, dont une évolution par rapport aux valeurs dimensionnantes issues d'un calcul déterministe pourrait avoir des conséquences significatives en terme de fissuration ou d'endommagement du matériau.

## 2. Structure étudiée et choix des quantités d'intérêt

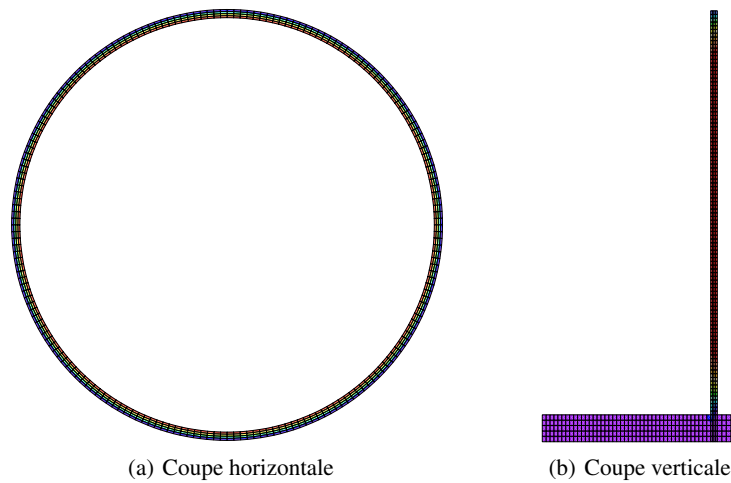
La structure étudiée est une enceinte de confinement, modélisée de la façon la plus simple possible. En effet, ce n'est pas le calcul mécanique intrinsèquement qui est intéressant, mais le traitement probabiliste mis en œuvre autour, via la méthode de Monte-Carlo. La nécessité de reproduire ce calcul mécanique un grand nombre de fois a donc incité à utiliser la modélisation mécanique la plus simple possible afin d'alléger au maximum le temps du calcul mécanique.

La structure a été étudiée en deux dimensions (cf. Figure 1). Un premier cas a porté sur une coupe horizontale de l'enceinte, étudiée en contraintes planes et en déformations planes (cf. Figure 1(a)), et un autre sur une coupe verticale pour une étude axisymétrique (cf. Figure 1(b)). Dans les deux cas, le chargement mécanique qui s'applique sur la structure correspond à l'application d'une pression interne de 0,4 MPa sur la paroi intérieure de l'enceinte. Le premier cas permet donc d'étudier la variation du module sur le périmètre de l'enceinte, tandis que le second cas permet d'étudier

---

1. Respectivement 26,7 GPa et 4 GPa.

l'influence de sa répartition verticale. Dans le cas axisymétrique, on a modélisé le radier de l'enceinte pour tenir compte des conditions aux limites du problème, mais seule la paroi verticale du fût a accueilli une variation de son module.



**Figure 1.** Structure étudiée : enceinte de confinement en deux dimensions

Les quantités d'intérêt sur lesquelles vont être observées les conséquences de cette variation du module d'Young sont les contraintes et les déformations orthoradiales. En effet, un des objectifs de cette étude est de vérifier si la variation du module ne risquerait pas d'entraîner le béton dans des comportements où les valeurs en traction seraient plus importantes que celles retenues à partir d'un calcul déterministe pour dimensionner la précontrainte. Or cette dernière est dimensionnée principalement sur la valeur de la contrainte orthoradiale. Plus précisément, dans les calculs en contraintes planes et en déformations planes, les quantités d'intérêt retenues ont été les contraintes et déformations principales majeures, qui donnent directement accès aux valeurs orthoradiales. Le choix d'étudier des contraintes et des déformations vient de ce que la valeur de la contrainte est intéressante en regard de ce qui a été dit à propos de la précontrainte, et dans le cas de la coupe horizontale, où le chargement se fait en pression, il semble pertinent, si l'on veut observer l'influence du module d'Young, d'étudier les valeurs de déformations.

Notons que l'étude porte sur l'influence du module d'Young sur l'état de contrainte dans la structure alors même que dans le calcul déterministe pour la coupe horizontale, la valeur du module d'élasticité n'influe pas sur la valeur de la contrainte orthoradiale.

### 3. Méthode de Monte-Carlo

Le principe général de la méthode de Monte-Carlo est d'estimer la valeur d'une fonction continue sur un espace probabilisé par la calcul d'un certain nombre de réalisations de cette fonction [1].

$$\int_{\Omega} f(\xi) dP(\xi) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \quad [1]$$

Les avantages et les inconvénients de la méthode de Monte-Carlo sont connus [MAT 05] : facilité de mise en œuvre, convergence assurée en  $1/\sqrt{N}$  et erreur majorée par  $\sigma^2/\sqrt{N}$ . Pratiquement, pour l'étude présentée ici, il va donc suffire de générer un nombre suffisamment important de réalisations du module d'Young et d'effectuer un calcul mécanique pour chacune d'entre elles. De chaque calcul, on retirera les quantités d'intérêt qui nous intéressent, en l'occurrence les contraintes et déformations orthoradiales maximales dans l'enceinte.

La principale limite de la méthode de Monte-Carlo réside dans le fait qu'il faille de nombreuses réalisations pour circonscrire l'erreur commise à des valeurs acceptables. On voit ici l'intérêt de la modélisation très simplifiée retenue (calculs 2D élastiques linéaires).

En revanche la mise en œuvre de la méthode de Monte-Carlo nécessite au départ de disposer de  $N$  réalisations indépendantes du module d'Young dans l'enceinte, c'est-à-dire de façon imagée de  $N$  enceintes de confinement distinctes et indépendantes les unes des autres. Pourtant, au sein de chaque réalisation, ie. au sein de chaque enceinte, la valeur du module en chaque point est dépendante de la valeur aux points voisins. Cette génération d'un champ aléatoire dont les réalisations sont indépendantes les unes des autres mais dont la corrélation spatiale est respectée dans chaque réalisation est obtenue ici grâce à la décomposition de Karhunen-Loève [SPA 02].

### 4. Décomposition de Karhunen-Loève

La décomposition modale de Karhunen-Loève [SPA 02] propose une approximation d'un champ aléatoire  $f(\vec{x}, \omega)$  en l'écrivant sous la forme d'une série infinie [2].

$$f(\vec{x}, \omega) = \bar{f}(\vec{x}) + \sum_{i=0}^{+\infty} \sqrt{\lambda_i} \phi_i(\vec{x}) \xi_i(\omega) \quad [2]$$

L'un des principaux atouts de cette méthode est qu'elle permet un découplage des variables spatiales  $\vec{x}$  et stochastiques  $\omega$ . Le premier terme de la décomposition est l'espérance spatiale du champ aléatoire,  $\bar{f}(\vec{x})$  qui de fait ne dépend pas des variables stochastiques. La dépendance stochastique se retrouve à travers les variables aléatoires



$\xi_i$ , tandis que la dépendance spatiale apparaît dans les modes propres  $(\lambda_i, \phi_i)$  du noyau de covariance [3].

$$\int_{\Omega} cov_f(\vec{x}, \vec{y}) \phi_i(\vec{y}) d\vec{y} = \lambda_i \phi_i(\vec{x}) \quad [3]$$

La mise en œuvre numérique de la décomposition de Karhunen-Loève [KEE 03] pour construire une approximation d'un champ aléatoire gaussien<sup>2</sup> nécessite une discrétisation spatiale pour pouvoir mettre en place une méthode de calcul aux éléments finis. On aura donc mis en place une discrétisation de l'espace probabilisé via les réalisations et une discrétisation de l'espace géométrique via un maillage de la structure étudiée. La décomposition de Karhunen-Loève permet alors d'écrire l'approximation [4] où l'on ne prend en compte que les premiers modes de la décomposition (troncature de la série), d'où vient l'erreur commise dans l'approximation.

$$\gamma_{ij} = \bar{\gamma}_i + \sum_{k=1}^m \sqrt{\lambda_k} \phi_{ki} \xi_{kj} \quad [4]$$

On voit dans [4] l'expression du champ aléatoire approché pour chaque nœud du maillage (noté  $i$  par lequel intervient la dépendance spatiale) et pour chaque réalisation (notée  $j$  par qui intervient la dépendance stochastique). L'indice  $k$  fait référence aux modes propres. Le champ  $\bar{\gamma}$  donne l'espérance du champ gaussien en chaque nœud du maillage.

Si l'utilisation de la décomposition de Karhunen-Loève telle que présentée ci-dessus est relativement aisée, il reste néanmoins à déterminer les modes propres du noyau de covariance. On calcule en réalité ces modes de façon approchée par la résolution numérique d'un problème de Fredholm [5], c'est-à-dire d'un simple problème aux valeurs propres [NEW 96], analogue à ceux que l'on rencontre en dynamique pour calculer les modes propres d'une structure. C'est d'ailleurs à partir de la routine de calcul de ces modes dynamiques sous FEAP que les modes de la décomposition de Karhunen-Loève ont été calculés [HAU 05, LAR 07].

$$\mathbb{M}\mathbb{C}\mathbb{M}\vec{\phi} = \lambda\mathbb{M}\vec{\phi} \quad [5]$$

On voit apparaître dans l'équation du problème de Fredholm [5] une matrice de masse  $\mathbb{M}$  tout à fait habituelle et une matrice de covariance  $\mathbb{C}$  à travers laquelle on peut introduire dans la décomposition de Karhunen-Loève d'autres paramètres statistiques que l'espérance [6].

$$C_{ij} = V \exp\left(-\frac{|(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \cdot \vec{e}_1|}{L_{c1}} - \frac{|(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \cdot \vec{e}_2|}{L_{c2}}\right) \quad [6]$$

2. En effet, la décomposition de Karhunen-Loève permet de générer un champ gaussien à partir des variables aléatoires  $\xi_i$  réparties suivant une loi normale centrée réduite. Le champ lognormal visé pour le module d'Young sera donc obtenu en passant à l'exponentielle le champ gaussien généré grâce à la décomposition de Karhunen-Loève.

On y voit apparaître la variance  $V$  et les longueurs de corrélations  $L_c$ . Ces dernières sont un paramètre qui indique la corrélation spatiale du champ, c'est-à-dire que pour une réalisation donnée, la valeur du champ en un point sera d'autant plus dépendante des valeurs aux points voisins que ces longueurs de corrélations sont grandes.

Notons que dans le cas du problème présenté ici, il s'agit de modélisation en deux dimensions. Nous avons choisi d'introduire dans chaque cas deux longueurs de corrélation. Pour le cas de la coupe horizontale étudiée en déformations planes et en contraintes planes, seront introduites une longueur de corrélation radiale, c'est-à-dire dans l'épaisseur de la paroi de l'enceinte, et une longueur de corrélation orthoradiale, suivant le périmètre de l'enceinte. Dans le cas de la coupe verticale axisymétrique, on retrouvera la longueur de corrélation radiale, ainsi qu'une longueur de corrélation verticale.

Le principal souci rencontré est que l'on ne trouve pas dans la littérature d'exemples de valeurs de ces longueurs de corrélation. Les calculs ont donc été effectués avec plusieurs jeux de valeurs d'un ordre de grandeur qui nous semblait cohérent, allant de 0,225 m à 5 m pour la longueur de corrélation radiale, de 10 m à 100 m pour la longueur de corrélation orthoradiale, et de 1 m à 54 m pour la longueur de corrélation verticale<sup>3</sup>.

Les Figures 2(a), 2(b), 2(c) et 2(d) montrent un exemple des quatre premiers vecteurs propres obtenus pour un cas étudié. La Figure 2(e) montre quant à elle la décroissance des valeurs propres, qui justifie la pertinence de la troncature de la série de Karhunen-Loève. Il est notable que cette décroissance des valeurs propres est d'autant plus marquée que les longueurs de corrélation choisies sont importantes : un champ à grandes longueurs de corrélation sera fortement corrélé ce qui se traduit par une prédominance des premiers modes.

## 5. Mise en œuvre numérique

Une fois les modes de la décomposition de Karhunen-Loève calculés, il ne reste plus qu'à mettre en œuvre numériquement la méthode de Monte-Carlo, c'est-à-dire à générer les réalisations du module d'Young et lancer le calcul mécanique de l'enceinte pour chacune de ces réalisations.

Ceci est fait à l'aide de CTL [MAT 06] ; la Figure 3 représente schématiquement le fonctionnement de CTL. La première étape consiste à créer un client Monte-Carlo qui va générer pour chaque réalisation un jeu de variables aléatoires  $\xi_i$ . Ces variables vont être transmises à un composant Karhunen-Loève qui va les utiliser pour calculer une réalisation du module d'Young, et renvoyer cette information au client. Le client va ensuite appeler le logiciel de calcul par éléments finis FEAP [TAY 05] et lui fournir le champ de module d'Young. En sortie, FEAP restitue au client Monte-Carlo les valeurs

---

3. Ces valeurs sont à comparer aux dimensions de la structure étudiée : 22,5 m de rayon intérieur, 90 cm d'épaisseur et 54 m de hauteur.

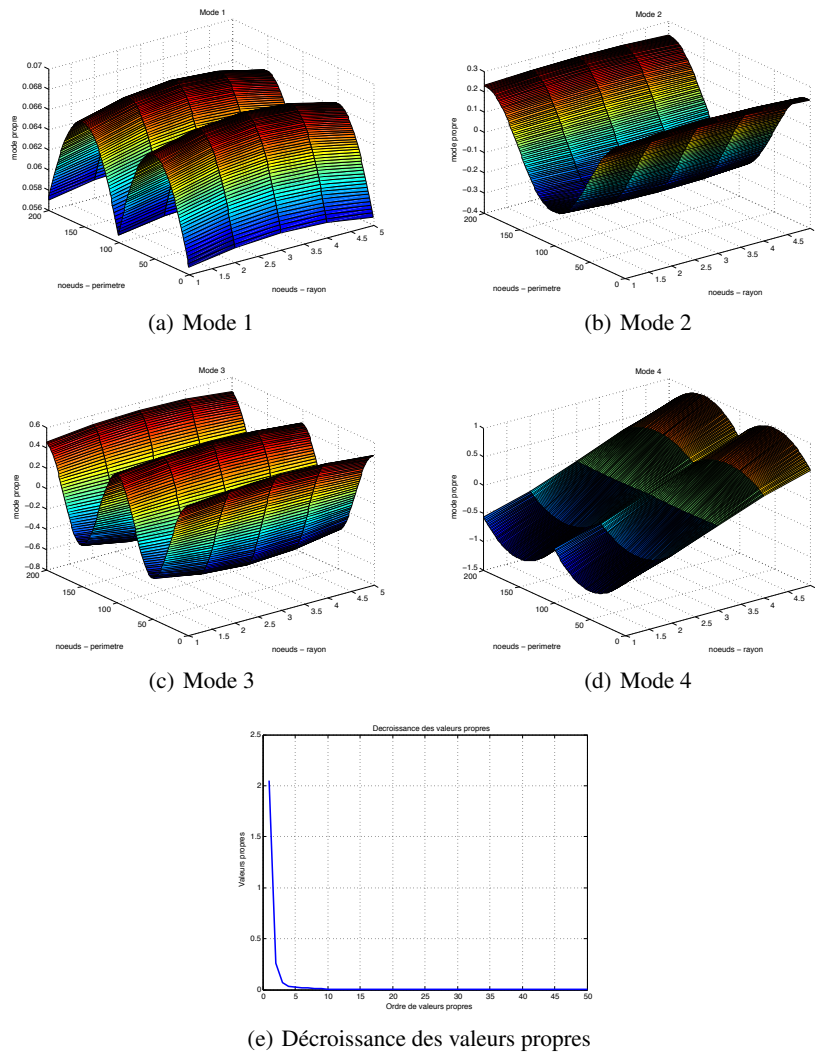
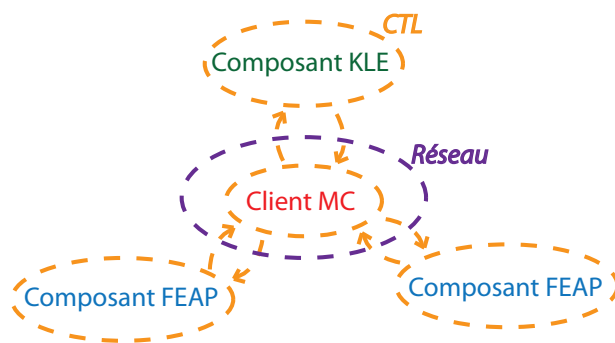


Figure 2. Exemples de modes propres calculés sur la coupe horizontale

des quantités d'intérêt (déformations et contraintes orthoradiales maximales), lequel client peut alors leur appliquer le traitement statistique adéquat. Un des avantages de CTL est qu'il permet facilement l'utilisation d'un réseau et la mise en parallèle des calculs mécaniques, plus longs et plus coûteux que la génération du module d'Young par le composant Karhunen-Loève.



**Figure 3.** Schéma explicatif du fonctionnement de principe de CTL

## 6. Résultats

Les résultats sont ici considérés en terme de borne supérieure de l'intervalle de confiance à 95 %. Pour rappel l'intervalle de confiance à 95 % est l'intervalle dans lequel la quantité d'intérêt considérée a 95 % de chance de se trouver. La borne supérieure de cet intervalle nous intéresse particulièrement dans la mesure où l'on recherche une éventuelle augmentation de la contrainte ou de la déformation orthoradiale par rapport à la valeur calculée par un calcul déterministe à module constant.

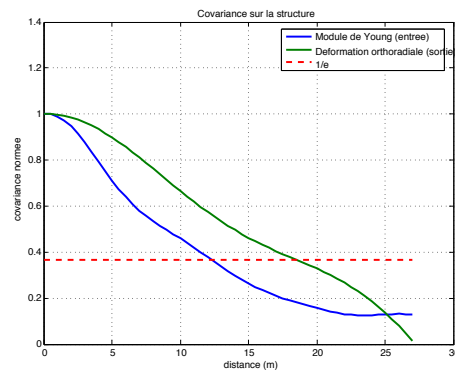
En ce qui concerne les calculs en contraintes planes et déformations planes, sur la coupe horizontale, on observe :

- pour la **contrainte principale majeure** : 12 MPa, au lieu de 10 MPa (calcul déterministe), soit une *augmentation de 20%* ;
- pour la **déformation principale majeure** :
  - 0,86 mm/m, au lieu de 0,61 mm/m (calcul déterministe), soit une *augmentation de 41%* dans le cas des *contraintes planes* ;
  - 0,93 mm/m, au lieu de 0,65 mm/m (calcul déterministe), soit une *augmentation de 43%* dans le cas des *déformations planes*.

Dans le cas du calcul axisymétrique sur la coupe verticale, on observe :

- pour la **contrainte orthoradiale** : 14 MPa, au lieu de 10 MPa (calcul déterministe), soit une *augmentation de 40%* ;
- pour la **déformation orthoradiale** : 0,48 mm/m, au lieu de 0,37 mm/m (calcul déterministe), soit une *augmentation de 30%*.

Une autre observation intéressante, bien que les travaux dans ce sens n'aient pas encore été poussés à leur achèvement, porte sur les longueurs de corrélation, et notamment d'une part à vérifier si l'on retrouve bien sur le signal d'entrée (le module d'Young) la valeur souhaitée, et d'autre part à observer ce que devient cette même longueur de corrélation en aval du problème, sur la quantité d'intérêt observée (cf. Figure 4 pour un exemple). Elle semble augmenter, mais les proportions de cette augmentation restent à approfondir.



**Figure 4.** Exemple de longueur de corrélation en amont et en aval du calcul

## 7. Conclusion

Cette étude a donc permis de mettre en exergue une augmentation significative de la contrainte orthoradiale aussi bien que de la déformation orthoradiale dans le calcul d'une enceinte de confinement lorsque l'on prend en compte une variabilité du module d'Young. Cette augmentation peut s'avérer particulièrement problématique si elle est synonyme de fissuration ou d'endommagement dans la structure, et ce d'une façon non prise en compte dans un habituel calcul déterministe de dimensionnement.

Ceci dit, ces travaux sont encore en cours d'approfondissement sur la base de plusieurs pistes de réflexion : prise en compte de la précontrainte, calcul en trois di-

mensions<sup>4</sup>, étude d'autres quantités d'intérêt (déformation équivalente de Mazars par exemple). . . En outre, une vaste campagne expérimentale est en cours au LMT Cachan dans le but de lever le voile sur les valeurs des longueurs de corrélation.

## 8. Bibliographie

- [HAU 05] HAUTEFEUILLE M., « Mise en oeuvre d'une methode elements finis spectrale de resolution des problemes stochastiques », Rapport de stage de m2, 2005, LMT - ENS Cachan.
- [KEE 03] KEESE A., « Numerical solution of systems with uncertainties - a general purpose framework for stochastic finite elements », PhD thesis, Technischen Universitat Braunschweig, Germany, 2003.
- [LAR 07] DE LARRARD T., « Prise en compte de la variabilite des proprietes elastiques du beton pour le calcul des enceintes de confinement », Rapport de stage de m2, 2007, LMT - ENS Cachan.
- [MAT 05] MATHIES H., « Quantifying uncertainty : modern computational representation of probability and applications », Technical report, 2005, Institute of Scientific Computing Technische Universitat Braunschweig, Germany.
- [MAT 06] MATHIES H., NIEKAMP R., STEINFORD J., « Algorithms for strong coupling procedures », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, 2006, p. 2028-2049.
- [NEW 96] NEWMAN A., « Model reduction via the Karhunen-Loeve expansion - part I : an exposition », Technical report, 1996, University of Maryland, USA.
- [SPA 02] SPANOS P., GHANEM R., *Stochastic finite element, a spectral approach*, Dover Publication, revised édition, 2002.
- [TAY 05] TAYLOR R., ZIENKIEWICZ O., *The finite element method*, Elsevier, Oxford, 6th édition, 2005.

---

4. En réalité une étude 3D a déjà été menée mais les conditions aux limites en rendaient les résultats difficilement interprétables, et la méthode de Monte-Carlo devient rapidement très pénible à mettre en œuvre [LAR 07].

---

Session TS1-B  
Modélisation des données

---

**Identification de variable aléatoire sur le chaos polynomial : application aux données d'inspection et d'instrumentation de structures existantes.**  
A. Clement, H. Yáñez-Godoy, F. Schoefs, A. Nouy

---



---

# Identification de variable aléatoire sur le chaos polynomial : application aux données d'inspection et d'instrumentation de structures existantes

**Alexandre Clément\***, **Humberto Yáñez-Godoy\*\***, **Franck Schoefs\***, **Anthony Nouy\***

*\*Institute for Research in Civil and Mechanical Engineering (GeM)  
Nantes Atlantic University  
UMR CNRS 6183, France*

*franck.schoefs@univ-nantes.fr*

*\*\* OXAND S.A*

*62 bvd Niels Bohr, BP 2132, F-69603 Villeurbanne, FRANCE*

---

*RÉSUMÉ. Classiquement, l'identification d'une variable aléatoire peut être réalisée à partir de lois a priori, mais ce type d'identification ne conduit pas nécessairement à une bonne représentation de la variable aléatoire. Dans cet exposé, on utilise une méthode d'identification sur le chaos polynomial basée sur l'évaluation du maximum de vraisemblance. Nous analysons les performances de la méthode à l'aide de deux applications sur des structures existantes (quais sur pieux). La première concerne la modélisation probabiliste de données d'inspection à l'aide d'outils classiques venant de la théorie de la décision (PoD et PFA). La seconde application concerne la modélisation probabiliste de données d'instrumentation de quais sur pieux afin de mieux décrire les chargements complexes caractérisant ce type de structure.*

*ABSTRACT. Classically, the identification of a random variable can be assessed using predefined laws but these method do not systematically lead to a good representation of the random variable. In this article, we use the method of identification on the polynomial chaos expansion based on the estimate of the maximum likelihood function. We analyse the efficiency of this method using two applications for existing structures (on-pile wharf). The first application deals with the probabilistic modelling of inspection data using classical tools coming from detection theory (PoD and PFA). The second application deals with probabilistic modelling of on-pile wharf instrumentation data in order to get a better description of the complex loads which characterize this type of structure.*

*MOTS-CLÉS : Inspection, instrumentation, processus stochastique, chaos polynomial*

*KEYWORDS: Inspection, instrumentation, stochastic process, polynomial chaos*

---

## 1. Introduction

Classiquement, l'identification d'une variable aléatoire peut être réalisée à partir de lois *a priori* (loi normale, valeurs extrêmes etc.), mais ce type d'identification ne conduit pas nécessairement à une bonne représentation de la variable aléatoire et des grandeurs d'intérêt qui gouvernent l'aide à la décision. En effet, on ne dispose pas toujours d'informations sur les distributions théoriques des variables à identifier. Ainsi quand la distribution d'une variable aléatoire ne suit pas une densité de probabilité classique, on peut choisir de représenter cette variable à l'aide d'une décomposition sur le chaos polynomial [GHA 91]. Dans [DES 07], il a été proposé une méthode d'identification sur le chaos polynomial basée sur le principe de maximum de vraisemblance. Les coefficients de la décomposition sont alors solution d'un problème d'optimisation. La méthode proposée permet notamment de formuler le problème d'optimisation sur une hyper-sphère de dimension  $p - 1$  où  $p$  est l'ordre de troncature du chaos polynomial [YAN 07]. Cette méthode d'identification est utilisée ici pour deux applications : la modélisation de résultats d'inspection et de données d'instrumentation de structures existantes.

La première application concerne l'optimisation des inspections de structures en milieu littoral qui est un enjeu majeur afin de maintenir leur utilisation en toute sécurité. Il apparaît nécessaire de trouver l'équilibre optimal entre le nombre croissant de structures vieillissantes et les moyens financiers disponibles pour poursuivre leur utilisation [RAD 01, STE 04]. En effet, la démolition et le remplacement de ces grandes structures conduisent à des coûts économiques et environnementaux très élevés. La modélisation des données d'inspection est alors fondamentale en vue d'une optimisation. Afin de pouvoir évaluer l'état de ces structures, des campagnes d'inspection sont menées à l'aide de contrôles non destructifs (CND). Ces structures étant situées en milieu marin ou côtier, les conditions d'inspection peuvent être particulièrement difficiles (présence de bio-salissures, visibilité réduite en grandes profondeurs ou en milieu estuarien, etc.). Le coût de ces campagnes d'inspection pouvant être très élevé, il est important d'avoir une description précise de la performance des techniques utilisées : les concepts de probabilité de détection (PoD) et de probabilité de fausse alarme (PFA) se sont révélés utiles pour réaliser des études de risque incorporant ces données d'inspection [ROU 03]. Les probabilités de détection et de fausse alarme sont reliées sous formes de courbes paramétriques appelées "Receiver-Operating-Characteristics curves" (courbes ROC). Ces courbes permettent de caractériser la performance d'une inspection liée aux conditions environnementales, au protocole de mesure ainsi qu'à l'inspecteur. Afin d'obtenir une représentation continue de ces courbes ROC permettant de les incorporer dans un modèle d'aide à la décision, les données d'inspection doivent être modélisées sous formes de variables aléatoires. On montre comment l'identification sur le chaos polynomial donne de meilleurs résultats à la fois au sens du maximum de vraisemblance et au sens de l'indicateur de qualité de la technique d'inspection. Des études de convergence avec l'ordre du chaos polynomial sont présentées.

La seconde application concerne l'instrumentation de ces structures portuaires. Les enjeux sont importants car ces structures subissent des aléas de construction significatifs que les modèles ne parviennent pas à représenter correctement. Les deux structures instrumentées sont des quais sur pieux avec tirants d'ancrage [SCH 04b]. L'instrumentation de ces tirants d'ancrage a pour but de quantifier les chargements horizontaux dus aux actions de remblai, au marnage, à l'action des navires et du vent sur les portiques. A partir d'un modèle aux éléments finis paramétré, on montre comment identifier des variables aléatoires "sources" dont la distribution comporte parfois plusieurs modes. On discutera alors de la capacité de la méthode à identifier des lois multimodales.

## 2. Identification de variable aléatoire sur le chaos polynomial

Dans cette section, on présente la méthode d'identification sur le chaos polynomial et l'algorithme correspondant donné dans [YAN 07]. Cette méthode repose sur l'estimation du maximum de vraisemblance [DES 07] (en pratique sur l'estimation du minimum de la fonction  $(-\log(\text{likelihood}))$ ). Soit  $X(\theta)$  une variable aléatoire du second ordre à identifier à partir de  $N$  tirages notés  $\{X^{(k)}\}_{k=1}^N$ . Une décomposition de cette variable aléatoire s'écrit :

$$X(\theta) = \sum_{i=0}^p h_i(\xi(\theta)) X_i$$

où  $\xi$  est une variable aléatoire centrée réduite,  $h_i$  le polynôme d'Hermite normalisé de degré  $i$  et  $p$  est l'ordre de troncature de la décomposition sur le chaos polynomial. Le but de la procédure d'identification est de déterminer les coefficients  $X_i$  de la décomposition. On suppose ici que la moyenne et l'écart-type sont bien estimés à partir de l'ensemble des tirages. Par la propriété d'orthonormalité des polynômes d'Hermite, on obtient les contraintes suivantes sur les coefficients : soient  $\mu_{exp}$  et  $\sigma_{exp}$  la moyenne et l'écart-type obtenues à partir des échantillons, la moyenne  $\mu_X$  et l'écart-type  $\sigma_X$  de  $X(\theta)$  sont bien estimés à partir de  $\mu_{exp}$  et  $\sigma_{exp}$  et donnent les contraintes sur la décomposition à déterminer. Ainsi, on utilise les contraintes suivantes sur les coefficients :

$$\begin{aligned} X_0 &= \mu_{exp} \\ \sum_{i=1}^p X_i^2 &= \sigma_{exp}^2 \end{aligned}$$

Soit  $a_i = X_i/\sigma_X$ , la décomposition peut être réécrite :

$$X(\theta) = \mu_{exp} + \sigma_{exp} \sum_{i=1}^p a_i h_i(\xi(\theta))$$

où les coefficients  $a_i$  doivent satisfaire :

$$\sum_{i=1}^p a_i^2 = 1$$

Considérant  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)^T \in \mathbb{R}^p$ , on note par  $p_X(\cdot; \mathbf{a})$  la fonction densité de probabilité de  $X$ , paramétrée par  $\mathbf{a}$ , et on introduit la fonction de vraisemblance :

$$L(\mathbf{a}) = \prod_{k=1}^N p_X(X^{(k)}; \mathbf{a})$$

Le problème d'identification s'écrit alors : trouver  $\mathbf{a}$  tel que :

$$-\log(L(\mathbf{a})) = -\underset{\substack{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p \\ \mathbf{a}^T \mathbf{a} = 1}}{\text{argmin}} \log(L(\mathbf{a}))$$

Il s'agit d'un problème d'optimisation sur l'hypersphère unitaire dans  $\mathbb{R}^p$ . En pratique, on choisit la représentation suivante pour l'hypersphère :

$$\begin{cases} a_1 = \cos(\phi_1) \\ a_i = \cos(\phi_n) \prod_{i=1}^{n-1} \sin(\phi_i) \quad \text{for } i \in \{2, \dots, p-1\} \\ a_p = \prod_{i=1}^{p-1} \sin(\phi_i) \end{cases} \quad (1)$$

avec  $\phi_{p-1} \in [0, 2\pi]$  et  $\forall i \in \{1, \dots, p-1\}$ ,  $\phi_i \in [0, \pi]$ . Le problème d'optimisation est alors reformulé comme un problème d'optimisation sans contrainte sur  $\mathbb{R}^{p-1}$ . Ce problème est résolu en deux étapes :

1) une localisation grossière du minimum est réalisée avec un algorithme de *randomsearch* ;

2) partant de ce point, on utilise la méthode Nelder-Mead Simplex [LAG 98].

Ce problème possède généralement plusieurs minima locaux, et il est utile de répéter cette procédure afin de trouver la solution globale du problème.

### 3. Modélisation probabiliste de résultats d'inspection

#### 3.1. Rappels sur les concepts de PoD et PFA et de courbes R.O.C.

Le concept le plus courant pour caractériser la performance d'une technique d'inspection est la probabilité de détection. On note  $a_d$  la taille minimale de défaut, en dessous de laquelle on considère qu'aucune détection n'est réalisée. Par la suite, on appellera ce paramètre  $a_d$  seuil de détection. La probabilité de détection est définie par :

$$PoD = P(\hat{d} \geq a_d) \quad (2)$$

où  $\hat{d}$  est la taille du défaut mesuré. Le seuil de détection  $a_d$  peut être un paramètre déterministe ou une variable aléatoire. De plus, la théorie de la détection permet de définir la probabilité de fausse alarme (PFA). Connaissant les fonctions  $f_{signal}$  et

$f_{bruit}$  donnant respectivement les densités de probabilité du (signal+bruit) et du bruit, la PoD et la PFA s'écrivent :

$$PoD = \int_{a_d}^{+\infty} f_{signal}(\hat{d})d\hat{d} \quad (3)$$

$$PFA = \int_{a_d}^{+\infty} f_{bruit}(\eta)d\eta \quad (4)$$

On considère que le bruit dépend des conditions environnementales, du facteur humain et de la nature du défaut recherché. Pour un seuil de détection donné, le couple (PFA,PoD) permet de définir la performance d'une technique CND ; on l'appelle "Receiver Operating Characteristic" (ROC). Ce couple peut être considéré comme les coordonnées d'un point appartenant au plan (PFA, PoD). Considérant que les valeurs de  $a_d$  appartiennent à l'intervalle  $]-\infty; +\infty[$ , ce point appartient à une courbe appelée courbe ROC. Il s'agit d'une courbe paramétrée par  $a_d$  et déterminée à partir des équations (3) et (4). Pour l'évaluation d'une courbe ROC, le but est alors d'obtenir des valeurs discrètes pour la PoD et la PFA sous certaines conditions [BAR 93] ou de modéliser les distributions des fonctions (signal+bruit) et bruit correspondant à un site donné. Nous nous intéressons ici à la seconde approche.

#### 4. Modélisation des résultats d'inspection pour des modèles stochastique de détérioration

##### 4.1. Définitions de la PoD, la PFA et la ROC pour un modèle stochastique de détérioration

Quand les défauts sont des champs continus sur une structure, la PoD et la PFA doivent être indexées en espace par les coordonnées  $\mathbf{x}$  d'un point d'inspection. On considère, ici, que le défaut est produit par un mécanisme de détérioration indexé en espace par  $\mathbf{x}$  et en temps par  $t$  et qu'il peut être modélisé par un processus stochastique  $d(\mathbf{x}, t, \theta)$ . Après inspection avec un outil CND, la mesure du défaut  $d(\mathbf{x}, t, \theta)$  est  $\hat{d}(\mathbf{x}, t, \theta)$ , soit le champ stochastique (signal+bruit). Le bruit  $\eta(\mathbf{x}, t, \theta)$  est alors défini à partir de ces deux processus stochastiques par (5) :

$$\eta(\mathbf{x}, t, \theta) = \hat{d}(\mathbf{x}, t, \theta) - d(\mathbf{x}, t, \theta) \quad (5)$$

Considérant des équations (3) et (4), la PoD et la PFA sont donc des fonctions indexées par  $\mathbf{x}$  et  $t$  comme les courbes ROC. Le processus  $\hat{d}$  à l'instant  $t$  étant déterminé à partir des résultats d'inspection, la caractérisation d'un outil CND par ces courbes nécessitent de connaître l'un des deux processus dans l'équation (5) :  $d$  ou  $\eta$ . Deux situations peuvent être considérées :

1) le bruit est connu parce qu'il ne dépend pas de la position de l'outil CND sur la structure ou parce qu'il est homogène dans une zone particulière de la structure. Généralement, le bruit est invariant dans le temps et de moyenne nulle ;

2) la taille réelle de défaut est connue soit par une mesure préalable (projet ICON [RUD 96]) soit par hypothèse.

Dans les deux cas la définition de fonctions spatiales continues nécessite une caractérisation complète du processus stochastique par leur distribution jointe. En pratique, presque tous les outils CND donnent des mesures pour un point particulier et seules les distributions marginales sont obtenues.

#### 4.2. Approche statistique dans le cas de tests répétitifs

A partir des résultats d'une inspection CND, on suppose que l'on obtient  $n_r$  mesures CND répétitives pour des positions particulières sur la structure  $x_j$  à des temps donnés  $t_j$ . Ces mesures sont notées  $\{\hat{d}_{j,l}^{(i)}\}_{i=1}^{n_r}$  et considérées comme  $n_r$  réalisations de  $\hat{d}(x_j, t_l, \theta)$ . On considère qu'une réalisation  $d_{j,l}$  de la taille réelle  $d(x_j, t_l, \theta)$  peut être évaluée à partir de ces  $n_r$  mesures qui représentent l'ensemble des sources de bruit avec un biais  $b$  :

$$d_{j,l} = \frac{1}{n_r} \sum_{i=1}^{n_r} \hat{d}_{j,l}^{(i)} - b \quad (6)$$

Si  $b$  est une variable indépendante de l'espace et du temps, elle peut être évaluée à partir d'une campagne CND spécifique. Sinon, le jugement d'expert et l'analyse du protocole d'inspection peuvent donner des valeurs ou des bornes de  $b$ . On peut alors déduire  $n_r$  réalisations  $\eta_{j,l}^{(i)}$  du bruit  $\eta(x_j, t_l, \theta)$  comme suit :

$$\eta_{j,l}^{(i)} = \hat{d}_{j,l}^{(i)} - d_{j,l} \quad \text{with } i \in \{1, \dots, n_r\} \quad (7)$$

Une campagne d'inspection d'une structure ne donnent qu'une seule réalisation de la taille réelle  $d$  et  $n_r$  réalisations du bruit  $\eta$ . En pratique, certaines hypothèses sur les processus stochastiques (stationnarité, ergodicité, longueur de corrélation inférieure à la distance entre les mesures) permettent de considérer les mesures en différents points à différents instants comme des réalisations indépendantes d'une variable aléatoire. On peut alors caractériser les distributions marginales des processus stochastiques initiaux. Ces hypothèses permettent d'obtenir une caractérisation probabiliste du processus stochastique à partir de l'unique réalisation accessible.

## 5. Détermination pratique dans le cas de corrosion d'ouvrages côtiers en acier

### 5.1. Structures considérées et protocole de mesure

La structure de référence est un quai sur pieux situé à Saint-Nazaire dont les pieux en acier sont soumis aux effets de la corrosion. Ainsi l'évaluation de la santé structurelle de ce type d'ouvrage est primordiale pour son bon fonctionnement. Dix-huit pieux de cette structure ont été inspectés suivant le protocole défini par le Centre

d'Etudes Techniques Maritimes et Fluvial (CETMEF). A une hauteur donnée d'un pieu, ce protocole recommande d'effectuer trois mesures dans quatre zones dites cardinales. Ces zones sont réparties sur la section du pieu et permettent de prendre en compte le caractère parfois non uniforme de la corrosion. Ainsi, il est possible de déterminer si les différentes actions environnementales peuvent influencer sur le développement de la corrosion (courants, houle etc.). Le vecteur des indexes spatiaux  $x$  des processus stochastiques est le numéro du pieu, l'abscisse vertical  $z$  orientée vers le haut et la position cardinal (Nord, Ouest, Sud et Est).

Pour cette structure, aucune corrélation n'a été trouvée entre les points cardinaux pour la perte d'épaisseur. De plus, aucune corrélation n'a été trouvée entre les différents pieux pour une hauteur donnée  $z$ . Considérant les hypothèses données dans la section 4.2, on peut considérer que les données (pour  $d$ ,  $\hat{d}$  et  $\eta$ ) en différents points cardinaux et pour tous les pieux sont des réalisations indépendantes des processus stochastiques. Par abus de notation, on notera respectivement par  $\hat{d}(z, \theta)$ ,  $d(z, \theta)$  et  $\eta(z, \theta)$  les champs stochastiques "défaut mesuré", "taille réelle de défaut" et "bruit". Comme trois mesures sont réalisées pour chacun des quatre points cardinaux pour chacun des dix-huit pieux, on obtient, a une hauteur donnée  $z_j$ , 216 réalisations de  $\hat{d}(z_j, \theta)$  et  $\eta(z_j, \theta)$ , et 72 réalisations pour  $d(z_j, \theta)$ . Ici, la structure a été inspectée en six niveaux :  $z_1 = +2m$  et  $z_2 = +1m$  pour la zone de marnage,  $z_3 = +0.5m$ ,  $z_4 = 0m$ ,  $z_5 = -0.5m$  et  $z_6 = -1m$  pour la zone d'immersion permanente.

On note  $\hat{d}_j^{(i,k)}$  et  $\eta_j^{(i,k)}$  les réalisations obtenues de  $\hat{d}(z_j, \theta)$  et  $\eta(z_j, \theta)$  avec  $(i, k) \in \{1 \dots n_r\} \times \{1 \dots n_p\}$ . On note  $d_j^{(k)}$  les réalisations de  $d(z_j, \theta)$  avec  $k \in \{1 \dots n_p\}$ . Dans notre cas,  $n_r = 3$  et  $n_p = 72$ . Comme indiqué dans la section 4.2, les réalisations de  $d$  et  $\eta$  sont déduites des réalisations de  $\hat{d}$  par :

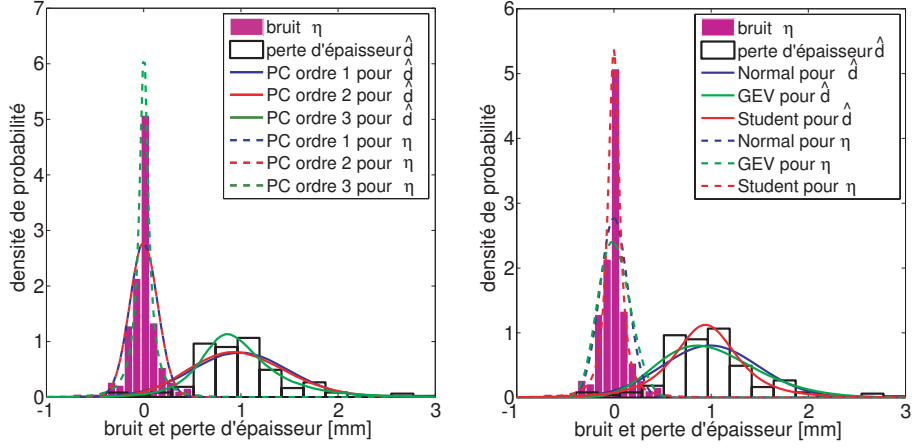
$$d_j^{(k)} = \frac{1}{n_r} \sum_{i=1}^{n_r} \hat{d}_j^{(i,k)} - b, \quad \text{for } k \in \{1 \dots n_p\} \quad (8)$$

$$\eta_j^{(i,k)} = \hat{d}_j^{(i,k)} - d_j^{(k)}, \quad \text{for } (i, k) \in \{1 \dots n_r\} \times \{1 \dots n_p\} \quad (9)$$

D'après le jugement d'expert (plongeurs et experts en corrosion), ce protocole n'introduit pas un biais systématique sur les mesures, *i.e*  $b = 0$ . Classiquement des distributions prédéfinies (Normale, Log-normale etc.) sont utilisées pour obtenir les densités de probabilité de la perte de matière  $\hat{d}$  et du bruit  $\eta$ . Ici, nous utilisons la méthode d'identification sur le chaos polynomial et analysons ses performances.

## 5.2. Résultats de l'identification pour la détermination des courbes ROC

Dans cette section on présente les résultats de l'identification sur le chaos polynomial de la perte de matière  $\hat{d}$  et du bruit  $\eta$ . On s'intéresse aux résultats obtenus pour la hauteur  $z_1 = +2m$  située dans la zone de marnage. La figure 1 présente la comparaison entre l'identification sur le chaos polynomial pour différents ordres de troncature  $p$  et l'identification avec des distributions prédéfinies (Normal, Gumbel et Student). On constate que, pour les distributions prédéfinies, la loi de Student donne la



**Figure 1.** Densités de probabilité de  $\hat{d}$  et  $\eta$  obtenues par identification sur le chaos polynomial (gauche) et des distributions prédéfinies (droite).

meilleure distribution au sens du maximum de vraisemblance (avec des minima pour la fonction  $-\log(\text{likelihood})$  égaux à 139 et -149 pour  $\hat{d}$  et  $\eta$ ). Pour l'identification sur le chaos polynomial, les meilleurs résultats sont obtenus pour un ordre de troncature  $p = 3$  (minima de  $-\log(\text{likelihood})$  égaux à 132 et -155 pour  $\hat{d}$  et  $\eta$ ).

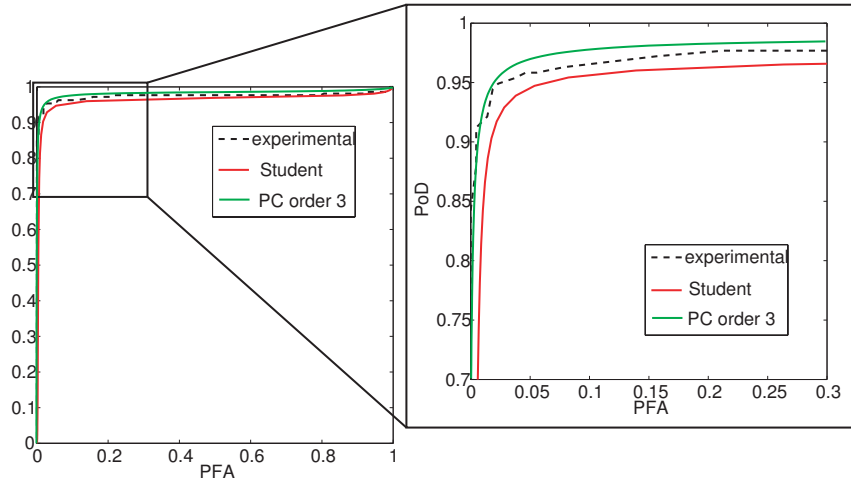
Le nombre de mesures étant important, les équations (3) et (4) donnent une approximation satisfaisante pour la PoD et la PFA à chaque niveau d'inspection :

$$PoD(z_j) \approx \frac{\text{Card}(A(z_j))}{n_p \times n_r}, \quad \text{avec } A(z_j) = \{(i, k) \in \mathcal{J}; \hat{d}_j^{(i,k)} > a_d\} \quad (10)$$

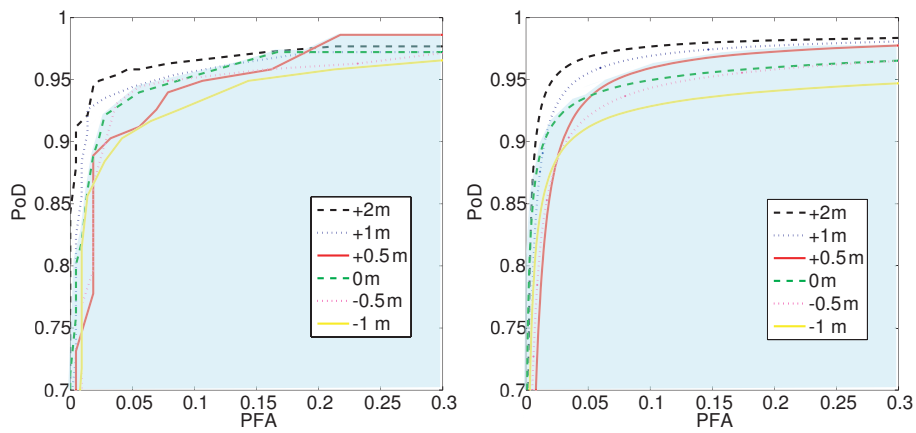
$$PFA(z_j) \approx \frac{\text{Card}(B(z_j))}{n_p \times n_r}, \quad \text{avec } B(z_j) = \{(i, k) \in \mathcal{J}; \eta_j^{(i,k)} > a_d\} \quad (11)$$

où  $\mathcal{J} = \{1 \dots n_r\} \times \{1 \dots n_p\}$ . Ces points ont été calculés en fixant le seuil de détection  $a_d$  à des valeurs arbitraires avec un pas de 0.05 mm. En reliant ces points, on obtient les courbes ROC sans aucun ajustement : ils sont notés courbes ROC expérimentales dans la suite. A partir des distributions précédentes, nous pouvons construire les courbes ROC correspondantes pour chaque pdf et les comparer aux courbes ROC expérimentales. Dorénavant, on s'intéresse uniquement aux résultats obtenus avec la loi de Student et l'identification sur le chaos polynomial pour un ordre  $p = 3$ . La figure 2 présentent les courbes ROC correspondantes. On constate que la loi de Student tend à sous-estimer la performance de la technique CND contrairement à la méthode d'identification sur le chaos polynomial. Afin de quantifier simplement la performance d'une technique CND, on peut calculer, à partir des courbes ROC, la distance entre la courbe et le point  $[0, 1]$  caractérisant une inspection parfaite [SCH 04a] : cette distance  $\delta$  représente l'efficacité optimale de la technique sous certaines conditions (seuil de détection, conditions d'inspection etc.). Avec la loi de Student, on obtient une dis-





**Figure 2.** Comparaison entre les courbes ROC obtenues avec la loi de Student, l'identification sur le chaos polynomial et les mesures sans ajustement ;  $z_1 = +2m$ .



**Figure 3.** Comparaison entre les courbes ROC expérimentales (gauche) et obtenues par identification sur le chaos polynomial (droite) pour tous les niveaux d'inspection.

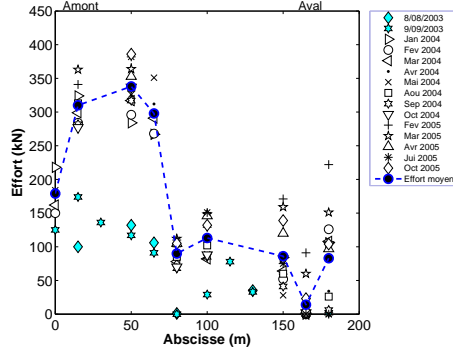
tance  $\delta = 0.072$  et avec l'identification sur le chaos polynomial (ordre  $p = 3$ ), on obtient  $\delta = 0.052$  ce qui est nettement plus proche de la valeur obtenue directement avec les données expérimentales ( $\delta = 0.054$ ). Enfin, la figure 3 présente les courbes ROC expérimentales obtenues pour les 6 niveaux d'inspection et celles obtenues à partir de l'identification sur le chaos polynomial avec un ordre de troncature  $p = 3$ . On

note une bonne concordance entre les deux types de courbes. Ces figures laissent apparaître dans les deux cas deux familles de courbes. La première regroupe les courbes ROC les plus proches du point d'inspection parfait de coordonnées (0, 1) et la seconde regroupe celles indiquant des inspections moins performantes. On remarque que cette seconde famille, colorée en bleu sur la figure, regroupe toutes les inspections réalisées dans la zone d'immersion permanente pour laquelle les conditions d'inspection sont plus difficiles.

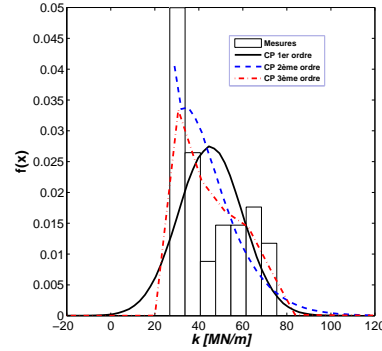
## 6. Modélisation de données d'instrumentation de quais

Les ports incluent un ensemble de structures hétérogènes à cause de leur fonction, leur date de construction, leur typologie et leur matériau. L'instrumentation peut s'avérer d'une aide importante en complément des modélisations usuelles qu'elles soient au niveau du comportement mécanique ou du chargement, en particulier si des problèmes couplés difficiles apparaissent ou bien si des conditions de réalisation risquent d'éloigner le comportement de l'ouvrage de son comportement théorique. Nous nous focalisons sur l'étude de deux quais sur pieux instrumentés au niveau des tirants d'ancrage, éléments sensibles du quai et non accessibles après le chantier. Ces ouvrages sont situés sur l'estuaire de la Loire. La stratégie d'instrumentation réalisée sur douze tirants d'ancrage, régulièrement répartis sur la longueur de l'ouvrage, vise à suivre le comportement global des quais, sous chargement horizontal, dans les 5 ans suivant sa construction afin de pouvoir mieux anticiper les évolutions dans le temps, et de faciliter la maintenance par une meilleure compréhension de son fonctionnement en service. Les données collectées lors d'une période de quatre ans, pendant laquelle les efforts dans les tirants évoluent selon la variabilité saisonnière de la marée, ont été analysées dans [YAN 08b]. Les analyses des mesures d'efforts dans les tirants d'ancrage du quai sont réalisées en ciblant les deux types de variations qui caractérisent ces efforts : les variations temporelles (des variations à moyen terme, où se pose la question des niveaux d'efforts au cours d'un même mois et des variations à court terme, où nous nous intéressons à l'amplitude des efforts durant une marée au cours d'une demi-journée) et les variations spatiales (des variations d'un tirant à l'autre). Une forte dispersion dans l'espace et le temps a été constatée (voir l'exemple pour le Terminal à Bois Cheviré, poste no. 4 sur la figure 4).

Le profil d'efforts observé sur la Figure 4 renvoie aux conditions initiales au cours du chantier. En effet, le constat du passage répété d'engins d'approvisionnement au niveau des tirants T0 à T65 au cours du chantier nous permet de conjecturer un compactage plus important du remblai sur la partie amont du quai. D'autre part, une sensibilité des tirants à la marée est directement liée à la raideur du complexe "sol-tirant-plaque d'ancrage" (STPA). L'analyse statistique des mesures, l'étude de l'effet de la marée et l'identification des sources d'aléas et d'incertitudes a permis de définir un modèle stochastique mécano-probabiliste représentatif du comportement global du quai [YAN 08a]. L'effort total dans les tirants ( $F$ ) peut être caractérisé comme un processus stochastique indexé en espace par l'abscisse  $x$  et en temps  $t$ ,  $F(x, t, \theta)$ . Les



**Figure 4.** Variabilité de l'effort à moyen terme le long du quai Cheviré, poste n<sup>o</sup>4.



**Figure 5.** Résultats des ajustements à la distribution de  $k$  pour le quai TMDC-4.

capteurs enregistrent des réalisations de trajectoires de ce processus :  $F(x_i, t_j, \theta_k)$ . Nous observons alors un effort total dans les tirants caractérisé par :

$$F(x, t, \theta) = F_r(x, t) + Ku(x, t) \quad (12)$$

où  $F_r(x, t)$  est la composante permanente due au chargement du remblai seul  $F_R$  et  $Ku(x, t)$  représente la composante due au déplacement du quai à partir de la position d'équilibre sous l'effort de remblai seul (composante simplifiée par le comportement du système STPA). Un découplage est considéré à ce niveau. Ce choix évite de résoudre un problème d'optimisation à un grand nombre de degrés de libertés (chargement extérieur, paramètres du modèle mécano-probabiliste, etc.). Par la suite et par abus d'écriture, nous ferons référence au processus  $F(x_i, t_j, \theta_k)$  de cette manière :  $F(x, \theta)$ . Cela implique que chaque réalisation de cette variable provient d'une mesure à un temps donné. La génération du champ  $F(x, \theta)$  par une seule variable  $k(\theta)$ , représentant la raideur équivalente du complexe STPA, permet de réduire la complexité pour se concentrer sur un développement robuste de la méthode d'identification des caractéristiques de  $k$ . Le comportement au cours des marées de fort coefficient conduit à l'identification de la raideur équivalente  $k$  du complexe STPA pour le quai. Les phases d'identification de cette raideur sont présentés dans [YAN 08a]. L'identification de la distribution de  $k$  est réalisée en utilisant l'identification sur le chaos polynomial. Les fonctions de densité de probabilité des décompositions du chaos polynomial obtenues sont illustrées par la figure 5 pour le Terminal à Marchandises Diverses et Conteneurs, poste no. 4 (TMDC-4), et montrent les bons ajustements avec la distribution statistique de  $k$ .

## 7. conclusion

Cet article présente une méthode d'identification de variable aléatoire par projection sur le chaos polynomial basé sur l'estimation du maximum de vraisemblance.

Les inconnues du problème sont alors les coefficients de la décomposition de la variable aléatoire sur le chaos polynomial. Les résultats de la méthode sont comparés à ceux obtenus avec des lois prédéfinies. A l'aide de deux applications, on montre que cette méthode est plus efficace au sens du maximum de vraisemblance. La première concerne la modélisation de données d'inspection afin d'évaluer la qualité de la technique CND utilisée. La seconde application concerne la modélisation de paramètres de modèles à partir de données d'instrumentation d'un quai sur pieux. Les travaux futurs concerneront l'identification de la structure de corrélation

## 8. Bibliographie

- [BAR 93] BARNOUIN B., LEMOINE L., DOVER W., RUDLIN J., FABBRI S., REBOURCET G., « Underwater inspection reliability trials for offshore structures », NY A., Ed., *Proceeding of the 12th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, vol. 3B, 1993, p. 883-900.
- [DES 07] DESCELIERS C., SOIZE C., GHANEM R., « Identification of chaos representations of elastic properties of random media using experimental vibration tests », *Computational Mechanics*, vol. 39, 2007, p. 831-8.
- [GHA 91] GHANEM R., SPANOS P., *Stochastic finite elements : a spectral approach*, Springer, Berlin, 1991.
- [LAG 98] LAGARIAS J., REEDS J., WRIGHT M., P.E. WRIGHT, « Convergence properties of the Nelder-Mead Simplex Method in low dimensions », *SIAM Journal of Optimization*, vol. 9, 1998, p. 112-147.
- [RAD 01] RADOJICIC A., BAILEY S., BRÜHWILER E., « Probabilistic models of cost for the management of existing structures », *Life-Cycle Cost Analysis and Design of Civil Infrastructure Systems*, , 2001.
- [ROU 03] ROUHAN A., SCHOEFS F., « Probabilistic modelling of inspection results for offshore structures », *strsafe*, vol. 25, 2003, p. 379-399.
- [RUD 96] RUDLIN J., DOVER W., « The ICON database : assisting underwater inspections », *Offshore technology*, vol. 4, 1996.
- [SCH 04a] SCHOEFS F., CLÉMENT A., « Multiple inspection modeling for decision making and management of jacket off-shore platforms : effect of false alarms », *Proceedings of the first International Forum on Engineering Decision Making (IFED'04)*, Stoos, Switzerland, 2004.
- [SCH 04b] SCHOEFS F., GÉRARD B., CASARI P., VERDURE L., « Stratégie d'instrumentation pour la gestion optimisée des ouvrages portuaires », *Proceedings of the VIIIèmes Journées Nationales Génie Côtier-Génie Civil, Compiègne, France, 2004*, p. 513-520.
- [STE 04] STEWART M., ESTES A., FRANGOPOL D., « Bridge deck replacement for minimum expected cost under multiple reliability constraints », *Journal of Structural Engineering*, , 2004.
- [YAN 07] YANEZ-GODOY H., SCHOEFS F., NOUY A., « Soil-rod-anchoring stiffness identification of a monitored pile-supported wharf by a polynomial chaos representation », *Structural Safety*, , 2007.

- [YAN 08a] YANEZ-GODOY H., *Mise à jour de variables aléatoires à partir des données d'instrumentations pour le calcul en fiabilité de structures portuaires*, Mémoire de thèse (Université de Nantes, Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique), 2008.
- [YAN 08b] YANEZ-GODOY H., SCHOEFS F., CASARI P., « Statistcal analysis of the effects of building conditions on the initial loadings of on-piles quays », *Journal Structural Health Monitoring*, , 2008, page in press.

**Méthode MCMC pour l'actualisation bayésienne des déformations différées du béton d'une enceinte de confinement modélisée par éléments finis.**

M. Berveiller, Y. Le Pape, B. Sudret, F. Perrin

---

---

# Méthode MCMC pour l'actualisation bayésienne des déformations différées du béton d'une enceinte de confinement modélisée par éléments finis stochastiques non intrusifs

Marc Berveiller\* — Yann Le Pape\* — Bruno Sudret\* — Frédéric Perrin\*\*

\* EDF - R&D Division, Site des Renardières,  
F-77818 Moret-sur-Loing,

\*\* Phimeca Engineering S.A.,  
Centre d'Affaires du Zénith  
34, rue de Sarliève  
63800 COURNON d'Auvergne  
{marc.berveiller, yann.le-pape, bruno.sudret}@edf.fr  
perrin@phimeca.com

---

*RÉSUMÉ. La détermination des déformations différées des enceintes de confinement des centrales nucléaires est un enjeu crucial pour EDF. Il est donc nécessaire d'améliorer les prédictions de ses déformations différées en s'appuyant sur ces données collectées tout au long de la vie de l'ouvrage, afin de recalibrer le modèle utilisé ainsi que ces paramètres d'entrée. Les méthodes d'actualisation basées sur les méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov couplées à des développements du modèle sur la base du chaos polynomial sont utilisées dans cette étude.*

*ABSTRACT. Delayed strains in concrete containment vessels are a major concern for EDF. Codified models for predicting creep and shrinkage are not accurate in the long term. However, containment vessels are continuously monitored so that measures of creep are available. The paper aims at computing the evolution in time of a confidence interval on the creep strains. The latter is then modified in order to introduce the measurement data and to update the confidence interval and the input parameters of the model. Markov chain Monte Carlo and polynomial chaos expansions are used in this study.*

*MOTS-CLÉS : actualisation bayésienne, Markov chain Monte Carlo (MCMC), chaos polynomial, approche non intrusive*

*KEYWORDS: Bayesian updating, Markov Chain Monte Carlo, Polynomial Chaos, Non intrusive approach*

---

## 1. Introduction

Les enceintes de confinement des centrales nucléaires françaises de 1300-1450 MW sont constituées de deux parois en béton. Le mur intérieur est précontraint dans les directions verticales et horizontales. L'intégrité de la structure dépend de l'état de compression du béton en service et en situation accidentelle. Ainsi, la perte de précontrainte dans le béton des enceintes de confinement impacte la durée de vie des centrales REP. En effet, la réglementation impose lors des épreuves en pression, une compression résiduelle d'au moins 1 MPa dans l'enceinte, afin de s'assurer qu'elle joue toujours son rôle de 3ème barrière contre toute contamination extérieure. Cette exigence nécessite donc de bien estimer le comportement à long terme du fluage du béton. La modélisation de ce comportement est un domaine relativement complexe qui s'appuie en partie sur des données empiriques. Les enceintes de confinement sont instrumentées et permettent donc d'avoir un retour d'expériences (données d'auscultation) sur les déformations du béton. Il est donc intéressant d'améliorer les prédictions des déformations différées des enceintes à 60 ans en s'appuyant sur ces données collectées tout au long de la vie de l'ouvrage, afin de recalibrer le modèle utilisé. Un autre intérêt est de recalibrer les paramètres d'entrée du modèle sur ces mesures d'auscultation.

## 2. Actualisation des paramètres d'entrée du modèle

### 2.1. Introduction

La méthode d'actualisation utilisée dans cette étude est basée sur les méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov [PER 07, PER 08, SUD 07].

### 2.2. Position du problème

Considérons un modèle  $y = \mathcal{M}(x, t)$ , dont les paramètres d'entrée sont modélisés par un vecteur aléatoire  $\underline{X}$  de loi jointe  $p_{\underline{X}}(\underline{x})$ . Supposons que l'on dispose de mesures de la réponse du modèle :

$$\underline{y}_{obs} = \{y_{obs}^{(j)}, j = 1, \dots, n_{obs}\} \quad (1)$$

Chaque observation  $y_{obs}$  est considérée comme étant une réalisation du vecteur (aléatoire) des observations  $\underline{y}_{obs}$  dont la densité jointe s'écrit :

$$\underline{y}_{obs} | \underline{X} = \underline{\tilde{x}} \sim \mathcal{N}(\mathcal{M}(\underline{\tilde{x}}), \mathbf{C}_{obs}) \quad (2)$$

où  $\mathbf{C}_{obs}$  est la matrice de covariance de l'erreur mesure/modèle et  $\underline{\tilde{x}}$  est la réalisation (inconnue) du vecteur aléatoire d'entrée. Autrement dit, la densité jointe de la  $j$ -ème observation  $\underline{y}_j$  obtenue à  $t = t_j$  s'écrit :

$$f_{\underline{y}_j | \underline{X}}(\underline{y}_j | \underline{X} = \underline{\tilde{x}}) = \varphi_N(\underline{y}_j - \mathcal{M}(\underline{\tilde{x}}, t_j); \mathbf{C}_{obs}) \quad (3)$$



Le théorème de Bayes permet de déduire la distribution *a posteriori* de  $\underline{X}$  à partir des réalisations  $\underline{\mathcal{Y}}_{obs}$  de  $\underline{Y}_j$  :

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}|\underline{\mathcal{Y}}_{obs}) = cp_{\underline{X}}(\underline{x})L(\underline{\mathcal{Y}}_{obs}; \underline{x}) \quad (4)$$

où  $c$  est une constante et  $L(\underline{\mathcal{Y}}_{obs}; \underline{x})$  est la fonction de vraisemblance des observations :

$$L(\underline{\mathcal{Y}}_{obs}; \underline{x}) = \prod_{j=1}^{n_{obs}} \varphi_N(y_{obs}^{(j)} - \mathcal{M}(\tilde{\underline{x}}, t_j); \mathbf{C}_{obs}) \quad (5)$$

Afin de caractériser complètement la distribution *a posteriori*  $f_{\underline{X}}(\underline{x}|\underline{\mathcal{Y}}_{obs})$ , la constante  $c$  de l'équation (4) est calculée :

$$\frac{1}{c} = \int_{\mathbb{R}^M} p_{\underline{X}}(\underline{x}) \prod_{j=1}^{n_{obs}} \varphi_N(y_{obs}^{(j)} - \mathcal{M}(\tilde{\underline{x}}, t_j); \mathbf{C}_{obs}) d\underline{x} \quad (6)$$

Cette intégrale peut être calculée par des techniques de simulation (Monte-Carlo par exemple) ou de quadratures. Il existe des techniques adaptées aux simulations de densités de probabilité issues du théorème de Bayes : la technique des méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov (en particulier l'algorithme de Metropolis-Hastings) est présentée dans la suite. La densité *a posteriori* de  $\underline{X}$  (Eq. (4)) peut donc être simulée sans passer par le calcul de l'intégrale (6) et uniquement à partir de la fonction de vraisemblance (Eq. (5)) et de la connaissance de la loi *a priori*  $p_{\underline{X}}(\underline{x})$  de  $\underline{X}$ .

### 2.3. Méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov

Les méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov [DRO 02, LAN 02] sont des algorithmes permettant de simuler des échantillons à partir de lois de probabilités en construisant des chaînes de Markov. L'idée est de générer itérativement des échantillons  $(X_n)$  d'une chaîne de Markov qui va se comporter asymptotiquement comme la densité de probabilité que l'on doit simuler. Nous présentons maintenant l'algorithme de Metropolis-Hastings qui permet de générer de telles chaînes.

#### 2.3.1. Algorithme de Metropolis-Hastings

L'algorithme de Metropolis-Hastings [MET 53, HAS 70] fonctionne comme suit : Tout d'abord, un point de départ  $\underline{x}^{(0)}$  est choisi. Ensuite, à chaque étape, la transition entre les états  $\underline{x}^{(k)}$  et  $\underline{x}^{(k+1)}$  s'écrit :

$$\underline{x}^{(k+1)} = \begin{cases} \tilde{\underline{x}} \sim q(\underline{x}|\underline{x}^{(k)}) & \text{avec la probabilité } \alpha(\underline{x}^{(k)}, \tilde{\underline{x}}) \\ \underline{x}^{(k)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (7)$$

Dans cette équation  $q(\underline{x}|\underline{x}^{(k)})$  représente une densité conditionnelle *arbitraire* et la *probabilité d'acceptation*  $\alpha(\underline{x}^{(k)}, \tilde{\underline{x}})$  s'écrit :

$$\alpha(\underline{x}^{(k)}, \tilde{\underline{x}}) = \min \left\{ 1, \frac{f_{\underline{X}}(\tilde{\underline{x}}) q(\underline{x}^{(k)}|\tilde{\underline{x}})}{f_{\underline{X}}(\underline{x}^{(k)}) q(\tilde{\underline{x}}|\underline{x}^{(k)})} \right\} \quad (8)$$

Une densité conditionnelle *arbitraire* généralement choisie est obtenue en ajoutant une perturbation aléatoire  $\underline{\xi}$  à  $\underline{x}^{(k)}$  pour obtenir le candidat  $\tilde{\underline{x}}$ , soit  $\tilde{\underline{x}} = \underline{x}^{(k)} + \underline{\xi}$ . Le vecteur aléatoire  $\underline{\xi}$  est souvent construit avec des variables gaussiennes ou uniformes centrées et indépendantes. Cette implémentation est appelée *algorithme de marche aléatoire* [MET 53]. Dans ce cas, la densité conditionnelle *arbitraire* s'écrit  $q(\tilde{\underline{x}}|\underline{x}^{(k)}) = q(\tilde{\underline{x}} - \underline{x}^{(k)})$ . De par la symétrie, l'équation (8) se réduit à :

$$\alpha(\underline{x}^{(k)}, \tilde{\underline{x}}) = \min \left\{ 1, \frac{f_{\underline{X}}(\tilde{\underline{x}})}{f_{\underline{X}}(\underline{x}^{(k)})} \right\} \quad (9)$$

Pour pouvoir sélectionner  $\tilde{\underline{x}}$  avec la probabilité  $\alpha(\underline{x}^{(k)}, \tilde{\underline{x}})$  (Eq.7), un échantillon  $u^{(k)}$  est généré à partir d'une distribution uniforme  $\mathcal{U}([0, 1])$ . Ainsi  $\tilde{\underline{x}}$  est accepté si  $u^{(k)} < \alpha(\underline{x}^{(k)}, \tilde{\underline{x}})$  et rejeté sinon.

Les équations (7) et (9) permettent d'échantillonner n'importe quelle distribution en se donnant un algorithme pour  $f_{\underline{X}}(\underline{x})$ , à une constante près, comme le montre le quotient dans l'équation (9).

### 2.3.2. Algorithme Metropolis-Hastings en cascade

Pour pouvoir simuler les densités *a posteriori* (Eq.(4)), l'algorithme Metropolis-Hastings est utilisé dans une version *cascade* en deux étapes [TAR 05]. Concrètement, le candidat  $\tilde{\underline{x}}$  doit être dans un premier temps accepté pour la distribution *a priori* (Eq.(7)). Puis il est accepté ou rejeté par la fonction de vraisemblance. L'algorithme est le suivant :

–  $k = 0$ , initialisation de la chaîne de Markov  $\underline{x}^{(0)}$  de manière déterministe ou aléatoire

Tant que  $k \leq n_{MCMC}$

- 1) génération d'un incrément aléatoire  $\underline{\xi}^{(k)}$   
calcul du candidat  $\tilde{\underline{x}} = \underline{x}^{(k)} + \underline{\xi}^{(k)}$
- 2) évaluation de la probabilité d'acceptation *a priori* :  $\alpha_p(\underline{x}^{(k)}, \tilde{\underline{x}}) = \min \left\{ 1, \frac{p_{\underline{X}}(\tilde{\underline{x}})}{p_{\underline{X}}(\underline{x}^{(k)})} \right\}$
- 3) calcul de l'échantillon  $u_p \sim \mathcal{U}([0, 1])$  :
  - a) si  $u_p < \alpha_p(\underline{x}^{(k)}, \tilde{\underline{x}})$  alors aller à 4 (acceptation)
  - b) sinon aller à 1 (rejet)
- 4) évaluation de la probabilité d'acceptation pour la fonction de vraisemblance  $\alpha(\underline{x}^{(k)}, \tilde{\underline{x}})_L = \min \left\{ 1, \frac{L(\underline{y}_{obs}; \tilde{\underline{x}})}{L(\underline{y}_{obs}; \underline{x}^{(k)})} \right\}$  où  $L(\cdot)$  est la fonction de vraisemblance définie dans l'équation (5). Le modèle  $\mathcal{M}$  est appelé à cette étape.
- 5) calcul de l'échantillon  $u_L \sim \mathcal{U}([0, 1])$  :
  - a) si  $u_L < \alpha_L(\underline{x}^{(k)}, \tilde{\underline{x}})$  alors  $x^{(k+1)} \leftarrow \tilde{\underline{x}}$  et  $k \leftarrow k + 1$  (acceptation)
  - b) sinon aller à 1 (rejet)

#### 2.4. Evaluation a priori et a posteriori du modèle

Nous avons à présent disposition les lois *a priori* et *a posteriori* du vecteur aléatoire  $\underline{X}$  des données d'entrée du modèle. Nous souhaitons aussi connaître l'évolution du modèle  $\mathcal{M}(\underline{X}, t)$  (son quantile à 50% ainsi que l'évolution de son intervalle de confiance à 95% (ses quantiles à 2,5% et 97,5%). Dans un premier temps, il faut calculer des échantillons du modèle *a priori* et *a posteriori* à partir des échantillons des lois *a priori* et *a posteriori* du vecteur aléatoire  $\underline{X}$  obtenues par la méthode MCMC. Le calcul de l'évolution des quantiles du modèle peut se faire directement à partir des échantillons *a priori* et *a posteriori* du modèle.

#### 2.5. Méthode non intrusive de régression

Nous avons vu que pour mener à bien une analyse d'actualisation (notamment la génération de la chaîne de Markov et le calcul des échantillons *a priori* et *a posteriori* du modèle), il faut faire appel un nombre important de fois au modèle, chaque appel pouvant être long si un modèle aux des éléments finis est utilisée pour représenter le système. Afin de réduire ce temps de calcul, une surface de réponse analytique peut être utilisée. Ainsi le modèle est analytique et son évaluation est beaucoup plus rapide. [BER 05] montre que la méthode non intrusive de régression, présentée succinctement dans cette section, permet de générer une surface de réponse stochastique utilisable pour les problèmes de fiabilité.

Considérons un système mécanique modélisé par un modèle numérique  $\mathcal{M}$ . Supposons que ce modèle a  $M$  paramètres d'entrée qui sont aléatoires, modélisés par des variables aléatoires indépendantes rassemblées dans le vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_M)$ , qui a pour densité jointe  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ . Ainsi le modèle  $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$  est également aléatoire et peut s'écrire comme le développement de  $Y$  sur le chaos polynomial de dimension finie :

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^M} a_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \quad (10)$$

Les  $a_{\alpha}$  sont les coefficients inconnus et les  $\psi_{\alpha}$  sont les polynômes orthogonaux multidimensionnels vis-à-vis de la densité jointe  $p_{\mathbf{X}}$ . Une méthode de régression peut être utilisée pour calculer les coefficients  $a_{\alpha}$  à partir d'un plan d'expériences construit à partir des racines des polynômes  $\psi_{\alpha}$  [BER 05, SUD 07].

### 3. Présentation du modèle de prédiction des déformations différées

En petites déformations, le tenseur des déformations totales est décomposé en plusieurs termes relatifs aux processus considérés. S'agissant de la description des dif-

férents mécanismes de déformations différées du béton, on admet que la déformation totale s'écrit :

$$\varepsilon(T, \beta, h, \sigma) = \varepsilon_e(\sigma) + \varepsilon_{th}(T) + \varepsilon_{re}(\beta) + \varepsilon_{rd}(h, T) + \varepsilon_{fp}(\sigma, h) + \varepsilon_{fd}(\sigma, \dot{h}) \quad (11)$$

Les termes de l'équation (11) sont définis ci-dessous :

–  $\varepsilon$  désigne la déformation totale. Elle dépend du tenseur des contraintes  $\sigma$ , de la température  $T$ , de l'avancement de l'hydratation du béton  $\beta$  et de l'humidité  $h$  du matériau (on aurait pu aussi choisir comme variable la teneur en eau  $C$  ou le degré de saturation  $S_r$ ).

–  $\varepsilon_e$  représente la déformation élastique. Elle ne dépend que du tenseur des contraintes  $\sigma$  ;

–  $\varepsilon_{th}$  correspond à la dilatation/contraction thermique due à une modification de la température  $T$  ;

–  $\varepsilon_{re}$  est la déformation de retrait endogène qui est supposée ne dépendre que de l'avancement de la réaction d'hydratation  $\beta \in [0; 1]$

–  $\varepsilon_{rd}$  désigne la déformation de retrait de dessiccation. Elle est fonction de l'état hydrique du matériau et de la température ;

–  $\varepsilon_{fp}$  représente la déformation de fluage propre qui dépend naturellement de l'état de contrainte  $\sigma$ , mais aussi, de l'état hydrique du matériau, car les déformations de fluage propre d'un béton préséché varient de manière quasi proportionnelle avec l'humidité relative à l'équilibre [WIT 70, BAŽ 73, PIH 74, BAŽ 76].

–  $\varepsilon_{fd}$  correspond à la déformation de fluage de dessiccation. Elle dépend non seulement des contraintes, mais aussi de l'état hydrique, et plus précisément de la variation de l'humidité pour le type de modélisation retenue [BAŽ 85].

La calibration des paramètres a été effectuée sur des essais expérimentaux suivant la procédure :

1) Le processus de séchage est modélisé au travers d'une analogie avec la thermique non linéaire, *i.e* le coefficient de diffusion  $D$  de l'eau est fonction de l'humidité  $D(C) = a \cdot \exp(b.C)$ .

2) Le retrait endogène est interpolé sur une loi hyperbolique :  $\varepsilon_{re} = K_{as}\beta\mathbf{1}$ , avec  $\beta = t/(t + t_{1/2})$ .

3) La loi de fluage propre suppose un découplage total entre les déformations sphériques et déviatoriques.

4) Le retrait de dessiccation est supposé proportionnel à la diminution d'humidité  $\dot{\varepsilon}_{rd} = -K_{ds}\dot{C}\mathbf{1}$ .

5) Le fluage de dessiccation est modélisé une fois tous les autres paramètres connus. La relation constitutive du fluage s'écrit  $\dot{\varepsilon}_{fd} = |\dot{h}|\sigma/\eta_{dc}$ .

Un VER (volume élémentaire représentatif) a été identifié [LEP 05]. Il est situé approximativement à une égale distance entre le radier et le dôme et suffisamment éloigné des autres singularités de telle manière à ce qu'un état de déformations homogènes

puisse être appliqué dans les directions de précontrainte. L'épaisseur du mur est discrétisée pour tenir compte du gradient d'humidité. La précontrainte est introduite par des forces extérieures. La perte de précontrainte induite par le fluage du béton est prise en compte par les précontraintes appliquées sur le VER au travers de calculs non linéaires. La figure 1 présente le maillage utilisé dans l'étude.

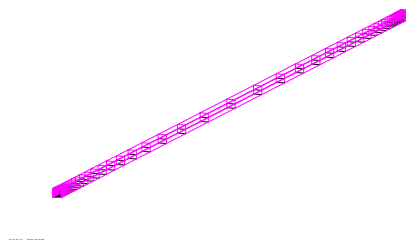


Figure 1 – Maillage du Volumé Élémentaire Représentatif

#### 4. Résultats

Le tableau 4 présente les variables aléatoires utilisées dans ce cas. Comme il y a 7 variables aléatoires et que l'ordre du chaos est de 2, nous avons 36 coefficients à calculer et donc 56 évaluations du modèle éléments finis.

Symbole	Distribution	Moyenne	Coefficient de variation
E_BETON	Lognormale	33,7 GPa	20%
ETA_FD	Lognormale	5,80E+09 Pa.s	20%
K_RS	Lognormale	6,00E+10 Pa	20%
K_IS	Lognormale	3,00E+10 Pa	20%
K_RD	Lognormale	3,402E+10 Pa	20%
ETA_RD	Lognormale	4,082E+17 Pa.s	20%
ETA_ID	Lognormale	2,329E+18 Pa.s	20%

Tableau 1 – Modèle éléments finis : Variables aléatoires indépendantes

Les différents paramètres représentent :

- E\_BETON le module d'Young du béton ;
- ETA\_FD un paramètre du fluage de dessiccation de Bažant ;

- K\_RS la rigidité apparente associée au squelette formé par des blocs d'hydrates à l'échelle mésoscopique ;
- K\_IS la rigidité apparente intrinsèquement aux hydrates à l'échelle microscopique ;
- K\_RD la rigidité associée à la capacité de l'eau adsorbée à transmettre des charges
- ETA\_RD la viscosité associée à l'eau adsorbée par les feuillets d'hydrates ;
- ETA\_ID la viscosité de l'eau libre.

Le choix d'un coefficient de variation de 20% pour chacune des variables aléatoire est arbitraire et ils sont choisis identiques pour toutes les variables, qui sont supposées indépendantes.

La figure 2 de gauche présente les évolutions *a priori* et *a posteriori* des déformations différées en fonction du temps obtenues par la méthodologie présentée ci-dessus. Ces résultats ont été validés avec une approche fiabiliste d'actualisation bayésienne basée sur l'algorithme FORM Inverse dont les résultats ont été publiés dans [BER 07]. On remarque que la prise en compte des mesures d'auscultation permettent de réduire l'intervalle de confiance des déformations différées.

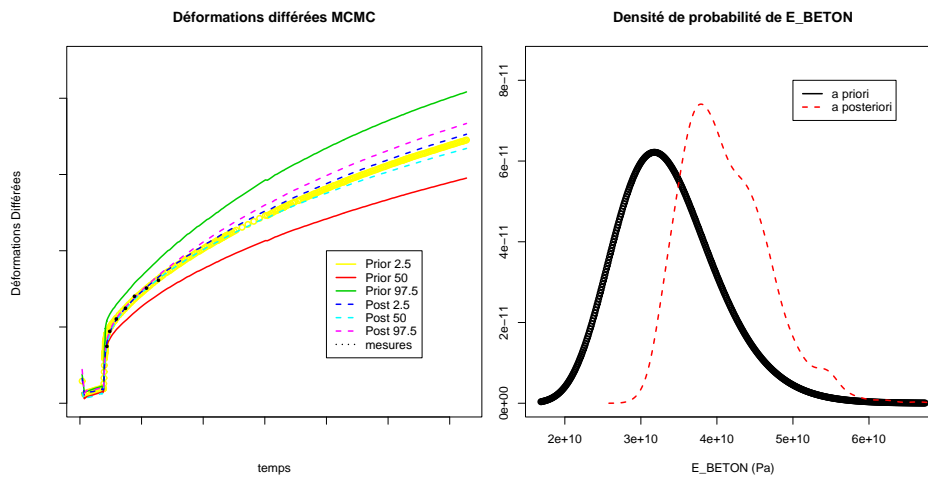


Figure 2 – Gauche : Evolution *a priori* et *a posteriori* des déformations différées - Droite : Densités de probabilité *a priori* et *a posteriori* du module d'Young du béton

La figure 2 de droite présente les densités de probabilité *a priori* et *a posteriori* du module d'Young du béton. On remarque que le module d'Young du béton (valeur à 28 jours) a été sous-estimé (sa valeur expérimentale moyenne passe de 33.7MPa à environ 37 MPa) et que sa dispersion *a posteriori* est réduite. L'augmentation de la valeur moyenne du module d'Young est physique, en effet après 28 jours la réaction

d'hydratation du béton continue et la porosité se remplit progressivement d'hydrates qui a tendance à augmenter la rigidité du matériau.

## 5. Conclusions

Les méthodes de simulation par chaînes de Markov présentées ici ont permis d'actualiser les densités de probabilité des paramètres d'entrée du modèle en prenant en compte les mesures d'auscultation. Une fois les paramètres d'entrée actualisés, on peut obtenir l'évolution *a posteriori* du modèle en l'évaluant à partir de l'échantillon obtenu par la méthode de simulation par chaînes de Markov. Ces méthodes ont été appliquées à l'évolution des déformations différées d'une enceinte de confinement. Une méthode non intrusive de régression a permis d'approximer le modèle aux éléments finis par une surface de réponse stochastique sur la base du chaos polynomial, afin de limiter le temps de calcul. Les résultats *a posteriori* nous montrent une diminution de l'intervalle de confiance des déformations différées et que certains paramètres aléatoires du modèle ont besoin d'être réajustés.

## Références

- [BAŽ 73] BAŽANT Z., HEMANN J., KOLLER H., NAJJAR L., « Thin-wall cement paste cylinder for creep test at variable humidity or temperature », *Materials and Structures*, vol. 6, n° 34, 1973, p. 277–281.
- [BAŽ 76] BAŽANT Z., ASGHARI A., SCAMIOT J., « Experimental study of creep of hardened Portland cement paste at variable water content », *Materials and Structures*, vol. 9, n° 52, 1976, p. 279–290.
- [BAŽ 85] BAŽANT Z., CHERN J., « Concrete creep at variable humidity : constitutive law and mechanism », *Materials and Structures*, vol. 18, n° 103, 1985, p. 1–20.
- [BER 05] BERVEILLER M., « Éléments finis stochastiques : approches intrusive et non intrusive pour des analyses de fiabilité », PhD thesis, Université Blaise Pascal - Clermont Ferrand, 2005.
- [BER 07] BERVEILLER M., LE PAPE Y., SUDRET B., PERRIN F., « Bayesian updating of the long-term creep strains in concrete containment vessels using a non intrusive stochastic finite element method », *Proc. ICASP10 "Applications of Statistics and Probability to Civil Engineering Reliability and Risk Analysis"*, Tokyo, Japon, 2007.
- [DRO 02] DROESBEKE J.-J., FINE F., SAPORTA G., *Méthodes bayésiennes en statistique*, Editions Technip, 2002.
- [HAS 70] HASTINGS W., « Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their application », *Biometrika*, vol. 57, n° 1, 1970, p. 97-109.

- [LAN 02] LANTUEJOUL C., Ed., *Geostatistical simulation*, Springer, 2002.
- [LEP 05] LE PAPE Y., TOPPANI E., MICHEL-PONNELLE S., « Analysis of the delayed behaviour of NPP containment building », PIJAUDIER-CABOT G., GÉRARD B., ACKER P., Eds., *Proceedings of the seventh International Conference CONCREEP, Creep, Shrinkage and Durability of Concrete and Concrete Structures*, 2005, p. 353–358.
- [MET 53] METROPOLIS N., ROSENBLUTH A. W., ROSENBLUTH M. N., TELLER A. H., « Equations of state calculations by fast computing machines », *J. Chem. Phys.*, vol. 21, n° 6, 1953, p. 1087-1092.
- [PER 07] PERRIN F., SUDRET B., PENDOLA M., DE ROCQUIGNY E., « Comparison of Markov chain Monte Carlo simulation and a FORM-based approach for Bayesian updating of mechanical models », *Proc. ICASP10 "Applications of Statistics and Probability to Civil Engineering Reliability and Risk Analysis"*, 2007.
- [PER 08] PERRIN F., « Prise en compte des données expérimentales dans les modèles probabilistes pour la prédiction de la durée de vie des structures », PhD thesis, Université Blaise Pascal - Clermont Ferrand, 2008.
- [PIH 74] PIHLAJAVAARA S., « A review of some of the main results of a research on the aging phenomena of concrete : effect of moisture conditions on strength », *Cement and Concrete Research*, vol. 4, n° 5, 1974, p. 761–771, Shrinkage and creep of mature concrete.
- [SUD 07] SUDRET B., *Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models. Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods*, Habilitation à diriger des recherches - Université Blaise Pascal - Clermont Ferrand, 2007.
- [TAR 05] TARANTOLA A., *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2005.
- [WIT 70] WITTMANN F., « Einfluß des Feuchtigkeitsgehaltes auf das Kriechen des Zementsteines », *Rheologica Acta*, vol. 9, n° 2, 1970, p. 282–287.



**Evaluation fiabiliste de l'impact des conditions environnementales sur la corrosion des structures en béton armé sujettes à la pénétration de chlorures.**

J. El Hassan, A. Chateauneuf, P. Bressolette

---

---

# Evaluation fiabiliste de l'impact des conditions environnementales sur la corrosion des structures en béton armé sujettes à la pénétration des chlorures

El Hassan Jinane\* — Chateauneuf Alaa\*— Bressolette Philippe \*  
El-Tawil Khaled\*\*

\* *Laboratoire de Génie civil, Polytech' Clermont-Ferrand,  
Université Blaise Pascal,  
BP 206, 63174 Aubière cedex, France  
jinane\_hasan@hotmail.com*

\*\* *Faculté de Génie, branche II,  
Université Libanaise,  
El Hadath, Beyrouth, Liban.*

---

*RÉSUMÉ. La corrosion des armatures est l'un des mécanismes de dégradation les plus répandus dans les structures en béton armé dont il réduit considérablement la durée de vie en service . La corrosion dépend de plusieurs paramètres (environnement, propriétés du béton...) qui présentent de grandes incertitudes nécessitant l'application des méthodes fiabilistes. Nous proposons dans cet article un modèle mécano-fiabiliste de la corrosion induite par les chlorures. Ce modèle permet d'évaluer le temps d'initiation de la corrosion et la probabilité de défaillance de l'élément étudié. L'état limite de défaillance considéré est l'état limite de flexion. L'impact de l'environnement et des caractéristiques du béton est pris en compte par l'utilisation de différents modèles de coefficient de diffusion.*

*ABSTRACT. Corrosion of steel reinforcements is one of the most widespread mechanisms of degradation of reinforced concrete structures which reduces considerably their service life. Corrosion depends on several parameters (environment, concrete properties...) that present great uncertainties which lead us to apply reliability theory. In this paper a general reliability model of corrosion is presented. The considered limit state of failure is the limit state of bending. This model allows us to evaluate the time to corrosion initiation and the failure probability of a member. It also takes into account the effect of the environmental components and the effect of the concrete properties by using different models of chloride diffusion coefficient.*

*MOTS-CLÉS : béton armé – chlorures – coefficient de diffusion – corrosion – environnement – fiabilité.*

*KEYWORDS: chlorides – corrosion – diffusion coefficient – environment – reinforced concrete – reliability.*

---

## 1. Introduction

La durée de vie en service d'une structure en béton armé dépend de sa résistance aux agressions de l'environnement dans lequel elle se situe (température, humidité relative, teneur en agents agressifs...) et de sa résistance aux charges auxquelles elle est soumise. Plusieurs mécanismes de dégradation résultent de ces facteurs, parmi lesquels la corrosion induite par les chlorures qui affecte considérablement les propriétés mécaniques de la structure. La corrosion induite par les chlorures dépend de plusieurs facteurs liés au milieu environnant (température, humidité relative, concentration en chlorure...) et de facteurs liés aux caractéristiques du béton (teneur en eau, proportion du mélange de béton...). Certains de ces paramètres présentent des incertitudes que l'on représente par leurs distributions statistiques.

Dans cet article, un modèle mécano-fiabiliste de la corrosion induite par les chlorures est proposé. Ce modèle permet d'évaluer le temps d'initiation de la corrosion, le temps de nucléation des piqûres et la probabilité de défaillance d'un élément en béton armé. Il permet aussi d'étudier l'effet de la température, de l'humidité relative et de la teneur en eau du béton sur le mécanisme de corrosion. L'effet de ces paramètres est pris en compte à travers des modèles du coefficient de diffusion des chlorures dépendant respectivement de chacun d'eux.

## 2. Modèle mécano-fiabiliste de corrosion

Dans cette partie, un modèle général de corrosion est établi pour calculer le temps d'initiation de la corrosion ( $\tau_{ini}$ ), le temps de nucléation des piqûres ( $\tau_{pn}$ ) et la probabilité de défaillance de la structure (Pf).

### 2.1. Temps d'initiation de la corrosion

On définit le temps d'initiation de la corrosion comme étant le temps qui s'écoule entre la fin de la construction et la dépassivation de la couche protectrice. Si on suppose que le béton est un matériau homogène et isotrope, la diffusion des ions chlorures dans le béton peut être exprimée par la deuxième loi de Fick (Tuutti, 1982) :

$$\partial C / \partial \tau = D_c (\partial^2 C / \partial x^2) \quad [1]$$

avec  $C$  la concentration en ion de chlorure,  $D_c$  le coefficient de diffusion des chlorures dans le béton,  $\tau$  le temps et  $x$  la profondeur dans la direction de diffusion. On considère les conditions initiales suivantes : au temps  $\tau = 0$ , la concentration en chlorure dans le béton est nulle et la concentration des chlorures à la surface est constante. La résolution de l'équation [1] permet de déterminer la concentration en ions de chlorure  $C(x, \tau)$  à la profondeur  $x$  après un temps  $\tau$  :

$$C(x, \tau) = C_s [1 - \operatorname{erf}(x / 2\sqrt{D_c \tau})] \quad [2]$$

avec  $C_s$  la concentration surfacique en chlorures,  $\operatorname{erf}(\ )$  la fonction d'erreur. La concentration de chlorure pour laquelle la couche passive d'acier est détruite et la corrosion s'amorce est appelée concentration de seuil ( $C_{th}$ ). Lorsque  $C(x, \tau) = C_{th}$  et  $x = e$  ( $e$  étant l'enrobage), le temps d'initiation de la corrosion,  $\tau_{ini}$  devient :

$$\tau_{ini} = e^2 \times [\operatorname{erf}^{-1}(1 - C_{th} / C_s)]^2 / (4D_c) \quad [3]$$

## 2.2. Temps de nucléation des piqûres

L'amorçage de la corrosion induit des réactions électrochimiques dans le béton provoquant la nucléation des piqûres. Le calcul du temps de nucléation des piqûres ( $\tau_{pn}$ ) n'est pas facile du fait que ce phénomène dépend de plusieurs facteurs relatifs à l'environnement, au matériau et aux charges appliquées qui interagissent entre eux. La profondeur de la piqûre  $p(\tau)$ , au temps  $\tau$ , peut être calculée selon (Jones, 1992) :

$$p(\tau) = 0,0116\alpha \int i_{corr}(\tau) d\tau \quad [4]$$

où  $p(\tau)$  en millimètre,  $\alpha$  est le rapport entre la corrosion par piqûre et la corrosion uniforme, et  $i_{corr}(\tau)$  est le taux de corrosion fonction du temps en  $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ . Le temps de nucléation des piqûres est déterminé en définissant un seuil  $p_0$  pour la profondeur de la piqûre  $p(\tau)$ . Pour une courte durée après la dépassement de l'acier c.à.d.  $\tau_{ini} < \tau < \tau_{ini} + 1$ , il est justifié de supposer que  $i_{corr}(\tau)$  reste constante, c.à.d.  $i_{corr}(\tau) = i_{ini}$  lui-même égal à (Vu et Stewart, 2000) :

$$i_{ini} = 37,8 \times (1 - w/c)^{1,64} / e \quad [5]$$

avec  $w/c$  la teneur en eau du béton et  $e$  l'enrobage des barres d'aciers. On considère ensuite qu'il y a nucléation des piqûres lorsque la profondeur de la piqûre est égale au seuil  $p_0 \rightarrow p(\tau_{pn}) = p_0$ . En substituant l'équation [5] dans l'équation [4] et puis en effectuant l'intégration, on obtient :

$$\tau_{pn} = 2,281 \times e \times p_0 \times (1 - w/c)^{1,64} / \alpha \quad [6]$$

## 2.3. Taux de croissance des piqûres

Après la nucléation des piqûres et en raison d'une corrosion galvanique localisée, la croissance des piqûres peut être estimée en termes de changement du taux volumétrique en employant la loi de Faraday (Harlow et al. 1998) :

$$dV / d\tau = M \times i_{corr} / (nF\rho) \quad [7]$$

avec  $M$  le poids moléculaire du fer ( $M = 55,85$  g/mol),  $i_{corr}$  le taux de corrosion,  $n$  la valence du fer ( $n = 2$ ),  $F$  la constante de Faraday ( $F = 96500$  C/mol) et  $\rho$  la densité du fer ( $\rho = 8000$  kg/m<sup>3</sup>).

La formation des piqûres ainsi que leurs formes sont des phénomènes aléatoires qui dépendent principalement des propriétés du matériau, des processus de fabrication et des facteurs électrochimiques (Goswami et al., 1995). Jusqu'à présent cette dépendance n'est pas bien étudiée. Une forme sphérique des piqûres (Stewart et al., 2008) est adoptée dans ce modèle et son rayon,  $p(\tau)$ , peut être estimé à partir de l'équation [4]. Ensuite, le taux volumétrique de la croissance des piqûres (équation [7]) peut être réécrit directement en fonction du taux de croissance des piqûres en dérivant l'équation [4] par rapport au temps :

$$dp/d\tau = 0,0116\alpha.i_{corr}(\tau) \quad [8]$$

#### 2.4. Évaluation probabiliste de la durée de vie

La probabilité de défaillance d'une structure peut être estimée par :

$$Pf = \Pr[(R - S) < 0] = \int_{g(x,\tau) \leq 0} f(x) dx \quad [9]$$

avec  $R$  la résistance,  $S$  la sollicitation,  $f(x)$  la densité de probabilité jointe de  $x$ ,  $x$  le vecteur des variables aléatoires et  $g(x, \tau)$  la fonction d'état limite définie par :

$$g(x, \tau) = a_c(x) - a_\tau(x) \quad [10]$$

avec  $a_c(x)$  la taille critique de la piqûre provoquant la défaillance de l'élément de structure et  $a_\tau(x)$  la taille de la piqûre au temps  $\tau$ . Dans ce modèle  $a_c(x)$  est traitée comme une variable aléatoire résultant de l'évaluation de l'état limite de flexion  $g_f(\cdot)$  défini par :

$$g_f(A_s, P, x) = M_f(A_s, x) - M_e(P, x) \quad [11]$$

avec  $A_s$  la section d'armature,  $P$  la charge appliquée,  $x$  le vecteur des variables aléatoires (c.-à-d. la résistance à la compression du béton, la limite d'élasticité de l'acier, etc.),  $M_f(A_s, x)$  le moment fléchissant de résistance.  $M_e(P, x)$  est le moment de flexion dû à la charge  $P$ . Puisque la corrosion entraîne une réduction de la section d'armature, la défaillance est atteinte dans l'équation [11] quand  $A_s$  est égal à une valeur critique  $A_{sc}$  c.-à-d. lorsque la section résiduelle des armatures n'assure plus la résistance vis-à-vis du chargement. En prenant en compte que  $A_{sc}$  peut être exprimée en fonction de la taille critique de la piqûre, alors,  $a_c(x)$  peut être calculé en résolvant l'équation suivante :

$$M_f(A_{sc}(a_c), x) = M_e(P, x) \quad [12]$$

Dans ce modèle, le calcul de la fiabilité est effectué au moyen des simulations de Monte Carlo.

### 3. Modèles du coefficient de diffusion des chlorures

La pénétration des ions de chlorure dans le béton, se fait par diffusion ionique et par convection. Cependant, dans la pratique, la pénétration des chlorures est toujours modélisée comme un procédé de diffusion pure décrite par la deuxième loi de Fick.

Le coefficient de diffusion des chlorures est généralement exprimé en fonction de la température, du temps, de l'humidité relative et de la teneur en eau du béton. Dans ce travail, on a choisi des expressions simples du coefficient de diffusion des chlorures prenant chaque composant séparément pour étudier son effet sur la corrosion des armatures.

#### 3.1. Coefficient de diffusion fonction de la teneur en eau

La pénétration des ions chlorures dans le béton dépend de la qualité du béton. En effet, le mécanisme de diffusion – facteur essentiel dans la pénétration des chlorures au sein du béton – est influencé par la teneur en eau du béton. Cette influence peut être exprimée au moyen du coefficient de diffusion par la relation (Hobbs, 1999) :

$$D_c = 0,04 \times (1166^{w/c}) \times 10^{-12} \quad [13]$$

avec  $D_c$  en  $m^2/s$ ,  $w/c$  étant la teneur en eau du béton.

#### 3.2. Coefficient de diffusion fonction de la température

L'effet de la température sur le mécanisme de diffusion peut être pris en compte à travers la définition d'une loi d'accélération de type Arrhenius qui prend la forme suivante (Samson et al., 2007) :

$$D_c = D_{c,ref} \times e^{0,028(T-T_{ref})} \quad [14]$$

avec  $D_c$  en  $m^2/s$ ,  $T$  la température en  $^{\circ}C$ ,  $T_{ref}$  la température aux conditions de références ( $T_{ref} = 23^{\circ}C$ ) et 0.028 un exposant déterminé expérimentalement.

#### 3.3. Coefficient de diffusion fonction de l'humidité relative

Le coefficient de diffusion des chlorures dans le béton dépend de l'humidité relative, une équation exprimant cette dépendance dans un béton partiellement saturé a été proposée par Saetta (Saetta et al., 1993) :

$$D_c = D_{100\%} / [1 + ((1 - RH)/(1 - RH_c))^4] \quad [15]$$

avec  $D_c$  en  $m^2/s$ ,  $D_{100\%}$  le coefficient de diffusion à  $RH=100\%$ ,  $RH$  l'humidité relative et  $RH_c=75\%$ .

#### 4. Application du modèle à une poutre en béton armé

Dans cette partie, on évalue la distribution du temps de corrosion pour une poutre (de pont) en béton armé sous les différentes conditions liées à  $w/c$ ,  $T$ ,  $RH$  et à l'agressivité environnementale. Cette poutre a été dimensionnée selon l'Eurocode 2, sa configuration étant présentée sur la figure 1.

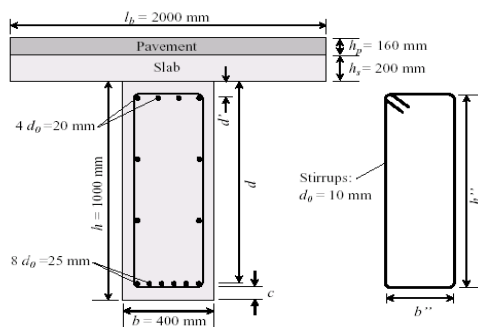


Figure 1. Configuration de la poutre étudiée

Quatre niveaux représentent l'agressivité de l'environnement sur les structures en béton (tableau 1), chaque niveau étant caractérisé par une concentration de chlorures à la surface  $C_s$  (McGee, 2000), une valeur prévue du taux de corrosion maximal  $i_{max}$  (Geocisa and Torroja institute, 2002) et un enrobage de béton  $e$  (Eurocode 2).

Niveau d'agressivité	Description	$C_s$ (kg/m <sup>3</sup> )	$i_{max}$ (μA/cm <sup>2</sup> )	$e$ (mm)
Faible	Structures situées à 2,84 km ou plus de la côte.	0,35	0,5	40
Modéré	Structures situées entre 0,1 km et 2,84 km de la côte sans contact direct avec l'eau de mer.	1,15	2	45
Elevé	Structures situées entre 0,1 km ou moins de la côte, mais sans contact direct avec l'eau de mer et structures sujettes aux sels de déverglaçage.	2,95	5	50
Extrême	Structures sujettes aux cycles d'humidification et de séchage, par l'eau de mer	7,35	10	55

Tableau 1. Description des environnements étudiés

Les modèles probabilistes des variables aléatoires utilisées sont présentés dans le tableau 2. Il faut noter que, généralement, l'enrobage des armatures doit être considéré comme aléatoire. Dans ce modèle, l'enrobage est supposé déterministe dans le but de neutraliser son effet sur la durée de vie de l'élément et ainsi mettre en relief l'effet des facteurs environnementaux.

Variable	Signification	Distribution	Moyenne	COV
$P$	Charge appliquée	Lognormale	115 kN	0,20
$f'_c$	Résistance à la compression du béton	Normale	40 MPa	0,15
$f_y$	Limite d'élasticité de l'acier	Normale	600 MPa	0,10
$C_{th}$	Seuil de la concentration en chlorures	Uniforme	0,90 kg/m <sup>3</sup>	0,19
$C_s$	Concentration de chlorures à la surface			
Faible		Lognormale	0,35 kg/m <sup>3</sup>	0,50
Modéré		Lognormale	1,15 kg/m <sup>3</sup>	0,50
Elevé		Lognormale	2,95 kg/m <sup>3</sup>	0,50
Extrême		Lognormale	7,35 kg/m <sup>3</sup>	0,70
$D_c$	Coefficient de diffusion des chlorures	Lognormale	Selon le cas	
$\alpha$	le rapport entre la corrosion par piqûre et la corrosion uniforme	Gumbel	5,65	0,22

**Tableau 2.** Modèles probabilistes des variables aléatoires (Bastidas-Arteaga et al., 2008)

#### 4.1. Résultat et discussions

Le modèle de corrosion a été appliqué à la poutre de pont décrite ci-dessus, afin de déterminer le temps d'initiation de la corrosion, le temps de nucléation des piqûres et la probabilité de défaillance de la structure à l'état limite ultime de flexion. L'analyse des résultats a permis de conclure que le temps de nucléation des piqûres est négligeable par rapport au temps d'initiation de la corrosion et par la suite il ne sera pas considéré.

Les moyennes du temps d'initiation de la corrosion sont représentées sur les graphiques de la figure 2 pour différents niveaux d'agressivité environnementale et pour différentes valeurs de  $w/c$ ,  $T$  et  $RH$ . Ces graphes permettent de percevoir qu'une augmentation de 0,1 de  $w/c$  induit une réduction de  $\tau_{ini}$  de 26 % dans un environnement de faible agressivité, de 36 % dans un environnement d'agressivité modérée, de 49 % dans un environnement d'agressivité élevée et de 51 % dans un environnement extrêmement agressif. On peut aussi observer une diminution de la moyenne de  $\tau_{ini}$  d'environ 90 à 95 % entre un milieu de faible agressivité et un autre extrêmement agressif pour une même valeur de  $w/c$ .

Une augmentation de 10 °C de la température mène à une réduction de  $\tau_{ini}$  de 12 % dans un environnement faiblement agressif, de 16 % dans un environnement d'agressivité modérée, de 23 % dans un environnement d'agressivité élevée et de



24 % dans un environnement extrêmement agressif. De même, pour une même température,  $\tau_{ini}$  peut être réduit de 92 à 98 % si on change le niveau d'agressivité de faible à extrême. La Figure 2 montre aussi que  $\tau_{ini}$  diminue au fur et à mesure de l'augmentation de  $RH$  et qu'au-delà de  $RH=85\%$ ,  $\tau_{ini}$  n'est plus affectée par l'humidité relative.

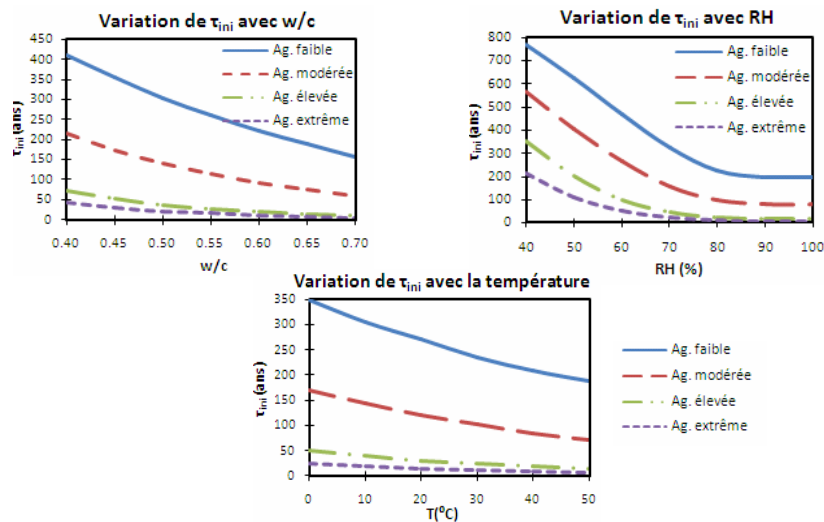


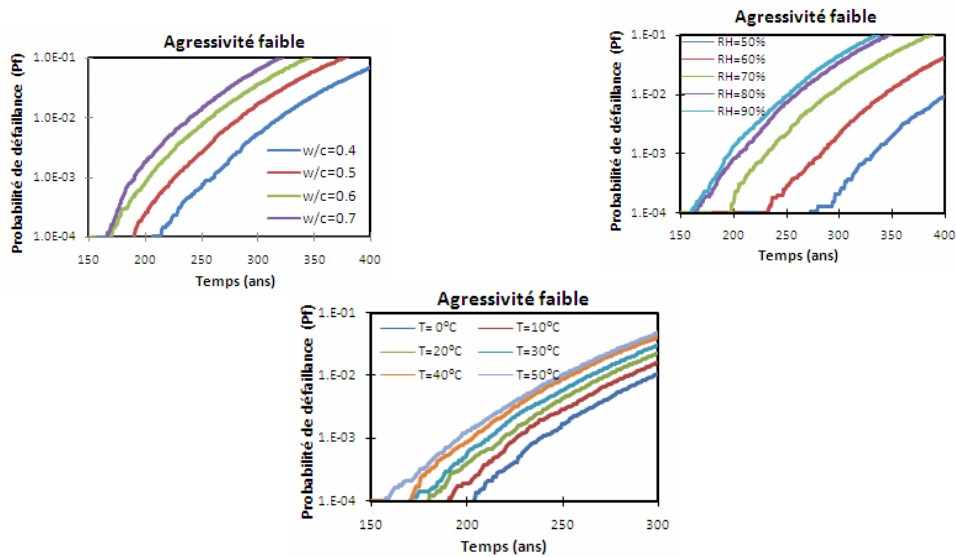
Figure 2 : Moyennes de  $\tau_{ini}$  vis-à-vis  $w/c$ ,  $RH$  et  $T$

La figure 3 présente les probabilités de défaillance de la poutre pour différentes valeurs de  $w/c$ ,  $T$  et  $RH$  et pour une faible agressivité. Une réduction importante de la fiabilité de la poutre peut être observée avec l'augmentation de la teneur en eau du béton, de la température et de l'humidité relative. Il faut toutefois noter que les mêmes courbes ont été tracées pour les autres niveaux d'agressivité, mais elles ne sont présentées ici pour des raisons de synthèse.

En tenant compte des hypothèses considérées (les valeurs des enrobages imposées par l'Eurocode 2 étant fixes), les résultats obtenus nous permettent de formuler des recommandations concernant la teneur en eau. Ainsi, si  $Pf_c$  est la probabilité de défaillance cible, par exemple  $Pf_c = 10^{-4}$  et une durée de vie de 50 ans est choisie, on peut observer suivant la figure 3 que  $Pf_c$  est largement atteinte au-delà de 50 ans pour la valeur la plus élevée  $w/c$  et c'est également le cas pour l'environnement d'agressivité modérée. On préconise un rapport  $w/c \leq 0,45$  dans un environnement d'agressivité élevée et  $w/c \leq 0,4$  dans un environnement extrêmement agressif.

De manière analogue, nous pourrions conclure que la température et l'humidité relative, même si elles affectent le phénomène de corrosion, n'ont pas un impact

important sur la durée de vie de la structure dans un environnement faiblement agressif car  $Pf_c$  est atteinte dans les cas les plus défavorables au-delà de 50 ans. Cette conclusion ne peut cependant pas être étendue aux autres niveaux d'agressivité pour lesquels la durée de vie est sérieusement affectée par ces paramètres.



**Figure 3 :** Probabilité de défaillance de la poutre en faible agressivité vs.  $w/c$ ,  $RH$  et  $T$ .

#### 4. Conclusion

Le phénomène de corrosion influence de manière importante la performance des structures en béton armé et réduit considérablement leur durée de vie. Dans cet article, un modèle représentant ce phénomène a été développé dans le but d'estimer ses conséquences sur la fiabilité. Le mécanisme de corrosion induite par les chlorures est divisé selon les étapes suivantes : initiation de la corrosion, nucléation des piqûres et croissance des piqûres. L'initiation de la corrosion est induite par la pénétration des chlorures causant la nucléation des piqûres ; la croissance des piqûres s'arrête lorsque leur taille conduit à la défaillance de la structure par flexion.

Afin d'illustrer le modèle, une poutre de pont soumise à des environnements de différents niveaux de contamination par les chlorures a été étudiée. L'analyse de fiabilité en fonction du temps a été réalisée par simulations de Monte-Carlo. Le temps de nucléation des piqûres s'est révélé de beaucoup inférieur au temps d'initiation de la corrosion. Les résultats montrent aussi que la probabilité de défaillance et le temps d'initiation de la corrosion dépendent largement des facteurs

environnementaux (la température et l'humidité relative) et des propriétés du matériau (teneur en eau du béton).

## 5. Bibliographie

- Bastidas-Arteaga E., Bressolette Ph., Chateauneuf A., Sanchez-Silva M., « Probabilistic lifetime assessment of RC structures under coupled corrosion-fatigue deterioration processes », *Structural Safety*, à paraître en 2008.
- Eurocode 1 et 2, *Basis of design and actions on structures and design of concrete structures*, AFNOR, 2004.
- Geocisa and Torroja Institute, Contecvet: *A validated users manual for assessing the residual service life of concrete structures. Manual for assessing corrosion-affected concrete structures. Annex C: Calculation of a representative corrosion rate*. EC Innovation Program IN309021. British Cement Association, UK, 2002.
- Goswami TK., Hoepfner DW., « Pitting corrosion fatigue of structural materials », *Structural integrity in aging aircraft*, New York, ASME, 1995, 39-129.
- Harlow DG., Wei RP., « A probability model for the growth of corrosion pits in aluminium alloys induced by constituent particles », *Eng Fract Mech*, 1998, 59,305-325.
- Hobbs D.W., « Aggregate influence on chloride ion diffusion into concrete », *Cement and Concrete Research*, 1999, 29, 1995-1998.
- Jones DA., « Principles and prevention of corrosion », New York, Macmillan *Publishing Co*, 1992.
- McGee R., « Modelling of durability performance of Tasmanian bridges » In: Melchers RE, Stewart MG, editors. *Applications of statistics and probability in civil engineering*. Rotterdam: Balkema; 2000. p. 297-306.
- Samson E., Marchand J., « Modeling the effect of temperature on ionic transport in cementitious materials », *Cement and Concrete Research*, 2007, 37, 455-468.
- Saetta AV., Scotta RV., Vitaliani RV., « Analysis of chloride diffusion into partially saturated concrete ». *ACI Mater J.*, 1993, 90(5), 441-451.
- Stewart M.G., Al-Harthy A., « Pitting corrosion and structural reliability of corroding RC structures: Experimental data and probabilistic analysis », *Reliability Engineering and System Safety*, 2008, 93, 373-382.
- Tuutti K., « Corrosion of steel in concrete », *Swedish Cement and Concrete Institute*, 1982.
- Vu KAT., Stewart MG., « Structural reliability of concrete bridges including improved chloride-induced corrosion models », *Structural Safety*, 2000, 22, 313-333.

**Application aux barrages et aux bâtiments de la méthodologie d'évaluation possibiliste de la performance.**

A. Talon, C. Curt, D. Boissier

---

---

# Application aux barrages et aux bâtiments de la méthodologie d'évaluation possibiliste de la performance

Aurélie Talon\* — Corinne Curt\* — Daniel Boissier\*\*

\* CEMAGREF, Unité Ouvrages Hydrauliques et Hydrologie  
3275 route Cézanne, CS40061, 13182 Aix en Provence Cedex 5  
aurelie.talon@cemagref.fr, corinne.curt@cemagref.fr

\*\* Polytech' Clermont-Ferrand/LGC  
Campus Universitaire des Cézeaux – BP 206, 63174 Aubière Cedex  
daniel.boissier@cust.univ-bpclermont.fr

---

*RÉSUMÉ. Les propriétaires, les concepteurs, les exploitants des ouvrages de génie civil ont un objectif de maintien de la performance (aptitude de l'ouvrage à remplir les fonctions de résistance mécanique et d'usage) de leurs ouvrages dans le temps. Nous avons présenté, dans un premier article, une méthodologie possibiliste d'évaluation de cette performance. Dans ce deuxième article, nous nous proposons de l'appliquer sur deux familles d'ouvrages : les bâtiments et les barrages puis d'analyser les invariants de la méthodologie aux spécificités des deux familles. L'application aux bâtiments vise à estimer la durée de vie des produits en conception, en utilisant des données multi-sources et multi-échelles ; cette estimation est traditionnellement très délicate et au résultat très imprécis. L'application aux barrages consiste à déterminer la performance d'un barrage en service en combinant des données visuelles, auscultées, calculées et de conception / réalisation.*

*ABSTRACT. The owners, the designers, the developers of the works of civil engineering have an objective of maintain of the performance (capacity of the work to fulfill functions of mechanical resistance and of usage) of their works overtime. We presented, in a first article, a possibility methodology of assessment of this performance. In this second article, we suggest applying it to two families of works: buildings and dams and then to analyze the invariants of the methodology considering the specificities of both families. The building application aims at estimating the service life of building components in conception, by using multi-source data and multi-scale data; this estimation is traditionally very delicate and may be a very imprecise result. The dam application consists in determining the performance of a dam in service by combining visual data, monitored data, calculated data and conception / realization data.*

*MOTS-CLÉS : aggregation des données, barrages, bâtiments, données multi-échelles et multi-sources, fusion des données, incertitude, imprécision, incomplétude, qualité des données.*

*KEYWORDS: data aggregation, dams, buildings, multi-scale data, multi-source data, data fusion, uncertainty, imprecision, incompleteness, data quality.*

---

## 1. Introduction

Les propriétaires, les concepteurs, les exploitants des ouvrages de génie civil ont un objectif de maintien de la performance de leurs ouvrages dans le temps. Nous considérons la performance d'un ouvrage de génie civil comme une représentation de son comportement fonctionnel global en service : l'ensemble des fonctions de résistance mécanique et d'usage intrinsèques à l'ouvrage sont prises en compte ainsi que les interactions de cet ouvrage avec son environnement climatique (pluie, vent, température...) et les caractéristiques de son usage (exploitant, tiers personnes...). La réalisation de cet objectif de maintien de la performance passe par le développement de méthodes et d'outils d'évaluation de cette performance à différents instants de leur cycle de vie.

Nous avons présenté dans (Talon *et al.*, 2008) le choix d'une approche possibiliste au regard des approches probabiliste et statistique ainsi que la méthodologie développée pour l'évaluation possibiliste de la performance basée sur quatre phases :

- phase 1 – analyse de la qualité des données : les données collectées pour l'évaluation de la performance sont multi-sources (observations visuelles, expérimentations, auscultations, simulations, probabilités...) et multi-échelles (données obtenues au niveau du matériau, du composant, de l'ouvrage...). Cette première phase permet d'estimer la confiance que l'on peut accorder à chacune de ces données vis-à-vis de la fiabilité de la source, du modèle de traitement et de l'informativité apportée par cette donnée au regard du problème traité (évaluation de la performance) ;
- phase 2 – fuzzification des données : les formats des données collectées sont généralement hétérogènes. Cette deuxième phase consiste à transformer les différents formats existants (probabiliste, statistique, courbe théorique, dire d'expert...) en un format commun, ici le format possibiliste ;
- phase 3 – unification des données par fusion et/ou agrégation : elle consiste à prendre en compte l'ensemble des données collectées afin d'obtenir une donnée consensuelle (une solution au problème) et un indicateur de la qualité de la donnée obtenue. La mise en œuvre d'une unification ou d'une agrégation des données dépend du type de relation « problème – données » considérée : l'unification est utilisée lorsque l'on a des données multi-sources et l'agrégation est employée lorsque l'on a un problème multi-échelles ;
- phase 4 – défuzzification : elle permet d'extraire l'information juste nécessaire pour l'aide à la décision associée au problème traité et représentant au mieux les résultats de la fusion et/ou de l'agrégation des données.

Dans ce deuxième article, nous nous proposons d'appliquer cette méthodologie sur deux familles d'ouvrages, les produits bâtiments et les barrages : en effet,

L'analyse de la performance de ces deux types d'ouvrages repose sur la manipulation de différentes données qui peuvent être entachées d'imperfections (incertitude, imprécision, incomplétude). Nous analysons également les invariants de la méthodologie face aux spécificités des deux familles que nous appellerons dans la suite respectivement application bâtiments et application barrages.

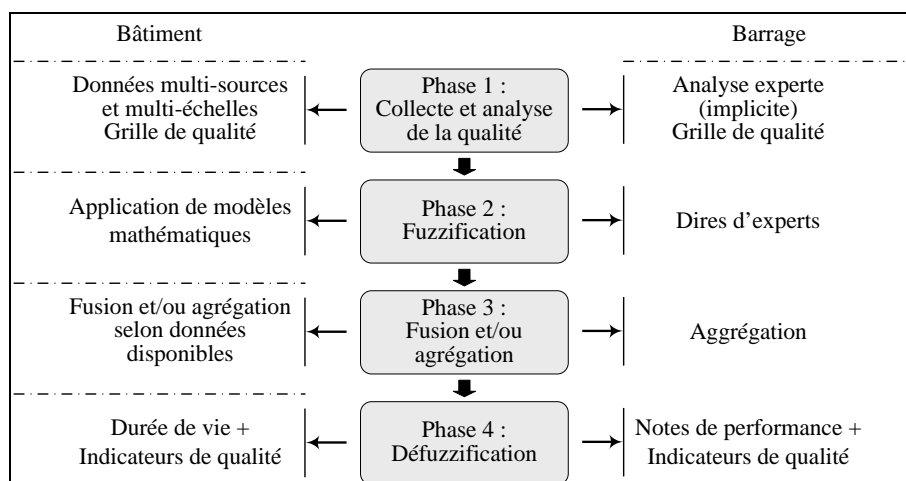
## 2. Présentation des applications bâtiments et barrages

L'application bâtiments a pour objectif l'estimation, lors de la conception, de la durée de vie des produits de construction tels que les fenêtres, les planchers, les toitures... Nous considérons ici la durée de vie définie par la norme ISO 15686 : « laps de temps après mise en œuvre pendant lequel un bâtiment ou des composants de bâtiment atteint ou dépasse les exigences de performance, c'est-à-dire les niveaux minimum acceptables des propriétés d'un bâtiment ou des composants d'un bâtiment pour assurer les fonctions requises ». Notre estimation de la durée de vie se base sur une identification qualitative de l'ensemble des scénarii de dégradation (enchaînement de phénomènes de dégradation) susceptibles de mener à la défaillance du produit considéré. En termes méthodologiques, nous modélisons fonctionnellement, par des analyses structurelle et fonctionnelle, les interactions des composants du produit avec son environnement climatique et d'usage (par estimation de son environnement en service), puis recherchons les dégradations possibles de ce modèle fonctionnel par une analyse des modes de défaillances et de leurs effets (AMDE). Nous menons ensuite une analyse de la criticité des scénarii de dégradation et évaluons leur probabilité d'apparition afin de réduire l'estimation de la durée de vie aux seuls scénarii les plus critiques (combinaison de leur probabilité, de leur durée et de la gravité de leurs conséquences). Cette démarche est détaillée dans (Talon, 2006).

L'application barrages a pour objectif la détermination de la performance des différentes fonctions du barrage (étanchéité, drainage, résistance au glissement...) et de la performance d'un barrage en service vis-à-vis des modes de rupture (érosion interne dans la fondation, surverse...). Ces performances sont évaluées par une agrégation de données de nature différentes : observations visuelles, données issues de l'auscultation, données calculées, données de conception / réalisation. En termes méthodologiques, les différentes données ont été formalisées par des indicateurs décrits selon une grille unique quelle que soit la nature de l'indicateur (visuel, ausculté...). Ces indicateurs sont ensuite agrégés selon des opérateurs ou des relations proposés par les experts afin d'obtenir la performance des fonctions et la performance vis-à-vis d'un mode de rupture (Curt *et al.*, 2006). Ces différentes formalisations ont été réalisées à la suite de séances de recueil auprès d'un groupe de cinq experts.

### 3. Similitudes et spécificités des deux applications

Les similitudes et spécificités des deux applications sont synthétisées à la Figure 1 et détaillées, phase par phase, dans les paragraphes suivants.



**Figure 1.** *Similitudes et spécificités des applications bâtiment et barrage*

#### 3.1. Données manipulées

Les données utilisées dans ces deux applications représentent très largement les différents types de données mises en œuvre dans le domaine du génie civil :

- les observations visuelles réalisées sur le terrain ;
- les auscultations relevées, généralement par des bureaux d'étude, à partir des instruments implantés sur les ouvrages : par exemple, les mesures de débit, la piézométrie relevées sur un barrage. Ces données sont ensuite analysées statistiquement lorsque les données collectées sur plusieurs années sont suffisantes ;
- les données calculées, généralement par des bureaux d'étude, à partir des données d'auscultation : par exemple, pour les barrages, le gradient hydraulique calculé à partir de la piézométrie ;
- les données de conception / réalisation permettant de connaître les principales caractéristiques (dimension, nature des matériaux, qualité de l'exécution) des ouvrages ;
- les données issues d'expérimentations menées en laboratoire ;
- des données statistiques établies sur des échantillons représentatifs ;
- des résultats issus de simulations.



Ces données présentent donc des formats très différents. Chaque application utilise plusieurs de ces formats pour l'évaluation de la performance.

### **3.2. Phase de collecte et d'analyse de la qualité des données**

Nous présentons ici la phase de collecte des données en plus de celle d'analyse de la qualité des données dans la mesure où la collecte elle-même conditionne les grilles d'analyse de la qualité des données proposées dans les deux applications.

Pour l'application bâtiments, les principales sources pour la collecte des données de durées de vie sont : les bases de données (par exemple, [www.duree-de-vie-batiment.fr](http://www.duree-de-vie-batiment.fr)), les revues, les conférences, les dires d'expert, les logiciels de simulation, les expérimentations, les modèles théoriques. Les imperfections pourront donc porter à la fois sur la fiabilité de la source, la fiabilité des données, du modèle et de la période d'observation (cause éventuelle de censure) utilisés pour fournir la donnée collectée, la fiabilité de la correspondance entre le produit utilisé pour la donnée collectée et le cas d'étude en cours ainsi que la correspondance entre environnements (par exemple, l'environnement contrôlé lors d'un essai de vieillissement accéléré sera différent de celui d'un produit en service). La qualité des données dépendra également de la fiabilité de la transformation dans un format possibiliste (représentativité) et de l'informativité de la donnée par rapport au cas traité, c'est-à-dire de la quantité d'information apportée par cette donnée pour répondre au problème posé d'estimation de la durée de vie. La grille d'analyse de la qualité des données est proposée au Tableau 1 de (Talon *et al.*, 2008).

Pour l'application barrages, les quatre sources de données sont les observations visuelles, les données issues de l'auscultation, les données issues de modèles mécaniques et les données de conception et réalisation. Ces différentes données sont relevées soit directement sur le terrain lors d'une inspection soit dans le dossier du barrage soit dans les rapports bisannuels d'analyse des données d'auscultation. L'ensemble de ces données sont analysées par un expert qui peut demander des compléments d'information, auprès des bureaux d'étude notamment, pour donner une évaluation de la performance des barrages. Ainsi ce sont les experts qui actuellement réalisent une analyse implicite de la fiabilité des données sur la base d'un certain nombre de critères : robustesse et fidélité des capteurs, visibilité pour l'inspection visuelle...

D'un point de vue générique, les catégories de critère d'analyse de la qualité des données entre les deux applications sont similaires, c'est-à-dire qu'ils s'attachent : (1) à la fiabilité des données collectées, (2) au traitement de ces données, (3) à l'informativité des données (en cours d'étude pour l'application sur les barrages).

Par contre, les critères dans chacune des catégories diffèrent entre les deux applications de part la nature des données collectées. En effet, la grille d'analyse de la qualité des données pour les bâtiments a été développée pour pouvoir être

appliquée à tous les types de produits de construction sans connaître a priori tous les phénomènes et scénarii de dégradation de ces produits, alors que pour les barrages les modes de rupture, les différents types de barrages, les différents types d'observations visuelles, d'auscultation, de modèle de calcul et de modèle conception ont probablement été répertoriés et formalisés. Par conséquent, la granularité des critères est plus fine dans l'application barrages que dans l'application bâtiments.

La grille d'analyse de la qualité des données des barrages est décomposée en quatre parties associées aux quatre sources de données disponibles. Un extrait de cette grille d'analyse associée aux données de conception / réalisation est présenté au Tableau 1.

	Indicateurs de conception ou réalisation			
	C4k1	C4k2	C4k3	C4k4
Echelle	Nombre d'essais	Localisation	Sensibilité de l'instrument	Mise en œuvre de l'essai
0	Nombre d'essais corrects	Localisation correcte	Instrument très sensible	Mise en œuvre correcte
1	Légère déviation par rapport à un nombre d'essais correct	Légère déviation par rapport à une localisation correcte	Instrument sensible	Légère déviation par rapport à une mise en œuvre correcte
2	Forte déviation par rapport à un nombre d'essais correct	Forte déviation par rapport à une localisation correcte	Instrument peu sensible	Forte déviation par rapport à une mise en œuvre correcte
3	Aucune donnée	Localisation incorrecte	Instrument inadapté	Mise en œuvre incorrecte

**Tableau 1.** Extrait de la grille d'analyse de la qualité des données des barrages

### 3.3. Phase de fuzzification

Dans cette phase de fuzzification, la démarche d'obtention est distincte pour les deux applications ; la signification des principales caractéristiques des sous-ensembles flous est aussi différente.

Pour l'application bâtiments, la transformation de tout type de format en un format possibiliste est réalisée par des modèles mathématiques, cités au paragraphe 4 de (Talon *et al.*, 2008). Pour l'application barrages, la fuzzification est actuellement réalisée directement par les experts qui modélisent chaque indicateur sous forme d'une distribution de possibilités.

Pour l'application bâtiments, la hauteur du sous-ensemble flou intègre la fiabilité de la source, l'incertitude et l'incomplétude de la donnée ainsi que l'imprécision de la transformation dans un format possibiliste, tandis que l'étendue du noyau et l'étendue du support du sous-ensemble flou représentent l'imprécision intrinsèque de la donnée. Des exemples de formalisation de sous-ensembles flous pour l'application bâtiments sont présentés au Tableau 2.

Enoncé		
Environ 30 ans	Approximativement entre 20 et 30 ans	Avant 30 ans
Formalisation		
Forme triangulaire	Forme trapézoïdale	Forme triangulaire ouverte à gauche

**Tableau 2.** Formalisation de sous-ensembles flous pour l'application bâtiments

Pour l'application barrages, la hauteur du sous-ensemble flou est prise égale à 1 dans la mesure où la fiabilité intrinsèque de la source, c'est-à-dire celle de l'expert, n'est pas évaluée. Par contre, l'incertitude, l'imprécision et l'incomplétude des données elles-mêmes, ainsi que leur traitement sont intégrés dans la forme du sous-ensemble flou, les étendues du noyau et du support du sous-ensemble flou.

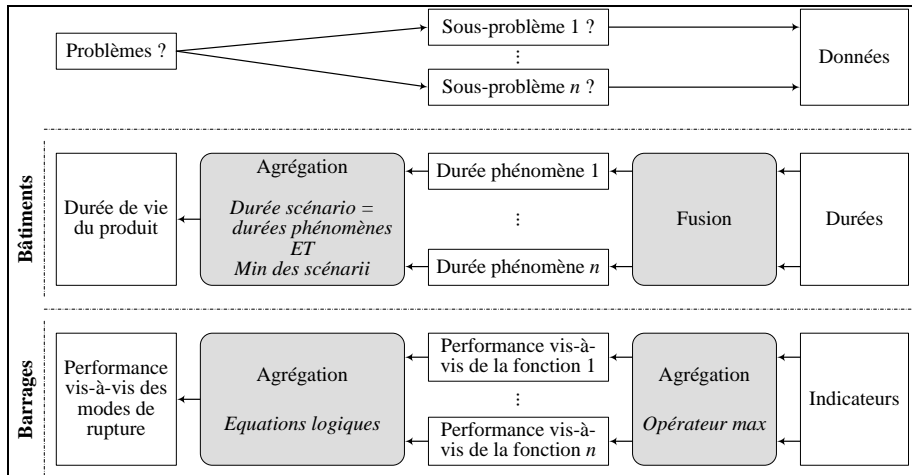
### 3.4. Phase d'unification par fusion et d'agrégation des données

Le principe général de cette phase est identique pour les deux applications, c'est-à-dire que l'on dispose d'un modèle qualitatif décomposant le problème à résoudre – estimation de la durée de vie du produit de construction pour le bâtiment, et de la performance vis-à-vis d'un mode de rupture pour les barrages – en sous-problèmes – estimation des durées des phénomènes susceptibles de dégrader le produit pour le bâtiment, et évaluation de la performance des fonctions pour les barrages à partir des indicateurs (cf. Figure 2).

Toutefois, les deux applications diffèrent sur deux points : (i) dans l'application bâtiments une première étape de fusion de données est réalisée ce qui n'est pas le cas pour l'application barrages et (ii) les opérateurs d'agrégation diffèrent entre les deux applications.

Pour l'application bâtiments, nous disposons généralement de plusieurs données de sources différentes associées aux phénomènes pouvant survenir. Par conséquent, nous menons une fusion des données au niveau de chacun des phénomènes pour obtenir la durée de ces phénomènes puis agrégeons du niveau des phénomènes au niveau des scénarii de dégradation pour obtenir la durée des scénarii. La méthode de fusion des données est détaillée au paragraphe 5 de (Talon *et al.* 2008). Pour l'application barrages, nous disposons généralement d'une donnée pour chaque indicateur, par conséquent, nous ne menons pas de fusion des données au niveau des

indicateurs. L'agrégation d'indicateurs permet d'obtenir l'évaluation de la performance des fonctions et l'agrégation de ces performances permet d'obtenir la performance vis-à-vis du mode de rupture.



**Figure 2.** Phase d'unification et d'agrégation pour les deux domaines applicatifs

Différents opérateurs d'agrégation sont possibles : la méthode d'agrégation permettant d'obtenir la durée d'un scénario, pour les bâtiments, est la somme des durées des phénomènes composant ce scénario. La durée de vie du produit est ensuite prise égale au minimum des durées des scénarii. Quant aux barrages, l'évaluation de la performance des fonctions est obtenue par la combinaison des indicateurs pertinents par l'opérateur maximum et la performance vis-à-vis du mode de rupture par des équations logiques liant deux performances de fonction. Ces différents opérateurs ont été établis directement par les experts.

### 3.5. Phase de défuzzification et prise de décision

A l'issue de la phase d'unification et d'agrégation, le résultat est exprimé dans les deux applications sous forme floue. L'objectif commun pour les deux applications est que la phase de défuzzification donne une information aussi concise que possible – un décideur ne peut prendre une décision efficace que sur une somme d'informations restreinte – mais également aussi complète que possible, c'est-à-dire que cette information reflète à la fois tous les aspects importants révélés lors de la phase d'unification et d'agrégation des données et que cette information intègre la fiabilité du résultat obtenu qui dépend des données collectées et de la méthodologie elle-même.

La phase de défuzzification conduit pour les deux applications à un même type de résultat, à savoir une donnée consensuelle et une information sur la qualité de cette donnée. Cependant, les décisions prises à partir de ces résultats étant différentes pour les deux applications, les natures de la donnée consensuelle et des indicateurs de qualité de cette donnée sont distinctes pour ces deux applications.

Dans l'application bâtiments, la donnée consensuelle représente une valeur ou un intervalle de valeurs de durées de vie d'un produit de construction. Cette donnée est déduite de la fonction de consensus, *cf.* Figure 4 de (Talon *et al.* 2008) ; c'est la donnée associée au fractile  $k\%$  du consensus. Les indicateurs de qualité sont la croyance, la plausibilité et la probabilité de Smets associées à la durée de vie ; ces indicateurs sont détaillés à la Figure 6 de (Talon *et al.* 2008).

L'intérêt en phase de conception de connaître la durée de vie d'un produit est de planifier les opérations de maintenance préventives en adéquation avec la maintenance des autres produits composant le bâtiment (par exemple, prévoir la modification des huisseries en même temps qu'un ravalement de façade). Le niveau de précision attendu, largeur de l'intervalle de durée de vie et qualité de ce résultat, dépend de l'ampleur des actions engageables sur la base de ce résultat. D'un point de vue opérationnel, ce résultat de défuzzification permet également d'avoir un retour sur les données à collecter. En effet, plus la probabilité de Smets est proche de 1 et plus l'intervalle croyance – plausibilité est restreint, plus la durée de vie obtenue est alors fiable. Par conséquent, nous pouvons, en reprenant les résultats intermédiaires des fusions et des agrégations des données, identifier les données qui entraînent une diminution de la fiabilité du résultat et rechercher des données plus fiables.

Dans l'application barrages, la donnée consensuelle représente une valeur de l'échelle d'évaluation, c'est-à-dire un état de performance du barrage vis-à-vis de ses modes de rupture (érosion interne, glissement, tassement,...). Jusqu'à présent, une seule note était extraite du sous-ensemble flou résultat des agrégations. Or cette valeur unique est trop pessimiste pour les experts. Par conséquent des travaux sont en cours pour définir une méthode de défuzzification plus en adéquation avec leurs attentes et qui passe notamment par l'expression de deux valeurs extraites du sous-ensemble flou. L'indicateur de qualité associée à cette donnée consensuelle (en cours d'étude) permettra de représenter les étendues du noyau et du support de la fonction d'appartenance.

L'intérêt d'avoir une estimation de l'état de la performance d'un barrage à un instant de sa vie en œuvre est de pouvoir définir les actions de réparation à entreprendre. D'un point de vue opérationnel, ce résultat de défuzzification permet également d'avoir un retour sur les données à collecter. En effet, en reprenant les résultats intermédiaires d'agrégation fournissant les notes de performance des fonctions ou bien en reprenant les notes associées aux indicateurs, nous pouvons identifier les données qui entraînent une diminution de la fiabilité du résultat et prescrire les actions à entreprendre pour collecter des données plus fiables.

#### 4. Conclusion

Nous avons présenté une approche possibiliste décomposée en quatre phases – l’analyse de la qualité des données, la fuzzification, l’unification par fusion et l’agrégation des données puis la défuzzification – et une analyse comparative de l’application de cette approche à deux domaines : les bâtiments et les barrages.

Cette analyse comparative montre que la démarche générale ainsi que la classification des critères permettant d’analyser la qualité des données sont similaires dans les deux applications. Nous avons également montré que des spécificités de ces domaines d’application nous ont conduits à proposer des méthodes spécifiques ; par exemple, la fuzzification est faite par modèles mathématiques pour les bâtiments et par les experts pour les barrages, ou encore, la fusion est suivie de l’agrégation des données pour les bâtiments alors que l’agrégation seule est faite pour les barrages. Nous avons ainsi mis en œuvre différentes méthodes qui ont été choisies en fonction du contexte de l’étude.

De manière plus générale, nous avons montré que l’application des différentes méthodes dépend essentiellement : (1) de l’aspect multi-sources et multi-échelles des données disponibles, (2) de la méthode de collecte et de traitement des informations et (3) du niveau de finesse du modèle qualitatif sur lequel se base la quantification.

#### 5. Bibliographie

- Curt C., Evaluation de la performance des barrages en service basée sur une formalisation et une agrégation des connaissances, Thèse de doctorat, Université de Clermont-Ferrand, CEMAGREF et LGC, 2008.
- Curt C., Peyras L., Royet P., Felix H., Degoutte G., Mériaux P., Tourment R., Boissier D., « Evaluation de la performance des barrages basée sur la formalisation de l’expertise », *Actes de la conférence XXVIème Rencontres Universitaires de Génie Civil*, La Grande Motte, 1-2 juin 2006.
- Talon A., Curt C., Boissier D., « Méthodologie d’évaluation possibiliste de la performance d’ouvrages de génie civil », *Fiabilité des matériaux et des structures*, Nantes, 26-28 mars 2008.
- Talon A., Evaluation des scénarii de dégradation des produits de construction, Thèse de doctorat, Université de Clermont-Ferrand, CSTB et LGC, 2006.

---

Session TS2-A  
Méthodes de calcul, propagation d'incertitudes

---

## **Analyse de sensibilité par éléments finis stochastiques d'un essai d'arrachement.**

J. Humbert, J. Baroth, L. Daudeville

---



---

# Analyse de sensibilité par éléments finis stochastiques d'un essai d'arrachement

Jérôme Humbert — Julien Baroth — Laurent Daudeville

*Université Joseph Fourier / Institut National Polytechnique de Grenoble / CNRS  
Laboratoire Sols, Sols, Solides, Structures - Risques (3S-R)  
Domaine Universitaire, BP 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France  
[julien.baroth@hmg.inpg.fr](mailto:julien.baroth@hmg.inpg.fr)*

---

*RÉSUMÉ. Cette étude présente l'application d'une méthode d'éléments finis stochastiques, basée sur les polynômes de Lagrange, à l'étude de sensibilité d'un assemblage simple à la rupture. Celui-ci est constitué d'une tige d'acier ancrée dans une éprouvette de béton. Le modèle éléments finis utilisé s'appuie sur des lois de comportement non linéaires, fondées sur la mécanique de l'endommagement pour le béton et élastoplastique avec écrouissage pour l'acier. La sensibilité à la rupture est étudiée en fonction de la variabilité du module d'Young du béton ainsi que celles des contraintes ultimes des matériaux. Les moyennes et écart types sont comparés à ceux obtenus avec des essais expérimentaux. Enfin, les fonctions de densité de probabilité sont évaluées et confrontées aux valeurs réglementaires.*

*ABSTRACT. This study aims at applying a stochastic finite element method based on Lagrange polynomials to the sensitivity analysis of a composite connection at failure. The system in concern is a connection composed of a steel bar embedded in concrete. The non linear constitutive models are based on a damage model for concrete and an elastic-plastic law for steel. A sensitivity analysis at failure is then achieved taking into account the variability of the Young's modulus of concrete and the yield stress of both materials. The results (means, coefficients of variation, probability density functions) are compared with experimental pull-out tests.*

*MOTS-CLÉS : essai d'arrachement, méthode d'éléments finis stochastiques, simulation de Monte Carlo, étude de sensibilité, mécanique non linéaire de l'endommagement*

*KEYWORDS: pull-out test, stochastic finite element method, sensitivity analysis, Monte Carlo simulation, non linear damage mechanics*

---

## 1. Introduction

La prise en compte de la propagation d'incertitudes dans un modèle mécanique peut s'effectuer à l'aide de méthodes probabilistes. Développées depuis une trentaine d'années, les méthodes d'éléments finis stochastiques (MEFS) (Mathies *et al.* 1997, Lemaire 2005) sont des alternatives aux simulations de Monte-Carlo (Shreider 1966), dans le cas où les modèles éléments finis (EF) sont complexes. Parmi ces méthodes, on distingue les MEFS « non-intrusives », *i.e.* ne modifiant pas le modèle EF. Ces méthodes ont fait l'objet de plusieurs travaux utilisant des développements de polynômes d'Hermite (Baroth *et al.* 2006, Blatman *et al.* 2007). D'autres travaux (Chauvière *et al.* 2007, Baroth *et al.* 2007) ont montré qu'une base de polynômes de Lagrange est plus économe en temps de calcul et plus précise pour l'obtention des moments statistiques et des fonctions de densité de probabilité (FDP). Cette « MEFS Lagrange » a été récemment appliquée à un assemblage métallique comportant une double non linéarité matérielle (plasticité) et géométrique (contact) (Rhayma *et al.* 2007). On étudie ici l'assemblage composé d'une tige d'acier ancrée dans une éprouvette de béton (« pull-out test »). L'étude d'une structure mixte telle que celle-ci implique une caractérisation du mécanisme de rupture : résistance à l'arrachement, propagation des fissures (Charour *et al.* 1995, Obata *et al.* 98), influence de la forme des ancrages (Kilic *et al.* 2002). Un modèle EF est utilisé en raison de l'absence de solution analytique et de la complexité du problème : non-linéarité des lois de comportement (Clément 1987) et problème de la modélisation de l'interface acier / béton (Clément 1987, Banholzer *et al.* 2005, Soh *et al.* 1999). Le but de cette étude est de caractériser l'incertitude sur l'évolution de la force d'arrachement de l'ancrage étudié en fonction de sa longueur de scellement et de la variabilité des paramètres d'entrée tels que le module d'Young du béton, ou encore les limites d'élasticité du béton et de l'acier. Cette caractérisation s'effectue en termes de moments statistiques, de densité de probabilité et d'intervalle de confiance. Pour ce faire, la MEFS Lagrange est d'abord présentée brièvement. Le modèle EF développé et les résultats expérimentaux de référence sont ensuite décrits. Puis la MEFS est appliquée au modèle EF dans le domaine linéaire et les résultats sont comparés à ceux obtenus par une méthode de Monte-Carlo et par l'expérimentation. Enfin, l'application au modèle mécanique à la rupture permet d'étudier la sensibilité de l'évolution de la force d'arrachement, puis de confronter les essais expérimentaux ainsi que les règlements (AFNOR 1999, CEN 2005).

## 2. Méthode d'éléments finis stochastiques de Lagrange

La prise en compte de variabilités statistiques pour des paramètres mécaniques dans un modèle mécanique peut s'effectuer par la modélisation de ces paramètres sous forme de variables aléatoires (v.a.)  $\mathbf{Y}=\{Y_1, \dots, Y_E\}$  de lois connues choisies en entrée et  $\mathbf{Z}=\{Z_1, \dots, Z_S\}$  à caractériser en sortie. Le système mécanique est noté  $f$  de

sorte que  $\mathbf{Z}=f(\mathbf{Y})$ . Considérons le cas simplifié d'une entrée et d'une sortie scalaire. Cette méthode d'éléments finis stochastiques (MEFS) est basée sur l'emploi des polynômes de Lagrange, notés  $\{L_i\}$ . L'idée est d'approcher la fonction de réponse mécanique  $f$  réelle de la variable réelle  $x$  en la projetant sur la base tronquée  $\{L_i\}_{i=1..N}$  ( $N$  réel non nul) :

$$f(x) \approx \tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot L_i(x) \quad [1]$$

où  $\alpha_i$  représente le poids associé au polynôme  $L_i$  et  $\{x_1, \dots, x_N\}$  un ensemble de  $N$  points d'intégration (collocation) ; on identifie  $\alpha_i = f(x_i)$  (Baroth 2007). En remplaçant dans (1), l'expression de l'approximation de  $f$  devient :

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^N f(x_i) \cdot L_i(x) \quad [2]$$

### 2.1. Approximation des moments statistiques

Soit  $g$  la fonction définie comme la composée ( $f$  o  $T$ ) de la fonction de réponse mécanique  $f$ , reliant  $Z$  à  $Y$  de loi connue continue, avec une fonction  $T$ , reliant  $Y$  à une v.a. standard (centrée réduite) (v.a.s.)  $X$  (normalisation gaussienne) (Lemaire 2005). On s'intéresse au calcul de la moyenne et de la variance de la v.a. scalaire réponse mécanique  $Z = g(X)$  à l'entrée  $X$ . La moyenne de  $Z$  s'exprime par :

$$\mu_Z = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot p_X(t) \cdot dt \quad [3]$$

où  $p_X$  est la FDP de  $X$ . On approche la moyenne de  $Z$  par celle de l'approximation

$$\tilde{Z} = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot L_i(x) \quad [4]$$

telle que :

$$\mu_Z \approx \mu_{\tilde{Z}} = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot g(x_i) \quad [5]$$

où  $\omega_i$  représente le poids associé au point de collocation  $x_i$ . Ces poids sont les racines des polynômes d'Hermite et sont disponibles dans des tables.

Par analogie, l'approximation  $\sigma_{\tilde{Z}}$  de l'écart type  $\sigma_Z$  de  $Z$  s'exprime par :

$$\sigma_Z^2 \approx \sigma_{\tilde{Z}}^2 = \sum_{i=1}^N (g(x_i))^2 \cdot \omega_i - (\mu_{\tilde{Z}})^2 \quad [6]$$

Remarquons que les approximations [5-6] sont égales à celles obtenues par la méthode de quadrature (Baldeweck 1999, Millard 2000). En revanche, la MEFS Lagrange permet une approximation plus précise des moments d'ordre supérieur et de la FDP de  $Z$  (Baroth 2007).

## 2.2. Approximation de la FDP

La FDP de  $Z$ , notée  $p_Z$ , peut être approchée par la FDP  $p_{\tilde{Z}}$  de l'approximation  $\tilde{Z}$ , qui d'après [4] est une expression analytique. L'estimation de  $p_{\tilde{Z}}$  par simulation de Monte-Carlo peut ainsi s'effectuer à moindre frais. Les temps de calcul sont donc considérablement réduits. La courbe représentative de  $p_{\tilde{Z}}$  est obtenue en pratique en calculant l'évolution de fréquences relatives réparties sur un intervalle du type  $I = [\tilde{z}_{\text{inf}}^n; \tilde{z}_{\text{sup}}^n]$ , où  $\tilde{z}_{\text{inf}}^n = \mu_{\tilde{Z}} - \alpha \cdot \sigma_{\tilde{Z}}$ .  $\alpha$  peut être de l'ordre de 4 à 5.

## 2.3. Approximation d'un intervalle de confiance $I_n$ à $n\%$

Un intervalle de confiance  $I_n$  à  $n\%$  est un intervalle inclus dans  $I$ , défini par :

$$P(z \in I_n) \leq \frac{n}{100} \quad [7]$$

où  $P(z \in I_n)$  est la probabilité qu'une réalisation  $z$  de la v.a.  $Z$  soit dans  $I_n$ . Cet intervalle est approché par un intervalle  $\tilde{I}_n$ , tel que :

$$\tilde{I}_n = [\tilde{z}_{\text{inf}}^n; \tilde{z}_{\text{sup}}^n] \Leftrightarrow \int_{\tilde{z}_{\text{inf}}^n}^{\tilde{z}_{\text{sup}}^n} p_{\tilde{Z}}(z) dz \leq \frac{n}{100} \quad [8]$$

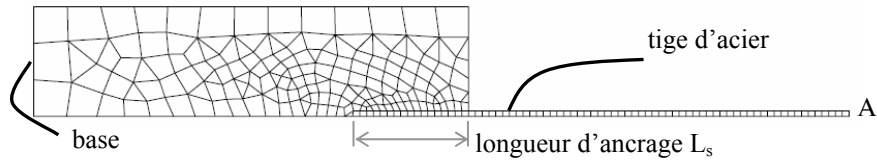
où les bornes  $\{\tilde{z}_{\text{inf}}^n; \tilde{z}_{\text{sup}}^n\}$  de cette intégrale sont approchées numériquement.

## 2.4. Domaine d'application de la méthode

La MEFS Lagrange limite considérablement le nombre de calculs mécaniques en comparaison avec une simulation de Monte-Carlo, et a aussi l'avantage par rapport à d'autres MEFS d'être « non intrusive ». Elle reste cependant adaptée pour un faible nombre de v.a. seulement, de l'ordre de 4 à 6. En effet, le nombre total  $K$  d'appels à la fonction mécanique varie exponentiellement avec le nombre de v.a.  $E$  utilisées en entrée pour un nombre de points d'intégration  $N$  :  $K = N^E$ . Cette méthode est donc optimale pour une étude comportant quelques v.a. en entrée et nécessitant des calculs EF relativement coûteux, tel qu'un modèle non linéaire. Elle a été mise en œuvre récemment pour l'analyse d'un assemblage métallique (Rhayma *et al.* 2007). Son application au modèle EF d'un essai d'arrachement d'armature dans un massif en béton est donc originale.

## 2. Modélisation éléments finis

### 2.1. Présentation du modèle



**Figure 1.** *Modèle EF du demi-ensemble mixte acier-béton.*

Du fait de la géométrie du problème, le modèle est 2D axisymétrique (cf. Fig. 1). Les blocages sont imposés longitudinalement à la base de l'éprouvette béton, et radialement le long de l'axe de symétrie. Le déplacement est imposé à l'extrémité libre A de la tige d'acier. La modélisation repose sur une loi non linéaire fondée sur la mécanique de l'endommagement pour le béton (Mazars 1984). Les paramètres de la loi sont choisis afin de reproduire les caractéristiques mécaniques du béton (cf. Tab. 1). On identifie ainsi des coefficients en traction  $A_t = 1$  et  $B_t = 4300$ . Quant à l'acier, un modèle élastoplastique avec écrouissage linéaire est utilisé. Les paramètres des matériaux sont résumés dans le tableau 1 et correspondent à ceux identifiés par les essais expérimentaux, ou à défaut ceux préconisés par les règlements. Un modèle simplifié sans glissement à l'interface acier / béton est ainsi obtenu. Cette modélisation a été constatée équivalente à la mise en place d'une loi d'interface par (Clément 1987), et n'est approfondie dans cette étude.

Paramètre	Valeur	Description
$E_b$	30 GPa	Module d'Young du béton
$\nu_b$	0,2	Coefficient de Poisson du béton
$\rho_b$	2300 kg/m <sup>3</sup>	Densité du béton
$f_{c28}$	30 MPa	Limite d'élasticité en compression du béton
$E_s$	210 GPa	Module d'Young de l'acier
$\nu_s$	0,3	Coefficient de Poisson de l'acier
$\rho_s$	7850 kg/m <sup>3</sup>	Densité de l'acier
$f_y$	500 MPa	Limite d'élasticité de l'acier
$H_s$	21 GPa	Module d'écrouissage de l'acier ( $E_s \times 10\%$ )

**Tableau 1.** *Paramètres mécaniques du modèle numérique*

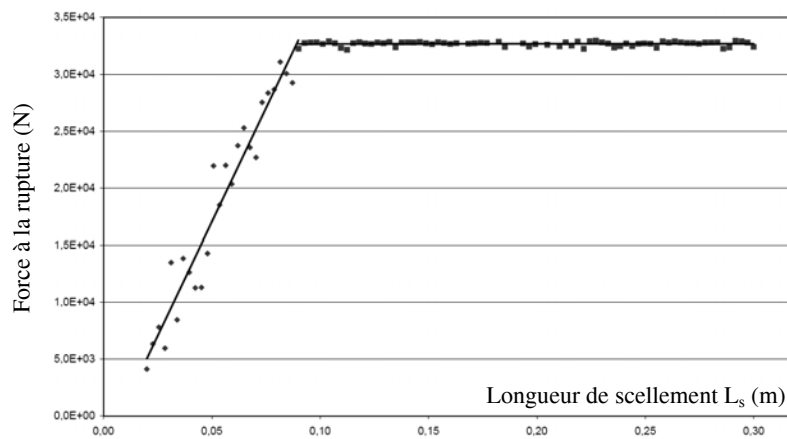
## 2.2. Modes de rupture et critères numériques

Trois modes de rupture différents peuvent caractériser l'essai d'arrachement : une perte d'adhérence à l'interface acier / béton (mode 1), la rupture de la tige acier (mode 2), ou la rupture d'une zone conique du béton (mode 3). Les deux 1<sup>ers</sup> modes sont observés expérimentalement et correspondent aux longueurs de scellement  $L_s$  de 8 cm et 32 cm, respectivement. Le 3<sup>e</sup> mode n'est pas observable en raison d'un confinement induit près de l'extrémité de l'éprouvette par le dispositif expérimental.

	$F (L_s = 8 \text{ cm})$	$F (L_s = 32 \text{ cm})$
Moyenne	22 kN	33 kN
Écart type	2 kN	1 kN
Coefficient de variation	7 %	3 %

**Tableau 2.** Résultats expérimentaux

Le modèle EF doit reproduire au moins la force d'arrachement expérimentale, et pouvoir distinguer les modes de rupture. Seuls les deux 1<sup>er</sup> modes, obtenus par l'expérience, sont donc considérés ici. Des longueurs d'ancrage de  $L_s = 8 \text{ cm}$  pour le mode 1 et  $L_s = 32 \text{ cm}$  pour le mode 2 sont utilisées. Des critères numériques sont mis en place permettant de contrôler l'indicateur d'endommagement  $D_i$  à l'interface (béton sain :  $D_i = 0$ , fissuré :  $D_i = 1$ ) et la déformation maximale  $\epsilon_s$  de la tige d'acier ;  $\epsilon_s$  est limitée à 10‰ (AFNOR 1999). Ces critères permettent d'accéder à la force à la rupture, dont l'évolution, présentée figure 2, met en évidence une 1<sup>ère</sup> zone de rupture par endommagement du béton, où  $F$  varie linéairement avec la longueur de scellement ( $L_s < 9 \text{ cm}$  environ) ; une 2<sup>nd</sup>e zone de rupture de la tige d'acier, où  $F$  est constante égale à la résistance de l'acier ( $L_s > 9 \text{ cm}$  environ).



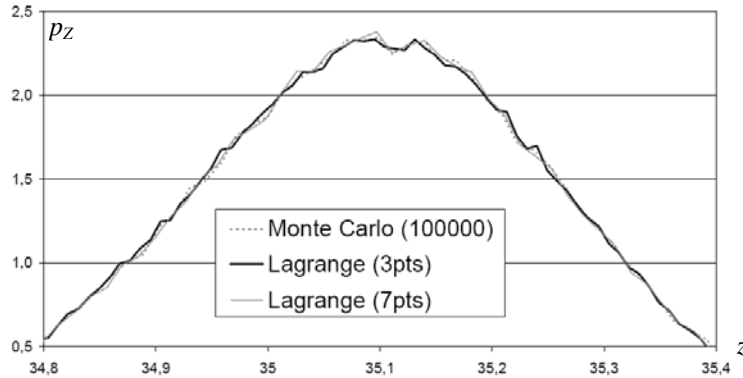
**Figure 2.** Évolution de la force à la rupture  $F$  en fonction de la longueur de scellement  $L_s$ .

### 3. Analyse par éléments finis stochastiques

#### 3.1. Modèle éléments finis – phase de comportement linéaire

On s'intéresse ici à la comparaison d'une méthode de Monte-Carlo de référence et de la MEFS Lagrange. Les calculs sont effectués dans la partie linéaire élastique du modèle. Une seule v.a.  $Y$  est prise en entrée, correspondant à la variabilité du module d'Young du béton  $E_b$ , de moyenne  $\mu_Z = 3.10^{10}$  Pa et de coefficient de variation  $C_v = 10\%$ . La v.a. de sortie modélise la variabilité de la force maximale  $F_{max}$  pour un déplacement imposé à la tige d'acier de  $1\ \mu\text{m}$ . Les estimations pour  $K = 10^5$  réalisations de la moyenne  $\hat{\mu}_Z$  et de l'écart type  $\hat{\sigma}_Z$  de  $Z$  sont les valeurs cibles. Pour le mode 1 ( $L_s = 8\text{ cm}$ ), on relève  $\hat{\mu}_Z^1 = 35,09\text{ N}$  ;  $\hat{\sigma}_Z^1 = 0,17\text{ N}$ , puis pour le mode 2 ( $L_s = 32\text{ cm}$ ),  $\hat{\mu}_Z^2 = 35,60\text{ N}$  ;  $\hat{\sigma}_Z^2 = 0,13\text{ N}$ . Plusieurs simulations sont ensuite effectuées pour chacun des deux modes de rupture, avec un nombre de calculs mécaniques variant de  $K = 10^3$  à  $K = 10^5$ . On constate que l'erreur sur la moyenne est inférieure à  $0,01\%$ . Pour l'écart type, l'erreur tend à diminuer avec le nombre de points d'intégration  $N$ , et reste inférieure à  $4\%$  en mode 1 et à  $2\%$  en mode 2.

La distribution de la réponse mécanique  $Z$  est présentée sur la figure 6 pour le mode 1, pour une simulation de Monte-Carlo à  $10^5$  tirages, ainsi que pour la méthode Lagrange à 3 et 7 points d'intégration. Les résultats sont analogues pour 4 et 6 points d'intégration. Il en est de même pour la distribution du mode 2. On constate une bonne adéquation entre ces trois calculs.



**Figure 3.** Évolution de la FDP  $p_Z$  de la v.a.  $Z$ , par simulation de Monte-Carlo à  $10^5$  appels au modèle EF et par la MEFS Lagrange (3 et 7 appels), en mode 1 linéaire.

On constate que  $N = 4$  points d'intégration est suffisant pour obtenir des résultats satisfaisants en termes de FDP et de moments statistiques en comparaison avec Monte-Carlo ( $10^5$  tirages). Vu le temps d'exécution important d'un modèle complexe (non linéaire, quelques heures), on choisit d'utiliser une MEFS Lagrange à 4 points d'intégration par la suite.

### 3.2. Modèle éléments finis à la rupture

Une première série de calculs à la rupture est effectuée en prenant en entrée une ou deux v.a. modélisant les variabilités des paramètres mécaniques tels que module d'Young du béton ou limites d'élasticité des matériaux, et en sortie une v.a. modélisant les variabilités de la force à la rupture  $F$ .

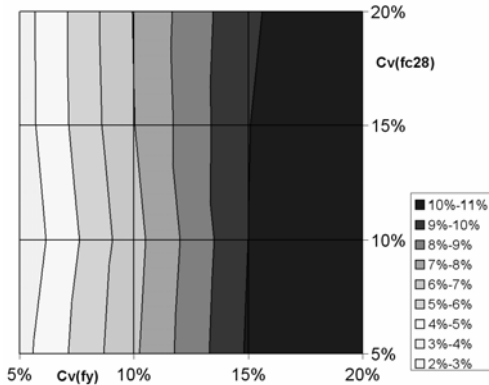


Figure 4. Sensibilité de la force à la rupture  $F$  aux variations de  $f_{c28}$  et  $f_y$  en mode 2 ( $L_s=32cm$ ).

La figure 4 présente les résultats en mode 2 de la sensibilité de  $F$  aux variations de  $f_{c28}$  et  $f_y$ , respectivement limites d'élasticité du béton et de l'acier. On constate que pour ce mode ( $L_s=32cm$ ) la force  $F$  est fortement sensible aux variations de  $f_y$  et peu à celles de  $f_{c28}$ , ce qui s'explique par le fait que ce mode de rupture soit caractérisé par la rupture de la tige d'acier.

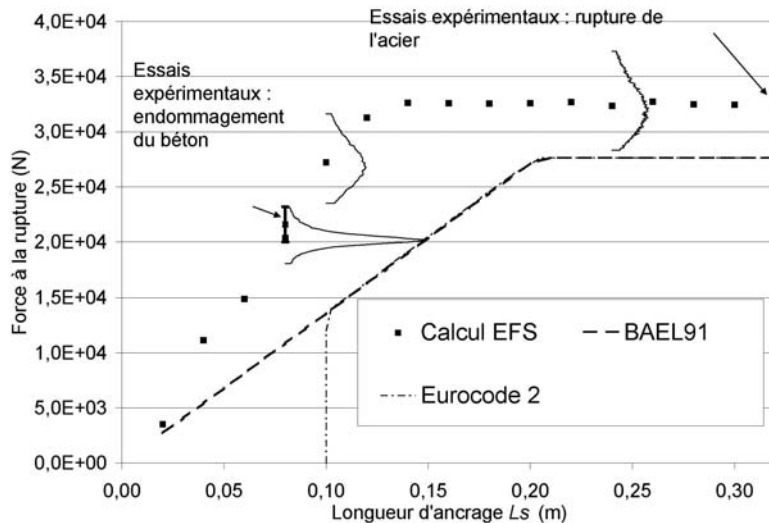


Figure 5. Fonctions de densité de probabilité (FDP)  $P_{\tilde{z}}$  de la v.a.  $\tilde{z}$  pour des longueurs d'ancrages  $L_s = 8, 10$  cm (paramètre incertain :  $f_{c28}$ ) et  $L_s = 24$  cm (paramètre incertain :  $f_y$ ) – FDP tronquées à des intervalles de confiance à 95% Evolutions des résistances à la rupture réglementaires (Eurocode 2 et BAEL91)



Une telle étude de sensibilité est ensuite menée pour différentes valeurs de  $L_s$  afin de caractériser les modes de rupture. Trois séries de calculs sont effectuées successivement, correspondant aux trois paramètres d'entrée distincts que sont le module d'Young du béton et les limites d'élasticité des deux matériaux. Pour chaque calcul, une FDP de la réponse mécanique  $Z$  est évaluée, en appliquant Monte-Carlo sur l'approximation  $\tilde{Z}$  obtenue par la méthode Lagrange [4]. Le résultat correspondant au paragraphe précédent est présenté figure 5 pour un niveau de confiance de 95 %. La valeur de  $F$  préconisée par les règlements BAEL (AFNOR 1999) et Eurocode2 (CEN 2005) est également reportée. On constate alors d'après la figure 5 que les règlements semblent globalement plus sécuritaires pour le mode 1. Cette interprétation doit cependant être confirmée par des modélisations EF puis probabiliste plus approfondies, afin de permettre une étude critique du niveau de confiance de la réglementation.

## Conclusion

Cette étude a présenté l'application d'une méthode d'éléments finis stochastiques, basée sur les polynômes de Lagrange, à l'étude de sensibilité d'un assemblage simple à la rupture. Celui-ci est constitué d'une tige d'acier ancrée dans une éprouvette de béton. Le modèle EF utilisé s'appuie sur des lois de comportement non linéaires, fondées sur la mécanique de l'endommagement pour le béton et élastoplastique avec écrouissage pour l'acier. En définissant des critères de rupture, l'étude a permis d'obtenir la sensibilité de la force d'arrachement de la tige aux variations des paramètres mécaniques du système : module d'Young du béton, limites d'élasticité des matériaux. En particulier l'évolution de cette force en fonction de la longueur de scellement a été présentée. L'approximation de la réponse mécanique du système par un modèle analytique basé sur les polynômes de Lagrange permet alors d'obtenir une approximation de la FDP de la v.a. associée à la force de rupture. Il est ainsi possible d'associer un intervalle de confiance à chaque FDP. Une telle démarche conduit à la possibilité d'une étude critique sur le niveau de confiance des règlements, ce qui reste à approfondir, notamment par un raffinement du modèle EF. Les auteurs soulignent enfin deux originalités de ce travail : tout d'abord, cette étude probabiliste est complémentaire aux nombreuses études déterministes existant sur cet essai. Ensuite, la MEFS présentée a été appliquée pour la 1<sup>ère</sup> fois à un assemblage à la rupture, ce qui laisse présager des possibilités d'applications plus ambitieuses.

## Remerciements

Les auteurs remercient Alain Petrone, Joseph Lisi et Philippe Barbe (IUT1/UJF Grenoble) qui ont donné accès aux essais expérimentaux et à leurs résultats.

## Bibliographie

- AFNOR, Règles BAEL 91 « Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états limites », DTU P18-702, 1999.
- Banholzer B., Brameshuber W., Jung W. « Analytical simulation of pull-out tests – the direct problem », *Cement & Concrete Composites* 27, 2005, p. 93-101.
- Baroth J., Bodé L., Bressolette P., Fogli M. « SFE method using Hermite polynomials: an approach solving nonlinear problems with uncertain parameters », *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, n°195, p. 6479-6501, 2006.
- Baroth J., Chauvière C., Bressolette P., Fogli M. « An efficient SFE method using Lagrange Polynomials: application to nonlinear mechanical problems with uncertain parameters », *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, n°196, p. 4419-4429, 2007.
- Blatman G., Sudret B., Berveiller M., « Quasi-random numbers in stochastic finite element analysis », *Mécanique & Industries*, vol. 8, n°3, p. 289-298, 2007.
- Chahrour A. H., Ohtsu M., « Analysis of anchor bolt pull-out tests by a two-domain boundary element method, *Materials and Structures*, n°28, p. 201-209, 1995.
- Chauvière C., Hesthalven J.S. « RCS predictions with uncertainty », *IEEE transactions on Antennas and propagation*, vol. 55, n°5, p. 1437-1448, 2007.
- Clément J.-L., Interface acier-béton et comportement des structures en béton armé – caractérisation – modélisation, thèse de doctorat, Université Paris 6, 1987.
- CEN (Comité Européen de Normalisation) « Eurocode 2 : Calcul des structures en béton », EN 1992, Bruxelles, Belgique, 2005.
- Kilic A., Yasar E., Atis C.D. « Effect of bar shape on the pull-out capacity of fully-grouted rockbolts », *Tunneling and Underground Space Technology* 18, 2003, p. 1-6.
- Lemaire M., *Fiabilité des structures*, Hermès, 2005.
- Matthies H.G., Brenner C.E., Bucher C.G., Guedes Soares C, « Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids - Stochastic finite elements », *Struct. Safety*, vol. 19, n°3, p. 283-336, 1997.
- Mazars J., Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton des structures, thèse de doctorat, Université Paris 6, 1984.
- Obata M., Inoue M., Goto Y. « The failure mechanism and the pull-out strength of a bond-type anchor near a free edge », *Mechanics of Materials*, vol. 28, n°1, p. 113-122, 1998.
- Rhayma N., Baroth J., Bressolette P., Bouchaïr A. « SFE analysis of a steel connection component », *the tenth International Conference on Applications of Statistics and Probability (ICASP10)*, Tokyo, Japan, 8 p., 2007.
- Shreider Y.A., *The Monte-Carlo Method*, Pergamon Press, 1966.
- Soh C. K., Liu Y., Dong Y. D., Lu X. Z. « Damage model for concrete-steel interface », *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 125, n° 8, 1999, p. 979-983.

## **Fluid Bearing Failure Probability Evaluation using Finite Element Modelling.**

A. Charki, D. Bigaud, S. Cloupet, F. Guérin

---

---

# Fluid Bearing Failure Probability Evaluation using Finite Element Modelling

**A. Charki, D. Bigaud, S. Cloupet, F. Guérin**

## **LASQUO**

Institut des Sciences et Techniques de l'Ingénieur d'Angers  
62 avenue Notre Dame du Lac, 49 000 Angers, France  
abderafi.charki@istia.univ-angers.fr

---

*ABSTRACT. This paper presents a methodology for the failure probability evaluation of a thrust fluid bearing which plays a significant role in stability of machines rotors, mechatronic systems and high precision metrology systems. The static and dynamic behavior of a fluid bearing depends on several parameters such as external load, the dimensions of the bearing, the supply pressure, the manufacturing capability, fluid properties, etc... In this paper, the calculation of fluid bearing characteristics is carried out using the Finite Element Method (FEM). Stochastic Response Surface Methodology (SRSM) and Monte Carlo Simulation (MCS) are used for the failure probability evaluation.*

*RESUME. Cet article présente une méthodologie pour l'évaluation de la probabilité de défaillance d'un palier fluide qui est un composant sensible pour la stabilité des machines à rotor et des systèmes utilisés en mécatronique et en métrologie. Le comportement statique et dynamique d'un palier fluide dépend de plusieurs paramètres tels que sa capacité de charge, sa géométrie, la pression d'alimentation, son état de surface, les propriétés du fluide, etc... La Méthode des Eléments Finis (MEF) a été utilisée pour la détermination des caractéristiques d'un palier. La Méthode des Surfaces de Réponse Stochastique (MSRS) et la Simulation Monte Carlo (SMC) ont été utilisées pour l'évaluation de la probabilité de défaillance.*

*KEYWORDS: Fluid Bearing, Finite Element Method, Reliability, Monte Carlo Simulation, Stochastic Response Surface Method.*

---

## 1. Introduction

Fluid bearings are critical components for machines rotors, mechatronic and metrology systems. The design approach of a fluid bearing is usually based on deterministic static characteristics. However, it is subjected to load and pressure fluctuations or to fluid film gap perturbations induced by defects of the slideways surfaces geometry and of the type of supply inlet (groove, orifice, pocket, etc.). These factors induce excitations in the bearing dynamic response; which may eventually lead to bearing instability. The prediction of the reliability of a fluid bearing under operating conditions is then necessary for applications requiring high accuracy movements or positioning within a micrometer to nanometer repeatability.

The literature is sparse regarding research that investigates the reliability estimation of such mechanical systems specially those involving fluid flow. Gorla and Pai [2003] conduct a probabilistic study of fluid interaction for a combustor liner which takes into account several uncertainties in the aerodynamic, structural, material and thermal factors.

In reliability analysis, the limit state function (which is commonly defined as stress-strength limit state function in structural reliability analysis) should be defined precisely for a fluid bearing. Different approaches can be used to define the limit state function for a fluid bearing. For example, reliability is studied based on a maximum load capacity of the bearing that results in a film gap as small as possible. Alternatively, reliability is studied based on a given load capacity for a fixed film gap higher than that of the corresponding maximum load capacity. The first case is more of interest because of the instability of the bearing may occur around the maximum load capacity (Stiffler, 1974) which immediately leads to the failure of the system supported by the bearing.

Different methods are used to evaluate the bearing failure probability including the Monte Carlo Simulation (MCS), Importance Sampling Method and Conditional Expectation Method. The computational cost of these methods is very high for complex system simulations. This is due to the fact that each finite element realization of the vector of random variables is costly, Guan and Melchers [2001]. Several methods are proposed in order to approximate the true limit state function such as First Order Reliability Method (FORM), Second Order Reliability Method (SORM), Tangent Multi Plane Surface (TMPS) and Stochastic Response Surface Method (SRSM) as discussed in Hurtado [2004] and Gupta and Manohar [2004] and High-Order Stochastic Response Surface Method (HO-SRSM) as presented in Bucher and Bourgund [1990] and Gavin and Yau [2007]. Fox [1994] develops a design system that integrates the deterministic and probabilistic design techniques. He used a second order response surface model in conjunction with Box and Draper [1987] design of experiments followed by a Monte Carlo simulation.

Since the performance function is usually available only in an implicit form, especially when finite element codes are used for the analysis, approximate analytical methods are difficult to apply. In such situations, the Response Surface Method (RSM) provides a powerful tool for estimating the structure failure probability.

In this paper, a method is proposed for the evaluation of the failure probability by MCS and SRSM of a fluid bearing. A finite element model which considers several variables of a fluid bearing is developed for the Reynolds non linear equation calculation of the film fluid characteristics.

## 2. Failure Probability Evaluation

The structural reliability problem seeks the estimation of the probability that a structure exceeds a critical state defined by a limit state function indexed by a vector of so-called basic variables  $X$ , which obeys a joint density function  $f_X(x)$ . Hence, the problem is written as follows (Melchers, [1990]):

$$P_f = \int_{g(X) \leq 0} f_X(x) dX \quad (1)$$

where  $P_f$  is the failure probability and  $g(X)$  is the limit state function that separates the failure and safe domains. This function is given in explicit form only in the case of simple structural elements.

The performance function  $g(X)$  is expressed such that a negative sign for the function (i.e.  $g(X) < 0$ ) indicates a failure of the component where as a positive sign for the function (i.e.  $g(X) > 0$ ) indicates a survival of the component.

Direct numerical integration of Eq. (1) is rarely used to calculate  $P_f$  of a complex system due to the computational inefficiency and difficulty of defining  $f_X(x)$  and  $g(X)$  explicitly. As an alternative, researchers use approximate reliability analysis methods such as MCS, FORM or SORM, Ayyub and Mc Cuen [1997], Dodson and Nolan [1999], Nilsen *et al.* [1998], El Tawil *et al.* [1991] and Madsen *et al.* [1986].

MCS requires extensive computing times as it requires generating  $N$  sets of sample values of  $X$  to evaluate the limit state function  $g(X)$  for each value. The failure probability is then estimated as the ratio of the number of events with  $g(X) < 0$  to

the total number of trials  $N$ . This approach requires  $N$  to be much larger than  $1/P_f$  in order to provide a meaningful estimate of  $P_f$ .

The FORM and SORM methods estimate reliability by obtaining an index reliability  $\beta$  and calculating  $P_f = \Phi(-\beta)$ , where  $\Phi$  is the cumulative distribution function of the normal distribution. This index is developed in structural engineering in order to provide a measure of comparative reliability without having to assume or determine the shape of the probability distribution required to compute the exact failure probability value, Melchers [1990].

The approach based on SRSM and HO-SRSM, Bucher and Bourgund [1990], Gavin and Yau [2007], Hurtado [2004] and Gupta and Manohar [2004], provides an accuracy of the approximation of the true limit function which in turn improves the calculation time.

In the Stochastic Response Surface Method (SRSM),  $g(X)$  is generally approximated by the following quadratic polynomial:

$$g(X) = a + \sum_{i=1}^n b_i X_i + \sum_{i=1}^n c_i X_i^2 \quad (2)$$

where  $a, b_i$  and  $c_i$  are the unknown coefficients.

The values of these coefficients can be determined using a set of sample points from the true limit state function,  $g(X)$ . Among various sampling methods, a common approach consists of evaluating  $g(X)$  at  $2n+1$  combinations of  $\mu_i$  and  $\mu_i \pm h_f \sigma_i$ , where  $\mu_i$  and  $\sigma_i$  are the mean and standard deviation of  $X_i$ , and  $h_f$  is an arbitrary factor.

In order to capture the nonlinearity of the true limit state more precisely, mixed terms can be included into the following quadratic polynomial  $g(X)$ :

$$g(X) = a + \sum_{i=1}^n b_i X_i + \sum_{i=1}^n c_i X_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n d_{ij} X_i X_j \quad (3)$$

with  $1+2n+n(n+1)/2$  coefficients of the number of combinations. In this case,  $3^k$  factorial design is a common sampling approach. With the two previous approximations results may be inaccurate because the sample points which are located around the mean values may be far from the limit state,  $g(X) = 0$ .

In this paper, we utilize MCS and SRSM approaches in the failure probability assessment of a fluid air bearing.

### 3. Fluid Bearing Failure Probability

The performance of a thrust bearing depends on the choice of the different parameters presented in Figure 1.

Several approximate analytical approaches of the behaviour of thrust fluid bearings have been presented in literature. Licht and Elrod [1960], Bassani *et al.* [1989] develop analytical models to analyze the influence of geometric parameters on the stability of aerostatic bearings with recess.

List of parameters of thrust bearings

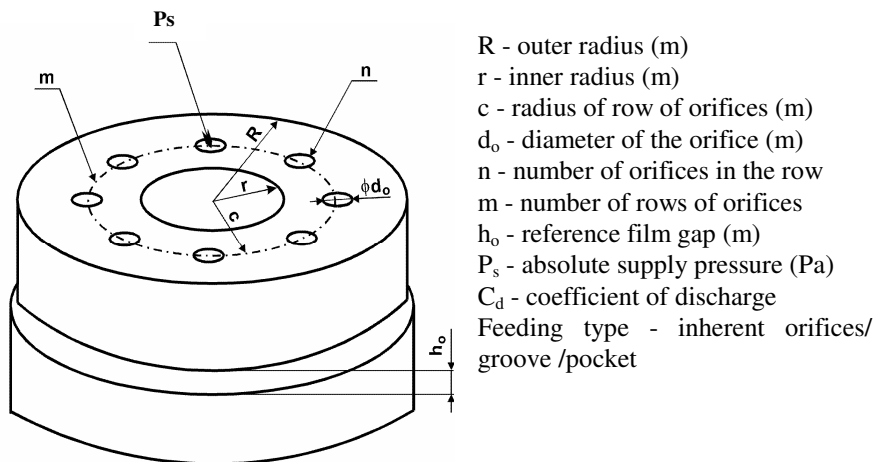


Figure 1. Bearing Details with Orifices

Stiffler [1974] provides a theoretical analysis of a thrust bearing with inherently compensated orifices by using a small perturbation of the Reynolds equation and concludes that an unstable range occurs when the stiffness is maximum. Lin *et al.* [1988] propose FEM (Finite Element Method) to calculate the static and dynamic characteristics of fluid bearings using the Reynolds equation form given by Gross [1962]. He employs the Runge-Kutta method to solve the coupled dynamic equation of a journal bearing with its shaft. He then simulates a thrust pocket bearing to analyze the stable and unstable states for different pocket depths. Fourka *et al.* [1996] establish a comparison of the stability map of pocket bearings obtained by three different ways: experimental results, a nonlinear FEM model and Roblee's analytical model [1985]. They conclude that the analytical method underestimates the critical threshold, giving a wider margin. The same conclusion as established by Licht and Elrod [1960] and Bassani *et al.* [1989] is obtained by Lin *et al.* [1988] and Fourka *et al.* [1996] who use the FEM to investigate the influence of the volume of bearing recess. Boffey [1980, 1981, 1985] and Charki [1999] test and



analyze static and dynamic characteristics of thrust bearings with pocketed orifice and inherent orifice compensation. The effect of geometric parameters on the stability is shown for pocketed thrust bearings. The same tendency as those described by Licht and Elrod (1960), Bassani *et al.* [1989], Lin *et al.* [1988] and Fourka *et al.* [1996] is deduced from experimental investigations. Bonis and Charki [2001] analyze the stability of thrust fluid bearings fed with inherent orifices using FEM. Simulations are performed in order to describe the influence of geometrical parameters and static equilibrium conditions. The numerical results show that an optimum stable position may be reached. Experimental investigations show that an unstable state occurs around the maximum axial applied load ( $F_a$  shown in Figure 2) to the bearing with different types of feeding, by exciting the bearing system with a variable force about its static equilibrium position.

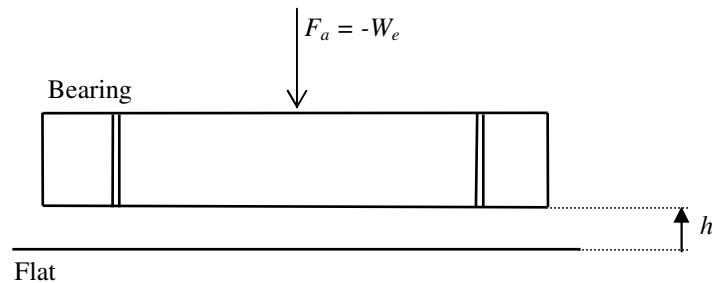


Figure 2. Bearing Side View

The failure of a fluid bearing may generally occur because of the instability phenomenon due to the quality of lubrication, the geometry of machined surfaces, the rotor misalignment, the choice of the characteristics of the bearing such as the type of feeding, the supply pressure and Reynolds number and others. Generally, the failure occurs when the friction coefficient of the film fluid becomes very high.

Boffey [1985] concludes that a critical aspect (a pneumatic hammer phenomenon) may occur if the bearing is not correctly designed. In this case, the failure of a fluid bearing generally causes the destruction of systems or machines rotors parts.

We determine the failure probability of a fluid bearing using the common definition utilized for mechanical structures; namely stress-strength relationship. The equivalent of the strength for the bearing is the maximum load capacity which can be supported by the film fluid taking into account the optimum of stiffness obtained. In this condition, the fluid film gap is very small (lower than 10  $\mu\text{m}$  for air thrust bearing) and a solid contact is possible if an unstable state appears.

Thus, the limit state function is defined as:

$$g(X) = W_e - W_{e\text{-max}} \quad (4)$$

where  $W_{e-max}$  is the maximum load capacity of the bearing,  $W_e$  is the operating load capacity of the bearing. The values of  $W_{e-max}$  and  $W_e$  depend on the parameters shown in Figure 1.

#### 4. Finite Element Modelling of a fluid bearing

In this section, we develop a finite element model for an aerostatic fluid bearing in order to study the effect of several design and working parameters on the characteristics of fluid film gap, such as discharge coefficient, supply pressure, diameter and number of orifices and position of orifice rows, and external load.

The model begins by determining the pressure field  $p(x,y)$  satisfying the Reynolds equation of compressible flow (Gross, 1962 and Charki, 2000). After introducing the dimensionless variables:

$$\bar{p} = \frac{p}{P_a}, \quad \bar{x} = \frac{x}{R}, \quad \bar{y} = \frac{y}{R}, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_o}, \quad \tau = \omega t, \quad P_a \text{ is the atmospheric}$$

pressure,  $\omega$  is the frequency,  $R$  is the outer radius of the bearing,  $h$  is the film gap,  $h_o$  is the reference film gap; with the isothermal perfect gas assumption, the Reynolds equation becomes:

$$\nabla(\bar{h} \bar{p} \nabla \bar{p} - \Lambda \bar{p} \bar{h}) = \sigma \frac{\partial(\bar{p} \bar{h})}{\partial \tau} \quad (5)$$

where  $\Lambda$  is the vector of compressibility and  $\sigma$  is the squeeze parameter. The solution is defined over a surface on which the boundary conditions are given by the pressure along the external boundary of the bearing and the mass flow rate  $q$  at the bearing inlet.

When the variational principle is employed to solve Eq. (5) with its boundary conditions, the problem is then reduced to the minimization of the function:

$$\delta F(\bar{p}) = \int_S \left( \bar{h}^3 \bar{p} \nabla \bar{p} \nabla \delta \bar{p} - \bar{p} \bar{h} \Lambda \nabla \delta \bar{p} + \sigma \frac{\partial(\bar{p} \bar{h})}{\partial \tau} \right) dS + \int_{\Gamma_q} \bar{q}_n \delta \bar{p} d\Gamma \quad (6)$$

where  $S$  is the surface of the fluid film,  $\Gamma_q$  is the border lines of the film and

$$\bar{q}_n = \bar{q} \cdot n = \bar{p} \bar{h} \Lambda \cdot \bar{h}^2 \nabla \bar{p} \cdot n.$$

The finite element method is used with linear triangular elements to find a function  $p$  that corresponds to the extremum in its exact continuous form. Then, the pressure distribution is obtained after discretizing the bearing fluid film surface. The calculation procedure is performed as follows:

1. Perform surface meshing by using the software Ideas<sup>TM</sup>.
2. Provide input parameters and boundary conditions: input feeding parameters are: supply pressure, inlet diameter, discharge coefficient, number of inlet and boundary conditions are: initial feeding pressure of

fluid film and atmospheric pressure, squeeze and compressibility parameters.

3. Perform static calculations and analyze results: flow rate, pressure distribution, load capacity and stiffness.

The pressure  $\bar{p}_r = \frac{P_r}{P_a}$  (where  $P_r$  is the outlet pressure of orifices) in the bearing

with orifices at the exit determine the flow rate through the orifice (Charki, 2000), which allows for the study of the influence of feeding parameters on the pressure in the fluid film (Frêne *et al.* 1990).

Using an adaptive mesh for calculations would require long computing times; therefore calculations are performed with a regular mesh where the feeding orifices are located at nodes of the meshing of fluid film geometry as shown Figure 3.

Figure 4 shows the pressure distribution obtained by the FEM.

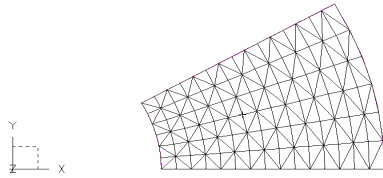


Figure 3. Fluid Film Meshing

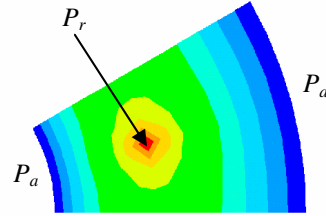


Figure 4. Pressure Distribution

Static characteristics are calculated for the configuration shown in Figure 1. The results enable us to study the influence of several design and working parameters on the characteristics of fluid film gap such as discharge coefficient, supply pressure, diameter and number of orifices and position of orifice rows and external load.

The dimensionless load capacity and stiffness versus the dimensionless fluid film gap are expressed as follows:

$$\bar{W}_e = \frac{W_e}{P_a R^2} = \int_s (\bar{p} - 1) dS \quad (7)$$

$$\bar{k}_e = \frac{h_o k_e}{P_a R^2} = -\frac{d\bar{W}_e}{dh} \quad (8)$$

Computationally, the gap and pressure step are chosen to be 0.05  $\mu\text{m}$  and 0.0001 bar respectively in order to reach a very small ratio error (to maintain the conservation of mass flow rate through orifices and in the fluid film gap). This aspect needs to be maintained especially for a very small gap approaching zero.

## 5. Application

In this section we demonstrate the use of the approach presented earlier in this paper to estimate the probability of the failure  $P_f$  of the bearing. The parameters and their corresponding values are shown in Table 1. We present the random variables (all assumed to have normal distribution with mean  $\mu$  and standard deviation  $\sigma$ ) that have an effect on the bearing performance in Table 2. Only three variables are considered in order not to have extensive computational time.

Thrust bearing parameters	
Outer radius R (mm)	45
Inner radius r (mm)	15
Reference gap $h_0$ ( $\mu\text{m}$ )	20
Radius of orifice row c (mm)	36.9
Diameter of the feeding orifice $d_o$ (mm)	0.15
Number of the orifices n	8
Number of the rows m	1
Pocket/Groove	No
Supply pressure $P_o$ (bar)	5
Atmospheric pressure $P_a$ (bar)	1
Coefficient of discharge $C_d$	0.7
Isotropic exponent $\gamma$ (bar)	1.4
Atmospheric pressure $p_a$ (bar)	1
Gas constant $\mathcal{R}$ ( $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ )	287
Dynamic viscosity $\mu$ (Pa.s)	$18.38 \cdot 10^{-6}$
Temperature at supply conditions ( $^{\circ}\text{K}$ )	293

Table 1. Nominal Values

Variable	$\mu$	$\Sigma$	Distribution
Diameter of the feeding orifice $d_o$ (mm)	0.15	0.015	Normal
Supply pressure $P_o$ (bar)	5	0.05	Normal
Coefficient of discharge $C_d$	0.7	0.01	Normal

Table 2. Random Variables Input

Table 3 shows the results obtained with different methods (MC and SRSM) using  $W_{e-\max} = 500$  N. The sample size in simulations is taken to be  $1 \cdot 10^4$ . SRSM offers the best alternative for the reliability assessment of fluid bearing problems through a finite element code. This last method proves to be computationally more efficient than full scale Monte Carlo Simulation.

<i>Method</i>	$P_f$	<i>CPU (s)</i>
MCS	0.491	3570
SRSM (2 <sup>nd</sup> order)	0.442	15

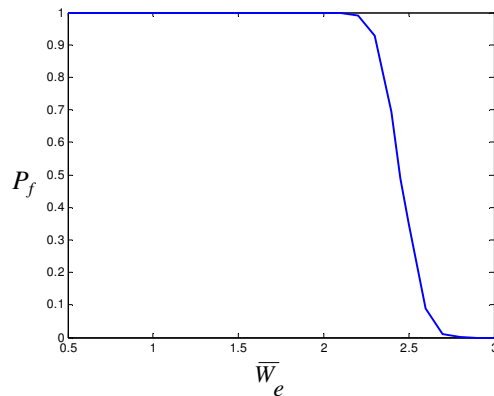
Table 3. Failure Probability  $P_f$  for Each Method

Figure 5. Failure Probability versus Dimensionless Load Capacity

Figure 5 presents the failure probability versus dimensionless load capacity of the film fluid bearing with the configuration of Table 1. The calculation is obtained by using SRSM. The analysis of this figure give us the critical margin of the load capacity not to use for a system design.

## 6. Conclusion

This paper presents an approach for the evaluation of failure probability of a complex fluid mechanical system which is modelled by the finite element method. The evaluation of failure probability is determined by two methods MCS and SRSM. The results show that the SRSM method provides a good estimate of failure probability in short computational times.

This approach proposed can be utilized for studying the reliability for other types of fluid bearings (hydrostatic, hydrodynamic, aerodynamic) and for other geometries (cylindrical, spherical).

## 7. References

Ayyub B. M. and McCuen R. H., 1997, *Probability, statistics & reliability for engineers*, CRC Press, New York.

- Bassani R., Ciulli E. and Forte P., 1989, Pneumatic stability of the integral aerostatic bearing: comparison with other types of bearing, *Tribology international*, Vol. 22, No. 6, 363-374.
- Boffey D. A., 1985, Experimental investigation into the performance of an aerostatic industrial thrust bearing, *Tribology international*, Vol. 18, No. 3, 165-168.
- Boffey D. A., 1981, An experimental investigation of the effect of orifice restrictor size on the stiffness of an industrial air lubricated thrust bearing, *Tribology international*, 287-291.
- Boffey D. A., 1981, An experimental investigation of the pressures at the Edge of a gas bearing pocket, *Journal of Lubrication Technology*, Vol. 103, 593-600.
- Boffey D. A., 1980, An experimental investigation into the rubber-stabilisation of an externally-pressurized air-lubricated thrust bearing, *Journal of Lubrication Technology*, Vol.120, 65-70.
- Bonis M. and Charki A., 2001, Modélisation des Caractéristiques Statiques et de la Stabilité des Paliers de Butée Aérostatiques par la Méthode des Eléments Finis, *Revue européenne des éléments finis*, Vol. 10, 755-767.
- Box G. E. P. and Draper N. R., 1987, *Empirical model building and response surfaces*, John Wiley and Sons, New York.
- Bucher C. G. and Bourgund U., 1990, A Fast and Efficient Response Surface Approach for Structural Reliability Problems, *Structural Safety*, 7 57-66.
- Charki A., 2000, Modélisation du Comportement Statique et Dynamique des Paliers à Air à Orifices – Application à la Conception de Broches, thèse de doctorat, University of Technology of Compiègne, France.
- Charki A., Bonis M., Fourka M. and Pavol S., 1999, Static and Dynamic Characteristics of Thrust Air Bearings with Grooves or Orifices, *First International Conference of Euspen*, Bremen.
- Dodson B. and Nolan D., 1999, *Reliability engineering handbook*, Marcel Dekker Inc., New York.
- El Tawil K., Lemaire M. and Muzeau J-P., 1991, Reliability Method to Solve Mechanical Problems with Implicit Limit States, *Fourth IFIP WG 7.5 Working Conference*, Munich, 11-13.

Fourka M., Tian Y. and Bonis M., 1996, Prediction of the Stability of Air Thrust Bearings by Numerical, Analytical and Experimental Methods, *Wear*, Vol. 198, 1-6.

Fox E. P., 1994, The Pratt and Whitney Probabilistic Design System, *AIAA-94-1442-CP*.

Frêne J., Nicolas D., Degueurce B., Berthe D. and Godet M., 1990, Lubrification Hydrodynamique, *Paliers et Butées*, Edition Eyrolles, Paris.

Gavin H. P. and Yau S. C., 2007, High-Order Limit State Functions in the Response Surface Method for Structural Reliability Analysis, *Structural Safety*.

Gorla R. S. R., Pai. S. S. and Rusick J. J., 2003, Probabilistic Study of Fluid Structure Interaction, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 41, 271-282.

Gross A. A., 1962, *Gas Film Lubrication*, Wiley, New York, 54-83.

Guan K. L. and Melchers R. E., 2001, Effect of Response Surface Parameter Variation on Structural Reliability Estimates, *Structural Safety*, Vol. 23, 429-444.

Gupta S. and Manohar C. S., 2004, An Improved Response Surface Method for the Determination of Failure Probability and Importance Measures. *Structural Safety*, Vol. 26, 123-139.

Hurtado J. E., 2004, An Examination of Methods for Approximating Implicit Limit State Functions from the Viewpoint of Statistical Learning Theory, *Structural Safety*, 26, 271-293.

Licht L and Elrod H., 1960, A Study of the Stability of Externally Pressurized Gas Bearings, *Journal of Applied Mechanics*, 250-258.

Lin G., Aoyama T. and Inasaki I., 1988, A Computer Simulation Method for Dynamic and Stability Analyses of Fluid Bearings, *Wear*, Vol. 126, 307-319.

Madsen H. O., Krenk S. and Lind N. C., 1986, *Structural method of safety*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

Melchers R. E., 1999, *Structural Reliability Analysis and Prediction*, Second Edition. John Wiley & Sons, New York.

Nilsen T., Gutmestad O. T., Dalane J. L., Rettedal W. K. and Aven T., 1998, Utilisation of Principles from Structural Reliability in Quantitative Risk Analysis: Example from an Offshore Transport Problem, *Journal of Reliability Engineering & System Safety*, No. 61, 27-137.

Rajashekhar M. R. and Ellingwood B. R., 1993, A new look at the Response Surface Approach for Reliability Analysis, *Structural Safety*, Vol. 12, 205-220.

Roblee J. W., 1985, Design of Externally Pressurized Gas Bearings for Dynamic Applications, Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, CA.

Stiffler A. K., 1974, Analysis of the Stiffness and Damping of an Inherently Compensated, Multiple-inlet, Circular Thrust Bearing, *Journal of Lubrication Technology*, 329-336.



## **Développements par chaos polynomiaux creux et adaptatifs - application à l'analyse de fiabilité.**

G. Blatman, B. Sudret

---

---

# Développements par chaos polynomiaux creux et adaptatifs – Application à l’analyse de fiabilité

Géraud Blatman <sup>\*,\*\*</sup> — Bruno Sudret<sup>\*\*</sup>

*\* IFMA-LaMI,  
Campus des Cézeaux  
F-63175 Aubière Cedex*

*\*\* EDF R&D, Département Matériaux et Mécanique des Composants  
Site des Renardières,  
F-77818 Moret-sur-Loing*

---

*ABSTRACT. A method is proposed to build a sparse polynomial chaos (PC) expansion of a mechanical model whose input parameters are random. In this respect, an adaptive algorithm is described for automatically detecting the significant coefficients of the PC expansion. The latter can thus be computed by means of a relatively small number of possibly costly model evaluations, using a non intrusive regression scheme. The method is illustrated by a simple polynomial model as well as the example of the reliability of a frame structure.*

*RÉSUMÉ. Dans cette communication, on propose un algorithme permettant de construire une représentation par chaos polynomial creux de la réponse d’un modèle mécanique dont les paramètres d’entrée sont aléatoires. L’algorithme construit de façon adaptative une représentation creuse en détectant automatiquement les termes importants et en supprimant ceux qui sont négligeables. A chaque étape, le calcul des coefficients s’effectue par minimisation au sens des moindres carrés (méthode non intrusive dite de régression). L’algorithme est déroulé pas à pas sur un modèle polynomial, puis appliqué à l’étude de la fiabilité d’une ossature de bâtiment.*

*KEYWORDS: Uncertainty propagation, stochastic finite elements, sparse polynomial chaos expansion, nested Latin Hypercube design*

*MOTS-CLÉS : Propagation d’inertitudes, éléments finis stochastiques, chaos polynomial creux, nested Latin Hypercube design*

---

## 1. Introduction

Polynomial chaos (PC) expansions allow one to represent explicitly the random response of a mechanical system whose input parameters are modelled by random variables. The PC coefficients may be efficiently computed using *non intrusive* techniques such as projection (GHI 02) or regression (BER 06). However, the required number of model evaluations (*i.e.* the computational cost) increases with the PC size, which itself dramatically increases with the number of input variables when the common truncation scheme of the PC expansion is applied (*i.e.* retain all the multivariate polynomials of total degree not greater than prescribed  $p$ ). To circumvent this problem, an adaptive algorithm is proposed in order to retain only the significant PC coefficients, leading to a sparse PC representation. The reader may also refer to the *stochastic reduced basis* technique proposed by (NOU 07), as well as the adaptive scheme described in (CHO 07) that makes use of statistical tests that are commonly used in experimental regression.

Beside the adaptivity in terms of PC basis, the experimental design is systematically completed prior to performing regression so that the information matrix is well-conditioned. This is achieved by using an original sampling scheme, namely the *Nested Latin Hypercube Design* (NLHD) technique, which is inspired from a method described in (WAN 03).

The basics of PC expansion is first recalled in Section 2. Then error estimates for assessing the PC approximation are proposed in Section 3. The sparse PC representation and the associated adaptive algorithm are then detailed in Section 4. The method is finally applied to the study of the reliability of a frame structure involving 21 correlated input random variables.

## 2. Polynomial chaos approximation of the response of a model with random input parameters

Consider a mechanical system described by a numerical model  $\mathcal{M}$  which can be analytical or more generally algorithmic (*e.g.* a finite element model). Suppose that this model has  $M$  uncertain input parameters which are represented by *independent* random variables  $(X_1, \dots, X_M)$  gathered in a random vector  $\mathbf{X}$  of prescribed joint probability density function  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ . Hence the model response denoted by  $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$  is also random. For the sake of simplicity,  $Y$  is assumed to be scalar throughout the paper (in case of a vector response  $\mathbf{Y}$ , the following derivations hold component-wise). Provided that the random variable  $Y$  has finite variance, it can be expressed as follows (SOI 04):

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^M} a_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \quad (1)$$

This expansion is referred to as the *finite-dimensional polynomial chaos* (PC) *representation* of  $Y$ . The  $a_{\alpha}$ 's are unknown deterministic coefficients and the  $\psi_{\alpha}$ 's are multivariate polynomials which are orthonormal with respect to the joint PDF  $f_{\mathbf{X}}$  of

the input random vector  $\mathbf{X}$ , *i.e.*  $E[\psi_\alpha(\mathbf{X})\psi_\beta(\mathbf{X})] = 1$  if  $\alpha = \beta$  and 0 otherwise. For instance, if  $\mathbf{X}$  is a standard normal random vector, the  $\psi_\alpha$  are normalized multi-variate Hermite polynomials.

The PC coefficients can be estimated using a non intrusive regression scheme (Cho 04; BER 06; SUD 07). This method requires the choice of a truncation of the PC *ab initio*, *i.e.* a non empty finite set  $\mathcal{A} = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{P-1}\} \subset \mathbf{N}^M$  which contains the multi-indices of the retained basis polynomials  $\psi_{\alpha_0}, \dots, \psi_{\alpha_{P-1}}$ .  $\mathcal{A}$  is referred to as the *truncation set* in the sequel. The corresponding PC approximation is denoted by  $Y_{\mathcal{A}} \equiv \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} a_\alpha \psi_\alpha(\mathbf{X})$  which rewrites  $Y_{\mathcal{A}} = \mathbf{a}^\top \boldsymbol{\psi}(\mathbf{X})$ , by introducing the vector notation:

$$\mathbf{a} = \{a_{\alpha_0}, \dots, a_{\alpha_{P-1}}\}^\top, \quad \boldsymbol{\psi}(\mathbf{X}) = \{\psi_{\alpha_0}(\mathbf{X}), \dots, \psi_{\alpha_{P-1}}(\mathbf{X})\}^\top \quad (2)$$

Let us consider a set of realizations of  $\mathbf{X}$  denoted by  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}\}$  and referred to as the *experimental design* (ED). Let us denote by  $\mathcal{Y}$  the associated set of model response, say  $\mathcal{Y} = \{\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(1)}), \dots, \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(N)})\}$ . The unknown coefficients  $\mathbf{a}$  may be computed by performing a least-square minimization (BER 06), *i.e.* by minimizing the mean-square truncation error  $1/N \sum_{i=1}^N (\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{(i)}))^2$ . Using the above notation the solution reads:

$$\hat{\mathbf{a}} = (\boldsymbol{\Psi}^\top \boldsymbol{\Psi})^{-1} \boldsymbol{\Psi}^\top \mathcal{Y} \quad (3)$$

where  $\boldsymbol{\Psi}$  is a  $N \times P$  matrix such that  $\boldsymbol{\Psi}_{ij} = \psi_{\alpha_j}(\mathbf{x}^{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, P-1$ . The size  $N$  of the ED must be greater than  $P$  to make this problem well posed. For practical implementation, the series in Eq.(1) is commonly truncated by retaining those polynomials  $\psi_\alpha$  whose total degree  $|\alpha|$  is less than  $p$ . This leads to the truncation set  $\mathcal{A}^{M,p} = \{\alpha \in \mathbf{N}^M : \sum_{i=1}^M \alpha_i \leq p\}$ . Accordingly, the number of PC terms is given by  $P = \text{card}(\mathcal{A}^{M,p}) = \binom{M+p}{p}$ . Hence it dramatically increases with both  $p$  and  $M$ . Consequently, the minimal size of the ED that is required for an accurate solution of the regression problem (SUD 08) blows up. Thus increasing the accuracy of the PC expansion may lead to intractable calculations in high dimensions. Nevertheless, as all the input variables do not have the same influence on the response and as only low order interactions are physically meaningful in practice, both  $P$  and  $N$  might be reduced by only retaining a small number of important coefficients, *i.e.* by an appropriate choice of a *sparse* truncation set  $\mathcal{A} \subset \mathbf{N}^M$  such that  $\text{card } \mathcal{A} \ll \text{card } \mathcal{A}^{M,p}$  for a given accuracy.

### 3. Assessment of the polynomial chaos approximation

#### 3.1. Empirical error

Let us denote by  $\widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}$  the  $\mathcal{A}$ -truncated PC expansion whose coefficients have been computed by regression from a given ED  $\mathcal{X}$ . In practice, the approximation error is usually estimated by the *empirical error* defined by:

$$I_{\mathcal{X}}[\widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{(i)}) \right)^2 \quad (4)$$

Of common use is the related *determination coefficient* which reads:

$$R^2[\widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}] = 1 - \frac{I_{\mathcal{X}}[\widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}]}{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \bar{y})^2} \quad (5)$$

where  $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)})$ . The value  $R^2 = 1$  thus indicates a perfect fit of the true model response. However the use of the  $R^2$  statistic might be misleading since it tends to 1 as  $P$  increases. It then typically underestimates the true approximation error when  $N$  is too close from  $\text{card}(\mathcal{A})$ . Consequently a more robust error estimate is now considered.

#### 3.2. Leave-one-out error

Let  $\widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{X} \setminus i}$  be the metamodel that has been built from the experimental design  $\mathcal{X} \setminus \{\mathbf{x}^{(i)}\} \equiv \mathcal{X} \setminus i$ , i.e. when removing the  $i$ -th observation from the training set  $\mathcal{X}$ . The *predicted residual* is defined as the difference between the model evaluation at  $\mathbf{x}^{(i)}$  and its prediction based on  $\widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{X} \setminus i}$ :

$$\Delta^{(i)} = \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{X} \setminus i}(\mathbf{x}^{(i)}) \quad (6)$$

The approximation error is then estimated by the so-called *leave-one-out error* (see e.g. (ELI 02)) that reads:

$$I_{\mathcal{X}}^*[\widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left( \Delta^{(i)} \right)^2 \quad (7)$$

The corresponding determination coefficient (with analogy to its empirical counterpart  $R^2$ ) is often denoted by  $Q^2$ :

$$Q^2[\widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}] = 1 - \frac{I_{\mathcal{X}}^*[\widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}]}{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \bar{y})^2} \quad (8)$$

In our context of linearly parametrized regression, it is possible to calculate analytically the  $Q^2$  statistic since it can be shown that:

$$I_{\mathcal{X}}^*[\widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{(i)})}{1 - h_i} \right)^2 \quad (9)$$

where  $h_i$  is the  $i$ -th diagonal term of the matrix  $\Psi(\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T$ .

## 4. Adaptive sparse polynomial chaos approximation

### 4.1. Sparse polynomial chaos approximation

Let  $\mathcal{A}$  be a non empty finite subset of  $\mathbb{N}^M$ . The associated truncated PC expansion reads:

$$Y \approx \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} a_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \quad (10)$$

If the set  $\mathcal{A}$  is parcimonious, the metamodel (10) is referred to as *sparse* PC approximation.

The *degree* and the *interaction order* of any multi-index  $\alpha$  in  $\mathcal{A}$  are respectively defined by  $p_{\alpha} = |\alpha| = \sum_{i=1}^M \alpha_i$  and  $j_{\alpha} = \sum_{i=1}^M \mathbf{1}_{\alpha_i > 0}$  (where  $\mathbf{1}_{\alpha_i > 0} = 1$  if  $\alpha_i > 0$  and 0 otherwise).

### 4.2. Adaptive algorithm to construct a sparse PC approximation

#### 4.2.1. Adaptive algorithm using a fixed ED

An iterative procedure is now presented for building a PC approximation of the system response using a *fixed* ED:

- 1) Choose an ED  $\mathcal{X}$  and perform the model evaluations  $\mathcal{Y}$  once and for all.
- 2) Select the values of the algorithm parameters, *i.e.* the target accuracy  $Q_{tgt}^2$ , the maximal PC degree  $p_{max}$  and maximal interaction order  $j_{max}$  and the cut-off values  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ .
- 3) Initialize the algorithm:  $p = 0$ , truncation set  $\mathcal{A}^0 = \{\mathbf{0}\}$ , where  $\mathbf{0}$  is the null element of  $\mathbb{N}^M$ .
- 4) For any degree  $p \in \{1, \dots, p_{max}\}$ :
  - **Forward step:** for any interaction order  $j \in \{1, \dots, j_{max}\}$ , gather the candidate terms in a set  $\mathcal{I}_{j,p}$ . Add each candidate term to  $\mathcal{A}^{p-1}$  *one-by-one* and compute the PC expansion coefficients by regression (Eq.(3)) and the associated determination coefficient  $R^2$  in each case. Retain eventually those candidate terms that lead to a significant increase in  $R^2$ , *i.e.* greater than  $\varepsilon_1$ , and discard the other candidate terms. Let  $\mathcal{A}^{p,+}$  be the final truncation set at this stage. Compute the corresponding  $Q^2$  coefficient.
  - **Backward step:** remove in turn each term in  $\mathcal{A}^{p,+}$  of degree not greater than  $p$ . In each case, compute the PC expansion coefficients and the associated determination coefficient  $R^2$ . Eventually discard from  $\mathcal{A}^{p,+}$  those terms that lead to an insignificant decrease in  $R^2$ , *i.e.* less than  $\varepsilon_2$ . Let  $\mathcal{A}^p$  be the final truncation set. Compute the corresponding  $Q^2$  coefficient.
  - If  $Q_{\mathcal{A}^p}^2 \geq Q_{tgt}^2$ , stop.

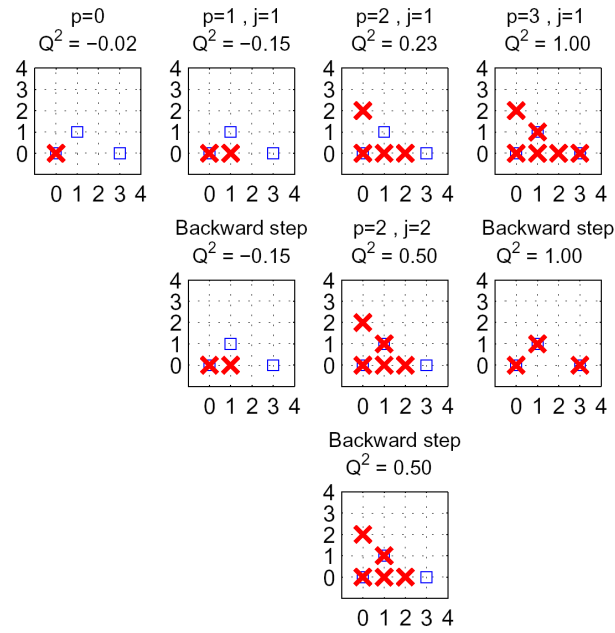
Note that the regression calculations only involve analytical derivations (see Eq.(3)), so their computational cost is small or negligible with respect to the model evaluations on the ED. Besides, the  $R^2$  coefficient is used for comparing candidate PC expansions since it is more efficient than  $Q^2$  in this purpose according to the authors' experience.

#### 4.2.2. Step-by-step run of the algorithm using a polynomial model

The iterative procedure detailed above is illustrated by the following simple polynomial model:

$$Y = \mathcal{M}(\xi_1, \xi_2) = 1 + H_1(\xi_1)H_1(\xi_2) + H_3(\xi_1) \quad (11)$$

where  $H_j$  represents the Hermite polynomial of degree  $j$  ( $j = 1, \dots, 3$ ) and  $\xi_1, \xi_2$  are independent standard Gaussian random variables. A random design made of  $N = 100$  Latin Hypercube samples (see e.g. (MCK 79)) is used. The various steps of the PC construction are illustrated in Figure 1.



**Figure 1.** Polynomial model - Step-by-step construction of the sparse PC approximation. The iterations on the interaction order  $j$  and the PC total degree  $p$  are respectively displayed from top to bottom and from left to right. Squares represent the original polynomial to be recovered. Crosses represent the current PC expansion at each step.

#### 4.2.3. Adaptive algorithm using a sequential ED

It can be noticed that the proposed algorithm may stop prior to reaching the target accuracy if the information matrix gets ill conditioned, *i.e.* if the size of the ED is too small compared to the number of retained terms in the PC representation. Note that it is difficult to select a suitable size for the ED *a priori*.

In order to circumvent this problem, the experimental design is systematically completed prior to performing regression so that the information matrix is well-conditioned.

This is achieved by using an original sampling scheme, namely the *Nested Latin Hypercube Sampling* (NLHS) technique, which is inspired from a method described in (WAN 03). NLHS is aimed at building experimental designs from an initial LHS by recycling all the previous samples and by adding points such that the new set has almost a LHS structure (see (BLA 08) for more details).

If the information matrix is ill-conditioned:

- the experimental design is enriched until the information matrix gets well-conditioned;
- the iterative construction is then restarted, so that all the added information can be used to build step-by-step the sparse structure of the PC expansion.

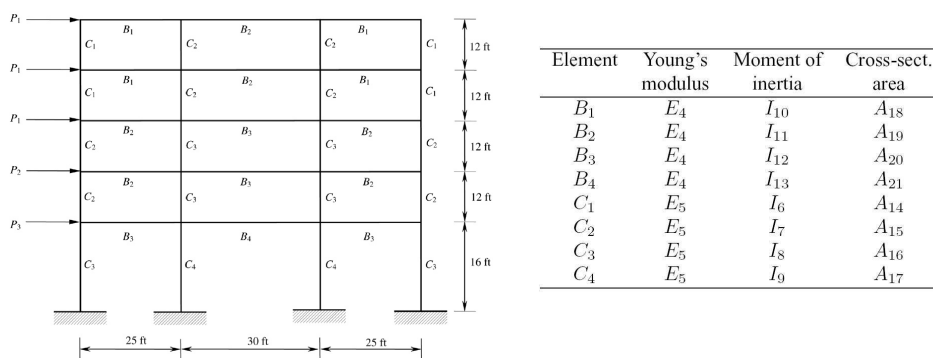
## 5. Reliability analysis of a frame structure

### 5.1. Problem statement

Let us consider the structure sketched in Figure 2, already studied in (LIU 91; WEI 07). It is a three-span, five-story frame structure subjected to horizontal loads. The response of interest is the horizontal component of the top-floor displacement at the top right corner, which is denoted by  $u$ .

The 3 applied loads and the 2 Young's moduli, the 8 moments of inertia and the 8 cross-section areas of the frame components are assumed to be random. They are gathered into the random vector  $\mathbf{X} = (P_1, P_2, P_3, \dots, I_6, \dots, I_{13}, A_{14}, \dots, A_{21})$  of size  $M = 21$ .

The properties of the random variables are reported in Table 1.



**Figure 2.** Frame structure - Problem statement



**Table 1.** Frame structure - Input random variables properties

Variable	Distribution	Mean	Standard Deviation
$P_1$ (kN)	Lognormal	133.454	40.04
$P_2$ (kN)	"	88.97	35.59
$P_3$ (kN)	"	71.175	28.47
$E_4$ (kN/m <sup>2</sup> )	Truncated Gaussian over $[0, +\infty)$	$2.1738 \times 10^7$	$1.9152 \times 10^6$
$E_5$ (kN/m <sup>2</sup> )	"	$2.3796 \times 10^7$	$1.9152 \times 10^6$
$I_6$ (m <sup>4</sup> )		$8.1344 \times 10^{-3}$	$1.0834 \times 10^{-3}$
$I_7$ (m <sup>4</sup> )		$1.1509 \times 10^{-2}$	$1.2980 \times 10^{-3}$
$I_8$ (m <sup>4</sup> )		$2.1375 \times 10^{-2}$	$2.5961 \times 10^{-3}$
$I_9$ (m <sup>4</sup> )		$2.5961 \times 10^{-2}$	$3.0288 \times 10^{-3}$
$I_{10}$ (m <sup>4</sup> )	"	$1.0812 \times 10^{-2}$	$2.5961 \times 10^{-3}$
$I_{11}$ (m <sup>4</sup> )		$1.4105 \times 10^{-2}$	$3.4615 \times 10^{-3}$
$I_{12}$ (m <sup>4</sup> )		$2.3279 \times 10^{-2}$	$5.6249 \times 10^{-3}$
$I_{13}$ (m <sup>4</sup> )		$2.5961 \times 10^{-2}$	$6.4902 \times 10^{-3}$
$A_{14}$ (m <sup>2</sup> )		$3.1256 \times 10^{-1}$	$5.5815 \times 10^{-2}$
$A_{15}$ (m <sup>2</sup> )		$3.7210 \times 10^{-1}$	$7.4420 \times 10^{-2}$
$A_{16}$ (m <sup>2</sup> )		$5.0606 \times 10^{-1}$	$9.3025 \times 10^{-2}$
$A_{17}$ (m <sup>2</sup> )		$5.5815 \times 10^{-1}$	$1.1163 \times 10^{-1}$
$A_{18}$ (m <sup>2</sup> )	"	$2.5302 \times 10^{-1}$	$9.3025 \times 10^{-2}$
$A_{19}$ (m <sup>2</sup> )		$2.9117 \times 10^{-1}$	$1.0232 \times 10^{-1}$
$A_{20}$ (m <sup>2</sup> )		$3.7303 \times 10^{-1}$	$1.2093 \times 10^{-1}$
$A_{21}$ (m <sup>2</sup> )		$4.1860 \times 10^{-1}$	$1.9537 \times 10^{-1}$

The mean value and standard deviation of the cross sections, moments of inertia and Young's moduli are those of the original Gaussian distributions before truncation

Moreover the various input random variables are correlated. Let  $F_i(x)$  be the marginal CDF of the  $i$ -th variable. The joint PDF of  $\mathbf{X}$  is defined by:

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_M) = \Phi_{M, \mathbf{R}} [\Phi^{-1}(F_1(x_1)), \dots, \Phi^{-1}(F_M(x_M))] \quad (12)$$

where  $\Phi_{M, \mathbf{R}}$  is the standard Gaussian CDF of dimension  $M$  and correlation matrix  $\mathbf{R}$ ,  $\Phi$  is the unidimensional standard Gaussian CDF and the  $F_i$  are the marginal CDFs of the random variables  $X_i$  (Nataf distribution (NAT 62)). Let  $\hat{\xi} = \{\hat{\xi}_i = \Phi^{-1}(F_i(X_i)), i = 1, \dots, M\}$  denote the *correlated* standard Gaussian random variables which appear in Eq.(12). The correlation matrix  $\mathbf{R}$  of  $\hat{\xi}$  is defined as follows:

- the  $\hat{\xi}_i$ 's associated with the cross-sectional area and the moment of inertia of a same element are correlated by  $\rho = 0.95$ ;
- otherwise the  $\hat{\xi}_i$ 's corresponding to geometrical properties are correlated by  $\rho_{A_i, I_j} = \rho_{I_i, I_j} = \rho_{A_i, A_j} = 0.13$ ;
- the  $\hat{\xi}_i$ 's related to the two Young's moduli are correlated by  $\rho = 0.9$ ;
- the remaining correlation coefficients in  $\mathbf{R}$  are zero.

The model response can be eventually recast as a function of *independent* standard Gaussian random variables by means of the Cholesky decomposition of the correlation matrix  $\mathbf{R}$ .

## 5.2. Reliability analysis

Let us study the serviceability of the frame structure with respect to the limit state function:

$$g(\mathbf{X}) = u_{max} - \mathcal{M}(\mathbf{X}) \quad , \quad u_{max} = 6.1 \text{ cm} \quad (13)$$

It is approximated using a PC expansion  $\mathcal{M}_A$  made of normalized Hermite polynomials. A reference value of the probability of failure  $P_f$  is obtained by FORM (198 calls to the model are performed) followed by importance sampling (53,240 model evaluations are used to get a coefficient of variation of 1.0% on  $P_f$ ). The reference value is thus equal to  $\widehat{P}_{f_{REF}} \simeq 1.86 \cdot 10^{-4}$ , hence the reference reliability index  $\widehat{\beta}_{REF} = -\Phi^{-1}(\widehat{P}_{f_{REF}}) = 3.56$ .

On the other hand, estimates of the reliability index are computed by post-processing full Hermite PC expansions with degree  $p$  varying from 1 to 3. The PC coefficients are evaluated using random LHS designs whose size is set heuristically equal to  $N = 2P$ , where  $P = \text{card}(\mathcal{A}^{M,p})$ .

**Table 2.** Frame structure - Estimates of the reliability index by full PC expansions

PC order	$1 - \widehat{Q}^2$	$N$	$P$	$\widehat{\beta}$
$p = 1$	$1 \cdot 10^{-1}$	44	22	6.74
$p = 2$	$6 \cdot 10^{-3}$	506	253	3.94
$p = 3$	$5 \cdot 10^{-4}$	4,048	2,024	3.66
Reference		54,438	-	3.56

The results are gathered in Table 2. The best estimate is obviously provided by the third-order PC approximation, with a relative error of 2.8% on  $\beta$ .

As an alternative, the reliability index is computed from sparse PC expansions using the iterative algorithm. In this respect, the maximum PC degree is set equal to 5 and the maximum interaction order to 2. An initial LHS design of size  $N = 300$  is used. The results are reported in Table 3. The best estimate of the reliability index is obtained when setting the target error and the cut-off values respectively equal to  $10^{-3}$  and  $5 \cdot 10^{-3}(1 - Q_{tgt}^2) = 5 \cdot 10^{-6}$ . The relative error is then equal to 2.5% with respect to the reference value. The related sparse PC expansion thus overperforms the full third-order PC approximation (whose size is now denoted by  $P_{full}$ ) with a computational gain factor ranging from 4 (when using the minimal number of samples that theoretically allows to compute the full PC coefficients by regression, *i.e.*  $N = P_{full} = 2,024$ ) to 9 (when using the heuristic rule  $N = 2P_{full} = 4,048$ ). Setting the cut-off values equal to  $10^{-3}(1 - Q_{tgt}^2) = 10^{-6}$  yielded a better accuracy  $\widehat{Q}^2$  but did not improve the accuracy of the  $\widehat{\beta}$  estimate as it could have been expected. Note that the reference probability of failure is relatively low, *i.e.*  $P_f \propto 10^{-4}$ . This may explain why no monotonic convergence of the  $\widehat{\beta}$  estimate has been observed

**Table 3.** Frame structure - Estimates of the reliability index by sparse PC expansions using a sequential NLHS design (the cut-off values are set equal to  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \alpha(1 - Q_{tgt}^2)$ )

Algorithm parameters		Algorithm output				Reliability index
$1 - Q_{tgt}^2$	$\alpha \times 10^3$	$1 - \widehat{Q}^2$	$N$	$P$	$p$	$\widehat{\beta}$
$10^{-2}$	5	$6 \cdot 10^{-3}$	300	137	2	4.13
$10^{-3}$	5	$1 \cdot 10^{-3} *$	450	158	5	3.65
$10^{-3}$	1	$7 \cdot 10^{-4}$	1,404	488	5	3.68
Reference			54,438	-		3.56

\* Algorithm was stopped because the maximum degree was reached

when the error estimate  $1 - \widehat{Q}^2$  decreases. Indeed,  $\widehat{Q}^2$  estimates the global fitting of the metamodel whereas it is the tails that should be approximated more properly for reliability analysis.

## 6. Conclusion

A method is proposed to build iteratively a PC expansion of the random response of a model with random input parameters. It is based on an adaptive algorithm which automatically detects the significant PC terms, leading to a sparse PC representation. Moreover, the ED is systematically enriched so that the information matrix is always well-conditioned. The NLHS scheme is used to this end. The retained PC coefficients can eventually be computed efficiently by regression using a rather low number  $N$  of model evaluations compared to what would be required to compute a “full” PC approximation. The step-by-step application of the algorithm to a polynomial model  $\mathcal{M}$  shows that it satisfactorily yields the exact solution in this case. The frame example shows that the algorithm may be used for solving structural reliability problems. Accurate results may be obtained in reliability analysis using less runs of the (FE) model than compared to full PC expansions. In further investigation, estimates dedicated to assessing the fit of the PC expansions in the tails of the response PDF will allow to tackle problems involving higher reliability indices, say  $\beta > 4$ . The classical response surface methodology used for FORM (see *e.g.* (LEM 05)) might be relevant to address this problem.

## References

- [BER 06] BERVEILLER M., SUDRET B., LEMAIRE M., “Stochastic finite elements: a non intrusive approach by regression”, *Eur. J. Comput. Mech.*, vol. 15, num. 1-3, 2006, p. 81-92.
- [BLA 08] BLATMAN G., SUDRET B., “Adaptive sparse polynomial chaos expansions using a regression approach”, report num. H-T26-2008-00668-EN, 2008, EDF R&D.

- [Cho 04] CHOI S., GRANDHI R., CANFIELD R., “Structural reliability under non-Gaussian stochastic behavior”, *Computers & Structures*, vol. 82, 2004, p. 1113-1121.
- [CHO 07] CHOI S.-K., GRANDHI R., CANFIELD R., *Reliability-based structural design*, Springer-Verlag, London, 2007.
- [ELI 02] ELISSEFF A., PONTIL M., “Leave-one-out error and stability of learning algorithms with applications”, J. SUYKENS G. H., ET. AL S. B., Eds., *Learning Theory and Practice*, NATO ASI Series, IOS Press, Amsterdam, 2002.
- [GHI 02] GHIOCEL D., GHANEM R., “Stochastic finite element analysis of seismic soil-structure interaction”, *J. Eng. Mech.*, vol. 128, 2002, p. 66-77.
- [LEM 05] LEMAIRE M., *Fiabilité des structures – Couplage mécano-fiabiliste statique*, Hermès, 2005.
- [LIU 91] LIU P.-L., DER KIUREGHIAN A., “Optimization algorithms for structural reliability”, *Structural Safety*, vol. 9, 1991, p. 161-177.
- [MCK 79] MCKAY M. D., BECKMAN R. J., CONOVER W. J., “A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code”, *Technometrics*, vol. 2, 1979, p. 239-245.
- [NAT 62] NATAF A., “Détermination des distributions dont les marges sont données”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 225, 1962, p. 42-43.
- [NOU 07] NOUY A., “A generalized spectral decomposition technique to solve stochastic partial differential equations”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2007, Submitted for publication.
- [SOI 04] SOIZE C., GHANEM R., “Physical systems with random uncertainties: chaos representations with arbitrary probability measure”, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 26, num. 2, 2004, p. 395-410.
- [SUD 07] SUDRET B., “Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models – Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods”, 2007, Habilitation à diriger des recherches, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France.
- [SUD 08] SUDRET B., “Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions”, *Reliab. Eng. Sys. Safety*, , 2008, In press.
- [WAN 03] WANG G., “Adaptive Response Surface Method Using Inherited Latin Hypercube Design Points”, *J. Mech. Design*, vol. 125, 2003, p. 210-220.
- [WEI 07] WEI D., RAHMAN S., “Structural reliability analysis by univariate decomposition and numerical integration”, *Probabilist. Eng. Mech.*, vol. 22, 2007, p. 27-38.

**Méthode éléments finis stochastiques étendus pour la prise en compte des incertitudes géométriques dans le calcul de structures.**

A. Clément, A. Nouy, F. Schoefs

---

---

# Méthode éléments finis stochastiques étendus pour la prise en compte des incertitudes géométriques dans le calcul de structures

Alexandre Clément, Anthony Nouy, Franck Schoefs

*Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM)  
Université de Nantes, Ecole Centrale de Nantes  
UMR CNRS 6183, France  
anthony.nouy@univ-nantes.fr*

---

*RÉSUMÉ. Les méthodes éléments finis stochastiques offrent un outil robuste pour la prise en compte dans le calcul de structure des aléas sur les propriétés matériaux et les chargements. L'aléa portant sur la géométrie reste cependant un point mal maîtrisé dans le cadre de ces techniques. Afin de répondre à cette problématique, nous proposons une méthode basée sur une extension au cadre stochastique de la méthode éléments finis étendus (X-FEM). Cette méthode repose sur l'utilisation de level sets aléatoires pour la description implicite de la géométrie et sur l'enrichissement des espaces d'approximation. Deux méthodes de projections sont utilisées pour la définition de l'approximation stochastique et comparées à l'aide d'un exemple numérique simple.*

*ABSTRACT. In structural analysis, stochastic finite element methods offer a robust tool to deal with randomness on material properties or loadings. Unfortunately, there is still no available efficient strategy to deal with uncertainties on the geometry. Here, we bring an answer to this problem by proposing a method based on an extension to the stochastic framework of the eXtended Finite Element Method (X-FEM). This method lies on the use of level set technique for the implicit description of the random geometry and on the enrichment of the approximation spaces. Two projection methods are used to define the stochastic approximation and compared with a simple numerical example.*

*MOTS-CLÉS : Calcul stochastique, X-FEM, chaos polynomial, géométrie aléatoire*

*KEYWORDS: Computational stochastic mechanics, X-FEM, polynomial chaos, random geometry*

---

## 1. Introduction

La prise en compte d'incertitudes liées aux propriétés matérielles, aux chargements, ou à la géométrie dans le calcul de structure apparaît aujourd'hui indispensable si l'on cherche à obtenir des prédictions numériques fiables. Cette nécessité a conduit à un développement rapide de méthodes numériques ad-hoc, telles que la méthode des éléments finis stochastiques [GHA 91, BAB 05]. Ces méthodes conduisent à des solutions d'une grande précision qui sont explicites en fonction des variables aléatoires décrivant les sources d'aléa. Cependant, il n'existe pas encore de méthode efficace pour résoudre des problèmes mécaniques où l'aléa porte sur la géométrie bien que cette problématique soit rencontrée dans de nombreuses applications : modélisation des aléas sur un procédé de fabrication, sur des pertes de matières, sur la géométrie de la micro-structure d'un matériau hétérogène, etc.

Une manière naturelle de résoudre des problèmes stochastiques définis sur un domaine aléatoire est d'utiliser un code éléments finis déterministe couplé à une méthode stochastique classique telle que les approches de Monte-Carlo ou la méthode des surfaces de réponse. Cependant, ces approches nécessitent un nombre important de calculs déterministes pour lesquels un maillage conforme de la géométrie doit être systématiquement créé. Dans le cas de problèmes à géométrie aléatoire, elles conduisent alors à des coûts de calcul trop élevés et ne permettent pas d'obtenir une description explicite de la solution.

Récemment, une nouvelle méthode éléments finis stochastiques a été proposée pour la résolution de ce type de problème [NOU 07b, NOU 08]. Cette méthode, baptisée eXtended Stochastic Finite Element Method (X-SFEM), est basée sur l'extension au cadre stochastique de la méthode X-FEM [MOE 99, SUK 01]. Cette technique repose sur deux points importants. Le premier point est l'utilisation de la technique des level-set [SET 99] permettant une représentation implicite de la géométrie. Le domaine aléatoire est alors caractérisé par une fonction level-set aléatoire qui est définie sur un domaine fictif contenant toutes les réalisations possibles du domaine physique. Le second point repose sur l'utilisation d'une approximation éléments finis au niveau spatial et d'une approximation sur le chaos polynomial généralisé au niveau stochastique. Pour la définition de l'approximation, deux méthodes seront présentées et comparées : une méthode de projection de Galerkin et une méthode de projection au sens de  $L^2$ .

Dans cet exposé, nous rappellerons les bases de la méthode, initialement développée pour les problèmes de formes aléatoires, dans le cadre de l'élasticité linéaire. Nous présenterons brièvement certains aspects numériques liés à la construction et à la résolution du système discrétisé. Puis nous présenterons l'extension de la méthode pour des problèmes d'interfaces matérielles aléatoires. Plus particulièrement, nous nous intéresserons à la question de l'enrichissement de l'espace d'approximation par la méthode de la partition de l'unité [MEL 96], permettant d'améliorer le taux de convergence de l'approximation et ainsi d'obtenir une solution plus précise pour un maillage éléments finis donné et un degré d'approximation donné au niveau sto-

chastique. Enfin un exemple numérique permettra d'illustrer la qualité de la solution obtenue ainsi que l'efficacité de la méthode.

## 2. Formulation du problème dans le cadre de X-SFEM

Dans cet article, la méthode est présentée dans le cadre d'un calcul d'une structure présentant une interface matérielle aléatoire. Pour les problèmes liés aux forme aléatoires, le lecteur pourra se référer à [NOU 07a]. On se place sous l'hypothèse des petites perturbations. On suppose que l'espace probabilisé  $(\Theta, \mathcal{B}, P)$  permet de représenter le contenu probabiliste du problème où  $\Theta$  est l'espace des événements élémentaires,  $\mathcal{B}$  est une  $\sigma$ -algèbre sur  $\Theta$  et  $P$  une mesure de probabilité. On suppose que le domaine  $\Omega$  est composé de deux sous-domaines aléatoires disjoints :  $\Omega = \Omega_1(\theta) \cup \Omega_2(\theta)$ . Chaque sous-domaine  $\Omega_i$  est représenté par la variable aléatoire  $\Omega_i : \theta \in \Theta \mapsto \Omega_i(\theta) \subset \mathbb{R}^d$  où  $d$  désigne la dimension spatiale du problème.  $\Omega_i(\theta)$  représente une réalisation du sous-domaine. L'interface aléatoire entre ces deux sous-domaines, non nécessairement connexe, est notée  $\Gamma(\theta)$ . On suppose que la structure est soumise à des efforts volumiques  $\mathbf{f}$  sur  $\Omega$  et à des efforts surfaciques  $\mathbf{F}$  sur une partie  $\Gamma_2$  de la frontière  $\partial\Omega$ , ces efforts étant éventuellement aléatoires. La structure est fixée sur une partie complémentaire  $\Gamma_1$  de la frontière  $\partial\Omega$ . On supposera ici que  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont déterministes. On s'intéresse au cas d'un matériau élastique linéaire et on note  $\mathbf{C}$  le tenseur d'élasticité de Hooke et  $\varepsilon$  le tenseur des déformations. On introduit tout d'abord une formulation faible du problème au niveau spatial : trouver  $\mathbf{u}$  tel que  $\forall \theta \in \Theta$ ,  $\mathbf{u}(\cdot, \theta) \in \mathcal{U} = \{\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^d; \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ , et tel qu'on ait  $P$ -presque sûrement

$$a(\mathbf{u}(\cdot, \theta), \mathbf{v}; \theta) = b(\mathbf{v}; \theta) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}, \quad (1)$$

où  $a(\cdot, \cdot; \theta)$  et  $b(\cdot; \theta)$  sont respectivement les formes bilinéaire et linéaire définies par :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \theta) = \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{v}) : \mathbf{C} : \varepsilon(\mathbf{u}) \, dx, \quad (2)$$

$$b(\mathbf{v}; \theta) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, ds. \quad (3)$$

On introduit alors une formulation faible à la fois au niveau spatial et au niveau stochastique. En introduisant l'espace fonctionnel

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{u} : \theta \in \Theta \mapsto \mathbf{u}(\cdot, \theta) \in \mathcal{U}; \int_{\Theta} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{U}}^2 \, dP(\theta) < \infty\} := L^2(\Theta, dP; \mathcal{U}), \quad (4)$$

la formulation s'écrit : trouver  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  tel que

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (5)$$



où

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Theta} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \theta) dP(\theta) := E(a(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \theta)), \quad (6)$$

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\Theta} b(\mathbf{v}; \theta) dP(\theta) := E(b(\mathbf{v}; \theta)), \quad (7)$$

et où  $E(\cdot)$  est l'espérance mathématique. L'aléa sur les sous-domaines matérielles est caractérisé par la donnée du tenseur de Hooke aléatoire  $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \theta)$ , qui peut s'écrire :

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}, \theta) = \mathbf{C}_1 I_{\Omega_1(\theta)}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}_2 I_{\Omega_2(\theta)}(\mathbf{x}) \quad (8)$$

où  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2$  sont respectivement les tenseurs d'élasticité des sous-domaines  $\Omega_1(\theta)$  et  $\Omega_2(\theta)$ , supposés homogènes, et où  $I_{\Omega_1}$  et  $I_{\Omega_2}$  sont respectivement les fonctions indicatrices des domaines  $\Omega_1(\theta)$  et  $\Omega_2(\theta)$ .

### 3. Représentation de la géométrie avec la technique des level sets

La technique des level-sets [SET 99] consiste à représenter une hyper-surface  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}^d$  par l'iso-zéro d'une fonction  $\phi$  appelée fonction level-set. Ici, l'hyper-surface à représenter est l'interface matérielle. Cette interface étant aléatoire, on introduit naturellement une fonction level-set aléatoire  $\phi(\mathbf{x}, \theta)$ , définie par :

$$\Gamma(\theta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d; \phi(\mathbf{x}, \theta) = 0\}. \quad (9)$$

Classiquement, la level-set est représentée par la fonction distance signée à l'hyper-surface. Par convention, nous supposons que la level-set prend des valeurs négatives sur le domaine  $\Omega_1$  et positive sur le domaine  $\Omega_2$ . Ainsi, considérant l'équation (8), le tenseur  $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \theta)$  peut s'écrire :

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}, \theta) = \mathbf{C}_1 \mathcal{H}(\phi(\mathbf{x}, \theta)) + \mathbf{C}_2 \mathcal{H}(-\phi(\mathbf{x}, \theta)) \quad (10)$$

où  $\mathcal{H}$  est la fonction Heaviside. En pratique, la fonction level-set est discrétisée en utilisant une interpolation sur un maillage éléments finis fixe. La géométrie aléatoire est alors complètement caractérisée par la donnée des valeurs nodales de la level-set, qui sont des variables aléatoires.

## 4. Définition des espaces d'approximation

### 4.1. Approximation classique

On introduit un maillage éléments finis  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $\Omega$  et on note  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  la base d'approximation éléments finis de  $\mathcal{U}$ . L'espace d'approximation spatial classique  $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$  peut s'écrire :

$$\mathcal{U}_h = \{\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} \varphi_i(\mathbf{x}) a_i, a_i \in \mathbb{R}\}. \quad (11)$$

où les  $a_i$  sont les inconnues nodales du problème. Au niveau stochastique, on introduit l'espace d'approximation  $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{S} = L^2(\Theta, dP)$ , dont une base est constituée par un ensemble de  $P$  fonctions  $\{H_\alpha(\theta)\}_{\alpha \in \mathcal{J}_P}$  :

$$\mathcal{S}_P = \{v(\theta) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_P} v_\alpha H_\alpha(\theta), v_\alpha \in \mathbb{R}\}, \quad (12)$$

On suppose que l'aléa peut être représenté avec un nombre fini  $m$  de variables aléatoires indépendantes. On peut donc opérer un changement d'espace probabilisé de travail et considérer que le nouvel espace des événements élémentaires  $\Theta$  est un sous-domaine de  $\mathbb{R}^m$  et la mesure de probabilité  $P$  est la mesure de probabilité jointe de cet ensemble de variables aléatoires. Plusieurs choix de bases d'approximation dans  $L^2(\Theta, dP)$  peuvent être envisagés : chaos polynomial [WIE 38, GHA 91, XIU 02], chaos généralisé [SOI 04], éléments finis [DEB 01], ondelettes [Le 04]. La solution totalement discrétisée, notée  $\mathbf{u}_{h,P}$ , sera alors cherchée dans l'espace d'approximation complet :

$$\mathcal{V}_{h,P} = \mathcal{U}_h \otimes \mathcal{S}_P \quad (13)$$

#### 4.2. Approximation avec enrichissement

Dans le cas d'un problème d'interface matérielle, le champ solution présente des dérivées discontinues au passage de l'interface  $\Gamma(\theta)$ . Ces discontinuités ne sont pas contenues dans l'espace d'approximation éléments finis dans le cas où le maillage n'est pas conforme à la géométrie de l'interface. En utilisant la méthode de la partition de l'unité [MEL 96], il est possible d'enrichir l'espace d'approximation afin de rajouter des modes à dérivées discontinues au passage de l'interface. On introduit pour cela une fonction  $\psi(\mathbf{x}, \theta)$  à dérivée discontinue sur l'interface. La partie enrichie de l'espace d'approximation s'écrira alors :

$$\mathcal{E}_{h,P} = \{v(\mathbf{x}, \theta) = \sum_{j \in I_e} \varphi_j(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}, \theta) b_j(\theta), b_j \in \mathcal{S}_P\}. \quad (14)$$

où  $I_e$  est l'ensemble des noeuds enrichis et les  $b_j$  sont les inconnues nodales enrichies. Différents choix sont possibles pour la fonction d'enrichissement [SUK 01, MOE 03]. Ici, on utilise celle proposée dans [MOE 03] donnant des taux de convergence optimaux dans le cas déterministe. Cette fonction  $\psi(\mathbf{x}, \theta)$  s'écrit :

$$\psi(\mathbf{x}, \theta) = \sum_j |\phi_j(\mathbf{x}, \theta)| N_j(\mathbf{x}) - \left| \sum_j \phi_j(\mathbf{x}, \theta) N_j(\mathbf{x}) \right| \quad (15)$$

La solution  $\mathbf{u}_{h,P}$  sera alors cherchée dans l'espace d'approximation :

$$\mathcal{V}_{h,P} = \mathcal{U}_h \otimes \mathcal{S}_P + \mathcal{E}_{h,P} \quad (16)$$

On remarquera que l'espace d'approximation enrichi n'apparaît plus comme un produit tensoriel d'espaces d'approximation.

## 5. Définition de l'approximation et résolution du problème

### 5.1. Projection de Galerkin

L'approximation de Galerkin  $\mathbf{u}_{h,P} \in \mathcal{V}_{h,P}$  est définie par :

$$A(\mathbf{u}_{h,P}, \mathbf{v}_{h,P}) = L(\mathbf{v}_{h,P}) \quad \forall \mathbf{v}_{h,P} \in \mathcal{V}_{h,P} \quad (17)$$

Le problème (17) se ramène à la résolution du système d'équations suivant :

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{J}_P} E(\mathbf{K}H_\alpha H_\beta) \mathbf{u}_\alpha = E(\mathbf{b}H_\beta) \quad \forall \beta \in \mathcal{J}_P \quad (18)$$

où  $\mathbf{K}(\theta)$  est une matrice aléatoire et  $\mathbf{b}(\theta)$  est un vecteur aléatoire. Le calcul des termes  $E(\mathbf{K}H_\alpha H_\beta)$  et  $E(\mathbf{b}H_\beta)$  nécessite le calcul d'une intégrale sur  $\Theta$  avec la mesure  $dP$ . Il est à noter que les composantes de  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{b}$  ne sont pas des fonctions régulières au niveau stochastique. Par exemple, dans le cas où seule la géométrie est aléatoire, on montre aisément que les contributions d'un élément fini  $B_e \subset B$ , notées  $\mathbf{K}_e(\theta)$  et  $\mathbf{b}_e(\theta)$ , n'évoluent que sur une partie du domaine stochastique  $\Theta_{cut}^e = \{\theta \in \Theta; \exists \mathbf{x} \in B_e, \phi(\mathbf{x}, \theta) = 0\}$ , qui correspond aux réalisations pour lesquelles la frontière coupe l'élément  $B_e$ . En pratique, afin de bien intégrer le problème discrétisé, on réalise un maillage de l'espace stochastique permettant de représenter grossièrement ce domaine  $\Theta_{cut}^e$ . Ce maillage est généré automatiquement à l'aide d'une technique recursive de type octree [NOU 07a]. Pour chaque élément stochastique, on utilise alors une technique de quadrature classique, conduisant à l'évaluation des matrices élémentaires  $\mathbf{K}_e(\theta_k)$  et  $\mathbf{b}_e(\theta_k)$  pour des réalisations  $\theta_k$  particulières. Ces calculs sont classiques dans le cadre de la méthode X-FEM déterministe [SUK 01]. On notera qu'une quadrature de faible ordre au niveau stochastique est généralement suffisante pour intégrer correctement le problème discrétisé.

### 5.2. Projection au sens de $L^2$

On note  $\mathbf{u}_P \in \mathbb{R}^n \otimes \mathcal{S}_P$  le vecteur aléatoire des degrés de liberté associé à  $\mathbf{u}_{h,P} \in \mathcal{V}_{h,P}$ . La méthode de projection consiste à définir la solution approchée  $\mathbf{u}_P$  comme la projection au sens de  $L^2(\Theta)$  du vecteur des inconnues nodales  $\mathbf{u}$  associé à la solution semi-discrétisée  $\mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h$ . L'approximation est alors définie au sens du produit scalaire suivant :

$$\langle \mathbf{u}_P, \mathbf{v}_P \rangle_{L^2(\Theta)} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_P \rangle_{L^2(\Theta)} \quad \forall \mathbf{v}_P \in \mathbb{R}^n \otimes \mathcal{S}_P \quad (19)$$

où

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Theta)} = \int_{\Theta} \mathbf{v}(\theta)^T \mathbf{u}(\theta) dP(\theta) \quad (20)$$

L'équation (20) est équivalente à la définition suivante des coefficients de la décomposition stochastique :

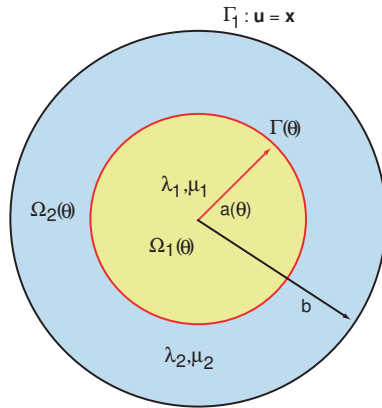
$$\mathbf{u}_\alpha = E(\mathbf{u}H_\alpha) = \int_{\Theta} H_\alpha(\theta)\mathbf{u}(\theta)dP(\theta) \quad (21)$$

Les coefficients  $\mathbf{u}_\alpha$  de la solution approchée sont alors calculés en utilisant une quadrature adaptée :

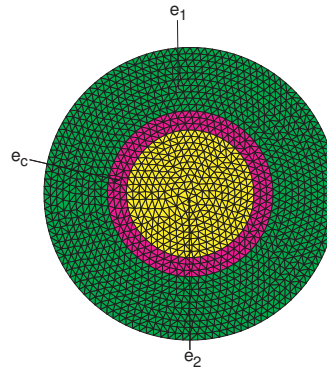
$$\mathbf{u}_\alpha \approx \sum_k \omega_k H_\alpha(\theta_k)\mathbf{u}(\theta_k) \quad (22)$$

où les  $\theta_k$  sont les points d'intégration, correspondant à des réalisations, et les  $\omega_k$  les poids d'intégration associés. Pour chaque point d'intégration, le calcul de  $\mathbf{u}(\theta_k) = \mathbf{K}^{-1}(\theta_k)\mathbf{b}(\theta_k)$  demande la résolution d'un problème déterministe pour lequel on utilise la méthode X-FEM.

## 6. Exemple numérique : inclusion circulaire aléatoire



**Figure 1.** Problème d'inclusion aléatoire.



**Figure 2.** Exemple de maillage X-SFEM avec états des éléments.

On considère un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  composé de deux matériaux élastiques aux caractéristiques différentes (voir figure 1). Les deux matériaux sont séparés par une interface circulaire  $\Gamma(\theta)$  de centre  $O$  et de rayon aléatoire  $a(\theta)$ . Le domaine intérieur est noté  $\Omega_1(\theta)$  et le domaine extérieur  $\Omega_2(\theta)$ . La frontière extérieure  $\Gamma_1$  de  $\Omega$  est un cercle de rayon  $b = 2$ . On considère que  $a(\theta)$  est une variable aléatoire uniforme sur  $(0.9, 1.1)$ . Les paramètres matériau sont choisis déterministes sur les deux domaines avec les modules d'Young et coefficients de Poisson suivants :  $E_1 = 1, \nu_1 = 0.4$  dans  $\Omega_1$  et  $E_2 = 10, \nu_2 = 0.3$  dans  $\Omega_2$ . On impose un champ de déplacement linéaire sur la frontière  $\Gamma_1$  tel que  $\mathbf{u} = \mathbf{x}$ . On notera qu'en effectuant un changement variable

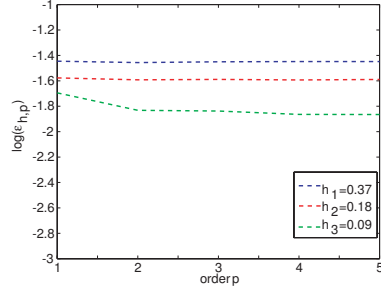
$\mathbf{u} = \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{u}}$ , avec  $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$ , on se ramène à une formulation du type (5) pour la recherche de  $\tilde{\mathbf{u}}$ . Pour le modèle numérique, on utilise un maillage spatial unique composé d'éléments triangles à 3 noeuds. La figure 2 présente l'un des maillages X-SFEM utilisés avec les différents états d'élément : les éléments appartenant sûrement à  $\Omega_1$  (groupe  $e_1$ ), les éléments appartenant sûrement à  $\Omega_2$  (groupe  $e_2$ ) et les éléments possiblement coupés par  $\Gamma(\theta)$  (groupe  $e_c$ ). Le problème ne possède ici qu'une seule dimension stochastique. On peut donc reformuler le problème sur un nouvel espace probabilisé de dimension 1, noté encore  $(\Theta, \mathcal{B}, P)$  par abus de notation, avec  $\Theta = (0.9, 1.1)$  et  $P_a$  la mesure uniforme sur  $(0.9, 1.1)$ . Pour l'approximation stochastique, on utilise un chaos polynomial généralisé d'ordre  $p$  pour lequel les fonctions de bases de  $\mathcal{S}_P$  sont les polynômes de Legendre sur  $(0.9, 1.1)$ .

On s'intéresse tout d'abord à l'influence de l'enrichissement de l'espace d'approximation. On mène une étude de convergence basée sur un indicateur d'erreur défini à partir de la solution X-SFEM en déplacement  $\mathbf{u}_{h,P}$  et de la solution exacte  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \theta)$  :

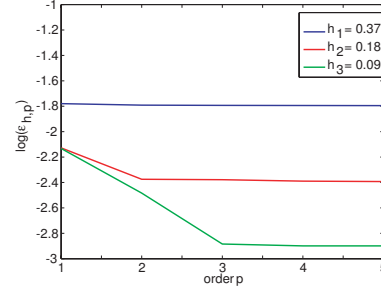
$$\varepsilon_{h,P} = \frac{\|\mathbf{u}_{h,P}(\mathbf{x}, \theta) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, \theta)\|_{L^2}}{\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, \theta)\|_{L^2}}, \quad (23)$$

Pour distinguer les deux approximations, on notera par la suite X-SFEM et X-SFEM<sup>+</sup> les solutions obtenues respectivement sans et avec enrichissement des espaces d'approximation. On note X-SFEM-Gal la solution obtenue avec une projection de Galerkin et X-SFEM- $L^2$  la solution obtenue avec la projection au sens de  $L^2$ . Les figures 3 et 4 présentent les courbes de convergence obtenues pour plusieurs solutions correspondant à différentes tailles moyennes  $h$  d'élément et différents ordres de troncature  $p$ . On constate que l'approche X-SFEM<sup>+</sup>-Gal conduit à des niveaux d'erreur inférieurs à ceux obtenus avec X-SFEM-Gal. Pour l'approximation stochastique, on observe dans les deux cas une convergence rapide en fonction de l'ordre  $p$ , l'erreur se stabilisant à un palier correspondant à l'erreur d'approximation spatiale. On observe également une bonne convergence en  $h$  de l'approximation. Les figures 5 et 6 montrent les erreurs locales obtenues avec les deux approches pour  $h = 0.09$  et  $p = 5$ . La solution X-SFEM<sup>+</sup>-Gal conduit à des erreurs localisées sur certains éléments possiblement coupés par  $\Gamma(\theta)$  tandis que la solution X-SFEM-Gal conduit à des erreurs élevées sur un nombre important d'éléments qui ne sont jamais coupés par  $\Gamma(\theta)$ .

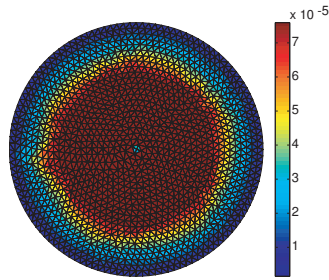
On s'intéresse maintenant aux différences entre les deux méthodes de projection. On ne présente ici que les résultats obtenus avec enrichissement de l'espace d'approximation. La solution X-SFEM obtenue avec la projection  $L^2$  est alors notée X-SFEM<sup>+</sup>- $L^2$ . La figure 7 présente la convergence de l'erreur  $\varepsilon_{h,P}$  en fonction de l'ordre  $p$  : on remarque que le comportement de l'erreur est similaire à celui de la solution obtenue avec X-SFEM<sup>+</sup>-Gal. En effet on observe toujours une convergence rapide en fonction de l'ordre  $p$ . De plus, on observe une convergence similaire en  $h$ . On notera que pour la méthode de projection  $L^2$ , une intégration stochastique d'ordre élevé est nécessaire afin d'obtenir un calcul précis de la décomposition sur le chaos.



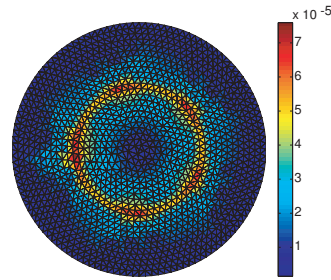
**Figure 3.** Convergence de l'erreur  $\varepsilon_{h,P}$  pour X-SFEM-Gal en fonction de  $p$  pour différents maillages.



**Figure 4.** Convergence de l'erreur  $\varepsilon_{h,P}$  pour X-SFEM<sup>+</sup>-Gal en fonction de  $p$  pour différents maillages.



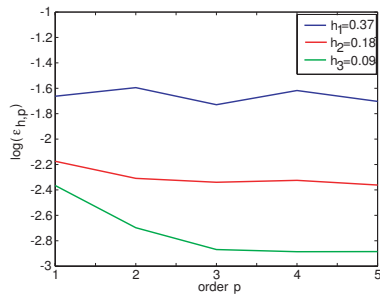
**Figure 5.** Erreurs locales obtenues pour X-SFEM-Gal avec  $p = 5$  et  $h = 0.09$ .



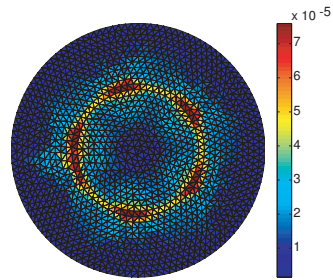
**Figure 6.** Erreurs locales obtenues pour X-SFEM<sup>+</sup>-Gal avec  $p = 5$  et  $h = 0.09$ .

## 7. Conclusion

Nous avons proposé une méthode éléments finis stochastiques permettant de résoudre un problème d'interface matérielle aléatoire sur un maillage éléments finis fixe. Cette méthode s'appuie sur une représentation des géométries aléatoires à l'aide de fonctions level sets. Nous avons montré l'intérêt d'enrichir l'espace d'approximation spatial afin d'obtenir une solution plus précise du problème. D'autre part, nous avons présenté deux méthodes de calcul de l'approximation, basées respectivement sur une projection de Galerkin et une projection  $L^2$ . Sur l'exemple traité, les deux approches de projection conduisent à des solutions de qualité équivalente, contrairement au cas des problèmes à formes aléatoires. Cependant, ces deux approches de projection nécessitent un soin particulier pour l'intégration stochastique. Les travaux futurs porteront sur une comparaison plus poussée des deux approches : stabilité de l'approximation vis-à-vis des erreurs d'intégration stochastique, comportement dans le cas d'une grande variabilité de la géométrie, comportement dans le cas de maillages très fins.



**Figure 7.** Convergence de l'erreur  $\epsilon_{h,p}$  pour  $X$ -SFEM<sup>+</sup>- $L^2$  en fonction de  $p$  pour différents maillages.



**Figure 8.** Erreurs locales obtenues pour  $X$ -SFEM<sup>+</sup>- $L^2$  avec  $p = 5$  et  $h = 0.09$ .

#### Remerciements

Ces études sont soutenues par l'Agence Nationale de la Recherche (projet ANR-06-JCJC-0064) et par le programme européen MEDACHS, concernant les méthodes de diagnostic, de réparation et de maintenance des structures situées sur le littoral atlantique (<http://www.medachs.univ-bordeaux1.fr>).

#### 8. Bibliographie

- [BAB 05] BABUŠKA I., TEMPONE R., ZOURARIS G. E., « Solving elliptic boundary value problems with uncertain coefficients by the finite element method : the stochastic formulation », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, 2005, p. 1251-1294.
- [DEB 01] DEB M., BABUŠKA I., ODEN J. T., « Solution of stochastic partial differential equations using Galerkin finite element techniques », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, 2001, p. 6359-6372.
- [GHA 91] GHANEM R., SPANOS P., *Stochastic finite elements : a spectral approach*, Springer, Berlin, 1991.
- [Le 04] LE MAITRE O. P., KNIO O. M., NAJM H. N., GHANEM R. G., « Uncertainty propagation using Wiener-Haar expansions », *Journal of Computational Physics*, vol. 197, n° 1, 2004, p. 28-57.
- [MEL 96] MELENK J. M., BABUŠKA I., « The partition of unity method : basic theory and applications », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 39, 1996, p. 289-314.
- [MOE 99] MOES N., DOLBOW J., BELYTSCHKO T., « A finite element method for crack growth without remeshing », *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, 1999, p. 131-150.

- [MOE 03] MOES N., CLOIREC M., CARTRAUD P., REMACLE J., « A computational approach to handle complex microstructure geometries », *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, vol. 192, 2003, p. 3163-3177.
- [NOU 07a] NOUY A., « Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations : invariant subspace problem and dedicated algorithms », *Computer Methods in Applied Mechanics in Engineering*, submitted, , 2007.
- [NOU 07b] NOUY A., SCHOEFS F., MOËS N., « X-SFEM, a computational technique based on X-FEM to deal with random shapes », *European Journal of Computational Mechanics*, vol. 16, n° 2, 2007, p. 277-293.
- [NOU 08] NOUY A., CLÉMENT A., SCHOEFS F., MOËS N., « An eXtended Stochastic Finite Element Method for solving stochastic partial differential equations on random domains », *Computer Methods in Applied Mechanics in Engineering*, submitted, , 2008.
- [SET 99] SETHIAN J., *Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999.
- [SOI 04] SOIZE C., GHANEM R., « Physical systems with random uncertainties : chaos representations with arbitrary probability measure », *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 26, n° 2, 2004, p. 395-410.
- [SUK 01] SUKUMAR N., CHOPP D., MOËS N., BELYTSCHKO T., « Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, 2001, p. 6183-6200.
- [WIE 38] WIENER N., « The homogeneous chaos », *Am. J. Math.*, vol. 60, 1938, p. 897-936.
- [XIU 02] XIU D. B., KARNIADAKIS G. E., « The Wiener-Askey Polynomial Chaos for stochastic differential equations », *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 24, n° 2, 2002, p. 619-644.



---

Session TS2-B

Méthodes de calcul, propagation d'incertitudes

---

## **L'algorithme du gradient projeté avec contrôle d'erreur pour la fiabilité structurale.**

F. Duprat, A. Sellier, X.S. Nguyen

---

---

# L'algorithme du gradient projeté avec contrôle d'erreur pour la fiabilité structurale

**Frédéric Duprat - Alain Sellier - Xuan Son Nguyen**

Université de Toulouse ; UPS, INSA ;  
LMDC (Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions) ;  
135 Avenue de Rangueil, 31077 Toulouse Cedex 4, France  
frederic.duprat, alain.sellier, xuan-son.nguyen@insa-toulouse.fr

---

*RESUME. L'algorithme de Rackwitz-Fiessler est l'un des plus populaires pour le calcul de l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind. Cet algorithme est robuste mais n'est pas systématiquement convergent. Les principales sources de non convergence sont la présence de minima locaux multiples, les singularités de la surface de défaillance, et l'approximation dans l'estimation des gradients de la fonction d'état limite. Cette dernière source est prépondérante, en particulier lorsque la fonction d'état limite résulte d'une modélisation aux éléments finis, pour laquelle le gradient est le plus souvent évalué par différences finies. Si l'incrément choisi pour ce calcul donne une variation de la réponse inférieure à la précision du résultat sur la fonction d'état limite, l'algorithme peut donner des résultats erronés, voire ne pas converger. L'algorithme simple proposé ici permet de tenir compte de la précision numérique du résultat sur la fonction d'état limite par une procédure de choix de l'incrément. Les résultats obtenus montrent la bonne convergence de l'algorithme proposé et son efficacité en termes de nombre d'appels à la fonction de défaillance.*

*ABSTRACT. Rackwitz-Fiessler's algorithm has become one of the most popular for searching the Hasofer-Lind's reliability index. Although it is robust, this algorithm doesn't converge systematically. Main reasons of this are multiple minima, peculiarities of the failure surface and approximation of the gradient of the failure function. This latter is dominant when the failure function results from a finite element modelling. In this case, the gradient is estimated by finite difference: if the increment of variables used for this calculus is not relevant according to the numerical precision of the modelling output, the overall convergence of the algorithm can fail. The algorithm proposed herein allows the precision of the modelling output to be accounted for in designing the increment. The results obtained show the fairly good convergence of the algorithm, and efficiency regarding the number of runs of the failure functions as well.*

*MOTS-CLES : Fiabilité des structures ; Gradient projeté ; Erreur numérique.*

*KEYWORDS: Structural Reliability; Projected gradient ; Numerical error.*

---

## 1 Introduction

L'indice de fiabilité de Hasofer-Lind (Hasofer *et al.*, 1974) est une mesure de fiabilité devenue très classique. Les codes de conception et de dimensionnement, tels que les Eurocodes, font explicitement référence à cet indice. Le calcul de ce dernier est un problème d'optimisation sous contrainte dont un algorithme itératif simple, basé sur la méthode du gradient projeté, a été proposé par Rackwitz-Fiessler (Rackwitz *et al.*, 1979). Cet algorithme n'est pas systématiquement convergent. Les principales sources de non convergence sont la présence de plusieurs minima locaux, les singularités ou discontinuités de la surface de défaillance, et l'approximation dans l'estimation des gradients de la fonction d'état limite. Dans le cas d'un état limite unique, on peut dire que cette dernière source est prépondérante, en particulier lorsque la fonction d'état limite résulte d'une modélisation aux éléments finis. Dans ce cas en effet l'évaluation pratique du gradient de la fonction d'état limite est le plus souvent réalisée par différences finies, même si d'autres techniques plus avancées existent. Si l'incrément choisi pour ce calcul donne une variation de la réponse inférieure à la précision du résultat sur la fonction d'état limite, l'algorithme peut donner des résultats erronés, voire ne pas converger. Il est à noter que cet inconvénient existe aussi pour les autres algorithmes d'optimisation avancés, pour lesquels la direction de descente est celle du gradient, tels que celui d'Abdo-Rackwitz (Abdo *et al.*, 1990). Pour pallier cet inconvénient nous proposons, dans cette étude, un algorithme simple dit «Gradient projeté Avec Contrôle d'Erreur» (GRACE) en introduisant dans l'algorithme de Rackwitz-Fiessler une procédure de choix de l'incrément qui tient compte de la précision numérique du résultat sur la fonction d'état limite

## 2 Algorithme de Rackwitz-Fiessler

Cette méthode itérative résout le problème en générant une suite de points  $u_1, \dots, u_k$  qui converge vers une solution optimale. Le nouvel itéré  $u_{(k+1)}$  dans l'espace standardisé est défini par :

$$u_{(k+1)} = \left( u_{(k)}^T \alpha_{(k)} + \frac{G(u_{(k)})}{\|\nabla G(u_{(k)})\|} \right) \alpha_{(k)} \quad (1)$$

où  $G(u_{(k)})$  désigne la fonction de défaillance au point  $u_{(k)}$ ,  $\alpha_{(k)} = \frac{-\nabla G(u_{(k)})}{\|\nabla G(u_{(k)})\|}$  et

$\nabla G(u_{(k)})$  est le vecteur gradient de  $G(u_{(k)})$ .

Le point de défaillance le plus probable, noté  $P^*$ , est obtenu lorsque les précisions souhaitées sur l'indice de fiabilité (précision  $\varepsilon_\beta$ ) et sur la proximité de deux points consécutifs de la suite (précision  $\varepsilon_p$ ) sont satisfaites, soit pour deux itérations successives ( $k$ ) et ( $k+1$ ) :

$$\begin{cases} \left| \beta_{(k+1)} - \beta_{(k)} \right| \leq \varepsilon_\beta \\ \left\| P_{(k+1)}^* - P_{(k)}^* \right\| \leq \varepsilon_p \end{cases} \quad (2)$$

La  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur gradient s'exprime par :

$$\nabla G(u)_i = \nabla G(x) \frac{\partial x}{\partial u_i} = \nabla G(x) \frac{\partial T^{-1}(u)}{\partial u_i} \quad (3)$$

où  $T()$  est la transformation iso-probabiliste de l'espace physique  $x$  vers l'espace standardisé  $u$ .

Le calcul du vecteur gradient  $\nabla G(x)$  de la fonction d'état limite dans l'espace physique, et plus généralement le calcul des dérivées partielles ou des sensibilités de la réponse d'un calcul aux éléments finis par rapport aux variables de dimensionnement, ont fait l'objet de travaux avancés (Haukass *et al.*, 2005). Ceux-ci ont porté sur les développements analytiques des dérivées partielles des matrices de rigidité et/ou d'élasticité élémentaires par rapport aux variables de dimensionnement. Il s'agit de développements spécifiques aux types d'éléments finis utilisés (solides 2D, 3D, poutres, plaques, etc..) et aux types d'analyses réalisées (matériellement et/ou géométriquement linéaires ou non linéaires). La portée de ces développements n'est malheureusement pas générale étant donné le nombre quasi-infini de combinaisons possibles des types d'analyses et d'éléments finis dans une seule et même modélisation. Dans de nombreux problèmes pratiques, une formulation explicite des gradients de la fonction d'état limite par rapport aux variables physiques n'est donc pas disponible. Le calcul des gradients par différences finies s'avère alors nécessaire, et néanmoins attractif, du fait de sa généralité et de sa simplicité de mise en œuvre (aucun développement interne au code éléments finis n'est nécessaire). L'expression de la  $i^{\text{ème}}$  composante du gradient est approchée par :

$$\nabla G(x)_i \approx \frac{G(x + \Delta x_i e_i) - G(x)}{\Delta x_i} \quad (4)$$

où  $e_i$  est le vecteur directeur de l'axe  $i$  et  $\Delta x_i$  l'incrément imposé. La principale difficulté reste ici de proposer une valeur convenable de cet incrément, permettant de réduire l'erreur de troncature sur la dérivée, résultant de la formulation par différences finies, par exemple en affinant l'incrément, tout en lui conservant une valeur suffisamment grande pour éviter que les erreurs numériques cumulées

d'arrondi et de précision du résultat sur la fonction d'état limite (liée au schéma itératif d'obtention de ce résultat), ne deviennent significatives par rapport à la variation de celui-ci.

### 3 Incrément pour de l'estimation du gradient

La réponse des modèles numériques non linéaires présente toujours une partie déterministe et une partie aléatoire proportionnelle aux erreurs admises dans les algorithmes de résolution des procédures non linéaires. Ainsi, si l'incrément  $\Delta x_i$  est trop petit, la différence des réponses du modèle entre les deux bornes de l'incrément est aléatoire. Pour estimer correctement une différence finie il faut donc imposer à l'incrément une valeur suffisamment grande pour que la composante aléatoire de la différence des réponses devienne négligeable. De plus, il est illusoire de ré-estimer une différence finie pour un axe tant que le point courant de la procédure itérative ne n'est pas suffisamment éloigné de la position où avait été estimée la précédente différence finie.

Supposons que la fonction d'état limite soit définie comme la différence entre la résistance de la structure et la sollicitation appliquée :

$$G(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n) = R(x_1, \dots, x_p) - S(x_{p+1}, \dots, x_n) \quad (5)$$

où  $R()$  est la résistance et  $S()$  la sollicitation appliquée. Pour la première itération, ne connaissant pas la sensibilité du modèle aux différentes variables, l'incrément est choisi arbitrairement très grand :

$$\Delta x_i = c_1 \varepsilon_m x_i \quad (6)$$

où  $c_1$  est un coefficient d'amplification ( $c_1 > 1$ , par exemple  $c_1 = 10$ ),  $\varepsilon_m$  est la précision numérique relative du modèle (celle de la procédure itérative d'un modèle aux éléments finis la plupart du temps). Pour l'itération courante ( $k$ ),  $\Delta x_i$  est calculé par :

$$(\Delta x_i)_{(k)} = c_2 \frac{(\Delta G(x))_{(k-1)}}{(\nabla G(x)_i)_{(k-1)}} = c_2 \frac{(\varepsilon_R R + \varepsilon_S S)_{(k-1)}}{(\nabla G(x)_i)_{(k-1)}} \quad (7)$$

où  $c_2$  est un coefficient d'amplification ( $c_2 > 1$ , par exemple  $c_2 = 10$ ) et  $(\nabla G(x)_i)_{(k-1)}$  est la dérivée partielle estimée à l'itération précédente ( $k-1$ ) selon l'axe  $i$ . Dans l'équation (7)  $\Delta G(x) = \Delta R + \Delta S = \varepsilon_R R + \varepsilon_S S$  est l'erreur numérique maximale possible sur la fonction d'état limite,  $\Delta R$  et  $\Delta S$  sont respectivement l'erreur sur l'évaluation de la résistance  $R$  et celle sur la sollicitation  $S$ ,  $\varepsilon_R$  est la précision numérique sur  $R$  et  $\varepsilon_S$  est la précision numérique sur  $S$ .

Comme remarqué ci-avant, il peut arriver que deux points consécutifs de la procédure itérative de Rackwitz-Fiessler se trouvent, pour un axe particulier, à une distance inférieure à celle requise pour évaluer correctement la dérivée partielle. Dans ce cas, nous préconisons de ne pas réactualiser la dérivée partielle tant que la distance parcourue sur l'axe n'est pas supérieure à celle requise pour évaluer la dérivée partielle. La condition pour actualiser la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur gradient est donc :

$$\left| \sum_{m=k_0}^k ((x_i)_m - (x_i)_{m-1}) \right| = (\Delta x_i)_{(k_0)} \quad (8)$$

où  $(x_i)_m - (x_i)_{m-1}$  est la distance algébrique mesurée sur l'axe  $i$  entre deux dernières itérations de l'algorithme de Rackwitz-Fiessler,  $(k_0)$  est l'itération lors du dernier calcul de la dérivée partielle pour l'axe  $i$  et  $(k) > (k_0)$  l'itération actuelle. La condition (8) permet d'économiser les évaluations de la fonction d'état limite selon les axes pour lesquels l'optimum est atteint. Au final, le choix des incréments en fonction de l'erreur possible sur le modèle, combiné à cette technique limitant le nombre de réévaluations des dérivées partielles, conduit à favoriser et à accélérer la convergence de l'algorithme.

## 4 Applications

Deux exemples sont donnés ci-après pour illustrer l'efficacité de la méthode proposée, et le gain en vitesse de convergence apporté par le fait de ne pas réévaluer systématiquement les dérivées partielles. Les résultats présentés sont la valeur de l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind, les coordonnées du point de conception  $P^*$ , la valeur de la fonction d'état limite au point  $P^*$   $G(u^*)$  qui vaut zéro si  $P^*$  se trouve exactement sur la surface de défaillance, et le nombre de calculs de la fonction d'état limite  $N_c$  (indicateur du temps de calcul associé à la méthode). Les critères de convergence de la méthode GRACE sont fixés à :  $\varepsilon_\beta = 0,001$  pour la précision sur  $\beta$  et  $\varepsilon_p = 0,01$  pour la précision sur la proximité entre deux points consécutifs.

### 4.1 Exemple 1

La fonction d'état limite est définie comme l'écart entre le moment résistant d'une section de poutre en béton armé et le moment sollicitant :

$$G(x) = x_2 x_3 x_4 - \frac{x_5 x_3^2 x_4^2}{x_6 x_7} - x_1 \quad (9)$$

Les résultats obtenus par le logiciel Comrel (Comrel, 1994) avec l'algorithme RFLS (Abdo *et al.*, 1990) et l'algorithme original RF sont également présentés. Les variables aléatoires, non-corrélées, sont définies dans le Tableau 1.

Variable	Dénomination	Distribution	Moyenne	Ecart-type
$x_1$	Moment appliqué (MN.m)	normale	0,01	0,003
$x_2$	Hauteur utile (m)	normale	0,30	0,015
$x_3$	Limite élastique acier (MPa)	normale	360	36
$x_4$	Section acier (m <sup>2</sup> )	normale	$226 \times 10^{-6}$	$11,3 \times 10^{-6}$
$x_5$	Coefficient de répartition	normale	0,5	0,05
$x_6$	Largeur (m)	normale	0,12	0,006
$x_7$	Résistance béton (MPa)	normale	40	6

**Tableau 1.** Caractéristiques des variables aléatoires - Exemple 1

Les précisions numériques associées à la fonction de défaillance, ici explicite, sont fixées dans GRACE à  $\varepsilon_m = \varepsilon_R = \varepsilon_S = 10^{-7}$ . Les résultats obtenus sont présentés dans les Tableaux 2 et 3. L'indice de fiabilité et les coordonnées du point P\* obtenus sont très proches pour toutes les techniques. GRACE est toutefois plus efficace en termes de temps de calcul que les autres techniques grâce à la non-réévaluation des dérivées partielles pour les variables peu influentes. Dans le Tableau 4 sont indiquées les évaluations des dérivées partielles de la fonction d'état limite par rapport aux variables aléatoires.

Technique	$\beta$	$ G(u^*) /G(u_0)$	$N_c$
RF	3,4117	$6,903 \times 10^{-6}$	40
RFLS	3,4132	$2,376 \times 10^{-7}$	32
GRACE	3,4134	$6,129 \times 10^{-8}$	26

**Tableau 2.** Résultats obtenus - Exemple 1

Technique	$u_1^*$	$u_2^*$	$u_3^*$	$u_4^*$	$u_5^*$	$u_6^*$	$u_7^*$
RF	2,615	-0,831	-1,866	-0,790	0,037	-0,019	-0,056
RFLS	2,606	-0,851	-1,864	-0,808	0,039	-0,019	-0,059
GRACE	2,616	-0,828	-1,868	-0,787	0,060	-0,030	-0,090

**Tableau 3.** Coordonnées du point de conception P\* - Exemple 1



Dès la 3<sup>ème</sup> itération, GRACE ne réévalue pas les dérivées partielles de la fonction d'état limite par rapport aux variables  $u_5, u_6, u_7$  et prend leurs valeurs à l'itération 2. La procédure associant un choix rationnel de l'incrément pris sur les axes pour l'évaluation des dérivées partielles à un critère de décision pour le calcul du gradient, confère à l'algorithme la possibilité "d'oublier" les variables peu influentes, de façon similaire à l'emploi des facteurs d'omission (Madsen, 1988). Le facteur d'omission est défini pour une variable aléatoire comme le rapport de l'indice calculé en fixant la variable à sa valeur médiane, à l'indice de fiabilité. Lorsque ce rapport est proche de l'unité, la variable est significativement non influente. Le Tableau 5 présente les valeurs du facteur d'omission  $\gamma_i(\mu_i)$  associé à la valeur médiane de  $x_i$ . Les résultats montrent que l'influence des variables  $x_5, x_6$  et  $x_7$  est très faible. L'intégration directe des facteurs d'omission dans l'algorithme de recherche de l'indice de fiabilité a été proposée sur la base d'une estimation approchée de ceux-ci (Madsen, 1988). Cependant, tandis que cette dernière nécessite un complément algorithmique et présente un caractère définitif dans l'algorithme, GRACE intègre de façon indirecte les facteurs d'omission, sans complément algorithmique particulier et sans que cela soit irrévocable : c'est là un intérêt supplémentaire à la méthode.

Itération		1	2	3	4	5
Variable	$u_1$	oui	oui	oui	oui	oui
	$u_2$	oui	oui	oui	non	non
	$u_3$	oui	oui	oui	oui	non
	$u_4$	oui	oui	oui	non	non
	$u_5$	oui	oui	non	non	non
	$u_6$	oui	oui	non	non	non
	$u_7$	oui	oui	non	non	non

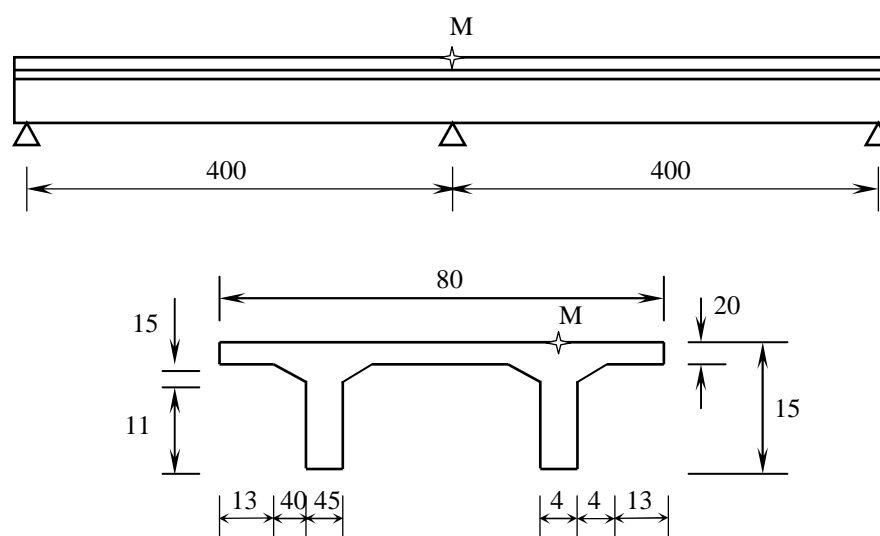
**Tableau 4 :** Evaluation des dérivées partielles - Exemple 1

Variable	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$\beta$	5,5614	3,515	4,0203	3,5052	3,4133	3,4132	3,4134
$\gamma_i(\mu_i)$	1,62928	1,02977	1,7780	1,02689	0,99997	0,99994	1,00006

**Tableau 5 :** Facteurs d'omission - Exemple 1

#### 4.2 Exemple 2

Afin de montrer l'efficacité de la méthode pour des problèmes aux éléments finis, le cas d'une passerelle en béton précontraint est proposé (Nguyen, 2007). La passerelle est constituée de deux travées de 40 m. Le tablier, coulé en place, est constitué de deux nervures coiffées par une dalle de 0,2 m d'épaisseur moyenne et de 8 m de largeur. La hauteur totale du tablier est de 1,5 m (Figure 1).



**Figure 1 :** Géométrie du pont (unités=dm et cm)

La modélisation est effectuée dans le code Cast3M. La précontrainte est modélisée par analogie thermique. On utilise un chargement en température fictif appliqué uniquement au modèle du câble de précontrainte. La tension  $P$  au temps  $t$  prend en compte des pertes de précontrainte. La tension initiale  $P_0$  est égale à la valeur moyenne initiale issue du calcul de dimensionnement selon le BPEL. La déformation du béton au temps  $t$  se compose de la déformation instantanée et des déformations de retrait et de fluage. Ces dernières sont déterminées par un ensemble de modèles non linéaires, associant le fluage propre, le retrait et fluage de dessiccation et l'endommagement du béton (Sellier, 2006). L'état de défaillance retenu correspond à l'amorçage des fissures dans la passerelle, défini par le franchissement du seuil de résistance en traction. La fonction de défaillance s'écrit :

$$G(x) = \frac{x_9}{1 - d_{pic}(x_2, \dots, x_8)} - \frac{\sigma_M(x_2, \dots, x_8)}{1 - d_{eff}(x_2, \dots, x_8)} \quad (10)$$

où  $\sigma_M()$  la contrainte longitudinale de traction maximale atteinte dans la passerelle au point M (Figure 1),  $d_{pic}()$  l'endommagement au pic de traction,  $d_{eff}()$  l'endommagement effectif de traction suivant l'axe longitudinale de la passerelle.

Les précisions numériques associées à la fonction de défaillance, ici non-explicite, sont fixées dans GRACE à  $\varepsilon_m = \varepsilon_R = \varepsilon_S = 10^{-4}$ . Les variables aléatoires, non-corrélées, sont définies dans le Tableau 6. Dans le Tableau 7 sont portés le nombre d'appels à la fonction de défaillance ainsi que le nombre de non-réévaluation des gradients.

Variable	Dénomination	Distribution	Moyenne	Ecart-type
$x_1$	Module d'élasticité (MPa)	lognormale	37600	9400
$x_2$	Module de compressibilité (MPa)	lognormale	208890	41778
$x_3$	Déformation de consolidation	lognormale	$10^{-4}$	$3,2 \times 10^{-5}$
$x_4$	Viscosité (MPa/j)	lognormale	62668	12534
$x_5$	Pression hydrique (MPa)	lognormale	58	14,21
$x_6$	Contrainte de dessiccation (MPa)	lognormale	11,7	3,1
$x_7$	Coefficient chimique	lognormale	$3,1 \times 10^{-4}$	$8,68 \times 10^{-5}$
$x_8$	Charges d'exploitation (MN/m)	Gumbel max	$2,43 \times 10^{-3}$	$9,74 \times 10^{-3}$
$x_9$	Résistance en traction (MPa)	lognormale	3	0,6

**Tableau 6.** Données statistiques des variables aléatoires - Exemple 2

Echéance	$\beta$	$ G(u^*) /G(u_0)$	$N_{\text{iter}}$	$N_c$	$N_{\text{éco}}$
10 ans	3,261	$1,992 \times 10^{-5}$	7	55	15
20 ans	3,072	$1,921 \times 10^{-5}$	5	44	6
40 ans	2,744	$4,724 \times 10^{-4}$	4	36	4
50 ans	2,582	$4,251 \times 10^{-4}$	4	38	2
60 ans	2,418	$3,410 \times 10^{-4}$	5	43	7
70 ans	2,249	$2,506 \times 10^{-4}$	5	41	9
90 ans	1,897	$3,509 \times 10^{-4}$	5	40	10
100 ans	1,713	$5,233 \times 10^{-4}$	5	40	10

**Tableau 7.** Résultats obtenus - Exemple 2

Le nombre d'itérations reste raisonnablement faible pour toutes les échéances, avec une convergence assurant une très bonne proximité du point  $P^*$  à la surface de défaillance. La non réévaluation des gradients pour les variables peu influentes conduit à une économie substantielle en coût de calcul, très appréciable pour un modèle numériquement aussi complexe. Il est à noter que la non réévaluation n'est pas irrévocable au cours des itérations : ainsi, pour l'échéance 10 ans, la dérivée partielle  $\nabla G(x)_5$  n'est pas calculée à l'itération 5 mais l'est à nouveau aux itérations suivantes. Des situations similaires sont observées pour les autres échéances.

## 5 Conclusion

Une technique simple et efficace a été proposée ici pour permettre l'utilisation de l'algorithme de Rackwitz-Fiessler dans le cas où le modèle associé à la fonction de

défaillance ne peut être défini qu'avec une certaine précision, ce qui est par exemple le cas pour les modèles aux éléments finis. La procédure tient compte de la précision numérique du modèle physique pour le choix de l'incrément de calcul utilisé lors de l'estimation des dérivées partielles de la fonction de défaillance par différences finies. Elle permet d'une part d'estimer correctement les vecteurs gradients utilisés et d'autre part d'économiser des calculs de la fonction de défaillance (en ne réévaluant pas systématiquement les dérivées partielles pour les variables aléatoires auxquelles le modèle est peu sensible). Les résultats obtenus montrent que la convergence reste rapide, le point de défaillance reste très proche de la surface d'état limite lorsque la fonction d'état limite présente un comportement fortement non linéaire et/ou un grand nombre de variable aléatoires.

## 6 Remerciements

Le CEA est remercié pour la mise à disposition du logiciel Cast3M dans sa version développement éducation et recherche.

## 7 Références

- Abdo T., Rackwitz R. (1979), "A new b-point algorithm for large time invariant and time-variant reliability problems, in Reliability and Optimization of Structures", Proceeding of 3<sup>rd</sup> WG 7.5 IFIP Conference, Berkeley.
- Comrel (1994), Comrel Manual, RCP Consulting GMBH, München.
- Hasofer A. M., Lind N. C. (1974), "An exact and invariant second moment code format", *Journal of Engineering Mechanics*, 100, p 111-121.
- Haukass T., Der Kiureghian A., "Parameter sensitivity and importance measures in nonlinear finite element reliability analysis", *Journal of Engineering Mechanics*, 131, 2005, 1013-1026.
- Madsen H. O. (1988), "Omission sensitivity factors", *Structural Safety*, 5, p 35-45.
- Nguyen X.S. (2007), "Algorithmes probabilistes appliqués à la durabilité et la mécanique des ouvrages de Génie Civil", Thèse de Doctorat INSA, Université de Toulouse.
- Rackwitz R., Fiessler B. (1979), "Structural reliability under combined random load sequences", *Computers & Structures*, 9, p 489-494.
- Sellier A. (2006), "Modélisations numériques pour la durabilité des ouvrages de Génie Civil", Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université Paul Sabatier Toulouse.

## **Dimensionnement probabiliste de la durabilité des bétons en environnement marin.**

F. Deby, M. Carcasses, A. Sellier

---

---

# Dimensionnement probabiliste de la durabilité des bétons en environnement marin

**Fabrice DEBY – Myriam CARCASSES – Alain SELLIER**

*Université de Toulouse ; UPS, INSA ;  
LMDC (Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions) ;  
135, avenue de Rangueil ; F-31 077 Toulouse Cedex 04, France.  
fabrice.deby@insa-toulouse.fr  
myriam.carcasses@insa-toulouse.fr  
alain.sellier@insa-toulouse.fr*

---

*RÉSUMÉ. Ce travail propose une méthodologie complète de dimensionnement de la durabilité des bétons en environnement marin basée sur une approche probabiliste. Les processus physico-chimiques qui conduisent à la corrosion des armatures du béton armé sont exposés. Les paramètres de durabilité correspondant sont évalués ainsi que l'incertitude associée. Deux types de ciment sont étudiés : CEM I et CEM I avec fumées de silice. Les lois de distribution ont été obtenues au travers d'une large revue bibliographique sur les propriétés de ces matériaux. L'évaluation du risque de corrosion en fonction du temps est effectuée au travers de l'indice de fiabilité de Lind-Hasofer.*

*ABSTRACT. This work aims for propose a complete methodology for durability design of concrete in marine environment based on a probabilistic approach. Physical and chemical processes which lead to the corrosion of the concrete reinforcement bars are exposed herein. The durability modelling parameters are evaluated with their associated incertitude. Two types of cement are studied: OPC and OPC with silica fume. The statistical distributions have been specified from a wide bibliographic review on properties of materials. The evaluation of the time dependant corrosion risk is done through the Lind-Hasofer reliability index.*

*MOTS-CLÉS : Béton, Corrosion, Chlorures, Approche Probabiliste, Indice de Fiabilité.*

*KEYWORDS: Concrete, Corrosion, Chloride, Probabilistic Approach, Reliability Index.*

---

## 1. Introduction

La corrosion constitue la principale cause de dégradation des ouvrages de génie civil en béton armé. Ce processus de dégradation est la conséquence de la pénétration d'agents agressifs dans le béton qui peuvent conduire à l'amorçage et au développement de la corrosion des armatures. Des règles de l'art, des recommandations et des normes permettent d'assurer la qualité du béton et contribuent à sa durabilité. Cependant, on observe également une fluctuation des indicateurs de durabilité due à la variabilité de fabrication du béton, des matériaux qui le constituent ou encore des méthodes de mesure. Le dimensionnement actuel du béton d'enrobage, dédié à protéger les premiers aciers, est empirique et ne prend pas en compte explicitement cette variabilité. Le but de ce travail est de proposer une approche intégrant la composition du béton et la variabilité des paramètres physiques associés à la diffusion des chlorures pour proposer une prédiction objective et probabiliste de la durabilité. Tout d'abord, le modèle de diffusion est exposé ; les paramètres physiques associés, considérés comme des variables aléatoires, sont présentés et leurs lois de distribution déterminées par des résultats d'essais sur CEM I et CEM I avec fumées de silice. Puis la méthode probabiliste est proposée pour évaluer le risque d'amorçage de la corrosion au travers de l'indice de fiabilité d'Hasofer-Lind. Un exemple complet de béton immergé dans l'eau de mer est exposé en dernière partie.

## 2. Description du modèle

### 2.1. La pénétration des chlorures

Un modèle de pénétration des chlorures dans le béton a pour but de prédire le profil en chlorures dans le matériau pour une durée d'exposition donnée :  $C(x,t)$ . Le transport des chlorures dans les matériaux cimentaires peut être décrit par deux types de modèle : empiriques et physiques. Les premiers sont appelés ainsi car ils nécessitent des données in situ pour calibrer le modèle et ainsi prédire le profil en chlorures par la solution analytique de la seconde loi de Fick. Ils sont toujours largement utilisés sous une forme plus ou moins sophistiquée. Les recherches récentes ont conduit au développement de théories plus précises sur les phénomènes physiques et chimiques en jeu dans la pénétration des chlorures. Les modèles multi-espèces, basés sur la relation de Nernst-Planck, décrivent la diffusion et les interactions ioniques entre les différentes espèces chimiques. Ces modèles sont les plus complets mais le nombre important de paramètres d'entrée nécessaires rend l'analyse statistique de ces données trop lourde pour le couplage avec une méthode probabiliste.

Comme cette étude est limitée au béton immergé dans l'eau de mer, nous travaillons avec un modèle non-linéaire de diffusion des chlorures en milieu poreux saturé basé sur la première loi de Fick. Cette description est un bon compromis entre

les modèles empiriques et multi-espèces tant sur le plan de la description des phénomènes que sur la durée des calculs. L'équation de conservation des chlorures libres, en introduisant le coefficient de diffusion apparent  $D_{app}$ , s'écrit alors :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_{app} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad \text{où} \quad D_{app} = \frac{D_e}{p + (1-p)\rho_s \frac{\partial C_b}{\partial c}} \quad [1]$$

Dans l'équation [1],  $D_e$  représente le coefficient de diffusion effectif ( $\text{m}^2/\text{s}$ ),  $c$  la concentration en chlorures libres ( $\text{mol}/\text{m}^3$  de solution),  $C_b$  la quantité de chlorures fixés ( $\text{mol}/\text{kg}$  de solide),  $p$  la porosité, et  $\rho_s$  la masse volumique spécifique du matériau poreux ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ). Cette équation est résolue en utilisant un schéma numérique en différences finies semi implicite qui permet notamment de prendre en compte la forme de l'isotherme de fixation  $C_b(c)$ .

## 2.2. Les paramètres du modèle

Dans notre démarche, et pour une simplicité d'application, seules la composition du béton, les caractéristiques chimiques du ciment et la mesure de la porosité sont nécessaires. Deux modèles élémentaires permettent de calculer le coefficient de diffusion  $D_e$  et l'isotherme de fixation  $C_b(c)$  pour un béton de CEM I avec ou sans fumées de silice.

$D_e$  est calculé à partir de la porosité de la pâte de ciment  $p_{paste}$  et de la fraction volumique de pâte  $v_p$ . Basée sur des résultats expérimentaux et en considérant l'effet combiné de la dilution et de la tortuosité lié à la présence des granulats, la relation suivante est proposée pour le calcul du coefficient de diffusion ( $\text{m}^2/\text{s}$ ) pour un béton de CEM I :

$$D_e = \exp(13 \cdot p_{paste} - 31) \cdot v_p^{3/2} \quad [2]$$

Pour l'ajout de fumées de silice, les CSH issus de la réaction pouzzolanique avec la portlandite CH ont une porosité plus faible en comparaison des CSH primaires issu de la réaction du CEM I seul, ce qui densifie la microstructure notamment à l'auréole de transition. La présence de fumées de silice permet donc d'améliorer la durabilité du béton en diminuant le coefficient de diffusion. A partir des travaux de Song (Song *et al.*, 2007), une réduction relative  $R_{sf}$  du coefficient de diffusion  $D_{esf}$  avec fumées de silice est proposée en fonction du taux de substitution du ciment  $s$  :

$$R_{sf} = \frac{D_{esf}}{D_e} = \begin{cases} -12,7 \cdot s + 1 & \text{si } s \leq 0,07 \\ -s + 0,19 & \text{si } 0,07 < s \leq 0,17 \\ 0,02 & \text{si } s > 0,17 \end{cases} \quad [3]$$



Les chlorures fixés  $C_B$  (mmol/g de ciment) sur la matrice cimentaire sont calculés à partir des quantités de CSH, de monosulfoaluminates AFm (en % en masse de ciment) et des chlorures libres  $c_f$  en solution interstitielle (mol/l) selon la relation de Hirao (Hirao *et al.*, 2005) :

$$C_B = 0,62 \cdot \frac{2,65 \cdot c_f}{1 + 2,65 \cdot c_f} \cdot \frac{\%CSH}{100} + 1,38 \cdot c_f^{0,58} \cdot \frac{\%AFm}{100} \quad [4]$$

La fixation sur les AFm est attribuée à la formation de sels de Friedel tandis que l'on observe de la sorption sur les CSH. En considérant que la pâte de ciment est principalement composée de CSH, CH, AFm et AFt, il est possible d'estimer ces différentes phases hydratées par résolution du système suivant en fonction de la composition du ciment :

$$\begin{cases} \text{CaO} = \text{CH} + 1,65\text{CSH} + 4\text{AFm} + 6\text{AFt}(\text{ou } 3\text{C}_3\text{AH}_6) \\ \text{SiO}_2 = \text{CSH} \\ 2\text{Al}_2\text{O}_3 = 2\text{AFt}(\text{ou } 2\text{C}_3\text{AH}_6) + 2\text{AFm} \\ \text{SO}_3 = 3\text{AFt}(\text{ou } 0\text{C}_3\text{AH}_6) + \text{AFm} \end{cases} \quad [5]$$

Néanmoins, si la quantité de sulfates est insuffisante, le système ne peut être résolu et l'on considère alors la présence d'hexahydrates  $\text{C}_3\text{AH}_6$ . De plus, les quantités obtenues sont pondérées par le degré d'hydratation du ciment  $\alpha$ , calculé à 28 jours en fonction du rapport  $E/C$  (Waller *et al.*, 1996) :

$$\alpha = 1 - \exp(-3,15 \cdot \frac{w}{c}) \quad [6]$$

De la même façon, pour prendre en compte l'influence de la fumée de silice sur la fixation des chlorures, une correction est apportée sur les CSH. En effet, par la création de CSH secondaires issus de la réaction pouzzolanique, la quantité totale de CSH augmente, mais une partie des CSH primaires deviennent inaccessibles pour fixer les chlorures. Finalement, les CSH sont donc obtenus par le système [5], où l'on retranche aux CSH obtenus la moitié des CSH secondaires, et l'on pondère par le degré d'hydratation à 28 jours d'un ciment avec fumées de silice (Waller *et al.*, 1996).

Notons finalement que toutes ces lois phénoménologiques, malgré leur simplicité d'utilisation, sont compatibles avec une approche probabiliste et ont été choisies pour leur signification physique.

### 3. La méthode probabiliste

#### 3.1. Variabilité des paramètres du modèle

Une large revue bibliographique nous permet d'estimer les lois de distribution des paramètres du modèle de diffusion. Tout d'abord, en considérant les paramètres calculés par les modèles élémentaires (coefficient de diffusion et quantité de chlorures fixés) et les résultats expérimentaux de la littérature, on peut écrire :

$$D_{e\ exp} = Err_D \cdot D_{e\ calcul} \text{ et } D_{esf\ exp} = Err_{Dsf} \cdot D_{esf\ calcul} \quad [7]$$

$$C_{B\ exp} = Err_C \cdot C_{B\ calcul} \text{ et } C_{Bsf\ exp} = Err_{Csf} \cdot C_{Bsf\ calcul} \quad [8]$$

où  $Err_D$  et  $Err_{Dsf}$  sont des erreurs multiplicatives calculées respectivement avec 39 et 36 valeurs expérimentales. La figure 1 présente les histogrammes des valeurs de  $Err_D$  et  $Err_{Dsf}$ .  $Err_D$  peut être représentée par une distribution lognormale de moyenne 1,02 et d'écart type 0,42, et  $Err_{Dsf}$  par une distribution lognormale de moyenne 1,85 et d'écart type 1,67.

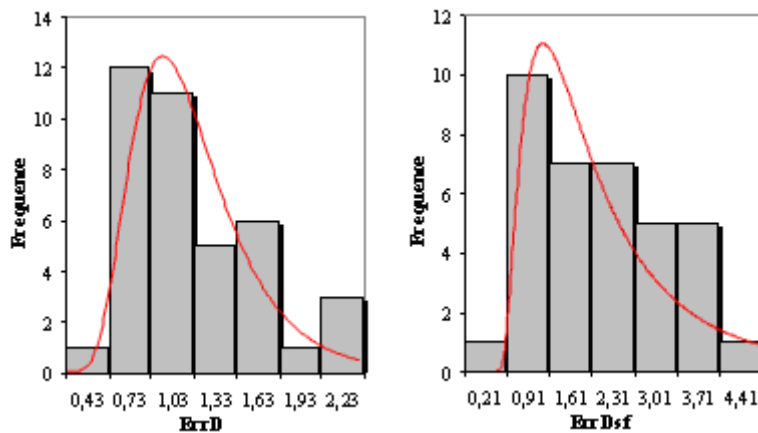


Figure 1. Histogrammes de l'erreur de modèle sur le coefficient de diffusion

De la même façon,  $Err_C$  est calculée en utilisant 24 points expérimentaux et  $Err_{Csf}$ , 28 points. La figure 2 montre les histogrammes des valeurs prises par  $Err_C$  et  $Err_{Csf}$ .  $Err_C$  peut être représentée par une distribution lognormale de moyenne 1,01 et d'écart type 0,22, et  $Err_{Csf}$  par une distribution lognormale de moyenne 1,03 et d'écart type 0,27.

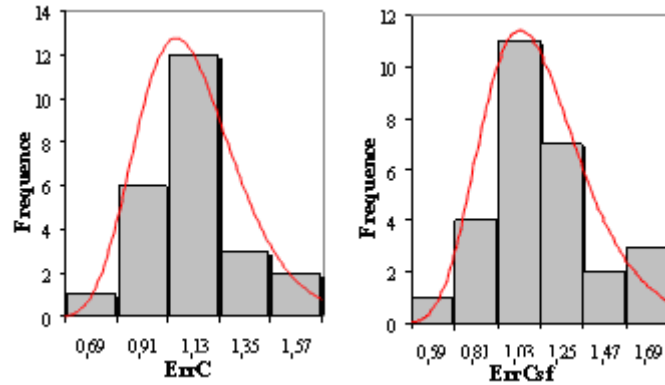


Figure 2. Histogrammes de l'erreur de modèle sur la fixation des chlorures

Ces quatre lois de distributions ont été validées par deux tests statistiques avec un niveau de risque de 5%, le test du  $\chi^2$  et le test de Shapiro-Wilk. On peut noter les écarts types importants sur le coefficient de diffusion, mais ils prennent en compte la dispersion expérimentale due aux différents essais existants : il apparaît alors difficile d'améliorer la justesse du modèle élémentaire car la précision de ce dernier est masquée par cette dispersion expérimentale.

La porosité  $p$  est obtenue directement par la mesure de porosité à l'eau, calculée d'après les recommandations AFPC-AFREM (AFPC, 1997). En règle générale, la distribution des valeurs expérimentales de porosité suit une loi lognormale (AFPC 1997).

Enfin, comme nous allons le voir dans ce qui suit, l'épaisseur du béton d'enrobage  $e$  doit être prise en compte puisque nous avons besoin de définir la position des armatures dans le béton armé pour le problème de corrosion.  $e$  est considérée comme une variable aléatoire dont la valeur moyenne est définie suivant les règles actuelles de dimensionnement (Eurocode 2, 2005). La loi de distribution est lognormale et le coefficient de variation est en général de 20% (Casciati *et al.*, 1991), ce qui peut paraître élevé mais traduit une qualité courante d'exécution des ouvrages.

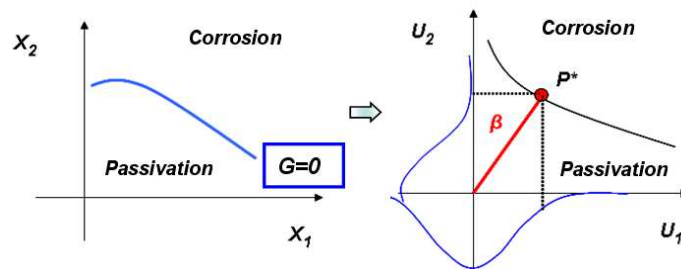
### 3.2. Calcul de la probabilité de défaillance

La méthode probabiliste est nécessaire pour prendre en compte les lois de distribution des paramètres d'entrée du modèle de diffusion des chlorures dans le calcul de la probabilité d'amorçage de la corrosion avec un temps d'exposition donné. C'est la probabilité que la quantité de chlorures au niveau du premier lit d'armatures atteigne une concentration critique. Le calcul de la probabilité nécessite de définir une fonction performance  $G(X)$ . En fonction des réalisations des variables

aléatoires (représentées par le vecteur  $X$ ), l'état d'une structure peut appartenir à deux domaines : un *domaine de défaillance* ( $G(X) \leq 0$ ), pour lequel l'amorçage de la corrosion est possible, ou un *domaine de sûreté* ( $G(X) > 0$ ), pour lequel les aciers sont passivés. La frontière d'équation  $G(X) = 0$  est appelée *surface d'état limite* ou de défaillance (figure 3). La probabilité de défaillance  $P_f$  est alors définie par :

$$P_f = \text{prob}[G(\bar{X}) \leq 0] \quad [9]$$

Dans cette approche, la probabilité de défaillance est estimée par l'indice de fiabilité d'Hasofer-Lind. Celui-ci est défini dans l'espace des variables aléatoires standardisées<sup>1</sup> (représentées par le vecteur  $U$ ) comme la distance la plus courte entre la surface d'état limite et l'origine du repère, soit  $\beta = \|OP^*\|$  (figure 3).  $P^*$  est donc le point où la défaillance est la plus probable. Dans ces conditions, les valeurs médianes des lois de distribution étant centrées sur l'origine du repère, plus  $\beta$  est petit, plus la probabilité de défaillance est importante. Au contraire, si l'indice  $\beta$  est grand, les valeurs correspondantes au point  $P^*$  se situent loin des médianes des lois de distribution : la probabilité de défaillance est alors faible (figure 3).



**Figure 3.** Définition de la surface d'état limite et de l'indice de fiabilité

L'indice de fiabilité  $\beta$  est déterminé ici par la méthode du gradient projeté pour lequel le point de défaillance  $P^*$  le plus probable est obtenu par itérations successives (Rackwitz *et al.*, 1979).

Pour la diffusion des chlorures, d'après la définition précédente de la fonction performance  $G$ , nous avons besoin de choisir une concentration critique pour le calcul de la probabilité de défaillance  $P_f$ . Les données publiées par différents auteurs montrent que la concentration critique peut varier de façon très importante, à savoir de 0,35 à 3% en masse de ciment (Alonso *et al.*, 2000). L'influence de différents facteurs, tels que la composition du béton, la teneur du ciment en  $C_3A$ , le rapport

1. Normales centrées et réduites par une transformation probabiliste (par exemple la transformation de Nataf)

$E/C$ , l'humidité relative, ou la température sont autant de raisons différentes pour cette variabilité. A cause de cette dispersion importante et le manque de données statistiques, la borne inférieure des valeurs observées pour l'amorçage de la corrosion (0,4% en masse de ciment pour les chlorures totaux) est retenue.

Finalement, les quatre variables aléatoires définies dans la partie précédente subsistent : la porosité  $p$ , les erreurs sur les coefficients de diffusion  $Err_D$  et  $Err_{Dsf}$ , les erreurs sur les chlorures fixés  $Err_C$  et  $Err_{Csf}$ , et l'enrobage du béton  $e$ .

## 4. Application

### 4.1. Les données du problème

Dans cette partie, nous allons illustrer cette méthodologie par l'exemple d'un béton immergé dans l'eau de mer. Le béton utilisé est un béton haute-performance de rapport  $E/C=0,4$  et dont la composition est donnée dans le tableau 1. Le ciment utilisé pour la composition du béton est un CEM I 52,5N. Son analyse chimique est fournie dans le tableau 2.

Composition (kg/m <sup>3</sup> )		
Ciment	CEM I 52,5 N	425
Sable	0/4 mm	760
Gravier	4/20 mm	1152
Superplastifiant		6
Eau		145

Composition (%)	CaO	SiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	MgO	SO <sub>3</sub>	K <sub>2</sub> O	Na <sub>2</sub> O	Perte au feu
CEM I 52,5 N	63,71	20,3	5,26	2,24	1,12	3,49	1,1	0,08	2,2

**Tableaux 1 et 2.** Formulation du BHP et caractéristiques chimiques du ciment

La concentration en chlorures à la surface exposée est de 480 mol/m<sup>3</sup>. Elle correspond à la salinité moyenne des océans de 35g/l, dont 27g/l de NaCl. Nous considérons une valeur déterministe puisque la salinité reste quasi-constante pour une position géographique donnée. L'épaisseur du béton d'enrobage est de 5 cm, choisie selon la valeur recommandée dans les règles de dimensionnement en environnement marin (Eurocode 2, 2005). La porosité à l'eau mesurée est de 9,5% avec un écart type de 0,38%.

Pour étudier l'influence de la fumée de silice, le même béton est utilisé avec un taux de substitution du ciment en fumées de silice de 0,08, c'est-à-dire un dosage en ciment de 391 kg/m<sup>3</sup> et de 34 kg/m<sup>3</sup> en fumées de silice. La porosité à l'eau mesurée

est de 10% avec un écart type de 0,4%. L'ensemble des informations concernant les distributions, les moyennes et les écarts types sont récapitulées dans le tableau 3.

Variable	Distribution	Moyenne	Écart Type	Variable	Distribution	Moyenne	Écart Type
<i>Béton CEM I</i>				<i>Béton CEM I + FS</i>			
Porosité $p$	Lognormale	9,5%	0,38%	Porosité $p$	Lognormale	10%	0,4%
$Err_b$	Lognormale	1,02	0,42	$Err_{cor}$	Lognormale	1,85	1,67
$Err_c$	Lognormale	1,01	0,22	$Err_{csf}$	Lognormale	1,03	0,27
Enrobage $e$	Lognormale	5 cm	1 cm	Enrobage $e$	Lognormale	5 cm	1 cm

Tableau 3. Distributions des variables aléatoires

#### 4.2. Les résultats de fiabilité

La variation dans le temps de l'indice de fiabilité est représentée sur la figure 4 pour les deux bétons. La diminution de cet indice illustre l'augmentation de la probabilité de défaillance du matériau au cours du temps. Pour le béton de CEM I, on passe d'un indice  $\beta$  de 7,2 au bout d'un an d'exposition à 0,5 au bout de 50 ans d'exposition, ce qui correspond pour cette dernière date à une probabilité d'amorçage de la corrosion de 30%. La réglementation (Eurocodes Structuraux, 2003) préconise une valeur seuil de 1,5 à 50 ans : il s'agit de prescriptions communes aux Etats Limites de Service correspondant à une probabilité de défaillance de 7%. Dans cette étude, compte tenu de la définition de la concentration critique en chlorures, c'est l'ELS qui a été retenu. L'indice de fiabilité calculé est donc légèrement inférieur à la cette valeur limite de 1,5 à 50 ans.

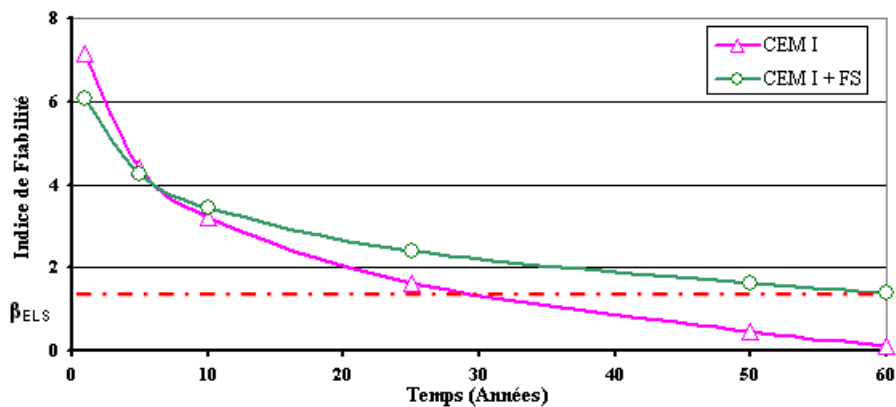


Figure 4. Variation de l'indice de fiabilité en fonction du temps

Pour le béton avec fumées de silice, grâce à la forte diminution du coefficient de diffusion, on observe par rapport au cas précédent une augmentation de la fiabilité après 10 ans. La valeur limite pour l'Etat Limite de Service à 50 ans n'est pas atteinte, ce qui indique la fiabilité de ce béton est assurée avec les critères retenus.

## 5. Conclusion

Nous avons présenté dans ce travail une méthodologie de dimensionnement de la durabilité d'un béton immergé dans l'eau de mer. La durée de vie de l'ouvrage est ainsi quantifiée objectivement au travers de l'indice de fiabilité  $\beta$  en prenant en compte toutes les incertitudes liées à la mise en œuvre, au matériau lui-même ou encore aux mesures : l'Eurocode 0 propose en effet des valeurs cibles de l'indice de fiabilité suivant l'ouvrage et la durée de référence. Le recours à des modèles élémentaires et à des données bibliographiques permet d'appliquer la démarche en limitant le nombre d'essais. On retiendra alors le caractère général et transposable de cette méthodologie. Elle offre aux ingénieurs des outils d'aide à la décision en matière de durabilité en prenant en compte les caractères aléatoires des phénomènes.

## 6. Bibliographie

- AFPC, « Méthodes recommandées pour la mesure des grandeurs associées à la durabilité », *Compte-rendu des journées techniques*, 1997.
- Alonso C., Andrade C., Castellote M., Castro P., « Chloride threshold values to depassivate reinforced bars embedded in a standardized OPC mortar », *Cement and Concrete Research*, vol.30, 2000, p. 1047-1055.
- Casciati F., Negri L., Rackwitz R., « Geometrical variability in structural members concrete and systems », *Working document*, Joint Committee on Structural Safety, 1991.
- Eurocodes Structuraux, AFNOR P06-100, NF EN 1990, « Eurocodes structuraux - Bases de calcul des structures », 2003.
- Eurocode 2, AFNOR P18-325, NF EN 206-1, « Béton - Partie 1 : spécification, performance, production et conformité », 2000.
- Hirao H., Yamada K., Takahashi H., Zibara H., « Chloride binding of cement estimated by binding isotherms of hydrates », *Journal of Advanced Concrete Technology*, vol.3, n° 1, 2005, p. 77-84.
- Rackwitz R., Fiessler B., « Structural reliability under combined random load sequences », *Computers and Structures*, Vol.9, 1979.
- Song H.W., Juang J.C., Saraswathy V., Byun K.J., « An estimation of the diffusivity of silica fume concrete », *Building and environment*, Vol.42, 2007, p. 1358-1367.
- Waller V., De Larrard F., Roussel P., « Modelling the temperature rise in massive HPC structures », Paper 170 RILEM, *4<sup>th</sup> Int. Symposium on Utilisation of HPC*, 1996.

## **<sup>2</sup>SMART : SVM et Subset pour la fiabilité.**

F. Deheeger, M. Lemaire, T. Yalamas

---



---

## <sup>2</sup>SMART : SVM et subset pour la fiabilité

**F. Deheeger\*** — **J.-M. Bourinet\*\*** — **M. Lemaire\*\*** — **T. Yalamas\***

\* *Phimeca Engineering S.A.,  
Centre d’Affaires du Zénith  
34, rue de Sarliève  
63800 COURNON d’AUVERGNE*

\*\* *IFMA,  
Campus des Cézeaux  
63175 AUBIÈRE*

*prenom.nom@phimeca.com  
prenom.nom@ifma.fr*

---

*RÉSUMÉ. L’enjeu lié à l’utilisation des méthodes de couplage mécano-fiabiliste pour des problématiques à dimension industrielle est de minimiser le nombre d’évaluations du modèle physique. Dans cette optique est développée une méthode originale basée sur l’association des Support Vector Machine et de la subset simulation. L’efficacité de la méthode proposée est illustrée sur une application issue du benchmark PROSIR.*

*ABSTRACT. The main limitation of reliability studies applied to industrial problematics is time consuming mechanical models. In this paper is decribed an original anb efficient approach based on the association of Support Vector Machine and of subset simulation. The effectiveness and robustness of the suggested method is illustrated through an application resulting from the PROSIR benchmark.*

*MOTS-CLÉS : Séparateur à Vaste Marge, Subset simulation, Classification, Probabilité de défaillance.*

*KEYWORDS: Support Vector Machine, Subset simulation, Classification, Failure probability.*

---

## 1. Contexte

La réalité de la mécanique est plongée dans l'incertain dont la prise en compte dans la conception est indispensable pour un dimensionnement fiable, robuste et optimal des structures. Les méthodes utilisées actuellement [LEM 08] s'appuient sur un modèle stochastique des variables de conception notées dans un vecteur  $X$  et sur une ou plusieurs fonction(s) de performance notée(s)  $G(X)$ . La fiabilité est alors mesurée par la probabilité  $P_f$  de l'événement  $G(X) \leq 0$  associé à la défaillance et la robustesse par la sensibilité de cette fonction  $G(X)$  par rapport aux variables de conception. Les méthodes dérivées de Monte-Carlo ou les méthodes d'approximation exigent un grand nombre de répétitions du calcul mécanique pour des réalisations des variables aléatoires judicieusement choisies. Les modèles du comportement mécanique sont souvent complexes (comportement non-linéaire, dynamique, fatigue, mécanique de la rupture, etc). L'enjeu est de minimiser le nombre des calculs mécaniques, principal consommateur des ressources en calcul. Ce papier propose une approche innovante couplant les *Support Vector Machines* (SVM) et les *Subset Simulation*. L'objectif est la mise en œuvre d'une approche probabiliste pour des problèmes caractérisés par :

- un modèle numérique simulant la mécanique ou la physique d'un problème représentatif d'une application industrielle (temps de calcul important) ;
- un état-limite  $G(X) = 0$  de forme complexe ;
- un modèle stochastique de dimension significative ;
- l'utilisation d'un code propriétaire de manière externe (approche non-intrusive).

La pertinence de l'approche proposée est illustrée sur une application industrielle issue du projet PROSIR. Il s'agit d'une étude de la fiabilité thermo-mécanique d'une cuve, composant d'une installation nucléaire. Ce projet a mis en commun les travaux de différentes entreprises européennes liées au nucléaire dont EDF, CEA et AREVA.

## 2. Notions de classification et SVM

L'approche proposée consiste à utiliser une méthode d'apprentissage pour construire un substitut de la surface d'état-limite  $G(X) = 0$  de manière séquentielle et itérative, permettant de garantir une précision satisfaisante sur ce substitut. Cette méthode est basée sur le couplage de l'outil SVM et de la méthode de simulation par *subset*. Il est donc nécessaire de décrire l'exercice de classification et les SVM.

### 2.1. Classification et SVM

Les SVM ont été créés pour résoudre des problèmes dits de *classification*. Le principe de l'algorithme est de créer un hyperplan qui sépare les données en deux classes (classification binaire), cf. figure 1, en utilisant le principe de *marge maximale* : considérons des points d'apprentissage appartenant aux classes  $-1$  et  $+1$ , l'hyperplan

maximisant la marge sépare les deux classes des points d'apprentissage de telle façon que la distance entre les points les plus proches de la marge et l'hyperplan soit maximisée.

L'intérêt pour le problème de la fiabilité est simple : il s'agit d'associer une classe à la réponse du système mécanique pour la réalisation  $x$  des variables de base, classe "sûreté" (+1), et classe "défaillance" (-1). **Notre objectif est de trouver une formulation analytique de la frontière des classes.**

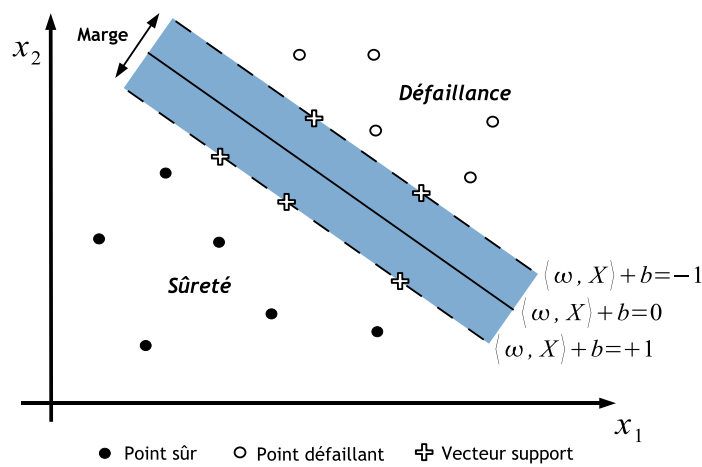


Figure 1 – Illustration d'un séparateur dans le cas de classes linéairement séparables. Les différents attributs des SVM sont affichés sur la figure : la marge, les points d'apprentissage des 2 classes, les points (ou vecteurs) supports qui permettent à eux seuls de définir la frontière entre les classes.

Nous cherchons un hyperplan qui sépare les deux classes de la forme suivante :

$$G(X) = \langle \omega, X \rangle + b \quad (1)$$

où  $\omega$  est un vecteur de paramètres, vecteur définissant la normale à l'hyperplan ; et  $b$  est appelé le seuil. La fonction de classification s'écrit alors :

$$c(X) = \text{sgn}(G(X)) = \text{sgn}(\langle \omega, X \rangle + b) \quad (2)$$

On demande à cet hyperplan de maximiser la distance entre l'hyperplan et les deux classes, ce qui constitue une condition d'optimalité de position de l'hyperplan. Cela se comprend intuitivement sur la figure 1. Le problème de classification se résume à déterminer le vecteur de paramètres  $\omega$  et le seuil  $b$ , en respectant ces conditions d'optimalité de position de l'hyperplan.

La résolution du problème d'optimisation passe par l'utilisation du Lagrangien pour intégrer les contraintes de bonne classification. Les contraintes actives de l'op-

timisation correspondent aux points ou vecteurs supports. Ces contraintes actives ne sont autres que les points sur la marge.

Il est clairement montré que l'hyperplan est uniquement défini par les vecteurs supports, *ie.* les points les plus proches, ce qui est pressenti intuitivement : pour définir la frontière entre les domaines il suffit de s'appuyer sur les points proches de cette frontière. Cette propriété est essentielle pour la suite : **pour affiner la séparation, seules les réalisations dans la marge sont utiles, les autres peuvent être classées sans calcul supplémentaire à partir de la connaissance du séparateur SVM.**

## 2.2. Le cas non linéaire - méthode à noyaux

Le principe est le suivant : en utilisant un projecteur non linéaire  $\Phi$ , une transformation de l'espace de départ est réalisée. Cette transformation effectue une projection de l'espace de départ dans l'espace dit support, espace qui présente la particularité d'avoir une dimension supérieure à l'espace de départ. La figure 2 illustre cette transformation de l'espace.

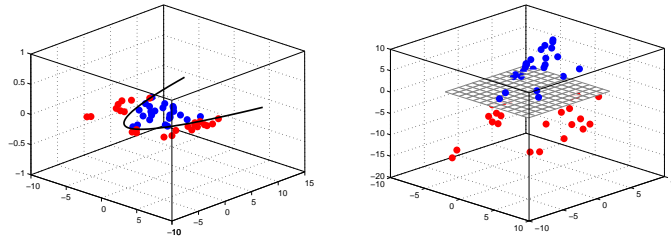


Figure 2 – Illustration de transformation de l'espace de départ vers le *feature space*. Le *Kernel Trick* permet de faire le lien entre un séparateur non linéaire dans l'espace de départ et un séparateur linéaire dans l'espace support par l'intermédiaire d'une fonction noyau.

L'espace support permet de retrouver le cas précédent des classes linéairement séparables, la formulation du séparateur reste la même, mais le produit scalaire (fonction noyau linéaire) est remplacé par une fonction noyau  $K$  plus générale. Par exemple, le noyau RBF (*Radial Basis Function*) :

$$K(X_1, X_2) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|X_1 - X_2\|^2\right) \quad (3)$$

### 3. SVM et fiabilité

L'objectif est de résoudre un problème de fiabilité en créant un substitut analytique de la fonction d'état-limite par le biais de la classification entre les domaines de sûreté et de défaillance. La simulation de Monte-Carlo est ensuite abordée comme un problème de classification. Cette stratégie s'avère payante pour évaluer la probabilité de défaillance. En effet, le concept de marge permet de créer une stratégie spécifique d'apprentissage efficace.

#### 3.1. la méthode SMART

Dans un premier temps, le travail se concentre sur les simulations de Monte-Carlo qui sont, par ce biais, rendues très efficaces. Une critique constructive de l'algorithme d'apprentissage des SVM proposé par J.E. Hurtado [HUR 04] permet d'aboutir à un algorithme performant construit spécifiquement pour la fiabilité et l'obtention de la probabilité de défaillance.

La méthode baptisée SMART (*Support vector Margin Algorithm for reliability esTimation*) est basée sur une propriété intéressante des SVM : pour améliorer le séparateur défini, il faut ajouter à la base d'apprentissage des points situés dans la marge. Ainsi à chaque itération, soit à chaque amélioration du séparateur, "quelques" points de la marge sont ajoutés à la base de données des points d'apprentissage. Cette propriété permet d'affiner le séparateur. Le gain en temps de calcul est obtenu par le fait qu'un nombre restreint de réalisations permet de définir le séparateur SVM, qui permet ensuite de séparer l'ensemble des points d'une simulation de Monte-carlo et d'aboutir ainsi à la probabilité de défaillance.

Le schéma itératif de la méthode d'apprentissage est le suivant :

- 1) transformation des variables aléatoires dans l'espace standard (espace de variables gaussiennes centrées réduites et décorréliées) ;
- 2) réalisation d'un premier plan d'expérience aléatoire et évaluation des points par la fonction de performance ;
- 3) calcul d'un premier séparateur par rapport aux classes obtenues sur les premiers points ;
- 4) définition d'une population de travail par une simulation : zone de l'espace dans laquelle le séparateur doit être affiné ;
- 5) sélection des points de la marge parmi la population de travail ;
- 6) sélection de  $k$  points de la marge ;
- 7) évaluation de la fonction de performance sur les  $k$  points et évaluation d'un nouveau séparateur ;
- 8) retour à l'étape 4 jusqu'à convergence.

À partir de ce schéma de principe, la réflexion a abouti à différentes étapes clés représentant le cœur de la méthode SMART.

- Le plan d’expériences initial

Un compromis est nécessaire entre le nombre de points initiaux et l’exploration de l’espace. Dans cette optique, le plan aléatoire de type hypercube latin a été retenu.

- Approche multi-échelles des phases d’apprentissage

3 phases définissent le processus d’apprentissage :

- 1) **position** : la population de travail est uniforme et dispersée
- 2) **stabilisation** : population de travail toujours uniforme mais plus dense
- 3) **précision** : la population de travail est la simulation de Monte-Carlo

Ces phases permettent d’améliorer la vitesse de convergence de la méthode.

- Sélection de nouveaux points d’apprentissage

Les points d’apprentissage sont sélectionnés parmi les points de la population de travail appartenant à la marge :

- points **clusters** : pour une dispersion le long de la marge
- points **instables** : points dont la classe change entre 2 itérations
- points **proches** : points les plus proches du séparateur analytique

Cette méthode d’apprentissage est très efficace, mais l’évaluation d’une probabilité de défaillance faible reste cependant une limite. En effet, ce cas de figure influence le choix des paramètres à utiliser : la taille du plan initial et le nombre de simulations nécessaires à l’évaluation de la probabilité de défaillance. La section suivante montre comment la *subset simulation* peut améliorer le concept dans ce cas de figure.

### 3.2. La méthode <sup>2</sup>SMART

Le principe de la classification et de l’apprentissage décrit précédemment est appliqué sur les simulations par subset, méthode décrite dans [AU 01]. La probabilité de défaillance est exprimée par le produit de  $m$  probabilités conditionnelles  $P_i, i = 1..m$  sur des seuils successifs décroissants de la fonction de performance. Ainsi, même si  $P_f$  est très faible, en choisissant judicieusement la valeur des seuils intermédiaires, les probabilités cherchées  $P_i$  sont suffisamment grandes pour être évaluées de manière efficace par simulations.

Utilisons la définition des probabilités conditionnelles pour écrire la grandeur recherchée :

$$P_f = P(F) = P(F | F_{m-1})P(F_{m-1}) = \dots = P(F_1) \prod_{i=2}^m P(F_i | F_{i-1}) \quad (4)$$

La règle utilisée pour le choix judicieux du seuil est la suivante : les seuils successifs sont choisis tels que les probabilités conditionnelles évaluées sont de l'ordre de 0, 1. Pour évaluer  $P_f$ , il faut évaluer les probabilités :

$$P(F_1) \text{ et } \{P(F_{i+1} | F_i), i = 1, \dots, m - 1\}.$$

Pour la première probabilité, l'évaluation par Monte-Carlo classique est possible. Les probabilités conditionnelles nécessitent de générer une simulation conditionnée. L'idée est alors d'utiliser une méthode de chaînes de Markov basée sur l'algorithme de Metropolis Hastings, pour générer les échantillons conditionnés.

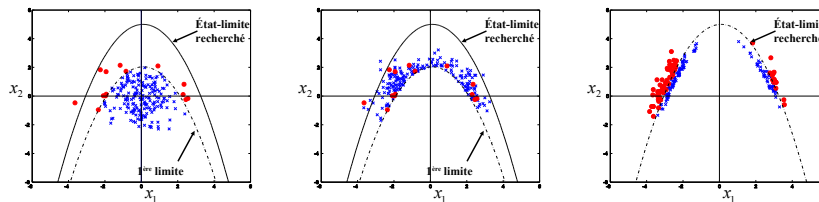


Figure 3 – Illustration des pas de subset.

La figure 3 présente les étapes de la *subset simulation*. Le premier pas est une simulation de Monte-carlo. Le seuil à 10% est évalué *a posteriori*. Les réalisations défaillantes par rapport au premier seuil servent de germes à l'algorithme de Metropolis pour générer la simulation conditionnelle du pas d'après. La probabilité du second pas est évaluée sur cette simulation conditionnelle. Les points défaillants servent de germes pour le pas suivant. L'algorithme se termine lorsque le seuil est 0, *i.e.* le seuil objectif. La probabilité par rapport à ce dernier seuil est évaluée par le produit des différentes probabilités calculées au cours de l'algorithme.

La méthode proposée est dénommée <sup>2</sup>SMART (Subsets simulations by Support vector Margin Algorithm for Reliability esTimation) [DEH 07, DEH 08]. Elle consiste à utiliser l'apprentissage SMART à chaque étape de la simulation par subset. Cette technique permet l'évaluation de probabilités faibles et simplifie l'exercice de classification en guidant les populations de travail dans les zones importantes pour l'évaluation de la probabilité.

#### 4. Le projet PROSIR

PROSIR, ou *Round Robins on Probabilistic Approach for Structural Integrity of Reactor Pressure Vessel* [PRO 06].

Dans le cadre du comité de sécurité des installations nucléaires de l'OCDE-NEA, le groupe de travail sur l'intégrité des composants et structures est en charge de l'étude sur l'âge des composants et des structures des centrales nucléaires. Une des clés réside dans l'étude des effets des radiations sur la cuve, dont un schéma est proposé

en figure 4. Les incertitudes prises en compte concernent les transitions thermiques, les propriétés matériaux, la distribution des défauts. L'approche déterministe est très conservative mais coûteuse et l'apport de l'approche probabiliste est examinée.

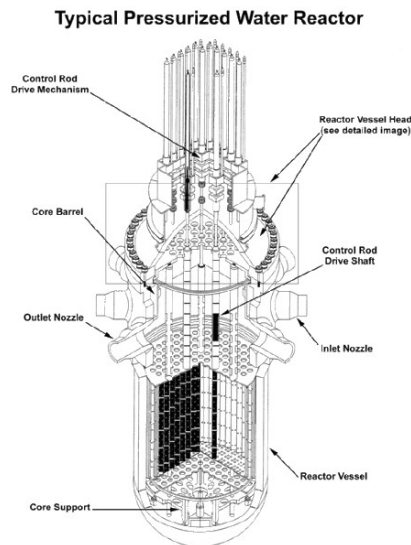


Figure 4 – Représentation de la cuve étudiée dans le projet PROSIR.

L'ensemble des données du problème (données cohérentes mais pas réelles...) sont fournies à différentes unités de recherche publiques et privées pour comparer méthodes et résultats. Une première phase du projet consiste à comparer les résultats sur l'approche déterministe, puis dans une seconde phase une approche probabiliste est mise en œuvre par les participants.

Deux points sont intéressants pour la validation en plus du simple fait que cette application soit industrielle. L'état-limite considéré est complexe de par la présence de points de conception multiples et les niveaux de fiabilité sont très importants, autrement dit, les probabilités de défaillance sont très faibles.

#### 4.1. Description du modèle

Il s'agit d'une étude thermo-mécanique de la résistance d'une cuve face à un choc thermique pressurisé suite à une injection d'eau de refroidissement. Il s'agit de déterminer la nocivité d'un défaut (elliptique, circonférentiel ou longitudinal), sous le revêtement, en tenant compte de l'effet de l'irradiation sur les propriétés à rupture des matériaux (métal de base et joint soudé). Les variables utilisées dans le modèle stochastique du projet PROSIR sont décrites dans le tableau 1.



Variabiles aléatoires	Loi	Moyenne	Écart-type
$U_{RTNDT}$	Normale	0	1
$U_{K1C}$	Normale	0	1
$A$ ( mm)	Déterministe	12	–
$C$ ( mm)	Déterministe	72	–
Âge (années)	Paramètre	10; 20; 40 ou 60	–
$RTNDT_{INIT}$	Normale	–20	9
Cuivre	Normale	0,086	0,01
Phosphore	Normale	0,0137	0,001
Nickel	Normale	0,72	0,05
Fluence	Normale	0	1

Tableau 1 – Variables aléatoires pour le projet PROSIR.

Le modèle stochastique décrit dans le tableau 1 contient une simplification importante. La géométrie du défaut est déterministe. Pour plus de réalisme, un aléa est apporté à la description du défaut. Les variables  $A$  et  $C$  sont probabilisées, mais restent liées :  $C = 6A$ . La probabilité sur  $A$  est décrite comme suit :

$$\begin{cases} P(A < x) = 1 - \exp(-689x) \text{ pour } x < 8,559 \text{ mm} \\ P(A < x) = 1 - 0,02 \exp(-232x) \text{ pour } 8,559 \text{ mm} \leq x \end{cases} \quad (5)$$

La variabilité introduite dans le défaut perturbe de manière importante la résolution et les résultats du calcul. Cet aléa influence fortement la convergence de la méthode FORM, méthode qui devient inutilisable dans ce cas. La figure 5 montre une bonne adéquation entre les résultats par subset et les résultats par la méthode <sup>2</sup>SMART. Elle montre également un gain important en terme de nombre d'évaluations de l'état-limite.

Âge (années)		FORM	Subset	Subset	<sup>2</sup> SMART
10	$N$ appels	200	16000	80000	4500
	$P_f$ ( $10^{-8}$ )	4960	3,36	1,89	1,96
	$\beta$	3,89	5,40	5,50	5,49
20	$N$ appels	200	16000	80000	4500
	$P_f$ ( $10^{-8}$ )	170000	6,66	8,71	10,23
	$\beta$	2,93	5,27	5,22	5,20
40	$N$ appels	200	14000	70000	4000
	$P_f$ ( $10^{-7}$ )	111	4,75	4,15	4,02
	$\beta$	4,24	4,90	4,93	4,93
60	$N$ appels	200	14000	70000	4000
	$P_f$ ( $10^{-7}$ )	10600	6,70	8,47	10,07
	$\beta$	3,07	4,83	4,79	4,75

Tableau 2 – Résultats fiabilistes obtenus pour le projet PROSIR avec le défaut aléatoire.

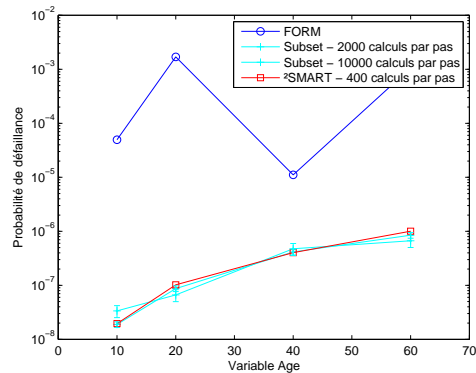


Figure 5 – Évolution de la probabilité de défaillance avec l'âge. Ces résultats sont obtenus par différentes méthodes pour la cuve avec un défaut aléatoire.

## 5. Conclusion

La classification est particulièrement bien adaptée à l'évaluation de la probabilité de défaillance. L'approche couplée apprentissage SVM et subsets par la méthode <sup>2</sup>SMART permet l'évaluation de faibles probabilités de défaillance sur des problèmes de dimension stochastique relativement importante. De plus, la flexibilité de l'approximation par les fonctions noyaux permet de traiter des problèmes complexes en terme d'état-limite.

## 6. Bibliographie

- [AU 01] AU S., BECK J., « Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation », *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 16, 2001.
- [DEH 07] DEHEEGER F., LEMAIRE M., « Support Vector Machine for efficient subset simulations : <sup>2</sup>SMART method », *Kanda J., Takada T. and Furuta H. eds. - Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, 10th ICASP, Tokyo, 2007.*
- [DEH 08] DEHEEGER F., « Couplage mécano-fiabiliste : <sup>2</sup>SMART méthodologie d'apprentissage stochastique en fiabilité », PhD thesis, LaMI-IFMA/UBP, 2008.
- [HUR 04] HURTADO J., « An examination of methods for approximating implicit limit state functions from the viewpoint of statistical learning theory », *Structural Safety*, vol. 26, 2004, p. 271-293.
- [LEM 08] LEMAIRE M., *Structural Reliability*, ISTE - to appear, 2008.
- [PRO 06] PROSIR, « Probabilistic Structural Integrity of a PWR Reactor Pressure Vessel », *Round Robins on Probabilistic Approach for Structural Integrity of Reactor Pressure Vessel, OECD - NEA PROSIR Workshop, Lyon, France, 2006.*

## **Propagation d'incertitude : Analyse de la variation paramétrique d'une surface de réponse polynomiale.**

A. Yaméogo

---

---

# **Modèle physico-probabiliste : analyse paramétrique via une surface de réponse polynomiale**

**Application : Crayon combustible en situation incidentelle d'IPG, analyse de la marge et optimisation de paramètres de fabrication**

**Arsène Yaméogo**

*Electricité de France R&D  
Avenue des Renardières  
77818 Moret-sur-Loing cedex  
arsene.yameogo@edf.fr*

---

*RÉSUMÉ. Une méthode est présentée pour étudier les variations du développement sur la chaos polynomial de la réponse d'un modèle physico-probabiliste de dimension  $M$  en fonction de  $N$  paramètres. On s'appuie pour cela sur la construction d'un métamodèle polynomial de dimension  $M+N$ . Les  $N$  paramètres sont alors traités comme les  $M$  variables proprement aléatoires. On déduit du développement de dimension  $M+N$  des indications quant aux choix optimaux des paramètres.*

*La méthode est ensuite appliquée à l'étude de la marge de sécurité d'un crayon combustible en situation d'IPG.*

*ABSTRACT. A computational method is presented for the multi-parametric study of a the response model polynomial chaos expansion. Let  $M$  be the dimension of the random vector and  $N$  the dimension of the parameter vector. Thus, in the method the parameters are treated as the random variables to compute a  $(M+N)$ -dimension polynomial chaos expansion, from which can be derived various informations.*

*The method is applied to investigate the fuel rod safety margin in PCI conditions.*

*MOTS-CLÉS : chaos polynomial, étude paramétrique, crayon combustible, interaction pastille-gaine*

*KEYWORDS: polynomial chaos, parametric study, fuel rod, pellet-clad interaction.*

---

## 1. Problématique et enjeu industriels

Dans la technologie des réacteurs à eau pressurisée, trois barrières structurales sont présentes pour le confinement des produits nocifs. La gaine, contenant les pastilles de combustible et avec lesquelles elle constitue le *crayon combustible*, représente la première barrière.

### 1.1. Le crayon combustible en IPG

Nous nous intéressons ici à l'intégrité de la gaine lors d'une brusque augmentation de l'activité du cœur. Ceci peut se produire par exemple lors d'un accident d'éjection de grappe de contrôle dans le réacteur. En cas de survenue d'une telle situation, un enchaînement de phénomènes physiques est alors initié dans le crayon pouvant conduire *in fine* à la perte d'étanchéité de la gaine par corrosion sous contrainte (CSC) suite à l'interaction pastille / gaine (IPG). On décrit brièvement ces phénomènes :

– Au cours de l'irradiation, des produits de fission sont créés dans la pastille, entraînant le gonflement de celle-ci. La gaine quant à elle flue et vient au contact de la pastille sous l'effet du différentiel de pression : le fluide caloporteur exerce une pression de l'ordre de 155 bars sur l'extérieur de la gaine et à l'intérieur du crayon la pression en début de vie est de l'ordre de 25 bars. La pastille et la gaine entre donc en contact, c'est l'interaction pastille / gaine (IPG). Une fois l'IPG établie, lors de toute variation de puissance, la déformation de la gaine est imposée par la pastille. En régime permanent, ce chargement imposé est peu sollicitant pour la gaine, lors d'une brusque augmentation de puissance, le chargement mécanique sur la gaine s'intensifie.

– La rampe de puissance engendre une hausse de la température dans le crayon et un relâchement par la pastille d'agents gazeux corrosifs. La dilatation thermique de la pastille l'emportant sur celle de la gaine, celle-ci est mise en traction notamment en peau interne. Cette dernière est dans le même temps exposée à l'action corrosive d'éléments tel l'iode. La gaine peut alors rompre par corrosion sous contrainte (CSC).

### 1.2. Critère de prévention du risque d'IPG/CSC

Un critère fondé sur la densité d'énergie en déformation (DED) est utilisé pour évaluer la marge  $M$  à la rupture du crayon combustible en IPG/CSC :

$$M = DED_c - DED \quad [1]$$

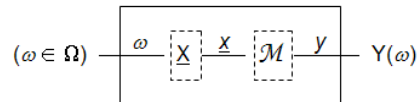
### 1.3. Problématique

Le fluage de la gaine en situation de réactivité du cœur importante, se décompose en deux composantes : le fluage thermique et le fluage d'irradiation.

Pour chacune de ces composantes, les propriétés du matériau de gainage présente une certaine variabilité que l'on souhaite prendre en compte dans une analyse physico-probabiliste de la marge du crayon combustible en situation incidentelle. Dans un second temps (§3.), on recherche le choix optimal pour les paramètres « *pression initiale relative d'hélium du crayon* » et « *diamètre des pastilles* ».

## 2. Modèle physico-probabiliste

Le modèle *physico-probabiliste* (Figure 1) comprend la modélisation du comportement *physique* du crayon à l'aide d'un code de calcul  $\mathcal{M}$  (§2.1), et la nature aléatoire de paramètres d'entrée par un modèle *probabiliste* (Saporta, 1990)  $\underline{X}(\omega)$  (§2.2) :



**Figure 1.** Représentation schématique du modèle physico-probabiliste

### 2.1. Simulation du comportement du crayon combustible

La simulation du comportement du crayon combustible en exploitation est réalisée avec le code CYRANO3 (Thevenin *et al.*, 2006). La DED est ainsi évaluée et comparée à sa valeur seuil (§1.2). Une simulation complète (chargement en base + chargement transitoire incidentel) dure à peu près 3 minutes.

### 2.2. Modélisation probabiliste des variables aléatoires

Les variables d'entrée aléatoires sont modélisées des lois de probabilité uniformes (Tableau 1).

	Paramètre	Support	Espérance	C.V.
$X_1(\omega)$	fluage thermique	[1 ; 1,5]	1,25	0,12
$X_2(\omega)$	fluage d'irradiation	[0,4 ; 1]	0,7	0,25

**Tableau 1.** Définition des variables aléatoires

Ces paramètres permettent d'ajuster les modèles de fluage. Les grandes valeurs correspondent à des cinétiques élevées. Ces paramètres sont sans dimension. Les supports de définition des variables aléatoires correspondantes sont obtenus à l'aide d'une base de données expérimentales. Les variabilités sont comparables.

Dans la stratégie de résolution (§2.3), les paramètres à optimiser (Tableau 2) viennent compléter le modèle probabiliste :

	Paramètre	Support	Espérance	C.V.
$X_3(\omega)$	pression initiale relative He ( <i>b</i> )	[20 ; 31]	25,5	0.12
$X_4(\omega)$	diamètre pastille ( <i>cm</i> )	[0,8242 ; 0,8266]	0,8254	$10^{-3}$

**Tableau 2.** *Domaine de variation des paramètres*

### 2.3. Stratégie de résolution

Nous souhaitons d'une part réaliser une analyse en tendance centrale de la réponse d'un modèle physico-probabiliste, et d'autre part, optimiser le choix de paramètres d'entrée *ajustables* en prenant en compte l'aléa sur les paramètres d'entrée *incertains*. Pour cela, nous nous appuyons sur une surface de réponse du modèle physico-probabiliste.

#### *Construction d'une surface de réponse polynomiale*

Une surface de réponse polynomiale du modèle est le développement de la réponse de celui-ci sur une base de polynômes  $\psi_j(\underline{X}(\omega))$ . La base est appelée *chaos polynomial*. La taille  $P$  du chaos polynomial dépend de la dimension  $M$  du vecteur  $\underline{X}(\omega)$  et du degré  $p$  des polynômes au-delà desquels la base est tronquée. Ainsi le développement du modèle comprend  $P$  termes (Eq.[2]) :

$$Y(\omega) = \mathcal{M}(\underline{X}(\omega)) \approx \sum_{j=0}^{P-1} a_j \cdot \psi_j(\underline{X}(\omega)) \quad [2]$$

L'expression du chaos dépend du modèle probabiliste (Soize *et al.*, 2004). Les coefficients  $a_j$  sont les inconnues du problème. Seule leur évaluation nécessite l'appel au code physique  $\mathcal{M}$ . Nous utiliserons des méthodes non intrusives (Berveiller, 2005).

*Analyse de la tendance centrale*

A partir du métamodèle de la réponse du modèle physico-probabiliste, nous évaluons les premiers moments de la variable  $Y(\omega)$  (Eq.[3]) :

$$E_Y = a_0 \quad \text{Var}_Y = \sum_{j=0}^{P-1} a_j^2 \quad \text{CV}_Y = \sqrt{\text{Var}_Y} / E_Y \quad [3]$$

La contribution de chaque variable d'entrée à la variance totale de la réponse peut être quantifiée. Dans cet objectif, nous évaluerons les *indices de Sobol'* à partir des coefficients du développement (Sudret, 2008).

*Etude paramétrique*

Nous souhaitons étudier l'incidence de  $N$  paramètres sur la réponse aléatoire du modèle physico-probabiliste. Pour cela, nous nous appuyons également sur une surface de réponse du modèle Eq.[4], en incluant maintenant dans le vecteur  $\underline{X}$  (de dimension  $M$ ), les  $N$  paramètres  $\underline{X}^d$ . Les  $(M-N)$  autres composantes de  $\underline{X}$  sont les variables proprement *incertaines*  $\underline{X}^u$  (Eq.[4]) :

$$\begin{cases} Y(\omega) = \mathcal{M}(\underline{X}(\omega)) \approx \sum_{j=0}^{P-1} a_j \cdot \psi_j(\underline{X}(\omega)) \\ \text{où } \underline{X}(\omega) = (\underline{X}^u(\omega), \underline{X}^d(\omega)) \end{cases} \quad [4]$$

Les paramètres sont traités comme les variables aléatoires pour l'établissement de la surface de réponse (Eq.[5]) :

$$Y(\omega) = \mathcal{M}(\underline{X}^u(\omega), \underline{X}^d(\omega)) \approx \sum_{j=0}^{P-1} a_j \cdot \psi_j(\underline{X}^u(\omega), \underline{X}^d(\omega)) \quad [5]$$

L'étude paramétrique vise la détermination de la variable aléatoire (Eq.[6]) :



$$Y'(\omega, \underline{x}^d) = \mathcal{M}(\underline{X}^u(\omega), \underline{X}^d = \underline{x}^d) \approx \sum_{j=0}^{P-1} a_j \cdot \psi_j(\underline{X}^u(\omega), \underline{X}^d = \underline{x}^d) \quad [6]$$

Si les variables  $X_{i=1, \dots, M}$  sont statistiquement *indépendantes* entre elles, les polynômes  $\psi_{j=0, \dots, P-1}$  dans l'équation [6] peuvent être mis sous la forme (Eq.[7]) :

$$\psi_j(\underline{X}(\omega)) = \psi_j^u(\underline{X}^u(\omega)) \cdot \psi_j^d(\underline{X}^d(\omega)) \quad [7]$$

Notons que deux polynômes  $\psi_j$  *distincts* peuvent avoir en commun un des facteurs. Ainsi, il est aisé d'établir un développement sous la forme classique (Eq.[8]) :

$$Y'(\omega, \underline{x}^d) \approx \sum_{k=0}^{P'-1} a'_k(\underline{x}^d) \cdot \psi_k^u(\underline{X}^u(\omega)) \quad [8]$$

La procédure de détermination des coefficients du développement à l'aide de celui de la variable  $Y(\omega)$  (Eq.[4]) est détaillée ci-dessous (Eq.[9]). Notons que la procédure ne nécessite *aucun nouvel appel* au code physique  $\mathcal{M}$  :

<p>pour <math>k = 1, \dots, P'-1</math> : Calcul du terme <math>a'_k(\underline{x}^d)</math></p> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px; margin-left: 20px;"> <p>recherche dans la base <math>\psi_{j=1, \dots, P-1}</math> des polynômes vérifiant :</p> <math display="block">\psi_j(\underline{X}(\omega)) = \psi_k^u(\underline{X}^u(\omega)) \cdot \psi_j^d(\underline{X}^d(\omega)) \quad (\text{cf. Eq.[7]})</math> <p>les indices <math>j</math> des polynômes <math>\psi_j</math> solution constitue une liste notée <math>J(k)</math></p> <p>Alors : <math>a'_k(\underline{x}^d) = \sum_{j \in J(k)} a_j \psi_j^d(\underline{x}^d)</math></p> </div>	<p>[9]</p>
<p>fin</p>	

### 3. Application

#### 3.1. Analyse de la tendance centrale de la marge

Dans cette analyse, le vecteur des paramètres (Tableau 2) est fixé : la pression initiale relative d'He vaut  $25 b$ , le diamètre pastille vaut  $0,8242 \text{ cm}$ .

On développe alors sur un chaos de degrés 2, la réponse « *marge en DED* » fonction du vecteur aléatoire constitué des paramètres de fluage (Tableau 1). La détermination des coefficients du développement requiert 9 appels au code CYRANO3.

L'analyse en tendance centrale consiste en l'évaluation des premiers moments de la variable aléatoire *marge* (cf. Eq.[3]) (Tableau 3) :

Paramètre	Valeur
Espérance normée	1,07
Coefficient de variation	0,23

**Tableau 3.** *Caractéristiques centrales de la marge*

La marge présente une espérance positive et une variabilité non négligeable. Celle-ci est due principalement au paramètre de fluage d'irradiation (Tableau 4) :

Paramètre	Indices de Sobol' totaux
Paramètre de fluage d'irradiation	0,986
Paramètre de fluage thermique	0,013

**Tableau 4.** *Indices de Sobol' totaux*

Par ailleurs, la marge présente une borne inférieure positive, dont la valeur normée vaut approximativement  $0,60$ . Ce minimum est atteint pour les valeurs minimales des paramètres de fluage thermique et d'irradiation, i.e. respectivement  $1,0$  et  $0,4$ . Effectivement, en situation d'IPG/CSC, c'est l'aptitude plus ou moins grande de la gaine à relaxer par fluage les contraintes imposées par la pastille, qui détermine grandement sa résistance mécanique (Fandeur, 2004).

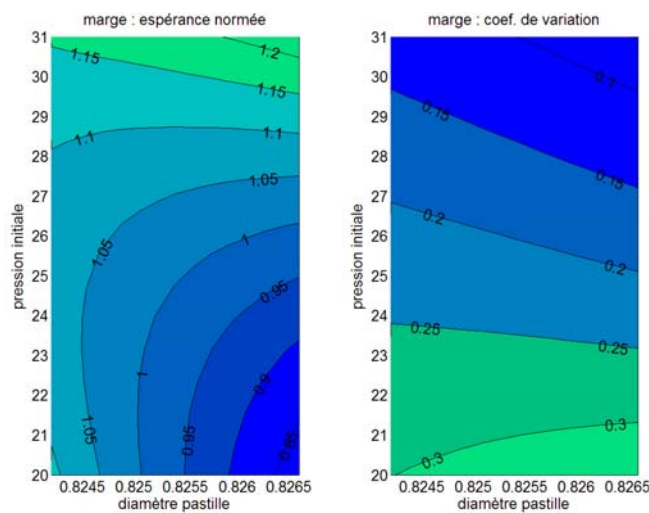
### 3.2. Etude paramétrique

Compte-tenu de l'aléa sur les propriétés en fluage de la gaine, on souhaite optimiser le choix des deux paramètres de fabrication : *pression initiale de du crayon* et *diamètre des pastilles*.

Nous construisons tout d'abord une surface de réponse polynomiale d'ordre 2 de la marge en DED. Le vecteur aléatoire est de dimension 4 (Tableau 1 et Tableau 2).

La taille de la base est 15. Pour l'évaluation des 15 coefficients, un plan d'expérience de taille 81 est généré (Berveiller, 2005). Le code CYRANO3 est donc appelé 81 fois, soit un temps utilisateur approximatif de 4 heures. Pour la suite de l'étude, il n'est besoin de faire appel au code.

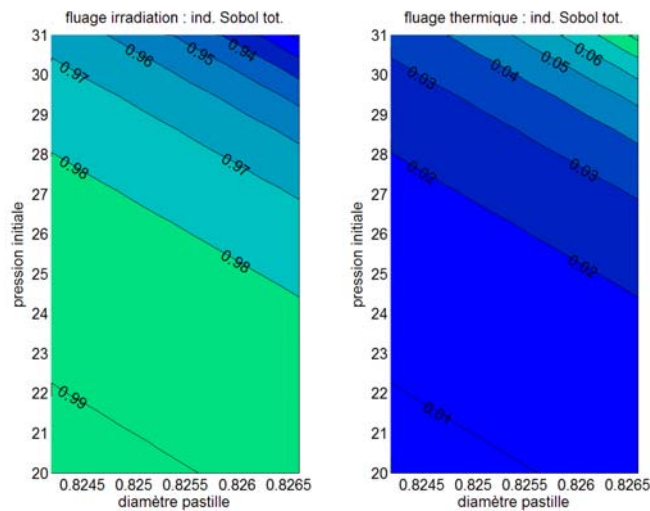
Nous pouvons alors dresser les cartographies de l'espérance et du coefficient de variation de la *marge* dans le repère des deux paramètres à optimiser (Figure 2).



**Figure 2.** Cartographie de l'espérance et du coefficient de variation de la marge en fonction de la pression initiale dans le crayon et du diamètre des pastilles

Les grandes valeurs de la pression initiale et du diamètre des pastilles permettent de minorer le coefficient de variation, i.e. augmenter l'espérance de la marge et réduire sa variance. Cette indication est confirmée par la cartographie du minimum de la marge (non présentée). Par ailleurs, on constate que la variation de l'espérance de la marge en fonction du diamètre des pastilles n'est pas monotone.

La contribution de chaque paramètre aléatoire dans la variance de la marge varie en fonction de la valeur des paramètres (Figure 3).



**Figure 3.** Cartographie des indices de Sobol' totaux en fonction de la pression initiale dans le crayon et du diamètre des pastilles

Le poids du paramètre de fluage d'irradiation dans la variabilité de la marge décroît au détriment de celui du fluage thermique lorsque sont augmentés, la pression initiale dans le crayon et le diamètre des pastilles.

#### 4. Conclusion

Pour la résolution de problèmes d'optimisation multi-paramètres, un métamodèle polynomial du modèle physico-probabiliste est très pratique. La méthode développée est appliquée pour orienter le choix de deux paramètres de fabrication d'un crayon combustible aux propriétés en fluage aléatoires et dont on souhaite que la marge de sécurité en situation incidentelle d'IPG soit la meilleure.

#### 5. Bibliographie

Berveiller M., Stochastic finite elements : intrusive and non intrusive methods for reliability analysis, Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal, Clermont Ferrand, 2005.

Journées Fiabilité des Matériaux et des Structures, Nantes, 2008

Fandeur O., Etude expérimentale et modélisation mécanique de la corrosion sous contrainte des gaines de Zircaloy-4, Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris, 2004.

Lemaire M., *Fiabilité des structures*, Paris, Editions Hermès, 2005.

Saporta G., *Probabilités analyse de données et statistique*, Paris, Editions Technip, 1990.

Soize C., Ghanem, « Physical systems with random uncertainties : Chaos representation with arbitrary probability measure », *SIAM Journal On Scientific Computing*, vol. 26, n° 2, 2004, p. 395-410.

Sudret B. « Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions », *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 93, Issue 7, p. 964-979.

Thevenin P., Masson R., Baron D. « CYRANO3: the industrial PLEIADES fuel performance code », *Topfuel meeting, Salamanca*, October 2006.

## **Approche multi-échelle du transport d'incertitude pour les matériaux composites.**

A. Alzina, F. Dau, L. Guillaumat

---

---

# Approche multiéchelle du transport d'incertitudes pour les matériaux composites

## Transport d'incertitudes

Arnaud Alzina\* - Frédéric Dau\* - Laurent Guillaumat\*

\* LAMEFIP ENSAM  
Esplanade des Arts et Métiers  
33405 Talence cedex  
[l.guillaumat@lamef.bordeaux.ensam.fr](mailto:l.guillaumat@lamef.bordeaux.ensam.fr)

---

*RÉSUMÉ.* Ce travail propose la modélisation du transport de la variabilité à travers plusieurs échelles d'observation des matériaux composites unidirectionnels. Trois échelles sont considérées : micro (fibres et matrice), méso (le pli élémentaire) et macro (le stratifié complet). Les échelles micro et méso sont traitées par une technique d'homogénéisation basée sur le lemme de Hill alors que la dernière utilise la théorie des stratifiés. Le résultat principal montre que la variabilité, souvent importante, à l'échelle micro diminue fortement à l'échelle méso compte tenu d'un effet de moyenne.

*ABSTRACT.* This work deals with the modeling of the uncertainty through different scales for unidirectional composite materials. Three different scales are investigated: micro (fibres and matrix), meso (ply) and macro (laminate). Homogenization method based on Hill's works are used for the micro and meso scales. The macro scale is modeled using laminates theory. The main result shows that significant uncertainty at the micro-scale, becomes small in meso-scale because of mean effect.

*MOTS-CLÉS :* multiéchelle, matériaux composites, transport d'incertitudes, modélisation.

*KEYWORDS:* multiscale, composite materials, uncertainties, modeling.

---

## 1. Introduction

Les matériaux composites présentent à différentes échelles des propriétés mécaniques et morphologiques assez dispersées dues à leur forte hétérogénéité. Cependant, l'ampleur des variations des grandeurs observées est très dépendante de l'échelle. Ainsi, dans les matériaux composites, dits stratifiés, trois échelles principales sont généralement considérées : i) micro : il s'agit de l'agencement des constituants élémentaires fibres et matrice, ii) méso : cette échelle concerne le pli ou couche unique, iii) macro : les différents plis sont superposés pour constituer le composite stratifié.

La nature microscopique des constituants élémentaires (fibres et matrice) peut impliquer une variabilité de leurs propriétés car il est très difficile de pouvoir maîtriser les procédés de fabrication. Par exemple, les composites fabriqués à partir de la biomasse, en plein essor actuellement, présentent une variabilité d'une ampleur classique (quelques pourcents) à l'échelle d'une éprouvette alors que les fibres (chanvre, lin, ...) présentent une très forte dispersion de leurs propriétés (Charlet, 2007).

L'objectif de ce travail est donc de montrer que la forte dispersion des propriétés des constituants élémentaires, notamment des fibres est fortement réduite par les changements d'échelle. Pour cela une modélisation multiéchelle (micro, méso et macro) est mise en place afin de bien comprendre et décrire les mécanismes impliqués.

## 2. Démarche

La démarche globale consiste à intégrer à l'échelle supérieure les résultats de l'échelle inférieure afin de disposer de modèles de comportement des matériaux utilisés dans les structures contenant les informations depuis l'échelle micro. Seule cette dernière est construite à partir de considération morphologique (agencement des fibres) afin de constituer des cellules (quelques microns cube) dont le comportement sera calculé numériquement par éléments finis (EF) à l'aide d'une méthode d'homogénéisation.

À l'échelle méso, un calcul éléments finis est, là aussi, mis en place. Le pli (ou couche) est découpé en un certain nombre d'éléments suivant un quadrillage sachant que chacun d'eux possède le comportement mécanique homogénéisé d'une cellule calculé précédemment et tiré au sort parmi tous ceux qui sont disponibles. Les propriétés mécaniques du pli sont alors estimées. Une évolution de cette modélisation, peut réaliste, consiste à tirer aléatoirement les cellules sur la tranche du pli puis de faire varier le comportement de chaque cellule suivant une génératrice du pli par une rotation du repère simulant le désalignement des fibres.

À l'échelle macro, les différents plis sont maintenant superposés pour constituer un composite stratifié. L'étape précédente a permis d'obtenir la loi de comportement



d'un pli dans un repère donné. L'objectif à cette échelle est de montrer qu'une variation angulaire lors de la dépose des couches peut influencer les propriétés mécaniques du matériau mais que cette variation va être fortement dépendante du nombre de couches et de l'amplitude du désalignement.

### 3. Echelle micro

#### 3.1 Analyse Morphologique

Une étude morphologique a été menée afin de décrire au mieux l'agencement des fibres pour orienter le choix de la constitution des cellules. Pour cela, à partir de photographies (Figure 1-a) d'un matériau composite à fibres de carbone, un traitement d'image a été appliqué. Il consiste à binariser l'image (par un seuillage) puis à transformer les fibres en particules (Figure 1-b).

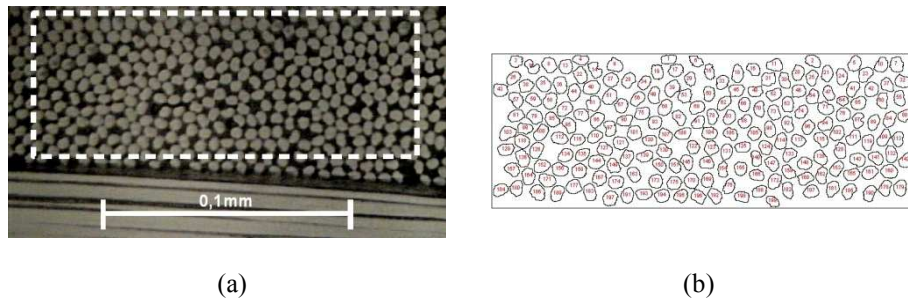


Figure 1. (a) photographie, (b) transformation des fibres en particules.

Chaque fibre, sauf celles qui sont présentes sur les bords, sont analysées en déterminant : i) le nombre de fibres voisines, ii) leur distance à la fibre centrale et iii) l'angle entre deux fibres consécutives entourant la fibre considérée. La répartition est présentée à la Figure 2.

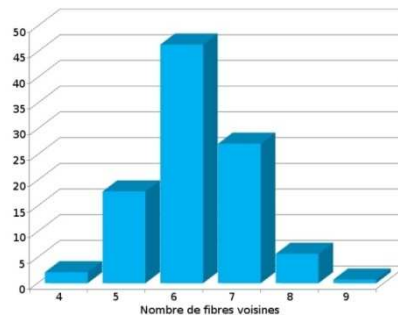


Figure 2. Répartition du nombre de fibres entourant une fibre.

### 3.2 Géométrie et maillage des cellules

Suite à l'analyse morphologique du composite unidirectionnel, quatre cellules ont été retenues. Ces cellules sont constituées respectivement de 4, 5, 6 et 7 fibres de carbone noyées dans une matrice de résine époxyde. Chacune des cellules est modélisée avec le logiciel de calcul par éléments finis ANSYS en prenant comme variables aléatoires le diamètre des fibres, le nombre de fibres, les propriétés matérielles et la répartition spatiale des fibres. Le tableau 1 présente les différentes variables utilisées dans les modèles.

Variabiles	Loi de probabilité	Moyenne	Ecart-type	Coefficient de variation (%)
$E_f$	uniforme	73 (GPa)	8,43 (GPa)	11,5
$E_m$	uniforme	3,45 (GPa)	0,40 (GPa)	11,5
$v_f$	uniforme	0,22	0,025	11,5
$v_m$	uniforme	0,3	0,035	11,5
$\emptyset$ des fibres	uniforme	10 ( $\mu\text{m}$ )	0,58 ( $\mu\text{m}$ )	5,8

**Tableau 1.** Définitions des variables aléatoires.

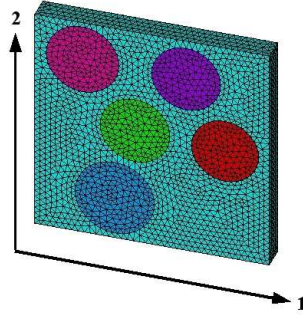
Les cellules sont des parallélépipèdes de longueur  $l_y$  et de largeur  $l_x$  identiques (32  $\mu\text{m}$ ). L'épaisseur  $l_z$  est fixée à 3  $\mu\text{m}$ .

Les fibres sont réparties spatialement en utilisant l'algorithme *Random Sequential Adsorption* (RSA) (Kari *et al.*, 2007). Cet algorithme de génération de microstructure est utilisé dans le plan 1-2. La première étape de cet algorithme consiste à générer, de manière uniforme, les coordonnées ( $x_1$ ,  $y_1$ ) du centre de la section droite de la première fibre. Afin d'éviter que la fibre coupe un des bords de la cellule, les quatre relations suivantes doivent être vérifiées simultanément :

$$\begin{aligned} 0 \leq x_1 - r_1 - \delta & \quad x_1 + r_1 + \delta \leq l_x \\ 0 \leq y_1 - r_1 - \delta & \quad y_1 + r_1 + \delta \leq l_y \end{aligned}$$

où  $r_1$  et  $\delta$  et sont respectivement le rayon de la première fibre et la tolérance nécessaire à l'obtention d'un maillage régulier.

Si ces critères ne sont pas vérifiés, un nouveau couple ( $x_1$ ,  $y_1$ ) est régénéré. Dans le cas favorable, un nouveau couple ( $x_2$ ,  $y_2$ ) est généré en vérifiant que cette nouvelle fibre ne chevauche pas les fibres déjà placées (pour l'instant une seule) et qu'elle ne coupe pas un des bords de la cellule. S'il n'y a pas de chevauchement, un nouveau couple de coordonnées est généré. Ce processus est répété jusqu'à ce que le nombre de fibre dans la cellule et le nombre de cellules réalisables soient atteints. La Figure 3 montre un exemple de cellule obtenue avec 5 fibres.

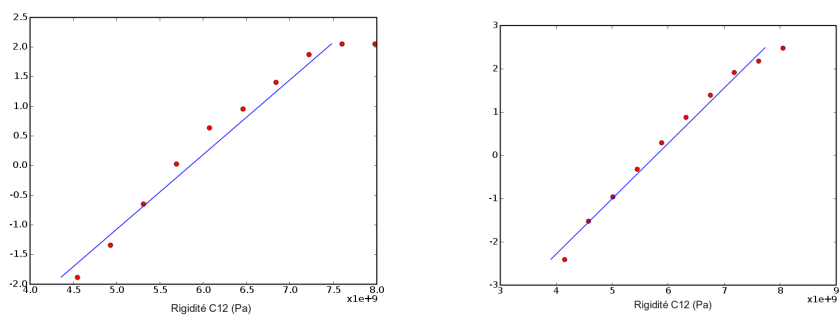


**Figure 3.** Exemple de maillage d'une cellule à 5 fibres.

Les différentes cellules sont maillées avec des éléments tétraédriques à 10 nœuds (solid92). Après une étude de convergence, la taille des éléments a été fixée à 0,75  $\mu\text{m}$ . La suite de la méthode consiste à estimer les rigidités équivalentes de chacune des cellules. Dans cette optique, une procédure d'homogénéisation basée sur le lemme de Hill (Grédiac *et al.*, 2004) a été programmée sur ANSYS. Cette méthode nécessite d'effectuer 21 cas de chargements homogènes sur les bords de la cellule de manière à pouvoir identifier tous les termes de la matrice de rigidité. Les résultats obtenus sont présentés dans le paragraphe suivant.

### 3.4 Résultats

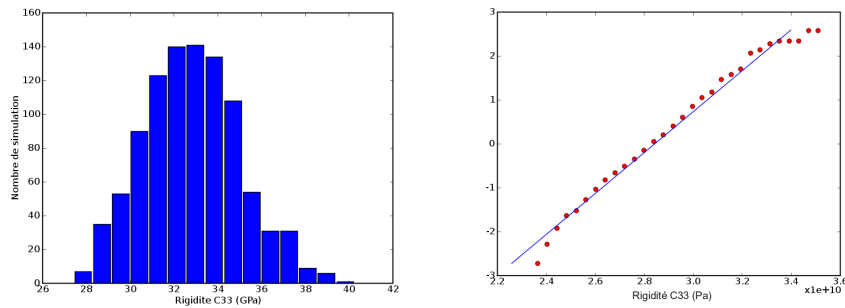
Chaque type de cellule a été généré plusieurs fois de manière à obtenir la distribution des  $C_{ij}$ . La Figure 4 montre les droites de Henry obtenues lors de l'estimation des  $C_{12}$  pour un nombre de simulations différentes.



**Figure 4.** Influence du nombre de simulations ( $N$ ) sur la distribution de  $C_{12}$ :  $N=100$  (a),  $N=963$  (b)

On constate que la distribution de  $C_{12}$  tend vers une gaussienne quand le nombre de simulations augmente. Pour des raisons de temps de calculs, le nombre de simulations est fixé à 963 simulations pour tous les calculs des  $C_{ij}$ .

La Figure 5 présente la distribution obtenue pour  $C_{33}$  sur des cellules composées de 5 fibres ainsi que la droite de Henry associé.



**Figure 5.** Distribution de la rigidité  $C_{33}$  et droite de Henry.

On constate que cette distribution est quasi gaussienne. Cette remarque est aussi valable pour les autres termes de la matrice de rigidité. De plus, 12 composantes de la matrice de rigidité ont des distributions de moyenne nulle et d'écart type inférieure à 0,01 GPa, confirmant ainsi l'isotropie transverse de la cellule. Le Tableau 2 présente les moyennes et écart types des rigidités obtenus pour la cellule à 5 fibres.

Rigidité	Moyenne	$\sigma$	Rigidité	Moyenne	$\sigma$
C11	24,17	1,78	C33	32,87	2,19
C12	6,25	0,79	C44	10,85	7,18
C13	7,14	0,81	C55	10,85	7,18
C22	24,17	1,78	C66	8,96	6,19
C23	7,14	0,81			

**Tableau 2.** Moyenne et écart type des  $C_{ij}$ , en GPa, pour 5 fibres.

On constate que les relations entre les moyennes de certains coefficients de la matrice de rigidité d'un matériau isotrope transverse sont bien vérifiées :

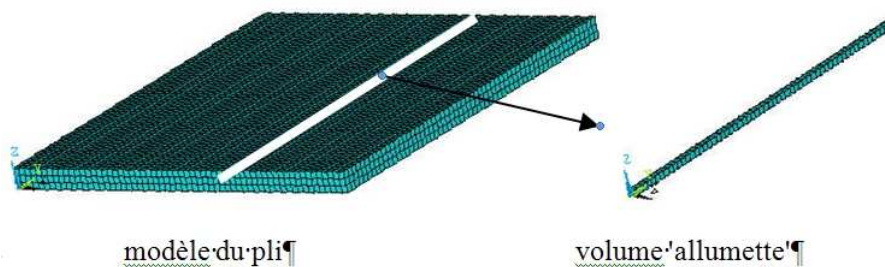
$$C_{13} = C_{23} \quad C_{11} = C_{22} \quad C_{44} = C_{55} \quad C_{66} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{12})$$

La suite de la démarche consiste à utiliser les distributions des rigidités précédentes pour modéliser le comportement mécanique d'un pli. La méthodologie utilisée est décrite dans la section suivante.

#### 4. Echelle méso

A cette échelle, le modèle géométrique est un parallélépipède de dimensions 6 mm x 6 mm x 0.3 mm, Figure 6. Ce parallélépipède est constitué de volumes représentant les cellules homogénéisées décrites à l'échelle microscopique. Ces cellules sont organisées de façon à satisfaire au mieux les exigences dictées par la physique :

- les cellules sont distribuées aléatoirement en respectant leur proportion, Figure 2, construite à partir de l'analyse morphologique,
- les cellules disposées le long des fibres générant le volume dit 'allumette' décrit, Figure 6, doivent être des cellules de même nature imposant ainsi dans ce volume un nombre de fibres constant,
- deux cellules adjacentes dans ce volume représentatif devront satisfaire la continuité des fibres.

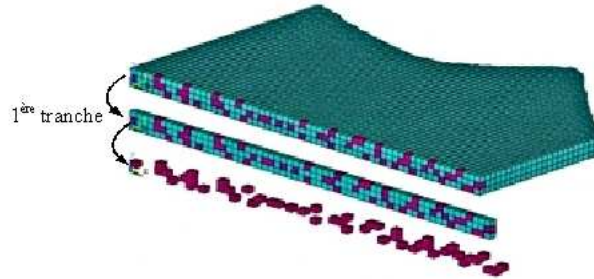


**Figure 6.** *Modèle du pli et volume 'allumette'.*

Dans les travaux menés actuellement, seules les deux premières exigences sont satisfaites. Pour cela, la technique de génération de ces cellules est la suivante :

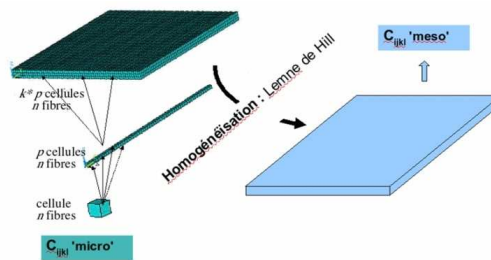
- les cellules la première 'tranche', Figure 7, sont disposées aléatoirement en respectant la distribution de la Figure 2,
- les cellules de même nature formant les volumes dits 'allumettes' sont ensuite sélectionnés et regroupés,
- les propriétés mécaniques sont enfin affectées sur chaque cellule, par nature de cellules (à 4, 5, 6 ou 7 fibres), en respectant au mieux les distributions obtenues à l'échelle microscopique.

Les différentes cellules sont ensuite maillées à l'aide des éléments finis hexahédriques à 20 noeuds SOLID 182 disponibles dans Ansys. Ces éléments permettent de renseigner les propriétés mécaniques en utilisant directement les constantes de rigidité élastiques  $C_{ij}$ .



**Figure 7.** Distribution des cellules de même nature sur la 1ère tranche.

La suite de la méthode consiste à estimer les rigidités équivalentes de chacune des cellules. La méthode d'homogénéisation décrite en 3.2 basée sur le lemme de Hill (Grédiac *et al*, 2004) est là aussi employée pour l'estimation des rigidités équivalentes à l'échelle mésoscopique est la même que celle décrite dans 3.2 utilisée à l'échelle microscopique. Le passage de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique est illustré sur la Figure 7 pour une cellule donnée à  $n$  fibres reproduite  $p$  fois selon la direction des fibres et se retrouvant  $k$  fois dans le pli.



**Figure 8.** Illustration passage micro->méso.

Les premiers résultats, présentés Tableau 3, ont été obtenus sur la base d'une simulation simplifiée dans laquelle les cellules sont injectées sur l'ensemble du modèle et non seulement sur la tranche. Une cinquantaine de calculs ont permis de montrer que la variabilité est considérablement réduite à cette échelle par rapport à l'échelle micro.

<b>C<sub>ij</sub></b>	<b>Moyenne (GPa)</b>	<b>Ecart type (GPa)</b>	<b>Coefficient variation (%)</b>
C11	3,30	0,0632	1,91
C22	3,31	0,0643	1,95
C33	4,04	0,0710	1,76

**Tableau 3.** Résultats de l'échelle méso.

D'autre part, une analyse de la cartographie du champ de contraintes, Figure 9, montre des zones réparties aléatoirement dans lesquelles des contraintes élevées sont concentrées. Cela peut expliquer pourquoi les propriétés élastiques des matériaux

composites sont souvent reproductibles alors que celles à rupture peuvent être très dispersées.

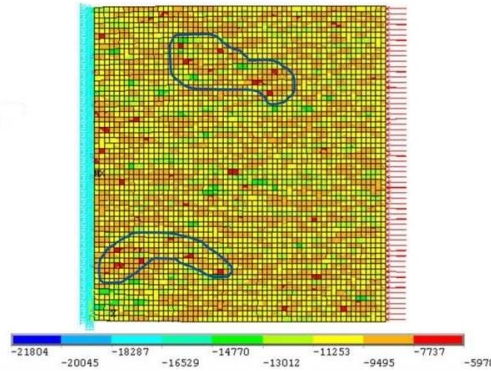


Figure 9. Cartographie du champ de contraintes.

## 5. Echelle macro

La dernière échelle (macro) concerne la superposition de différents plis (mésos). Une des sources importantes de variabilité, à cette échelle, est l'angle du pli  $i$  dans le matériau stratifié. L'objectif de cette partie est de montrer que la dispersion du comportement mécanique du stratifié est fortement liée à l'amplitude de variation de l'angle mais aussi au nombre de plis considérés. Le stratifié considéré dans les calculs est construit à partir de plis unidirectionnels afin d'obtenir idéalement un matériau pour lequel toutes les fibres sont orientées dans la même direction. L'estimation du module de Young longitudinal est réalisée à partir de la théorie des stratifiés. Pour cela des calculs intégrant de 1 à 10 plis ont été effectués avec une variation angulaire pour chaque pli de : 5, 10 et 20°. L'ensemble des résultats est présenté à la Figure 10.

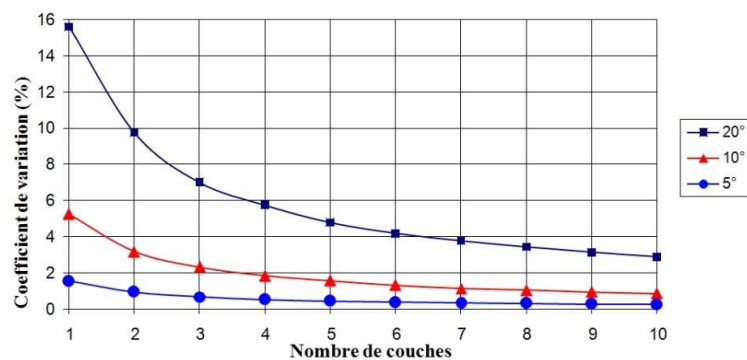


Figure 10. Evolution du coefficient de variation du module de Young longitudinal en fonction de la variabilité angulaire des plis.

Il est intéressant de constater que l'augmentation du nombre de plis, pour une variation angulaire donnée, favorise la reproductibilité. En effet, la probabilité que l'ensemble des plis se trouve en moyenne décalé d'un angle de 5, 10 ou 20° est d'autant plus faible que le nombre de plis augmente. La prochaine étape de modélisation intégrera, en plus, la variabilité des  $C_{ij}$  calculés à l'échelle méso.

## 6. Conclusion

Cette approche multiéchelle vise à modéliser des matériaux intégrant les différentes échelles qui le constituent en transportant la variabilité. Cette étude a montré qu'une dispersion significative à l'échelle micro (fibres et matrice) n'était pas nécessairement rédhibitoire pour utiliser ces constituants dans la fabrication de structures industrielles car à cette échelle la variabilité est fortement diminuée compte tenu du grand nombre de cellules élémentaires concernées dans le volume de la structure. Enfin, à l'échelle macro il a été montré qu'il était préférable d'utiliser des composites stratifiés à plusieurs plis même s'ils possèdent tous la même direction de fibres.

## 7. Bibliographie

- Charlet K., Morvan C., Bréard J., Jernot J.-P., Gomina M., "Relationship between the morphology and the mechanical behavior of a flax fibre.", Proceedings of the 16<sup>th</sup> International Conference on Composite Materials, Kyoto, juillet 2007.
- Kari S., Berger H., Gabbert U., "Numerical evaluation of effective material properties of randomly distributed short cylindrical fibre composites", *Computational Materials Science*, vol 39, pp 198-204, 2007
- Bornert, M., Bretheau, T. and Gilormini, P., "Homogeneization in mechanical materials", Hermes, Paris, 2001.
- Grédiac M., Alzina A., Marquis D., "Optimal Design of a multiperforated composite plate", *Journal of Composite Materials*, vol. 38, 16/2004, pp 1401-1423.



---

Session TS3  
Maîtrise des risques et décision

---

**Une approche fiabiliste fonction du temps appliquée au vieillissement des structures navales à comportement non-linéaire.**

M. Cazuguel, M. Mejri, J.Y. Cognard

---

---

# Une approche fiabiliste fonction du temps appliquée au vieillissement des structures navales à comportement non-linéaire

Mikaël Cazuguel\*\*\*, Mohamed Mejri\*, Jean-Yves Cognard\*

\* *Laboratoire Brestois de Mécanique et des Systèmes*  
EA – ENSIETA / Université de Brest / ENIB  
ENSIETA, 2 rue François Verny, 29806 BREST Cedex 9  
[mejrimo@ensieta.fr](mailto:mejrimo@ensieta.fr), [jean-yves.cognard@ensieta.fr](mailto:jean-yves.cognard@ensieta.fr)

\*\* *DCNS Ingénierie Navires Armés, Département Analyse des Structures*  
Rue Choiseul, 56311 LORIENT Cedex  
[mikael.cazuguel@dcnsgroup.com](mailto:mikael.cazuguel@dcnsgroup.com)

---

*RÉSUMÉ. Une évaluation pertinente de la durée de vie des structures navales passe par la prise en compte du caractère aléatoire et dépendant du temps du comportement non-linéaire des matériaux, des conditions environnementales et des chargements. Ceci fait appel aux approches fiabilistes fonction du temps. De plus, la prédiction d'une réponse réaliste d'une structure nécessite des simulations non-linéaires par éléments finis. Le couplage de ces deux approches représente ainsi une perspective intéressante pour améliorer la sécurité et la durabilité des structures navales. La démonstration de la faisabilité et des difficultés d'un tel couplage est présentée à travers deux études fiabilistes : la première porte sur une plaque corrodée à comportement élasto-plastique soumise à un chargement stochastique, tandis que la seconde s'attache à la modélisation d'assemblages collés prenant en compte l'endommagement de la colle.*

*ABSTRACT. Assessing efficiently the lifetime of ageing naval structures needs taking into account the random and temporal character of non-linear material behaviours, environmental conditions and loads. This leads to the consideration of time-variant reliability approaches. Moreover non-linear finite element calculations are needed to predict realistically the structure response. Combination of these two approaches is thus a promising way to improve safety and durability of naval structures. To demonstrate its feasibility and difficulties, two reliability studies are proposed: the first one focusing on a corroded elasto-plastic plate submitted to a stochastic load and the second one dealing with adhesively-bonded assemblies taking into account the adhesive damage.*

*MOTS-CLÉS : fiabilité fonction du temps, modèles éléments finis, simulations non-linéaires, vieillissement des structures, corrosion, assemblages collés.*

*KEYWORDS: time-variant reliability, finite element model, non-linear simulations, ageing of structures, corrosion, adhesively-bonded assemblies.*

---

## 1. Introduction

Une évaluation fiabiliste pertinente du vieillissement d'une structure est cautionnée par la prise en compte du caractère aléatoire et dépendant du temps des données sur les matériaux, les conditions environnementales et les chargements. A travers deux problèmes représentatifs de structures réelles, ce papier présente le couplage des méthodes fiabilistes fonction du temps avec l'analyse non-linéaire des structures par éléments finis (E.F.). Ces analyses fiabilistes sont effectuées par la méthode PHI2, présentée dans (Andrieu-Renaud *et al.*, 2004) et (Sudret, 2005).

Le premier exemple présente une extension du couplage réalisé dans (Cazuguel *et al.*, 2006) à la prise en compte de la corrosion en évitant des re-maillages successifs. Nous proposons d'utiliser une approche mécanique 2D, modélisant de façon continue la perte d'épaisseur classiquement considérée et compatible avec l'analyse E.F. pour des matériaux non-linéaires. Le second exemple applique l'approche fiabiliste aux assemblages collés tel qu'introduit dans (Mejri *et al.*, 2006). Des modèles de type zone cohésive prenant en compte les défauts initiaux et l'évolution de l'endommagement sont utilisés, ce qui permet de fortement limiter la dépendance au maillage tout en modélisant l'initiation et la propagation de fissures.

## 2. Méthodes fiabilistes fonction du temps

### 2.1. Problème fiabiliste fonction du temps

Notons  $\mathbf{X}(t, \omega)$  l'ensemble des variables aléatoires et utilisons la fonction de performance classique  $G(t, \mathbf{X}(t, \omega))$ . Une analyse fiabiliste instantanée à  $T$  revient à :

$$P_{f,i}(T) = \text{prob}(G(T, \mathbf{X}(T, \omega)) \leq 0) \quad [1]$$

Cette probabilité de défaillance instantanée  $P_{f,i}$  diffère de la probabilité de défaillance cumulée  $P_{f,c}$  sur  $[0, T]$  qui s'exprime par :

$$P_{f,c}(0, T) = \text{prob}(\exists \tau \in [0, T], \text{ tel que } G(\tau, \mathbf{X}(\tau, \omega)) \leq 0) \quad [2]$$

Cependant, lorsque  $G$  est décroissante sur  $[0, T]$ ,  $P_{f,i}$  et  $P_{f,c}$  coïncident :

$$P_{f,c}(0, \tau) = P_{f,i}(\tau) \quad \forall \tau \leq T \quad [3]$$

Lorsque cette propriété n'est pas applicable, l'approche courante d'évaluation de  $P_{f,c}$  consiste en l'évaluation du taux de franchissements qui peut s'exprimer par :

$$v^+(t) = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0, \Delta \tau > 0} \frac{\text{prob}(A \cap B)}{\Delta \tau} \text{ avec } \begin{cases} A = \{G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) > 0\} \\ B = \{G(t + \Delta \tau, \mathbf{X}(t + \Delta \tau, \omega)) \leq 0\} \end{cases} \quad [4]$$

La probabilité de défaillance cumulée peut alors être encadrée par :

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left[ P_{f,i}(t) \right] \leq P_{f,c}(0,T) \leq P_{f,i}(0) + \int_0^T v^+(t) dt \quad [5]$$

## 2.2. Méthode PHI2

Notons  $\beta$ ,  $\alpha$  et  $\mathbf{u}^*$  l'indice de fiabilité, les vecteurs des cosinus directeurs et des coordonnées du point de conception. La corrélation entre  $A$  et  $B$  ([4]) s'exprime par :

$$\rho_{GG}(t, t + \Delta\tau) = -\alpha(t) \cdot \alpha(t + \Delta\tau) \quad [6]$$

En considérant la loi binormale  $\Phi_2$ , le taux de franchissements, évalué par la méthode PHI2 en considérant [4] comme un système parallèle, peut alors s'écrire :

$$v_{PHI2}^+(t) = \frac{\Phi_2(\beta(t), -\beta(t + \Delta\tau), \rho_{GG}(t, t + \Delta\tau))}{\Delta\tau} \quad [7]$$

L'évaluation de [7] est effectuée à chaque instant  $t$  par deux analyses FORM successives à  $t$  et  $t + \Delta\tau$  (figure 1). Pour diminuer la sensibilité de [7] au choix de  $\Delta\tau$ , la probabilité intervenant dans [4] a été reconsidérée par (Sudret, 2005) telle que :

$$v_{PHI2}^{+,new}(t) = \left\| \bar{\alpha}'(t) \right\| \cdot \varphi(\beta(t)) \cdot \Psi \left( \frac{\beta'(t)}{\left\| \bar{\alpha}'(t) \right\|} \right) \text{ avec } \Psi(x) = \varphi(x) - x \cdot \Phi(-x) \quad [8]$$

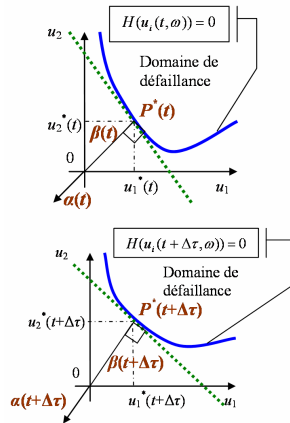


Figure 1. Evolution des produits fiabilistes pendant  $\Delta\tau$

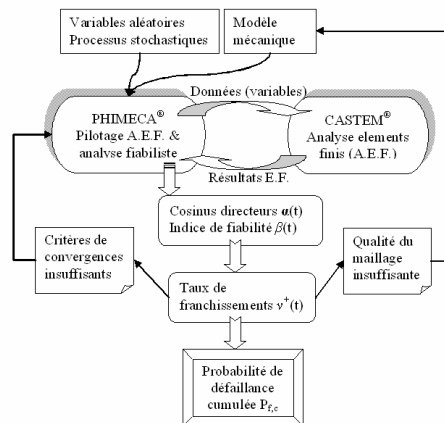


Figure 2. Schéma d'implémentation du couplage mécano-fiabiliste considéré

### 2.3. Méthodologie du couplage

La figure 2 montre le schéma d'implémentation du couplage direct entre PHIMECA<sup>®</sup> et CAST3M<sup>®</sup>. L'évaluation du taux de franchissements  $v^+(t)$  se ramène à un post-traitement d'une série d'analyses fiabilistes indépendantes du temps pouvant être résolues par les algorithmes classiques tels qu'implémentés dans PHIMECA<sup>®</sup>, ce qui constitue le principal avantage de la méthode PHI2.

## 3. Exemple d'une plaque corrodée soumise à un chargement stochastique

### 3.1. Modèle mécanique

#### 3.1.1. Simulations 2D non-linéaires avec évolution temporelle de l'épaisseur

Considérons une structure occupant un domaine  $\Omega$ . A chaque instant  $t \in [0, T]$ , le déplacement  $U_d$  et la force surfacique  $f_t$  sont donnés sur  $\partial_d \Omega$  et  $\partial_t \Omega$ . Ces données ainsi que le déplacement  $U$ , la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  sont définis sur  $\Omega^* [0, T]$  et sont solutions du problème : trouver  $U$  et  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $M \in \Omega$ , vérifiant  $\forall t \in [0, T]$  :

$$\text{- les conditions d'admissibilité cinématiques : } U|_{\partial_d \Omega} = U_d + \text{"régularité"} \quad [9]$$

$$\text{- l'équilibre : } \int_{\Omega} \text{Tr}[\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(U^*)] d\Omega = \int_{\partial_t \Omega} f_t \cdot U^* dS \quad \forall U^* \in \{U, U|_{\partial_d \Omega} = 0\} \quad [10]$$

$$\text{- le comportement : } \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{U})_t = \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}(\zeta), \zeta \leq t) \quad (\mathbf{A}, \text{opérateur matériau}) \quad [11]$$

Classiquement, cette analyse est effectuée en utilisant les méthodes incrémentales (Cognard *et al.*, 2004). Pour un problème 2D, en notant  $z$  la normale au plan et  $e$  l'épaisseur en un point, nous avons :

$$\int_{\Omega} X d\Omega = \int_S X \left\{ \int_z dz \right\} dS \approx \int_S X \cdot e dS \quad [12]$$

Dans le cas d'effets de corrosion, la contribution des forces internes aux points d'intégration doit ainsi être multipliée par la contribution de la variation d'épaisseur supposée connue à chaque instant. Cette approche, qui ne modifie pas l'intégration de la relation de comportement, a été implémentée dans CAST3M<sup>®</sup> en utilisant une méthode de résolution de type quasi Newton.

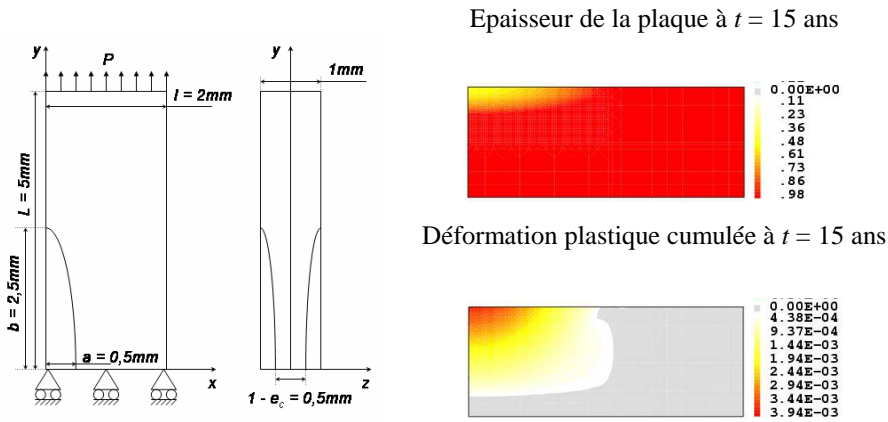
#### 3.1.2. Modèle éléments finis

Considérons une plaque mince initialement d'épaisseur constante sur laquelle se développe une zone corrodée de géométrie elliptique, avec un matériau élasto-plastique à écrouissage isotrope linéaire, et soumise à une sollicitation de traction  $T$  (figure 3). L'évolution de la corrosion est modélisée par un produit de fonctions

spatiale et temporelle [13], en première approximation de (Guedes Soares *et al.*, 1999). Pour représenter le chargement stochastique appliqué à la plaque, on utilise la méthode EOLE qui peut se ramener à [14], (Sudret *et al.*, 2000).

$$e(M, t) = f(t)g(M) \text{ avec } \begin{cases} f(t) = \text{prof. corr. à } t / \text{prof. corr. à } t = 15 \text{ ans} \\ g(M) = \text{épaisseur de la plaque à } t = 15 \text{ ans} \end{cases} \quad [13]$$

$$X(t, \omega) = m_X(t) + \sigma_X(t) \cdot \sum_{i=1}^r \xi_i(\omega) \phi_i^T C_{t,t_i}(t) / \sqrt{\lambda_i} \quad [14]$$



**Figure 3.** Problème mécanique étudié et calculs E.F. associés

### 3.2. Analyse fiabiliste

#### 3.2.1. Modèle fiabiliste

Type	Variable	Distrib.	Moy.	E.T.
Corrosion	½ petit axe de l'ellipse $a$ (mm)	Gauss	0.5	10%
	½ grand axe de l'ellipse $b$ (mm)	Gauss	2.5	
	Prof. de corrosion max. $e_c$ (mm)	Gauss	0.5	
	Durabilité de la peinture $T_c$ (ans)	Gauss	5	
Matériaux	Déformation plastique limite $p_{lim}$	Gauss	1.E-2	10%
	Limite élastique initiale $\sigma_y$ (MPa)	Gauss	400	5%
Chargement	Chargement aléatoire $P$ (N)	Gauss	800	5%
	Ch. Sto. Moy. 800N, E.T. 5% $\xi_i(\omega)$	Gauss	0	1

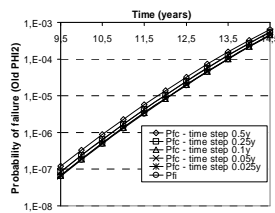
**Tableau 1.** Paramètres et distributions des variables aléatoires considérées

Considérons, en sus de la variabilité du chargement, 6 variables aléatoires (tableau 1). Le scénario de défaillance est tel que le maximum de la déformation plastique cumulée  $p_{max}(t)$  dépasse une certaine limite  $p_{lim}$ . On lui associe la fonction de performance  $G_e$ , dont la décroissance induit l'égalité entre  $P_{f,i}$  et  $P_{f,c}$  (cf. [3]):

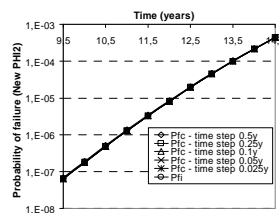
$$G_e(t) = p_{\lim} - p_{\max}(t) \quad [15]$$

### 3.2.2. Cas d'un chargement aléatoire

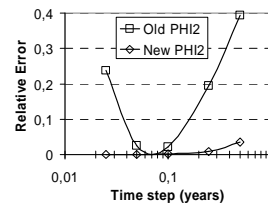
Les probabilités de défaillance obtenues sous chargement aléatoire avec les deux formulations PHI2 pour différents pas de temps  $\Delta\tau$  sont présentées figures 4 & 5. Comme démontré par (Sudret, 2005), la nouvelle méthode PHI2 se révèle beaucoup moins sensible à la discrétisation temporelle, cf. figure 6. Par conséquent, seule celle-ci sera utilisée pour traiter le cas du chargement stochastique.



**Figure 4.** Evolutions de  $P_{f,c}$  et  $P_{f,i}$  avec l'ancienne formulation PHI2



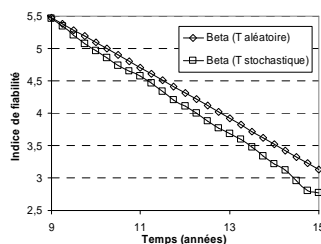
**Figure 5.** Evolutions de  $P_{f,c}$  et  $P_{f,i}$  avec la nouvelle formulation PHI2



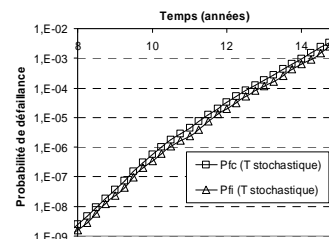
**Figure 6.** Estimateur d'erreur sur l'évaluation de  $P_{f,c}$  ( $t = 14,5$  ans)

### 3.2.3. Cas d'un chargement stochastique

L'ajout des variables nécessaires à la discrétisation EOLE (ordre d'expansion  $r = 15$  pour  $\Delta\tau = 0,05$ an et longueur de corrélation d'un an) augmente d'un facteur 3 le temps calcul, mais correspond à un chargement plus réaliste. En effet, les pics d'effort intrinsèques au chargement stochastique ont une influence importante sur la fiabilité de la structure (figure 7), de par l'activation précoce des zones plastifiées. Lorsqu'on compare  $P_{f,i}$  et  $P_{f,c}$  (figure 8), on remarque une légère sur-évaluation de  $P_{f,c}$ . Plusieurs causes numériques, telles que la précision insuffisante de la discrétisation temporelle, l'incompatibilité de la longueur de corrélation du processus stochastique avec la vitesse d'évolution de la corrosion ou la prise en compte fiabiliste délicate des paliers élasto-plastiques, peuvent l'expliquer.



**Figure 7.** Evolutions de Beta



**Figure 8.** Evolutions de  $P_{f,i}$  et  $P_{f,c}$



#### 4. Exemple d'une structure collée endommageable

##### 4.1. Construction du modèle éléments finis

Lorsqu'une dimension d'un élément d'un assemblage hétérogène est petite par rapport aux autres, il est naturel de remplacer les éléments massifs classiques par des éléments d'interface (Allix *et al.*, 1999). L'épaisseur de ces éléments est considérée comme nulle et comme ils utilisent les mêmes inconnues nodales que les éléments massifs, ils peuvent être utilisés pour réaliser un même modèle. L'interface est ainsi modélisée par une surface de normale  $\mathbf{n}$  comprise entre les deux éléments assemblés  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  (figure 12). L'utilisation d'un modèle avec comportement endommageable permet de modéliser l'initiation de fissures et leurs propagations. Pour les problèmes plans (en 2D), un modèle d'interface est donc une relation entre les composantes normale et tangentielle du déplacement relatif de l'interface et les composantes du vecteur contrainte :

$$[U] = U^+ - U^- = [U_n] \bar{n} + [U_s] \bar{s}; t = t_n \bar{n} + t_s \bar{s} \quad [16]$$

Le modèle choisi (Valoroso *et al.*, 2001) considère que l'endommagement n'évolue que dans un chargement de traction ou de cisaillement et que la compression n'endommage pas l'interface. Les lois d'état sont obtenues à partir du potentiel thermodynamique suivant :

$$\psi([u], D) = \frac{1}{2} (1 - D) [K_n^+ \langle [U_n] \rangle_+^2 + K_s \langle [U_s] \rangle^2] + \frac{1}{2} K_n^- \langle [U_n] \rangle_-^2 \quad [17]$$

$$t = \frac{\partial \psi}{\partial [u]} \quad \text{et} \quad Y_m = - \frac{\partial \psi}{\partial D} \quad [18]$$

Où  $\langle X \rangle_+ = 0.5 * (X + |X|)$  représente la partie positive de X. La détérioration de l'interface est prise en compte par la variable interne d'endommagement D.  $K_n^+$ ,  $K_n^-$  et  $K_s$  sont les rigidités en traction, compression et cisaillement. Les valeurs des paramètres de ce modèle ont été obtenus à partir d'essai sur éprouvettes TDCB (Mejri *et al.*, 2006).

##### 4.2. Etude fiabiliste

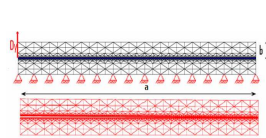
###### 4.2.1. Structures collées avec problèmes d'ouverture et de fermeture de fissure

L'exemple présenté correspond à l'initiation et à la propagation de fissure dans une structure collée (figure 9). Deux plaques rectangulaires d'aluminium (100mm / 5mm) représentent le substrat. Le bord supérieur gauche est soumis à un déplacement imposé Dy. La plaque inférieure est encastree au bâti. L'évolution de la rigidité de la structure en fonction du chargement appliqué est un indicateur de l'état de la structure. Cette évolution est calculée en fonction de l'endommagement du joint

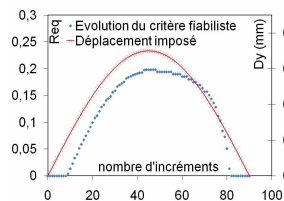
de colle qui traduit la dégradation de l'assemblage. Seuls les éléments qui contribuent à l'ouverture de la fissure sont considérés. Pour ces éléments, les sauts de déplacements entre la lèvres supérieure et la lèvres inférieure sont positifs. À ces éléments, on affectera un multiplicateur  $\delta$  égal à l'unité. Pour les éléments qui travaillent dans le sens à favoriser une fermeture de fissure, on affectera un multiplicateur  $\delta$  nul. L'endommagement est ensuite intégré sur la totalité du joint de colle. Ce critère est sensible à la sollicitation de l'assemblage. La figure 10 montre que la fonction d'état limite suit le chargement. La probabilité de défaillance cumulée  $P_{f,c}$  est croissante quand la fonction d'état limite est décroissante, constante quand l'indice de performance s'annule (croissance de la fonction  $G$ ). Le calcul de la probabilité de défaillance instantanée  $P_{f,i}$  renseigne sur la nature de la sollicitation, d'un point de vue qualitatif. D'un point de vue physique, le calcul de la probabilité de défaillance instantanée est difficilement exploitable d'où l'intérêt de recourir au calcul de la  $P_{f,c}$  plus physique. À titre indicatif le critère retenu pour les simulations s'écrit comme suit :

$$G(t) = R_{\text{lim}} - R_{\text{eq}}, \text{ avec } R_{\text{eq}} = \int_{\text{joint}} \delta(x) \cdot D(x) dx / \int_{\text{joint}} dx \text{ avec } R_{\text{lim}} = 0.2 \quad [19]$$

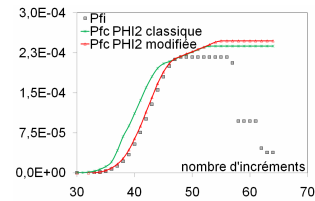
avec  $\delta(x)$  définie tel que: Si  $[U_n] > 0$  alors  $\delta(x) = 1$  sinon  $\delta(x) = 0$ .



**Figure 9.** Structure étudiée



**Figure 10.** Chargement imposé et réponse du critère



**Figure 11.** Réponses fiabilistes

Les résultats obtenus par cette étude mécano-fiabiliste montrent la faisabilité de la démarche pour un problème représentatif d'un assemblage collé pour un chargement conduisant à un endommagement dans le joint de colle. De même qu'en section 3, la méthode PHI2 revisitée se révèle à nouveau plus pertinente.

#### 4.2.2. Structure en T sollicitée en traction

Une structure en T soumise à une sollicitation verticale est étudiée (figure 13). Seule la moitié de la géométrie est étudiée pour des raisons de symétrie. Les substrats métalliques sont en aluminium ( $E = 70000\text{MPa}$ ), 200 éléments cohésifs représentent chacun des deux joints de colle (ceux-ci sont présents aux interfaces entre l'âme centrale du T et l'aile d'une part et entre l'aile et le support du bas). La base est supposée encastree. Un déplacement normal strictement croissant est imposé au niveau de la partie supérieure du T. Le critère de défaillance de la structure est

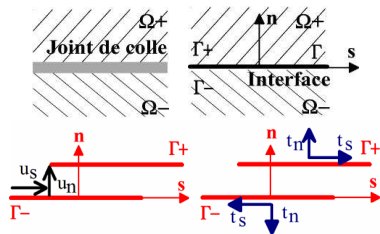
calculé en fonction de la raideur dépendant du temps. Cette évolution est déterminée en se basant sur la valeur de l'endommagement moyen des joints de colles. Nous supposons que la défaillance d'un des joints de colle implique celle de la structure, le critère de défaillance s'écrit comme défini par la formule [20]. L'ensemble des variables aléatoires retenues pour cette étude figure dans le tableau 2.

$$G(t) = D_{\text{seuil}} - D_{\text{max}}, \text{ avec } D_{\text{max}} = \text{Max}_{i=1,2} \left( \frac{\int_{\text{joint } i} \delta(x) D(x) dx}{\int_{\text{joint } i} dx} \right) \quad [20]$$

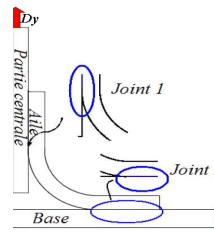
Variable aléatoire	Dist.	Moyenne	Écart type	Troncature
Endommagement limite	Normale	5E-2	10%	4E-2..6E-2
$G_{\text{cri}}$ (J/mm <sup>2</sup> )	Normale	0.51	10%	0.45..0.57
$K_n$ (N/mm <sup>3</sup> )	Normale	6350	10%	6000..6700
Chargement $D_y$ (mm)	Normale	0.3	10%	0.27..0.33

**Tableau 2.** Liste des variables aléatoires

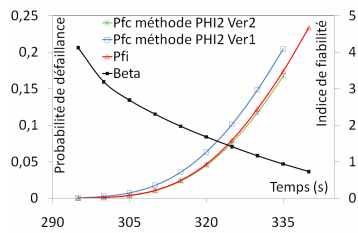
L'ordre de grandeur de l'endommagement limite est choisi pour être petit, les observations ayant montré une rupture brusque de la structure et une croissance rapide de l'endommagement après amorçage de fissure (solicitation croissante). Le cas d'étude et les résultats obtenus sont donnés en figures 13, 14 & 15. Cet exemple conduit à des temps de calcul importants (10h de calcul par point sur PC 4Ghz 2Go).



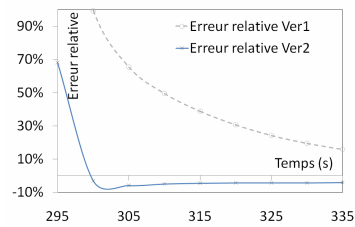
**Figure 12.** Modélisation des joints



**Figure 13.** Structure étudiée



**Figure 14.** Réponses fiabilistes



**Figure 15.** Evaluation de l'erreur

## 5. Conclusion

L'approche par couplage des méthodes fiabilistes fonction du temps avec l'analyse non-linéaire par éléments finis présentée dans ce papier a montré son efficacité, que ce soit pour la prise en compte de corrosion dans un modèle éléments finis 2D à comportement non-linéaire, ou dans la dégradation de joints collés avec considération de défauts initiaux. Les analyses menées ont permis de comparer les deux formulations disponibles pour la méthode PHI2 sur des cas représentatifs de structures réelles. La compatibilité de cette approche avec les phénomènes stochastiques, en ne nécessitant que des outils fiabilistes indépendants du temps, la rend attractive pour le traitement de problèmes industriels.

## 6. Bibliographie

- Allix, O., Corigliano, A., « Geometrical and interfacial non-linearities in the analysis of delamination in composites », *International Journal of Solids & Structures*, Vol. 36, 1999, pp. 2189-2216.
- Andrieu-Renaud C., Sudret B., Lemaire, M., « The PHI2 method: A way to compute time-variant reliability », *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 84, 2004, pp. 75-86.
- Cazuguel M., Renaud C., Cognard, J.Y., « Time-variant reliability of non-linear structures : Application to a representative part of a plate floor », *Quality and Reliability Engineering (special issue)*, vol. 22, 2006, pp. 101-118.
- Cognard J.Y., Poulhalec A., Thomas F., Verpeaux P., « A parallel environment and associated strategies in structural non-linear analysis », *Progress In Engineering Computational Technology*, ISBN 1-874672-22-9, 2004, Chapter 14, pp. 323-352.
- Guedes Soares C., Garbatov Y., « Reliability of maintained, corrosion protected plates subjected to non-linear corrosion and compressive loads », *Marine Structures*, vol. 12, 1999, pp. 425-445.
- Mejri M., Cognard J.Y. « Développement d'une approche mécano-fiabiliste d'assemblages collés pour applications marines ». *Matériaux et techniques*, vol. 94, 2006, pp.409-417.
- Sudret B., « Analytical derivation of the outcrossing rate in time-variant reliability problems. Reliability and Optimization of Structural Systems », *12th IFIP Conference*, 2005.
- Sudret B., Der Kiureghan A., « Stochastic Finite Element Methods and Reliability. A State-of-the-Art Report », Report No. UCB/SEMM-2000/08, 2000, University of California, Berkeley. [http://www.ce.berkeley.edu/FERUM/Users\\_Guide/users\\_guide.html](http://www.ce.berkeley.edu/FERUM/Users_Guide/users_guide.html)
- Valoroso, N., Champaney, L., « A damage-mechanics-based approach for modeling decohesion in adhesively bonded assemblies ». *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 73, 2006, pp. 2774-2801.

## **Optimisation de l'inspection de structures protégées à dégradation multiphasique.**

D. Breysse, F. Schoefs, A. O'Connor, E. Sheils

---

---

# Optimisation de l'inspection de structures protégées à dégradation multi-phasique

**D. Breysse\*\***, **F. Schoefs\***, **A. O'Connor\*\*\***, **E. Sheils\*\*\***

\* *Université de Nantes, Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM), UMR 6183 CNRS, Faculté des Sciences et des Techniques, 2 rue de la Houssinière, Nantes, F-44000 France. franck.schoefs@univ-nantes.fr*

\*\* *Université Bordeaux1, Ghymac, France*

\*\*\* *Trinity College, Dublin, Ireland*

---

*RÉSUMÉ. Les stratégies de maintenance basées sur les résultats d'inspection présentent une alternative intéressante pour la gestion de structures soumises à des dégradations. L'efficacité économique et/ou technique dépendent d'un grand nombre de facteurs comme la disponibilité, le coût et l'efficacité de techniques d'inspection,, les mécanismes gouvernant la perte de performance, le niveau requis de service et les coûts directs et indirects. Cet article étudie, sur la base de simulations de Monte-Carlo, l'optimisation de la période entre inspections.*

*ABSTRACT. Inspection based maintenance strategies can provide an efficient alternative for ageing civil engineering components subjected to ageing and degradation. The technical and/or economic efficiency of such strategies depends on many factors such as the availability, cost and efficiency of inspection techniques, the mechanisms involved in the loss of performance, the relation between what can be measured through inspections and the level of performance of the structure, the level of required serviceability of the structure, and the direct and indirect economic losses due to a reduction in the performance of a structure. On this basis, this paper studies, using Monte Carlo simulations, the benefits and limitations of an inspection based maintenance strategy.*

*MOTS-CLÉS: inspection, maintenance, réparation, PoD, PFA, fiabilité, analyse de risque.*

*KEYWORDS: inspection, maintenance, repair, PoD, PFA, reliability, risk analysis.*

---

## 1. Introduction

La maintenance des infrastructures ouvre la voie à de nombreuses recherches depuis les années 80. L'objectif des travaux récents est de produire des modèles prédictifs et des simulations permettant d'optimiser les budgets d'Inspection Maintenance Réparation (*IMR*) (Estes *et al.*, 1999, Kong *et al.*, 2005, Lauridsen *et al.*, 2006, Radojicic *et al.* 2001, Stewart *et al.*, 2006). Par rapport à ces approches, cet article met en place le cadre d'une méthode générique et paramétrique qui intègre la plupart des sources d'aléas et d'incertitudes que l'on rencontre dans la pratique : le caractère aléatoire de l'évolution temporelle de la dégradation (qui dépend du matériau et des conditions d'exposition), le caractère incertain des résultats d'inspection (qui résulte de la qualité des techniques et de leur sensibilité aux biais environnementaux), le caractère aléatoire de la défaillance. On présente d'abord une modélisation probabiliste des résultats d'inspection, qui guide la politique *IMR*. Les modèles d'évolution, d'inspection et de coût sont proposés dans les deux paragraphes suivants. L'article se conclut sur une illustration dont l'objectif est l'optimisation de la périodicité des inspections.

## 2. Concepts de base pour la modélisation probabiliste des résultats d'inspection

Dans les années 90, de nombreux travaux ont développé des concepts intégrant les imperfections dans la capacité de détection des techniques de contrôles non-destructifs (CND). Parmi eux, le concept de probabilité de détection *PoD* - probabilité de détecter un défaut existant- a connu une utilisation importante dans la maintenance des structures, donnant naissance aux stratégies de planification des inspections basées sur des analyses de risque (RBI : Risk Based Inspection) (Faber, 2002). Les secteurs les plus avancés dans cette utilisation sont les secteurs maritimes pour lesquels les coûts et les difficultés d'inspection sont des facteurs importants. Les modèles reposent soit sur des statistiques issues de campagnes d'inter-calibration (Barnouin *et al.*, 1993), soit sur des hypothèses sur la modélisation par la théorie du signal de données d'inspection (Schoefs *et al.*, 2007). Plus récemment, on a montré (Rouhan *et al.*, 2003) comment la probabilité de fausse alarme *PFA* - probabilité de détecter un défaut non existant- influe sur la politique de maintenance. Dans ce cas, des combinaisons de techniques permettent de déterminer des optimums intéressants du point de vue analyse de risque (Schoefs *et al.*, 2004).

Dans cet article, le défaut  $d$  en un point est supposé exister mais sa valeur exacte est inconnue. L'inspection en fournit une estimation bruitée  $\hat{d}$  [1]. Afin de simplifier les illustrations et de limiter le nombre de paramètres le bruit  $\eta$  est considéré comme centré ; il est aisé d'étendre le modèle au cas d'un biais de mesure. On suppose ici que le bruit est indépendant de la taille du défaut mesuré, ce qui est le cas lorsque la qualité d'inspection est fortement affectée par les conditions environnantes (visibilité, difficulté d'accès et de mise en œuvre...). Cette hypothèse

a été validée à partir d'une campagne de mesures dans le secteur portuaire (Schoefs *et al.*, 2007).

$$\hat{d} = d + \eta \quad [1]$$

Par ailleurs, il est important de distinguer les grandeurs relatives à la calibration de techniques de Contrôles Non-Destructifs (*PoD* et *PFA*) et les termes relatifs à l'aide à la décision. A titre d'exemple, dans le premier cas on cherchera à déterminer la probabilité de détection d'un défaut existant (*PoD*) alors que le décideur voudra évaluer la probabilité d'existence d'un défaut sachant qu'une détection a été obtenue. Des relations existent entre ces grandeurs à condition d'introduire un terme supplémentaire : la probabilité d'existence du défaut (Rouhan *et al.*, 2003). Par souci de simplification, ce paramètre n'est pas introduit ici. On utilise donc les grandeurs relatives à la calibration comme support direct d'aide à la décision. Dans le cas contraire, il suffit de remplacer les termes *PoD* et *PFA* dans les équations [11] à [13] par les grandeurs relatives à l'aide à la décision. Ces aspects sont détaillés dans une autre publication (Sheils *et al.*, 2007).

### 3. Modélisation probabiliste de la détérioration et des inspections

#### 3.1. Modèle de détérioration et de défaillance

Le modèle d'évolution temporelle de l'intensité du défaut est un modèle stochastique. On n'introduit pas à cette étape de première phase correspondant à une protection. En effet, elle peut être reflétée par la taille de défaut  $d_i$  à partir de laquelle la probabilité de défaillance augmente [3]. La croissance de l'intensité au cours d'un pas de temps  $\Delta t$  se fait par des sauts aléatoires plus ou moins intenses. On définit alors une mesure de probabilité associée à la croissance de l'intensité du défaut (la taille du défaut demeure constante avec une probabilité complémentaire) [2]. Une telle formulation permet de décrire, via la valeur du coefficient  $g$ , des lois d'évolutions plutôt régulières ou plutôt brutales.

$$\frac{d(t + \Delta t)}{d_0} = \begin{cases} \frac{d(t)}{d_0} & \text{de probabilité} \left(1 - \frac{1}{g}\right) \\ \frac{d(t)}{d_0} (1 + g\alpha) & \text{de probabilité} \left(\frac{1}{g}\right) \end{cases} \quad [2]$$

où  $d(t)$  est la taille du défaut à l'instant  $t$ ,  $d_0$  une taille de défaut de référence,  $g$  un paramètre décrivant la mesure de probabilité,  $\Delta t$  le pas de temps et  $\alpha$  une variable aléatoire distribuée normalement  $N[\mu; \sigma]$  décrivant la cinétique de dégradation. En modifiant la valeur de  $g$ , l'évolution du défaut est graduelle ou plus abrupte (Figure 1).



Pour une taille de défaut donnée, la défaillance est elle-même un événement aléatoire (dont l'occurrence dépend par exemple de l'intensité des actions exercées dans l'intervalle de temps considéré). La probabilité annuelle de défaillance  $p_F$  est calculée à partir d'une fonction de répartition de Weibull [3] d'exposant  $m$ , décrivant l'expression de  $p_F$  en fonction de  $d$ .

$$p_F(d) = 1 - \left[ \exp - \left( \frac{d(t) - d_l}{d_0} \right)^m \right] \quad [3]$$

La taille de défaut limite  $d_l$  [4] correspond à une borne inférieure en deçà de laquelle on considère que la probabilité de défaillance est nulle (figure 2).

$$p_F = \begin{cases} 0 & d \leq d_l \\ p_F(d) & d > d_l \end{cases} \quad [4]$$

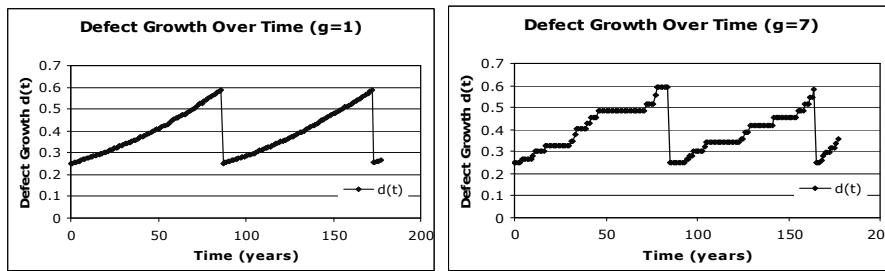


Figure 1. Cinétique de détérioration :  $g=1$  (gauche),  $g=7$  (droite) - 2 réparations

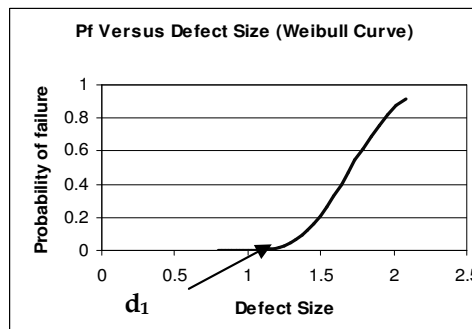


Figure 2. Evolution de la probabilité de défaillance avec la taille de défaut

### 3.2. Modèle d'inspection

Le bruit  $\eta$  est supposé suivre une loi normale  $N[0, \sigma_\eta]$ . A partir de [1], on définit :

$$PoD = P(\hat{d} \geq d_{min}) \quad [5]$$

où  $d_{min}$  désigne le seuil de détection au-dessous duquel aucune détection n'est possible. Le modèle de  $PoD$  dépend de la taille du défaut et du type d'inspection. Pour cet article on choisit une fonction de Weibull [6] d'exposant  $\beta$  pour représenter la dépendance de  $PoD$  avec la taille du défaut. On suppose que le bruit et le seuil de détection sont constants pour chaque inspection et  $PFA$  est une constante. Le terme  $d_0$  est utilisé ici comme terme d'adimensionnement.

$$PoD(d) = 1 - \left[ \exp - \left( \frac{d - d_{min}}{d_0} \right)^\beta \right] \quad [6]$$

### 3.3. Modèle de réparation

La figure 1 illustre le cas de réparations périodiques. Une réparation est réalisée si l'on a détecté un défaut dont la taille dépasse un niveau critique  $d_c$  calculé d'après [6] en fonction de  $p_{FA}$ , la probabilité annuelle admissible de défaillance.

$$d_c = d_1 + d_0 \left[ -(\ln(1 - p_{FA})) \right]^{1/m} \quad [6]$$

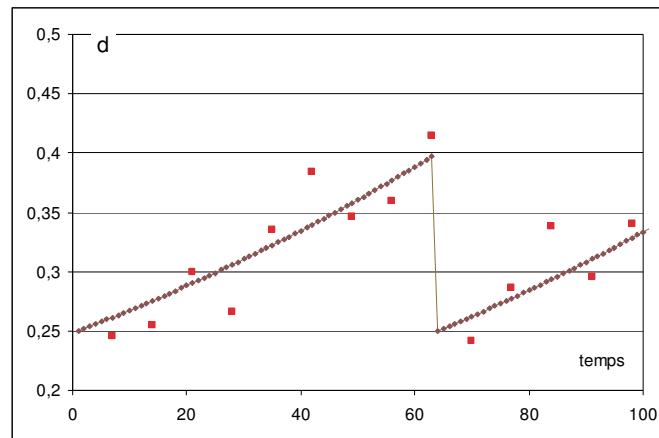
En pratique, la valeur de la probabilité  $p_{FA}$  qui déclenche la réparation dépend du type d'état limite considéré et de la sévérité de cet état limite. On pourra par exemple distinguer des critères de type ELS, dont les conséquences demeurent modérées (en termes économiques, de sécurité, de perte de fonctionnalité de l'ouvrage...) et des critères de type ELU, dont les conséquences seront plus sévères. A ces différents états-limites correspondent des probabilités différentes, dans la mesure où l'on est plus exigeant pour la détection d'un défaut dont les conséquences risquent d'être très importantes et dans le cas d'un défaut qui n'a que des conséquences mineures.

On fait aussi l'hypothèse qu'après défaillance, le défaut est systématiquement réparé.

### 3.4. Illustration du cycle de vie d'un composant

La figure 3 illustre les évolutions temporelles des défauts au cours du temps, combinant les effets de la dégradation temporelle, de l'inspection et de la réparation.

On y distingue l'évolution, ici régulière, de la taille du défaut, depuis une taille initiale  $d = 0.25$ . Les points rouges correspondent aux valeurs mesurées lors de l'inspection, à laquelle on procède ici tous les 5 ans. La qualité médiocre de la technique a pour résultat que la valeur estimée n'est pas égale à la valeur vraie de la taille du défaut. Dès que la valeur estimée dépasse la taille critique (ici de l'ordre de  $d = 0.41$ ), on répare le composant et la taille revient à sa valeur initiale. Un autre cycle, indépendant du précédent, se développe alors. Dans le cas où la technique est de grande qualité (bruit faible), la valeur estimée se rapproche de la valeur vraie, et la décision de réparation est prise à bon escient. Dans le cas contraire, le résultat bruité de l'inspection conduit souvent à une réparation prématurée par rapport aux objectifs de fiabilité que l'on s'est donné a priori.



**Figure 3.** Cycle de vie du composant

#### 4. Stratégies d'Inspection Maintenance Réparation et modèles économiques

Nous souhaitons comparer plusieurs stratégies d'inspection en conservant le mode de décision (politique de réparation) : en cas de détection de défaut, il peut y avoir réparation dans la limite du budget disponible, sinon aucune réparation n'est programmée. Des comparaisons pertinentes requièrent que l'on puisse calculer les espérances des coûts. Dans un objectif d'optimisation de la stratégie d'inspection, il s'agira de rechercher les coûts minimaux. Des modèles de coûts sont donc proposés. Selon le périmètre des actions, le coût de défaillance recouvre des conséquences indirectes : coûts sociétaux, environnementaux.

##### 4.1. Modèles de coût

Le coût d'une inspection unique est calculé selon l'équation [8].

$$C_I = C_0 k_I \left( \frac{Q}{Q_{ref}} \right) \quad [8]$$

avec  $Q$  coefficient de qualité de la technique et  $k_I$  coefficient de pondération du coût d'inspection. La qualité de la technique conditionne directement le niveau de bruit  $\sigma_\eta$ .

Le coût de réparation [9] dépend de la taille du défaut à réparer : le coût est proportionnel à un paramètre adimensionnel relié à la taille du défaut  $d(t)/d_{ref}$ .

$$C_R = C_0 k_R \left( \frac{d(t)}{d_{ref}} \right) \quad [9]$$

avec  $C_0$  coût initial de construction,  $d_{ref}$  taille de défaut de référence et  $k_R$  coefficient de pondération du coût de réparation. Après réparation, le défaut revient à sa taille initiale  $d_0$ .

Le coût d'une défaillance est calculé selon [10] avec  $k_f$  coefficient de pondération du coût de défaillance.

$$C_F = k_f C_0 \quad [10]$$

Avec une telle modélisation, trois coefficients ( $k_I$ ,  $k_R$ ,  $k_f$ ) permettent de décrire l'influence des poids respectifs de l'inspection, de la maintenance et de la réparation. On peut aussi introduire un coefficient scalaire qui permet l'actualisation économique.

#### 4.2. Calcul des espérances mathématiques des coûts

On ne détaille pas ici le calcul des espérances pour  $N$  inspections à date  $T_i$  ( $T_0=0$ ) que l'on pourra trouver dans (Sheils *et al.*, 2007, Breyse *et al.*, 2007), sachant que : le coût de l'inspection est systématique, pour chaque année d'inspection, le coût de maintenance suppose que la détection ait conduit à décider que le défaut devait être réparé, le coût de rupture suppose que le défaut n'ait pas été détecté – donc réparé – et qu'il a conduit à la défaillance.

On peut alors considérer trois cas selon la taille du défaut :

- Premier cas :  $d < d_{min}$  et  $d_1 > d_{min}$

$$E(C_1(t)) = \sum_{j=1}^N C_I P_{jT_i}(d < d_{min}) + \sum_{j=1}^N C_F \frac{T_i}{\Delta t} P_{f,jT_i}(d(jT_i) | d(jT_i) < d_{min}) P_{jT_i}(d < d_{min}) \quad [11]$$

- Deuxième cas :  $d_{min} < d < d_c$

$$E(C_2(t)) = \sum_{j=1}^N C_I P_{jT_i}(d_{min} < d(jT_i) < d_c) + \sum_{j=1}^N C_R PFA(d(jT_i) | d_{min} < d(jT_i) < d_c) \\ + \sum_{j=1}^N C_F \frac{T_i}{\Delta t} \left[ (1 - PFA(d(jT_i) | d_{min} < d(jT_i) < d_c)) \cdot \left[ P_{jT_i}(d_{min} < d(jT_i) < d_c) \right] \right] \\ + \left[ P_{f,jT_i}(d(jT_i) | d_l < d(jT_i) < d_c) P_{jT_i}(d_l < d(jT_i) < d_c) \right] \quad [12]$$

L'expression [12] tient compte de ce que le défaut peut être estimé plus grand qu'il n'est en réalité (fausse alarme) et réparé de façon trop précoce.

- Troisième cas :  $d_{min} < d_c < d$  : (on suppose  $d_l < d_c$ )

$$E(C_3(t)) = \sum_{j=1}^N C_I P_{jT_i}(d_c < d(jT_i)) + \sum_{j=1}^N C_R [PoD(d(jT_i) | d_c < d(jT_i))] P_{jT_i}(d_c < d(jT_i)) + \\ + \sum_{j=1}^N C_F \frac{T_i}{\Delta t} \left[ (1 - PoD(d(jT_i) | d_c < d(jT_i))) \cdot \left[ P_{f,jT_i}(d(jT_i) | d_c < d(jT_i)) P_{jT_i}(d_c < d(jT_i)) \right] \right] \quad [13]$$

## 5. Simulations de la stratégie d'IMR

### 5.1. Principes et objectifs de la simulation

L'ensemble des modèles ayant été défini, on peut procéder aux simulations numériques. Les valeurs numériques choisies sont données dans le tableau 1.

Ces paramètres conduisent, sans maintenance, à une durée de vie moyenne avant défaillance d'une soixantaine d'années. On réalise des simulations de Monte-Carlo en considérant des chroniques de 10000 ans, ce qui revient à suivre dans le temps l'évolution d'un composant pendant environ 150 à 200 cycles de vie, ou, de manière équivalente, à considérer simultanément 150 à 200 composants jusqu'à leur défaillance.

Nous étudierons ici l'effet de la durée entre deux inspections. Nous noterons avant tout commentaire que les **comparaisons de coûts** doivent être faites avec prudence, les résultats dépendant fortement des valeurs choisies pour  $k_i$ ,  $k_r$  et  $k_f$ .

#### Croissance du défaut

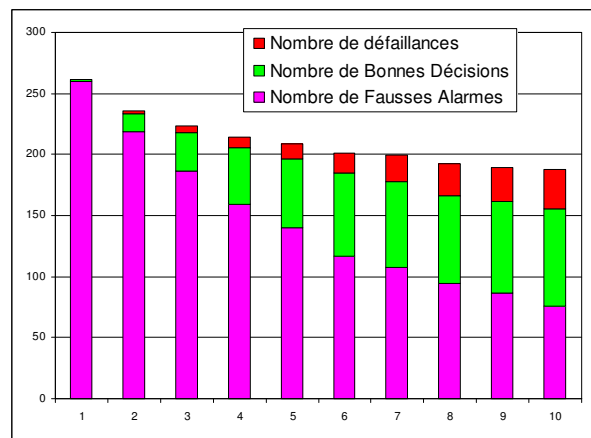
Taux de croissance, moyenne  $\alpha(\mu)$  et écart type  $\alpha(\sigma)$       0.01 ; 0.002

Taille de défaut initial $d_0$ ; défaut de référence $d_{ref}$	0.25 ; 1
Paramètre de cinétique de dégradation, $g$	1
<i>Probabilité de défaillance</i>	
Exposant de la probabilité de défaillance, $m$	4
Taille de défaut limite, $d_1$	0.33
Probabilité annuelle de défaillance acceptable, $p_{FY}$	0.01
<i>Paramètres relatifs à la technique CND</i>	
Seuil de détection, $d_{min}$	0.3
Qualité de l'inspection, $Q$ et qualité de référence $Q_{ref}$	8 ; 20
PFA	0.5
<i>Paramètres relatifs aux modèles de coût</i>	
Coût initial de construction, $C_0$	1000
Coefficients d'inspection, $k_i$ et de réparation, $k_r$	0.005 ; 0.05
Coefficient d'impact de la défaillance, $k_f$	1

**Tableau 1.** Paramètres retenus pour les modèles (sans actualisation économique)

### 5.2. Intervalle optimal entre deux inspections.

Les figures 4 et 5 rassemblent les résultats obtenus si l'on fait varier l'intervalle entre deux inspections de 1 à 10 ans.



**Figure 4.** Effectif des causes possibles de fin de cycle en fonction de l'intervalle entre deux inspections.

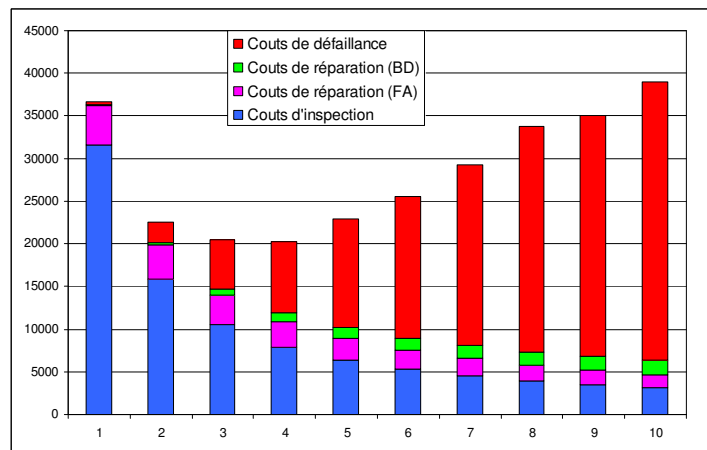
Les résultats de la figure 4 appellent plusieurs commentaires :

- le nombre de défaillances croît avec l'intervalle entre deux inspections, dans la mesure où la probabilité de défaillance croît si la durée croît, et que deux

inspections trop distantes ne permettent pas de prévenir cette défaillance (le défaut est sous le seuil critique lors de la première des deux inspections),

- le nombre de réparations faites après une fausse alarme est plus élevé que celui de réparations faites sur la base d'une bonne décision, et ce d'autant plus que l'intervalle entre deux inspections est faible. Cela provient du caractère imparfait de la technique de mesure, qui conduit à de nombreuses surestimations de la taille du défaut, et donc à des réparations prématurées (voir figure 3). Une conséquence directe est que la durée moyenne de service passe de moins de 40 ans ( $38,1 = 10000/262,6$  si  $\Delta t = 1$  an) à plus de 50 ans ( $53,0 = 10000/188,6$  si  $\Delta t = 10$  ans).

Les coûts attachés à chaque stratégie sont comparés sur la figure 5. On y distingue les coûts d'inspection, ceux de réparation (en faisant la part de ceux dus à une fausse alarme et de ceux basés sur une bonne décision), et de ceux de défaillance. Avec les paramètres choisis, les coûts de réparation demeurent faibles et la valeur optimale de l'intervalle entre deux inspections résulte principalement du fait que, quand cet intervalle augmente, les coûts d'inspection décroissent, et les coûts de défaillance augmentent. L'optimum résultant est ici de 4 ans.



**Figure 5.** Variation de l'espérance des coûts en fonction de l'intervalle entre deux inspections.

Des variantes de simulation dans lesquels on a modifié les coûts unitaires de chaque opération ou pour lesquels la qualité d'inspection est paramétrée sont disponibles dans (Breysse *et al.*, 2007).

## 6. Conclusion

Nous avons présenté ici les premiers résultats d'une approche globale de l'optimisation d'une politique d'Inspection-Maintenance-Réparation dans un

contexte où les incertitudes portent à la fois sur la croissance des défauts, sur les résultats de l'inspection et sur les possibilités de défaillance. Le formalisme général est adapté au contexte de gestion vis-à-vis d'états-limites de service aussi bien que d'états-limites ultimes. Il peut aussi s'appliquer à des phénomènes de dégradation très divers, même s'il a été originellement développé dans l'optique de la maintenance d'ouvrages corrodés. Les simulations permettent de comparer différentes options stratégiques, par exemple en comparant l'efficacité de différentes techniques d'inspection, ou de différentes fréquences d'inspection.

Les résultats doivent être considérés aujourd'hui comme illustratifs, dans la mesure où ils dépendent largement des hypothèses faites à chaque étape du processus de modélisation, en particulier sur les composantes économiques. Il apparaît donc essentiel d'alimenter les modèles, aussi bien en ce qui concerne les capacités des techniques que de données sur les coûts. Le Projet SENSO, financé par l'ANR, qui a pour objectif d'établir une base de données sur la qualité des techniques de CND (intensité des bruits, sensibilité des techniques...), contribuera ainsi, par exemple à alimenter la modélisation. De même les modèles de réparation doivent être affinés : c'est l'objet du projet MAREO financé par la Direction Générale des Entreprises et la Région Pays de La Loire dans le cadre du Pôle de Compétitivité Génie Civil Ouest (PGCO).

Une autre perspective est de développer des modèles décomposant la stratégie d'acquisition d'information sur l'ouvrage en distinguant la phase de détection des défauts de la phase de qualification des défauts (Sheils et al, 2007).

### **Remerciements**

Cette étude est menée dans le cadre du projet européen MEDACHS, financé par les fonds FEDER (Interreg IIIb), et dédié à l'analyse de la maintenance et de la fiabilité de structures vieillissantes placées en environnement marin.

### **6. Bibliographie**

- Barnouin B., Lemoine L., Dovetr W.D., Rudlin J., Fabbri S., Rebourcet G., Topp D., Kare R., Sangouard D. «Un-derwater inspection reliability trials for offshore structures». In ASME NY, editor. *Proc. of the 12th OMAE conference*. Vol. 2 pp. 883-890. 1993.
- Breysse D., Sheils E., Schoefs F., O'Connor A., «Life cycle cost analysis of ageing structural components based on non destructive condition assessment», *Third International Forum on Engineering Decision Making, 'Optimal Strategies for Disaster and Hazard Mitigation'*, IFED, december 12-15 2007, Port Stephens, New South Wales, Australia, 11 pages (2007), à paraître dans 'Australian Journal of Structural Engineering'.
- Faber, M. H.. « RBI: An Introduction », *Structural Engineering International*, 3/2002, pp 187-194, 2002.



- Kong, J. S. and Frangopol, D. M. « Probabilistic optimization of ageing structures considering maintenance and failure costs». *JSE ASCE*, April 2005.
- Lauridsen, J., Bjerrum, J., Sloth, M. and Jensen, F. M. « Principles for a guideline for probability-based management of deteriorated bridges». *IABMAS 2006*.
- Onoufriou, T. and Frangopol D. M. « Reliability-based inspection optimisation of complex structures: a brief retrospective». *JCS 80*, 2002
- Radojicic, A., Bailey, S. F. and Brühwiler, E. « Probabilistic models of cost for the management of existing structures». *Life-Cycle Cost Analysis and Design of Civil Infrastructure Systems, SEI-ASCE*, August 2001.
- Rouhan, A. et Schoefs, F., « Probabilistic modelling of inspection results for offshore structures ». *Journal of Structural Safety*, vol 25, pp. 379-399, 20 pages, 2003.
- Rudlin JR, Dover WD.. « The ICON database. Assisting underwater inspections ». *In: Offshore technology*, vol. 4. 1996
- Schoefs, F. and Clement, A.. « Multiple inspection modeling for decision making and management of jacket offshore platforms: effect of false alarms ». *International Forum on Engineering Decision Making*, Switzerland, 2004.
- Schoefs F., Clément A., Memet J.B., et Nouy A.. « Spatial dependence of Receiver Operating Characteristic curves for Risk Based Inspection of corroded structures: application to on-pile wharf », à paraître, *Proceeding of I.C.A.S.P'07*, Tokyo, 2007.
- Sheils E., Schoefs F., Breyse D., O'Connor A., « Comparing efficiency of systematic and conditional maintenance for randomly ageing components», *Proceedings of I.C.A.S.P'07*, Tokyo, 2007.
- Stewart, M. G. and Mullard, J. A. «Reliability based assessment of the influence of concrete durability on the timing of repair for RC bridges». *IABMAS 2006*.

---

Session TS4-A  
Problèmes transverses

---

**Estimation of fragility curves for seismic probabilistic risk assessment by means of numerical experiments.**

I. Zentner, A. Nadjarian, N. Humbert, E. Viallet

---

---

# Simulation numérique de courbes de fragilité pour les études probabilistes de sûreté sismique

**Irmela Zentner\*** — **Alexis Nadjarian\*\*** — **Nicolas Humbert\*\*** — **Emmanuel Viallet\*\***

\* *Electricité de France, Direction des Etudes et Recherches*  
1, av. du Général de Gaulle  
92141 Clamart  
irmela.zentner@edf.fr

\*\* *Electricité de France, SEPTEN*  
12-14 av. Dutrievoz  
69628 Villeurbanne cedex

---

*RÉSUMÉ. La démarche des études probabilistes de sûreté sismique a pour objectif de faciliter l'appréciation du niveau de risque, compte tenu des incertitudes sur les données, et de démontrer qu'il reste en dessous d'un seuil critique. L'un des points clé de la démarche consiste à calculer les courbes de fragilité qui donnent la probabilité conditionnelle de défaillance en fonction d'un paramètre représentatif de l'action sismique. Dans l'approche américaine courante, on utilise des facteurs de sécurité par rapport à la méthode de dimensionnement pour caractériser la capacité de la structure et ainsi la courbe de fragilité (selon un modèle log-normal). Cette méthode s'appuie largement sur l'avis d'experts. Dans cet article on propose une démarche complémentaire pour déterminer les courbes de fragilité qui repose sur la simulation numérique du comportement mécanique de la structure.*

*ABSTRACT. The seismic probabilistic risk assessment methodology, has proven to be a preferred approach for the evaluation of seismic risk. In this framework, fragility curves express the conditional probability of failure of a structure or component for a given seismic input motion parameter A, such as peak ground acceleration. The capacity of the structure or component is generally supposed to be log-normally distributed. Then, in engineering practice, capacity is often expressed by means of margin factors (and safe shutdown earthquake), using the safety factor method. This approach allows for determining fragility curves in a very convenient way but is largely based on expert judgment. This is why it can be interesting to determine fragility curves by means of numerical simulation. We have performed non-linear dynamic response analyses using artificially generated strong motion time histories.*

*MOTS-CLÉS: courbe de fragilité, études probabilistes de sûreté, modèle log-normal, Monte Carlo, intervalles de confiance, rééchantillonnage*

*KEYWORDS: fragility curve, probabilistic risk assessment, log-normal model, Monte Carlo, confidence interval, resampling*

---

## 1. Introduction

Le dimensionnement sismique des tranches nucléaires est essentiellement fondé sur des méthodes linéaires conservatrices. Cependant, dans le cadre des réévaluations de sûreté, on peut avoir recours à des méthodes de simulation temporelle qui permettent de représenter de manière plus réaliste les efforts induits par le séisme mais aussi le comportement structural. Les méthodes de simulation de Monte Carlo permettent alors de tenir compte du caractère aléatoire (et non stationnaire) de l'excitation sismique, cette dernière étant caractérisée par des accélérogrammes mesurés sur site ou générés de manière artificielle.

L'ingénieur est néanmoins confronté à des incertitudes importantes dans la définition de l'amplitude et de l'évolution temporelle du mouvement sismique pouvant toucher un site. S'y ajoutent les incertitudes liées aux propriétés du sol, sa configuration et les incertitudes liées à la modélisation de la structure elle-même ainsi que de ses modes de défaillances. Enfin, les incertitudes de la modélisation, prenant en compte l'interaction sol-structure, peuvent être non négligeables. La démarche des études probabilistes de sûreté sismique (EPS) a pour objectif de faciliter l'appréhension du niveau de risque compte tenu des incertitudes sur les données et de démontrer qu'il reste en dessous d'un seuil critique.

L'un des points clés de la démarche EPS consiste à calculer les courbes de fragilité qui donnent la probabilité conditionnelle de défaillance en fonction d'un paramètre représentatif de l'action sismique. Dans l'approche américaine courante, on utilise des facteurs de sécurité par rapport à la méthode de dimensionnement pour caractériser la capacité de la structure et ainsi la courbe de fragilité (selon un modèle log-normal). Cette méthode s'appuie largement sur l'avis d'experts. Une approche alternative consiste en le calcul de courbes de fragilité par simulation numérique du comportement mécanique de la structure et des composants. Dans cet article, on présente la mise en oeuvre de cette deuxième méthode qui permet d'obtenir des courbes de fragilité directement à partir d'un modèle numérique "best-estimate" et en introduisant les incertitudes liées à cette modélisation.

## 2. Cadre des études probabilistes de sûreté sismique

L'objet des études probabilistes de sûreté est l'étude du risque de défaillance d'un système composé de sous-structures, équipements, etc. En ce qui concerne une installation nucléaire, la défaillance sera alors typiquement le relâchement de radioactivité

dans l'environnement. La probabilité de défaillance du système complet est déterminée au moyen d'un arbre de défaillance recensant toutes combinaisons possibles d'évènements pouvant conduire à la défaillance.

Afin de déterminer le risque de défaillance des composants (sous-structures et équipements), il est nécessaire de déterminer d'une part les courbes de fragilité associées et d'autre part la courbe d'aléa sismique. Pour un site donné, la courbe d'aléa sismique donne la probabilité annuelle du dépassement de valeurs du paramètre représentatif de l'action sismique. Les courbes de fragilité, elles, donnent la probabilité conditionnelle de défaillance en fonction d'un niveau de paramètre représentatif de l'action sismique (en général, on prend l'accélération maximale du sol - le PGA). La probabilité de défaillance du composant est obtenue après convolution de la (des) courbe(s) de fragilité avec la courbe d'aléa sismique. De la même manière, on peut évaluer la probabilité de défaillance globale de l'installation sous séisme par convolution de la courbe d'aléa sismique avec la courbe de fragilité de l'installation. Il est clair que, dans la mise en œuvre pratique d'une EPS, un point crucial est de bien définir les modes possibles de défaillance.

Par ailleurs, on cherche à intégrer l'ensemble des incertitudes liées à la défaillance dans la démarche EPS. Ceci est important pour rendre le plus fiable possible l'estimation de la probabilité de défaillance. Ainsi, les courbes de fragilité et d'aléa sismique sont en général présentées sous forme d'ensembles de courbes, ce qui donne une illustration des incertitudes inhérentes à leur établissement. Les objectifs affichés des EPS sismiques sont divers. On peut relever plus particulièrement les objectifs suivants :

- Evaluation de la fragilité de l'installation
- Identification des contributeurs dominants au risque de défaillance du système,
- Réduction du risque sismique en orientant les modifications éventuelles de composants,
- Quantification de l'impact d'une modification ou d'une non conformité sur le risque sismique et vérification de l'adéquation des protections sismiques existantes.

Signalons que la procédure des EPS peut être un processus itératif. Dans la première étape, les modèles peuvent être simplifiés. Les itérations réalisées ensuite peuvent alors se focaliser sur les principaux contributeurs au risque, en affinant l'analyse pour ces derniers. Le niveau de détail nécessaire pour les analyses mécaniques est ainsi déterminé en fonction de l'impact des incertitudes de ces analyses sur l'évaluation du risque de défaillance du système.

### **3. Courbes de fragilité et modèle lognormal**

La courbe de fragilité d'un composant est définie à partir de la notion de "capacité". La capacité d'une structure ou composant est définie par rapport au niveau sismique auquel elle peut résister. Dans le cadre d'une analyse temporelle, l'excitation sismique est considérée via la donnée d'un accélérogramme. Le niveau sismique est

alors généralement défini via un indicateur de nocivité tel que le PGA (peak ground acceleration), le PGV (peak ground velocity) ou encore l'intensité d'Arias. Ces indicateurs sont des scalaires qui s'obtiennent directement à partir de l'accélérogramme.

La capacité d'un composant est caractérisée par la valeur du paramètre représentatif de l'action sismique à partir de laquelle le composant est défaillant. L'approche courante [EPRI 03] consiste à modéliser la capacité  $A$  par une variable aléatoire suivant une loi log-normale,

$$A = A_m \varepsilon,$$

où  $A_m$  désigne la capacité médiane et où  $\varepsilon$  est une variable aléatoire log-normale de médiane unité et d'écart-type logarithmique  $\beta$ . La courbe de fragilité représente la probabilité de défaillance conditionnée par un niveau d'excitation sismique  $a$  donné. La probabilité de défaillance conditionnée par le niveau sismique  $a$  est alors simplement donnée par la fonction de répartition de  $A$ .

Ainsi, la probabilité de défaillance conditionnée par un niveau sismique  $a$  peut s'écrire :

$$P_{f|a}(a) = \int_0^a p(x) dx = \Phi\left(\frac{\log(a/A_m)}{\beta}\right) \quad (1)$$

où  $\Phi$  désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée réduite. Dans ce contexte, la courbe de fragilité est entièrement définie par la connaissance des deux paramètres  $A_m$  et  $\beta$ .

### 3.1. Distinction des incertitudes épistémiques et aléatoires dans l'approche EPS américaine

L'approche décrite ci-dessus a été affinée en dissociant les incertitudes en deux catégories. On distingue d'une part les incertitudes irréductibles inhérentes au caractère aléatoire de l'excitation sismique ("aleatory uncertainty" dans la littérature anglophone), et d'autre part les incertitudes épistémiques ("epistemic uncertainty"), c'est-à-dire l'incertitude de méconnaissance que l'on pourrait réduire en affinant les modèles et / ou les données. Ces deux types d'incertitudes sont représentés en distinguant les écart-type  $\beta_R$  et  $\beta_U$ , respectivement. Ensuite, on suppose que la capacité peut s'exprimer comme suit [KCC 80] :

$$A = A_m \varepsilon_R \varepsilon_U \quad (2)$$

où  $\varepsilon_R$  et  $\varepsilon_U$  sont des variables aléatoires log-normales de médiane unité et d'écart-type logarithmique  $\beta_R$  et  $\beta_U$  respectivement.

En introduisant une "deuxième couche" d'incertitudes dans l'équation (1) (en prenant  $\beta = \beta_R$  et en tenant compte de l'incertitude sur la médiane, caractérisée par l'écart-type  $\beta_U$  - voir la référence [KCC 80] pour une description plus détaillée), on obtient des courbes de fragilité plus sophistiquées. La probabilité conditionnelle de défaillance s'écrit :

$$P_{f|a}(a) = \Phi\left(\frac{\log(a/A_m) + \beta_U \Phi^{-1}(Q)}{\beta_R}\right) \quad (3)$$

On peut alors tracer un ensemble de courbes de fragilité où chacune correspond à un niveau de confiance  $Q$ . On passe de la modélisation (3) à la modélisation (1) en posant

$$\beta_C = \sqrt{\beta_R^2 + \beta_U^2} \quad (4)$$

et on appelle fragilité composite la courbe (1).

REMARQUE. — La courbe de fragilité composite correspond à la courbe moyenne alors que l'expression (3) donne la courbe médiane en choisissant  $Q = 0.5$  [KCC 80], [EPRI 03] (de manière équivalente en prenant  $\beta_U = 0.0$ ).

Toutefois, la distinction des incertitudes intrinsèques et les incertitudes épistémiques n'est, dans la pratique, pas évidente et tachée de subjectivité. Une approche alternative consiste alors à ne plus distinguer les incertitudes intrinsèques et épistémiques, mais à tenir compte plutôt de l'incertitude lié à l'estimation statistique. Ce type d'intervalles de confiance est évoqué dans le paragraphe 3.4.

### 3.2. Approche EPRI pour déterminer les courbes de fragilité

Dans la pratique, une méthode s'appuyant sur des facteurs de marge est utilisée (*response factor method*) pour obtenir les courbes de fragilité. Il s'agit de l'estimation de la courbe de fragilité d'une entité par rapport à une méthode de dimensionnement. Dans cette approche, la capacité s'écrit comme

$$A = \left( \prod F_i \right) a_{SSE}, \quad (5)$$

où  $a_{SSE}$  est l'accélération maximale du sol sous le séisme de référence (Safe Shutdown Earthquake) et où les  $F_i$  représentent les facteurs de marges. Les facteurs de marge sont typiquement définis comme le rapport entre la capacité de la structure et la sollicitation. Le facteur de marge s'exprime comme une variable aléatoire log-normale telle que

$$F_i = \check{F}_i \varepsilon_{R_i} \varepsilon_{U_i}$$

où  $\check{F}_i$  désigne la médiane de  $F_i$ . Ainsi, on a  $A_m = \check{F} a_{SSE}$ , avec  $F = \prod_i F_i$ , et  $\beta = (\sum_i \beta_i^2)^{\frac{1}{2}}$ .

Il est clair que la quantification de ces coefficients, tout comme le choix des  $\beta_R$   $\beta_U$  en distinguant les incertitudes intrinsèques et épistémiques, n'est pas une tâche simple. Elle requiert en général de faire appel à l'avis d'experts. On n'a pas mis en œuvre cette approche ici mais on s'est plutôt concentré sur l'approche numérique pour obtenir des courbes de fragilité directement par simulation numérique.



### 3.3. Estimation des paramètres du modèle lognormal par simulation numérique

Les principales étapes pour l'établissement des courbes de fragilité par simulation numérique sont les suivantes :

- Détermination de l'excitation sismique à considérer (accélérogrammes naturels ou artificiels),
- Etablissement d'un modèle couplé sol–structure–composant,
- Définition de critères de défaillance,
- Introduction et propagation des incertitudes (Monte Carlo)

A l'issue des simulations, on peut estimer les paramètres (médiane et écart-type logarithmique) de la courbe de fragilité.

Dans ce qui suit, et pour simplifier les notations, on considère que l'accélération maximale (le PGA) a été choisie pour caractériser le niveau d'excitation sismique et donc la capacité. La démarche suivie consiste alors à modéliser le résultat des  $N$  expériences numériques par une variable aléatoire de Bernoulli  $X$ . Pour chaque simulation numérique, on a deux issues possibles : soit on a atteint le niveau critique et on a défaillance, c'est-à-dire  $x_i = 1$ , soit on n'a pas de défaillance et  $x_i = 0$ . Ces événements arrivent avec la probabilité  $P_{f|a}(a_i)$ , donnée, pour le modèle lognormal, par l'expression (1). Ainsi, la fonction de vraisemblance, à maximiser pour ce problème, s'écrit :

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \left[ P_{f|a}(a_i) \right]^{x_i} \left[ 1 - P_{f|a}(a_i) \right]^{1-x_i} \quad (6)$$

Les estimateurs des paramètres  $A_m$  et  $\beta$  sont solution du problème d'optimisation :

$$(\hat{A}_m, \hat{\beta}) = \arg \min_{A_m, \beta} (-\ln \mathcal{L})$$

Si la modélisation statistique est adaptée, on pourra, à l'aide de cette procédure, estimer, d'une part, l'écart-type  $\beta_C$  pour un modèle comportant toutes les incertitudes et, d'autre part, l'écart-type  $\beta_R$  en ne modélisant que les incertitudes intrinsèques (voir aussi l'application 4.4). On peut alors tracer un ensemble de courbes (intervalles de confiance) selon l'usage dans l'approche américaine.

REMARQUE. — L'estimation des paramètres du modèle log-normal par maximum de vraisemblance possède bien-évidemment l'avantage de nécessiter un nombre réduit de simulations par rapport à un calcul des probabilités de défaillance pour une valeur de PGA donnée. Dans un calcul direct des probabilités de défaillance, sans hypothèse de loi a priori, il faut déterminer des probabilités d'évènements rares (les probabilités en queue de distribution), ce qui demande un nombre de simulations de Monte Carlo bien plus important.

### 3.4. Estimation d'intervalles de confiance par rééchantillonnage

Une analyse par rééchantillonnage (dite méthode « bootstrap ») de la variabilité des estimations  $\hat{\beta}$  et  $\hat{A}_m$  apporte, d'une part, un meilleur jugement sur la pertinence des estimations et permet, d'autre part, d'obtenir des intervalles de confiances. Le principe de la méthode bootstrap mise en œuvre consiste à évaluer la variabilité de l'estimation en construisant un certain nombre d'échantillons "bootstrap" (a priori de la même taille que l'échantillon original) par tirage au hasard avec remise parmi les valeurs de l'échantillon original [ET 94], [SA 06]. Les méthodes de rééchantillonnage possèdent l'avantage de permettre l'étude de la variabilité dans un cadre très général. Il faut néanmoins disposer d'un échantillon original de taille suffisante pour ne pas sous-estimer la variabilité. L'idée du rééchantillonnage repose sur le principe que, si la taille  $N$  de l'échantillon est grand, alors sa distribution  $F_N^*$  est proche de la "vraie" distribution  $F$  et fournira donc une bonne approximation de la loi de l'estimateur.

La démarche à mettre en œuvre est la suivante. On fait une estimation des paramètres  $\beta_C$  et  $A_m$  pour chaque tirage d'échantillon "bootstrap" afin d'obtenir un échantillon de courbes de fragilité. On peut alors déterminer les fractiles de cet échantillon et ainsi obtenir des intervalles de confiance pour la courbe moyenne. Par ailleurs, il est également possible d'évaluer la variabilité des estimations de  $\beta_C$  et  $A_m$  en déterminant des intervalles de confiance pour ces derniers à partir des échantillons "bootstrap" générés.

En utilisant cette démarche dans le cadre des EPS, on ne distingue bien évidemment plus les incertitudes intrinsèques et épistémiques, mais on tient compte de l'incertitude liée à l'estimation statistique. Aussi travaille-t-on avec un modèle mécanique contenant toutes les incertitudes à modéliser. Par conséquent, on peut s'attendre à des intervalles plus resserrés autour de l'estimation moyenne.

## 4. Etude d'un modèle simplifié de circuit primaire principal

On considère un modèle simplifié de circuit primaire principal (CPP) d'une installation nucléaire. Ce modèle contient des non-linéarités localisées de choc sur des butées élastiques. Les supports du CPP ainsi que les butées sont soumises à des déplacements imposés par le bâtiment réacteur. Le modèle mécanique du bâtiment réacteur lui-même est un modèle brochettes. Compte tenu de la taille du problème, le calcul s'effectue en deux étapes. Dans un premier temps, on effectue une analyse sismique du bâtiment réacteur ce qui permet de déterminer les accélérations, vitesses et déplacements au niveau des ancrages du CPP. Ces données sont ensuite utilisées comme excitation du CPP, voir [DGL 99] pour plus de détail. La réponse du CPP est obtenue par un calcul transitoire sur base modale. Quant au sol, on considère le cas homogène et isotrope. L'interaction sol-structure est prise en compte par un ressort dont les valeurs des raideurs sont indépendantes de la fréquence et ajustées sur le premier mode de balancement et le premier mode de pompage du système couplé sol-bâtiment (méthode des fonctions d'impédances [DE 03]). Cette méthode, permettant la simulation

temporelle, correspond à celle mise en œuvre lors du dimensionnement [DGC 97]. Tous les calculs numériques ont été réalisés à l'aide du *Code\_Aster* [Aster].

#### 4.1. Modélisation de l'excitation sismique

L'excitation sismique au niveau sol est prise en compte par le biais d'accélérogrammes, considérés comme des réalisations du processus stochastique modélisant le séisme. Ces réalisations peuvent être des accélérogrammes enregistrés sur un site réel, (on travaille avec des bases de données existantes) ou bien des accélérogrammes artificiels. On travaille ici avec des accélérogrammes artificiels ([PR 85]) qui doivent être compatibles avec le spectre de sol. Ces spectres peuvent être explicitement construits à partir de la donnée de la magnitude et de la distance du séisme à considérer. Pour cela, on utilise des lois dites d'atténuation qui ont été établies à partir de régressions sur des enregistrements de séismes. On suppose que le processus stochastique modélisant le séisme est entièrement caractérisé par l'ensemble des accélérogrammes donnés. On peut procéder à un tirage au hasard parmi ces accélérogrammes lors de la simulation de Monte Carlo. Sous cette hypothèse, on peut arriver à un nombre de simulations plus important car on n'est pas limité par le nombre d'accélérogrammes à disposition dans la base de données (qui est généralement de taille modeste).

#### 4.2. Modélisation et propagation des incertitudes

Les deux composants du modèle mécanique, sol et structure, ainsi que l'excitation sismique sont affectés par de nombreuses incertitudes. Les choix de modélisation faits sont détaillés ci-dessous, voir aussi [DSC 03].

Les lois de probabilité ont été choisies en ayant recours au principe du maximum d'entropie [KK 92].

– **Sol** : Les incertitudes relatives à la partie sol concernent la modélisation des caractéristiques du sol qui jouent, eux, sur son impédance. Ici, le sol a été modélisé via un ressort équivalent. La raideur de ce ressort est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi gamma.

– **Excitation sismique** : L'accélération du sol en un point donné est modélisée par un processus stochastique. On suppose que ce processus est entièrement caractérisé par l'ensemble des accélérogrammes donnés. Les éléments (accélérogrammes) sont équiprobables et on peut procéder à un tirage au hasard parmi ces accélérogrammes lors de la simulation de Monte Carlo.

L'incertitude sur la détermination de l'aléa sismique (du couple magnitude-distance) est prise en compte en considérant les fractiles de la loi d'atténuation.

– **Structure** : L'incertitude sur la structure (bâtiment réacteur et CPP) est prise en compte via l'approche dite "non-paramétrique" de C. Soize [SOI 05]. Il en découle que les matrices généralisées de masse, de raideur et d'amortissement sont des ma-

trices aléatoires. Par ailleurs, les paramètres (raideurs, jeux, amortissements) utilisés pour modéliser les butées ne sont pas connus de manière satisfaisante. Les raideurs de butées sont modélisées par des variables aléatoires statistiquement indépendantes suivant une loi gamma [DSC 03].

Pour notre cas, il est licite de supposer que toutes les sources d'incertitude sont statistiquement indépendantes. La méthode retenue pour la propagation des incertitudes introduites est la méthode de Monte Carlo standard. C'est la méthode la plus générale et la plus adaptée pour traiter des modèles comportant des modélisations probabilistes de natures différentes (variables et matrices aléatoires, processus aléatoire) en combinaison avec un modèle aux éléments finis de taille non négligeable. Dans les approches EPS sismiques, les méthodes de l'Hypercube Latin sont généralement mises en œuvre pour réduire le nombre de simulations à effectuer. Cette méthode n'a pas été mise en œuvre ici car elle n'est pas compatible avec la modélisation non paramétrique des matrices généralisées.

#### 4.3. Critère de défaillance

Dans une première approche, un seul mode de défaillance simple a été considéré. Il s'agit du dépassement d'une contrainte admissible dans la tuyauterie. La contrainte admissible  $S_{adm}$  ainsi que la contrainte équivalente dans les sections ont été déterminées selon les règles de dimensionnement RCC-M. L'incertitude sur la contrainte admissible a été prise en compte en modélisant ce paramètre par une variable aléatoire suivant une loi exponentielle tronquée de moyenne  $S_{adm}$  et prenant ses valeurs dans l'intervalle  $[0.9S_{adm} ; 1.1S_{adm}]$ .

REMARQUE. — La définition de critères de défaillance réalistes est un point délicat. Il serait nécessaire d'avoir un modèle mécanique très sophistiqué permettant de prendre en compte des phénomènes complexes tels que la plastification ou encore des cinématiques géométriquement non linéaires afin de tenir compte des défaillances multiples susceptibles d'avoir lieu. Aussi, beaucoup d'auteurs travaillent plutôt avec la notion de dommage et déterminent ainsi des courbes de fragilité relatives aux niveaux de dommage choisis, par exemple [CDN 04].

#### 4.4. Résultats obtenus

On a considéré les deux configurations suivantes :

- 1) Prise en compte de l'ensemble des incertitudes décrites ci-dessus pour déterminer l'écart-type  $\beta_C$  de la courbe composite
- 2) Incertitudes uniquement sur l'excitation sismique et le modèle de sol. Ce cas est censé représenter le cas avec incertitudes intrinsèques, irréductibles seules et est utilisé pour déterminer l'écart-type  $\beta_R$ .

	$A_m$	$\beta$
<b>configuration 1</b>	1.46	0.42
<b>configuration 2</b>	2.40	0.14

**Tableau 1.** Résultats obtenus pour 160 simulations

Le résultat de 160 simulations de Monte Carlo est représenté dans le tableau 1. On constate que les médianes déterminées pour les configurations 1 et 2 ne sont pas les mêmes. Ceci est dû au fait que les développements théoriques ayant conduit à l'expression de la courbe de fragilité (3) ne sont pas valables pour le cas général. L'égalité des valeurs médianes est vérifiée de manière évidente pour la modélisation par facteurs de réduction (hypothèse de log-normalité des différents facteurs), mais ne l'est pas pour le cas plus général d'un modèle quelconque avec des sources d'incertitudes quelconques qui ne sont pas forcément des paramètres modélisés par des variables suivant une loi log-normale. Or, le système mécanique considéré ici comporte des non-linéarités et la relation entre entrées (incertitudes) et sorties (la grandeur d'intérêt, à savoir la capacité) n'est pas linéaire. Aussi, l'utilisation de la formule (2) et par conséquent la formule (4) n'est, rigoureusement, plus valable. La courbe composite ne correspond plus à la courbe moyenne.

La construction de la courbe de fragilité telle que présentée dans la littérature (par exemple [KCC 80], [EPRI 03]) suggère de retenir la médiane obtenue pour le cas où on considère les incertitudes irréductibles uniquement (ici configuration 2). C'est cette démarche qu'on a suivie pour tracer la famille de courbes de fragilité sur la figure 1.

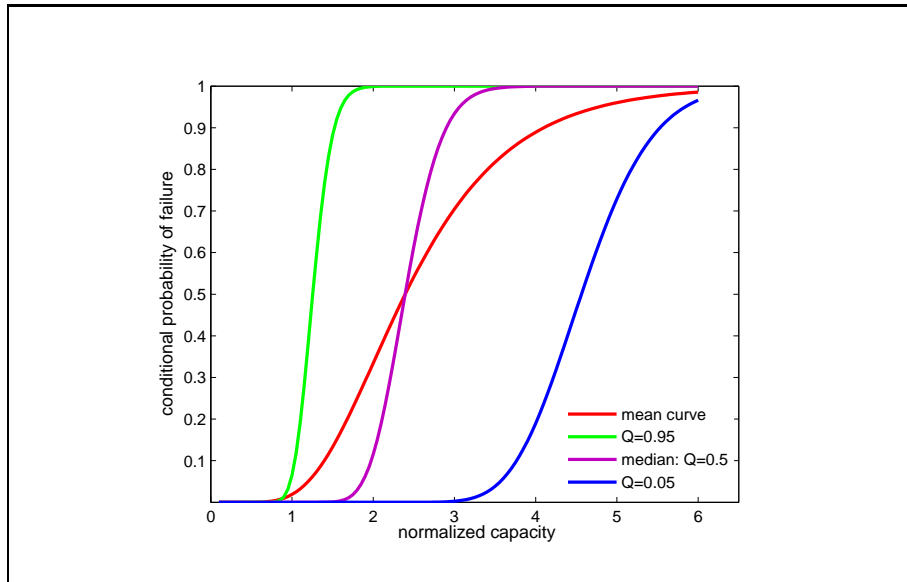
Les figures 2 et 3 donnent la convergence, en fonction du nombre de simulations effectuées, de l'estimation de la médiane  $A_m$  pour les configurations 1 et 2 respectivement. Sur les figures 4 et 5 sont tracés les résultats pour les écart-types  $\beta_C$  et  $\beta_R$ . On observe qu'un nombre important de simulations est nécessaire pour faire converger les calculs. Aussi, il peut être intéressant d'étudier la sensibilité des paramètres estimés par rapport à l'échantillon des résultats de calcul par rééchantillonnage.

#### 4.4.1. Vérification de l'hypothèse log-normale

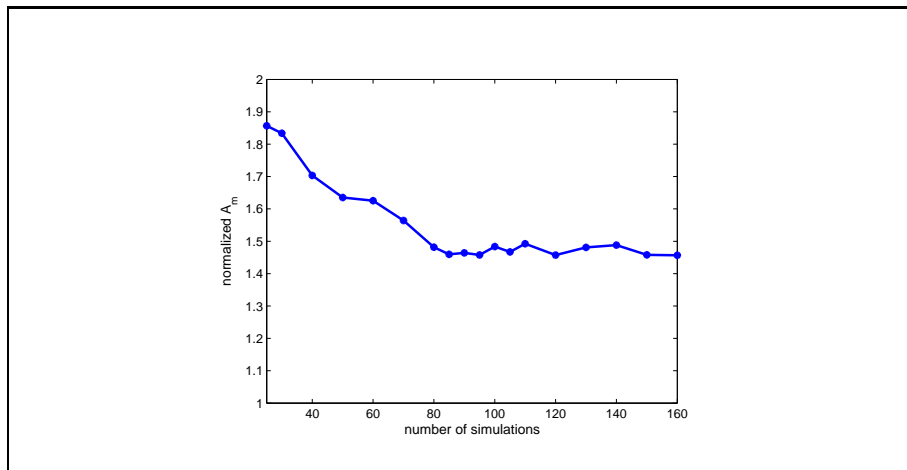
Afin de vérifier l'hypothèse d'une distribution log-normale de la capacité, on a simulé un échantillon de capacités  $a_s = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ . Pour cela, on a fait varier le PGA de chaque accélérogramme jusqu'à ce qu'on observe le point de défaillance. La droite de Henry pour l'échantillon  $\log(a_s)$  est représentée sur la figure 6.

#### 4.4.2. Calcul d'intervalles de confiance par rééchantillonnage

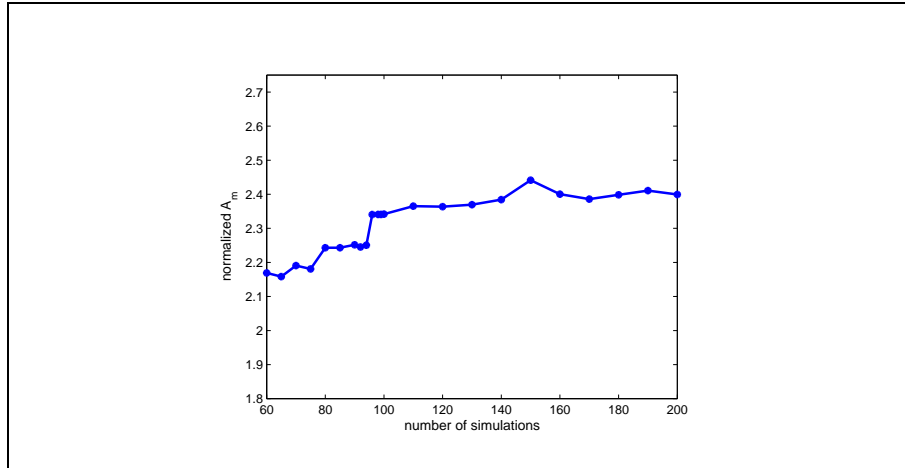
Dans ce qui suit, on travaille avec  $N_r = 50$  échantillons obtenus par rééchantillonnage de l'échantillon original. Pour l'échantillon original, on a considéré les 100 premières simulations ( $N = 100$ ). Puis, on estime les paramètres  $\hat{\beta}$  et  $\hat{A}_m$  pour chaque échantillon. On obtient des moyennes de  $\hat{\beta} = 0.405$  et  $\hat{A}_m = 1.466$ . Afin d'appréhender la variabilité des résultats, on a déterminé les intervalles de confiance (gaussiennes) pour les estimations de  $\hat{\beta}$  et  $\hat{A}_m$  en exploitant les échantillons "boots-



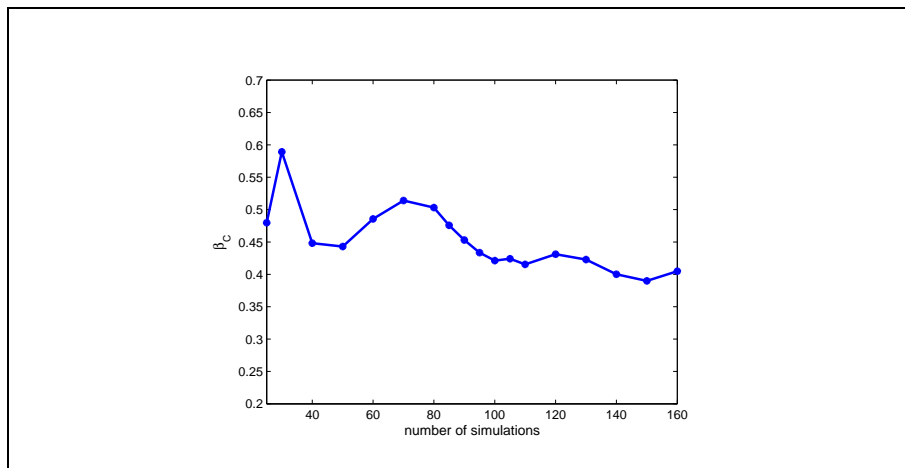
**Figure 1.** Famille de courbes de fragilité selon le modèle EPRI



**Figure 2.** Convergence de la médiane pour la configuration 1



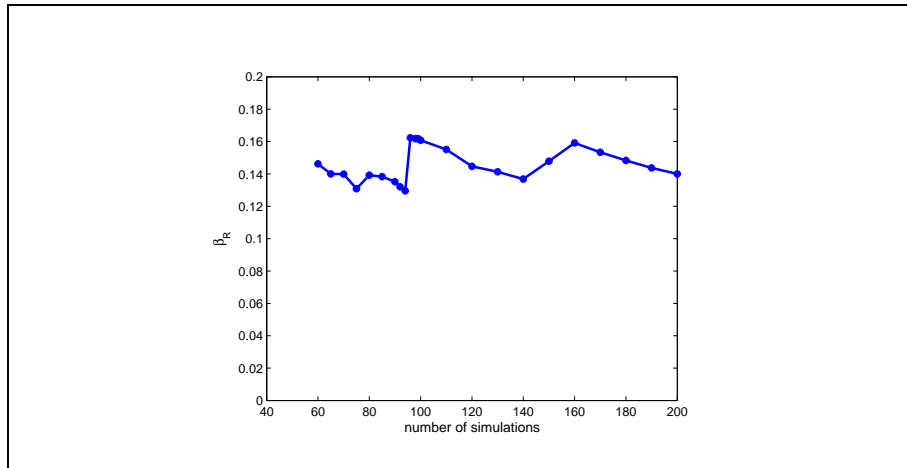
**Figure 3.** Convergence de la médiane pour la configuration 2



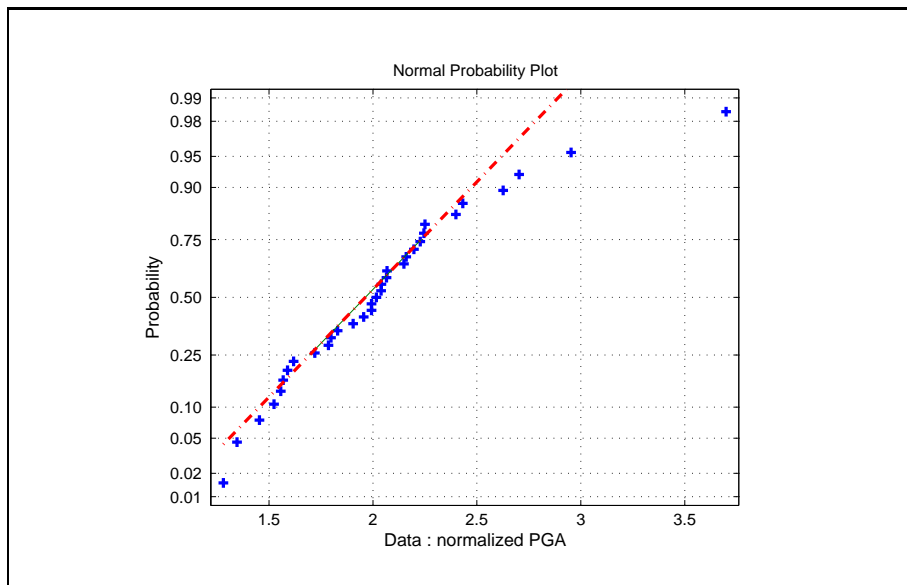
**Figure 4.** Convergence de  $\beta_C$  (configuration 1)

trap". On obtient les intervalles  $[1.443 ; 1.490]$  et  $[0.381; 0.429]$  respectivement. On vérifie que les estimations obtenue auparavant, voir tableau 1 - configuration 1, se trouvent bien dans les intervalles calculés.

Sur la figure 7, on a tracé la famille de courbes obtenue par rééchantillonnage : médiane, fractiles à 5% et 95% ainsi que les courbes enveloppes. La figure 8 représente l'ensemble des courbes de fragilité obtenues par rééchantillonnage ainsi que les fractiles. La figure 9 représente les fractiles déterminés ainsi que la courbe obtenue pour les paramètres moyens  $\tilde{\beta}$  et  $\tilde{A}_m$ .

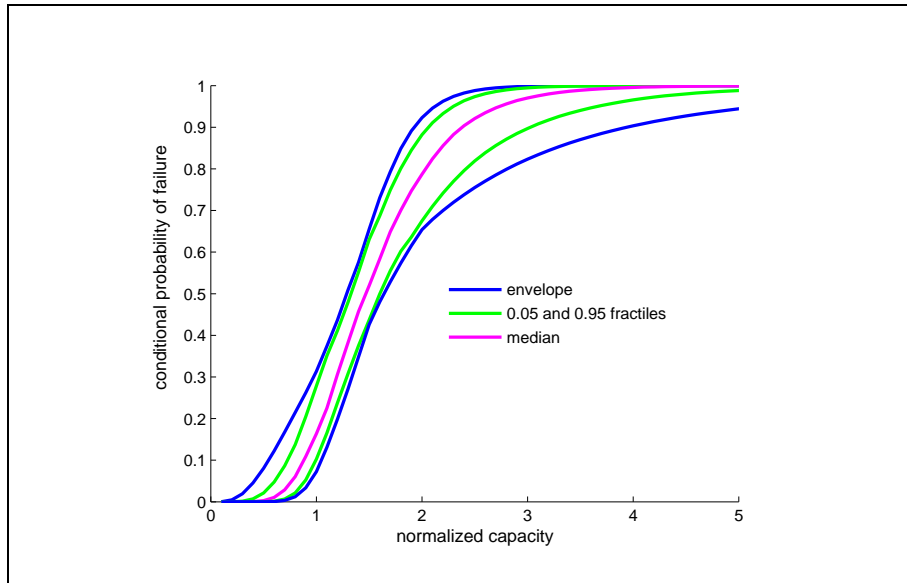


**Figure 5.** Convergence de  $\beta_R$  (configuration 1)

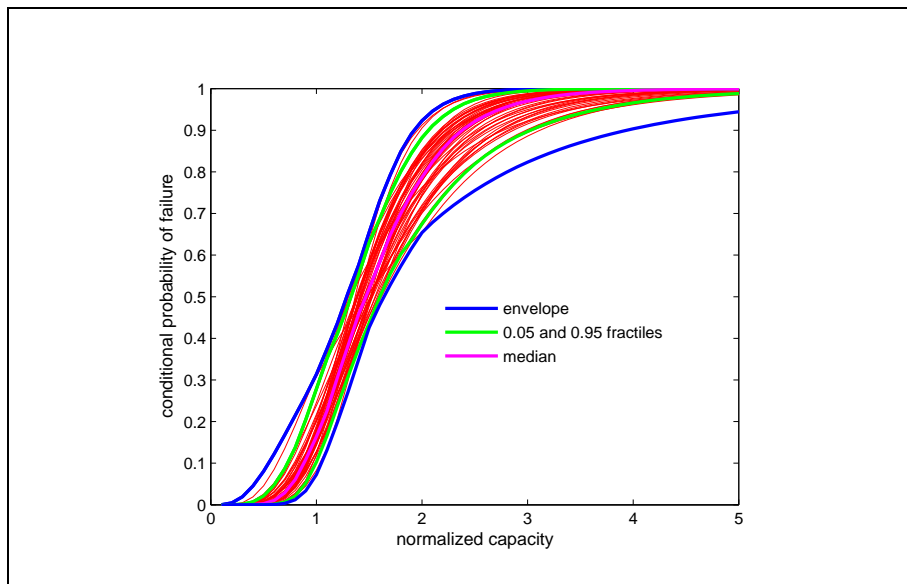


**Figure 6.** Test de lognormalité de  $\log(a_s)$  pour le PGA

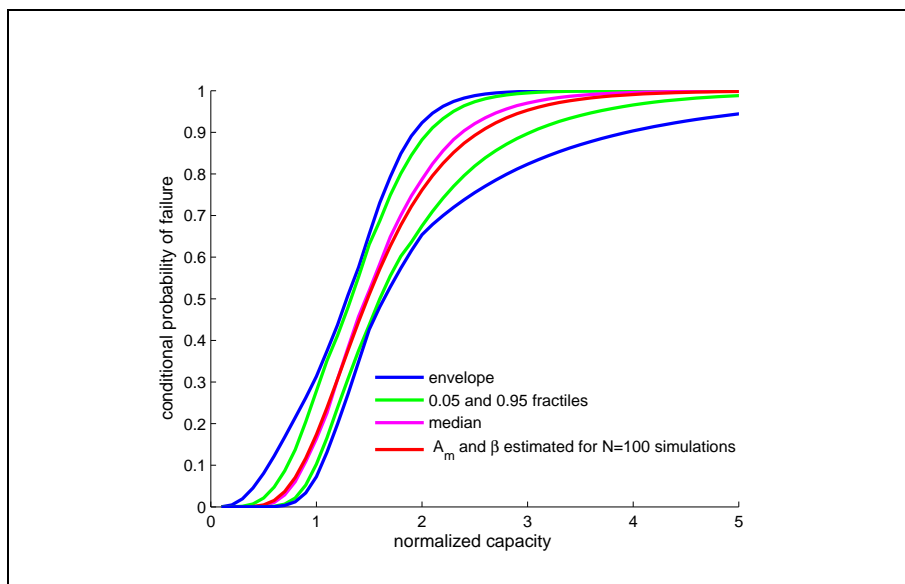




**Figure 7.** *Fractiles obtenus par rééchantillonnage : médiane, enveloppe et intervalles de confiance*



**Figure 8.** *Echantillon des courbes obtenues (rouge) et fractiles associés*



**Figure 9.** Intervalles de confiance et courbe avec paramètres estimés pour  $N = 100$  simulations

## 5. Conclusion

Dans cet article, on a présenté le calcul de courbes de fragilité par simulation numérique à travers l'exemple d'un modèle de circuit primaire principal simplifié. Tous les calculs ont été effectués avec *Code\_Aster*. Rappelons que les courbes de fragilité constituent, avec les courbes d'aléa sismique et l'arbre logique des défaillances, un éléments clés dans les études probabilistes de sûreté sismique.

Certains développements théoriques de l'approche américaine (EPRI) liés à ces courbes ne sont pas valables dans le cas général. Une approche alternative consiste à ne plus distinguer les incertitudes épistémiques et intrinsèques mais à déterminer des intervalles de confiance pour les estimations de  $A_m$  et  $\beta$  de la courbe composite. Cette courbe s'obtient à l'aide du modèle comportant toutes les incertitudes que l'on souhaite modéliser (ici configuration 1). La famille de courbes de fragilité ainsi déterminée tient alors compte de l'incertitude de l'estimation. Dans ce travail, on a déterminé ces intervalles de confiance par une méthode de rééchantillonnage. De manière générale, une analyse par rééchantillonnage de la variabilité des estimations  $A_m$  et  $\beta$  apporte un meilleur jugement sur la pertinence des estimations si on ne peut faire qu'un nombre réduit de calculs. En outre, elle permet de tracer une famille de courbes (intervalles de confiance pour l'estimation moyenne ou médiane) plus pertinents pour un modèle de la capacité par simulation numérique. Mais on ne distingue alors plus les incertitudes épistémiques et intrinsèques comme préconisé dans l'approche PRA (« Probabilistic Risk Assessment ») appliquée aux Etats-Unis. La courbe médiane

tient compte de l'ensemble des incertitudes modélisées (via le paramètre  $\beta$ ) et non seulement des incertitudes non réductibles.

### Perspectives

Comme déjà évoqué, la caractérisation de manière la plus réaliste possible des modes de défaillance est un point important dans la détermination de courbes de fragilité. Quant à la fragilité du CPP, il serait nécessaire d'introduire d'autres modes de défaillance, tel qu'un critère sur le déplacement ou la réaction d'appui. En outre, l'utilisation d'autres indicateurs de nocivité que le PGA pourrait être plus pertinente pour caractériser le niveau sismique. Il n'y a pas de réponse générique à la question de l'indicateur le plus pertinent. Différents types de structure et d'équipement ne réagissent pas de la même manière au séisme. Le PGA a néanmoins le mérite de la simplicité, d'autant plus que les courbes d'aléa sismique sont également établies par rapport à ce dernier paramètre. Par ailleurs, on peut considérer que l'incertitude sur le niveau sismique (et donc sur la pertinence de l'indicateur choisi) est en fine prise en compte dans la modélisation (1).

Enfin, il semble intéressant d'exploiter de résultats d'essais, de la simulation numérique ainsi que le jugement d'expert en mettant en œuvre une approche bayésienne sur ce cas.

### 5.1. Bibliographie

- [CDN 04] CHOI E., DESROCHES R., NIELSON B., « Seismic fragility of typical bridges in moderate seismic zones. » *Eng. Struct.*, vol. 26, 2004, p. 187-199.
- [KCC 80] KENNEDY R.P., CORNELL C.A., CAMPBELL R.D., KAPLAN S., PERLA H.F., « Probabilistic seismic safety of an existing nuclear power plant. » *Nuclear Eng. Design*, vol. 59, 1980, p. 315-338.
- [DE 03] DELEUZE G., *Réponse à un mouvement sismique d'un édifice posé sur un sol élastique*, Annales de l'ITBTP, 1967.
- [DGL 99] DUVAL C., GUYONVARH V., LOUCHE V., PIGAT J., WAECKEL FE., « Méthodes d'estimation du comportement sismique d'un circuit primaire de réacteur à eau pressurisée. » *Colloque AFPS*, 1999.
- [DSC 03] DESCELIER C., SOIZE C., CAMBIER S., « Uncertain nonlinear dynamical systems subjected to seismic load. » *Proceedings of ICASP*, Millpress, 2003.
- [SOI 05] SOIZE C., « Random matrix theory for modelling uncertainties in computational mechanics. » *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 194, 2005, p. 1333-1366.
- [ZE 07] ZENTNER I., « Méthodes probabilistes dans les analyses sismiques : Modélisation, propagation et hiérarchisation des incertitudes. » *Colloque AFPS*, 2007.
- [EPRI 03] EPRI, *Seismic Probabilistic Risk Assessment Implementation Guide.*, Final Report 1002989, 2003, EPRI.
- [PR 85] PREUMONT A., « The generation of non-separable artificial earthquake accelerograms for the design of nuclear power plants. », *Nuclear Engineering and Design*, vol. 88, 1985.

- [SFLN 00] SHINOZUKA M., FENG Q., LEE J., T.NAGANUMA , « Statistical analysis of fragility curves. », *J. Eng. Mech. ASCE*, vol. 126, n° 12, 2000, p. 1224-1231.
- [SDK 07] STRAUB D. , DER KIUREGHIAN A., « Improved seismic fragility modelling from empirical data. », *Structural Safety*, vol. 88, n° 185.
- [DGC 97] DEVESA G., GUYONVARH V. , CLOUTEAU D., « Use of coupling and regulatory methods in soil structure interaction for nuclear power plants. », *Proceedings of Eurodyn*, Paris, Millpress 2005.
- [Aster] *Code\_Aster*, general public licensed structural mechanics finite element software, <http://www.code-aster.org>.
- [SA 06] SAPORTA G., *Probabilité, Analyse de Données et Statistiques*, Editions TECHNIP, Paris, seconde édition, 2006.
- [KK 92] KAPUR J.N. , KESAVAN H.K., *Entropy Optimization Principles with Applications*, Academic Press, San Diego, 1992.
- [ET 94] EFRON B. , TIBSHIRANI R.J., *An Introduction to the Bootstrap*, Monographs on Statistics and Applied Probability, Chapman&Hall, New York, 1994.

**Analyse probabiliste du tassement de consolidation primaire d'une fondation superficielle.**

L. Rouaski, S. Belkacemi

---

**Article non communiqué**

**Etude d'une cabane d'ostréiculteur.**

S. Yotte, SM Elachachi

---

**Article non communiqué**

## **Extrapolation des effets extrêmes du trafic sur un pont autoroutier.**

D. Siegert, B. Jacob

---

---

# Effets extrêmes du trafic sur un pont autoroutier

**Dominique Siegert — Bernard Jacob**

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées  
Université Paris Est - LCPC  
58 boulevard Lefebvre, F-75732 Paris cedex 15  
{siegert, jacob}@lpc.fr

---

*RÉSUMÉ.* L'évaluation des effets extrêmes du trafic sur les ponts routiers est nécessaire pour les dimensionner pour une durée d'utilisation de 50, 100 ou 120 ans. La théorie des valeurs extrêmes doit être appliquée avec précaution pour extrapoler des effets ayant une période de retour de 1000 ans. Un exemple d'application est présenté dans cet article. Les valeurs extrêmes du trafic sur un pont autoroutier en béton précontraint ont été évaluées par différentes techniques. Des prédictions raisonnables ont été obtenues en recalant les paramètres de la loi des valeurs extrêmes de Gumbel sur les maxima journaliers de déformation enregistrés pendant deux périodes de cinq mois en 2004 et 2005. L'exemple traité montre l'importance de traiter des échantillons extraits d'une population homogène d'évènements générés par un trafic stationnaire pour appliquer les modèles des valeurs extrêmes.

*ABSTRACT.* The prediction of the extreme traffic load effects on road bridges is necessary for designing structures of service lives over 50, 100, 120 years. Extreme value theory must be used with caution for estimating return levels associated with return period of 1000 years. This paper presents a case study. The extreme values of load traffic effects on a highway prestressed concrete bridge were estimated using different techniques. Reasonable inferences were obtained from the parameter estimates of the Gumbel distribution with two five months series of daily maximum strain-levels recorded over the period 2004-2005. This example shows the importance of considering homogeneous data samples generated by stationary traffic conditions for application of extreme value models.

*MOTS-CLÉS :* Valeurs extrêmes, effets du trafic, période de retour, extrapolation, Gumbel, ponts routiers, mesure de déformation.

*KEYWORDS:* Extreme values, traffic load effects, return period, extrapolation, Gumbel, road bridges, strain measurement.

---



## 1. Introduction

L'évaluation des effets extrêmes du trafic sur les ponts routiers est nécessaire pour concevoir, caler et vérifier les modèles de charges des codes de calcul comme l'Eurocode "Actions du trafic sur les ponts routiers" [EUR 04]. La théorie des valeurs extrêmes s'applique avec certaines précautions, et peu de cas ont été publiés. Ces extrapolations sont incontournables car les ouvrages sont dimensionnés pour des durées d'utilisation de 50, 100 ou 120 ans soit des périodes de retour des événements critiques de 1000 ans (probabilité égale à  $10^{-3}$ /an), alors que les distributions probabilistes des paramètres du trafic lourd (charges, distances) ou de leurs effets (solllicitations, contraintes ou déformations) sont calées sur des mesures de quelques jours à quelques mois.

Différentes techniques ont été proposées depuis une vingtaine d'années pour évaluer les actions ou sollicitations extrêmes produites par des configurations rares de charge, en général non observées pendant la période de mesure, voire sur l'ensemble de la période d'exploitation de l'ouvrage [JAC 89, FLI 96, CRé 98, O'C 98, MEI 04]. La difficulté de ces extrapolations, contrairement à celles de lois de probabilité théoriques, est qu'il existe des "troncatures cachées" ou des phénomènes asymptotiques externes au modèle probabiliste de base. En effet le nombre de poids lourds qu'il est possible de placer sur un pont est limité par leurs dimensions et la longueur de l'ouvrage, et même le poids individuel des camions est limité par leur volume et la densité maximale des produits transportés. La justification de la méthode d'extrapolation repose donc sur la vraisemblance des prévisions des extrêmes par rapport aux contraintes physiques.

La théorie des lois asymptotiques de valeurs extrêmes, appliquées à des distributions de charges mesurées et de sollicitations calculées à partir de ces charges, a été utilisée pour extrapoler à l'aide de lois de Gumbel les charges sur les ponts routiers [JAC 89]. Des simulations numériques des effets du trafic sur des ponts de portée moyenne (30 à 40 m) ont montré l'intérêt de constituer des populations homogènes de configurations de trafic avant de procéder à l'identification des lois asymptotiques [CAP 07].

Dans cet article, les valeurs extrêmes des effets du trafic ont été évaluées par différentes méthodes d'estimation et les résultats comparés et évalués. Les paramètres d'une loi asymptotique d'extrême de Gumbel et leurs intervalles de confiance ont été estimés par la méthode du maximum de vraisemblance à partir des maxima journaliers et hebdomadaires au cours de deux périodes de 5 mois d'observation.

## 2. Cas d'application

### 2.1. Description du pont et des conditions de mesure

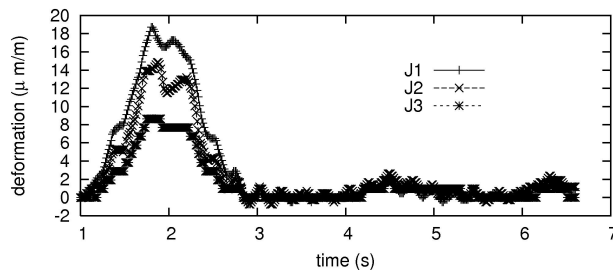
L'exemple présenté est celui d'un pont autoroutier en béton précontraint supportant 3 voies de circulation et environ 10 000 poids lourds par jour. La figure 1 montre

l'intrados du pont instrumenté. Le tablier, un VIPP (viaduc à travées indépendantes à poutres précontraintes) de 33 m de portée chacune, est constitué de 5 poutres entretoisées avec hourdis intermédiaires, relié à la travée suivante à l'aide de tirants montés sur les entretoises d'about pour assurer la continuité du hourdis. Ceci permet de transmettre les efforts horizontaux mais laisse libres les rotations des extrémités des poutres.



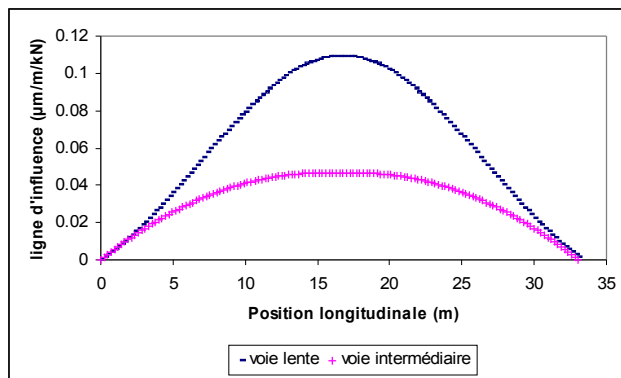
**Figure 1.** Viaduc instrumenté de Roberval sur l'autoroute A1, près de Senlis.

Une travée de rive a été instrumentée par extensométrie pour mesurer les déformations en flexion des poutres à mi-portée sous trafic. Les valeurs maximales et minimales par séquences de 2 minutes ont été mesurées pendant 265 jours (de janvier à juin) pour les années 2004 et 2005. L'analyse des signaux enregistrés a montré que sur cet ouvrage les amplifications dynamiques au passage des poids lourds étaient négligeables. Un traitement des mesures a permis d'éliminer les effets thermiques et les dérives des déformations mesurées. Un exemple de signaux de déformation mesurés au passage d'un camion est représenté sur la figure 2.



**Figure 2.** Signaux de déformation mesurés.

Les lignes d'influences statiques des déformations en flexion des poutres situées sous les voies de circulation ont été déterminées expérimentalement à l'aide d'un camion de poids d'essieu connus. Les mesures ont été réalisées pour trois passages à une vitesse constante de 80 km/h, du camion centré dans chacune des deux voies de circulation. La figure 3 montre les lignes d'influence de la déformation en flexion à mi-portée de la poutre de rive pour les deux voies circulées par des poids lourds.



**Figure 3.** Lignes d'influence des voies lentes et intermédiaires.

## 2.2. Méthodes d'évaluation des effets extrêmes du trafic

Un modèle simple pour évaluer les effets extrêmes du trafic, sur des travées dont la longueur est voisine de la longueur d'un poids lourd augmentée de la distance de sécurité entre deux véhicules, est obtenu en considérant l'évènement qui correspond à la présence simultanée sur les deux voies de circulation de deux camions à cinq essieux appartenant à la population des véhicules les plus lourds identifiés dans les statistiques de trafic. Si on considère que la distribution du poids total des véhicules est représentée par une loi normale exprimée en variables réduites, la forme asymptotique de la loi des effets extrêmes renormalisés est donc une loi de Gumbel de la forme :

$$G(x) = \exp\{-\exp[-a_n(x - b_n)]\}$$

les coefficients de renormalisation sont pris égaux à  $a_n = \sqrt{2 \ln n}$  et

$$b_n = a_n - \frac{\ln \ln n + \ln 4\pi}{a_n}$$

où  $n$  représente le nombre moyen d'évènements comptés sur la période des maxima.

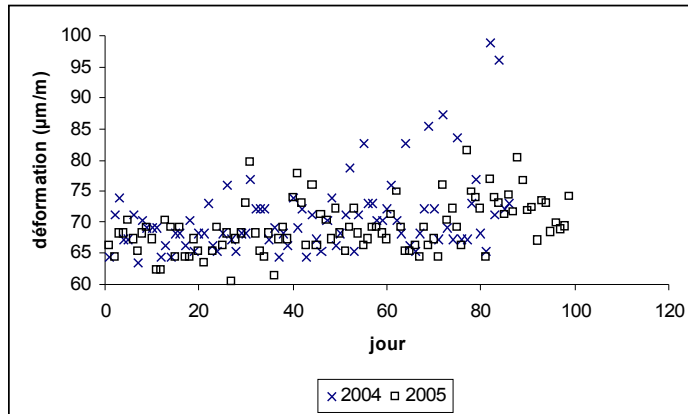
La forme généralisée de loi asymptotique des extrêmes s'écrit :

$$G(x) = \exp\left\{-\left[1 + \xi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right\}$$

où  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $\xi$  représentent respectivement les paramètres de position, d'échelle et de forme de la fonction. Les paramètres sont alors identifiés par la méthode du maximum de vraisemblance à partir des maxima mesurés [COL 01]. Dans cette formulation, la loi de Gumbel correspond à  $\xi = 0$ .

### 3. Résultats

Les valeurs maximales journalières des déformations mesurées en 2004 et 2005 entre les mois de janvier et de juin sont représentées sur la figure 4. Les valeurs mesurées qui correspondent aux jours de la semaine non fériés sont comprises entre 60  $\mu\text{m/m}$  et 100  $\mu\text{m/m}$ .



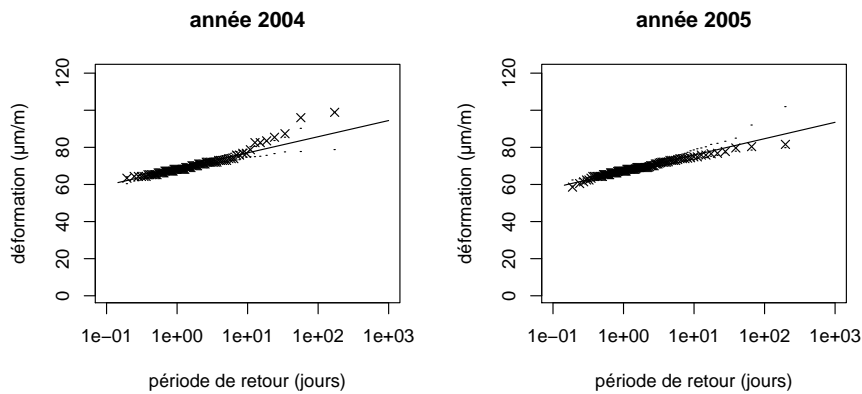
**Figure 4.** Valeurs de déformation journalières maximales mesurées en 2004 et 2005.

Les résultats de l'extrapolation à l'aide de la loi de Gumbel sont représentés sur les graphiques de la figure 5. La valeur  $x_p$  de période de retour  $\frac{1}{p}$  pour une loi de Gumbel est définie par la relation :

$$x_p = \mu - \sigma \ln(-\ln(1 - p)) \simeq \mu - \sigma \ln p$$

Le traitement des données a été réalisé à l'aide du logiciel R [COR 05, STE 08]. On constate que l'identification automatique des paramètres de la loi des extrêmes généralisée serait une loi extrême de Fréchet pour les observations réalisées en 2004 et

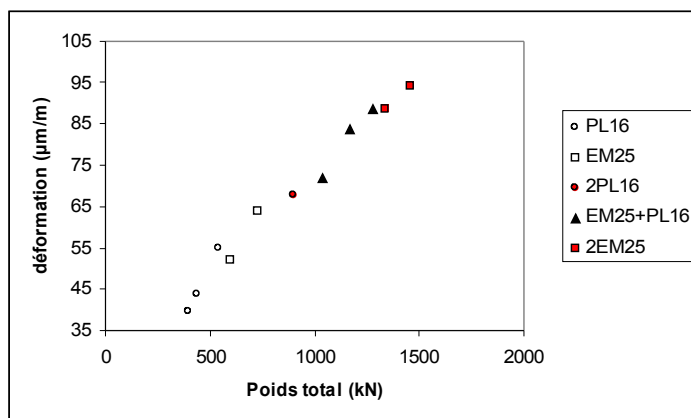
une loi de Weibull pour les données mesurées en 2005. Les mesures réalisées les samedis, dimanches et jours fériés étaient généralement inférieures à la valeur moyenne des effets mesurés et n'ont pas été prises en compte pour identifier les paramètres de la loi de Gumbel. Dans ces conditions de traitement, les valeurs extrapolées de maxima journaliers mesurés en 2004 et 2005 correspondent aux résultats de l'extrapolation à partir des maxima hebdomadaires. La valeur extrême correspondant à une période de retour égale à 1000 ans vaut  $115 \mu\text{m/m}$ . Cette valeur est proche du résultat obtenu avec le modèle simple des effets du trafic pour une valeur moyenne du poids total des camions égale à 500 kN et un écart type de 60 kN.



**Figure 5.** Extrapolations des valeurs de période de retour à l'aide de la loi de Gumbel à partir des observations des maxima journaliers pour les années 2004 et 2005.

Les effets du trafic ont été calculés sous l'effet de camions en surcharge. Les silhouettes considérées étaient des camions semi-remorque de 16 m de long à cinq essieux dont le poids total était compris entre 400 kN et 540 kN (le poids total maximum de ces véhicules est dans la plupart des pays européens dont la France limité à 400 kN et 440 kN sous certaines conditions). En outre des ensembles modulaires européens de 25 m de long constitués d'un tracteur à deux essieux et deux remorques avec respectivement trois et deux essieux ont été considérés. Ces véhicules sont utilisés en Suède et Finlande avec des poids totaux autorisés jusqu'à 600 kN, et aux Pays-Bas à titre expérimental jusqu'à 500 kN. Les simulations ont été réalisées pour un poids total compris entre 600 kN et 730 kN. Les résultats sont représentés sur la figure 6, PL16 désigne le camion à 5 essieux de 16 m de long et EM25 l'ensemble modulaire de 25 m de long. On constate que les valeurs mesurées sont dans la gamme des valeurs calculées.

Le modèle de chargement de trafic LM1 de l'Eurocode 1 consiste à appliquer une combinaison de poids d'essieux avec une charge uniformément répartie. La déforma-



**Figure 6.** Calcul de la déformation sous différents cas de charge.

tion maximale calculée est égale à  $170 \mu\text{m/m}$ , soit plus de 50 % au dessus de la valeur extrapolée ayant une période de retour de 1000 ans .

#### 4. Conclusions

Le choix de décrire la distribution des maxima journaliers des effets du trafic par une loi de Gumbel a permis d'obtenir les mêmes résultats d'extrapolation pour les années 2004 et 2005. Seules les mesures réalisées entre le lundi et le vendredi ont été prises en compte pour identifier la loi des extrêmes à partir d'une population homogène d'évènements, générés par un trafic stationnaire.

La valeur déterminée par la méthode du maximum de vraisemblance pour une période de retour de 1000 ans était égale à  $115 \mu\text{m/m}$ . Cette valeur est proche de l'extrapolation obtenue à partir de la fusion des maxima hebdomadaires mesurés en 2004 et 2005, ce qui traduit la stabilité de l'estimation de la loi extrême.

L'effet calculé par application du cas de charge LM1 de l'Eurocode 1, de près de 50 % plus élevé, est donc largement sécuritaire, même en tenant compte d'un coefficient de majoration dynamique éventuel qui ne dépasse guère 1,15 sur les valeurs d'effets extrapolés [CAR 00].

#### Remerciements

Les auteurs remercient l'équipe des techniciens de la section Fonctionnement et Ingénierie des Ouvrages d'Art du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées pour

la réalisation des mesures, F. Toutlemonde chef de la division FDOA, ainsi que la SANEF, et particulièrement R. Labonne, pour l'accès à l'ouvrage et leur aide.

## 5. Bibliographie

- [CAP 07] CAPRANI C., O'BRIEN E., MCLACHLAN G., « Characteristic traffic load effects from a mixture of loading events on short to medium span bridges », *Structural Safety*, , 2007, page doi :10.1016/j.strusafe.2006.11.006.
- [CAR 00] CARRACILLI J., « Coefficient de majoration dynamique des charges routières sur les ouvrages d'art, calcul et extrapolation, application au pont de Bruneseau », *BLPC*, , n° 229, 2000, p. 71-82.
- [COL 01] COLES S., *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Value Theory*, Springer Verlag, 2001.
- [COR 05] DEVELOPMENT CORE TEAM R., *R : A language and environment for statistical computing*, R Foundation for Statistical Computing, 2005.
- [CRÉ 98] CRÉMONA C., « Extrapolation des effets du trafic par ajustement optimal de la formule de Rice », *RFGC*, vol. 2, n° 3, 1998, p. 353-366.
- [EUR 04] EUROCODE-1, *Partie 2, Actions sur les ponts, dues au trafic*, NF-EN 1991-2, Paris, 2004.
- [FLI 96] FLINT A., JACOB B., « Extreme traffic loads on road bridges and target values of their effects for code calibration », *Proceedings of IABSE Colloquium*, Delft, The Netherlands, 1996, IABSE-AIPC-IVBH, p. 469-478.
- [JAC 89] JACOB B., MAILLARD J., GORSE J., « Probabilistic traffic load models and extreme loads on a bridge », *ICOSSAR 89 Proceedings*, San Francisco, 1989, p. 1973-1980.
- [MEI 04] MEI G., QIN Q., LIN D., « Bimodal renewal processes models of highway vehicle loads », *Reliability Engineering System Safety*, vol. 83, 2004, p. 333-339.
- [O'C 98] O'CONNOR A., JACOB B., O'BRIEN E., PRAT M., « Approche probabiliste des valeurs extrêmes de charges sur les ponts routiers », *Seconde Conférence Nationale, Fiabilité des matériaux et des structures*, Université Marne la Vallée, Champ sur Marne, 1998.
- [STE 08] STEPHENSON A., *Functions for extreme value distributions - evd package Vers. 2.2-3*, 2008.

---

Session TS4-B  
Problèmes transverses

---



## **Mieux appréhender la durabilité des bétons par l'approche probabiliste.**

N. Hyvert, A. Sellier, F. Duprat, P. Francisco

---

---

# Mieux appréhender la durabilité des bétons par l'approche probabiliste

Nicolas Hyvert\*\*\* — Alain Sellier\*\* — Frédéric Duprat\*\* —  
Patrick Rougeau\* — Philippe Francisco\*

\* CERIB, Centre d'Etudes et de Recherches de l'Industrie du Béton, BP 30059,  
28231 Epernon Cedex, France

n.hyvert@cerib.com

\*\* LMDC, Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions, 135 avenue de  
Rangueil, 31077 Toulouse Cedex 4, France

---

*RÉSUMÉ. La prise en compte de la durabilité est un point clé pour le dimensionnement des ouvrages et des produits préfabriqués en béton. Les causes à l'origine de la corrosion des armatures des ouvrages en béton sont la carbonatation et la pénétration des chlorures, ou d'autres agents agressifs. Une des conditions pour la connaissance de l'évolution des performances des structures en béton dans le temps est de disposer d'outils prédictifs de dégradation adaptés aux environnements réels. Afin de développer des modèles réalistes, il est également nécessaire de disposer de bases de données aussi complètes que possible : résistance mécanique, diffusivité, porosité, distribution de taille de pores, composition minéralogique... Les fonctions de densité, les valeurs moyennes et les écart-types de ces paramètres d'entrée permettent d'utiliser les modèles selon une approche probabiliste et de quantifier l'évolution de la probabilité de défaillance dans le temps en fonction des caractéristiques du produit et des sollicitations in-situ.*

*ABSTRACT. Durability is a key point for the structures design and the precast concrete elements. Rebars corrosion is induced by carbonation and penetration of chlorides, or others aggressive agents. A condition for the assertion of the concrete structures performances evolution during service life is to dispose of predictive tools adapted to real environmental conditions. In order to have realistic models, it is also necessary to constitute whole bases of input data: mechanical strength, diffusivity, porosity, pore size distribution, mineralogical composition... Density functions, mean values and standard deviations of these parameters are used to evolve from deterministic models to original probabilistic ones and to quantify the failure probability evolution during service life according to the characteristics of the products and in-situ solicitations.*

*MOTS-CLÉS : durabilité, approche probabiliste, base de données, modélisation, durée de service.*

*KEYWORDS : durability, probabilistic approach, data base, modelling, lifetime service.*

---

## **1. Introduction**

A ce jour, la plupart des modèles prédictifs de la durabilité sont de type déterministe [(Miragliotta, 2000), (Li et al., 2003), (Bary et Sellier, 2004)]. Cependant, pour mieux appréhender le dimensionnement des structures en béton, les approches probabilistes commencent à être utilisées. Il est vraisemblable qu'à moyen terme, les textes normatifs s'appuieront encore davantage sur des modèles probabilistes de durabilité pour fixer des spécifications sur les obligations de moyen et de performance.

Cette étude vise à élaborer des modèles probabilistes de durabilité prenant en compte les spécificités des produits préfabriqués en béton. Ces modèles permettent de quantifier les risques liés à la dégradation du béton armé induit par la carbonatation et la pénétration des chlorures. La démarche vise à adapter un volet probabiliste à des modèles déterministes.

Cet article a pour objectif de montrer que la variation des paramètres d'entrée d'une modélisation peut conduire à une prédiction de dégradation d'intensité variable au sein d'un même élément et qu'il est donc nécessaire d'en tenir compte dans les modèles prédictifs. Pour cela, l'influence de la qualité de fabrication du béton sur l'évolution temporelle de l'indice de fiabilité est étudiée. Deux types de bétons sont ciblés. Ces bétons se distinguent par leur résistance à la carbonatation effective. Le choix de l'enrobage minimal par la méthode de l'indice de sécurité en fonction du type et de la qualité du béton est ensuite détaillé. Les perspectives de l'étude sont également présentées.

## **2. Contexte de l'étude**

La maîtrise et l'optimisation de la durabilité constituent un enjeu particulièrement important pour les ouvrages et les produits préfabriqués. Les risques provoqués par les conditions extérieures sont ordonnés en classes d'exposition (norme NF EN 206-1). Celles relatives aux risques de corrosion des armatures correspondent aux classes liées à la carbonatation, à la présence de chlorures et aux environnements marins.

Dans un premier temps, une étude de sensibilité est réalisée afin d'analyser les facteurs influençant préférentiellement la phénoménologie des mécanismes de dégradation. Ils sont alors identifiés comme paramètres d'entrée requis pour la modélisation. Les modèles déterministes des dégradations concernées sont ensuite sélectionnés, au regard de leur pertinence et de leur aptitude à être utilisés dans un contexte industriel.

Pour faire évoluer ces modèles vers une approche probabiliste, il est nécessaire de disposer d'une base de données aussi complète que possible : résistances mécaniques, diffusivités, distribution de taille de pores, compositions

minéralogiques... Les fonctions de densités, les valeurs moyennes et les écart-types de ces paramètres d'entrée permettent d'utiliser les modèles selon une approche probabiliste. L'évolution de la probabilité de défaillance dans le temps peut être quantifiée et l'épaisseur d'enrobage des armatures recalculée en fonction des caractéristiques du produit et des sollicitations in-situ.

### 3. Présentation du modèle déterministe et définition de la fonction d'état limite

D'une manière générale, la vitesse de carbonatation se caractérise par l'épaisseur de béton carbonatée en fonction du temps. Les différentes formules établies à partir des phénomènes de diffusion donnent l'épaisseur carbonatée en fonction de la racine carrée du temps :

$$x = x_0 + K \cdot \sqrt{t}$$

avec  $x$  : épaisseur carbonatée (mm) ;  
 $t$  : temps (années) ;  
 $x_0$  et  $K$  : coefficients caractéristiques du béton.

La valeur du coefficient  $K$  dépend d'un ensemble de facteurs liés aux caractéristiques du béton (rapport E/C, nature du ciment, ...) et aux conditions environnementales (concentration du dioxyde de carbone, humidité relative, ...).

Dans le cadre du projet européen Duracrete (Duracrete, 1999), une expression a été proposée pour traduire le temps nécessaire à l'initiation de la corrosion des armatures selon un processus de dégradation dû à la carbonatation de la matrice cimentaire. Le modèle Duracrete calcule une valeur de profondeur de carbonatation pour une durée d'exposition donnée :

$$x_c = \sqrt{\frac{2 \cdot k_e \cdot k_c \cdot k_t \cdot C_s}{R_{carb}}} \cdot \sqrt{t} \left( \frac{t_0}{t} \right)^n$$

avec  $x_c$  : profondeur de carbonatation (mm) ;  
 $k_e$  : paramètre tenant compte des conditions extérieures climatiques (en particulier le taux moyen d'humidité relative) (-) ;  
 $k_c$  : paramètre tenant compte des conditions de cure du béton (-) ;  
 $k_t$  : paramètre tenant compte de l'évolution du matériau. Ce paramètre est lié au coefficient de diffusion effectif du CO<sub>2</sub> sur béton sec (-) ;  
 $C_s$  : concentration de CO<sub>2</sub> à la surface du béton (kg.m<sup>-3</sup>) ;  
 $R_{carb}$  : résistance du béton à la carbonatation effective (kg.m<sup>-3</sup>.mm<sup>-2</sup>.année) ;  
 $t_0$  : période de référence (années) ;

#### 4 Journées Fiabilité des Matériaux et des Structures, Nantes, 2008

- t : temps d'exposition (années) ;  
n : paramètre tenant compte des conditions climatiques à la surface du béton (cycles d'humidification/séchage) et la porosité du matériau (-).

Ce modèle est intéressant car il intègre de nombreux paramètres relatifs à la fabrication du béton, aux conditions environnementales et aux conditions d'exécution (conditions de cure, ...). Il est par conséquent adaptable à un large panel de matériaux cimentaires qui se distinguent par des compositions de matrices cimentaires différentes, conditionnées par la nature du ciment, le type des additions éventuelles et le rapport E/C.

Le problème de base dans la fiabilité des constructions consiste à vérifier que les résistances (R) restent supérieures aux sollicitations (S) :  $R > S$ . La fonction d'état limite G, est définie tel que la différence entre les résistances (R) et les sollicitations (S) soit nulle ( $R - S = 0$ ). Dans notre étude, la résistance du matériau correspond à l'épaisseur d'enrobage des armatures (e) et la sollicitation du matériau correspond à l'épaisseur carbonatée du matériau ( $x_c$ ). On obtient donc :

$$G = e - x_c$$

Par ailleurs, l'indice de fiabilité  $\beta$  est défini dans le repère standardisé par  $\beta = \min OP^*$ , tel que O est le centre du repère et  $P^*$  appartient à la fonction d'état limite ( $G = 0$ ).

Pour déterminer la valeur de cet indice de fiabilité  $\beta$ , on utilise une version améliorée de la technique du gradient projeté (XS Nguyen, 2007). Cette technique du gradient projeté avec contrôle d'erreur permet une utilisation efficace de l'algorithme de Rackwitz et Fiessler.

#### 4. Données d'entrée du modèle

Afin de réaliser cette étude paramétrique, l'exemple décrit dans le projet européen Duracrete (Duracrete *exemple*, 1999) a été repris. Cet exemple traite d'une structure réalisée à partir d'un béton à base de ciment Portland, de rapport Eau/Liant = 0.40, ayant subi une cure d'une durée de 7 jours. Par ailleurs, cette structure est située dans un environnement sec (intérieur de bâtiment).

Les valeurs des différents paramètres de cet exemple figurent dans le tableau 1.

Données	Dimension	Moyenne	Ecart type	Coefficient de variation (CV)	Loi suivie
e	mm	35	5	14,3 %	LogNormale
C <sub>s</sub>	kg/m <sup>3</sup>	6,00.10 <sup>-4</sup>	1,00.10 <sup>-4</sup>	16,7 %	Normale
k <sub>t</sub>	-	0,98	0,05	5,1 %	Normale
k <sub>c</sub>	-	1	-	-	Déterministe
k <sub>e</sub>	-	1	0,1	10,0 %	Normale
R <sub>carb</sub>	kg.m <sup>-3</sup> .mm <sup>-2</sup> .année	<i>Etude paramétrique : moyenne 7,2.10<sup>-5</sup> à 5,3.10<sup>-4</sup>, coefficient de variation 15 %</i>			Normale
t	années	100	-	-	Déterministe
t <sub>0</sub>	années	1	-	-	Déterministe
n	-	0	-	-	Déterministe

**Tableau 1.** Valeurs d'origine des différentes données de l'exemple utilisé dans le projet européen Duracrete (Duracrete exemple, 1999)

Ces données vont permettre de montrer l'influence de la qualité de fabrication sur l'évolution temporelle de l'indice de fiabilité (ou indice de sécurité)  $\beta$ . Les Eurocodes, normes européennes de conception et de calculs pour les bâtiments et les ouvrages de génie civil, préconisent une valeur cible pour cet indice  $\beta$  égale à 1,5 pour une durée de référence de 50 ans.

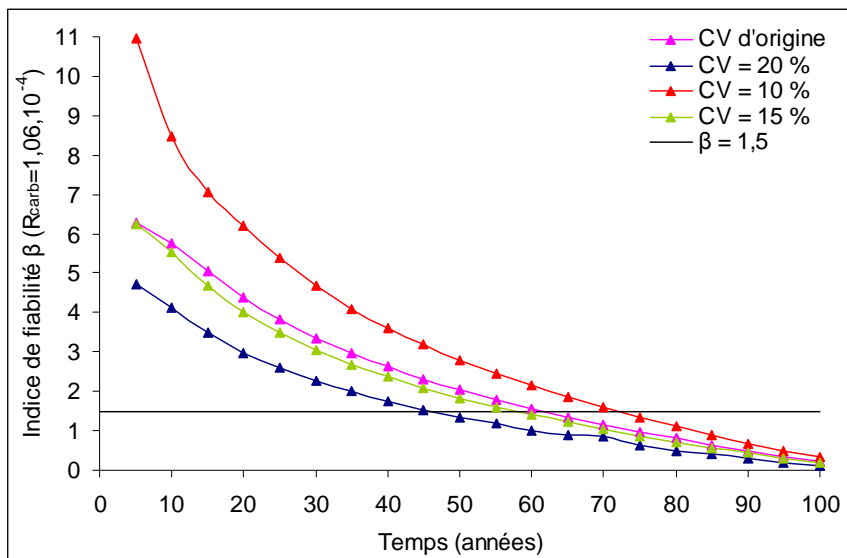
### 5. Influence de la qualité de fabrication sur l'évolution temporelle de l'indice de fiabilité

Pour observer cette influence, on fait varier les coefficients de variation des variables aléatoires, cela pour deux types de béton. Ces deux bétons se distinguent par leur résistance à la carbonatation effective : le premier béton possède une résistance à la carbonatation effective ( $R_{carb} = 1,06.10^{-4}$  kg.m<sup>-3</sup>.mm<sup>-2</sup>.année) plus faible que le second béton ( $R_{carb} = 5,30.10^{-4}$  kg.m<sup>-3</sup>.mm<sup>-2</sup>.année). Les valeurs des autres paramètres sont données dans le tableau 2. Les trois types de coefficients de variation, 10, 15 et 20 %, correspondent à des qualités de contrôle et de fabrication décroissantes.

Les figures 1 et 2 montrent l'évolution de l'indice de fiabilité pour chacun de ces deux types de béton et pour les différents coefficients de variation (CV).

Données	Dimension	Moyenne	Coefficient de variation (CV)	Loi suivie
e	mm	35	Prend les valeurs suivantes : valeurs d'origine, 10 %, 15 % et 20 %	LogNormale
$C_s$	$\text{kg/m}^3$	$6,00 \cdot 10^{-4}$		Normale
$k_t$	-	0,98		Normale
$k_c$	-	1		Déterministe
$k_e$	-	1		Normale
t	années	100		Déterministe
$t_0$	années	1		Déterministe
n	-	0		Déterministe

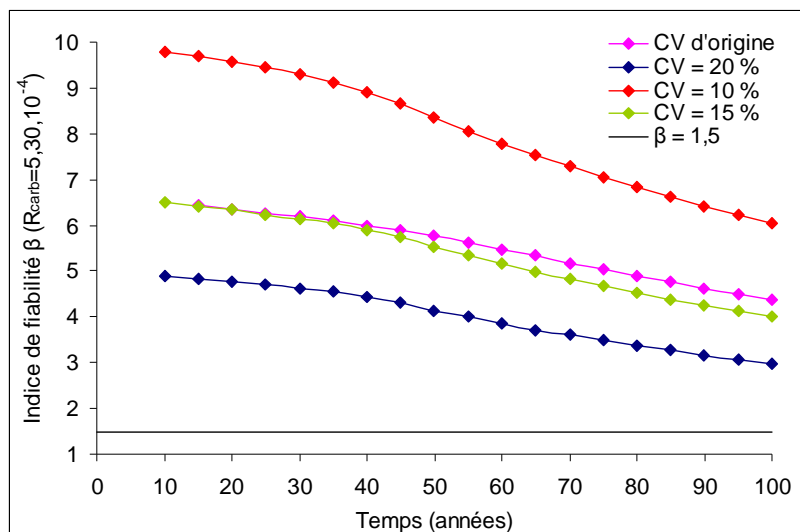
**Tableau 2.** Valeurs des différentes données utilisées pour montrer l'influence de la qualité de fabrication sur l'évolution temporelle de l'indice de fiabilité  $\beta$



**Figure 1.** Evolution temporelle de l'indice de fiabilité  $\beta$  (béton de résistance à la carbonatation effective égale à  $1,06 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^{-3}.\text{mm}^{-2}.\text{année}$ ) pour différents coefficients de variation (CV)

Dans le cas d'un béton ayant une résistance à la carbonatation effective faible ( $R_{carb} = 1,06.10^{-4} \text{ kg.m}^{-3}.\text{mm}^{-2}.\text{année}$ ), la date de franchissement de l'indice cible ( $\beta = 1,5$ ) varie en fonction du coefficient de variation appliqué aux paramètres du modèle. Ainsi, pour les coefficients de variation d'origine et ceux équivalents à 15 %, l'indice cible est atteint aux environs de 60 ans. De même, pour des coefficients de variation plus faibles (10 %), l'indice cible est atteint à 72 ans. A l'inverse, la date de franchissement est diminuée lorsque les coefficients de variations sont plus élevés (20 %). L'indice cible est atteint dans ce cas à 45 ans.

On constate donc, pour ce béton, que la date de franchissement de l'indice cible est fortement influencée par la qualité de fabrication, c'est-à-dire les coefficients de variations des paramètres du modèle. Ainsi, seule une bonne maîtrise de la qualité de fabrication (coefficients de variation inférieurs à 15 %) permet de dépasser l'indice cible à 50 ans préconisé par les Eurocodes.



**Figure 2.** Evolution temporelle de l'indice de fiabilité  $\beta$  (béton de résistance à la carbonatation effective égale à  $5,30.10^{-4} \text{ kg.m}^{-3}.\text{mm}^{-2}.\text{année}$ ) pour différents coefficients de variation (CV)

Dans le cas d'un béton avec une résistance à la carbonatation effective élevée ( $R_{carb} = 5,30.10^{-4} \text{ kg.m}^{-3}.\text{mm}^{-2}.\text{année}$ ), la valeur de l'indice de fiabilité est toujours supérieure à la valeur cible à 50 ans préconisé par les Eurocodes ( $\beta > 1,5$ ). Ce phénomène s'observe pour les différents coefficients de variation appliqués.

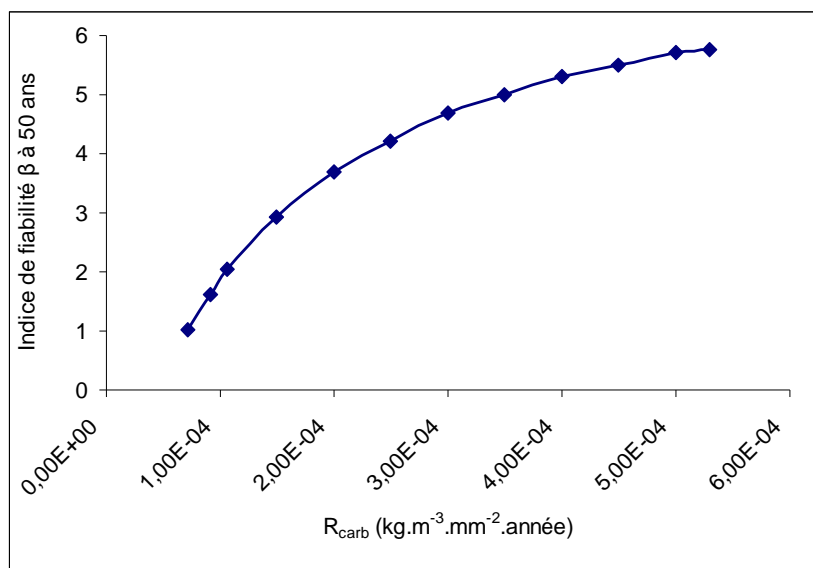
Ces simulations ont été réalisées pour une épaisseur d'enrobage des armatures moyenne de 35 mm. Les indices de fiabilité à 50 ans résultant des calculs étant



largement au dessus de la valeur cible, une diminution de l'épaisseur d'enrobage des armatures pourrait être envisagée dans ce second type de béton.

### 6. Influence de la résistance à la carbonatation effective du béton sur l'indice de fiabilité à 50 ans

La figure 3 montre l'évolution de l'indice de fiabilité à 50 ans pour des bétons de différentes résistances à la carbonatation effective ayant une épaisseur d'enrobage des armatures moyenne de 35 mm. Les points extrêmes correspondent aux calculs précédents. Les points intermédiaires ont été obtenus en conservant les données du tableau 1, exceptée pour la variable  $R_{carb}$  qui prend plusieurs valeurs moyennes et un coefficient de variation constant de 15 %.



**Figure 3.** Evolution de l'indice de fiabilité  $\beta$  à 50 ans en fonction de la valeur de la résistance à la carbonatation effective du béton (coefficient de variation constant et égal à 15 %)

On constate que l'indice de fiabilité  $\beta$  pour la durée de référence de 50 ans augmente avec la résistance à la carbonatation effective du béton. Par ailleurs, il est particulièrement intéressant de constater que cette augmentation est rapide pour les faibles résistances à la carbonatation effective du béton. En d'autres termes, une faible variation positive de  $R_{carb}$  pour un béton se traduit par un gain important en terme de fiabilité à 50 ans.

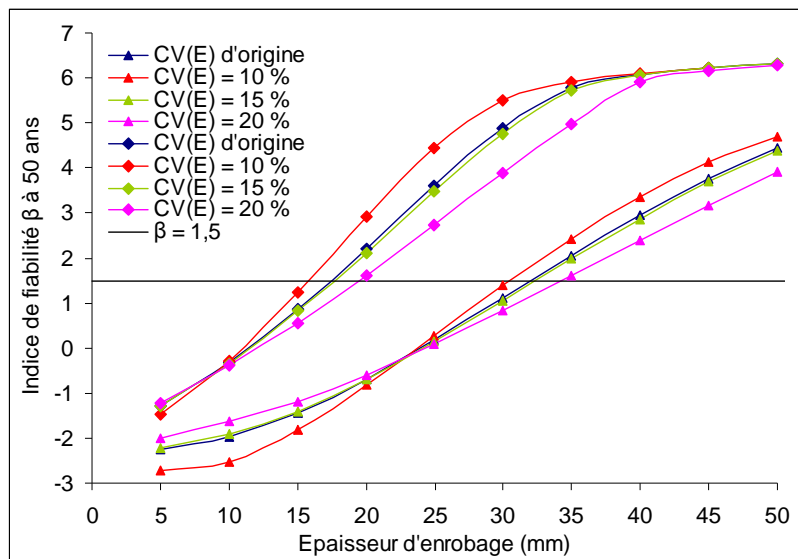
Une hypothèse peut alors être envisagée : pour maximiser la durabilité des produits en béton et optimiser l'épaisseur d'enrobage des armatures, les bétons utilisés doivent disposer d'une bonne résistance à la carbonatation effective.

Le CERIB mène actuellement une campagne d'essais visant à quantifier la résistance à la carbonatation effective et les dispersions des variables aléatoires pour les produits préfabriqués.

### 7. Choix de l'enrobage minimal par la méthode de l'indice de sécurité en fonction du type et de la qualité du béton

Les mêmes bétons que ceux étudiés dans la partie 5 sont repris ici : un béton de dont la résistance à la carbonatation effective est de  $1,06.10^{-4} \text{ kg.m}^{-3}.\text{mm}^{-2}.\text{année}$  et un béton dont la résistance à la carbonatation effective est de  $5,30.10^{-4} \text{ kg.m}^{-3}.\text{mm}^{-2}.\text{année}$ .

Les courbes de la figure 4 sont obtenues pour des qualités de mise en place des armatures prédéterminées (CV(E)). A noter que les différentes valeurs des autres paramètres figurent dans le tableau 1.



**Figure 4.** Evolution de l'indice de fiabilité  $\beta$  à 50 ans en fonction de la valeur moyenne de l'épaisseur d'enrobage pour différents coefficients de variation ( $\blacktriangle$ :  $R_{carb} = 1,06.10^{-4} \text{ kg.m}^{-3}.\text{mm}^{-2}.\text{année}$  ;  $\blacklozenge$ :  $R_{carb} = 5,30.10^{-4} \text{ kg.m}^{-3}.\text{mm}^{-2}.\text{année}$ )

Les courbes de la figure 4 sont obtenues pour des qualités de mise en place des armatures prédéterminées (CV(E)). A noter que les différentes valeurs des autres paramètres figurent dans le tableau 1.

Dans le cas d'un béton ayant une résistance à la carbonatation effective faible ( $R_{\text{carb}} = 1,06 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{mm}^{-2} \cdot \text{année}$ ), en considérant que la valeur de l'indice de fiabilité à 50 ans doit être au moins égale à la valeur cible ( $\beta = 1,5$ ), le gain d'enrobage apparaît comme faible. En effet, dans le cas le plus favorable (coefficient de variation égal à 10 %), le gain est de 5 mm environ. On atteint alors une épaisseur d'enrobage de 30 mm.

A l'inverse, dans le cas d'un béton avec une résistance à la carbonatation effective élevée ( $R_{\text{carb}} = 5,30 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{mm}^{-2} \cdot \text{année}$ ), ce gain est au minimum de 15 mm environ. Ce gain minimum est atteint dans le cas le plus défavorable des calculs, à savoir pour un coefficient de variation égal à 20 %. On constate qu'il est même possible d'atteindre une épaisseur d'enrobage de l'ordre de 16 mm dans les meilleures conditions des calculs (coefficient de variation est égal à 10 %).

Cependant, il convient de souligner que le gain potentiel sur l'épaisseur d'enrobage, obtenu avec cette démarche, n'est pas actuellement pris en compte dans les Eurocodes. Une solution serait de proposer une évolution de ces textes pour mieux prendre en considération les performances accrues d'un béton de meilleure résistance à la carbonatation. Bien entendu, ceci ne pourra s'appliquer que si nos hypothèses de calculs sont confirmées par les essais en cours d'une part, et si des mesures de contrôle de qualité adéquates sont mises en œuvre.

## 8. Conclusions et perspectives

Ces différents exemples démontrent bien la pertinence de l'approche probabiliste pour la prise en considération de la variabilité des paramètres qui influencent les phénomènes de dégradations des éléments en béton. Elle est donc utile à l'optimisation des bétons et de l'enrobage des armatures afin de mieux appréhender la durabilité des produits préfabriqués. Elle montre en particulier que si un certain niveau de qualité de fabrication est assuré (en termes de moyennes et de coefficients de variation des paramètres de modèle), une diminution substantielle de l'enrobage peut être alors envisagée. Cette diminution peut, dans certains cas, avoir une amplitude supérieure à celle actuellement autorisée dans la réglementation. Ce dernier point ouvre la voie à une possibilité d'évolution de la réglementation.

Néanmoins, il est important de rappeler que les données utilisées pour les calculs sont à confirmer par des essais en laboratoire. Il apparaît également nécessaire de confirmer ces données pour plusieurs types de produits préfabriqués.

L'élaboration d'une base de données permettant de connaître la dispersion des données d'entrée est primordiale. Cette base de données est en cours de construction

et sera mise à jour grâce à une actualisation bayésienne. Il est également nécessaire de faire évoluer les modèles pour inclure les spécificités propres à l'industrie du béton. Ceci implique d'intégrer aux modèles des modules consacrés à l'influence des processus de fabrication (traitement thermique, conditions de cure, ...). Des travaux expérimentaux sont également en cours au CERIB dans ce but.

## 9. Bibliographie

- Barry B., Sellier A., « Coupled moisture – carbon dioxide – calcium transfer model for carbonation of concrete », *Cement and Concrete Research*, n°34, 2004, pp. 1859-1872.
- Duracrete, Probabilistic Performance based durability design of concrete structures, 1999, *Brit Euram Project n° 1347*, pp. 39-53.
- Duracrete *exemple*, Probabilistic Performance based durability design of concrete structures, 1999, *Brit Euram Project n° 1347*, pp53-54.
- Li Y., Vrouwenvelder T., Wijnants G.H., « Spatial variability of concrete degradation », *fib WP 5.3-1, TG2.6 The Joint Committee on Structural Safety Workshop on Probabilistic Modelling of Deterioration Processes in Concrete Structures – Proceedings*, 2003, pp. 129.
- Miragliotta R., Modélisation des processus physico-chimiques de la carbonatation des bétons préfabriqués - Prise en compte des effets de parois, 2000, Thèse doctorale de l'Université de La Rochelle.
- Nguyen X.S., Algorithmes probabilistes appliqués à la durabilité et à la mécanique des ouvrages de génie civil, 2007, Thèse doctorale de l'Institut Nationale des Sciences Appliquées de Toulouse.
- Norme NF EN 206-1, « Béton – Partie 1 : spécification, performances, production et conformité », Octobre 2005.

**La fiabilité au service de la gestion d'un ouvrage.**

M. Pendola, T. Yalamas

---

**Article non communiqué**

## **Du parc de structures à la structure : avantages et inconvénients du i-form.**

O. Priou, F. Schoefs, A. Nouy, M. Birades, V. Quiniou

---

---

## Du parc de structures à la structure : avantages et limites du IFORM

Olivier Priou\*, Frank Schoefs\*, Anthony Nouy\*, Michel Birades  
\*\*, Valérie Quiniou\*\*\*

\* *GeM, Institut de Recherches en Génie Civil et Mécanique, UMR CNRS 6183,  
Université de Nantes*

\*\* *TOTAL SA, Pau* - \*\*\**TOTAL SA, Paris*

---

*RÉSUMÉ. La ré-analyse de parcs de structures en conditions environnementales aléatoires nécessite des méthodes appropriées. Parmi celles-ci, le IFORM a montré son intérêt en proposant des valeurs nominales basées sur un raisonnement probabiliste pour une ré-analyse déterministes des structures. Toutefois, cette approche peut paraître trop simplifiée au regard du calcul d'une structure complexe. On choisit donc les structures pétrolières offshore de type Jacket, en situation de tempête, pour comparer les résultats de calculs semi-probabilistes (basés sur le IFORM) et des calculs aux éléments finis stochastiques basés sur un calcul direct par projection sur le chaos polynomial.*

*ABSTRACT. Reassessment of a set of structures in a random environmental environment needs for suitable methods. Among them, IFORM has shown by the past all its interest by providing nominal values, coming from a probabilistic reasoning, for deterministic structural computations. However, very simple approach could appear as too simple for an application of very complex structures like offshore Jacket platforms. We select these last one, in severe conditions (storm) for our application. Results coming from the previous semi-probabilistic approach are compared to those obtained by stochastic finite element method by projection of the solution on the polynomial chaos expansion.*

*MOTS-CLÉS : IFORM, fiabilité, éléments fini stochastiques, plates-formes offshore, environnement marin.*

*KEYWORDS: IFORM, reliability, stochastic finite element, offshore platforms, marine environment.*

---

## 1. Introduction

La gestion de parc d'ouvrages est un enjeu persistant. Qu'il s'agisse d'actifs industriels (quais, plate-formes offshores, centrales hydro-électriques) ou d'aménagements collectifs (collèges, ponts, ...), le décideur doit faire face à une multitude de structures d'âges variés, de matériaux et procédés différents et dans des environnements multiples. Difficile dans ces conditions de fournir des outils d'aide à la décision. Les méthodes dites qualitatives fournissent actuellement la meilleure alternative à un calcul exhaustif de chaque structure.

Toutefois, une autre alternative existe lorsque le parc de structures est plus homogène. Ce peut être le cas de pylônes électriques de conceptions similaire ou de plates-formes offshore en acier, qui obéissent aussi à des méthodes de conceptions semblables. Cet article se servira des secondes comme point d'illustration.

On rappellera comment les approches par analyse de fiabilité FORM inverse (appelées i-form) peuvent fournir des points de conception pour des chargements environnementaux (Orsero *et al.*, 2007). La méthode des contours environnementaux (ECM, Winterstein *et al.*, 1993) permet alors à partir d'un état limite simple et indice de fiabilité visé, de déterminer la combinaison de chargements environnementaux maximisant l'effort sur la structure. Les conditions environnementales obtenues sont alors prises comme entrée des calculs déterministes. On appellera cette approche, méthode semi-probabiliste.

On se propose ici de comparer les résultats de cette approche semi-probabiliste aux résultats d'une approche complètement probabiliste. On utilise ici une méthode de projection sur le chaos polynomial (Puig *et al.*, 2002) utilisant en boîte noire un code de calcul de structures adapté (ici NSO). L'application concerne des plates-formes pétrolières en acier de type Jacket.

## 2. Méthode i-form

### 2.1. Principes généraux

L'Inverse FORM ou IFORM est une méthode introduite par Winterstein en 1993 (Winterstein *et al.*, 1993), dans le cadre de la modélisation de la probabilité jointe de sollicitations environnementales. On rappelle simplement ici que la méthode FORM (First Order Reliability Method) permet de déterminer l'indice de fiabilité par approximation de l'état limite par un hyperplan. L'idée générale est de recourir à une méthode inverse pour déterminer le point de fonctionnement et l'état limite à indice de fiabilité visé. Exprimé sous cette forme générale, ce problème peut s'avérer être d'une résolution complexe, en particulier dans le cas du recours à des codes de calcul pour l'évaluation de l'état limite. On se limite donc ici à une application très particulière appelée ECM (Environmental Contour Method) (Bhattacharya *et al.*, 1999).



L'ECM consiste à déterminer, à indice de fiabilité  $\beta$  visé, les coordonnées, dans l'espace physique des variables  $\mathbf{x}$  (vecteur des variables de base), du point conduisant à la combinaison de chargement la plus critique pour une catégorie de réponse structurale donnée  $R(\mathbf{x})$ . On ne calcule alors pas la réalisation de la fonction d'état limite d'une structure donnée à chaque étape de la recherche du minimum. On pose  $T$ , transformation iso-probabiliste de l'espace des variables physiques à l'espace des variables centrées réduites  $\mathbf{u}$  (transformation de Rosenblatt par exemple) telle que :  $\mathbf{u} = T(\mathbf{x})$

On peut alors considérer les étapes suivantes :

(i) déterminer les coordonnées  $\mathbf{u}_{max}$  du point le plus critique (maximisant  $R$ ) telles que [1].

$$\mathbf{u}_{max} | \beta = \underset{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \|\mathbf{u}\| = \beta}{\operatorname{argmax}} (R(T^{-1}(\mathbf{u}))) = \quad [1]$$

avec  $m$ , dimension de l'espace des variables de base. La solution en  $\mathbf{u}$  se trouve donc sur une hyper-sphère de rayon  $\beta$ . Ces hyper-sphères, ramenées dans, l'espace physique sont appelées **contours environnementaux** (courbes  $\|T(\mathbf{x})\| = \beta$ ).

(ii) déterminer les coordonnées  $\mathbf{x}_{max}$  du point le plus critique dans l'espace des variables physiques et définies par la relation [2].

$$\mathbf{x}_{max} | \beta = T^{-1}(\mathbf{u}_{max} | \beta) \quad [2]$$

La réponse  $R_{max}$  en ce point est obtenue par [3] :

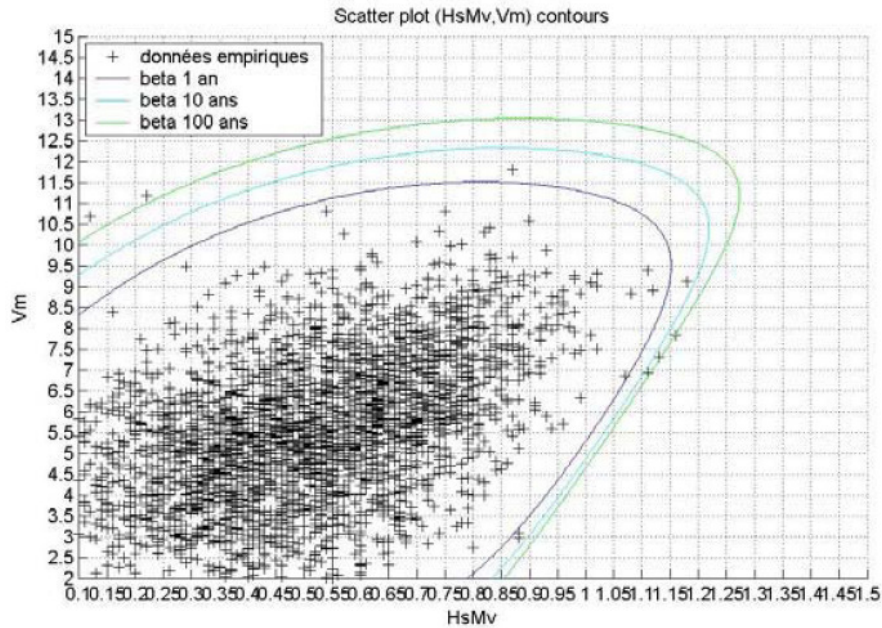
$$R_{max} | \beta = R(\mathbf{x}_{max} | \beta) \quad [2]$$

A titre d'illustration, on trace en figure 1 les contours environnementaux (dans l'espace physique) obtenus dans le cas 2-D, ici la vitesse de courant  $V_m$  et la hauteur de houle  $H_s$  pour trois périodes de retour différentes : 1, 10 et 100 ans (Quiniou *et al.*, 2003). Une généralisation à un grand nombre de variables est disponible dans (François *et al.*, 2007).

## 2.2. Enjeux pour le secteur pétrolier offshore

Dans le secteur pétrolier offshore, le gestionnaire peut être amené à gérer plusieurs dizaines de structures dans la même région. Entre la date de mise en place de la structure (par exemple, dans les années 70-80 pour un grand nombre) et aujourd'hui, les statistiques sur les états de mer ont été enrichies et une mise à jour des calculs est souvent nécessaire. Le contexte de requalification de structures en fin de durée de service ajoute à cette exigence de mise à jour. Il est alors nécessaire de

se doter d'outils de requalification simples mais robustes, c'est-à-dire garantissant des hypothèses conservatives, satisfaisantes au regard de l'expérience et des données actuelles. La méthode IFORM peut alors être intéressante pour déterminer les données d'entrée à indice de fiabilité cible donné.



**Figure 1.** Contours environnementaux (dans l'espace physique) pour trois périodes de retour (Quiniou et al., 2003)

Dans la pratique cet indice de fiabilité est lié à la probabilité de défaillance, calculée à partir de la période de retour  $T_r$  du niveau  $R_{max}$ . La période de retour  $T_r$  du niveau  $R_{max}$  d'un phénomène correspond au laps de temps (en années) où l'on s'attend, en moyenne, à voir dépasser  $R_{max}$ . D'un point de vue probabiliste, cette notion est rattachée à un modèle de distribution des valeurs extrêmes  $R$ . Si cette distribution a pour fonction de répartition  $F_R$ , la période de retour de l'évènement  $R_{max}$  est alors donnée par [4], où  $F_R(R_{max})$  est, par définition, la probabilité de non dépassement de  $R_{max}$ .

$$T_r = \frac{1}{1 - F_R(R_{max})} \quad [4]$$

Dans le secteur pétrolier, les règlements tolèrent une période de retour de 100 ans. On tolère donc, en moyenne une observation dépassant  $R_{max}$  sur 100 ans. Dans la pratique, lorsque l'on considère les états de mer, on cherche la valeur extrême sur

une durée de stationnarité (en heure) de l'état de mer, notée  $T_{ss}$  ('ss' pour Sea State). La fréquence d'observation horaire vaut alors  $1/T_{ss}$ . En moyenne, cette dernière vaut généralement 3 heures. On calcule alors le nombre d'observations  $N_{Tr}$  sur  $T_r$  ans et la probabilité de défaillance  $P_f$  associée à  $R_{max}$  vaut :

$$P_f = \frac{1}{N_{Tr}} = \frac{1}{Tr.365.24.(1/T_{ss})} \quad [5]$$

Soit pour  $T_r = 100$  ans et  $T_{ss} = 3$  heures :  $P_f = 3,42 \cdot 10^{-6}$ . D'après 5, on déduit l'indice de fiabilité nécessaire à la résolution du problème [1] :

$$\beta \approx \phi^{-1}(P_f) \quad [6]$$

Soit pour les valeurs numériques ci-dessus :  $\beta \approx 4,5$ . L'application concerne des structures en acier de type Jacket dont un modèle est représenté en figure 2.

### 3. Calcul Eléments Finis Stochastiques par projection

#### 3.1. Principes généraux

On se propose ici de comparer les résultats de l'approche semi-probabiliste ci-dessus basée sur le IFORM aux résultats d'une approche complètement probabiliste. On utilise ici une méthode de projection sur le chaos polynomial (Puig *et al.*, 2002) utilisant en boîte noire un code de calcul de structures adapté, ici NSO (New Strudl Offshore).

La méthode de projection sur le chaos polynomial permet d'obtenir une solution  $u$  approchée du problème explicite en fonction du vecteur de variables de base  $\xi$  appelé germe gaussien. En pratique, nous considérons pour cette étude les variables aléatoires hauteur extrême de la houle  $H$ , période extrême de la houle  $T$  et vitesse de courant extrême  $V$ . Elles sont tout d'abord exprimées en fonction de variables de base gaussiennes ou uniformes. Comme la période  $T$  est conditionnée à la hauteur  $H$ , on utilise pour les décrire deux variables de base  $\xi_1, \xi_2$  définies par la transformation de Rosenblatt :

$$\xi_1 = \phi^{-1}(F_H(H)), \quad \xi_2 = \phi^{-1}(F_{T/H}(T/H)) \quad [7]$$

où  $\phi$  est la fonction de distribution cumulée de la loi normale gaussienne centrée réduite. Au total, un germe de dimension quatre est nécessaire à la représentation des trois variables de base, la vitesse du courant ayant besoin de deux variables pour être décrite.

$$H = g_1(\xi_1, \xi_2), \quad T = g_2(\xi_1, \xi_2), \quad V = g_3(\xi_3, \xi_4) \quad [8]$$

La décomposition d'une fonction  $u(\xi)$  sur le chaos polynomial a pour forme :

$$u(\xi) = \sum_{\alpha \in N^m, |\alpha| < p} u_\alpha \cdot h_\alpha(\xi) \quad [9]$$

où les  $h_\alpha$  constituent une base de polynômes orthonormés pour la mesure  $dP_\xi$  et les  $u_\alpha$  sont les coefficients de la décomposition. Ici  $m$  égale 4. On détermine l'ordre de la décomposition  $p$  de manière à ce que l'erreur engendrée par la décomposition soit acceptable. Le problème se résume à la détermination des coefficients  $u_\alpha$  de la décomposition. Ils correspondent à la projection, au sens  $L^2$ , de  $u(\xi)$  sur la base des  $h_\alpha$ .

$$u_\alpha = \langle u(\xi), h_\alpha \rangle_{L^2} = E(u(\xi) h_\alpha(\xi)) = \int_{\mathfrak{R}} u(z) h_\alpha(z) dP_\xi(z) \quad [10]$$

Cette intégrale peut être approchée par une quadrature de Gauss :

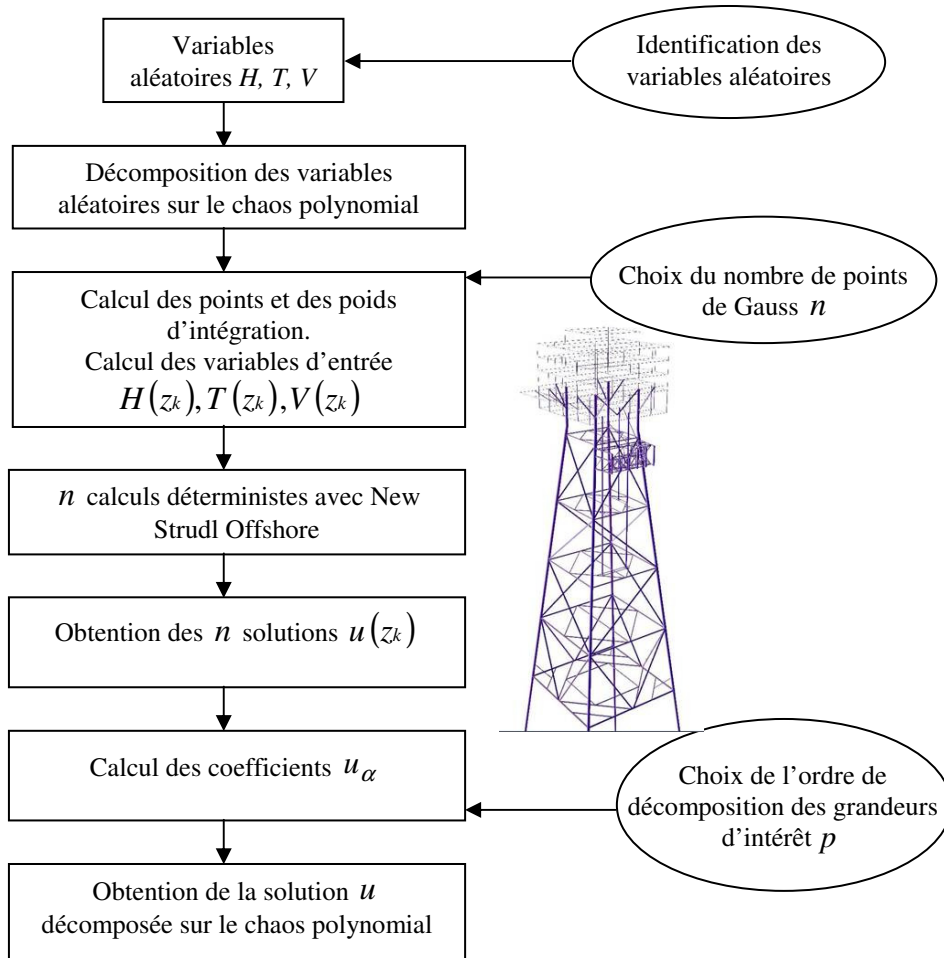
$$u_\alpha = \int_{\mathfrak{R}} u(z) h_\alpha(z) dP_\xi(z) \approx \sum_{k=1}^{n^4} \omega_k h_\alpha(z_k) u(z_k) \quad [11]$$

où  $z_k, \omega_k$  sont les points et les poids de la quadrature de Gauss et  $n$  est le nombre de points de Gauss par dimension stochastique. La quadrature en dimension  $m$  est obtenue par tensorisation de quadratures de Gauss 1-D à  $n$  points.

La détermination des  $u_\alpha$  revient ainsi au calcul de la valeur  $u$  aux points de Gauss. Pour cela, on réalise  $n^4$  calculs déterministes en faisant appel au code de calcul NSO. Pour chacun de ces appels au code, les variables aléatoires  $H, T$  et  $V$  sont évaluées au niveau du point de Gauss  $z_k$  correspondant.

Cependant, on notera qu'on ne retient que les valeurs physiquement admissibles et compatibles avec les plages de validité des modèles (Boukinda, 2007, p.159), ainsi lorsque les valeurs des variables aléatoires sont trop faibles, on effectue un bornage par valeur inférieure. Dès lors, les valeurs minimales des variables aléatoires sont les suivantes :  $H_{min} = 0,01$  m,  $T_{min} = 0,95$  s,  $V_{min} = 0$  m.s<sup>-1</sup> ( $V > 0$ ).

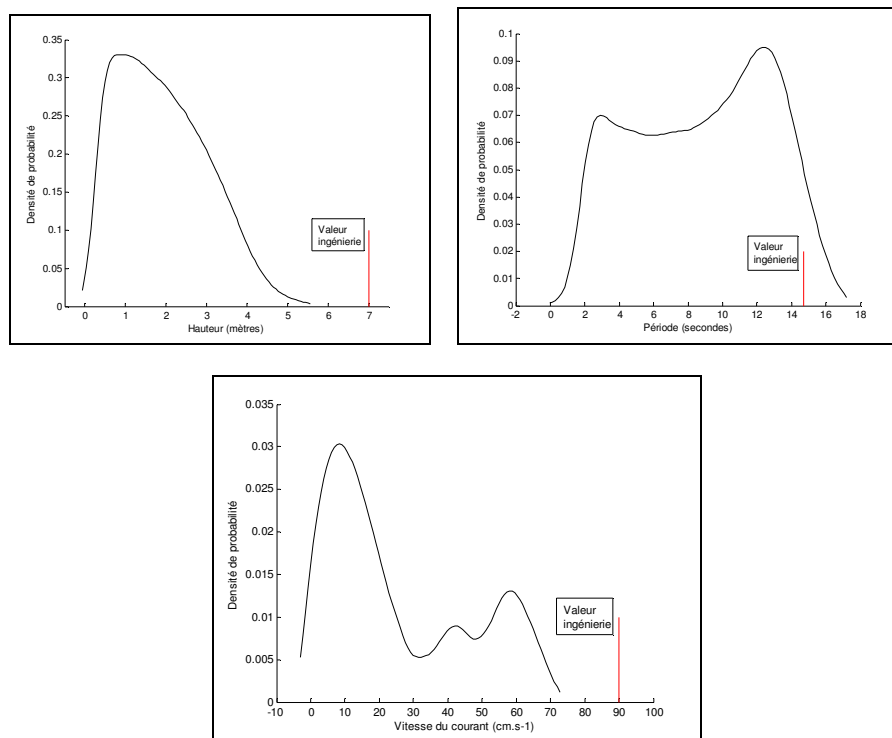
L'organigramme général est présenté en figure 2.



**Figure 2.** Organigramme de résolution du problème EFS par projection et représentation des structures Jacket étudiées.

### 3.2. Variables de bases

On représente en figure 3 les distributions marginales [8]. On note que pour la période et les courants, la distribution présente plusieurs modes. Les échantillons initiaux ont été obtenus par recombinaison des états de mer à partir de la donnée des spectres de houle. On note en particulier que la période de la houle comporte deux modes l'un provenant d'une composante de houle de tempête et l'autre d'une composante de mer de vent.



**Figure 3.** Distributions des variables de base : hauteur, période extrême de la houle et vitesse du courant.

Les valeurs provenant du IFORM sont repérées par un trait vertical. On remarque, pour les variables prépondérantes ( $H$  et  $V$ ), qu'elles correspondent à des probabilités de dépassement très faibles.

### 3.3. Grandeurs d'intérêt et marges de sécurité

On définit ici les grandeurs d'intérêt retenues pour le calcul en fiabilité. Elles sont obtenues par post-traitement à partir de l'approximation du champ de déplacement sur le chaos polynomial. Deux grandeurs de sortie sont analysées :

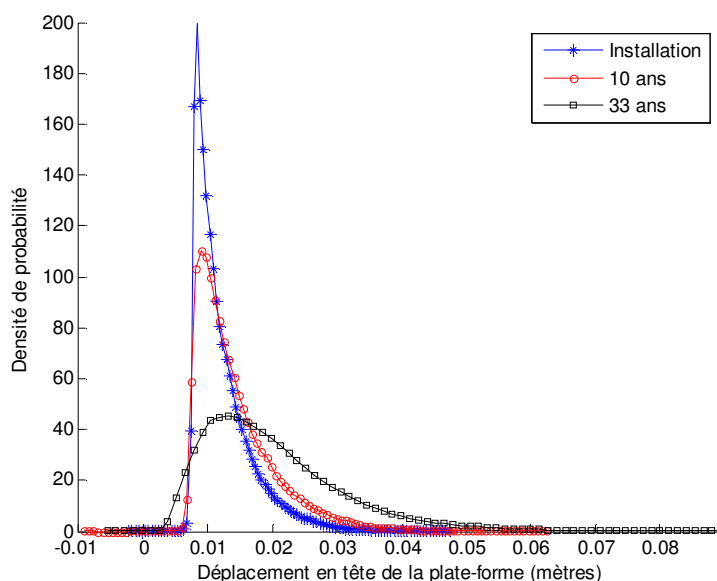
- (i) La première est le déplacement en tête de la plate-forme. Pour cela on calcule la moyenne des déplacements des quatre coins du pont supérieur de la plateforme.
- (ii) Les fonctions d'état limite exprimées en ratio dits « ratios API » : il s'agit de quotients Sollicitation/Résistance obtenus à partir de l'analyse des éléments et des liaisons du jacket. Le calcul de ces ratios est réalisé en

concordance avec l'API WSD RP2A 21th sections 3.3 et 4.3. On supprime alors les coefficients de sécurité introduits dans les codes.

Les marges de sécurité peuvent s'exprimer simplement de manière linéaire à partir d'un déplacement critique dans le cas (i) et par comparaison avec la valeur 1 (aucune erreur de modèle introduite) dans le cas (ii).

### 3.4. Résultats

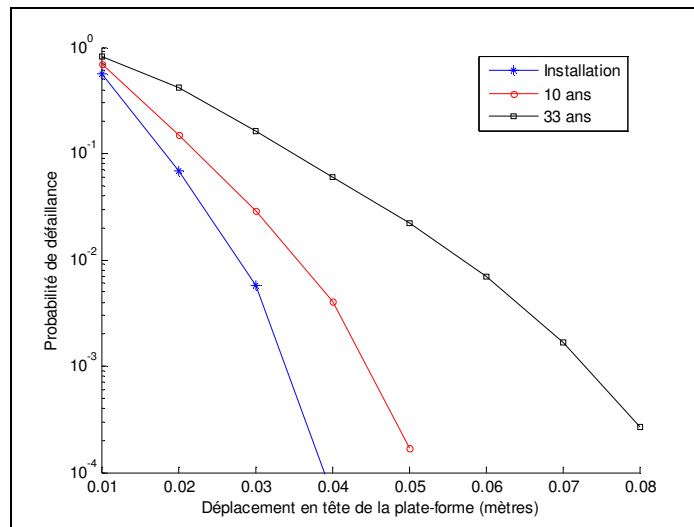
A l'issue des études de convergence (menées sur le déplacement et le ratio API), il est ressorti que le meilleur compromis entre la qualité de la solution et le temps de calcul était d'adopter la combinaison  $n = 5$  et  $p = 4$ . Afin de déterminer les évolutions des probabilités de défaillance en fonction du temps, on introduit la présence de bio-salissures marines (accrétions marines de type moules, coraux, ...) qui colonisent la structure. On choisit les moyennes d'épaisseur de bio-salissures à 10 et 33 ans (Boukinda, 2007, p.84). A l'installation, on suppose l'épaisseur nulle (structure non colonisée). Ces bio-salissures modifient le diamètre des composants et le niveau des coefficients hydrodynamiques (Boukinda et *al.*, 2008, Boukinda et *al.*, 2007). Le choix d'utiliser des profils moyens vient des études de sensibilité montrant le faible impact de la dispersion des épaisseurs sur la variance des efforts.



**Figure 4.** Distribution du déplacement en tête de la plate-forme à trois dates.

On présente tout d'abord en figure 4 une représentation des densités de probabilités du déplacement en tête de la plate-forme à trois dates (installation, 10 ans, 33ans) en faisant l'hypothèse d'une plate-forme non colonisée à l'installation.

On observe une influence significative de l'épaisseur des bio-salissures sur la distribution du déplacement. Les probabilités de défaillance en déplacement sont présentées en figure 5 en fonction du déplacement critique. On remarque que ce critère est particulièrement sensible au choix du déplacement critique au moment de l'installation (queues de distribution moins étalées).

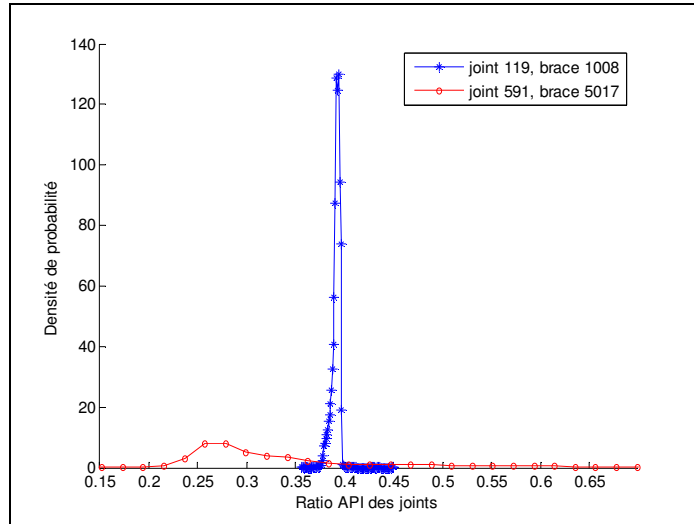


**Figure 5.** Probabilité de défaillance en déplacement en fonction du déplacement critique.

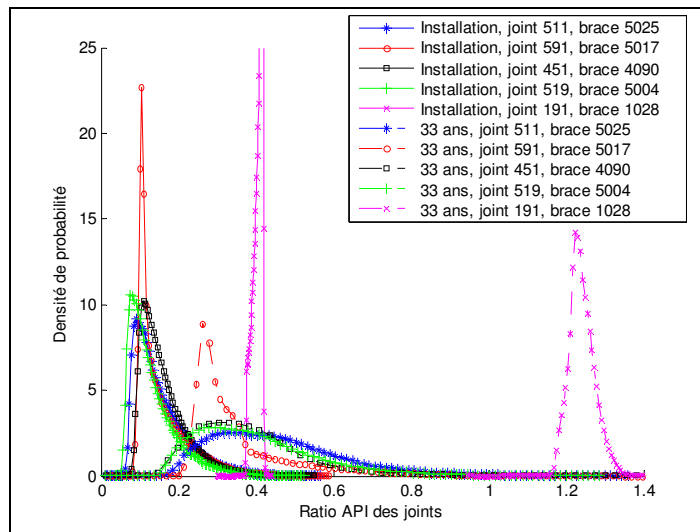
Avec l'approche semi-probabiliste, on a obtenu pour les déplacements : à l'installation : 0,083 m ; à 10 ans : 0,108 m ; à 33 ans : 0,172 m. Ils correspondent à des probabilités extrêmement faibles.

Observons maintenant les ratios API. On présente en figure 6 les distributions obtenues pour deux liaisons parmi les 10 plus critiques à l'installation. On remarque que l'allure des distributions diffère de manière importante. Ce résultat est conforté en figure 7 en observant les distributions à 0 et 33 ans pour 5 composants. On remarque que certains joints sont fortement affectés (191) alors que d'autres (591) sont moins sensibles. La sensibilité de la probabilité de défaillance au ratio critique (on rappelle que théoriquement, il vaut 1) visualise de phénomène de manière différente comme présenté en figure 8. Pour une probabilité de défaillance de  $10^{-3}$ , la valeur seuil du ratio API est d'environ 0.5 à l'installation, 0.7 à 10 ans et d'environ 1.2 à 33 ans.



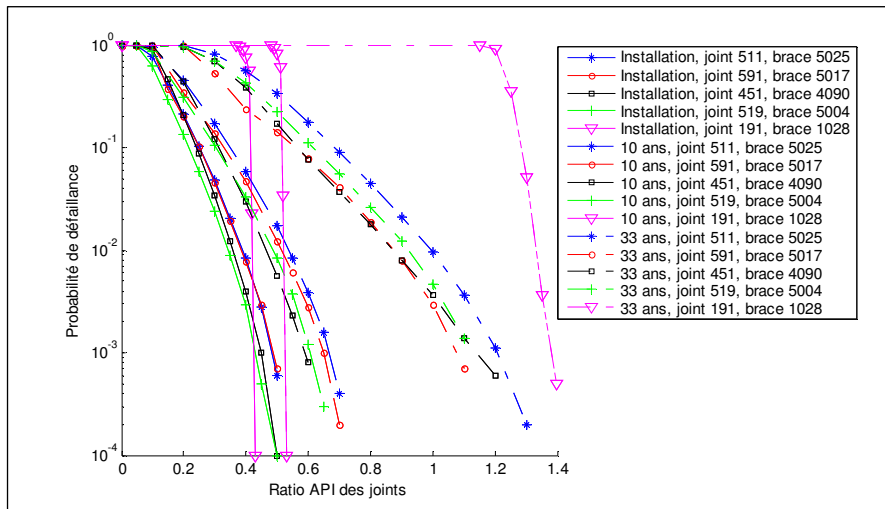


**Figure 6.** Distribution des ratios API pour deux liaisons parmi les plus critiques à l'installation.

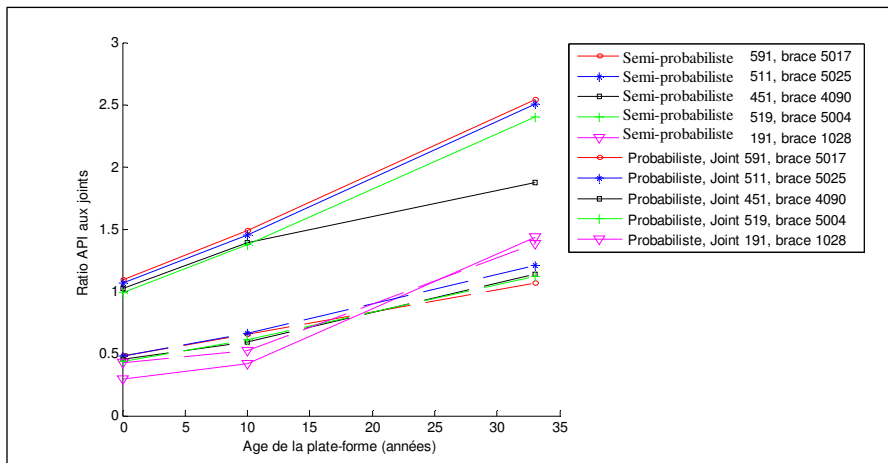


**Figure 7.** Distribution des ratios API pour cinq liaisons parmi les plus critiques à 0 et 33 ans.

Enfin, en figure 9, on compare les ratios critiques à la probabilité de dépassement de  $10^{-3}$  et les ratios obtenus par l'approche semi-probabiliste. On observe que les effets et la hiérarchie sont fortement modifiés par les deux approches.



**Figure 8.** Probabilité de défaillance en ratio API en fonction du ratio critique.



**Figure 9.** Comparaison des approches probabilistes et semi-probabilistes.

#### 4. Conclusion

Cet article vise à comparer une approche simplifiée semi probabiliste basée sur le calcul des valeurs nominales à partir du IFORM avec un calcul éléments finis stochastiques direct. Après un rappel du IFORM, une discussion sur la convergence et l'analyse des résultats bruts, la comparaison avec l'approche semi-probabiliste révèle que pour la fiabilité composant, les chargements obtenus par l'approche semi-probabiliste peuvent conduire à des résultats très conservatifs.

L'article se conclut par une analyse de l'évolution de la fiabilité composant en fonction du temps lorsque l'épaisseur d'accrétions marines (dites bio-salissures) augmente sur la structure. On remarque que la hiérarchie des composants les plus critiques dépend fortement de la méthode de calcul utilisée.

#### 5. Bibliographie

- Bhattacharya B., Wang S., Basu, R., Ma K.T., Menon B., «Reliability-based combination of environmental parameters for the design of novel floating structures», *Proceedings of 18th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE99)*, paper 99-6019, St John's, New Foundland, Canada, July 11-16, 1999.
- Boukinda M., «Surface de réponse des efforts de houle des structures jackets colonisées par des bio-salissures», *Thèse de doctorat*, Université de Nantes, 2007
- Boukinda M., Schoefs F., Quiniou V., Birades M., «Marine Growth Colonisation Process in Guinea Gulf: data analysis», *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering (Publication of the American Society of Mechanical Engineers)*, Volume 129, Issue 2, pp. 97-106 (2007) doi:10.1115/1.2355518
- Boukinda M., Schoefs F., Birades M., Garretta R., Quiniou V., «Probabilistic modelling of wave loading on Jackets in presence of marine growth: specificities of the Gulf of Guinea», *Proc. of 27th int. conf. on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, (O.M.A.E'08)*, 15-20 june 2008, Estoril, Portugal , paper 57426, 8 pages, proc. On CD-Rom (ASME 2008).
- François M., Quiniou V., «Multi-variate I-FORM contours for the design of offshore structures (Practical methodology and application to a West Africa FPSO)», *Proceedings of the Sixteenth (2007) International Offshore and Polar Engineering Conference*, Lisbon, Portugal, July 1-6, 2007, pp. 59-68.
- Nerzic R., Frelin C., Prevosto M., Quiniou-Ramus V., «Joint distributions of Wind/Waves/Current in West Africa and derivation of multivariate extreme I-FORM contours», *Proceedings of the Sixteenth (2007) International Offshore and Polar Engineering Conference*, Lisbon, Portugal, July 1-6, 2007, pp. 36-42.

Puig B., Poirion F., Soize C. «Non-gaussian simulation using hermite polynomial expansion: convergences», *Probabilistic Engineering Mechanics*, 17:253 à 264, 2002.

Recent Breakthroughs in the Analysis of Total E&P Angola Block 17 Wind / Wave / Current Records and their Impact on Floating Structures Design

Quiniou-Ramus V., Hoche M.A., François M., «Recent Breakthroughs in the Analysis of Total E&P Angola Block 17 Wind / Wave / Current Records and their Impact on Floating Structures Design», *Proceedings of Deep Offshore Technology Conf.*, Marseilles, France / 2003

Winterstein, S. R., Ude, T. C., Cornell, C. A., Bjerager, P., Haver, S., «Environmental parameters for extreme response: Inverse FORM with omission factors», *Proceedings ICOSAR93*, Innsbruck, Austria, 1993.

## PROGRAMME GENERAL

	26-mars Louis Pasteur	27-mars Louis Pasteur	28-mars Louis Pasteur
	Amphi		
08:30	Accueil	Accueil	
08:45			Session TS4-A
09:00	Ouverture	COURS 6	Discussion
09:15	COURS 1		Pause
09:30			
09:45			
10:00			
10:15		Discussion	Session TS4-B
10:30	Discussion	Pause	
10:45	Pause		
11:00		COURS 7	Discussion
11:15	COURS 2		COURS 11
11:30		Discussion	
11:45			
12:00	COURS 3		
12:15		Session TS2-A	
12:30	Discussion		Discussion
12:45	Déjeuner	Discussion	Déjeuner
13:00		Déjeuner	
13:15			
13:30			
13:45			
14:00			
14:15			
14:30	Session TS1-A	Session TS2-B	
14:45			
15:00			
15:15			
15:30	Discussion	Discussion	
15:45	COURS 4	COURS 8	
16:00			
16:15			
16:30	Discussion	Discussion	
16:45	Pause	Pause	
17:00	COURS 5	COURS 9	
17:15			
17:30			
17:45	Discussion	Discussion	
18:00		COURS 10	
18:15	Session TS1-B	Discussion	
18:30		Session TS3	
18:45	Discussion		
19:00		Discussion	
19:15			
19:30			
19:45		Dîner de Gala	
20:00			