

MANUALI HOEPLI

Ing. Dr. G. SANBRINELLI

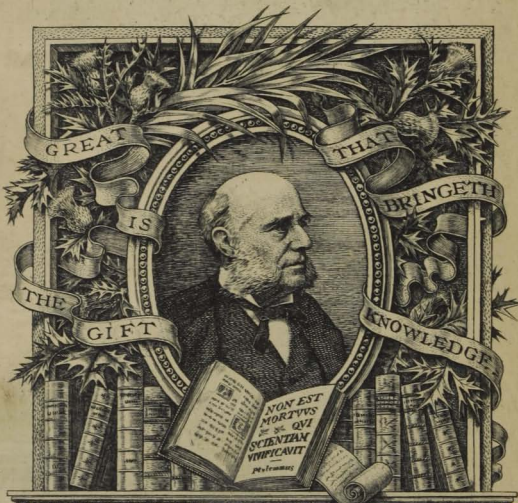
RESISTENZA DEI MATERIALI
E
STABILITÀ DELLE COSTRUZIONI

Edizione completamente rinnovata del Manuale di
PIETRO GALLIZIA

A technical drawing of a truss structure, likely a bridge or a large roof, shown in perspective. The drawing is a line drawing with cross-hatching for shading, depicting a complex network of beams and supports. It occupies the lower half of the cover.

ULRICO HOEPLI

EDITORE - LIBRAIO DELLA REAL CASA
MILANO



THE JOHN CRERAR
LIBRARY CHICAGO.

1894

Ed. Francis Jr. 1896



MANUALI HOEPLI



Ing. D.^r GUIDO SANDRINELLI



RESISTENZA DEI MATERIALI

E

STABILITÀ DELLE COSTRUZIONI

AD USO DEGLI

INGEGNERI, CAPOMASTRI, COSTRUTTORI, ecc.



Con 269 incisioni.



EDIZIONE COMPLETAMENTE RINNOVATA DEL MANUALE
DEL DEFUNTO
PIETRO GALLIZIA



ULRICO HOEPLI

EDITORE LIBRAIO DELLA REAL CASA

MILANO

1905

Hay

PROPRIETÀ LETTERARIA

Stab. Tipografico Marino Bellinzaghi
Milano, Corso Porta Nuova, 26

ALLA
INTEMERATA MEMORIA
DEI MIEI GENITORI
QUEST' UMILE LAVORO
CONSACRO

620.1 . 152283
Q406

PREFAZIONE

Accingendoci alla compilazione di questo Manuale — rinnovazione di quello del defunto Pietro Gallizia — il nostro primo pensiero di deferente gratitudine, si volge a quel gigante nel campo della scienza che fu il compianto ingegnere Alberto Castigliano, il quale tanto impulso e tanta luce di genialità infuse in questi studi, divinando e dimostrando rigorosamente il principio fondamentale e suoi corollarî, sui quali si fonda l'esatta teoria completa dei sistemi elastici, che permettano di risolvere tutte le questioni sull'equilibrio degli stessi, senza introdurre alcuna ipotesi restrittiva.

Dietro tanto lume uno stuolo di scienziati — quali il Betti, il Beltrami, il Cerruti, il Somigliana, il Marcolongo, il Poincaré, il Crotti, il Jorini, lo Sciolette, il Föppl, il Müller-Breslau — il quale ultimo volle dedicato al Castigliano il suo nuovo aureo trattato " Die neueren Methoden der Festigkeitslehre", — ha dato un largo incremento alla teoria dell'elasticità e quindi alla sua applicazione alla Resistenza dei Materiali; cosicchè la presente edizione, può considerarsi un rinnovamento del Manuale del Gallizia, tanto per l'indirizzo quanto per le risultanze.

Nello spazio di 12 anni — che tanti ne sono decorsi dalla prima alla presente edizione — si è avuto largo campo di nuove applicazioni della teoria del Castigliano, ultime quelle relative alle costruzioni in calcestruzzo armato — di cui il presente Manuale non

tratta essendovi già lo speciale su tale argomento (*) — perchè è carattere precipuo della scienza di arricchirsi di sempre nuovi elementi derivati da una più esatta comprensione dei principi fondamentali.

Inoltre in questo Manuale sono toccati e svolti argomenti che mancavano affatto in quello del Gallizia, come la stabilità dei muri in generale, dei muri di sostegno delle terre e delle acque, formole empiriche, stabilità delle pile metalliche, un metodo speditivo per risolvere il sistema di equazioni a cui conduce il teorema dei 3 momenti, il metodo per determinare gli sforzi e la freccia di flessione nei ponti a travate, tenendo conto dell'effettiva distribuzione dei carichi concentrati discontinui e della sezione variabile della trave; e fu ridotto a proporzioni più sobrie ed in parte soppresso quanto aveva carattere personale e non rigorosamente scientifico e pratico.

Abbiamo seguito la massima di ricorrere alle trattazioni originali dei vari argomenti, in modo che questa edizione è affatto nuova anche negli argomenti che si sono conservati della prima edizione; ed anche quelli completamente svolti dal Gallizia sono stati rilevati dalle sue Memorie pubblicate in Periodici, od in manoscritti inediti ceduti dal figlio del detto defunto Gallizia all'editore Hoepli per la compilazione di questa edizione.

Per quanto ci fu possibile abbiamo cercato di coordinare le notazioni, specialmente quelle più frequenti, delle quali abbiamo dato il riassunto in principio del Manuale.

Anche le tabelle, i prospetti — veramente utili nella pratica — e le figure sono state rinnovate e notevolmente arricchite come si può vedere dal relativo riassunto; oltre al quale abbiamo aggiunto l'indice alfabetico.

È ovvio a questo punto osservare, come noi ci siamo limitati alla risoluzione puramente analitica dei vari problemi perchè è intenzione dell'illustre ed infaticabile Editore, che tante benemerenze ha nelle pubblicazioni scientifiche, di dare alla luce prossimamente un apposito Manuale per la Statica Grafica.

— —

(*) Ing. G. Vacchelli — *Le costruzioni in Calcestruzzo ed in cemento armato* (Manuali Hoepli).

Ci conforta pertanto la lusinga d'aver fatto, nel limite delle nostre forze, tutto il possibile affinché l'opera riescisse omogenea, equilibrata e rispondente all'intento che dovrebbe essere quello di formare una breve guida teorico-pratica specialmente utile agli ingegneri; come per qualche argomento elementare ai capomastri.

L'accoglienza dei Colleghi e del Pubblico ci dirà se ci siamo ingannati nella nostra aspettazione.

G. SANDRINELLI
ingegnere.

Milano, Luglio 1904.

INDICE DELLE MATERIE

NB. Si raccomanda di consultare l'Indice alfabetico ed il Riassunto delle tabelle.

CAPITOLO PRIMO

Riassunto di nozioni preliminari.

	Pag.
1. — Funzioni speciali (logaritmi e funzioni iperboliche)	30
2. — Baricentri, momenti statici e momenti d'inerzia	33
3. — Figure piane	36
4. — Valori di Ω , G , I , per alcune figure	39

CAPITOLO II.

Elasticità; definizioni, risultati d'esperienza. Teoremi delle derivate e del minimo lavoro. Lavoro di deformazione. Espressioni del lavoro di deformazione.

1. — Elasticità: sforzo normale, sforzo di taglio, momento di torsione, momento flettente; reazioni molecolari, legge di Hooke, moduli di elasticità; carichi al limite di elasticità, di sicurezza e di rottura	61
2. — I teoremi del Castigliano delle derivate e del minimo lavoro di deformazione; espressione generale del lavoro di deformazione, e del coefficiente numerico A : valori particolari di A per alcune figure	77
3. — Espressioni in termini finiti del lavoro di deformazione di alcuni solidi	82

CAPITOLO III.

Torsione semplice. Pressione o tensione semplici. Solidi caricati in punta.

1. — Torsione	85
2. — Pressione o tensione; solido pieno e torre cava di ugual resi-	

	Pag.
stenza alla pressione; distribuzione delle pressioni trasmesse da un prisma elastico ad un fondo compressibile; resistenza dei fili metallici	87
3. — Solidi caricati in punta	91

CAPITOLO IV.

Resistenza composta. Flessione, pressione o tensione e taglio. Pressione e tensioni eccentriche. Flessione e torsione.

1. — Flessione, pressione o tensione e taglio; forze elastiche unitarie normale e tangenziali, asse neutro; valori dei coefficienti A_1 , A_2 , B_1 , B_2 ; caso di più frequente applicazione pratica; formole pel calcolo delle travi a traliccio; tensione o pressione e taglio; relazione fra il momento di flessione e lo sforzo di taglio; linea elastica; momento resistente; incastramento	95
2. — Tensione o pressione eccentriche, asta verticale incastrata in un'estremità, sottoposta ad un peso assiale e ad una forza orizzontale all'estremità libera	105
3. — Flessione e torsione: caso d'un albero motore o di trasmissione	108

CAPITOLO V.

Dimensioni usuali delle travi in legno. Peso proprio e sovracarichi di alcune costruzioni.

1. — Dimensioni delle travi in legno	110
2. — Peso proprio e sovracarico dei solai	111
3. — Peso proprio e sovracarico delle coperture, pressione del vento e della neve	112
4. — Peso proprio e sovracarico dei ponti; ragguagliamento dell'effetto d'un carico concentrato a quello d'un carico uniformemente ripartito (carico virtuale uniforme); sovracarichi accidentali tipici, relativi regolamenti e riassunto di quello che si segue negli uffici tecnici delle Ferrovie italiane, tabelle dei carichi uniformi virtuali; peso proprio dei ponti per strade ordinarie e per strade ferrate, e delle travi a traliccio (formola del Bresse); carico di sicurezza per ferri ed acciai, sollecitazioni statiche e dinamiche	114

CAPITOLO VI.

Sovrapposizione degli effetti. Variazione di temperatura. Sezione pericolosa per un sistema di carichi concentrati, e posizione più sfavorevole, sopra una trave, di un sistema mobile di carichi concentrati.

1. — Sovrapposizione degli effetti	131
2. — Variazioni di temperatura	134

	Pag.
3. — Sezione pericolosa in una trave su due appoggi, soggetta ad un sistema fisso di carichi isolati, e ad un peso uniformemente ripartito sulla portata	138
4. — Posizione più sfavorevole di un sistema di carichi mobili su di una travata	140

CAPITOLO VII.

Travi rettilinee e orizzontali.

Espressioni dei momenti inflettenti, degli sforzi di taglio e delle frecce di flessione ed equazioni delle linee elastiche.

1. — Trave orizzontale incastrata ad una estremità e libera all'altra	143
2. — Trave orizzontale appoggiata in ambedue le estremità. Sezioni da adottarsi per ottenere la massima resistenza alla flessione; tipi normali dei ferri laminati (Walzeisen) adottati in Germania; rapporto di buon impiego; ferri della Società degli Alti Forni, Fonderie e Acciaierie di Terni e lamiere ondulate	148
3. — Trave orizzontale incastrata per un'estremità, appoggiata all'altra	188
4. — Trave orizzontale incastrata in ambedue le estremità	190
5. — Trave incastrata per un'estremità ed appoggiata in un suo punto intermedio	192
6. — Trave orizzontale su due appoggi equidistanti dalle sue estremità	193
7. — Peso che possono sopportare le travi orizzontali a sezione rettangolare, e sezioni da darsi alle medesime	195
8. — Trave orizzontale continua appoggiata su più punti; equazione dei tre momenti	196
9. — Altre maniere di carico	201
10. — Trave continua su più appoggi fissi o compressibili, teorema dei tre momenti	232
11. — Freccia d'inflessione di una trave, a sezione simmetricamente variabile rispetto alla sua mezzeria, posta su due appoggi, e dovuta ad un carico completo uniformemente ripartito	239
12. — Travata di una trave continua o di una trave ad un'unica campata a sezione costante oppure variabile comunque o simmetricamente rispetto alla sua mezzeria, su due appoggi, sollecitata da un numero qualunque di carichi concentrati in diversi punti	241
14. — Risoluzione del sistema di equazioni a cui conduce il teorema dei tre momenti	250

CAPITOLO VII.

Ponti a travi continue.

1. — Metodo di calcolo e ripartizione delle travate	253
2. — Determinazione dell'equazione dei tre momenti	253

	Pag.
3. — Disposizione più sfavorevole del sopraccarico; sforzi di taglio; momenti di flessione, punti fissi V ed U e loro distanze C e C_1 dagli appoggi	255
4. — Valori dei momenti inflettenti, degli sforzi di taglio e delle reazioni degli appoggi per travi continue da due a tre travate, secondo i rapporti migliori della lunghezza delle travate estreme e delle intermedie	261
5. — Valori delle reazioni e dei momenti inflettenti sugli appoggi per travi continue a quattro e a cinque travate tutte uguali tra loro	272

CAPITOLO IX.

Travi sostenute e travi armate. Incavallature.

1. Trave incastrata per un'estremità, libera all'altra, sostenuta da una saetta o da un tirante	273
2. — Trave incastrata per un'estremità appoggiata all'altra e sostenuta, dalla parte dell'incastro, da una saetta o da un tirante	282
3. — Trave incastrata per un'estremità, appoggiata all'altra e sostenuta dalla parte dell'appoggio da una saetta o da un tirante	237
4. — Trave incastrata in ambedue le estremità e sostenuta da due saette o da due tiranti ad angoli eguali	289
5. — Trave appoggiata in ambedue le estremità ed armata con due tiranti ed una saetta, sottoposta ad un carico uniformemente ripartito in ragione di q unità di peso per unità di lunghezza della trave	294
6. — Trave appoggiata in ambedue le estremità, armata con tre tiranti e due saette e sottoposta a carico completo uniformemente ripartito	296
7. — Cavalletto semplice — formato da due puntoni, trattenuti senz'incastro nel vertice dell'incavallatura, e da una catena — caricato di un peso uniformemente ripartito in ragione di q unità di peso per unità di lunghezza del puntone misurata orizzontalmente	298
8. — Puntone inclinato appoggiato con un'estremità contro un piano verticale e col'altra sopra un piano orizzontale	304
9. — Incavallatura Polonceau semplice	304
10. — Metodo generale per determinare le tensioni dei tiranti in un'incavallatura a puntoni retti o curvi con un numero qualunque di tiranti simmetrici rispetto al mezzo dell'incavallatura. Esempio	307

CAPITOLO X.

Metodo del Ritter per il calcolo delle travi reticolate. Chiodature dei ponti metallici.

1. — Principio fondamentale, regola ed equazione dei momenti statici	314
--	-----

	Pag.
2. — Applicazione ad un sistema articolato; membrature delle travi paraboliche e rettilinee	315
3. — Formole pel calcolo delle travi paraboliche reticolate	317
4. — Formole pel calcolo delle travi rettilinee reticolate (<i>Travi Mohnic</i>)	321
5. — Travi a traliccio dissimetrico composto con diagonali tese e compresse. Esempio: trave reticolata parabolica; trave reticolata rettilinea	325
6. — Chiodature nei ponti metallici	330

CAPITOLO XI.

Travi a carico comune.

1. — A) Sistema di due travi incastrate in un'estremità e libere all'altra	335
B) Sistema di due travi appoggiate in ambedue le estremità	338
C) Sistema di due travi entrambe incastrate in un'estremità ed appoggiate all'altra	340
D) Sistema di due travi l'una e l'altra incastrata in ambedue le estremità	342
E) Sistema di tre travi eguali e formate dello stesso materiale, appoggiate ai vertici d'un esagono regolare, sostenente un peso concentrato P nel loro punto di sovrapposizione nel mezzo	344

CAPITOLO XII.

Stabilità delle costruzioni in terra ed in muratura.

1. — Resistenza dei muri	345
2. — Spinta delle terre: teoria del prisma di massima spinta; teoria di Bous-inesq; altra nuova teoria (del terrapieno illimitato)	352
3. — Notazioni ed ipotesi generali pel calcolo dei muri di sostegno	367
5. — Muro teorico di spessore $s_1 = 0$, colla parete interna verticale e colla parete esterna a scarpa	269
6. — Muro colla parete interna inclinata dalla parte opposta al terrapieno rispetto alla verticale passante pel piede, e colla base orizzontale	370
7. — Muro a strapiombo verso il terrapieno, colla parete interna che si eleva fino alla superficie dello stesso	372
8. — Muro a strapiombo verso il terrapieno essendo la faccia superiore del muro coperta dal terrapieno	375
9. — Muri con contrafforti	380
10. — Generalità sulle fondazioni dei muri sostegno delle terre	381
11. — Muri di sostegno delle acque	382
12. — Formole empiriche sugli spessori dei muri	387

CAPITOLO XIII.

Tubi circolari. Caldaie a vapore. Archi e vólte a botte circolari. Anelli. Rulli. Archi molto ribassati. Archi di forma qualunque. Piedritti.

	Pag.
1. — Tubi circolari	392
2. — Caldaie a vapore: fondo delle caldaie e dei serbatoi; chiodature	395
3. — Archi e vólte a botte circolari	401
4. — Archi su rulli ed archi incastrati soggetti a carichi concentrati simmetrici rispetto alla chiave	420
5. — Anelli. Rulli	423
6. — Archi molto ribassati	426
7. — Archi di forma qualunque. Es. Verifica della stabilità della vólta del ponte sull'Oglio presso Chiari	429
8. — Stabilità dei piedritti (spalle e pile in muratura)	439
9. — Pile metalliche: loro classificazione e sollecitazioni esterne, loro peso proprio; calcoli di stabilità	441
10. — Formole empiriche per calcolare gli spessori delle vólte a botte in muratura, dei piedritti e delle pile	452

RIASSUNTO DELLE TABELLE

	Pag.
I. Quadrati, cubi, ecc.	1 ÷ 21
II. Funzioni trigonometriche	22 ÷ 25
III. Pesi d'un m ³ di diverse sostanze	26 ÷ 29
IV. Logaritmi iperbolici	31
V. Aree e momenti d'inerzia del circolo	53 ÷ 54
VI. Aree e momenti statici e d'inerzia del settore circolare	54 ÷ 57
V. } Moduli di elasticità, coefficienti di resistenza e ca-	
e } richi al limite d'elasticità di diversi ma-	
VI. } teriali	68 ÷ 70
VII. Carichi di rottura per alcune pietre e malte	72 ÷ 74
VIII. } Carichi di rottura pei cementi e calci idrauliche	75 ÷ 76
IX. }	
X. Dei solidi a sezione rettangolare	86
XI. Altezze limiti a cui un corpo si schiaccia	87
XII. Resistenza dei fili metallici	91
XIII. }	
XIV. } Solidi caricati di punta	92 ÷ 94
XV. }	
XVI. }	
XVII. Velocità e pressione del vento	112
XVIII. Numero dei pezzi e peso dei materiali di coperta	114
XIX. }	
XX. } Pesi uniformi virtuali che si possono adottare invece	
XXI. } dei treni tipi nei manufatti delle Ferrovie ita-	
XXII. } liane	120 ÷ 123
XXIII. Minimi e massimi dei pesi compless. dei ponti ferroviari	127
XXIV. }	
XXV. } Carichi di sicurezza per ferri ed acciai	129 ÷ 130
XXVI. }	
XXVII. } Sopracarichi che possono sopportare le travi oriz-	
XXVIII. } zontali con un'estremità libera	145 ÷ 147

	Pag.	
XXIX } XXX. } XXXI. } XXXII. }	Sopracarichi che possono sopportare le travi orizzontali appoggiate in ambedue le estremità	151 ÷ 159
XXXIII. } XXXIV. } XXXV. } XXXVI. } XXXVII. } XXXVIII. } XXXIX. }	Tipi normali tedeschi dei ferri laminati, loro dimensioni, area, peso per m. corr., distanza baricentrica, momenti d'inerzia e resistenti, rapporti di buon impiego, rapporto dei momenti resistenti principati centrali	163 : 177
XL. } XLII. }		180 ÷ 181
XLII. } XLIII. }	Carichi e frecce di flessione delle travi a C e a I , disposte orizzontalmente e appoggiate sulle estremità	182 ÷ 183
XLIV. } XLV. }	Ferri delle acciaierie di Terni, loro dimensioni, area, peso per m. corr., momento resistente, freccia di flessione, e carico che possono sopportare	184 ÷ 187
XLVIII. } XLIX. }	Lamiere ondulate, loro dimensioni, peso al m. corr., momento resistente e carico che possono sopportare	187
XLIX. }	Coefficienti del secondo membro dell'equazione dei tre momenti	254 ÷ 255
LI. } LII. }	Valori delle qualità μ , ν e C (pag. 257) che determinano i punti fissi V , U di una travata d'una trave continua	260 ÷ 261
LIII. } LIV. } LV. } LVI. } LVII. }	Momenti flettenti e forzi di taglio per travi continue da due a tre travate, dovuti al carico permanente K ed al sopracarico q uniformemente distribuiti al m. corr. di trave	262 ÷ 271
LVIII. }	Carico di sicurezza per le murature	351
LIX. }	Coefficiente d'attrito f della muratura sopra muratura e sopra terre	351
LX. }	Peso, angolo di natural declivio α , e coefficiente d'attrito $f = \text{tang } \alpha$ delle terre, sabbie e ghiaie	355
LXI. }	Spinta S delle terre secondo la teoria del prisma di massima spinta	
LXII. }	Valori del coefficiente numerico C e dell'angolo γ (pagina 357) corrispondenti ai capi di muro sorreggenti le terre a natural declivio — che servono per la determinazione della spinta S delle terre secondo la teoria del Boussinesq	361
LXIII. } CXIV. } LXV. } LXVI. } LXVII. }	Componenti normale S_n e tangenziale S_t della spinta S delle terre secondo la nuova teoria (pag. 362) del terrapieno illimitato	365 ÷ 366

	Pag.
LXVIII.	} Dimensioni dei muri di sostegno delle terre, loro volume e pressione massima unitaria sulla base 368
LXIX.	
LXX.	
LXXI.	
LXXII.	
LXXIII.	} Dimensioni dei muri di sostegno delle acque, loro volume, momenti flettenti, pressioni normali, distanze dei centri di pressione e pressioni mas- sime unitarie a serbatoio vuoto e carico . . . 368 ÷ 389
LXXIV.	
LXXV.	} Spessori delle lamiere delle caldaie 397
LXXVI.	
LXXVII.	} Elementi relativi ai calcoli di stabilità della vólta ad arco in muratura del ponte sull'Oglio presso Chiari (ferrovia Milano-Venezia) 432 : 448
LXXVIII.	
LXXIX.	
LXXX.	
LXXXI.	
LXXXII.	} Valori di coefficienti che entrano nelle formole em- piriche dei spessori delle vólte 455
LXXXIII.	

ABBREVIAZIONI. Valori di alcune costanti, notazioni metriche ed altre notazioni o simboli generalmente usati nel presente Manuale salvo dove è dichiarato diversamente. (I numeri entro parentesi indicano le pagine dove sono definiti i simboli; ai quali, quando è necessario, sono posti indici o apici).

m.	metro	m. ²	metro quadrato
dm.	decimetro	dm. ²	decimetro quadrato
cm.	centimetro	cm. ²	centimetro quadrato
mm.	millimetro	mm. ²	millimetro quadrato
m. ³	metro cubo	m. corr.	metro corr. o lineare
dm. ³	decimetro cubo		
cm. ³	centimetro cubo		
mm. ³	millimetro cubo		
g.	grammo	kg.	chilogramma
		q.	quintale
		t.	tonnellata
kgm.	chilogrammetro	HP	cavallo-vapore
		atm.	atmosfera.
$\pi = 3,1415926 \dots$	rapporto della circonferenza al diametro,		

$$\frac{1}{\pi} = 0,3183 \dots$$

$$\pi^2 = 9,86960 \dots$$

$$\sqrt{\pi} = 1,77245 \dots$$

$$\log \pi = 0,4971499$$

Lunghezza dell'arco di circonferenza di raggio = r corrispondente :
 all'angolo al centro di $1^0 = 0,017453293 \cdot r$
 " " " $1' = 0,000290888 \cdot r$
 " " " $1'' = 0,00000488 \cdot r$

Raggio della circonferenza in secondi (sessagesimali) $r = 206264'',8$
 " " " " minuti (") $r = 3437',7468$
 " " " " gradi (") $r = 57^0,29578 =$
 $r = 57^017'44'',8$

Lunghezza a dell'arco di circonferenza di raggio = r corrispondente ad un angolo al centro di α^0 e di α'' (gradi e secondi sessagesimali):

$$a = \frac{\pi}{180^0} \alpha^0 r = \frac{\alpha^0}{57^017'44'',8} r = \frac{\alpha''}{206264'',8} r$$

$e = 2,718281828459045 \dots$ base dei logaritmi iperbolici

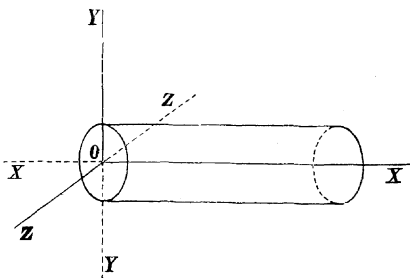
log_h logaritmo iperbolico

log " decimale

$$i = \sqrt{-1}$$

senh	seno iperbolico
cosh	coseno „
tangh	tangente iperbolica
cotgh	cotangente „
sen	seno circolare
cos	coseno „
tang	tangente „
cotg	cotangente „
g	acceleraz. della gravità = 9,81 (per Milano)
mass.	massimo
min.	minimo
∞	infinito
\parallel	parallelo
\perp	perpendicolare
\neq	diverso
$>$	maggiore di
$<$	minore di
\geq	maggiore od eguale
\leq	uguale o minore
\approx	maggiore o minore
\approx	maggiore o uguale o minore
\approx	approssimativamente, circa
\div	da.... a...
$\frac{0}{0}$	per cento
\sum	simbolo per indicare una somma di termini
Δ	seguito da una lettera, significa <i>variazione</i> della quantità rappresentata da tale lettera (per es. Δt variazione di temperatura, se t indica „ temperatura „)
∂	simbolo relativo a „ <i>derivazione parziale</i> „

I solidi che considereremo nella Resistenza dei materiali saranno, salvo



eccezioni, riferiti a tre assi coordinati OX , Y , Z ; generalmente si assumerà:

- l'asse delle x diretto secondo la lungh. del solido
 " " y " " l'altezza } della sez. normale del solido
 " " z " " la largh. }
- Ω area
 G momento statico
 I o i momento d'inerzia
 y o v distanza delle fibre più affaticate dall'asse neutro (97, 99)
 I_p momenti d'inerzia polare (36)
 $R \frac{I}{y} = R W$ momento resistente (vero) (185)
- Gli indici posti ai piedi delle lettere G, I, \dots designano l'asse rispetto al quale sono presi gli elementi che rappresentano.
- A coefficiente numerico che entra del lavoro di deformazione dovuto al taglio (80)
 L lavoro di deformazione (77, 80)
 M o \mathfrak{M} o m momento flettente (62, 103, 105)
 N o \mathfrak{N} o n sforzo normale (62, 103) e una tensione in generale
 T o \mathfrak{T} o t " di taglio (62, 103)
 M_t momento di torsione (62, 85)
 ε forza elastica normale relativa (unitaria) (62, 96)
 τ " tangenziale " (unitaria) (62, 96)
 E o " e modulo d'elasticità longitudinale (64÷65)
 E_t " " tangenziale o trasversale (65÷66)
 R o K carico di sicurezza o coefficiente di resistenza alla tensione od alla pressione (66) (*)
 R_t carico di sicurezza o coefficiente di resistenza alla torsione od al taglio (67)
 P forza o peso concentrato
 F " in generale
 v pressione unitaria del vento
 ll peso di 1 m.³ di materiale o peso per m. corr., come è indicato nei singoli posti
 q carico in unità di peso (kg.) uniformemente distribuito sopra ogni unità di lunghezza (m.)
 l portata d'una travata
 c corda d'un arco
 $\%$ ordinata della linea elastica (104)
 f freccia o saetta d'inflessione
 $\frac{1}{\sigma}$ coefficiente di dilatazione lineare (281)
 s_0 spessore d'un muro alla base o d'una vòlta in chiave
 s_t " " " " sommità
 s spessore d'un muro o d'una vòlta in una sezione qualunque

(*) Si adopera spesso la parola *tensione* in generale, per significare tanto una trazione (tensione positiva), quanto una pressione (tensione negativa).

Talvolta, e cioè dove è detto espressamente, R esprime *reazione d'un appoggio*.

- \cong spessore delle spalle e delle pile dei ponti
 h altezza d'un muro di sostegno delle terre
 i scarpa della parete interna d'un muro di sostegno per ogni m. d'altezza (370)
 $j = \frac{s_o - s_t}{h}$ aumento di grossezza d'un muro di sostegno per ogni m. d'altezza (370)
 $f = \text{tang } \alpha$ coefficiente d'attrito (347)
 α angolo d'attrito o di natural declivio delle terre (352)
 s spinta elementare delle terre (363)
 s_n " " normale delle terre (363)
 s_t " " tangenziale " "
 S_n " totale normale " "
 S_t " " tangenziale " "
 S " " delle terre (353) " "
 $\}$ distanza del centro di pressione in una sezione d'un muro, dall'asse di flessione (346)

TABELLA I.

Quadrato, cubo, radice quadrata e cubica, valore reciproco e logaritmo di un numero n fra 1 e 1000; circonf. e area del circolo di diam. n .

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log n$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
0	0	0	0,0000	0,0000	∞	$-\infty$	0,000	0,0000
1	1	1	1,0000	1,0000	1000,000	0,0000	3,142	0,7854
2	4	8	1,4142	1,2599	500,000	0,3010	6,283	3,1416
3	9	27	1,7321	1,4422	333,333	0,4771	9,425	7,0686
4	16	64	2,0000	1,5874	250,000	0,6021	12,57	12,566
5	25	125	2,2361	1,7100	200,000	0,6990	15,71	19,635
6	36	216	2,4495	1,8171	166,667	0,7782	18,85	28,274
7	49	343	2,6458	1,9129	142,857	0,8451	21,99	38,484
8	64	512	2,8284	2,0000	125,000	0,9031	25,13	50,265
9	81	729	3,0000	2,0801	111,111	0,9542	28,27	63,617
10	100	1000	3,1623	2,1544	100,000	1,0000	31,42	78,540
11	121	1331	3,3166	2,2240	90,9091	1,0414	34,56	95,033
12	144	1728	3,4641	2,2891	83,3333	1,0792	37,70	113,10
13	169	2197	3,6056	2,3513	76,9231	1,1139	40,84	132,73
14	196	2744	3,7417	2,4101	71,4286	1,1461	43,98	153,94
15	225	3375	3,8730	2,4662	66,6667	1,1761	47,12	176,71
16	256	4096	4,0000	2,5198	62,5000	1,2041	50,27	201,06
17	289	4913	4,1231	2,5713	58,8235	1,2304	53,41	226,98
18	324	5832	4,2426	2,6207	55,5556	1,2553	56,55	254,47
19	361	6859	4,3589	2,6684	52,6316	1,2788	59,69	283,53
20	400	8000	4,4721	2,7144	50,0000	1,3010	62,83	314,16
21	441	9261	4,5826	2,7589	47,6190	1,3222	65,97	346,36
22	484	10648	4,6904	2,8020	45,4545	1,3421	69,12	380,13
23	529	12167	4,7958	2,8439	43,4783	1,3617	72,26	415,48
24	576	13824	4,8990	2,8845	41,6667	1,3802	75,40	452,39
25	625	15625	5,0000	2,9240	40,0000	1,3979	78,54	490,87
26	676	17576	5,0990	2,9625	38,4615	1,4150	81,68	530,93
27	729	19683	5,1962	3,0000	37,0370	1,4314	84,82	572,56
28	784	21952	5,2915	3,0366	35,7143	1,4472	87,96	615,75
29	841	24389	5,3852	3,0723	34,4828	1,4624	91,11	660,52
30	900	27000	5,4772	3,1072	33,3333	1,4771	94,25	706,86
31	961	29791	5,5678	3,1414	32,2581	1,4914	97,39	754,77
32	1024	32768	5,6569	3,1748	31,2500	1,5051	100,5	804,25
33	1089	35937	5,7446	3,2075	30,3030	1,5185	103,7	855,30
34	1156	39304	5,8310	3,2396	29,4118	1,5315	106,8	907,92
35	1225	42875	5,9161	3,2711	28,5714	1,5441	110,0	962,11
36	1296	46656	6,0000	3,3019	27,7778	1,5563	113,1	1017,9
37	1369	50653	6,0828	3,3322	27,0270	1,5682	116,2	1075,4
38	1444	54872	6,1644	3,3620	26,3158	1,5798	119,4	1134,1
39	1521	59319	6,2450	3,3912	25,6410	1,5911	122,5	1194,6
40	1600	64000	6,3246	3,4200	25,0000	1,6021	125,7	1256,6

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log n$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
41	1681	68921	6,4031	3,4482	24,3902	1,6128	128,8	1320,3
42	1764	74088	6,4807	3,4760	23,8095	1,6232	131,9	1385,4
43	1849	79507	6,5574	3,5034	23,2558	1,6335	135,1	1452,2
44	1936	85184	6,6332	3,5303	22,7273	1,6435	138,2	1520,5
45	2025	91125	6,7082	3,5569	22,2222	1,6532	141,4	1590,4
46	2116	97336	6,7823	3,5830	21,7391	1,6628	144,5	1661,9
47	2209	103823	6,8557	3,6088	21,2766	1,6721	147,7	1734,9
48	2304	110592	6,9282	3,6342	20,8333	1,6812	150,8	1809,6
49	2401	117649	7,0000	3,6593	20,4082	1,6902	153,9	1885,7
50	2500	125000	7,0711	3,6840	20,0000	1,6990	157,1	1963,5
51	2601	132651	7,1414	3,7084	19,6078	1,7076	160,2	2042,8
52	2704	140608	7,2111	3,7325	19,2308	1,7160	163,4	2123,7
53	2809	148877	7,2801	3,7563	18,8679	1,7243	166,5	2206,2
54	2916	157464	7,3485	3,7798	18,5185	1,7324	169,6	2290,2
55	3025	166375	7,4162	3,8030	18,1818	1,7404	172,8	2375,8
56	3136	175616	7,4833	3,8259	17,8571	1,7482	175,9	2463,0
57	3249	185193	7,5498	3,8485	17,5439	1,7559	179,1	2551,8
58	3364	195112	7,6158	3,8709	17,2414	1,7634	182,2	2642,1
59	3481	205379	7,6811	3,8930	16,9492	1,7709	185,4	2734,0
60	3600	216000	7,7460	3,9149	16,6667	1,7782	188,5	2827,4
61	3721	226981	7,8102	3,9365	16,3934	1,7853	191,6	2922,5
62	3844	238328	7,8740	3,9579	16,1290	1,7924	194,8	3019,1
63	3969	250047	7,9373	3,9791	15,8730	1,7993	197,9	3117,2
64	4096	262144	8,0000	4,0000	15,6250	1,8062	201,1	3217,0
65	4225	274625	8,0623	4,0207	15,3846	1,8129	204,2	3318,3
66	4356	287496	8,1240	4,0412	15,1515	1,8195	207,3	3421,2
67	4489	300763	8,1854	4,0615	14,9254	1,8261	210,5	3525,7
68	4624	314432	8,2462	4,0817	14,7059	1,8325	213,6	3631,7
69	4761	328509	8,3066	4,1016	14,4928	1,8388	216,8	3739,3
70	4900	343000	8,3666	4,1213	14,2857	1,8451	219,9	3848,5
71	5041	357911	8,4261	4,1408	14,0845	1,8513	223,1	3959,2
72	5184	373248	8,4853	4,1602	13,8889	1,8573	226,2	4071,5
73	5329	389017	8,5440	4,1793	13,6986	1,8633	229,3	4185,4
74	5476	405224	8,6033	4,1983	13,5135	1,8692	232,5	4300,8
75	5625	421875	8,6603	4,2172	13,3333	1,8751	235,6	4417,9
76	5776	438976	8,7178	4,2358	13,1579	1,8808	238,8	4536,5
77	5929	456533	8,7750	4,2543	12,9870	1,8865	241,9	4656,6
78	6084	474552	8,8318	4,2727	12,8205	1,8921	245,0	4778,4
79	6241	493039	8,8882	4,2908	12,6582	1,8976	248,2	4901,7
80	6400	512000	8,9443	4,3089	12,5000	1,9031	251,3	5026,5
81	6561	531441	9,0000	4,3267	12,3457	1,9085	254,5	5153,0
82	6724	551368	9,0554	4,3445	12,1951	1,9138	257,6	5281,0
83	6889	571787	9,1104	4,3621	12,0482	1,9191	260,8	5410,6
84	7056	592704	9,1652	4,3795	11,9048	1,9243	263,9	5541,8
85	7225	614125	9,2195	4,3968	11,7647	1,9294	267,0	5674,5
86	7396	636056	9,2736	4,4140	11,6270	1,9345	270,2	5808,8
87	7569	658503	9,3274	4,4310	11,4943	1,9395	273,3	5944,7
88	7744	681472	9,3808	4,4480	11,3636	1,9445	276,5	6082,1
89	7921	704969	9,4340	4,4647	11,2360	1,9494	279,6	6221,1

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log n$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
90	8100	729000	9,4868	4,4814	11,1111	1,9542	282,7	6361,7
91	8281	753571	9,5394	4,4979	10,9890	1,9590	285,9	6503,9
92	8464	778688	9,5917	4,5144	10,8496	1,9638	289,0	6647,6
93	8649	804357	9,6437	4,5307	10,7527	1,9685	292,2	6792,9
94	8836	830584	9,6954	4,5468	10,6383	1,9731	295,3	6939,8
95	9025	857375	9,7468	4,5629	10,5263	1,9777	298,5	7088,2
96	9216	884736	9,7980	4,5789	10,4167	1,9823	301,6	7238,2
97	9409	912673	9,8489	4,5947	10,3093	1,9868	304,7	7389,8
98	9604	941192	9,8995	4,6104	10,2041	1,9912	307,9	7543,0
99	9801	970299	9,9499	4,6261	10,1010	1,9956	311,0	7697,7
100	10000	1000000	10,0000	4,6416	10,0000	2,0000	314,2	7854,0
101	10201	1030301	10,0499	4,6570	9,90090	2,0013	317,3	8011,8
102	10404	1061208	10,0995	4,6723	9,80392	2,0026	320,4	8171,3
103	10609	1092727	10,1489	4,6875	9,70874	2,0028	323,6	8332,3
104	10816	1124864	10,1980	4,7027	9,61538	2,00170	326,7	8494,9
105	11025	1157625	10,2470	4,7177	9,52381	2,0212	329,9	8659,0
106	11236	1191016	10,2956	4,7326	9,43396	2,0253	333,0	8824,7
107	11449	1225043	10,3441	4,7475	9,34579	2,0294	336,2	8992,0
108	11664	1259712	10,3923	4,7622	9,25926	2,0334	339,3	9160,9
109	11881	1295029	10,4403	4,7769	9,17431	2,0374	342,4	9331,3
110	12100	1331000	10,4881	4,7914	9,09091	2,0414	345,6	9503,3
111	12321	1367631	10,5357	4,8059	9,00901	2,0453	348,7	9676,9
112	12544	1404928	10,5830	4,8203	8,92857	2,0492	351,9	9852,0
113	12769	1442897	10,6301	4,8346	8,84956	2,0531	355,0	10029
114	12996	1481544	10,6771	4,8488	8,77193	2,0569	358,1	10207
115	13225	1520875	10,7238	4,8629	8,69565	2,0607	361,3	10387
116	13456	1560896	10,7703	4,8770	8,62069	2,0645	364,4	10568
117	13689	1601613	10,8167	4,8910	8,54701	2,0682	367,6	10751
118	13924	1643032	10,8628	4,9049	8,47458	2,0719	370,7	10936
119	14161	1685159	10,9087	4,9187	8,40336	2,0755	373,8	11122
120	14400	1728000	10,9545	4,9324	8,33333	2,0792	377,0	11310
121	14641	1771561	11,0000	4,9461	8,26446	2,0828	380,1	11499
122	14884	1815848	11,0454	4,9597	8,19672	2,0864	383,3	11690
123	15129	1860867	11,0905	4,9732	8,13008	2,0899	386,4	11882
124	15376	1906624	11,1355	4,9866	8,06452	2,0934	389,6	12076
125	15625	1953125	11,1803	5,0000	8,00000	2,0969	392,7	12272
126	15876	2000376	11,2250	5,0133	7,93651	2,1004	395,8	12469
127	16129	2048383	11,2694	5,0265	7,87402	2,1038	399,0	12668
128	16384	2097152	11,3137	5,0397	7,81250	2,1072	402,1	12868
129	16641	2146689	11,3578	5,0528	7,75194	2,1106	405,3	13070
130	16900	2197000	11,4018	5,0658	7,69231	2,1139	408,4	13273
131	17161	2248091	11,4455	5,0788	7,63359	2,1173	411,5	13478
132	17424	2299968	11,4891	5,0916	7,57576	2,1206	414,7	13685
133	17689	2352637	11,5326	5,1045	7,51880	2,1239	417,8	13893
134	17956	2406104	11,5758	5,1172	7,46269	2,1271	421,0	14103
135	18225	2460375	11,6190	5,1299	7,40741	2,1303	424,1	14314
136	18496	2515456	11,6619	5,1426	7,35294	2,1335	427,3	14527
137	18769	2571353	11,7047	5,1551	7,29927	2,1367	430,4	14741

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log n$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
138	19044	2628072	11,7473	5,1676	7,24638	2,1399	433,5	14957
139	19321	2685619	11,7898	5,1801	7,19424	2,1430	436,7	15175
140	19600	2744000	11,8322	5,1925	7,14286	2,1461	439,8	15394
141	19881	2803221	11,8743	5,2048	7,09220	2,1492	443,0	15615
142	20164	2863288	11,9164	5,2171	7,04225	2,1523	446,1	15837
143	20449	2924207	11,9583	5,2293	6,99301	2,1553	449,2	16061
144	20736	2985984	12,0000	5,2415	6,94444	2,1584	452,4	16286
145	21025	3048625	12,0416	5,2536	6,89555	2,1614	455,5	16513
146	21316	3112136	12,0830	5,2656	6,84932	2,1644	458,7	16742
147	21609	3176523	12,1244	5,2776	6,80272	2,1673	461,8	16972
148	21904	3241792	12,1655	5,2896	6,75676	2,1703	465,0	17203
149	22201	3307919	12,2066	5,3015	6,71141	2,1732	468,1	17437
150	22500	3375000	12,2474	5,3133	6,66667	2,1761	471,2	17671
151	22801	3442951	12,2882	5,3251	6,62252	2,1790	474,4	17908
152	23104	3511808	12,3288	5,3368	6,57893	2,1818	477,5	18146
153	23409	3581577	12,3693	5,3485	6,53595	2,1847	480,7	18385
154	23716	3652264	12,4097	5,3601	6,49351	2,1875	483,8	18627
155	24025	3723875	12,4499	5,3717	6,45161	2,1903	486,9	18869
156	24336	3796416	12,4900	5,3832	6,41026	2,1931	490,1	19113
157	24649	3869893	12,5300	5,3947	6,36943	2,1959	493,2	19359
158	24964	3944312	12,5698	5,4061	6,32911	2,1987	496,4	19607
159	25281	4019679	12,6095	5,4175	6,28931	2,2014	499,5	19856
160	25600	4096000	12,6491	5,4288	6,25000	2,2041	502,7	20106
161	25921	4173281	12,6886	5,4401	6,21118	2,2068	505,8	20358
162	26244	4251528	12,7279	5,4514	6,17284	2,2095	508,9	20612
163	26569	4330747	12,7671	5,4626	6,13497	2,2122	512,1	20867
164	26896	4410944	12,8062	5,4737	6,09756	2,2148	515,2	21124
165	27225	4492125	12,8452	5,4848	6,06061	2,2175	518,4	21382
166	27556	4574296	12,8841	5,4959	6,02410	2,2201	521,5	21642
167	27889	4657463	12,9228	5,5069	5,98802	2,2227	524,6	21904
168	28224	4741632	12,9615	5,5178	5,95238	2,2253	527,8	22167
169	28561	4826809	13,0000	5,5288	5,91716	2,2279	530,9	22432
170	28900	4913000	13,0384	5,5397	5,88235	2,2304	534,1	22698
171	29241	5000211	13,0767	5,5505	5,84795	2,2330	537,2	22966
172	29584	5088448	13,1149	5,5613	5,81395	2,2355	540,4	23235
173	29929	5177717	13,1529	5,5721	5,78035	2,2380	543,5	23506
174	30276	5268024	13,1909	5,5828	5,74713	2,2405	546,6	23779
175	30625	5359375	13,2288	5,5934	5,71429	2,2430	549,8	24053
176	30976	5451776	13,2665	5,6041	5,68182	2,2455	552,9	24328
177	31329	5545233	13,3041	5,6147	5,64972	2,2480	556,1	24606
178	31684	5639752	13,3417	5,6252	5,61798	2,2504	559,2	24885
179	32041	5735339	13,3791	5,6357	5,58659	2,2529	562,3	25165
180	32400	5832000	13,4164	5,6462	5,55556	2,2553	565,5	25447
181	32761	5929741	13,4536	5,6567	5,52486	2,2577	568,6	25730
182	33124	6028568	13,4907	5,6671	5,49451	2,2601	571,8	26016
183	33489	6128487	13,5277	5,6774	5,46448	2,2625	574,9	26302
184	33856	6229504	13,5647	5,6877	5,43478	2,2648	578,1	26590
185	34225	6331625	13,6015	5,6980	5,40541	2,2672	581,2	26880

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log n$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
186	34506	6434856	13,6382	5,7083	5,37634	2,2695	584,3	27172
187	34969	6539203	13,6748	5,7185	5,34759	2,2718	587,5	27465
188	35344	6644672	13,7113	5,7287	5,31915	2,2742	590,6	27759
189	35721	6751269	13,7477	5,7388	5,29101	2,2765	593,8	28055
190	36100	6859000	13,7840	5,7489	5,26316	2,2788	596,9	28353
191	36481	6967871	13,8203	5,7590	5,23560	2,2810	600,0	28652
192	36864	7077888	13,8564	5,7690	5,20833	2,2833	603,2	28953
193	37249	7189057	13,8924	5,7790	5,18135	2,2856	606,3	29255
194	37636	7301384	13,9284	5,7900	5,15464	2,2878	609,5	29559
195	38025	7414875	13,9642	5,7989	5,12821	2,2900	612,6	29865
196	38416	7529536	14,0000	5,8088	5,10204	2,2923	615,8	30172
197	38809	7645373	14,0357	5,8186	5,07614	2,2945	618,9	30481
198	39204	7762392	14,0712	5,8285	5,05051	2,2967	622,0	30791
199	39601	7880599	14,1067	5,8383	5,02513	2,2989	625,2	31103
200	40000	8000000	14,1421	5,8480	5,00000	2,3010	628,3	31416
201	40401	8120601	14,1774	5,8578	4,97512	2,3032	631,5	31731
202	40804	8242408	14,2127	5,8675	4,95050	2,3054	634,6	32047
203	41209	8365427	14,2478	5,8771	4,92611	2,3075	637,7	32365
204	41616	8489664	14,2829	5,8868	4,90196	2,3096	640,9	32685
205	42025	8615125	14,3178	5,8964	4,87805	2,3118	644,0	33006
206	42436	8741816	14,3527	5,9059	4,85437	2,3139	647,2	33329
207	42849	8869743	14,3875	5,9155	4,83092	2,3160	650,3	33654
208	43264	8998912	14,4222	5,9250	4,80769	2,3181	653,5	33979
209	43681	9129329	14,4568	5,9345	4,78469	2,3202	656,6	34307
210	44100	9261000	14,4914	5,9439	4,76190	2,3222	659,7	34636
211	44521	9393931	14,5258	5,9533	4,73934	2,3243	662,9	34967
212	44944	9528128	14,5602	5,9627	4,71698	2,3263	666,0	35299
213	45369	9663597	14,5945	5,9721	4,69484	2,3284	669,2	35633
214	45796	9800344	14,6287	5,9814	4,67290	2,3304	672,3	35968
215	46225	9938375	14,6629	5,9907	4,65116	2,3324	675,4	36305
216	46656	10077696	14,6969	6,0000	4,62963	2,3345	678,6	36644
217	47089	10218313	14,7309	6,0092	4,60829	2,3365	681,7	36984
218	47524	10360232	14,7648	6,0185	4,58716	2,3385	684,9	37325
219	47961	10503459	14,7986	6,0277	4,56621	2,3404	688,0	37668
220	48400	10648000	14,8324	6,0368	4,54545	2,3424	691,2	38013
221	48841	10793861	14,8661	6,0459	4,52489	2,3444	694,3	38360
222	49284	10941048	14,8997	6,0550	4,50450	2,3464	697,4	38708
223	49729	11089567	14,9332	6,0641	4,48431	2,3483	700,6	39057
224	50176	11239424	14,9666	6,0732	4,46429	2,3502	703,7	39408
225	50625	11390625	15,0000	6,0822	4,44444	2,3522	706,9	39761
226	51076	11543176	15,0333	6,0912	4,42478	2,3541	710,0	40115
227	51529	11697083	15,0665	6,1002	4,40529	2,3560	713,1	40471
228	51984	11852352	15,0997	6,1091	4,38596	2,3579	716,3	40828
229	52441	12008989	15,1327	6,1180	4,36681	2,3598	719,4	41187
230	52900	12167000	15,1658	6,1269	4,34783	2,3617	722,6	41548
231	53361	12326391	15,1987	6,1358	4,32900	2,3636	725,7	41910
232	53824	12487168	15,2315	6,1446	4,31031	2,3655	728,8	42273
233	54289	12649337	15,2643	6,1534	4,29185	2,3674	732,0	42638

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log n$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
234	54756	12812904	15,2971	6,1622	4,27350	2,3692	735,1	43005
235	55225	12977875	15,3297	6,1710	4,25532	2,3711	738,3	43374
236	55696	13144256	15,3623	6,1797	4,23729	2,3729	741,4	43744
237	56169	13312053	15,3948	6,1885	4,21941	2,3747	744,6	44115
238	56644	13481272	15,4272	6,1972	4,20168	2,3766	747,7	44488
239	57121	13651919	15,4596	6,2058	4,18410	2,3784	750,8	44863
240	57600	13824000	15,4919	6,2145	4,16667	2,3802	754,0	45239
241	58081	13997521	15,5242	6,2231	4,14938	2,3820	757,1	45617
242	58564	14172488	15,5563	6,2317	4,13223	2,3838	760,3	45996
243	59049	14348907	15,5885	6,2403	4,11523	2,3856	763,4	46377
244	59536	14526784	15,6205	6,2488	4,09836	2,3874	766,5	46759
245	60025	14706125	15,6525	6,2573	4,08163	2,3892	769,7	47144
246	60516	14886936	15,6844	6,2658	4,06504	2,3909	772,8	47529
247	61009	15069223	15,7162	6,2743	4,04858	2,3927	776,0	47916
248	61504	15252992	15,7480	6,2828	4,03226	2,3945	779,1	48305
249	62001	15438249	15,7797	6,2912	4,01606	2,3962	782,3	48695
250	62500	15625000	15,8114	6,2996	4,00000	2,3979	785,4	49087
251	63001	15813251	15,8430	6,3080	3,98406	2,3997	788,5	49481
252	63504	16003008	15,8745	6,3164	3,96825	2,4014	791,7	49876
253	64009	16194277	15,9060	6,3247	3,95257	2,4031	794,8	50273
254	64516	16387064	15,9374	6,3330	3,93701	2,4048	798,0	50671
255	65025	16581375	15,9687	6,3413	3,92157	2,4065	801,1	51071
256	65536	16777216	16,0000	6,3496	3,90625	2,4082	804,2	51472
257	66049	16974593	16,0312	6,3579	3,89105	2,4099	807,4	51875
258	66564	17173512	16,0624	6,3661	3,87597	2,4116	810,5	52279
259	67081	17373979	16,0935	6,3743	3,86100	2,4133	813,7	52685
260	67600	17576000	16,1245	6,3825	3,84615	2,4150	816,8	53093
261	68124	17779581	16,1555	6,3907	3,83142	2,4166	820,0	53502
262	68644	17984728	16,1864	6,3988	3,81679	2,4183	823,1	53913
263	69169	18191447	16,2173	6,4070	3,80228	2,4200	826,2	54325
264	69696	18399744	16,2481	6,4151	3,78788	2,4216	829,4	54739
265	70225	18609625	16,2788	6,4232	3,77358	2,4232	832,5	55155
266	70756	18821096	16,3095	6,4312	3,75940	2,4249	835,7	55572
267	71289	19034163	16,3401	6,4393	3,74532	2,4265	838,8	55990
268	71824	19248832	16,3707	6,4473	3,73134	2,4281	841,9	56410
269	72361	19465109	16,4012	6,4553	3,71747	2,4298	845,1	56832
270	72900	19683000	16,4317	6,4633	3,70370	2,4314	848,2	57256
271	73441	19902511	16,4621	6,4713	3,69004	2,4330	851,4	57680
272	73984	20123618	16,4924	6,4792	3,67647	2,4346	854,5	58107
273	74529	20346417	16,5227	6,4872	3,66300	2,4362	857,7	58535
274	75076	20570824	16,5529	6,4951	3,64964	2,4378	860,8	58965
275	75625	20796875	16,5831	6,5030	3,63636	2,4393	863,9	59396
276	76176	21024576	16,6132	6,5108	3,62319	2,4409	867,1	59828
277	76729	21253933	16,6433	6,5187	3,61011	2,4425	870,2	60263
278	77284	21484952	16,6733	6,5265	3,59712	2,4440	873,4	60699
279	77841	21717639	16,7033	6,5343	3,58423	2,4456	876,5	61136
280	78400	21952000	16,7332	6,5421	3,57143	2,4472	879,6	61575
281	78961	22188041	16,7631	6,5499	3,55872	2,4487	882,8	62016

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log n$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
282	79524	22425768	16,7929	6,5577	3,54610	2,4502	885,9	62458
283	80089	22665187	16,8226	6,5654	3,53357	2,4518	889,1	62902
284	80656	22906304	16,8523	6,5731	3,52113	2,4533	892,2	63347
285	81225	23149125	16,8819	6,5808	3,50877	2,4548	895,4	63791
286	81796	23393656	16,9115	6,5885	3,49650	2,4564	898,5	64242
287	82369	23639903	16,9411	6,5962	3,48432	2,4579	901,6	64692
288	82944	23887872	16,9706	6,6039	3,47222	2,4594	904,8	65144
289	83521	24137569	17,0000	6,6115	3,46021	2,4609	907,9	65597
290	84100	24389000	17,0294	6,6191	3,44828	2,4624	911,1	66052
291	84681	24642171	17,0587	6,6267	3,43643	2,4639	914,2	66508
292	85264	24897088	17,0880	6,6343	3,42466	2,4654	917,3	66966
293	85849	25153757	17,1172	6,6419	3,41297	2,4669	920,5	67426
294	86436	25412184	17,1464	6,6494	3,40136	2,4683	923,6	67887
295	87025	25672375	17,1756	6,6569	3,38983	2,4698	926,8	68349
296	87616	25934336	17,2047	6,6644	3,37838	2,4713	929,9	68813
297	88209	26198073	17,2337	6,6719	3,36700	2,4728	933,1	69279
298	88804	26463592	17,2627	6,6794	3,35570	2,4742	936,2	69746
299	89401	26730899	17,2916	6,6869	3,34448	2,4757	939,3	70215
300	90000	27000000	17,3205	6,6943	3,33333	2,4771	942,5	70686
301	90601	27270901	17,3494	6,7018	3,32226	2,4786	945,6	71158
302	91204	27543608	17,3781	6,7092	3,31126	2,4800	948,8	71631
303	91809	27818127	17,4069	6,7166	3,30033	2,4814	951,9	72107
304	92416	28094464	17,4356	6,7240	3,28947	2,4829	955,0	72583
305	93025	28372625	17,4642	6,7313	3,27869	2,4843	958,2	73062
306	93636	28652616	17,4929	6,7387	3,26797	2,4857	961,3	73542
307	94249	28934443	17,5214	6,7460	3,25733	2,4871	964,5	74023
308	94864	29218112	17,5499	6,7533	3,24675	2,4886	967,6	74506
309	95481	29503629	17,5784	6,7606	3,23625	2,4900	970,8	74991
310	96100	29791000	17,6068	6,7679	3,22581	2,4914	973,9	75477
311	96721	30080231	17,6352	6,7752	3,21543	2,4928	977,0	75964
312	97344	30371328	17,6635	6,7824	3,20513	2,4942	980,2	76454
313	97969	30664297	17,6918	6,7897	3,19489	2,4955	983,3	76945
314	98596	30959144	17,7200	6,7969	3,18471	2,4969	986,5	77437
315	99225	31255875	17,7482	6,8041	3,17460	2,4983	989,6	77931
316	99856	31554496	17,7764	6,8113	3,16456	2,4997	992,7	78427
317	100489	31855013	17,8045	6,8185	3,15457	2,5011	995,9	78924
318	101124	32157432	17,8326	6,8256	3,14465	2,5024	999,0	79423
319	101761	32461759	17,8606	6,8328	3,13480	2,5038	1002	79923
320	102400	32768000	17,8885	6,8399	3,12500	2,5051	1005	80425
321	103041	33076161	17,9165	6,8470	3,11527	2,5065	1008	80928
322	103684	33386248	17,9444	6,8541	3,10559	2,5079	1012	81433
323	104329	33698267	17,9722	6,8612	3,09598	2,5092	1015	81940
324	104976	34012224	18,0000	6,8683	3,08642	2,5105	1018	82448
325	105625	34328125	18,0278	6,8753	3,07692	2,5119	1021	82958
326	106276	34645976	18,0555	6,8824	3,06748	2,5132	1024	83469
327	106929	34965783	18,0831	6,8894	3,05810	2,5145	1027	83982
328	107584	35287552	18,1108	6,8964	3,04878	2,5159	1030	84496
329	108241	35611289	18,1384	6,9034	3,03951	2,5172	1034	85012
330	108900	35937000	18,1659	6,9104	3,03030	2,5185	1037	85530

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log n$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
331	109561	36264691	18,1934	6,9174	3,02115	2,5198	1040	86049
332	110224	36594368	18,2209	6,9244	3,01205	2,5211	1043	86570
333	110889	36926037	18,2483	6,9313	3,00300	2,5224	1046	87092
334	111556	37259704	18,2757	6,9382	2,99401	2,5237	1049	87616
335	112225	37595375	18,3030	6,9451	2,98507	2,5250	1052	88141
336	112896	37933056	18,3303	6,9521	2,97619	2,5263	1056	88668
337	113569	38272753	18,3576	6,9589	2,96736	2,5276	1059	89197
338	114244	38614472	18,3848	6,9658	2,95858	2,5289	1062	89727
339	114921	38958219	18,4120	6,9727	2,94985	2,5302	1065	90259
340	115600	39304000	18,4391	6,9795	2,94118	2,5315	1068	90792
341	116281	39651821	18,4662	6,9864	2,93255	2,5328	1071	91327
342	116964	40001688	18,4932	6,9932	2,92398	2,5340	1074	91863
343	117649	40353607	18,5203	7,0000	2,91545	2,5353	1078	92401
344	118336	40707584	18,5472	7,0068	2,90698	2,5366	1081	92941
345	119025	41063625	18,5742	7,0136	2,89855	2,5378	1084	93482
346	119716	41421736	18,6011	7,0203	2,89017	2,5391	1087	94025
347	120409	41781923	18,6279	7,0271	2,88184	2,5403	1090	94569
348	121104	42144192	18,6548	7,0338	2,87356	2,5416	1093	95115
349	121801	42508549	18,6815	7,0406	2,86533	2,5428	1096	95662
350	122500	42875000	18,7083	7,0473	2,85714	2,5441	1100	96211
351	123201	43243551	18,7350	7,0540	2,84900	2,5453	1103	96762
352	123904	43614208	18,7617	7,0607	2,84091	2,5465	1106	97314
353	124609	43986977	18,7883	7,0674	2,83286	2,5478	1109	97868
354	125316	44361864	18,8149	7,0740	2,82486	2,5490	1112	98423
355	126025	44738875	18,8414	7,0807	2,81690	2,5502	1115	98980
356	126736	45118016	18,8680	7,0873	2,80899	2,5514	1118	99538
357	127449	45499293	18,8944	7,0940	2,80112	2,5527	1122	100098
358	128164	45882712	18,9209	7,1006	2,79330	2,5539	1125	100660
359	128881	46268279	18,9473	7,1072	2,78552	2,5551	1128	101223
360	129600	46656000	18,9737	7,1138	2,77778	2,5563	1131	101788
361	130321	47045881	19,0000	7,1204	2,77008	2,5575	1134	102354
362	131044	47437928	19,0263	7,1269	2,76243	2,5587	1137	102922
363	131769	47832147	19,0526	7,1335	2,75482	2,5599	1140	103491
364	132496	48228544	19,0788	7,1400	2,74725	2,5611	1144	104062
365	133225	48627125	19,1050	7,1466	2,73973	2,5623	1147	104635
366	133956	49027896	19,1311	7,1531	2,73224	2,5635	1150	105209
367	134689	49430863	19,1572	7,1596	2,72480	2,5647	1153	105784
368	135424	49836032	19,1833	7,1661	2,71739	2,5658	1156	106362
369	136161	50243409	19,2094	7,1726	2,71003	2,5670	1159	106941
370	136900	50653000	19,2354	7,1791	2,70270	2,5682	1162	107521
371	137641	51064811	19,2614	7,1855	2,69542	2,5694	1166	108103
372	138384	51478848	19,2873	7,1920	2,68817	2,5705	1169	108687
373	139129	51895117	19,3132	7,1984	2,68097	2,5717	1172	109272
374	139876	52313624	19,3391	7,2048	2,67380	2,5729	1175	109858
375	140625	52734375	19,3649	7,2112	2,66667	2,5740	1178	110447
376	141376	53157376	19,3907	7,2177	2,65957	2,5752	1181	111036
377	142129	53582633	19,4165	7,2240	2,65252	2,5763	1184	111628
378	142884	54010152	19,4422	7,2304	2,64550	2,5775	1188	112221
379	143641	54439939	19,4679	7,2368	2,63852	2,5786	1191	112815

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log n$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
380	144400	54872000	19,4936	7,2432	2,63158	2,5798	1194	113411
381	145161	55306341	19,5192	7,2495	2,62467	2,5809	1197	114009
382	145924	55742968	19,5448	7,2558	2,61780	2,5821	1200	114608
383	146689	56181887	19,5704	7,2622	2,61097	2,5832	1203	115209
384	147456	56623104	19,5959	7,2685	2,60417	2,5843	1206	115812
385	148225	57066625	19,6214	7,2748	2,59740	2,5855	1210	116416
386	148996	57512456	19,6469	7,2811	2,59067	2,5866	1213	117021
387	149769	57960603	19,6723	7,2874	2,58398	2,5877	1216	117628
388	150544	58411072	19,6977	7,2936	2,57732	2,5888	1219	118237
389	151321	58863869	19,7231	7,2999	2,57069	2,5899	1222	118847
390	152100	59319000	19,7484	7,3061	2,56410	2,5911	1225	119459
391	152881	59776471	19,7737	7,3124	2,55754	2,5922	1228	120072
392	153664	60236288	19,7990	7,3186	2,55102	2,5933	1232	120687
393	154449	60698457	19,8242	7,3248	2,54453	2,5944	1235	121301
394	155236	61162984	19,8494	7,3310	2,53807	2,5955	1238	121922
395	156025	61629875	19,8746	7,3372	2,53165	2,5966	1241	122542
396	156816	62099136	19,8997	7,3434	2,52525	2,5977	1244	123163
397	157609	62570773	19,9249	7,3496	2,51889	2,5988	1247	123786
398	158404	63044792	19,9499	7,3558	2,51256	2,5999	1250	124410
399	159201	63521199	19,9750	7,3619	2,50627	2,6010	1253	125036
400	160000	64000000	20,0000	7,3681	2,50000	2,6021	1257	125664
401	160801	64481201	20,0250	7,3742	2,49377	2,6031	1260	126293
402	161604	64964808	20,0499	7,3803	2,48756	2,6042	1263	126923
403	162409	65450827	20,0749	7,3864	2,48130	2,6053	1266	127556
404	163216	65939261	20,0998	7,3925	2,47525	2,6064	1269	128190
405	164025	66430125	20,1246	7,3986	2,46914	2,6075	1272	128825
406	164836	66923416	20,1494	7,4047	2,46305	2,6085	1275	129462
407	165649	67419143	20,1742	7,4108	2,45700	2,6096	1279	130100
408	166464	67917312	20,1990	7,4169	2,45098	2,6107	1282	130741
409	167281	68417929	20,2237	7,4229	2,44499	2,6117	1285	131382
410	168100	68921000	20,2485	7,4290	2,43902	2,6128	1288	132025
411	168921	69426531	20,2731	7,4350	2,43309	2,6138	1291	132670
412	169744	69934528	20,2978	7,4410	2,42718	2,6149	1294	133317
413	170569	70444997	20,3224	7,4470	2,42131	2,6160	1297	133965
414	171396	70957944	20,3470	7,4530	2,41546	2,6170	1301	134614
415	172225	71473375	20,3715	7,4590	2,40964	2,6180	1304	135265
416	173056	71991296	20,3961	7,4650	2,40385	2,6191	1307	135918
417	173889	72511713	20,4206	7,4710	2,39808	2,6201	1310	136572
418	174724	73034632	20,4450	7,4770	2,39234	2,6212	1313	137228
419	175561	73560059	20,4695	7,4829	2,38663	2,6222	1316	137885
420	176400	74088000	20,4939	7,4889	2,38095	2,6232	1319	138544
421	177241	74618461	20,5183	7,4948	2,37530	2,6243	1323	139205
422	178084	75151448	20,5426	7,5007	2,36967	2,6253	1326	139867
423	178929	75686967	20,5670	7,5067	2,36407	2,6263	1329	140531
424	179776	76225024	20,5913	7,5126	2,35840	2,6274	1332	141196
425	180625	76765625	20,6155	7,5185	2,35294	2,6284	1335	141863
426	181476	77308776	20,6398	7,5244	2,34742	2,6294	1338	142531
427	182329	77854483	20,6640	7,5302	2,34192	2,6304	1341	143201

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log n$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
428	183184	78402752	20,6882	7,5361	2,36645	2,6314	1345	143872
429	184041	78953589	20,7123	7,5420	2,33100	2,6325	1348	144545
430	184900	79507000	20,7364	7,5478	2,32558	2,6335	1351	145220
431	185761	80062991	20,7605	7,5537	2,32019	2,6345	1354	145896
432	186624	80621568	20,7846	7,5595	2,31481	2,6355	1357	146574
433	187489	81182737	20,8087	7,5654	2,30947	2,6365	1360	147254
434	188356	81746504	20,8327	7,5712	2,30415	2,6375	1363	147934
435	189225	82312875	20,8567	7,5770	2,29885	2,6385	1367	148617
436	190096	82881856	20,8806	7,5828	2,29358	2,6395	1370	149301
437	190969	83453453	20,9045	7,5886	2,28833	2,6405	1373	149987
438	191844	84027672	20,9284	7,5944	2,28311	2,6415	1376	150674
439	192721	84604519	20,9523	7,6001	2,27790	2,6425	1379	151363
440	193600	85184000	20,9762	7,6059	2,27273	2,6435	1382	152053
441	194481	85766121	21,0000	7,6117	2,26757	2,6444	1385	152745
442	195364	86350888	21,0238	7,6174	2,26244	2,6454	1389	153439
443	196249	86938307	21,0476	7,6232	2,25734	2,6464	1392	154134
444	197136	87528384	21,0713	7,6289	2,25225	2,6474	1395	154830
445	198025	88121125	21,0950	7,6346	2,24719	2,6484	1398	155528
446	198916	88716536	21,1187	7,6403	2,24215	2,6493	1401	156228
447	199809	89314623	21,1424	7,6460	2,23714	2,6503	1404	156930
448	200704	89915392	21,1660	7,6517	2,23214	2,6513	1407	157633
449	201601	90518849	21,1896	7,6574	2,22717	2,6522	1411	158337
450	202500	91125000	21,2132	7,6631	2,22222	2,6532	1414	159043
451	203401	91733851	21,2368	7,6688	2,21730	2,6542	1417	159751
452	204304	92345408	21,2603	7,6744	2,21239	2,6551	1420	160460
453	205209	92959677	21,2838	7,6801	2,20751	2,6561	1423	161171
454	206116	93576664	21,3073	7,6857	2,20264	2,6571	1426	161883
455	207025	94196375	21,3307	7,6914	2,19780	2,6580	1429	162597
456	207936	94818816	21,3542	7,6970	2,19298	2,6590	1433	163313
457	208849	95443993	21,3776	7,7026	2,18818	2,6599	1436	164030
458	209764	96071912	21,4009	7,7082	2,18341	2,6609	1439	164748
459	210681	96702579	21,4243	7,7138	2,17865	2,6618	1442	165468
460	211600	97336000	21,4476	7,7194	2,17391	2,6628	1445	166190
461	212521	97972181	21,4709	7,7250	2,16920	2,6637	1448	166914
462	213444	98611128	21,4942	7,7306	2,16450	2,6646	1451	167639
463	214369	99252847	21,5174	7,7362	2,15983	2,6656	1455	168365
464	215296	99897344	21,5407	7,7418	2,15517	2,6665	1458	169093
465	216225	100544625	21,5639	7,7473	2,15054	2,6675	1461	169823
466	217156	101194696	21,5870	7,7529	2,14592	2,6684	1464	170554
467	218089	101847563	21,6102	7,7584	2,14133	2,6693	1467	171287
468	219024	102503232	21,6333	7,7639	2,13675	2,6702	1470	172021
469	219961	103161709	21,6564	7,7695	2,13220	2,6712	1473	172757
470	220900	103823000	21,6795	7,7750	2,12766	2,6721	1477	173494
471	221841	104487111	21,7025	7,7805	2,12314	2,6730	1480	174234
472	222784	105154048	21,7256	7,7860	2,11864	2,6739	1483	174974
473	223729	105823817	21,7486	7,7915	2,11416	2,6749	1486	175716
474	224676	106496424	21,7715	7,7970	2,10970	2,6758	1489	176460
475	225625	107171875	21,7945	7,8025	2,10526	2,6767	1492	177205

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log n$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
476	226576	107850176	21,8174	7,8079	2,10084	2,6776	1495	177952
477	227529	108531333	21,8403	7,8134	2,09644	2,6785	1499	178701
478	228484	109215352	21,8632	7,8188	2,09205	2,6794	1502	179451
479	229441	109902239	21,8861	7,8243	2,08768	2,6803	1505	180203
480	230400	110592000	21,9089	7,8297	2,08333	2,6812	1508	180956
481	231361	111284641	21,9317	7,8352	2,07900	2,6821	1511	181711
482	232324	111980168	21,9545	7,8406	2,07469	2,6830	1514	182467
483	233289	112678587	21,9773	7,8460	2,07039	2,6839	1517	183225
484	234256	113379904	22,0000	7,8514	2,06612	2,6848	1521	183984
485	235225	114084125	22,0227	7,8568	2,06186	2,6857	1524	184745
486	236196	114791256	22,0454	7,8622	2,05761	2,6866	1527	185508
487	237169	115501303	22,0681	7,8676	2,05339	2,6875	1530	186272
488	238144	116214272	22,0907	7,8730	2,04918	2,6884	1533	187038
489	239121	116930169	22,1133	7,8784	2,04499	2,6893	1536	187805
490	240100	117649000	22,1359	7,8837	2,04082	2,6902	1539	188571
491	241081	118370771	22,1585	7,8891	2,03666	2,6911	1543	189345
492	242064	119095488	22,1811	7,8944	2,03252	2,6920	1546	190117
493	243049	119823157	22,2036	7,8998	2,02840	2,6928	1549	190890
494	244036	120553784	22,2261	7,9051	2,02429	2,6937	1552	191665
495	245025	121287375	22,2486	7,9105	2,02020	2,6946	1555	192442
496	246016	122023936	22,2711	7,9158	2,01613	2,6955	1558	193221
497	247009	122763473	22,2935	7,9211	2,01207	2,6964	1561	194000
498	248004	123505992	22,3159	7,9264	2,00803	2,6972	1565	194782
499	249001	124251499	22,3383	7,9317	2,00401	2,6981	1568	195565
500	250000	125000000	22,3607	7,9370	2,00000	2,6990	1571	196350
501	251001	125751501	22,3830	7,9423	1,99601	2,6998	1574	197136
502	252004	126506008	22,4054	7,9476	1,99203	2,7007	1577	197923
503	253009	127263527	22,4277	7,9528	1,98807	2,7016	1580	198713
504	254016	128024064	22,4499	7,9581	1,98413	2,7024	1583	199504
505	255025	128787625	22,4722	7,9634	1,98020	2,7033	1587	200296
506	256036	129554216	22,4944	7,9686	1,97628	2,7042	1590	201090
507	257049	130323843	22,5167	7,9739	1,97239	2,7050	1593	201886
508	258064	131096512	22,5389	7,9791	1,96850	2,7059	1596	202683
509	259081	131872229	22,5610	7,9843	1,96464	2,7067	1599	203482
510	260100	132651000	22,5832	7,9896	1,96078	2,7076	1602	204282
511	261121	133432831	22,6053	7,9948	1,95695	2,7084	1605	205084
512	262144	134217728	22,6274	8,0000	1,95312	2,7093	1608	205887
513	263169	135005697	22,6495	8,0052	1,94932	2,7101	1612	206692
514	264196	135796744	22,6716	8,0104	1,94553	2,7110	1615	207499
515	265225	136590875	22,6936	8,0156	1,94175	2,7118	1618	208307
516	266256	137388096	22,7156	8,0208	1,93798	2,7126	1621	209117
517	267289	138188413	22,7376	8,0260	1,93424	2,7135	1624	209928
518	268324	138991832	22,7596	8,0311	1,93050	2,7143	1627	210741
519	269361	139798359	22,7816	8,0363	1,92678	2,7152	1630	211556
520	270400	140608000	22,8035	8,0415	1,92308	2,7160	1634	212372
521	271441	141420761	22,8254	8,0466	1,91939	2,7168	1637	213189
522	272484	142236648	22,8473	8,0517	1,91571	2,7177	1640	214008
523	273529	143055667	22,8692	8,0569	1,91205	2,7185	1643	214829

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log n$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
524	274576	143877824	22,8910	8,0620	1,90840	2,7193	1646	215651
525	275625	144703125	22,9129	8,0671	1,90476	2,7202	1649	216475
526	276676	145531576	22,9347	8,0723	1,90114	2,7210	1652	217301
527	277729	146363183	22,9565	8,0774	1,89753	2,7218	1656	218128
528	278784	147197952	22,9783	8,0825	1,89394	2,7226	1659	218956
529	279841	148035889	23,0000	8,0876	1,89036	2,7235	1662	219787
530	280900	148877000	23,0217	8,0927	1,88679	2,7243	1665	220618
531	281961	149721291	23,0434	8,0978	1,88324	2,7251	1668	221452
532	283024	150568768	23,0651	8,1028	1,87970	2,7259	1671	222287
533	284089	151419437	23,0868	8,1079	1,87617	2,7267	1674	223123
534	285156	152273304	23,1084	8,1130	1,87266	2,7275	1678	223961
535	286225	153130375	23,1301	8,1180	1,86916	2,7284	1681	224801
536	287296	153990656	23,1517	8,1231	1,86567	2,7292	1684	225642
537	288369	154854153	23,1733	8,1281	1,86220	2,7300	1687	226484
538	289444	155720872	23,1948	8,1332	1,85874	2,7308	1690	227329
539	290521	156590819	23,2164	8,1382	1,85529	2,7316	1693	228175
540	291600	157464000	23,2379	8,1433	1,85185	2,7324	1696	229022
541	292681	158340421	23,2594	8,1483	1,84843	2,7332	1700	229871
542	293764	159220088	23,2809	8,1533	1,84502	2,7340	1703	230722
543	294849	160103007	23,3024	8,1583	1,84162	2,7348	1706	231574
544	295936	160989184	23,3238	8,1633	1,83824	2,7356	1709	232428
545	297025	161878625	23,3452	8,1683	1,83486	2,7364	1712	233283
546	298116	162771336	23,3666	8,1733	1,83150	2,7372	1715	234140
547	299209	163667323	23,3880	8,1783	1,82815	2,7380	1718	234998
548	300304	164566592	23,4094	8,1833	1,82482	2,7388	1722	235858
549	301401	165469149	23,4307	8,1882	1,82149	2,7396	1725	236720
550	302500	166375000	23,4521	8,1932	1,81818	2,7404	1728	237583
551	303601	167284151	23,4734	8,1982	1,81488	2,7412	1731	238448
552	304704	168196608	23,4947	8,2031	1,81159	2,7419	1734	239314
553	305809	169112377	23,5160	8,2081	1,80832	2,7427	1737	240182
554	306916	170031464	23,5372	8,2130	1,80505	2,7435	1740	241051
555	308025	170953875	23,5584	8,2180	1,80180	2,7443	1744	241922
556	309136	171879616	23,5797	8,2229	1,79856	2,7451	1747	242795
557	310249	172808693	23,6008	8,2278	1,79533	2,7459	1750	243669
558	311364	173741112	23,6220	8,2327	1,79211	2,7466	1753	244545
559	312481	174676879	23,6432	8,2377	1,78891	2,7474	1756	245422
560	313600	175616000	23,6643	8,2426	1,78571	2,7482	1759	246301
561	314721	176558481	23,6854	8,2475	1,78253	2,7490	1762	247181
562	315844	177504328	23,7065	8,2524	1,77936	2,7497	1766	248063
563	316969	178453547	23,7276	8,2573	1,77620	2,7505	1769	248947
564	318096	179406144	23,7487	8,2621	1,77305	2,7513	1772	249832
565	319225	180362125	23,7697	8,2670	1,76991	2,7520	1775	250719
566	320356	181321496	23,7908	8,2719	1,76678	2,7528	1778	251607
567	321489	182284263	23,8118	8,2768	1,76367	2,7536	1781	252497
568	322624	183250432	23,8328	8,2816	1,76056	2,7543	1784	253388
569	323761	184220009	23,8537	8,2865	1,75747	2,7551	1788	254281
570	324900	185193000	23,8747	8,2913	1,75439	2,7559	1791	255176
571	326041	186169411	23,8956	8,2962	1,75131	2,7566	1794	256072

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log n$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
572	327184	187149248	23,9165	8,3010	1,74825	2,7574	1797	256970
573	328329	188132517	23,9374	8,3059	1,74520	2,7582	1800	257869
574	329476	189119224	23,9583	8,3107	1,74216	2,7589	1803	258770
575	330625	190109375	23,9792	8,3155	1,73913	2,7597	1806	259672
576	331776	191102976	24,0000	8,3203	1,73611	2,7604	1810	260576
577	332929	192100033	24,0208	8,3251	1,73310	2,7612	1813	261482
578	334084	193100552	24,0416	8,3300	1,73010	2,7619	1816	262389
579	335241	194104539	24,0624	8,3348	1,72712	2,7627	1819	263298
580	336400	195112000	24,0832	8,3396	1,72414	2,7634	1822	264208
581	337561	196122941	24,1039	8,3443	1,72117	2,7642	1825	265120
582	338724	197137368	24,1247	8,3491	1,71821	2,7649	1828	266033
583	339889	198155287	24,1454	8,3539	1,71527	2,7657	1832	266948
584	341056	199176704	24,1661	8,3587	1,71233	2,7664	1835	267865
585	342225	200201625	24,1868	8,3634	1,70940	2,7672	1838	268783
586	343396	201230056	24,2074	8,3682	1,70648	2,7679	1841	269703
587	344569	202262003	24,2281	8,3730	1,70358	2,7686	1844	270624
588	345744	203297472	24,2487	8,3777	1,70068	2,7694	1847	271547
589	346921	204336469	24,2693	8,3825	1,69779	2,7701	1850	272471
590	348100	205379000	24,2899	8,3872	1,69492	2,7709	1854	273397
591	349281	206425071	24,3105	8,3919	1,69205	2,7716	1857	274325
592	350464	207474688	24,3311	8,3967	1,68919	2,7723	1860	275254
593	351649	208527857	24,3516	8,4014	1,68634	2,7731	1863	276185
594	352836	209584584	24,3721	8,4061	1,68350	2,7738	1866	277117
595	354025	210644875	24,3925	8,4108	1,68067	2,7745	1869	278051
596	355216	211708736	24,4131	8,4155	1,67785	2,7752	1872	278986
597	356409	212776173	24,4336	8,4202	1,67504	2,7760	1876	279923
598	357604	213847192	24,4540	8,4249	1,67224	2,7767	1879	280862
599	358801	214921799	24,4745	8,4296	1,66945	2,7774	1882	281802
600	360000	216000000	24,4949	8,4343	1,66667	2,7782	1885	282744
601	361201	217081801	24,5153	8,4390	1,66389	2,7789	1888	283687
602	362404	218167208	24,5357	8,4437	1,66113	2,7796	1891	284632
603	363609	219256227	24,5561	8,4484	1,65837	2,7803	1894	285578
604	364816	220348864	24,5764	8,4530	1,65563	2,7810	1898	286526
605	366025	221445125	24,5967	8,4577	1,65289	2,7818	1901	287475
606	367236	222545016	24,6171	8,4623	1,65017	2,7825	1904	288426
607	368449	223648543	24,6374	8,4670	1,64745	2,7832	1907	289379
608	369664	224755712	24,6577	8,4716	1,64474	2,7839	1910	290333
609	370881	225866529	24,6779	8,4763	1,64204	2,7846	1913	291289
610	372100	226981000	24,6982	8,4809	1,63934	2,7853	1916	292247
611	373321	228099131	24,7184	8,4856	1,63666	2,7860	1920	293206
612	374544	229220928	24,7386	8,4902	1,63399	2,7868	1923	294166
613	375769	230346397	24,7588	8,4948	1,63132	2,7875	1926	295128
614	376996	231475544	24,7790	8,4994	1,62866	2,7882	1929	296092
615	378225	232608375	24,7992	8,5040	1,62602	2,7889	1932	297057
616	379456	233744896	24,8193	8,5086	1,62338	2,7896	1935	298024
617	380689	234885113	24,8395	8,5132	1,62075	2,7903	1938	298992
618	381924	236029032	24,8596	8,5178	1,61812	2,7910	1942	299962
619	383161	237176659	24,8797	8,5224	1,61551	2,7917	1945	300934
620	384400	238328000	24,8998	8,5270	1,61290	2,7924	1948	301907

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log n$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
621	385641	239483061	24,9199	8,5316	1,61031	2,7931	1951	302882
622	386884	240641848	24,9399	8,5362	1,60772	2,7933	1954	303858
623	388129	241804367	24,9600	8,5408	1,60514	2,7945	1957	304836
624	389376	242970624	24,9800	8,5453	1,60256	2,7952	1960	305815
625	390625	244140625	25,0000	8,5499	1,60000	2,7959	1963	306799
626	391876	245314376	25,0200	8,5544	1,59744	2,7966	1967	307779
627	393129	246491883	25,0400	8,5590	1,59490	2,7973	1970	308763
628	394384	247673152	25,0599	8,5635	1,59236	2,7980	1973	309748
629	395641	248858189	25,0799	8,5681	1,58983	2,7987	1976	310736
630	396900	250047000	25,0998	8,5726	1,58730	2,7993	1979	311725
631	398161	251239591	25,1197	8,5772	1,58479	2,8000	1982	312715
632	399424	252435968	25,1396	8,5817	1,58228	2,8007	1985	313707
633	400689	253636137	25,1595	8,5862	1,57978	2,8014	1989	314700
634	401956	254840104	25,1794	8,5907	1,57720	2,8021	1992	315696
635	403225	256047875	25,1992	8,5952	1,57480	2,8028	1995	316692
636	404496	257259456	25,2190	8,5997	1,57233	2,8035	1998	317690
637	405769	258474853	25,2389	8,6043	1,56986	2,8041	2001	318690
638	407044	259694072	25,2587	8,6088	1,56740	2,8048	2004	319692
639	408321	260917119	25,2784	8,6132	1,56495	2,8055	2007	320695
640	409600	262144000	25,2982	8,6177	1,56250	2,8062	2011	321699
641	410881	263374721	25,3180	8,6222	1,56006	2,8069	2014	322705
642	412164	264609288	25,3377	8,6267	1,55763	2,8075	2017	323713
643	413449	265847707	25,3574	8,6312	1,55521	2,8082	2020	324722
644	414736	267089984	25,3772	8,6357	1,55280	2,8089	2023	325733
645	416025	268336125	25,3969	8,6401	1,55039	2,8096	2026	326745
646	417316	269586136	25,4165	8,6446	1,54799	2,8102	2029	327759
647	418609	270840023	25,4362	8,6490	1,54560	2,8109	2033	328775
648	419904	272097792	25,4558	8,6535	1,54321	2,8116	2036	329792
649	421201	273359449	25,4755	8,6579	1,54083	2,8122	2039	330810
650	422500	274625000	25,4951	8,6624	1,53846	2,8129	2042	331831
651	423801	275894451	25,5147	8,6668	1,53610	2,8136	2045	332853
652	425104	277167808	25,5343	8,6713	1,53374	2,8142	2048	333876
653	426409	278445267	25,5539	8,6757	1,53139	2,8149	2051	334901
654	427716	279726824	25,5734	8,6801	1,52905	2,8156	2055	335927
655	429025	281011375	25,5930	8,6845	1,52672	2,8162	2058	336955
656	430336	282300016	25,6125	8,6890	1,52439	2,8169	2061	337985
657	431649	283593393	25,6320	8,6934	1,52207	2,8176	2064	339016
658	432964	284890312	25,6515	8,6978	1,51976	2,8182	2067	340049
659	434281	286191179	25,6710	8,7022	1,51745	2,8189	2070	341083
660	435600	287496000	25,6905	8,7066	1,51515	2,8195	2073	342119
661	436921	288804781	25,7099	8,7110	1,51286	2,8202	2077	343157
662	438244	290117528	25,7294	8,7154	1,51057	2,8209	2080	344196
663	439569	291434247	25,7488	8,7198	1,50830	2,8215	2083	345237
664	440896	292754944	25,7682	8,7241	1,50602	2,8222	2086	346279
665	442225	294079625	25,7876	8,7285	1,50376	2,8228	2089	347323
666	443556	295408296	25,8070	8,7329	1,50150	2,8235	2092	348368
667	444889	296740963	25,8263	8,7373	1,49925	2,8241	2095	349415
668	446224	298077632	25,8457	8,7416	1,49701	2,8248	2099	350464
669	447561	299418309	25,8650	8,7460	1,49477	2,8254	2102	351514

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log \pi$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
670	448900	300763000	25,8844	8,7503	1,49254	2,8261	2105	352565
671	450241	302111711	25,9037	8,7547	1,49031	2,8267	2108	353618
672	451584	303464448	25,9230	8,7590	1,48810	2,8274	2111	354673
673	452929	304821217	25,9422	8,7634	1,48588	2,8280	2114	355730
674	454276	306182024	25,9615	8,7677	1,48368	2,8287	2117	356788
675	455625	307546875	25,9808	8,7721	1,48148	2,8293	2121	357847
676	456976	308915776	26,0000	8,7764	1,47929	2,8299	2124	358908
677	458329	310288733	26,0192	8,7807	1,47710	2,8306	2127	359971
678	459684	311665752	26,0384	8,7850	1,47493	2,8312	2130	361035
679	461041	313046839	26,0576	8,7893	1,47275	2,8319	2133	362101
680	462400	314432000	26,0768	8,7937	1,47059	2,8325	2136	363168
681	463761	315821241	26,0960	8,7980	1,46843	2,8331	2139	364237
682	465124	317214568	26,1151	8,8023	1,46628	2,8338	2143	365308
683	466489	318611987	26,1343	8,8066	1,46413	2,8344	2146	366380
684	467856	320013504	26,1534	8,8109	1,46199	2,8351	2149	367453
685	469225	321419125	26,1725	8,8152	1,45985	2,8357	2152	368528
686	470596	322828856	26,1916	8,8194	1,45773	2,8363	2155	369605
687	471969	324242703	26,2107	8,8237	1,45560	2,8370	2158	370684
688	473344	325660672	26,2298	8,8280	1,45349	2,8376	2161	371764
689	474721	327082769	26,2488	8,8323	1,45138	2,8382	2165	372845
690	476100	328509000	26,2679	8,8366	1,44928	2,8388	2168	373928
691	477481	329939371	26,2869	8,8408	1,44718	2,8395	2171	375013
692	478864	331373888	26,3059	8,8451	1,44509	2,8401	2174	376099
693	480249	332812557	26,3249	8,8493	1,44300	2,8407	2177	377187
694	481636	334255384	26,3439	8,8536	1,44092	2,8414	2180	378276
695	483025	335702375	26,3629	8,8578	1,43885	2,8420	2183	379367
696	484416	337153536	26,3818	8,8621	1,43678	2,8426	2187	380460
697	485809	338608873	26,4008	8,8663	1,43472	2,8432	2190	381553
698	487204	340068392	26,4197	8,8706	1,43266	2,8439	2193	382649
699	488601	341532099	26,4386	8,8748	1,43062	2,8445	2196	383746
700	490000	343000000	26,4575	8,8790	1,42857	2,8451	2199	384845
701	491401	344472101	26,4764	8,8833	1,42653	2,8457	2202	385945
702	492804	345948408	26,4953	8,8875	1,42450	2,8463	2205	387047
703	494209	347428927	26,5141	8,8917	1,42248	2,8470	2209	388151
704	495616	348913664	26,5330	8,8959	1,42045	2,8476	2212	389256
705	497025	350402625	26,5518	8,9001	1,41844	2,8482	2215	390363
706	498436	351895816	26,5707	8,9043	1,41643	2,8488	2218	391471
707	499849	353393243	26,5895	8,9085	1,41443	2,8494	2221	392580
708	501264	354894912	26,6083	8,9127	1,41243	2,8500	2224	393692
709	502681	356400829	26,6271	8,9169	1,41044	2,8506	2227	394805
710	504100	357911000	26,6458	8,9211	1,40845	2,8513	2231	395919
711	505521	359425431	26,6646	8,9253	1,40647	2,8519	2234	397035
712	506944	360944128	26,6833	8,9295	1,40449	2,8525	2237	398155
713	508369	362467097	26,7021	8,9337	1,40252	2,8531	2240	399272
714	509796	363994344	26,7208	8,9378	1,40056	2,8537	2243	400393
715	511225	365525875	26,7395	8,9420	1,39860	2,8543	2246	401515
716	512656	367061696	26,7582	8,9462	1,39665	2,8549	2249	402639
717	514089	368601813	26,7769	8,9503	1,39470	2,8555	2253	403765

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log n$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
718	515524	370146232	26,7955	8,9545	1,39276	2,8561	2256	404892
719	516961	371694959	26,8142	8,9587	1,39082	2,8567	2259	406020
720	518400	373243000	26,8328	8,9628	1,38889	2,8573	2262	407150
721	519841	374805361	26,8514	8,9670	1,38696	2,8579	2265	408282
722	521284	376367048	26,8701	8,9711	1,38504	2,8585	2268	409415
723	522729	377933067	26,8887	8,9752	1,38313	2,8591	2271	410550
724	524176	379503424	26,9072	8,9794	1,38122	2,8597	2275	411687
725	525625	381078125	26,9258	8,9835	1,37931	2,8603	2278	412825
726	527076	382657176	26,9444	8,9876	1,37741	2,8609	2281	413965
727	528529	384240583	26,9629	8,9918	1,37552	2,8615	2284	415106
728	529984	385828352	26,9815	8,9959	1,37363	2,8621	2287	416248
729	531441	387420489	27,0000	9,0000	1,37174	2,8627	2290	417393
730	532900	389017000	27,0185	9,0041	1,36986	2,8633	2293	418539
731	534361	390617891	27,0370	9,0082	1,36799	2,8639	2297	419686
732	535824	392223168	27,0555	9,0123	1,36612	2,8645	2300	420835
733	537289	393832837	27,0740	9,0164	1,36426	2,8651	2303	421986
734	538756	395446904	27,0924	9,0205	1,36240	2,8657	2306	423138
735	540225	397065375	27,1109	9,0246	1,36054	2,8663	2309	424292
736	541696	398688256	27,1293	9,0287	1,35870	2,8669	2312	425447
737	543169	400315553	27,1477	9,0328	1,35685	2,8675	2315	426604
738	544644	401947272	27,1662	9,0369	1,35501	2,8681	2318	427762
739	546121	403583419	27,1846	9,0410	1,35318	2,8686	2322	428922
740	547600	405224000	27,2029	9,0450	1,35135	2,8692	2325	430084
741	549081	406869021	27,2213	9,0491	1,34953	2,8698	2328	431247
742	550564	408518488	27,2397	9,0532	1,34771	2,8704	2331	432412
743	552049	410172407	27,2580	9,0572	1,34590	2,8710	2334	433578
744	553536	411830784	27,2764	9,0613	1,34409	2,8716	2337	434746
745	555025	413493625	27,2947	9,0654	1,34228	2,8722	2340	435916
746	556516	415160936	27,3130	9,0694	1,34048	2,8727	2344	437087
747	558009	416832723	27,3313	9,0735	1,33869	2,8733	2347	438259
748	559504	418508992	27,3496	9,0775	1,33690	2,8739	2350	439433
749	561001	420189749	27,3679	9,0816	1,33511	2,8745	2353	440609
750	562500	421875000	27,3861	9,0856	1,33333	2,8751	2356	441786
751	564001	423564751	27,4044	9,0896	1,33156	2,8756	2359	442965
752	565504	425259008	27,4226	9,0937	1,32979	2,8762	2362	444146
753	567009	426957777	27,4408	9,0977	1,32802	2,8768	2366	445323
754	568516	428661064	27,4591	9,1017	1,32626	2,8774	2369	446511
755	570025	430368875	27,4773	9,1057	1,32450	2,8779	2372	447697
756	571536	432081216	27,4955	9,1098	1,32275	2,8785	2375	448883
757	573049	433798093	27,5136	9,1138	1,32100	2,8791	2378	450072
758	574564	435519512	27,5318	9,1178	1,31926	2,8797	2381	451262
759	576081	437245479	27,5500	9,1218	1,31752	2,8802	2384	452453
760	577600	438976000	27,5681	9,1258	1,31579	2,8808	2388	453646
761	579121	440711081	27,5862	9,1298	1,31406	2,8814	2391	454841
762	580644	442450728	27,6043	9,1338	1,31234	2,8820	2394	456037
763	582169	444194947	27,6225	9,1378	1,31062	2,8825	2397	457234
764	583696	445943744	27,6405	9,1418	1,30890	2,8831	2400	458434
765	585225	447697125	27,6586	9,1458	1,30719	2,8837	2403	459635

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log n$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
766	586756	449455096	27,6767	9,1498	1,30548	2,8842	2406	460837
767	588289	451217663	27,6948	9,1537	1,30378	2,8848	2410	462041
768	589824	452984832	27,7128	9,1577	1,30208	2,8854	2413	463247
769	591361	454756609	27,7308	9,1617	1,30039	2,8859	2416	464454
770	592900	456533000	27,7489	9,1657	1,29870	2,8865	2419	465663
771	594441	458314011	27,7669	9,1696	1,29702	2,8871	2422	466873
772	595984	460099648	27,7849	9,1736	1,29534	2,8876	2425	468085
773	597529	461889917	27,8029	9,1775	1,29366	2,8882	2428	469298
774	599076	463684824	27,8209	9,1815	1,29199	2,8887	2432	470513
775	600625	465484375	27,8388	9,1855	1,29032	2,8893	2435	471730
776	602176	467288576	27,8568	9,1894	1,28866	2,8899	2438	472948
777	603729	469097433	27,8747	9,1933	1,28700	2,8904	2441	474168
778	605284	470910952	27,8927	9,1973	1,28535	2,8910	2444	475389
779	606841	472729139	27,9106	9,2012	1,28370	2,8915	2447	476612
780	608400	474552000	27,9285	9,2052	1,28205	2,8921	2450	477836
781	609961	476379541	27,9461	9,2091	1,28041	2,8927	2454	479062
782	611524	478211768	27,9643	9,2130	1,27877	2,8932	2457	480290
783	613089	480048687	27,9821	9,2170	1,27714	2,8938	2460	481519
784	614656	481890304	28,0000	9,2209	1,27551	2,8943	2463	482750
785	616225	483736625	28,0179	9,2248	1,27389	2,8949	2466	483982
786	617796	485587656	28,0357	9,2287	1,27226	2,8954	2469	485216
787	619369	487443403	28,0535	9,2326	1,27065	2,8960	2472	486451
788	620944	489303872	28,0713	9,2365	1,26904	2,8965	2476	487688
789	622521	491169069	28,0891	9,2404	1,26743	2,8971	2479	488927
790	624100	493039000	28,1069	9,2443	1,26582	2,8976	2482	490167
791	625681	494913671	28,1247	9,2482	1,26422	2,8982	2485	491409
792	627264	496793088	28,1425	9,2521	1,26263	2,8987	2488	492652
793	628849	498677257	28,1603	9,2560	1,26103	2,8993	2491	493897
794	630436	500566184	28,1780	9,2599	1,25945	2,8998	2494	495143
795	632025	502459875	28,1957	9,2638	1,25786	2,9004	2498	496391
796	633616	504358336	28,2135	9,2677	1,25628	2,9009	2501	497641
797	635209	506261573	28,2312	9,2716	1,25471	2,9015	2504	498892
798	636804	508169592	28,2489	9,2754	1,25313	2,9020	2507	500145
799	638401	510082399	28,2666	9,2793	1,25156	2,9025	2510	501399
800	640000	512000000	28,2843	9,2832	1,25000	2,9031	2513	502655
801	641601	513922401	28,3019	9,2870	1,24844	2,9036	2516	503912
802	643204	515849608	28,3196	9,2909	1,24688	2,9042	2520	505171
803	644809	517781627	28,3373	9,2948	1,24533	2,9047	2523	506432
804	646416	519718464	28,3549	9,2986	1,24378	2,9053	2526	507694
805	648025	521660125	28,3725	9,3025	1,24224	2,9058	2529	508958
806	649636	523606616	28,3901	9,3063	1,24069	2,9063	2532	510223
807	651249	525557943	28,4077	9,3102	1,23916	2,9069	2535	511490
808	652864	527514112	28,4253	9,3140	1,23762	2,9074	2538	512758
809	654481	529475129	28,4429	9,3179	1,23609	2,9079	2542	514028
810	656100	531441000	28,4605	9,3217	1,23457	2,9085	2545	515300
811	657721	533411731	28,4781	9,3255	1,23305	2,9090	2548	516573
812	659344	535387328	28,4956	9,3294	1,23153	2,9096	2551	517848
813	660969	537367797	28,5132	9,3332	1,23001	2,9101	2554	519124

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log n$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
814	662596	539353144	28,5307	9,3370	1,22850	2,9106	2557	520402
815	664225	541343375	28,5482	9,3408	1,22699	2,9112	2560	521681
816	665856	543338496	28,5657	9,3447	1,22549	2,9117	2564	522962
817	667489	545338513	28,5832	9,3485	1,22399	2,9122	2567	524245
818	669124	547343432	28,6007	9,3523	1,22249	2,9128	2570	525529
819	670761	549353259	28,6182	9,3561	1,22100	2,9133	2573	526814
820	672400	551368000	28,6356	9,3599	1,21951	2,9138	2576	528102
821	674041	553387661	28,6531	9,3637	1,21803	2,9143	2579	529391
822	675684	555412248	28,6705	9,3675	1,21655	2,9149	2582	530681
823	677329	557441767	28,6880	9,3713	1,21507	2,9154	2586	531973
824	678976	559476224	28,7054	9,3751	1,21359	2,9159	2589	533267
825	680625	561515625	28,7228	9,3789	1,21212	2,9165	2592	534562
826	682276	563559976	28,7402	9,3827	1,21065	2,9170	2595	535858
827	683929	565609283	28,7576	9,3865	1,20919	2,9175	2598	537157
828	685584	567663552	28,7750	9,3902	1,20773	2,9180	2601	538456
829	687241	569722789	28,7924	9,3940	1,20627	2,9186	2604	539758
830	688900	571787000	28,8097	9,3978	1,20482	2,9191	2608	541061
831	690561	573856191	28,8271	9,4016	1,20337	2,9196	2611	542365
832	692224	575930368	28,8444	9,4053	1,20192	2,9201	2614	543671
833	693889	578009537	28,8617	9,4091	1,20048	2,9206	2617	544979
834	695556	580093704	28,8791	9,4129	1,19904	2,9212	2620	546288
835	697225	582182875	28,8964	9,4166	1,19760	2,9217	2623	547599
836	698896	584277056	28,9137	9,4204	1,19617	2,9222	2626	548912
837	700569	586376253	28,9310	9,4241	1,19474	2,9227	2630	550226
838	702244	588480472	28,9482	9,4279	1,19332	2,9232	2633	551541
839	703921	590589719	28,9655	9,4316	1,19190	2,9238	2636	552858
840	705600	592704000	28,9828	9,4354	1,19048	2,9243	2639	554177
841	707281	594823321	29,0000	9,4391	1,18906	2,9248	2642	555497
842	708964	596947688	29,0172	9,4429	1,18765	2,9253	2645	556819
843	710649	599077107	29,0345	9,4466	1,18624	2,9258	2648	558142
844	712336	601211584	29,0517	9,4503	1,18483	2,9263	2652	559467
845	714025	603351125	29,0689	9,4541	1,18343	2,9269	2655	560794
846	715716	605495736	29,0861	9,4578	1,18203	2,9274	2658	562122
847	717409	607645423	29,1033	9,4615	1,18064	2,9279	2661	563452
848	719104	609800192	29,1204	9,4652	1,17925	2,9284	2664	564783
849	720801	611960049	29,1376	9,4690	1,17786	2,9289	2667	566116
850	722500	614125000	29,1548	9,4727	1,17647	2,9294	2670	567450
851	724201	616295051	29,1719	9,4764	1,17509	2,9299	2673	568786
852	725904	618470208	29,1890	9,4801	1,17371	2,9304	2677	570124
853	727609	620650477	29,2062	9,4838	1,17233	2,9309	2680	571463
854	729316	622835864	29,2233	9,4875	1,17096	2,9315	2683	572803
855	731025	625026375	29,2404	9,4912	1,16959	2,9320	2686	574146
856	732736	627222016	29,2575	9,4949	1,16822	2,9325	2689	575490
857	734449	629422793	29,2746	9,4986	1,16686	2,9330	2692	576835
858	736164	631628712	29,2916	9,5023	1,16550	2,9335	2695	578182
859	737881	633839779	29,3087	9,5060	1,16414	2,9340	2699	579530
860	739600	636056000	29,3258	9,5097	1,16279	2,9345	2702	580880
861	741321	638277381	29,3428	9,5134	1,16144	2,9350	2705	582232

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log n$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
862	743044	640503928	29,3598	9,5171	1,16009	2,9355	2708	583585
863	744769	642735647	29,3769	9,5207	1,15875	2,9360	2711	584940
864	746496	644972541	29,3939	9,5244	1,15741	2,9365	2714	586297
865	748225	647214625	29,4109	9,5281	1,15607	2,9370	2717	587655
866	749956	649461896	29,4279	9,5317	1,15473	2,9375	2721	589014
867	751689	651714363	29,4449	9,5354	1,15340	2,9380	2724	590375
868	753424	653972032	29,4618	9,5391	1,15207	2,9385	2727	591738
869	755161	656234909	29,4788	9,5427	1,15075	2,9390	2730	593102
870	756900	658503000	29,4958	9,5464	1,14943	2,9395	2733	594468
871	758641	660776311	29,5127	9,5501	1,14811	2,9400	2736	595835
872	760384	663054848	29,5296	9,5537	1,14679	2,9405	2739	597204
873	762129	665338617	29,5466	9,5574	1,14548	2,9410	2743	598575
874	763876	667627624	29,5635	9,5610	1,14416	2,9415	2746	599947
875	765625	669921875	29,5804	9,5647	1,14286	2,9420	2749	601320
876	767376	672221376	29,5973	9,5683	1,14155	2,9425	2752	602696
877	769129	674526133	29,6142	9,5719	1,14025	2,9430	2755	604073
878	770884	676836152	29,6311	9,5756	1,13895	2,9435	2758	605451
879	772641	679151439	29,6479	9,5792	1,13766	2,9440	2761	606831
880	774400	681472000	29,6648	9,5828	1,13636	2,9445	2765	608212
881	776161	683797841	29,6816	9,5865	1,13507	2,9450	2768	609595
882	777924	686128968	29,6985	9,5901	1,13379	2,9455	2771	610980
883	779689	688465387	29,7153	9,5937	1,13250	2,9460	2774	612366
884	781456	690807104	29,7321	9,5973	1,13122	2,9465	2777	613754
885	783225	693154125	29,7489	9,6010	1,12994	2,9469	2780	615143
886	784996	695506456	29,7658	9,6046	1,12867	2,9474	2783	616534
887	786769	697864103	29,7825	9,6082	1,12740	2,9479	2787	617927
888	788544	700227072	29,7993	9,6118	1,12613	2,9484	2790	619321
889	790321	702595369	29,8161	9,6154	1,12486	2,9489	2793	620717
890	792100	704969000	29,8329	9,6190	1,12360	2,9494	2796	622114
891	793881	707347971	29,8496	9,6226	1,12233	2,9499	2799	623513
892	795664	709732288	29,8664	9,6262	1,12108	2,9501	2802	624913
893	797449	712121957	29,8831	9,6298	1,11982	2,9509	2805	626315
894	799236	714516984	29,8998	9,6334	1,11857	2,9513	2809	627718
895	801025	716917375	29,9166	9,6370	1,11732	2,9518	2812	629124
896	802816	719323136	29,9333	9,6406	1,11607	2,9523	2815	630530
897	804609	721734273	29,9500	9,6442	1,11483	2,9528	2818	631938
898	806404	724150792	29,9666	9,6477	1,11359	2,9533	2821	633348
899	808201	726572699	29,9833	9,6513	1,11235	2,9538	2824	634760
900	810000	729000000	30,0000	9,6549	1,11111	2,9542	2827	636173
901	811801	731432701	30,0167	9,6585	1,10988	2,9547	2831	637587
902	813604	733870808	30,0333	9,6620	1,10865	2,9552	2834	639003
903	815409	736314327	30,0500	9,6656	1,10742	2,9557	2837	640421
904	817216	738763264	30,0666	9,6692	1,10619	2,9562	2840	641840
905	819025	741217625	30,0832	9,6727	1,10497	2,9566	2843	643261
906	820836	743677416	30,0998	9,6763	1,10375	2,9571	2846	644683
907	822649	746142643	30,1164	9,6799	1,10254	2,9576	2849	646107
908	824464	748613312	30,1330	9,6834	1,10132	2,9581	2853	647533
909	826281	751089429	30,1496	9,6870	1,10011	2,9586	2856	648960
910	828100	753571000	30,1662	9,6905	1,09890	2,9590	2859	650388

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log n$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
911	829921	756058031	30,1828	9,6941	1,09769	2,9595	2862	651818
912	831744	758550528	30,1993	9,6976	1,09649	2,9600	2865	653250
913	833569	761048497	30,2159	9,7012	1,09529	2,9605	2868	654684
914	835396	763551944	30,2324	9,7047	1,09409	2,9609	2871	656118
915	837225	766060875	30,2490	9,7082	1,09290	2,9614	2875	657555
916	839056	768575296	30,2655	9,7118	1,09170	2,9619	2878	658993
917	840889	771095213	30,2820	9,7153	1,09051	2,9624	2881	660433
918	842724	773620632	30,2985	9,7188	1,08932	2,9628	2884	661874
919	844561	776151559	30,3150	9,7224	1,08814	2,9633	2887	663317
920	846400	778688000	30,3315	9,7259	1,08696	2,9638	2890	664761
921	848241	781229961	30,3480	9,7294	1,08578	2,9643	2893	666207
922	850084	783777448	30,3645	9,7329	1,08460	2,9647	2897	667654
923	851929	786330467	30,3809	9,7364	1,08342	2,9652	2900	669103
924	853776	788889024	30,3974	9,7400	1,08225	2,9657	2903	670554
925	855625	791453125	30,4138	9,7435	1,08108	2,9661	2906	672006
926	857476	794022776	30,4302	9,7470	1,07991	2,9666	2909	673460
927	859329	796597983	30,4467	9,7505	1,07875	2,9671	2912	674915
928	861184	799178752	30,4631	9,7540	1,07759	2,9675	2915	676372
929	863041	801765089	30,4795	9,7575	1,07643	2,9680	2919	677831
930	864900	804357000	30,4959	9,7610	1,07527	2,9685	2922	679291
931	866761	806954491	30,5123	9,7645	1,07411	2,9689	2925	680752
932	868624	809557568	30,5287	9,7680	1,07296	2,9694	2928	682216
933	870489	812166237	30,5450	9,7715	1,07181	2,9699	2931	683680
934	872356	814780504	30,5614	9,7750	1,07066	2,9703	2934	685147
935	874225	817400375	30,5778	9,7785	1,06952	2,9708	2937	686615
936	876096	820025856	30,5941	9,7819	1,06838	2,9713	2941	688084
937	877969	822656953	30,6105	9,7854	1,06724	2,9717	2944	689555
938	879844	825293672	30,6268	9,7889	1,06610	2,9722	2947	691028
939	881721	827936019	30,6431	9,7924	1,06496	2,9727	2950	692502
940	883600	830584000	30,6594	9,7959	1,06383	2,9731	2953	693978
941	885481	833237621	30,6757	9,7993	1,06270	2,9736	2956	695455
942	887364	835896888	30,6920	9,8028	1,06157	2,9741	2959	696934
943	889249	838561807	30,7083	9,8063	1,06045	2,9745	2963	698415
944	891136	841232384	30,7246	9,8097	1,05932	2,9750	2966	699897
945	893025	843908625	30,7409	9,8132	1,05820	2,9754	2969	701380
946	894916	846590536	30,7571	9,8167	1,05708	2,9759	2972	702865
947	896809	849278123	30,7734	9,8201	1,05597	2,9763	2975	704352
948	898704	851971392	30,7896	9,8236	1,05485	2,9768	2978	705840
949	900601	854670349	30,8058	9,8270	1,05374	2,9773	2981	707330
950	902500	857375000	30,8221	9,8305	1,05263	2,9777	2985	708822
951	904401	860085351	30,8383	9,8339	1,05152	2,9782	2988	710315
952	906304	862801408	30,8545	9,8374	1,05042	2,9786	2991	711809
953	908209	865523177	30,8707	9,8408	1,04932	2,9791	2994	713306
954	910116	868250664	30,8869	9,8443	1,04822	2,9795	2997	714803
955	912025	870983875	30,9031	9,8477	1,04712	2,9800	3000	716303
956	913936	873722816	30,9192	9,8511	1,04603	2,9805	3003	717804
957	915849	876467493	30,9354	9,8546	1,04493	2,9809	3007	719306
958	917764	879217912	30,9516	9,8580	1,04384	2,9814	3010	720810
959	919681	881974079	30,9677	9,8614	1,04275	2,9818	3013	722316

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	$\log n$	πn	$\frac{1}{4} \pi n^2$
960	921600	884736000	30,9839	9,8648	1,04167	2,9823	3016	723823
961	923521	887503681	31,0000	9,8683	1,04058	2,9827	3019	725332
962	925444	890277128	31,0161	9,8717	1,03950	2,9832	3022	726842
963	927369	893056347	31,0322	9,8751	1,03832	2,9836	3025	728354
964	929296	895841344	31,0483	9,8785	1,03734	2,9841	3028	729867
965	931225	898632125	31,0644	9,8819	1,03627	2,9845	3032	731382
966	933156	901428696	31,0805	9,8854	1,03520	2,9850	3035	732899
967	935089	904231063	31,0966	9,8888	1,03413	2,9854	3038	734417
968	937024	907039232	31,1127	9,8922	1,03306	2,9859	3041	735937
969	938961	909853209	31,1288	9,8956	1,03199	2,9863	3044	737458
970	940900	912673000	31,1448	9,8990	1,03093	2,9868	3047	738981
971	942841	915498611	31,1609	9,9024	1,02987	2,9872	3050	740506
972	944784	918330048	31,1769	9,9058	1,02881	2,9877	3054	742032
973	946729	921167317	31,1929	9,9092	1,02775	2,9881	3057	743559
974	948676	924010424	31,2090	9,9126	1,02669	2,9886	3060	745088
975	950625	926859375	31,2250	9,9160	1,02564	2,9890	3063	746619
976	952576	929714176	31,2410	9,9194	1,02459	2,9894	3066	748151
977	954529	932574833	31,2570	9,9227	1,02354	2,9899	3069	749685
978	956484	935441352	31,2730	9,9261	1,02249	2,9903	3072	751221
979	958441	938313739	31,2890	9,9295	1,02145	2,9908	3076	752758
980	960400	941192000	31,3050	9,9329	1,02041	2,9912	3079	754296
981	962361	944076141	31,3209	9,9363	1,01937	2,9917	3082	755837
982	964324	946966168	31,3369	9,9396	1,01833	2,9921	3085	757378
983	966289	949862087	31,3528	9,9430	1,01729	2,9926	3088	758922
984	968256	952763904	31,3688	9,9464	1,01626	2,9930	3091	760466
985	970225	955671625	31,3847	9,9497	1,01523	2,9934	3094	762013
986	972196	958585256	31,4006	9,9531	1,01420	2,9939	3098	763561
987	974169	961504803	31,4166	9,9565	1,01317	2,9943	3101	765111
988	976144	964430272	31,4325	9,9598	1,01215	2,9948	3104	766662
989	978121	967361669	31,4484	9,9632	1,01112	2,9952	3107	768214
990	980100	970299000	31,4643	9,9666	1,01010	2,9956	3110	769769
991	982081	973242271	31,4802	9,9699	1,00908	2,9961	3113	771325
992	984064	976191488	31,4960	9,9733	1,00806	2,9965	3116	772882
993	986049	979146657	31,5119	9,9766	1,00705	2,9969	3120	774441
994	988036	982107784	31,5278	9,9800	1,00604	2,9974	3123	776002
995	990025	985074875	31,5436	9,9833	1,00503	2,9978	3126	777564
996	992016	988047936	31,5595	9,9866	1,00402	2,9983	3129	779128
997	994009	991026973	31,5753	9,9900	1,00301	2,9987	3132	780693
998	996004	994011992	31,5911	9,9933	1,00200	2,9991	3135	782260
999	998001	997002999	31,6070	9,9967	1,00100	2,9996	3138	783828
1000	1000000	1000000000	31,6228	10,0000	1,00000	3,0000	3142	785398

TABELLA II. -- Funzioni trigonometriche.

Gradi	Seno						
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	80
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	70
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40141	0,40408	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	60
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	50
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	45
45	0,70711						44
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	Gradi

Coseno

Gradi	Coseno						
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	
0	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99641	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	80
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	70
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	60
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	50
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	45
45	0,70711						44
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	Gradi

(Seguito della Tabella II).

Gradi	Tangente						Gradi
	0'	10'	20'	30'	40'		
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	80
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	70
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	63
27	0,50953	0,51319	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	60
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	57
33	0,64911	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	50
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	45
45	1,00000						44
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	Gradi
			Cotangente				

(Seguito della Tabella II).

Gradi	Cotangente						
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	89
1	57,28996	19,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92412	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	80
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44912	4,38969	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98868	2,96004	2,93189	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	70
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29981	2,28167	2,26374	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	60
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38481	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28761	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	50
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	49
41	1,15037	1,14363	1,13691	1,13029	1,12369	1,11713	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07861	47
43	1,07237	1,06613	1,05991	1,05378	1,04766	1,04158	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	45
45	1,00000						44
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	Gradi

Tangente

TABELLA III. — Peso in kg. di un m.³ di diverse sostanze.

Sostanze	Peso in kg. di 1 m. ³	Sostanze	Peso in kg. di 1 m. ³
Acciaio.	7500 ÷ 8100	Cristallo comune.	2900 ÷ 3400
" non temperato né battuto	7830	" Flint-glass.	3300 ÷ 3780
Aceto.	1010	" crown	2892 ÷ 3000
Acidi:		" da rocca	2685 ÷ 3770
carbonico a 0 ^o e press. atm.	1.980	Crusca a misura	190 ÷ 260
cloridrico, 40 ^o / ₁₀ HCl; 15 ^o	1190	Cuoio	1100
nitrico a 50 ^o Beaumé e 15 ^o	1520	Diamante	3500
solforico a 66 ^o Beaumé e 15 ^o	1850	Erba fresca in mucchio.	425 ÷ 500
solforoso gas a 0 ^o e press. atm.	2.900	Essenze in genere	840 ÷ 960
liquido	1490	Etere.	736
Acqua di mare.	1026	Farina di frumento a misura	430 ÷ 470
Agata.	2590	Fecola	1500
Alabastro d'Europa.	1874	Feldspato	2600
" Orientale.	2730	Ferro.	7700 ÷ 7900
Alcool assoluto a 15^o	797	Fieno in mucchio	100 ÷ 120
Allume.	1900	Fosforo.	1830 ÷ 1900
Alluminio.	2560 ÷ 2670	Frumento a misura.	700 ÷ 830
Amianto	2050 ÷ 2800	Gas illuminante:	
Amido	1530	a 0 ^o e press. atm.	0,450 ÷ 0,500
Antimonio	6650 ÷ 6860	ricco, a 0 ^o e press. atm.	0,600 ÷ 0,700
Antracite in massa.	1300 ÷ 1820	Gesso.	1400
Ardesia.	2630 ÷ 2670	Ghiaccio	920
Arena	1910	Ghiaia in mucchio	1500 ÷ 1800
Argentano (panckfong)	8400 ÷ 8700	Ghisa.	7000 ÷ 7500
Argento.	10450 ÷ 10600	Glicerina	1280

Argilla:

asciutta	2000 ÷ 2250
appena cavata	2600
Aria a 0 ^o e press. atm.	1,293
Asfalto	1100 ÷ 1330
Avena	360 ÷ 560
Avorio	1800 ÷ 1920
Azoto a 0 ^o e press. atm.	1,257
Benzina a 15 ^o	700 ÷ 750
Birra.	1020 ÷ 1030
Bismuto	9800
Bronzo	8450 ÷ 9200
" d'alluminio	7800
" da cannone.	8460
Burro	940
Calce in pezzi.	1250 ÷ 1800
Calcestruzzo.	2100 ÷ 2500
Caolino.	2200
Caucciù.	930 ÷ 1250

Carbone:

fossile in massa	1200 ÷ 1500
" pezzi.	800 ÷ 1000
di "legna dolce in pezzi	135 ÷ 180
" forte " "	200 ÷ 220
Catrame " " " "	1110 ÷ 1130
Cemento in polvere	1450 ÷ 1750
Cera	965 ÷ 970
Cereali in genere a misura	620 ÷ 750
Cloro liquido	1330
Cloroformio.	1490
Coke da gas in pezzi	300 ÷ 350
" metallurgico in pezzi	400 ÷ 450
Corallo	2690
Creta.	2250 ÷ 2670

Gomme in genere	1100 ÷ 1300
Grafite	2200
Granoturco a misura	670 ÷ 780
Grassi	920 ÷ 940
Grès	2600
Gutta-perca	965
Idrogeno a 0 ^o e press. atm.	0,089
Inghiaiata.	2000
Jodio a 17 ^o	4950
Latte a 15 ^o	1020 ÷ 1040

Legni stagionati:

abete	550
" giallo	660
acacia	717
acero	674
betulla	812
bosso comune	912
" olandese	1328
cedro selvatico	596
" americano	561
" indiano	1315
" di Palestina.	613
ciliegio	715
cipresso	644
ebano americano	1331
" indiano	1209
" spagnuolo	800
faggio	823
frassino	697
gelso	897
larice rosso	700
mogano	1063
melo comune.	792
noce	850
pero	661

Sostanze	Peso in kg. di 1 m ³	Sostanze	Peso in kg. di 1 m ³
pioppo	477	granito della Balma, presso Biella	2750
pino	560 ÷ 815	lava tenera di Napoli	1720
quercia	934	„ di Napoli (Piperino)	2610
salice	585	„ di Roma (Peperino)	1970
tiglio	604	pietra di lavagna	2855
ulivo	920	malachite	3670 ÷ 4000
vite	1215 ÷ 1237	marmo bianco comune	2830
<i>Legni appena recisi:</i>		„ comune.	2670
pino, larice, abete	800 ÷ 900	„ di Carrara.	2720
acero, frassino, noce.	850 ÷ 950	„ del Duomo di Milano.	2896
faggio, quercia	900 ÷ 1100	„ lumachella	2670
<i>Legna da fuoco:</i>		„ nero d'Italia.	2710
dolce, in catasta, stagionata.	250 ÷ 350	„ di Paro	2838
forte, „ „ „	400 ÷ 450	„ serpentino	2450
minuta, in fascine, „ „	100 ÷ 120	„ turchino di Genova	2710
Legumi in genere verdi o secchi, a misura	720 ÷ 810	Pietra molare	2840 ÷ 2520
Lignite asciutta	1100 ÷ 1400	Porfido	2670 ÷ 2750
Magnesio	1780	Piombo	11200 ÷ 11450
Malta	1640 ÷ 1850	Platino	21300
Manganese	8010	Polvere da guerra	858
Mercurio a 0 ^o	13600	Porcellana.	2150 ÷ 2490
Mica	2900	„ cinese	2385
Minio	8600	„ di Sevres	2310
<i>Muratura di:</i>		Potassa	2260
mattoni pieni, asciutta.	1550 ÷ 1650	Pozzolana	2170
		Quarzo	2655
		Rame	8600 ÷ 8900
		Resine in genere.	1070
		Riso pilato a misura	770 ÷ 850
		Risone a misura	500 ÷ 600
		Rubino	4020
		Sabbia fine asciutta	1400 ÷ 1650

mattoni vuoti, asciutta	1050 ÷ 1100
pietrame, asciutta	2250 ÷ 2450
Naffa a 15°	800 ÷ 850

Neve:

asciutta, non compressa	50
inzuppata	500
stato ordinario	125

Nichelio	8400 ÷ 8650
--------------------	-------------

Olli a 15°	920 ÷ 940
----------------------	-----------

Oro	19500
---------------	-------

Ossido di carbonio a 0° e press. atm.	1.250
---	-------

Ossigeno a 0° e press. atm.	1.430
-------------------------------------	-------

Osso in genere	1800
--------------------------	------

Ottone	8400 ÷ 8700
------------------	-------------

Paglia in mucchio	60 ÷ 70
-----------------------------	---------

Petrolio da lampade a 15°	750 ÷ 840
-------------------------------------	-----------

Pietre da costruzione:

arenaria di Viganò (Brianza)	2210
--	------

" grigia di Firenze	2560
----------------------------------	------

basalto	2700 ÷ 2900
-------------------	-------------

bevola del lago Maggiore	2610
------------------------------------	------

calcare di Viggiù	2230
-----------------------------	------

calcari teneri	1400 ÷ 2200
--------------------------	-------------

" mezzani	2200 ÷ 2600
------------------------	-------------

" duri	2600 ÷ 2900
---------------------	-------------

ceppo di Brembate	2220
-----------------------------	------

" gentile	2300
------------------------	------

dolomite	2800 ÷ 2860
--------------------	-------------

granito rosso di Baveno	2600
-----------------------------------	------

" bigio del lago Maggiore	2650
--	------

" di Chiavenna	2620
-----------------------------	------

" d'Egitto	2650
-------------------------	------

" d'Inghilterra	2730
------------------------------	------

" " umida	1900 ÷ 2000
---------------------------	-------------

" " grossa asciutta	1350 ÷ 1500
-------------------------------------	-------------

Sale (Na Cl) asciutto	2080 ÷ 2170
---------------------------------	-------------

Salnitro	1950 ÷ 2080
--------------------	-------------

Segale a misura	660 ÷ 820
---------------------------	-----------

Semi oleosi ed altri	600 ÷ 800
--------------------------------	-----------

Semolini a misura	500 ÷ 680
-----------------------------	-----------

Solfato di rame	2270
---------------------------	------

" di soda	2250
------------------------	------

Solfuro di carbonio:

gas, a 0° e press. atm.	3.400
---------------------------------	-------

liquido, a 15°	1290
--------------------------	------

Stagno	7300 ÷ 7500
------------------	-------------

Sughero	240
-------------------	-----

Talco	2620
-----------------	------

Terra:

silicea (leggera), asciutta	1300 ÷ 1400
---------------------------------------	-------------

argillosa (forte), asciutta	1700 ÷ 2000
---------------------------------------	-------------

ghiaiosa, asciutta	1400 ÷ 1700
------------------------------	-------------

Terriccio (Humus)	1125
-----------------------------	------

Torba secca in pezzi	200 ÷ 250
--------------------------------	-----------

" compressa in pezzi	450 ÷ 550
-----------------------------------	-----------

Vetro	2450 ÷ 2650
-----------------	-------------

Vino d'Italia comune	997
--------------------------------	-----

" di Bordeaux	994
----------------------------	-----

" di Borgogna	991
----------------------------	-----

" di Champagne	962
-----------------------------	-----

" di Malaga	1022
--------------------------	------

" del Reno	1002
-------------------------	------

" di Tokai	1054
-------------------------	------

Zinco	7000 ÷ 7200
-----------------	-------------

Zolfo	1970 ÷ 2070
-----------------	-------------

Zucchero	1600
--------------------	------

CAPITOLO PRIMO

Riassunto di nozioni preliminari.

1. — Funzioni speciali. (*)

La **funzione esponenziale**, che si indica col simbolo e^z , è quella rappresentata dalla serie

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (**)$$

convergente per un valore complesso di z . Il valore di questa funzione per $z = 1$ si indica con e , che si chiama la base dei **logaritmi naturali**, o **iperbolici** (perchè possono servire alla quadratura dell'iperbole equilatera), o **neperiani**; il valore della funzione esponenziale per z qualunque, non è che la potenza z^{m^a} di e : di qui la notazione e^z .

Ogni radice z dell'equazione

$$e^z = w$$

si chiama un **logaritmo naturale**, o **neperiano**, o **iperbolico** di w ; lo indicheremo con $\text{logh } w$ (**).

Avendosi da calcolare espressioni contenenti logaritmi iperbolici e non possedendo che le tavole dei logaritmi decimali (che non sono altro che le radici reali z dell'equazione $10^z = w$), si applica la formola

$$\text{log } w = M \text{ logh } w$$

(*) Crediamo utile richiamare le nozioni fondamentali di funzioni speciali di cui occorre far uso in applicazioni della Scienza delle Costruzioni. Per maggiori dettagli si può riscontrare con profitto la pregevole opera del Chiar.mo Prof. E. PASCAL " *Repertorio di Matematiche Superiori* „ I pag. 477. Manuali Hoepli.

(**) dove in generale con $n!$ si rappresenta il prodotto $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n$.

(***) Altri Autori lo rappresentano invece con $\text{log}_e w$, oppure $\text{loh } w$.

dove M rappresenta il *modulo* dei logaritmi volgari, cioè :

$$M = \log e = 0,434294481903251827651128919\dots$$

$$\frac{1}{M} = \log h 10 = 2,3025851\dots$$

TABELLA IV. (*)

Num.	logh	Num.	logh	Num.	logh	Num.	logh
1,1	0,0953	4,1	1,4110	7,1	1,9600	11	2,3979
1,2	0,1823	4,2	1,4351	7,2	1,9741	12	2,4849
1,3	0,2624	4,3	1,4586	7,3	1,9879	13	2,5649
1,4	0,3365	4,4	1,4816	7,4	2,0015	14	2,6391
1,5	0,4055	4,5	1,5041	7,5	2,0149	15	2,7081
1,6	0,4700	4,6	1,5261	7,6	2,0281	16	2,7726
1,7	0,5306	4,7	1,5476	7,7	2,0412	17	2,8332
1,8	0,5878	4,8	1,5686	7,8	2,0541	18	2,8904
1,9	0,6419	4,9	1,5892	7,9	2,0669	19	2,9444
2,0	0,6931	5,0	1,6094	8,0	2,0794	20	2,9957
2,1	0,7419	5,1	1,6292	8,1	2,0919	21	3,0445
2,2	0,7885	5,2	1,6487	8,2	2,1041	22	3,0910
2,3	0,8329	5,3	1,6677	8,3	2,1163	23	3,1355
2,4	0,8755	5,4	1,6864	8,4	2,1282	24	3,1781
2,5	0,9163	5,5	1,7047	8,5	2,1401	25	3,2189
2,6	0,9555	5,6	1,7228	8,6	2,1518	26	3,2581
2,7	0,9933	5,7	1,7405	8,7	2,1633	27	3,2958
2,8	1,0296	5,8	1,7579	8,8	2,1748	28	3,3322
2,9	1,0647	5,9	1,7750	8,9	2,1861	29	3,3672
3,0	1,0986	6,0	1,7918	9,0	2,1972	30	3,4012
3,1	1,1314	6,1	1,8083	9,1	2,2083	31	3,4340
3,2	1,1632	6,2	1,8245	9,2	2,2192	32	3,4657
3,3	1,1939	6,3	1,8405	9,3	2,2300	33	3,4965
3,4	1,2238	6,4	1,8563	9,4	2,2407	34	3,5264
3,5	1,2528	6,5	1,8718	9,5	2,2513	35	3,5553
3,6	1,2809	6,6	1,8871	9,6	2,2618	36	3,5835
3,7	1,3083	6,7	1,9021	9,7	2,2721	37	3,6109
3,8	1,3350	6,8	1,9169	9,8	2,2824	38	3,6376
3,9	1,3610	6,9	1,9315	9,9	2,2925	39	3,6636
4,0	1,3863	7,0	1,9459	10	2,3026	40	3,6889

(*) Dal Manuale Colombo.

Le linee trigonometriche o funzioni circolari sono legate alle esponenziali dalle

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} \\ \operatorname{cos} z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ e^{iz} &= \operatorname{cos} z + i \operatorname{sen} z \end{aligned} \right\} (*)$$

Da queste si ricava che:

la funzione seno per argomento immaginario puro, cioè della forma iz con z reale, è una funzione immaginaria pura; quindi la funzione

$$\frac{\operatorname{sen}(iz)}{i} \quad (z = \text{reale})$$

è una funzione reale:

la funzione coseno per argomento immaginario puro è una funzione reale;

la funzione tangente per argomento immaginario puro, divisa per i , dà una funzione reale.

Tali funzioni reali

$$\frac{\operatorname{sen}(iz)}{i}, \quad \operatorname{cos} iz, \quad \frac{\operatorname{tang}(iz)}{i}$$

si chiamano **funzioni iperboliche**, e le rappresenteremo con

$$\operatorname{senh} z, \quad \operatorname{cosh} z, \quad \operatorname{tanh} z.$$

Appare subito che le funzioni iperboliche devono soddisfare a proprietà assai simili a quelle delle funzioni circolari; propriamente le formole relative alle funzioni iperboliche si deducono da quelle delle funzioni circolari ponendo dappertutto rispettivamente i simboli

$$i \operatorname{senh}, \quad \operatorname{cosh}, \quad i \operatorname{tanh}$$

al posto di

$$\operatorname{sen}, \quad \operatorname{cos}, \quad \operatorname{tang}.$$

Le formole esponenziali delle funzioni iperboliche sono

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{cosh} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{tanh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{\operatorname{senh} z}{\operatorname{cosh} z}.$$

(*) La lettera i indica $\sqrt{-1}$.

La relazione fondamentale fra seno e coseno diventa

$$\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$$

Le funzioni iperboliche ricevono questo nome dalla proprietà:

Se si costruisce un'iperbole equilatera di equazione (riferita agli assi) $x^2 - y^2 = 1$, e se si chiama z il doppio dell'area del settore iperbolico limitato dall'asse delle x , dal raggio vettore OM (che va dal centro O dell'iperbole ad un punto M dell'iperbole stessa) e dal ramo d'iperbole, le coordinate x , y di M sono rispettivamente il coseno ed il seno iperbolico di z .

Per mantenere strettamente l'analogia si dovrebbe dunque parlare sempre di settori iperboliche così di settori circolari; l'uso porta però per la circonferenza a parlare di archi.

Oggi che le applicazioni delle funzioni iperboliche sono molto estese anche alla meccanica tecnica ed applicata, e queste funzioni sono diventate un complemento delle funzioni circolari, di cui permettono di estendere i problemi e generalizzare i risultati, le tavole per trovare direttamente le funzioni, o meglio i logaritmi delle funzioni iperboliche, sono molto utili e ve ne sono parecchie; le più importanti sono le seguenti: quelle molto estese di Gudermann (Crelle VI, VII, VIII, IX); quelle del Prof. Mossotti; del Prof. Angelo Forti (1863) le tavole dei logaritmi delle funzioni circolari ed iperboliche; quelle, più razionali, Ligowsky (Tafeln der Hyperbelfunctionen - 1890) che sono molto comode, ma che sarebbero preferibili se, come in quelle del Prof. Angelo Forti, di fronte ai logaritmi delle funzioni iperboliche, si fossero posti quelli delle funzioni circolari, corrispondendosi però argomento per argomento (come ha fatto il Signor Zimmermann per le funzioni naturali); infine le nuove tavole del Signor Forti pubblicate a Roma nel 1892:

Quando non si abbiano a disposizione le tavole delle funzioni iperboliche, si può operare abbastanza speditamente facendo uso anche delle ordinarie tavole dei logaritmi dei numeri e delle funzioni circolari; e cioè, avendo da trovare il senh ed il \cosh di un dato argomento ω , si determina prima un certo angolo τ con la relazione

$$\log \operatorname{tang} \left(45^\circ + \frac{\tau}{2} \right) = \omega \log e,$$

e si cerca poi

$$\operatorname{tang} \tau = \operatorname{senh} \omega$$

$$\sec \tau = \cosh \omega$$

2. — Baricentri, momenti statici e momenti d'inerzia.

Sappiamo che le coordinate del baricentro o centro di gravità di un sistema di punti materiali, di masse m_1, m_2, \dots, m_n , rife-

rito a tre assi ortogonali OX, Y, Z , sono date dalle

$$\xi = \frac{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} m_{\nu} x_{\nu}}{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} m_{\nu}}, \quad \eta = \frac{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} m_{\nu} y_{\nu}}{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} m_{\nu}}, \quad \zeta = \frac{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} m_{\nu} z_{\nu}}{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} m_{\nu}},$$

Chiamasi **momento di primo grado** o **momento statico** di un punto materiale rispetto ad un piano, il prodotto della sua massa per la sua distanza dal piano stesso. Al momento statico si può attribuire un segno quando si convenga di prendere come positiva o negativa la distanza del punto dal piano secondochè esso è da una banda del piano o dalla banda opposta.

La somma dei momenti statici di tutti i punti di un sistema dicesi **momento di primo grado** o **momento statico del sistema**.

Le ξ, η, ζ sono quindi i rapporti fra i momenti statici — rispetto ai piani coordinati — e la massa del sistema.

Il momento statico di un sistema rispetto ad un piano è uguale al momento statico rispetto allo stesso piano del baricentro, nel quale si imagini concentrata tutta la massa del sistema.

Chiamasi **momento d'inerzia** o **momento di secondo grado semplice** di un sistema di punti materiali rispetto ad un asse, la somma

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} m_{\nu} \rho_{\nu}^2$$

dove ρ_{ν} indica la distanza di un punto dall'asse.

Il momento d'inerzia è una quantità essenzialmente positiva e non si annulla che nel caso in cui tutto il sistema sia distribuito sull'asse.

Siccome il rapporto

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} m_{\nu} \rho_{\nu}^2}{\sum_{\nu=1}^{\nu=n} m_{\nu}}$$

è essenzialmente positivo, esso può considerarsi come il quadrato d'una certa quantità ρ , che dicesi **raggio d'inerzia** o **di girazione**.

Sieno:

I_V e ρ_V il momento ed il raggio d'inerzia di un sistema rispetto ad un asse (V);

I_U e ρ_U il momento ed il raggio d'inerzia di un sistema rispetto ad un altro asse (U) parallelo a (V);

M la massa del sistema;
 d la distanza tra i due assi e
 D " " del baricentro C del sistema dal piano (ν) [di traccia $\nu \nu$ sul piano del disegno] condotto per (V) perpendicolare al piano $(V) (U)$.

Si ha:

$$I_u = I_v + M d (d - 2 D)$$

$$\rho_u^2 = \rho_v^2 + d (d - 2 D)$$

Se C cade nel piano (ν) , allora $D = 0$ e

$$I_u = I_v + M d^2$$

$$\rho_u^2 = \rho_v^2 + d^2$$

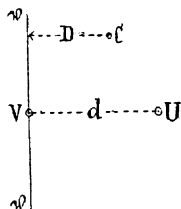


Fig. 1.

Se in particolare C cade su (V) , cioè se l'asse (V) è baricentrico, hanno luogo a fortiori queste due ultime formole.

Riferendo il sistema agli assi coordinati $O X, Y, Z$, si ha:

$$I_x = \sum_{\nu=1}^n m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2), \quad I_y = \sum_{\nu=1}^n m_\nu (x_\nu^2 + z_\nu^2),$$

$$I_z = \sum_{\nu=1}^n m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2).$$

Chiamasi **momenti d'inerzia composti** o **momenti di secondo grado misti** relativi, rispettivamente, agli assi: $O Y$ e $O Z$, $O X$ e $O Z$, $O X$ e $O Y$, (*) le somme

$$\sum_{\nu=1}^n m_\nu y_\nu z_\nu, \quad \sum_{\nu=1}^n m_\nu x_\nu z_\nu, \quad \sum_{\nu=1}^n m_\nu x_\nu y_\nu,$$

che rappresenteremo con

$$I_{yz}, \quad I_{xz}, \quad I_{xy}.$$

Sia I_u il momento d'inerzia di un sistema rispetto ad un asse OU qualunque, passante per l'origine degli assi coordinati $O X, Y, Z$ e α, β, γ gli angoli che OU fa rispettivamente con questi assi si ha

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2 I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2 I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2 I_{xy} \cos \alpha \cos \beta.$$

(*) Taluni li chiamano anche *momenti di deviazione* o *prodotti d'inerzia*.

La quadrica di equazione

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2 I_{yz} yz - 2 I_{zx} zx - 2 I_{xy} xy = 1$$

è un ellissoide e chiamasi **ellissoide d'inerzia** del sistema di punti materiali relativo agli assi OX, Y, Z . L'ellissoide d'inerzia, mancando nella sua equazione i termini di 1° grado, ha il suo centro in O .

Il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro O dell'ellissoide d'inerzia, è uguale all'inverso del quadrato del segmento di asse compreso fra O e l'ellissoide stesso.

Se si prende come assi coordinati gli assi principali (detti **assi principali d'inerzia**) dell'ellissoide d'inerzia, allora i momenti misti d'inerzia risultano nulli, cioè

$$I_{y'z'} = 0, \quad I_{z'x'} = 0, \quad I_{x'y'} = 0$$

ed

$$I_{x'}, \quad I_{y'}, \quad I_{z'},$$

si dicono **momenti principali d'inerzia**.

Se in particolare il centro O dell'ellissoide d'inerzia coincide col baricentro del sistema, allora si ha l'**ellissoide centrale d'inerzia**, gli **assi centrali d'inerzia** ed i **momenti centrali d'inerzia** (che possono essere principali o no).

I *sistemi continui* di punti materiali — epperò anche i solidi, le superficie e le linee materiali, siano omogenee o no — si possono considerare come *limiti* dei *sistemi discreti*, di cui abbiamo detto precedentemente: allora le somme Σ divengono integrali tripli, doppi o semplici, estesi a tutto il solido, a tutta la superficie o a tutta la linea.

Tanto per i momenti statici — e quindi anche per i baricentri — come per i momenti d'inerzia, si estende ai volumi, alle superficie ed alle linee, ciò che si è detto per i sistemi di punti materiali: e per ottenere tale estensione basta supporli omogenei di densità = 1, e cioè basta porre in tutto quanto si è esposto precedentemente o i volumi, o le aree delle superficie, o le lunghezze delle linee al posto delle masse.

Nel presente Manuale ci occorrerà considerare tali **elementi geometrici** relativi a superficie piane e propriamente alle aree delle sezioni normali di solidi.

3. — Figure piane.

I momenti statici (invece che rispetto a piani, qui naturalmente si tratta di momenti statici rispetto ad assi) e d'inerzia rispetto ad assi posti nel piano della figura, si dicono **equatoriali**; diconsi invece **polari** quelli presi rispetto ad assi perpendicolari al piano della figura.

Il momento d'inerzia polare di una figura piana qualunque si può trovare facendo la somma dei due momenti equatoriali ri-

spetto a due assi ortogonali qualunque la cui origine è sull'asse polare, cioè:

$$I_p = I_y + I_z$$

a) FORMOLE GENERALI.

Per la figura $A B C D$, essendo $A B$ un arco di curva piana qualunque, si ha

$$\Omega = \int_a^b y \, dz,$$

$$G_z = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 \, dz, \quad G_z = \int_a^b zy \, dz,$$

$$\zeta = \frac{G_z}{\Omega}, \quad \eta = \frac{G_y}{\Omega}$$

$$I_z = \int_a^b \left\{ \int y^2 \, dy \right\} dz,$$

$$I_y = \int_a^b \left\{ \int z^2 \, dy \right\} dz,$$

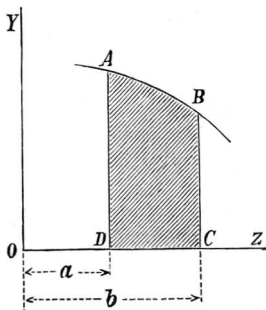


Fig. 2.

b) RELAZIONI GENERALI.

Dati i momenti statici G_z , G_y , il momento statico G_u rispetto ad un nuovo asse $O U$ passante per O , che fa con $O Z$ l'angolo α , è dato dalla

$$G_u = G_z \cos \alpha - G_y \sin \alpha$$

Dati I_z , I_y , il momento d'inerzia I_u è dato dalla:

$$I_u = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2 I_{zy} \cos \alpha \sin \alpha$$

essendo I_{zy} il momento misto d'inerzia relativo agli assi z e y , cioè

$$I_{zy} = \iint zy \, dy \, dz$$

ed il raggio di girazione ρ_u dalla:

$$\rho_u = \sqrt{\frac{I_u}{\Omega}}$$

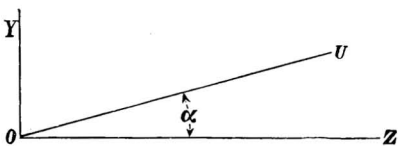


Fig. 3.

Derivando l'espressione di I_{xy} rispetto ad α si deduce che:

la derivata del momento d'inerzia relativo ad un asse OU , presa rispetto all'angolo α formato da quest'asse con l'asse delle z , è uguale a (-2) volte il momento misto d'inerzia relativo all'asse considerato OU ed all'asse perpendicolare allo stesso passante per l'origine O .

La conica d'equazione

$$I_x z^2 + I_y y^2 - 2 I_{xy} zy = 1$$

è l'ellisse d'inerzia, la quale ha il centro in O .

Il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro O dell'ellisse d'inerzia, è uguale all'inverso del quadrato del segmento di asse compreso fra O e l'ellisse stesso.

Se si prende come assi coordinati gli assi principali (assi principali d'inerzia) dell'ellisse d'inerzia, allora

$$I_{y'z'} = 0$$

ed $I_{z'}$, $I_{y'}$, dico nei **momenti principali d'inerzia** e sono l'uno il *massimo* e l'altro il *minimo* momento d'inerzia corrispondenti all'ellisse d'inerzia di centro O . Se $I_x \neq I_y$, il massimo ed il minimo momento d'inerzia hanno luogo per gli angoli α dati dalla

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}$$

Se $I_x = I_y$, il massimo ed il minimo momento d'inerzia si verificano rispetto alle bisettrici degli angoli retti formati dagli assi OZ , OY .

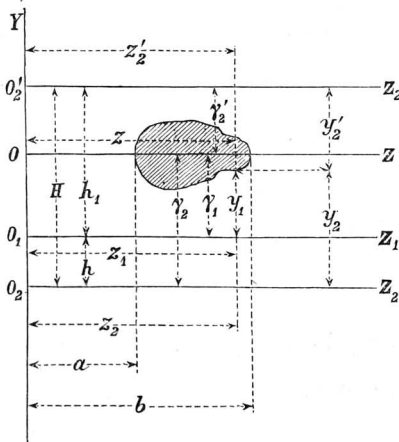


Fig. 4.

Se in particolare il centro O dell'ellisse d'inerzia coincide col baricentro della figura, allora si ha l'**ellisse centrale d'inerzia**, gli **assi centrali d'inerzia** ed i **momenti centrali d'inerzia** (che possono essere principali o no).

Sia OZ l'asse baricentrico di una figura: per gli assi paralleli ad OZ si avrà:

$$G_{z_1} = \Omega_{/1}$$

$$G_{z_2} = \Omega_{/2}$$

$$G_{z'_2} = \Omega_{/2'}$$

$$G_{z_2} = G_{z_1} + \Omega h, \quad G_{z'_2} = \Omega h_1 - G_{z_1}, \quad G_{z_2} = \Omega H - G_{z'_2}$$

$$I_{z_1} = I_z + \Omega \gamma_1^2, \quad I_{z_2} = I_z + \Omega \gamma_2^2, \quad I_{z'_2} = I_z + \Omega \gamma_2'^2,$$

$$I_{z_2} = I_{z_1} + \Omega (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) = I_{z_1} + (G_{z_2} + G_{z_1}) h,$$

$$I_{z'_2} = I_{z_1} + \Omega (\gamma_2'^2 - \gamma_1^2) = I_{z_1} + (G_{z'_2} + G_{z_1}) h_1,$$

$$I_{z'_2} = I_{z_2} + \Omega (\gamma_2'^2 - \gamma_2^2) = I_{z_2} - (G_{z'_2} - G_{z_2}) H.$$

4. — Valori di Ω , G , I , per alcune figure.

Oltre ai valori di Ω , G , I , dati per tutte le figure considerate, per qualcuna di queste abbiamo calcolato anche il valore di $I_{z_1 y_1}$.

QUADRATO.

$$\Omega = b^2$$

$$G_{z_1} = \frac{1}{2} b^3,$$

$$G_{y_1} = \frac{1}{2} b^3,$$

$$G_z = G_y = 0.$$

$$I_z = I_y = \frac{1}{12} b^4,$$

$$I_{z_1} = I_{y_1} = \frac{1}{3} b^4;$$

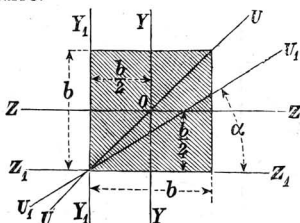


Fig. 5.

$$I_{vu} = 0 \quad \text{e perciò} \quad I_u = \frac{1}{12} b^4;$$

$$I_{u_1 v_1} = \frac{b^4}{4},$$

e perciò

$$I_{u_1} = \frac{b^4}{12} (4 - 3 \text{sen } 2\alpha).$$

RETTANGOLO.

$$\Omega = b h,$$

$$G_{z_1} = \frac{1}{2} b h^2,$$

$$G_{y_1} = \frac{1}{2} b^2 h,$$

$$G_z = G_y = 0.$$

$$I_z = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} b^3 h,$$

$$I_{z_1} = \frac{1}{3} b h^3,$$

$$I_{y_1} = \frac{1}{3} b^3 h,$$

$$I_{uv} = 0,$$

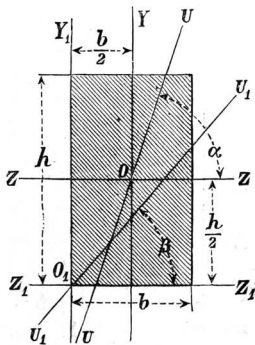


Fig. 6.

e perciò:

$$I_u = \frac{1}{12} (b h^3 \cos^2 \alpha + b^3 h \sin^2 \alpha),$$

$$I_{u_1 v_1} = \frac{b^2 h^2}{4};$$

perciò

$$I_{u_1} = \frac{b h^3}{3} \cos^2 \beta + \frac{b^3 h}{3} \sin^2 \beta - \frac{b^2 h^2}{2} \sin \beta \cos \beta,$$

ed al massimo ed il minimo di I_{u_1} sono dati da:

$$\text{tang } 2\beta = \frac{3}{2} \frac{b h}{b^2 - h^2}.$$

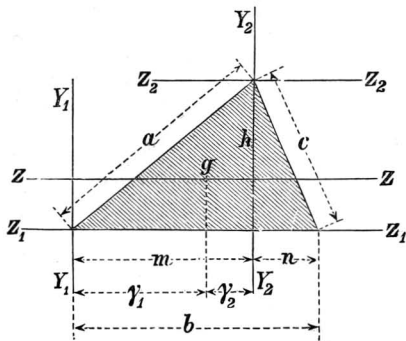


Fig. 7.

$$G_{y_1} = \frac{b h \gamma_1}{2}, \quad G_{y_2} = \frac{b h \gamma_2}{2};$$

$$I_{y_1} = \frac{h}{12} (a^2 m + c^2 n - h^2 b),$$

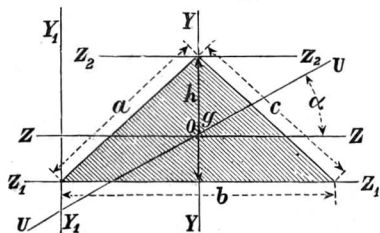


Fig. 8.

TRIANGOLO. Sia g il centro di gravità del triangolo:

$$\Omega = \frac{b h}{2},$$

$$G_z = 0,$$

$$G_{z_1} = \frac{1}{6} b h^2,$$

$$G_{z_2} = \frac{1}{3} b h^2;$$

$$I_z = \frac{1}{36} b h^3,$$

$$I_{z_1} = \frac{1}{12} b h^3,$$

$$I_{z_2} = \frac{1}{4} b h^3;$$

$$I_{y_2} = \frac{h}{12} \left\{ a^2 m + c^2 n - h^2 b + 6 b (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) \right\}$$

TRIANGOLO ISOSCELE. — I valori di Ω , G_z , G_{z_1} , G_{z_2} , I_z , I_{z_1} , I_{z_2} sono dati dalle stesse formole relative al triangolo qualunque. Gli altri valori si riducono a:

$$G_{y_1} = \frac{b^2 h}{4} \quad G_{y_2} = 0,$$

$$I_y = \frac{1}{48} b^3 h, \quad I_{y_1} = \frac{7}{48} b^3 h.$$

Inoltre si ha:

$$I_{uv} = I_{u_0} = \left(\frac{b h^3}{36} \cos^2 \alpha + \frac{b^3 h}{48} \sin^2 \alpha \right),$$

ed il massimo momento d'inertzia ha luogo rispetto a ZZ, ed il minimo rispetto a YY.

SEZIONE AD ANGOLO. Sia g il centro di gravità della sezione.

$$\Omega = s(B + b - s),$$

$$G_{z_1} = \left\{ b B^2 - (b - s)(B - s)^2 \right\},$$

$$H = \frac{G_{z_1}}{\Omega}$$

$$K = \frac{B^2 b - (B - s)(b - s)^2}{2 \Omega}$$

$$I_z = \frac{1}{3} \left\{ b B^3 - (b - s)(B - s)^3 \right\} - \Omega H^2,$$

$$I_y = \frac{1}{3} \left\{ B b^3 - (B - s)(b - s)^3 \right\} - \Omega K^2,$$

$$I_{z_1 y_1} = \frac{1}{4} \left\{ B b (H - h)(K - k) - (B - s)(b - s)(H - h + s)(K - k + s) \right\}.$$

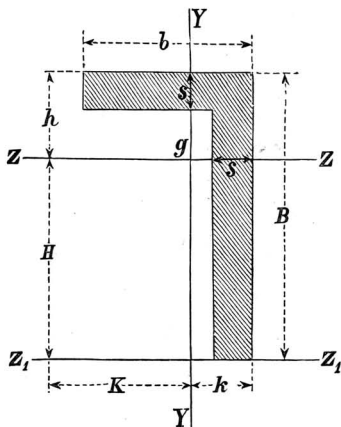


Fig. 9.

SEZIONE A T. Sia sempre g il centro di gravità della figura.

$$\Omega = b s + (c - s) s_1,$$

$$G_{z_1} = \frac{1}{2} \left\{ b c^2 - (b - s_1)(c - s)^2 \right\}$$

$$H = \frac{G_{z_1}}{\Omega}$$

$$I_y = \frac{1}{12} \left\{ s b^3 + (c - s) s_1^3 \right\},$$

$$I_z = \frac{1}{3} \left\{ b c^3 - (b - s_1)(c - s)^3 \right\} - \Omega H^2,$$

$$I_{z_1 y_1} = 0.$$

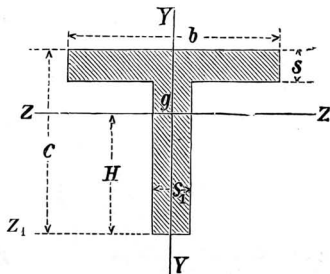
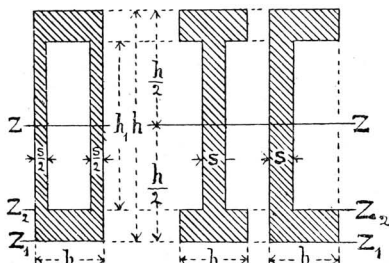


Fig. 10.

SEZIONE A O, A I ED A C.



$$\Omega = b h - (b - s) h_1$$

$$G_{z_1} = \frac{h}{2} [b h - (b - s) h_1]$$

$$G_{z_2} = \frac{h_1}{2} [b h - (b - s) h_1]$$

$$G_z = 0$$

$$I_z = \frac{1}{12} [b h^3 - (b - s) h_1^3]$$

Fig. 11.

TRAPEZIO. L'asse ZZ passa pel centro di gravità del trapezio.

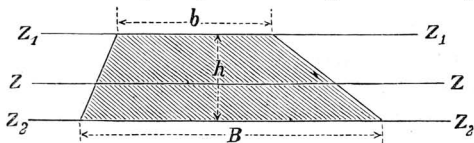


Fig. 12.

$$\Omega = \frac{1}{2} (B + b) h,$$

$$G_{z_1} = \frac{1}{6} (2B + b) h^2, \quad G_{z_2} = \frac{1}{6} (2b + B) h^2,$$

$$I_{z_1} = \frac{1}{12} (3B + b) h^3, \quad I_{z_2} = \frac{1}{12} (3b + B) h^3,$$

$$I_z = \frac{h^3}{36 (B + b)} (B^2 + 4Bb + b^2).$$

TRAPEZIO RETTANGOLO.

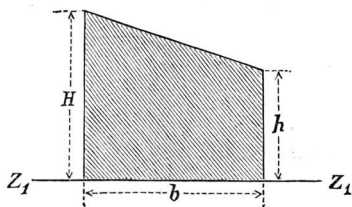


Fig. 13.

$$\Omega = \frac{1}{2} b (H + h),$$

$$G_{z_1} = \frac{b}{12} \left\{ H^2 + h^2 + (H + h)^2 \right\},$$

$$I_{z_1} = \frac{b}{36} \left\{ 2(H^3 + h^3) + (H + h)^3 \right\}$$

ESAGONO REGOLARE. Siano a l'apotema ed r il raggio del circolo circoscritto.

$$a = 0,866 r, \quad r = 1,155 a$$

$$\begin{aligned} \Omega &= 3 ar = \\ &= 2,598 r^2 = 3,464 a^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{z_1} &= 3 a^2 r = 2,250 r^3 = \\ &= 3,464 a^3, \end{aligned}$$

$$G_{y_1} = 3 ar^2 = 2,598 r^3 = 4 a^3,$$

$$\begin{aligned} I_z = I_y &= \frac{5\sqrt{3}}{16} r^4 = \\ &= 0,5413 r^4 = 1,7777 a^4. \end{aligned}$$

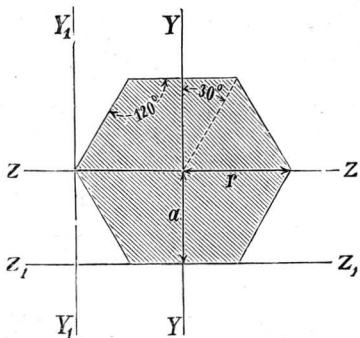


Fig.^{na}14.

POLIGONO REGOLARE QUALUNQUE. Siano: n il numero dei lati,

b il lato, a l'apotema, r il raggio del circolo circoscritto.

$$b = 2 r \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = 2 a \operatorname{tang} \frac{\pi}{n}; \quad a = r \cos \frac{\pi}{n} = \frac{b}{2} \cot \frac{\pi}{n};$$

$$r = a \sec \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2} b \operatorname{cosec} \frac{\pi}{n};$$

$$\Omega = \frac{n r^2}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} = n a^2 \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} = \frac{n b^2}{4} \cot \frac{\pi}{n}.$$

$$I_z = I_y = \frac{1}{24} (6 r^2 - b^2) \Omega = \frac{r^2}{4} \left(1 - \frac{2}{3} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n} \right) \Omega.$$

SETTORE CIRCOLARE. Si ha (*):

$$\Omega = \frac{r^2}{2} (\beta - \alpha);$$

$$\begin{aligned} G_{z_1} &= \frac{r^2}{6} \left\{ 3 a (\beta - \alpha) + 2 r (\cos \alpha - \cos \beta) \right\} = \\ &= \frac{r^2}{6} \left\{ 3 a (\beta - \alpha) + 2 (z_1 - z_2) \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= \frac{r^2}{24} \left\{ 3 (4 a^2 + r^2) (\beta - \alpha) \pm 16 ar (\cos \alpha - \cos \beta) - \right. \\ &\quad \left. - 3 r^2 (\operatorname{sen} \beta \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) \right\} = \\ &= \frac{r^2}{24} \left\{ 3 (4 a^2 + r^2) (\beta - \alpha) \pm 13 a (z_1 - z_2) + \right. \\ &\quad \left. + 3 (z_1 y_1 - z_2 y_2) \right\}. \end{aligned}$$

(*) α, β , ecc. sono archi nella circonferenza di raggio = 1.

In queste espressioni del momento I_{z_1} d'inerzia il segno + va

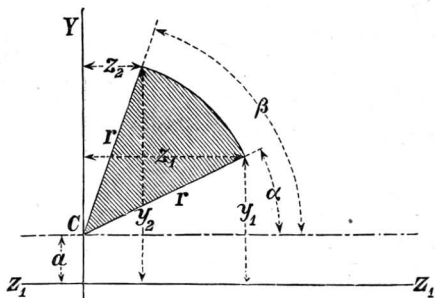


Fig. 15.

per la figura 15 ed il segno - per la figura 16.

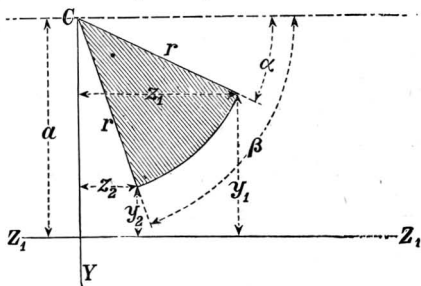


Fig. 16.

Per la figura 17 poi si ha:

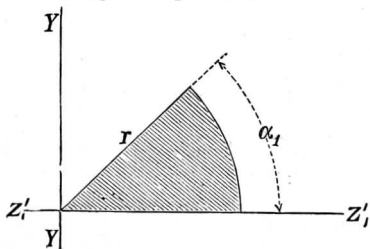


Fig. 17.

$$\Omega = \alpha_1 \frac{r^2}{2}$$

$$G_{z'_1} = \frac{r^3}{3} (1 - \cos \alpha_1),$$

$$I_{z'_1} =$$

$$= \frac{r^4}{8} \left(\alpha_1 - \frac{\sin 2 \alpha_1}{2} \right)$$

Per tutta la figura $A D B C$ (fig. 18) si ha:

$$\Omega = \frac{r^2}{2} (\text{tang } \alpha + \varphi),$$

$$G_z = \frac{r^3}{6} \left[\text{sen } \alpha \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 1 \right) + 4 \text{sen}^2 \frac{\varphi}{2} \right],$$

$$I_z = \frac{r^4}{4} \left[\frac{\text{sen } \alpha}{3} \left(\frac{1}{\cos^3 \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} + \cos \alpha \right) + \frac{1}{2} (\varphi - \text{sen } \varphi \cos \varphi) \right]$$

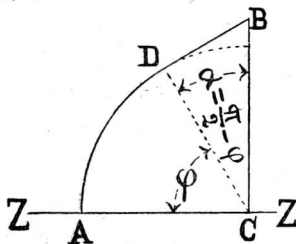


Fig. 18.

CIRCOLO. Si ha:

$$\Omega = \pi r^2,$$

$$G_{z_1} = \pi r^3,$$

$$I_{z_1} = \frac{5}{4} \pi r^4,$$

$$I_z = \frac{\pi r^4}{4}.$$

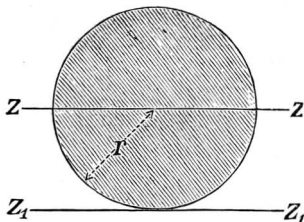


Fig. 19.

CORONA CIRCOLARE INTERNA.

$$\Omega = \pi (r_1^2 - r_2^2)$$

$$G_{z_1} = \pi (r_1^2 - r_2^2) r_1$$

$$G_z = 0$$

$$I_z = \frac{\pi}{4} (r_1^4 - r_2^4).$$

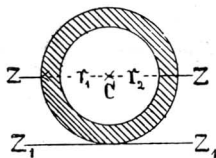


Fig. 20.

CORONA CIRCOLARE. Indichiamo con r il raggio medio; ed essendo, g il baricentro della corona circolare, YY l'asse baricentrico passante per O e ZZ_1 l'asse perpendicolare a YY passante per O , si ha:

$$\Omega = \alpha r b$$

$$G_{z_1} = \frac{2}{3} \left(3r^2 + \frac{b^2}{4} \right) b \text{sen } \frac{\alpha}{2}$$

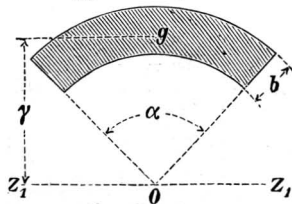


Fig. 20 bis.

$$\gamma = \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{r} \left(r^2 + \frac{1}{12} b^2 \right)$$

$$I_{z_1} = \frac{r b}{8} (4 r + b^2) (a + \operatorname{sen} a) \quad I_y = \frac{r b}{8} (4 r + b^2) (a - \operatorname{sen} a)$$

SEMICIRCOLO. L'asse ZZ passa pel centro di gravità del semicircolo.

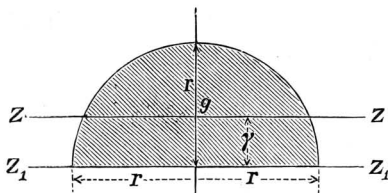


Fig. 21.

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\pi}{2} r^2, \\ G_{z_1} &= \frac{2}{3} r^3, \\ \gamma &= \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}, \\ I_{z_1} &= \frac{1}{8} \pi r^4 \\ I_z &= \frac{9 \pi^2 - 64}{72 \pi} r^4 = \\ &= 0,10975 r^4 \end{aligned}$$

SETTORE CIRCOLARE. L'asse ZZ passa pel centro di gravità del settore.

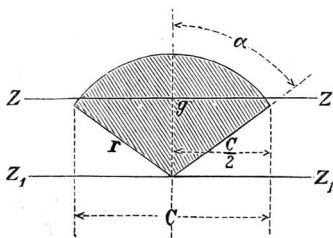


Fig. 22.

$$\begin{aligned} \Omega &= r^2 \alpha, \\ G_{z_1} &= \frac{2}{3} r^3 \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3} r^2 C, \\ I_{z_1} &= \frac{r^4}{4} (\alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha), \\ I_z &= r^2 \left\{ \frac{r^2 (\alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)}{4} - \frac{c^2}{9 \alpha} \right\}. \end{aligned}$$

SEGMENTO CIRCOLARE. L'asse ZZ passa pel centro di gravità del segmento, e Z₂Z₂ per il centro dell'arco.

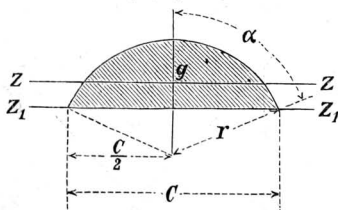


Fig. 23.

$$\begin{aligned} \Omega &= r \left(\alpha r - \frac{c}{2} \cos \alpha \right) \\ G_{z_1} &= \frac{c^3}{12} - r^2 \left(r \alpha - \frac{c}{2} \cos \alpha \right) \cos \alpha \\ G_{z_2} &= \frac{c^3}{12}, \end{aligned}$$

$$I_{z_1} = \frac{r^4}{4} (\alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \frac{1}{12} c r^3 \cos^3 \alpha),$$

$$I_z = \frac{r^4}{4} (\alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) - \frac{1}{4} c r^3 \cos^3 \alpha - \frac{1}{144} \frac{c^6}{\Omega}.$$

ELISSE (fig. 24).

$$\Omega = \pi a A, \quad I_z = \frac{1}{4} \pi a A^3, \quad I_y = \frac{1}{4} \pi A a^3.$$

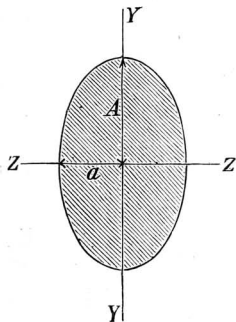


Fig. 24.

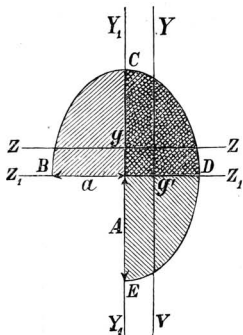


Fig. 25.

SEMI ELISSE (fig. 25). Gli assi ZZ ed YY passano pei centri di gravità delle rispettive semielissi BCD , CDE .

$$\Omega = \frac{\pi}{2} a A,$$

$$G_{z_1} = \frac{2}{3} a A^3,$$

$$I_{z_1} = \frac{1}{8} \pi a A^3,$$

$$I_z = \frac{\pi}{8} a A^3 - \frac{8}{9} \frac{A^3 a}{\pi}.$$

$$\Omega = \frac{\pi}{2} A a,$$

$$G_{y_1} = \frac{2}{3} A a^2,$$

$$I_{y_1} = \frac{1}{8} \pi A a^3,$$

$$I_y = \frac{\pi}{8} A a^3 - \frac{3}{9} \frac{a^3 A}{\pi}.$$

CORONA ELLITTICA INTERA racchiusa da due ellissi concentriche e aventi gli assi nelle stesse direzioni.

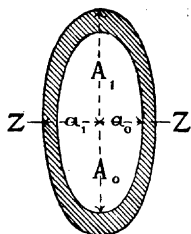


Fig. 26.

$$\Omega = \pi (A_1 a_1 - A_0 a_0)$$

$$G_z = 0$$

$$I_z = \frac{\pi}{4} (A_1 a_1^3 - A_0 a_0^3)$$

Se le due ellissi sono simili, cioè se

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{a_0}{a_1} = c$$

si ha

$$\Omega = \pi A_1 a_1 (1 - c^2)$$

$$I_z = \frac{\pi}{4} A_1 a_1^3 (1 - c^4)$$

SEGMENTO IPERBOLICO. Sia O il centro dell'iperbole, OY_1 , OZ_1 gli asintoti, a il semiasse trasverso.

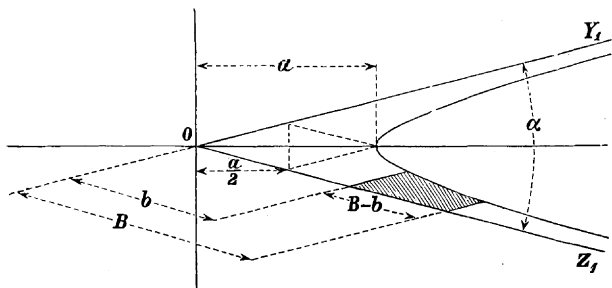


Fig. 27.

$$\Omega = \frac{a^2}{2} \frac{\text{sen } \alpha}{1 + \cos \alpha} \text{logh } \frac{B}{b},$$

$$G_{z_1} = \frac{a^4}{8} \frac{\text{sen}^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right),$$

$$I_{z_1} = \frac{a^6}{48} \frac{\text{sen}^3 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^3} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{B^2} \right).$$

Se l'iperbole è equilatera sarà:

$$\Omega = \frac{a^2}{2} \text{logh } \frac{B}{b}; \quad G_{z_1} = \frac{a^4}{8} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right), \quad I_{z_1} = \frac{a^6}{48} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{B^2} \right).$$

SEGMENTO PARABOLICO. Gli assi YY e ZZ passano per il centro di gravità del segmento.

$$\gamma = \frac{3}{8} h;$$

$$\gamma' = \frac{2}{5} b;$$

$$\Omega = \frac{2}{3} b h;$$

$$G_{z_1} = \frac{1}{4} b h^2;$$

$$G_{y_1} = \frac{4}{15} b^2 h;$$

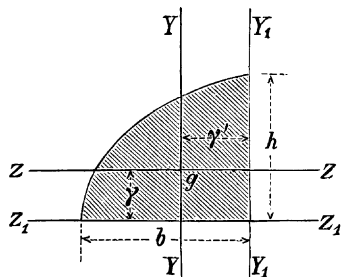


Fig. 28.

$$I_{z_1} = \frac{2}{15} b h^3; \quad I_{y_1} = \frac{16}{105} b^3 h; \quad I_z = \frac{19}{480} b h^3; \quad I_y = \frac{8}{175} b^2 h,$$

CATENARIA. L'equazione della catenaria è:

$$y = c \cosh \frac{z}{c}.$$

Si ha per la figura $MBQPNM$:

$$\Omega = 2 c^2 \sinh \frac{a}{c};$$

$$G_{z_1} = \frac{c^3}{4} \left(\sinh \frac{2a}{c} + \frac{2a}{c} \right);$$

$$I_{z_1} = \frac{c^4}{18} \left(\cosh \frac{3a}{c} - 1 \right).$$

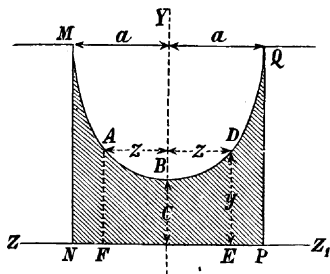


Fig. 29.

Se in queste formole si pone $a = z$, esse danno i valori Ω , G_{z_1} , I_{z_1} per il segmento $ABDEFA$ dell'area tratteggiata.

Per la figura $ABDA$, si ha:

$$\Omega' = 2 c \left(z \cosh \frac{z}{c} - c \sinh \frac{z}{c} \right),$$

$$G'_{z_1} = c^2 \left[z \left(\cosh^2 \frac{z}{c} - 2 \right) - \frac{c}{4} \sinh \frac{2z}{c} \right],$$

$$I'_{z_1} = \frac{c^3}{18} \left[12 z \cosh^3 \frac{z}{c} - c \left(\cosh \frac{3z}{c} - 1 \right) \right].$$

LOGARITMICA NATURALE. L'arco MN appartiene alla curva
 $y = \log_h z$.

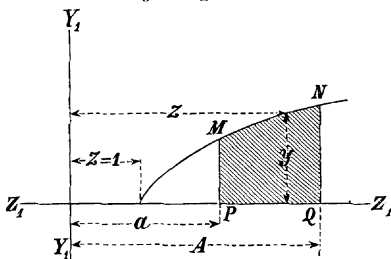


Fig. 30.

Per la figura $MNQP$ si ha:

$$\Omega = A (\log_h A - 1) - a (\log_h a - 1),$$

$$G_{z_1} = \frac{A}{2} [\log_h A (\log_h A - 2) + 2] - \frac{a}{2} [\log_h a (\log_h a - 2) + 2],$$

$$I_{z_1} = \frac{A}{3} [\log_h A (\log_h^2 A - 3 \log_h A + 6) - 6] - \\ - \frac{a}{3} [\log_h a (\log_h^2 a - 3 \log_h a + 6) - 6].$$

AREE, MOMENTI STATICI E D'INERZIA DELLE FIGURE COMPOSITE. Le aree, i momenti statici ed i momenti d'inerzia delle figure composte si possono trovare per via di addizione e di sottrazione. Sia la figura 31. Sarà:

$$\Omega = b h - (b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3 + b_4 h_4) + \\ + b_5 h_5 + b_6 h_6 + b_7 h_7 + b_8 h_8;$$

$$G_{z_1} = \frac{1}{2} \{ b h^2 - (b_1 h_1^2 + b_2 h_2^2 + b_3 h_3^2 + b_4 h_4^2) + \\ + b_5 h_5^2 + b_6 h_6^2 + b_7 h_7^2 + b_8 h_8^2 \}.$$

$$I_{z_1} = \frac{1}{3} \{ b h^3 - (b_1 h_1^3 + b_2 h_2^3 + b_3 h_3^3 + b_4 h_4^3) + \\ + b_5 h_5^3 + b_6 h_6^3 + b_7 h_7^3 + b_8 h_8^3 \}.$$

La distanza da $Z_1 Z_1$ dell'asse ZZ passante pel centro di gravità g della figura è data da

$$\gamma = \frac{G_{z_1}}{\Omega}.$$

Il momento I_z d'inerzia della figura rispetto all'asse ZZ è dato

da

$$I_z = I_{z_1} - \Omega \gamma^2.$$

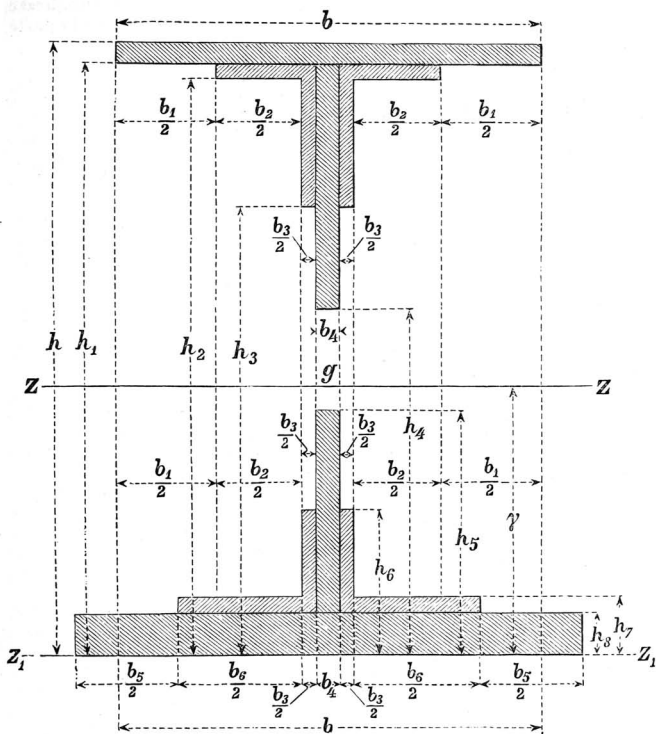


Fig. 31.

Per alcune figure si può applicare convenientemente la formola di Simpson. Diamo un esempio d'applicazione della medesima alla rotaia.

Dividiamo l'altezza di questa sezione, che è di $0^m,13$ in 26 parti, ossia in parti di mezzo centimetro, e pei punti di divisione conduciamo le parallele alla base delle rotaie; indi prendiamo per asse $Z_1 Z_1$ quella fra dette parallele, che essendo più vicina al mezzo della sezione, lascia un numero pari di parti tanto al di sopra quanto al di sotto. Nella nostra figura si hanno 14 parti al di sopra e 12 al di sotto.

Chiamiamo $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{14}$ le lunghezze delle rette orizzontali nella parte superiore della sezione e $z'_0, z'_1, z'_2, z'_3, \dots, z'_{12}$ le lunghezze delle rette orizzontali nella parte inferiore; e poniamo per la parte superiore:

$$\begin{aligned} z_0 + 4z_1 + 2z_2 + 4z_3 + \dots + 4z_{13} + z_{14} &= \Sigma z_n, \\ 1 \cdot 4z_1 + 2 \cdot 2z_2 + 3 \cdot 4z_3 + \dots + 13 \cdot 4 \cdot z_{13} + 14z_{14} &= \Sigma nz_n, \\ 1^2 \cdot 4z_1 + 2^2 \cdot 2z_2 + 3^2 \cdot 4z_3 + \dots + 13^2 \cdot 4z_{13} + 14^2 \cdot z_{14} &= \Sigma n^2 z_n, \end{aligned}$$

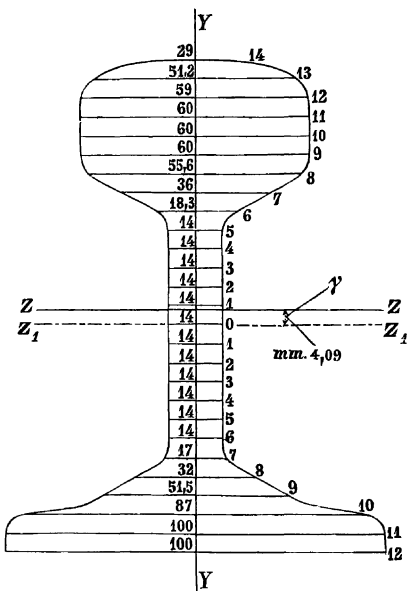


Fig. 32.

e per la parte inferiore:

$$\begin{aligned} z'_0 + 4z'_1 + 2z'_2 + 4z'_3 + \dots + 4z'_{11} + z'_{12} &= \Sigma z'_n, \\ 1 \cdot 4z'_1 + 2 \cdot 2z'_2 + 3 \cdot 4z'_3 + \dots + 11 \cdot 4z'_{11} + 12z'_{12} &= \Sigma nz'_n, \\ 1^2 \cdot 4z'_1 + 2^2 \cdot 2z'_2 + 3^2 \cdot 4z'_3 + \dots + 11^2 \cdot 4z'_{11} + 12^2 \cdot z'_{12} &= \Sigma n^2 z'_n. \end{aligned}$$

Detta k la distanza fra due orizzontali successive, si ha:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{k}{3} (\Sigma z_n + \Sigma z'_n), \\ \gamma &= k \frac{\Sigma nz_n + \Sigma nz'_n}{\Sigma z_n + \Sigma z'_n}, \end{aligned}$$

$$G_{z_1} = \frac{k^2}{3} (\Sigma n z_n + \Sigma n z'_n),$$

$$I_{z_1} = \frac{k^3}{3} (\Sigma n^2 z_n + \Sigma n^2 z'_n),$$

$$I_z = \frac{k^3}{3} (\Sigma n^2 z_n + \Sigma n^2 z'_n) - \Omega \gamma^2.$$

Applicando queste formole generali al caso della nostra figura si ottiene:

$$\Omega = \text{mm.}^2 \text{ 4601,} \quad \gamma = \text{mm. 4,09} \quad I_z = 10075000.$$

Per la sezione della rotaja, la quale ha un asse di simmetria YY verticale, si può anche determinare facilmente il momento d'inerzia I_y , per mezzo della formola

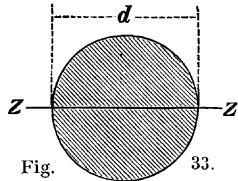
$$I_y = \frac{k}{36} (\Sigma y_n^3 + \Sigma y'_n{}^3),$$

essendo:

$$\Sigma y_n^3 = y_0^3 + 4 y_1^3 + 2 y_2^3 + 4 y_3^3 + \dots + 4 y_{13}^3 + y_{14}^3,$$

$$\Sigma y'_n{}^3 = y'_0{}^3 + 4 y'_1{}^3 + 2 y'_2{}^3 + 4 y'_3{}^3 + \dots + 4 y'_{11}{}^3 + y'_{12}{}^3.$$

TABELLA V. — Aree e momenti d'inerzia del circolo di diametro da 1 a 100 (Fig. 33).



Diam. d	Area Ω	Momento d'inerzia I_z	Diam. d	Area Ω	Momento d'inerzia I_z
1	0,7854	0,0491	19	283,5294	6397
2	3,1416	0,7854	20	314,1600	7854
3	7,0686	3,976	21	346,3614	9547
4	12,5664	12,57	22	380,1336	11499
5	19,6350	30,68	23	415,477	13737
6	28,2744	63,62	24	452,390	16286
7	38,4846	117,9	25	490,875	19175
8	50,2658	201,1	26	530,930	22432
9	63,6174	322,1	27	572,557	26087
10	78,5400	490,9	28	615,754	30172
11	95,0334	718,7	29	660,521	34719
12	113,0976	1018	30	706,860	39761
13	132,7326	1402	31	754,769	45333
14	153,9384	1886	32	804,250	51472
15	176,7150	2485	33	855,300	58214
16	201,0624	3217	34	907,922	65597
17	226,9806	4101	35	962,115	73662
18	254,4696	5153	36	1017,878	82448

Diam. d	Area Ω	Momento d'inerzia I_z	Diam. d	Area Ω	Momento d'inerzia I_z
37	1075,213	91998	69	3739,3	1112660
38	1134,118	102354	70	3848,4	1178588
39	1194,593	113561	71	3959,2	1247393
40	1256,640	125664	72	4071,5	1319167
41	1320,257	138709	73	4185,4	1393995
42	1385,446	152745	74	4300,8	1471963
43	1452,205	167820	75	4417,8	1553156
44	1520,534	183984	76	4536,4	1637662
45	1590,435	201289	77	4656,6	1725571
46	1661,906	209787	78	4778,3	1817972
47	1734,949	239531	79	4901,5	1911967
48	1809,562	260576	80	5026,5	2010619
49	1885,745	282979	81	5153,0	2113051
50	1963,50	306796	82	5281,0	2219347
51	2042,83	332086	83	5410,6	2329605
52	2123,72	358908	84	5541,8	2443920
53	2206,19	387323	85	5674,5	2562392
54	2290,23	417393	86	5808,8	2685120
55	2375,84	449180	87	5944,7	2812205
56	2463,01	482750	88	6082,1	2943748
57	2551,76	518166	89	6221,1	3079853
58	2642,09	555497	90	6361,7	3220623
59	2733,98	594810	91	6503,9	3366165
60	2827,44	636172	92	6647,6	3516586
61	2922,44	679651	93	6792,9	3671992
62	3019,05	725332	94	6939,8	3832492
63	3117,22	773272	95	7088,2	3998196
64	3216,97	823550	96	7238,2	4169220
65	3318,29	876240	97	7390,0	4345671
66	3421,17	931420	98	7542,9	4527664
67	3525,6	989166	99	7697,7	4715315
68	3631,7	1049556	100	7854,0	4908738

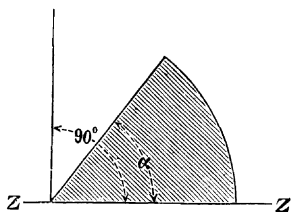


Fig. 34.

TABELLA IV. — Settore circolare (Fig. 34).

La seguente tabella dà le aree, i momenti statici e d'inerzia ed i centri di gravità dei settori circolari da 0° a 90° . Per ottenere le aree ed i momenti bisogna moltiplicare i numeri della tabella pei denominatori r^2 , r^3 , r^4 delle intestazioni $\frac{\Omega}{r^2}$, $\frac{G_z}{r^3}$, $\frac{I_z}{r^4}$; per ottenere le distanze da ZZ dei centri di gravità si devono moltiplicare per r i numeri esposti nelle colonne intestate $\frac{G_z}{r \Omega}$.

Arco α	$\frac{\Omega}{r^2}$	$\frac{G_z}{r^3}$	$\frac{I_z}{r^4}$	$\frac{G_z}{r \Omega}$
0°	—	—	—	—
0°.1'	0,000145	—	—	—
0°.2'	0,000292	—	—	—
0°.3'	0,000436	—	—	—
0°.4'	0,000582	—	—	—
0°.5'	0,000727	—	—	—
0°.10'	0,001454	0,000001	0,000000002	0,000983
0°.20'	0,002909	0,000007	0,000000020	0,001959
0°.30'	0,004363	0,000013	0,000000055	0,002979
0°.40'	0,005818	0,000023	0,000000144	0,003953
0°.50'	0,007272	0,000037	0,000000250	0,005088
1°	0,008727	0,000050	0,000000412	0,005730
1°.30'	0,013090	0,000113	0,000001505	0,008633
2°	0,017453	0,000203	0,000003573	0,011631
2°.30'	0,021817	0,000317	0,000006923	0,014530
3°	0,026180	0,000456	0,000011860	0,017417
3°.30'	0,030543	0,000623	0,000019003	0,020393
4°	0,034907	0,000813	0,000028522	0,023290
4°.30'	0,039270	0,001027	0,000040384	0,026152
5°	0,043633	0,001270	0,000055183	0,029106
5°.30'	0,047997	0,001533	0,000073514	0,031940
6°	0,052360	0,001827	0,000095595	0,034893
6°.30'	0,056723	0,002143	0,000121246	0,037780
7°	0,061087	0,002483	0,000151631	0,040640
7°.30'	0,065450	0,002853	0,000186212	0,043591
8°	0,069813	0,003243	0,000225793	0,046452
8°.30'	0,074176	0,003660	0,000270999	0,049342
9°	0,078540	0,004103	0,000321205	0,052240
9°.30'	0,0829.3	0,004570	0,000377661	0,055124
10°	0,087266	0,005063	0,000440366	0,058018
11°	0,091593	0,005123	0,000585153	0,063785
12°	0,104720	0,007283	0,000758690	0,069547
13°	0,113446	0,008543	0,000963476	0,075302
14°	0,122173	0,009900	0,001201338	0,081035
15°	0,130900	0,011357	0,001474924	0,086761
16°	0,139626	0,012913	0,001786659	0,092480
17°	0,148353	0,014567	0,002138873	0,098193
18°	0,157080	0,016313	0,002533034	0,10385
19°	0,165806	0,018160	0,002972821	0,10952
20°	0,174533	0,020103	0,003458858	0,11518
21°	0,183260	0,022140	0,003994269	0,12081
22°	0,191986	0,024233	0,004580306	0,12642
23°	0,200713	0,026500	0,005219467	0,13203
24°	0,209440	0,028817	0,005913629	0,13759
25°	0,218166	0,031230	0,006664041	0,14314
26°	0,226893	0,033737	0,007472577	0,14869
27°	0,235619	0,036330	0,008341114	0,15418
28°	0,244346	0,039017	0,009271526	0,15967
29°	0,253073	0,041793	0,010265062	0,16514
30°	0,261799	0,044657	0,011322974	0,17057
31°	0,270526	0,047610	0,012447135	0,17598

Arco α	$\frac{\Omega}{r^2}$	$\frac{G_z}{r^3}$	$\frac{I_z}{r^4}$	$\frac{G_z}{r \Omega}$
32°	0.279253	0.050650	0.013638797	0.18137
33°	0.287979	0.053777	0.014897959	0.18673
34°	0.296706	0.056987	0.016202995	0.19199
35°	0.305433	0.060283	0.017627532	0.19737
36°	0.314159	0.063660	0.019098568	0.20263
37°	0.322886	0.067120	0.020642730	0.20787
38°	0.331613	0.070663	0.022259392	0.21304
39°	0.340339	0.074283	0.023950428	0.21826
40°	0.349066	0.077987	0.025715840	0.22341
41°	0.357793	0.081763	0.027556252	0.22852
42°	0.366519	0.085620	0.029472288	0.23360
43°	0.375246	0.089550	0.031463950	0.23864
44°	0.383972	0.093553	0.033531236	0.24365
45°	0.392699	0.097630	0.035674773	0.24861
46°	0.401426	0.101780	0.037894559	0.25354
47°	0.410152	0.106000	0.040190596	0.25844
48°	0.418879	0.110290	0.042562258	0.26333
49°	0.427706	0.114647	0.045009545	0.26811
50°	0.436332	0.119070	0.047532456	0.27289
51°	0.445060	0.123560	0.050130368	0.27762
52°	0.453786	0.128113	0.052802654	0.28231
53°	0.462512	0.132727	0.055549316	0.28697
54°	0.471239	0.137403	0.058368477	0.29157
55°	0.479966	0.142140	0.061243264	0.29614
56°	0.488692	0.146937	0.064224301	0.30068
57°	0.497419	0.151787	0.067257838	0.30515
58°	0.506145	0.156693	0.070361999	0.30957
59°	0.514872	0.161653	0.073533661	0.31396
60°	0.523599	0.166667	0.076772822	0.31831
61°	0.532325	0.171730	0.080075734	0.32260
62°	0.541052	0.176843	0.083448020	0.32684
63°	0.549779	0.182003	0.086630932	0.33104
64°	0.558505	0.187210	0.090375719	0.33519
65°	0.567232	0.192460	0.093930506	0.33930
66°	0.575959	0.197753	0.097543417	0.34334
67°	0.584685	0.203090	0.101212579	0.34734
68°	0.593412	0.208463	0.104936740	0.35129
69°	0.602139	0.213877	0.108714027	0.35519
70°	0.610865	0.219327	0.112541939	0.35904
71°	0.619592	0.224810	0.116419225	0.36283
72°	0.628319	0.230327	0.120342762	0.36658
73°	0.637045	0.235877	0.124311924	0.37027
74°	0.645772	0.241453	0.128322960	0.37389
75°	0.654498	0.247060	0.132374622	0.37747
76°	0.663225	0.252693	0.136464408	0.38099
77°	0.671952	0.258350	0.140589820	0.38448
78°	0.680678	0.264030	0.144810857	0.38790
79°	0.689405	0.269730	0.148944393	0.39125
80°	0.698132	0.275450	0.153156680	0.39455
81°	0.706858	0.281190	0.157400842	0.39780
82°	0.715585	0.286943	0.161668753	0.40098

Arco α	$\frac{\Omega}{r^2}$	$\frac{G_z}{r^3}$	$\frac{I_z}{r^4}$	$\frac{G_z}{r \Omega}$
83°	0,724312	0,292710	0,165957915	0,40412
84°	0,733038	0,298490	0,170265201	0,40719
85°	0,741765	0,304280	0,174587488	0,41022
86°	0,750492	0,310080	0,178924775	0,41317
87°	0,759218	0,315887	0,183271436	0,41607
88°	0,767945	0,321700	0,187626223	0,41891
89°	0,776672	0,327517	0,191986635	0,42170
90°	0,785398	0,333333	0,196349546	0,42441

NB. Per mezzo di questa tabella si hanno subito per via di sottrazione anche l'area ed i momenti statici e d'inerzia dei settori da 90° a 180°.

Per il settore $A B D C$, per esempio, compreso da un arco di 148°, si ha:

$$\Omega = (2 \times 0,785398 - 0,279235) r^2 = 1,291543 r^2,$$

$$G_{z_1} = (2 \times 0,333333 - 0,050650) r^3 = 0,616016 r^3,$$

$$I_{z_1} = (2 \times 0,196349546 - 0,013638797) r^4 = 0,379060295 r^4,$$

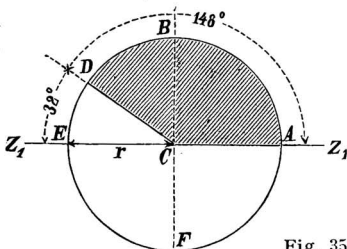


Fig. 35.

E per via di sottrazione si possono anche avere l'area ed i momenti statici e d'inerzia dei settori da 180° a 360°. Pel settore $D E F A$ si avrà:

$$\Omega = \pi r^2 - 1,291543 r^2 = 1,850004 r^2,$$

$$G_{z_1} = 0 - 0,616016 r^3 = -0,616016 r^3,$$

$$I_{z_1} = \frac{\pi r^4}{4} - 0,379060295 r^4 = 0,406337889 r^4.$$

5. — Momenti d'inerzia polari.

RETTANGOLO. (fig. 36). Rispetto all'asse polare in A :

$$I_p = \frac{1}{3} b h (h^2 + b^2) = \frac{1}{3} b h i^2.$$

Rispetto all'asse polare nel centro di gravità g ;

$$I_p = \frac{1}{12} b h (h^2 + b^2) = \frac{1}{12} b h i^2.$$

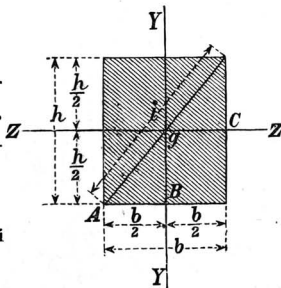


Fig. 36.

Rispetto all'asse polare in *B*:

$$I_p = \frac{1}{12} b h (4 h^2 + b^2).$$

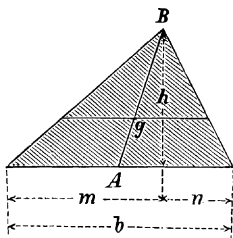


Fig. 37.

Rispetto all'asse polare in *C*:

$$I_p = \frac{1}{12} b h (h^2 + 4 b^2).$$

TRIANGOLO. (fig. 37). Rispetto all'asse polare in *A*:

$$I_p = \frac{b h^3}{12} + \frac{h}{4} (m^3 + n^3) - \frac{b h}{24} \{8 (m^2 + n^2) + 3 b^2\}.$$

Rispetto all'asse polare in *B*:

$$I_p = \frac{b h^3}{4} + \frac{h}{12} (m^3 + n^3).$$

Rispetto all'asse polare nel centro *g* di gravità:

$$I_p = \frac{b h^3}{36} + \frac{h}{12} (m^3 + n^3) - \frac{b h}{18} \{2 (m^2 + n^2) - b^2\}.$$

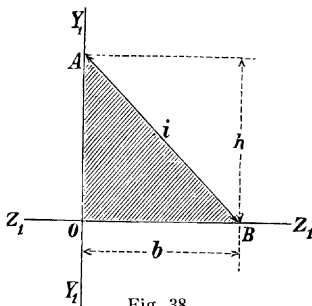


Fig. 38.

TRIANGOLO RETTANGOLO (figura 38). Rispetto all'asse polare in *O*;

$$I_p = \frac{1}{12} b h^3 + \frac{1}{12} b^3 h = \frac{1}{12} b h (b^2 + h^2) = \frac{1}{12} b h i^2,$$

SEZIONE AD ANGOLO, A LATI UGUALI. Rispetto all'asse polare nel centro di gravità *g*:

$$I_p = \frac{2}{3} \{b^4 - (b - s)^4\} - 2 H^2 \Omega.$$

Rispetto all'asse polare pel punto *B*:

$$I_p = \frac{s}{3} (b s^2 + s b^2 - s^3).$$

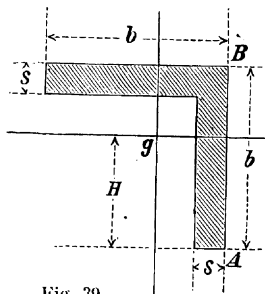


Fig. 39

Rispetto all'asse polare nel punto A:

$$I_p = \frac{s}{3} \{ 5 b (b^2 + s^2) - s (6 b^2 + 2 s^2) \} .$$

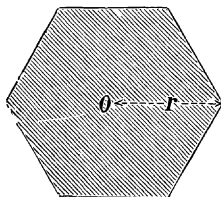
SEZIONE A T. Rispetto all'asse polare nel centro di gravità g:

$$I_p = \frac{1}{12} \{ b s (b^2 + 4 s^2) + c s_1 (s_1^2 + 4 c^2) - s s_1 (s_1^2 + 4 s^2) + 12 c (c - s) (b s - s s_1) \} - H^2 \Omega .$$

ESAGONO REGOLARE. (fig. 41). Rispetto all'asse polare nel centro O.

$$I_p = \frac{5\sqrt{3}}{8} r^4 = 1,0825 r^4 .$$

SETTORE CIRCOLARE (fig. 42). Rispetto all'asse polare nel centro O.



[Fig. 41.

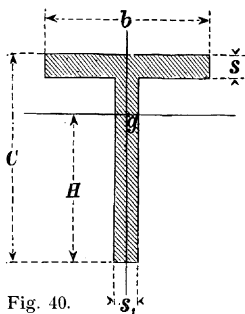


Fig. 40.

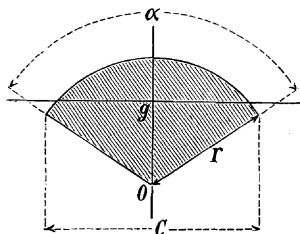


Fig. 42.

$$I_p = \frac{1}{4} \alpha r^4 .$$

Rispetto all'asse polare nel centro di gravità g:

$$I_p = \frac{r^4}{4} \left(\alpha - \frac{161}{9} \frac{\cos \alpha}{\alpha} \right) .$$

La distanza del baricentro g da O è:

$$\gamma = \frac{C}{3 \alpha} .$$

SEGMENTO DI CIRCOLO (fig. 43). Rispetto all'asse polare nel centro O:

$$I_p = \frac{r^4}{4} \left(\alpha - \frac{2}{3} \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{3} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \right) .$$

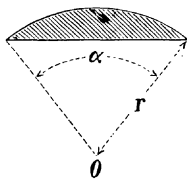


Fig. 43.

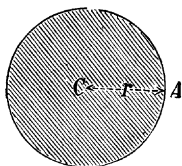


Fig. 44.

CIRCOLO (Fig. 44). Rispetto all'asse polare nel centro C :

$$I_p = \frac{\pi}{2} r^4 .$$

Rispetto all'asse polare nel punto A :

$$I_p = \frac{2}{3} r^4 .$$

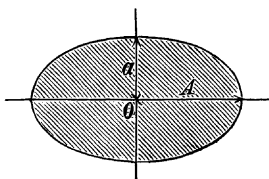


Fig. 45.

ELISSE (Fig. 45). Rispetto all'asse polare nel centro O :

$$I_p = \frac{\pi a A}{4} (a^2 + A^2) .$$

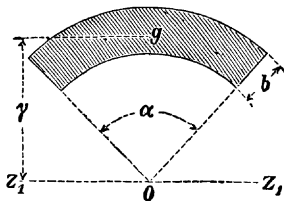


Fig. 46.

CORONA CIRCOLARE (Fig. 46). Sia r il raggio medio e g il baricentro della corona circolare; si ha rispetto all'asse polare nel centro O :

$$I_p = \frac{\alpha b r}{4} (4 r^2 + b^2) .$$

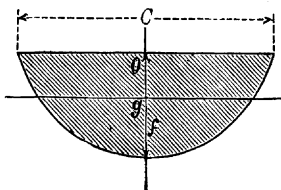


Fig. 47.

SEGMENTO PARABOLICO (Fig. 47). Rispetto all'asse polare nel centro g di gravità :

$$\begin{aligned} I_p &= \frac{1433}{1680} c f (f^2 + c^2) = \\ &= 0,170595 c f (c^2 + f^2) . \end{aligned}$$

Rispetto all'asse polare nel punto O :

$$I_p = \frac{2}{7} c f (c^2 + f^2) .$$

CAPITOLO II.

Elasticità ; definizioni, risultati d'esperienza.

Teoremi delle derivate e del minimo lavoro.

Lavoro di deformazione.

Espressioni del lavoro di deformazione.

1. Elasticità è la tendenza dei corpi a riprendere la forma primitiva allorchè vengono deformati, o, in altri termini, è la tendenza delle molecole dei corpi a ritornare al loro stato di equilibrio naturale, allorchè ne vengono allontanate per azione di forze esterne.

Quando per effetto di forze esterne un corpo si deforma, la deformazione si può scomporre in due: una *elastica*, che svanisce al cessare delle forze esterne, l'altra *permanente*, che rimane dopo che le forze esterne hanno cessato di agire.

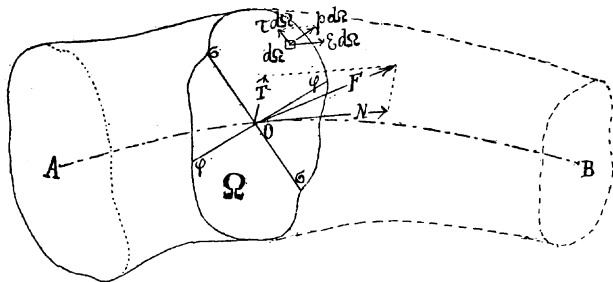


Fig. 48.

Sia AB l'asse geometrico (*) di un solido ed Ω una sua sezione normale qualunque di baricentro O ; riduciamo il sistema di forze esterne applicate per esempio alla porzione $A\Omega$ del corpo, posta alla sinistra di Ω — assumendo O come centro di riduzione — ad un'unica forza F di traslazione e ad una coppia risultante di momento M ; sia σ la traccia su Ω del piano di tale coppia.

(*) luogo geometrico dei baricentri delle sezioni trasversali (normali ad AB).

Decomponiamo F in una N normale ad Ω (**sforzo normale** che sulla sezione esercita una tensione ovvero una compressione (*)) ed in una T contenuta in Ω (**sforzo di taglio** che tende a tagliare il solido in due lungo Ω). Parimenti decomponiamo la coppia in due: una — di momento M_f (**momento di torsione**) contenuta in Ω , che tende a far ruotare questa sezione intorno ad un'asse normale alla sezione stessa; e l'altra di momento M_f (**momento flettente**)

situata nel piano di traccia τ , normale ad Ω , la quale tende a far ruotare questa sezione intorno ad un'asse ζ contenuto in Ω stessa.

Le suddette sollecitazioni esterne relative ad una sezione qualunque Ω , provocano nel solido, attraverso ad Ω stessa, delle **reazioni molecolari** o **tensioni interne** o **forze elastiche**, l'aggiunta delle quali equivale a rimuovere la porzione ΩB di solido nel mentre la porzione $A \Omega$ rimane tuttavia in equilibrio. Queste tensioni interne sono distribuite con continuità su tutti i punti di Ω , e ad ognuno di essi vi corrisponderà una certa **tensione unitaria** p ; onde in un elemento $d\Omega$ contenente quel punto vi sarà la tensione elementare $p d\Omega$, che possiamo decomporre nella **tensione normale elementare** $\varepsilon d\Omega$ e nella **tensione tangenziale elementare** $\tau d\Omega$.

Applicando all'insieme delle suddette forze esterne ed interne il principio dei lavori virtuali riferendosi a tre assi coordinati — si otterranno le tre equazioni caratteristiche d'equilibrio del solido (considerato come rigido) relative al detto insieme di forze, le quali equazioni legheranno le reazioni interne alle azioni esterne. Ma ciò è per quei sistemi il cui equilibrio resta determinato con la sola statica dei corpi rigidi (sistemi staticamente determinati); e non si può far a meno di far dipendere la ricerca dello stato di equilibrio *interno* di un corpo elastico, o di un sistema di corpi elastici, dalla *legge che regola le deformazioni elastiche*.

Notiamo fin d'ora che l'effettiva determinazione delle tensioni interne nel caso generale col *metodo diretto*, presenta difficoltà non ancora superate; epperò fa d'uopo trattare dapprima i casi *semplici* di elasticità, e cioè:

a)	elasticità alla tensione (+ o)	prodotta soltanto da N
b)	" " flessione	" " " M_f
c)	" al taglio	" " " T
d)	" alla torsione	" " " M_θ

e in seguito i casi *composti*, risultanti dalla combinazione a due a due dei quattro precedenti casi semplici.

(*) Si può convenire di dire sempre *tensione* con significato generico e cioè per indicare tanto una trazione (*tensione positiva*) quanto una pressione (*tensione negativa*).

Allora che un corpo si deforma le sue molecole si allontanano o si avvicinano fra di loro. Perciò considerando due molecole qualunque del corpo che si deforma, mentre le due molecole subiscono variazioni nella loro distanza r , si svilupperà reciprocamente fra le due molecole una forza attrattiva o repulsiva P , la quale varierà di grandezza al variare della distanza r delle due molecole: si potrà quindi porre

$$P = f(r).$$

Il sistema delle due molecole sarà in equilibrio

$$\textit{stabile} \quad \text{quando} \quad \frac{dP}{dr} > 0,$$

$$\textit{indifferente} \quad \text{,,} \quad \frac{dP}{dr} = 0,$$

$$\textit{instabile} \quad \text{,,} \quad \frac{dP}{dr} < 0.$$

Quando $P = 0$ le due molecole sono nello stato del loro *equilibrio naturale*, ed allora $\frac{dP}{dr}$ è la *rigidezza* del sistema. Il lavoro delle forze molecolari, allorchè con delle forze esterne si fa variare la distanza r delle due molecole da r_0 ad r_1 , è:

$$L = \int_{r_0}^{r_1} f(r) dr.$$

Per piccole variazioni di r , quali sono quelle che si considerano nella *resistenza dei materiali*, si può, non conoscendosi la forma della funzione $f(r)$, prendere in luogo della linea

$$P = f(r)$$

l'equazione della tangente a questa linea nella posizione dell'equilibrio naturale, per modo che la relazione fra la forza che si esercita fra le due molecole, e la variazione della loro distanza, in prossimità dell'equilibrio naturale, sarà espressa da

$$P = \frac{K}{r_0} (r - r_0). \quad (1)$$

Ciò equivale ad ammettere che le forze che producono degli spostamenti nelle molecole di un corpo siano direttamente proporzionali agli spostamenti medesimi. La quantità K può essere definita " il modulo di elasticità del sistema delle due molecole per

delle posizioni vicine all'equilibrio naturale „ ed il rapporto $\frac{K}{r_0}$ è la rigidezza del sistema in prossimità del medesimo equilibrio (*).

La formola teorica (1) concorda coi risultati di esperienza. Infatti risulta dall'esperienza che, onde un solido prismatico di sezione Ω , e di lunghezza l , si allunghi od accorci di Δl , si deve assoggettarlo ad una forza P diretta secondo l'asse del solido, il cui valore è dato da (**legge di Hooke**):

$$P = \frac{E \Omega}{l} \Delta l \quad (2)$$

essendo E il **modulo di elasticità** della sostanza ond'è costituito il solido prismatico.

Il punto, dove la legge (1) o (2) cessa di verificarsi in modo abbastanza approssimato, dicesi *limite di stabilità*.

Se si considera un parallelepipedo rettangolo infinitamente piccolo nell'interno di un corpo soggetto all'azione di forze esterne la deformazione elastica da esso subita consiste in un cambiamento nella lunghezza degli spigoli ed in variazioni degli angoli che fanno le faccie tra di loro.

Se la variazione di lunghezza nel senso longitudinale del piccolo prisma è

$$\lambda = \frac{\Delta l}{l}$$

(variazione di lunghezza riferita all'unità) la variazione di lunghezza secondo ogni direzione trasversale è

$$\frac{\lambda}{m},$$

in cui m è una quantità dipendente dalla natura del materiale ($\frac{1}{m}$ dicesi **coefficiente di contrazione trasversale** o **rapporto di Poisson**), ha cioè luogo una *contrazione* ovvero un *allargamento*, nel senso trasversale del prisma, secondo che λ è un *allungamento* od un *accorciamento*.

In pratica si ammette che per tutti i corpi la quantità m sia uguale a 4 (**).

(*) poichè $\frac{K}{r} = \left(\frac{dP}{dr}\right)_{r=r_0}$ = tangente trigonometrica dell'angolo che la tangente alla curva $P = f(r)$, nel punto ($P=0$, $r=r_0$), fa coll'asse r .

(**) Nella teoria dell'elasticità i solidi elastici si distinguono in:

1° **isotropi** o **corpi di elasticità costante**, cioè presentanti la stessa costituzione molecolare, onde la stessa elasticità, in tutte le direzioni passanti per ciascun loro punto (metalli fusi, ecc.);

Se l'allungamento *relativo* λ è prodotto da una forza elastica

$$\varepsilon = \frac{P}{\Omega}$$

riferita all'unità di superficie, si ha (altra forma del principio di Hooke):

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} = E,$$

essendo E il *modulo di elasticità (longitudinale)*.

Le forze elastiche tangenziali τ , riferite all'unità di superficie che in due faccie, inizialmente ad angolo retto, producono uno spostamento angolare relativo θ , sono fra loro eguali, ed il quoziente

$$\frac{\tau}{\theta} = E_t$$

2° ad un asse di elasticità, cioè presentanti la stessa costituzione molecolare in tutte le direzioni condotte per un punto qualunque di quest'asse sotto il medesimo angolo d'inclinazione [approssimativamente si possono riguardare come tali i solidi a costestura fibrosa (legnami, metalli trafiletti, ecc.) nei quali la diversità di costituzione molecolare fra le varie direzioni normali alle fibre è molto minore di quella che si riscontra fra una qualunque di queste direzioni e la direzione delle fibre];

3° a tre assi ortogonali di elasticità, (stato elastico triplo), cioè presentanti in un punto qualunque tre assi ortogonali tali che per ognuno di essi sta la proprietà che la costituzione molecolare secondo ciascuna coppia di direzioni uscenti dall'origine, egualmente inclinate all'asse e compiane con esso, è la stessa (legnami = un asse, nella direzione delle fibre, uno tangenziale ed il terzo radiale ai circoli annuari — lamiere trafilette = un asse nella direzione del laminaggio, uno nella direzione della larghezza e l'altro secondo lo spessore — ecc.).

Nella Scienza delle Costruzioni i solidi si ritengono tutti isotropi e ciò per necessità pratica, tenendo d'altronde presente che nei casi utili di applicazione alle costruzioni si può ammettere che i corpi siano veramente isotropi oltrechè omogenei.

Dalla teoria dell'elasticità si deduce che il limite inferiore di m è 2, il qual valore corrisponde ad un corpo (ideale) *incomprensibile* (c. f. r. Föppl pag. 50; Marcolongo pag. 140). Navier, Poisson, ritenevano per tutti i corpi isotropi $m = 4$, e ciò è una conseguenza analitica dell'isotropia; Lamé e Green ritenevano invece che ad ogni corpo corrispondesse un valore speciale di m e dal punto di vista teorico sembra che la ragione sia tutta dalla loro parte. La questione è difficile ad essere risolta sperimentalmente a causa delle difficoltà di procurarsi materiale perfettamente isotropo; ciò spiega perchè vari sperimentatori non si sieno trovati d'accordo.

In *pratica*, durando ancora molta incertezza circa il valore m bisogna adattarsi al valore $m = 4$. — Per maggiori dettagli c. f. r. " CROTTI, *Elasticità*, pag. 101 e seguenti „; " MARCOLONGO, Cap. IV e seg. „ —.

è il modulo di scorrimento detto anche modulo di torsione o trasversale.

Fra E e E_t si ha la relazione (*).

$$E_t = \frac{m E}{2(m+1)} ; \quad (I)$$

quindi, avendo supposto $m = 4$, risulta

$$E_t = \frac{2}{5} E ,$$

Se si indicano con C_1 e C_2 i valori assoluti della resistenza alla tensione ed alla pressione corrispondenti al limite di elasticità, e con λ_1 , λ_2 i valori assoluti delle variazioni di lunghezza relative, si ha:

$$C_1 = E \lambda_1 , \quad C_2 = E \lambda_2 .$$

I valori C_1 , C_2 si dicono **coefficienti di snervamento**, o **carichi al limite di elasticità**.

Il massimo valore ammissibile di una forza elastica longitudinale è

$$R_1 = \frac{2}{5} C_1 , \quad R_2 = \frac{2}{5} C_2 ,$$

secondo che trattasi di tensione o di pressione.

I valori R_1 , R_2 si dicono **coefficienti di resistenza**, o **carichi di sicurezza**.

Si prende per carico di sicurezza un valore eguale a $\frac{2}{5}$ del carico al limite di elasticità per tener conto del maggiore allungamento od accorciamento Δl che, da principio, una forza, che fosse applicata d'un tratto, anzichè per gradi infinitesimi, tenderebbe a produrre in confronto dell'allungamento od accorciamento Δl che la forza medesima produce applicata gradatamente (**). Infatti dalla

(*) Non è possibile determinare E_t direttamente; si può calcolarlo basandosi sopra esperienze di prove alla torsione. I valori così trovati spesso non soddisfano alla (I), la quale però è rigorosamente esatta per tutti i corpi che obbediscono alla legge di Hooke. Tali discordanze provengono quindi necessariamente da errori di osservazione o soprattutto dall'impiego d'una formola inesatta per il calcolo degli sforzi di torsione.

(**) È da notare che nell'esperienza per determinare l'allungamento od accorciamento λ di un corpo prismatico sotto l'azione di una forza P , questa forza si suole applicare a poco a poco facendola crescere per gradi infinitesimi dal valore iniziale 0 al valore finale P , e che inoltre essa deve sempre essere distribuita uniformemente sulla base del prisma, cui è applicata, in modo che a tutti gli elementi della base siano continuamente applicate forze eguali ciascuna a ciascuna.

formola (2) di esperienza si ha la variazione di lunghezza Δl , che per comodità per il momento rappresentiamo con λ , di un corpo prismatico soggetto ad una forza P espressa da:

$$\lambda = \frac{Pl}{E\Omega}. \quad (3)$$

Per la medesima forza P applicata d'un tratto, se si produce l'allungamento $\lambda' = \lambda' l$, il lavoro della forza sarà:

$$\lambda' P = \int_0^{\lambda'} P d\lambda' - \frac{E\Omega}{l} \int_0^{\lambda'} \lambda' d\lambda' = \frac{E\Omega}{2l} \lambda'^2$$

da cui

$$\lambda' = 2 \frac{Pl}{E\Omega} \quad (4)$$

Dalle (3) e (4) si vede che l'allungamento del prisma, quando si applica la forza d'un tratto, è doppio dell'allungamento prodotto dalla stessa forza applicata gradatamente, ossia è doppio dell'allungamento che la forza è capace di mantenere (*).

Il massimo valore ammissibile di una forza elastica tangenziale è:

$$R_t = 2 \frac{E_t}{E} R - \frac{m}{m+1} R,$$

essendo R il valore minore fra R_1 ed R_2 . Ne segue che nell'ipotesi di $m = 4$,

$$R_t = \frac{4}{5} R.$$

(*) Questo è confermato approssimativamente dalle esperienze di BAUSCHINGER (c. f. r. la 2^a e 4^a colonna della tabella a pag. 56 del Föppl). Il Professor GUIDI (Vedi le sue lezioni Parte II pag. 190), con deduzione pure analitica e diversa dalla suesposta arriva alla stessa conclusione.

TABELLA V.

Indicazione dei materiali	Modulo di elasticità al mm. ²		Coefficiente di resistenza o carico di sicurezza al mm. ²			Coefficiente di snervam. o carico al limite di elasticità al mm. ²		
	longitud.	trasvers.	tensione	press	tangen.	tensione	press.	tangen.
	E kg.	E_t kg.	R_1 kg.	R_2 kg.	R_t kg.	C_1 kg.	C_2 kg.	C_t kg.
<i>Ferri:</i>								
rotondi o quadrati in barre col diam. od il lato > mm. 50	15000	6000	5 : 6	5 ÷ 6	4,4	12 ÷ 15	12 ÷ 15	9,6
rotondi o quadrati in barre col diam. od il lato < mm. 50	20000	8000	7 : 10	7 ÷ 10	5,6 ÷ 8	17 ÷ 25	17 ÷ 25	13,6
in fili od in lamiere col diam. o lo spess. di 1 ÷ 5 mm. . .	17000÷19000	7600	10 ÷ 12	—	8	25 ÷ 30	—	—
in fili col diam. < 1 mm. . .	20000	—	12 ÷ 15	—	—	30 ÷ 38	—	—
in grosse barre di qualità ordinaria	15000	6000	5,5	5,5	4	12	12	9
in barre di piccola sezione di buona qualità	20000	8000	6	6	4,8	15	15	12
in barre molto battuto	20000	8000	7 ÷ 12	7 ÷ 12	6,9	25	—	19
<i>Ghisa</i>	10000	4000	2,5	7 ÷ 10	2	5 ÷ 7,5	15 ÷ 21	5,6
<i>Acciaio:</i>								
ordinario non temperato	22000	8500	12,5	12,5	9,3	25	—	19
" temperato	"	"	25	25	18,7	50	—	38
finiss. da molle non temper.	"	"	32	32	24	64	—	48
" " temperato	"	"	36,5	36,5	28	80	—	60
fuso non temperato	"	"	20	20	16	30	—	—
" temperato	25000	9400	30	30	22,5	60	—	—

in fili	24000	—	20 ÷ 25	—	—	40 ÷ 50	—	—
<i>Rame fuso.</i>	11000	—	—	—	—	—	—	—
in lamiera battuta	10700	4012	6,6	6,6	5	14	14	10,5
" " <i>ricotta</i>		"	2,5	2	1,5	3	2,75	2
" " <i>filo</i>	13000	—	6	—	—	13	—	—
<i>Ottone fuso</i>	6500	2600	2	—	1,8	5	—	3,64
laminato	10000	4000	5	—	3,8	10	—	—
in fili	"	—	6	—	4,8	12	—	—
<i>Bronzo fuso</i>	7000	—	2 ÷ 3	—	—	6 ÷ 10	—	—
contenente fosforo	9800	3920	7	—	5,25	13,7	—	10,3
<i>Metallo da cannoni</i>	6900	2587	2	—	1,5	4,34	—	3,25
<i>Stagno</i>	4000	1500	—	—	—	0,5	—	—
<i>Alluminio fuso</i>	7000	2800	2,5	2,5	—	—	—	—
<i>Legni:</i>								
<i>acacia</i>	1260	500	0,79	0,79	0,63	3,2	—	—
<i>abete</i>	1100	440	0,40	0,40	0,33	2,15	—	—
<i>larice rosso</i>	1290	515	0,57	0,57	0,45	—	—	—
<i>quercia</i> { parallel. alle fibre	1100	440	0,7 ÷ 1	0,7	0,56	2,7	—	—
{ normal. " "		—	—	0,36	—	—	—	—
<i>frassino</i> { parallel alle fibre	985 ÷ 1120	420	0,66	—	—	1,2 ÷ 2,6	—	—
{ normal. " "		—	—	0,36	—	—	—	—
<i>faggio</i> { parallelam. alle fibre	920 ÷ 980	380	3,4 ÷ 1,2	0,66	0,06	1,6 ÷ 2,3	—	—
{ normalmen. " "		—	—	0,36	—	—	—	—
<i>pino</i> { parallelam. alle fibre	564 : 1200	226 ÷ 480	0,24 ÷ 0,7	0,44	0,04	1,63 ÷ 2,56	—	—
{ normalmen. " "		—	—	0,22	—	—	—	—

TABELLA VI.

Indicazione dei materiali	Moduli di elasticità al mm. ²	Carico di sicurezza al mm. ²	Carico al limite di elasticità al mm. ²
	<i>E</i>	<i>R</i> ₁ od <i>R</i> ₂	<i>C</i> ₁ o <i>C</i> ₂
	kg.	kg.	kg.
<i>Legni:</i>			
olmo	1165	0,70	1,84
acero	1021	0,36	1,07
pioppo	517	0,20	1,00
betulla	997	0,43	1,62
ontano	1108	0,45	1,12
<i>Cuoio</i>	250	0,25	1,5
<i>Corda da canape</i>	20	—	1
<i>Pietre da costruzione:</i>			
basalto	2000 ÷ 5000	1,2	—
gneis (bevola) e granito	"	0,3 ÷ 0,5	—
calcare e marmi	"	0,25	—
arenaria	1000 ÷ 4000	0,2	—
<i>Mattoni a mano</i>	—	0,06	—
" " macchina	—	0,07	—
<i>Malta di cemento</i>	—	0,12	—
" " calce	—	0,04	—
<i>Zinco fuso</i>	9200	—	2,3
" laminato	9500	—	2,5
<i>Piombo laminato</i>	2000	1	1
" in fili	—	—	0,47
<i>Argento</i>	6900	2,9	—
<i>Oro</i>	8900	2,9	—
<i>Palladio</i>	11000	—	—
<i>Platino iridiato ricotto</i>	20000	—	—
<i>Solfo</i>	1500	1,9	—

Nella tabella VI qui sopra riportata, sono dati i valori del carico di sicurezza per alcune pietre e per le malte: i valori dati per questi materiali sono però valori medi perchè la resistenza delle pietre e delle malte varia colla loro densità e composizione. Perciò aggiungiamo qui la tabella VII seguente, in cui sono indicati i carichi di rottura allo schiacciamento per alcune pietre naturali e artificiali e per alcune composizioni di malte. Quanto alla resistenza alla trazione, le pietre e le malte ne offrono così poca, che in pratica si deve sempre procurare d'impiegarle in modo, che non abbiano ad essere soggette a tensione, e quindi neppure a semplice flessione.

Per carico di sicurezza, *quando non si conosce il limite di elasti-*

cità, si prende da $\frac{1}{5}$ ad $\frac{1}{6}$ del carico di rottura pei metalli, circa $\frac{1}{10}$ pei legnami, e non meno di $\frac{1}{10}$ per le pietre e per le malte.

OSSERVAZIONE. Per calcolare i pezzi soggetti a flessione si è finora usato di servirsi delle formole relative alla flessione che saranno date più avanti nel Capitolo IV, prendendo, pei coefficienti di resistenza che entrano in quelle formole, i coefficienti riportati in queste tabelle, ottenuti mediante esperienze sopra corpi prismatici assoggettati a tensione o compressione semplice; e parimenti, per calcolare i pezzi soggetti a torsione, si è finora usato di servirsi delle formole, che saranno date al Capitolo III, prendendo pei coefficienti di resistenza i valori dei coefficienti di resistenza tangenziale riportati in queste tabelle. Però il signor L. Rey in una sua recente Nota pubblicata nelle *Mémoires et compte rendu des travaux de la Société des Ingénieurs civils* di Parigi, partendo dal fatto che il coefficiente di resistenza alla flessione ed alla torsione risulta dalle esperienze dirette maggiore di quello che si ottiene da esperienze sopra solidi soggetti a trazione o compressione semplice, ha proposto delle nuove formole pel calcolo dei pezzi soggetti a flessione o torsione. Assumendo che si debba dispensare il medesimo lavoro per ottenere una deformazione infinitamente piccola fra due sezioni di un prisma infinitamente vicine, sia che si tratti di trazione e compressione semplice, o di flessione o di torsione, il signor L. Rey trovò che il valore da assegnarsi al coefficiente di resistenza che entra nelle formole relative alla flessione sarebbe di K_f volte il valore attualmente adottato del coefficiente di resistenza alla semplice trazione o compressione, dato in queste tabelle, e che parimenti il coefficiente di resistenza da adottarsi pei pezzi soggetti a torsione, non sarebbe il coefficiente di resistenza tangenziale, ma sarebbe K_t volte il coefficiente di resistenza alla semplice trazione e compressione; ed i valori di K_f e di K_t sarebbero espressi da

$$K_t = v' \sqrt{\frac{\Omega}{I}},$$

$$K_f = v \sqrt{\frac{\Omega}{I_p}},$$

essendo Ω l'area, I il momento d'inerzia della sezione rispetto al suo asse neutro, I_p il momento d'inerzia polare rispetto all'asse di torsione, v' e v le distanze delle fibre più affaticate dall'asse neutro e dall'asse di torsione.

Così secondo il signor L. Rey, se R_u è il coefficiente di resistenza alla trazione o compressione semplice, quale è dato dalle nostre tabelle, si deve assumere per coefficiente R_f di resistenza alla fles-

sione

$$R_t = R_a v' \sqrt{\frac{\Omega}{I}},$$

e per coefficiente R_t di resistenza alla torsione

$$R_t = R_a v \sqrt{\frac{\Omega}{I_p}}.$$

TABELLA VII.

Carichi di rottura per alcune pietre e per alcune malte.

Indicazione dei materiali	Carico di rottura alla pressione al mm. ²
	kg.
Calcarei teneri	0,6 ÷ 1,3
„ mezzani	1,3 : 3
„ duri	3 ÷ 5
Marmo di Candoglia sul Lago Maggiore	3
„ di Carrara, bianco	3,2
„ nero di Varenna sul Lago di Como	3,6
„ turchino di Genova	6
„ bianco venato, presso Carrara	6,5
Pietre silicee tenere	0,4 ÷ 0,9
„ mezzane	0,9 ÷ 4,2
„ dure	4,2 : 8
Granito bigio di Montorfano sul Lago Maggiore e d'Alzo sul Lago d'Orta	6,8
Granito rosso di Baveno	6,9
„ della riva di Chiavenna sul Lago di Como	7,9
„ della Balma presso Biella	8
Pietra calcare di Viggù	1,5
Puddinga o ceppo di Brembate sull'Adda	1
„ a graia fina di Lombardia, denominata <i>ceppo gentile</i>	2,5
Arenaria di Viganò in Brianza	1,4
„ grigia di Firenze	4,2
Beola del Lago Maggiore (gneis o granito schistoso)	5,1
Pietre vulcaniche tenere	0,34 ÷ 2,3
„ mezzane	2,3 ÷ 5,9
„ dure	5,9 ÷ 20
Pietra pomice	0,34
Tufo di Roma	0,57
Lava tenera di Napoli	1,60
„ grigia di Roma (peperino)	2,28
„ di Napoli (piperno)	5,92
Basalti	20

Indicazione dei materiali	Carico di rottura alla pressione al mm. ² kg.
Mattoni fabbricati a mano delle fornaci Chinaglia in Torino :	
1.° Mattone compresso fra due fogli di piombo per rendere più uniforme la pressione	1,31
2.° Mattone compresso colle basi regolarizzate mediante malta	2,6
3.° Pilastrini formati di due mattoni sovrapposti e collegati da uno strato di malta, essendo anche la faccia di posa e quella superiore regolarizzate con malta	1,56
4.° Pilastrini formati con tre corsi di mattoni con interposizione di malta come sopra	0,95
5.° Pilastrini di tre corsi di mattoni, come nel caso precedente, ma avendo qualche corso formato di due mezzi mattoni, in modo da presentare dei giunti verticali	0,84
Mattoni fabbricati a macchina delle stesse fornaci Chinaglia :	
1.° Mattone compresso fra due foglie di piombo	1,56 : 2,35
2.° Mattone compresso fra strati di malta	2,31 : 3,09
3.° Pilastrini formati con due corsi di mattoni, congiunti di malta	1,56 ÷ 1,64
4.° Pilastrini formati con tre corsi di mattoni, congiunti di malta	1,39
5.° Pilastrini formati con quattro corsi di mattoni congiunti di malta	1,25
Malta composta di una parte, in volume, di calce in pasta di Sestri Ponente e due parti di pozzolana di Fuoco presso Napoli, rimasta nell'acqua 240 giorni dopo la composizione ed esperimentata 40 giorni dopo estratta dall'acqua	0,14
Malta composta come la precedente, ma non stata immersa nell'acqua ed esperimentata 169 giorni dopo l'impasto	0,34
Malta nelle precedenti proporzioni, ma con pozzolana fina di Bacoli, lasciata 174 giorni sott'acqua ed esperimentata 40 giorni dopo l'estrazione	0,49
Malta come la precedente e posta nelle stesse circostanze, ma con pozzolana di Bacoli ordinaria	0,25
Malta composta di una parte in volume di calce di Sestri in pasta e due parti di pozzolana fina di Bacoli, non stata immersa nell'acqua ed esperimentata 169 giorni dopo l'impasto	0,56
Malta come la precedente e nelle stesse circostanze, ma con pozzolana di Bacoli ordinaria	0,38
Gesso impastato con acqua	0,50
impastato con latte di calce	0,72
Pietre artificiali di calcestruzzo compresso, composto di una parte in volume di calce idraulica in polvere di	

Indicazione dei materiali	Carico di rottura alla pressione al mm. ²
Palazzolo e quattro di pietrisco un anno dopo la fabbricazione	1,50
Calcestruzzo in parti eguali di cemento di Bergamo, sabbia e ghiaia o pietrisco:	
1. ^o dopo un mese di seppellimento sotterra.	0,23
2. ^o dopo due mesi	0,41
3. ^o dopo sette mesi	0,70
Calcestruzzo composto di m. ³ 1,30 di cemento di Bergamo in polvere, m. ³ 1,70 di ghiaia e m. ³ 1,70 di pietrisco:	
1. ^o dopo sette mesi d'immersione nell'acqua	1,22
2. ^o dopo dieci mesi	1,50
Calcestruzzo composto di m. ³ 1 di cemento Portland inglese (kg. 1270), m. ³ 1 di sabbia e m. ³ 1 di pietrisco dopo un mese d'immersione nell'acqua.	0,53
Calcestruzzo composto di m. ³ 1 di cemento Portland inglese m. ³ 2 di sabbia e m. ³ 3 di ghiaia dopo un mese di immersione nell'acqua	0,23

Oggidi che il cemento, nelle costruzioni ha un crescendo d'applicazione, crediamo utile qui riassumere (*) i risultati delle prove di resistenza dei cementi e delle calci idrauliche di fabbricazione del maggiore Stabilimento Nazionale — prove fatte dai Chiar.mi Professori: Von Tetmayer della Scuola Politecnica Svizzera a Zurigo e Comm. Sayno del R. Istituto Tecnico Superiore di Milano, negli annessi Laboratori sperimentali per la prova dei materiali da costruzione.

(*) Vedi Monografia 1903 della " Società Italiana dei cementi e delle calci idrauliche — Bergamo „ .

TABELLA VIII. — Prove del Prof. Tetmayer.

QUALITÀ	Età giorni	Carico di rottura		Impasto fatto con sabbia durante 3 minuti con un $\frac{0}{10}$ d'acqua del peso della materia secca
		kg.	mm. ²	
		traz.	press.	
Cemento Portland Extra (Naturale Monferrato)	7	0,331	3,990	9 $\frac{1}{2}$ $\frac{0}{10}$
	28	0,366	5,184	
	84	0,383	5,428	
	210	0,414	6,919	
	365	0,410	6,865	
Cemento Portland Artificiale di Palazzolo	7	0,329	3,687	9 $\frac{0}{10}$
	28	0,389	4,806	
	84	0,466	6,030	
	210	0,518	6,391	
	365	0,505	7,230	
Cemento Portland 1. ^a A (Naturale Monferrato)	7	0,310	3,727	10 $\frac{0}{10}$
	28	0,320	4,612	
	84	0,330	4,873	
	210	0,384	5,505	
	365	0,424	5,867	
Calce eminentemente idraulica di Palazzolo	7	0,067	0,575	11 $\frac{3}{4}$ $\frac{0}{10}$
	28	0,134	1,039	
	84	0,237	2,043	
	210	0,258	3,550	
	365	0,300	4,914	

Osservazione. — Gli impasti venivano introdotti in forme di ferro, e compressi meccanicamente con un lavoro di kgm. 0,3 per un grammo di malta allo stato secco; e dopo essere stati esposti all'aria durante il tempo prescritto, tutti i provini (sez. di rottura = 5 cm.²) venivano sommersi e levati dal bagno immediatamente prima della prova.

TABELLA IX. — Prove del Prof. Sayno.

QUALITÀ	Quantità d'acqua per l'impasto in g. per % di miscela secca		Età Giorni	Carico di rottura kg. mm. ²					
	Malta			Impasto puro		Malta 1:3			
	plastica a mano 1:3	normale a macchina 1:3				plastica fabbricaz. a mano		normale fabbricaz. a macchina	
				traz.	press.	traz.	press.	traz.	press.
Cemento Portland Naturale Monferrato	11,25 %	8,8 %	7	0,55	4,926	0,187	1,580	0,267	2,086
			28	0,398	5,860	0,213	1,821	0,300	3,320
			84	0,442	7,890	0,270	2,056	0,360	3,760
			210	0,448	8,160	0,308	2,802	0,380	4,200
			365	0,410	9,950	0,310	3,090	0,431	4,520
Cemento Portland Artificiale Palazzolo	11	8,7	7	0,390	5,560	0,208	1,620	0,292	2,450
			28	0,441	7,250	0,265	2,018	0,350	3,540
			84	0,470	8,630	0,299	2,448	0,385	4,160
			210	0,475	9,440	0,315	2,630	0,442	4,690
			365	0,450	10,850	0,300	3,480	0,450	5,280
Cemento Portland Artificiale Vittorio	10,9	8,5	7	0,395	6,290	0,211	1,750	0,271	2,510
			28	0,431	7,400	0,280	2,138	0,344	3,740
			84	0,440	9,420	0,327	2,890	0,413	4,080
			210	0,450	10,400	0,352	3,434	0,398	4,800
			365	0,388	9,900	0,350	3,300	0,408	4,900

Osservazioni. I provini vennero messi in acqua dolce 24 ore dopo la loro preparazione e conservati nell'acqua sino al momento della prova. La sabbia era normale semplice del Ticino e la preparazione dei provini di malta normale 1:3 venne fatta col l'apparecchio Klebe con un lavoro di kgm. 0,3 per grammo di miscela secca.

Per maggiori dati sulla resistenza degli impasti con cemento, rimandiamo il Lettore specialmente ai capitoli VIII e XVI del molto utile Manuale del Chiar.^{mo} Ing. Vacchelli (*).

2. — I teoremi del Castigliano delle derivate e del minimo lavoro.

Lavoro di deformazione di un corpo, o sistema elastico qualunque, è il lavoro delle forze elastiche che si sviluppano fra le molecole del corpo, o del sistema, quando esso si deforma sotto l'azione di forze esterne o di un'altra causa deformatrice qualunque. Il lavoro di deformazione può essere costituito da una o più delle quattro parti seguenti:

- a) **Lavoro** dovuto alla semplice tensione o compressione;
- b) " " " " flessione longitudinale o trasversale;
- c) **Lavoro** dovuto agli sforzi di taglio, comunemente verticali od orizzontali;
- d) **Lavoro** dovuto alla torsione.

Si noti che si intenderà di parlare sempre del lavoro di piccola deformazione dei corpi, quale si considera nella resistenza dei materiali e cioè per cui vale il principio di Hooke. In questa ipotesi l'ing. Alberto Castigliano ha dimostrato i suoi seguenti teoremi sui quali fondò la sua *Théorie de l'équilibre*, mediante la quale la scienza dell'elasticità e resistenza dei materiali può ora essere sviluppata con ordine molto esattamente (**).

(*) *Le Costruzioni in calcestruzzo ed in cemento armato*. Ing. G. VACCHELLI. — Manuali Hoepli — 2.^a edizione.

(**) Questi teoremi sono stati dimostrati esattamente la prima volta dal compianto ing. Castigliano suddetto, ed in seguito con dimostrazioni diverse — da altri scienziati. È notevole la chiara trattazione che ne fa l'ing. FRANCESCO CROTTI nella sua " *Teoria dell'elasticità* „ edita dall'Hoepli. Si trovano in tutti i trattati moderni pregevoli fra i quali i seguenti recenti:

“ GUIDI — *Lezioni sulla scienza delle costruzioni* „ ;

“ FÖPPL — *Résistance des matériaux* „.

“ MARCOLONGO — *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici* „ (Manuale Hoepli).

Fra le Memorie è interessante quella dell'ing. G. B. SCIOLETTE e quelle degli ingegneri: MARIO BARONI di Milano (Atti Collegio ingegneri di Milano 1902 I - II. fascicolo) ;

G. G. FERRIA di Torino (Bulletin de la Société des ingénieurs civils de France juin 1898) ; nelle quali due ultime sono applicati i detti teoremi alle costruzioni in calcestruzzo armato.

Un corpo o sistema elastico, assoggettato all'azione di forze esterne

$$f_1, f_2, \dots, f_h, \dots, f_n$$

perde il suo stato (*iniziale*) di equilibrio S_0 , ed i punti di applicazione delle dette forze subiscono rispettivamente degli spostamenti

$$\rho_1, \rho_2, \rho_h, \dots, \rho_n.$$

Allo stato iniziale S_0 tutte le forze esterne f sono uguali a zero, epperò sono nulli anche tutti gli spostamenti ρ .

Se le f hanno certi valori *definitivi*:

$$f'_1, f'_2, \dots, f'_h, \dots, f'_n$$

il corpo elastico assumerà un nuovo definitivo stato d'equilibrio S' , tale che confrontato con S_0 si avranno i valori definitivi

$$\rho'_1, \rho'_2, \dots, \rho'_h, \dots, \rho'_n$$

degli spostamenti ρ .

TEOR. I. — Quando un corpo od un sistema elastico si deforma sotto l'azione di forze esterne, le quali crescono per gradi infinitesimi da zero sino al loro valore finale, il lavoro di deformazione del corpo o del sistema — epperò anche il lavoro delle forze esterne, che gli è uguale — rimane lo stesso qualunque sia la legge colla quale crescono le forze esterne.

Teoremi delle derivate.

TEOR. II. — Se il lavoro di deformazione di un corpo, o sistema elastico, si esprime in funzione delle forze esterne qualsivogliano ad esso applicate, la derivata dell'espressione di questo lavoro — presa rispetto ad una qualunque delle forze esterne — dà lo spostamento del punto d'applicazione della forza proiettato sulla direzione della forza stessa.

TEOR. IV. — Se il lavoro di deformazione di un corpo, o sistema elastico, si esprime in funzione delle forze esterne e dei momenti delle coppie di forze, si

TEOR. III. — Se il lavoro di deformazione di un corpo, o sistema elastico, si esprime in funzione delle proiezioni, sulle direzioni delle forze, degli spostamenti dei punti di applicazione delle forze stesse, la derivata dell'espressione di questo lavoro — rispetto ad una qualunque delle proiezioni di questi spostamenti — dà il valore della forza corrispondente allo spostamento stesso.

Invece,

TEOR. V. — la derivata del lavoro di deformazione — rispetto alla detta rotazione — dà il mo-

ottiene un'espressione la di cui derivata — rispetto al momento di una coppia contenuto in tale espressione — dà il valore della rotazione, intorno all'asse della coppia, della retta (la quale è normale alla direzione delle due forze della coppia) congiungente i punti di applicazione delle due forze della coppia stessa.

mento della coppia che ha prodotto la rotazione stessa.

Teorema del minimo lavoro di deformazione.

TEOR. VI. — Qualunque siano le incognite in funzione delle quali si esprime il lavoro di deformazione di un sistema, i valori, che le incognite debbono avere, dopo la deformazione, sono quelli che rendono un **minimo** l'espressione del lavoro di deformazione, avuto riguardo delle condizioni cui sono assoggettate le incognite.

Su questi teoremi può essere fondata l'intera scienza della resistenza dei materiali; e quando si abbia un sistema qualunque soggetto a sforzi qualsivogliano che lo deformano, si potrà, dall'espressione del lavoro di deformazione avvenuto, ottenere mediante derivazione, il valore degli sforzi o degli spostamenti verificatisi in un punto qualunque del sistema, il che forma appunto l'oggetto della resistenza dei materiali. Da ciò si vede quanto sia importante di conoscere l'espressione del lavoro di deformazione, almeno per le principali forme di solidi, che si hanno a considerare negli ordinarii casi della pratica.

Relativamente alla torsione dei corpi noi non diamo alcuna espressione del lavoro di deformazione (*), perchè per la maggior parte dei casi bastano le formole, basate sulla teoria matematica della elasticità, date pei corpi isotropi dal signor Barrè de Saint Venant, che in seguito riporteremo. Diamo invece pei solidi elastici o sistemi elastici:

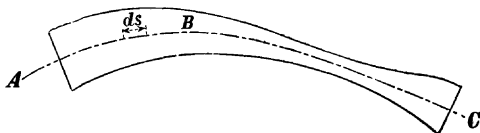


Fig. 49.

* ad asse geometrico $A B C$ (fig. 49) piano, di grande lunghezza in confronto di qualunque loro sezione trasversale, ognuna delle

(*) Volendo si consulti GUIDI, II, pag. 40.

quali avrà l'uno degli assi principali d'inerzia nel piano dell'asse geometrico, e l'altro (chiamato **asse di flessione**), perpendicolare a questo piano; e tutte le forze applicate a tali solidi devono essere distribuite in uno stesso piano di sollecitazione, (che è il piano dell'asse geometrico) in guisa, che quelle alla destra d'una sezione qualunque siano equivalenti ad una coppia di momento M (momento di flessione) avente per asse l'asse di flessione della sezione, e a due forze N , T applicate al baricentro della sezione, la prima (tensione normale) secondo la normale alla stessa e la seconda (sforzo di taglio) in direzione dell'asse principale d'inerzia YY (figura 50) contenuto nel piano dell'asse geometrico.

L'espressione generale del lavoro di deformazione dovuto alla flessione, alla pressione o tensione, ed agli sforzi di taglio; e aggiungiamo inoltre espresse in termini *finiti* le formole del lavoro di deformazione dovuto alla flessione, alla pressione o tensione ed al taglio, che comprendono i casi particolari più importanti.

Chiamando ds un elemento della lunghezza ABC dell'asse, Ω l'area ed I il momento d'inerzia rispetto all'asse neutro di questa stessa sezione; l'espressione generale del lavoro di deformazione L del solido, o sistema elastico, sarà: (*)

$$L = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{M^2}{EI} ds + \frac{1}{2} \int_0^s \frac{N^2}{E\Omega} ds + \frac{1}{2} \int_0^s \frac{A T^2}{E_t \Omega} ds (**),$$

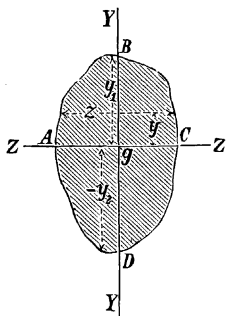


Fig. 50.

nella quale A è un *coefficiente numerico* dipendente dalla forma delle sezioni del solido e che si determina come segue.

Sia $ABCD$ una sezione qualunque del solido, e riferiamola agli assi ZZ , YY principali centrali d'inerzia. Chiamiamo y_1 la distanza massima dei punti del perimetro della sezione al disopra dell'asse ZZ , e $-y_2$ la distanza negativa massima del perimetro della sezione al di sotto dell'asse stesso. Il valore di A , per sezioni molto *strette* nel senso dell'asse di flessione, è dato *approssimativamente* da (***)

$$A = \frac{\Omega}{I^2} \int y_1 \left[\int y_1 z y dy \right]^2 \frac{dy}{z} - y_2 y$$

(*) Se N è una tensione, il segno di N risulterà negativo, ma N^2 sarà sempre positivo. A tale espressione alcuni danno il nome di *funzione del lavoro*; essa è qualche cosa di analogo alla *funzione potenziale (potenziale di elasticità)*, ma bisogna ben guardarsi dall'estenderne la denominazione per non ingenerare confusione. (c. f. r. MARCOLONGO Cap. IV e seguenti).

(**) Il 1° termine è il lavoro di deformaz. dovuto alla flessione
 " 2° " " " " " " " tensione
 " 3° " " " " " " " al taglio

(***) Per una sezione a contorno non semplice, od irregolare, si può agevolmente determinare A per via grafica (c. f. r. GUIDI II. pag. 35).

VALORI DI **A** PER ALCUNE SEZIONI.

Per la sezione rettangolare (fig. 51), col lato parallelo a ZZ eguale a *b* e col lato perpendicolare a ZZ eguale ad *h*, si ha esattamente:

$$A = \frac{6}{5} + \left(\frac{E_t}{mE}\right)^2 \frac{b^4}{h^4} \left[\frac{4}{5} - \frac{144}{\pi^5} \frac{b}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tanh} \frac{n\pi h}{b}}{n^3} - \frac{72}{\pi^5} \frac{b}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tanh} \frac{n\pi h}{b}}{n^5} \right].$$

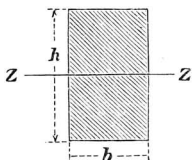


Fig. 51.

Per i corpi isotropi, che sono quelli dei quali ci occupiamo, si ha abbastanza approssimativamente:

$$A = \frac{6}{5}$$

purchè sia $b < h$.

Per le sezioni della Fig. 52, essendo Ω l'area della sezione, *s* lo spessore complessivo delle pareti perpendicolari all'asse neutro ZZ della sezione, *h* l'altezza esterna perpendicolare a ZZ, si può prendere con sufficiente approssimazione

$$A = \frac{\Omega}{hs}$$

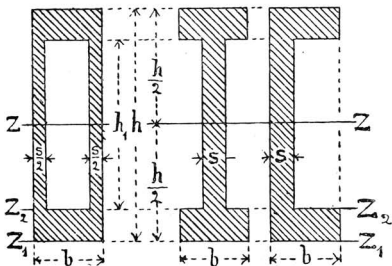


Fig. 52.

Per le sezioni ad I semplici si può calcolare **A** una volta tanto. Per es. per il profilo tedesco N. 8 si trova $A = 2,4$; e per il profilo N. 50, $A = 2,0$. Si può ammettere che, per i profili intermedi, **A** vari linearmente fra tali due valori.

Per la sezione ellittica piena (fig. 53) in cui il rapporto $\frac{b}{c}$ dei semiassi è molto piccolo, si ha con molta approssimazione:

$$A = \frac{10}{9},$$

essendo *b* il semiasse parallelo all'asse ZZ e *c* il semiasse perpendicolare a ZZ.

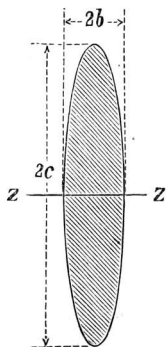


Fig. 53.

Per la sezione ellittica vuota (fig. 54) avente la parete di spessore assai piccola rispetto a' suoi assi, si può prendere con sufficiente approssimazione :

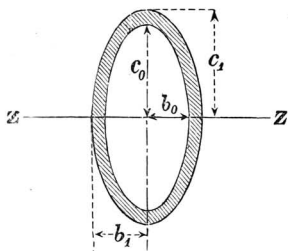


Fig. 54.

$$A = \frac{\Omega}{4 c_1 (b_1 - b_0)}$$

essendo c_1 il semiasse esterno maggiore perpendicolare all'asse ZZ , b_1 e b_0 i semiassi esterno ed interno minori coincidenti coll'asse neutro ZZ , ed Ω l'area della sezione dedotta la parte vuota, cioè l'area della corona ellittica.

Per la figura composta di una sezione a doppio T (fig. 55) con ferri d'angolo, e nella quale al traliccio si sostituisce una parete piena, si ha :

$$A = \frac{\Omega}{c_3 s + \frac{c - c_3}{2}(s + 2b_3)}$$

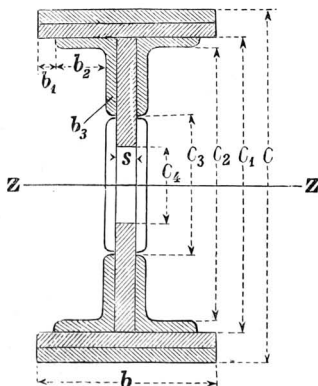


Fig. 55.

In questa espressione $(s + 2b_3)$ non è altro che la spessore della sezione, dove le sbarre ad angolo sono chiodate all'anima.

3. — Espressioni in termini finiti del lavoro di deformazione di alcuni solidi.

Il Castigliano ha dato le seguenti formole.

a) Lavoro di deformazione di tensione o pressione di una verga sollecitata da una forza diretta secondo il proprio asse :

$$L = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{E \Omega},$$

essendo l la lunghezza della verga, Ω l'area della sezione costante, N la tensione o pressione della verga ;

b) Lavoro di deformazione di un prisma caricato uniformemente su tutta la sua lunghezza (*).

Si ha:

$$L = \frac{l}{2EI} \frac{M_0^2 + 4M_1^2 + M_2^2}{3} + \frac{l}{2E\Omega} \frac{N_0^2 + 4N_1^2 + N_2^2}{3} + \frac{Al}{2E_t\Omega} \frac{T_0^2 + 4T_1^2 + T_2^2}{3},$$

nella quale, del prisma, che devesi considerare formato da due tronchi eguali ottenuti tagliandolo normalmente all'asse nel mezzo della sua lunghezza, l è la lunghezza di ciascuno dei due tronchi così risultanti, M_0 , N_0 , T_0 sono il momento inflettente, la pressione normale e lo sforzo di taglio in un'estremità del prisma, M_1 , N_1 , T_1 , ed M_2 , N_2 , T_2 sono le stesse cose nel mezzo e nell'altra estremità.

c) Lavoro di deformazione di un solido a sezione costante, caricato su tutta la sua lunghezza secondo qualsiasi legge, purchè continua, quando il suo asse è una curva piana qualunque. — Si immagini l'asse del solido diviso in un numero *pari* di parti eguali, abbastanza piccole perchè ciascun tronco del solido abbia una freccia abbastanza piccola rispetto alla sua lunghezza, e possa riguardarsi come uniformemente caricato. Designando con $0, 1, 2, 3, \dots, n$ i punti di divisione dell'asse, cominciando a contare da una sua estremità, e ponendo questi stessi numeri per indici delle quantità M , N , T , per indicare le sezioni a cui le medesime si riferiscono, si ha, essendo l la lunghezza d'ogni tronco:

$$L = \frac{l}{6EI} (M_0^2 + 4M_1^2 + 2M_2^2 + 4M_3^2 + 2M_4^2 + \dots + 4M_{n-1}^2 + M_n^2) + \frac{l}{6E\Omega} (N_0^2 + 4N_1^2 + 2N_2^2 + 4N_3^2 + 2N_4^2 + \dots + 4N_{n-1}^2 + N_n^2) + \frac{Al}{6E_t\Omega} (T_0^2 + 4T_1^2 + 2T_2^2 + 4T_3^2 + 2T_4^2 + \dots + 4T_{n-1}^2 + T_n^2).$$

d) Lavoro di deformazione di un solido a sezione variabile in modo continuo, caricato su tutta la sua lunghezza secondo una legge

(*) Premettiamo che in questa e nelle seguenti espressioni del lavoro di deformazione vengono sempre omissi i termini indipendenti dai momenti di flessione M , dalle pressioni normali N e dagli sforzi di taglio T , perchè, dovendosi nei calcoli di resistenza prendere le derivate del lavoro di deformazione rispetto ad M , N , T , i termini indipendenti da queste quantità in tali derivate, spariscono.

qualunque, purchè continua, allorchè l'asse del solido è una curva piana qualunque.

Tenute le notazioni precedenti, e di più mettendo gli indici anche alle lettere \mathbf{A} , I ed Ω per denotare le sezioni a cui esse pure si riferiscono si ha:

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{l}{6E} \left(\frac{M_0^2}{I_0} + \frac{4M_1^2}{I_1} + \frac{2M_2^2}{I_2} + \frac{4M_3^2}{I_3} + \dots + \right. \\
 & \left. + \frac{4M_{n-1}^2}{I_{n-1}} + \frac{M_n^2}{I_n} \right) + \\
 & + \frac{l}{6E} \left(\frac{N_0^2}{\Omega_0} + \frac{4N_1^2}{\Omega_1} + \frac{2N_2^2}{\Omega_2} + \frac{4N_3^2}{\Omega_3} + \dots + \right. \\
 & \left. + \frac{4N_{n-1}^2}{\Omega_{n-1}} + \frac{N_n^2}{\Omega_n} \right) + \\
 & + \frac{l}{6E_t} \left(\frac{T_0^2 \mathbf{A}_0}{\Omega_0} + \frac{4T_1^2 \mathbf{A}_1}{\Omega_1} + \frac{2T_2^2 \mathbf{A}_2}{\Omega_2} + \frac{4T_3^2 \mathbf{A}_3}{\Omega_3} + \dots + \right. \\
 & \left. + \frac{4T_{n-1}^2 \mathbf{A}_{n-1}}{\Omega_{n-1}} + \frac{T_n^2 \mathbf{A}_n}{\Omega_n} \right).
 \end{aligned}$$

CAPITOLO III.

Torsione semplice. Pressione o tensione semplici. Solidi caricati in punta.

1. — Torsione.

Qui daremo soltanto le formole particolari relative alla torsione dei solidi a sezione circolare e quadrata, i quali più ordinariamente s'impiegano per resistere alla torsione, e quelle relative alla torsione dei solidi a sezione ellittica o rettangolare, i quali, impiegati per resistere alla flessione, possono accidentalmente trovarsi sottoposti a sforzi di torsione.

Denotiamo con θ l'angolo di torsione, fra due sezioni distanti un metro l'una dall'altra, il quale è misurato dall'arco di raggio eguale all'unità; con I_p il momento polare d'inerzia della sezione rispetto all'asse di torsione e con ν la distanza delle fibre più affaticate della sezione dall'asse stesso.

Per la stabilità è necessario che in nessun punto la tensione tangenziale, riferita al m², sia maggiore del coefficiente di resistenza alla torsione R_t ; perciò daremo, per ciascun caso particolare una disequaglianza, il primo membro della quale, esprime la massima tensione tangenziale, che ha luogo nella sezione in causa della torsione prodotta dal momento M_θ , dovrà essere minore di R_t , o tutt'al più eguale ad R_t . Daremo anche la formola esprime l'angolo di torsione θ , prodotto dal momento M_θ , ma bisognerà sempre assicurarsi dapprima che la detta disequaglianza sia soddisfatta.

SEZIONE CIRCOLARE PIENA. Sia r il raggio della sezione; essendo

$$\frac{I_p}{\nu} = \frac{\pi}{2} \frac{r^4}{r}$$

si dovrà avere

$$\frac{2 M_\theta}{\pi r^3} < R_t,$$

e allora sarà:

$$\theta = \frac{2 M_\theta}{E_t \pi r^4}.$$

SEZIONE ANULARE CIRCOLARE. Siano r il raggio interno ed \Re il raggio esterno:

$$\frac{2 M_f \Re}{\pi (\Re^4 - r^4)} < R_t \quad \text{e allora:} \quad \theta = \frac{2 M_f}{E_t \pi (\Re - r^4)} .$$

SEZIONE ELITTICA PIENA. Siano \Re il semiasse maggiore ed a il semiasse minore:

$$\frac{2 M_f}{\pi \Re a^2} < R_t, \quad \text{e allora:} \quad \theta = \frac{M_f (\Re^2 + a^2)}{E_t \pi \Re^3 a^3} .$$

SEZIONE ANULARE ELITTICA. Siano \Re_1, a_1 i semiasse maggiore e minore esterni, ed \Re_0, a_0 i semiasse maggiore e minore interni. Supporremo le due ellissi concentriche, simili, e similmente disposte, cosicchè le direzioni degli assi omologhi siano comuni, e si abbia:

$$\frac{\Re_0}{\Re_1} = \frac{a_0}{a_1} = \alpha$$

essendo α il rapporto di similitudine minore dell'unità:

$$\frac{2 M_f}{\pi \Re_1 a_1^2 (1 - \alpha^4)} < R_t$$

e allora:

$$\theta = \frac{M_f (\Re_1^2 + a_1^3)}{E_t \pi \Re_1^3 a_1^3 (1 - \alpha^4)} .$$

SEZIONE RETTANGOLARE. Sia b l'intero lato minore del rettangolo ed h l'intero lato maggiore:

$$\frac{M_f}{\mu b^2 h} < R_t \quad \text{e allora:} \quad \theta = \frac{M_f}{\nu E_t b^3 h} ,$$

essendo μ, ν funzioni di $\frac{h}{b}$ date numericamente dalla seguente:

TABELLA X.

$\frac{h}{b}$	μ	ν	$\frac{h}{b}$	μ	ν
1,00	0,20817	0,14058	2,00	0,24588	0,22868
1,10	0,21393	0,15398	2,50	0,25759	0,24936
1,20	0,21920	0,16612	3,00	0,26720	0,26332
1,25	0,22121	0,17173	3,50	0,27514	0,27331
1,30	0,22315	0,17707	4,00	0,28166	0,28081
1,40	0,22733	0,18690	5,00	0,29150	0,29135
1,50	0,23097	0,19576	10,00	0,31232	0,31232
1,60	0,23433	0,20374	20,00	0,32283	0,32283
1,75	0,23896	0,21428	∞	0,33333	0,33333
1,80	0,24042	0,21743	—	—	—

SEZIONE QUADRATA. In questo caso $\frac{h}{b} = 1$, e quindi dalla tabella risulta :

$$\frac{M_{\theta}}{0,20817 b^3} < R_t,$$

$$\theta = \frac{M_{\theta}}{0,14058 E_t b^4}.$$

2. — Pressione o tensione.

Per un prisma teso o compresso nel senso del suo asse, per la stabilità si deve avere :

$$R \geq \frac{N}{\Omega},$$

essendo Ω l'area della sua sezione trasversale ed R il carico di sicurezza della sostanza di cui è fatto il prisma.

Daremo qui una tabella delle massime altezze teoriche, che potrebbero i solidi prismatici, formati di alcune sostanze, avere al limite di rottura per schiacciamento dovuto al proprio peso, se nessuna causa perturbatrice della semplice pressione, come ad esempio, la spinta del vento, non intervenisse ad alterare le condizioni di resistenza dei solidi prismatici di grande altezza.

La tabella è calcolata assumendo i seguenti carichi di rottura al metro quadrato. Per la ghisa kg. 66000000; pel basalto kg. 20000000; per il legno rovere kg. 7000000; pel ferro kg. 36000000; pel granito di Cava d'Alzo kg. 6800000; per la muratura di buoni mattoni kg. 2000000.

TABELLA XI.

Natura del materiale	Altezza in m. limite a cui il corpo si schiaccia	Natura del materiale	Altezza in m. limite a cui il corpo si schiaccia
Ghisa	9216	Granito di Cava d'Alzo Muratura di mattoni buoni	2601 1024
Basalto	6724		
Legno rovere	6400		
Ferro	4615		

NB. Teoricamente, per la sicurezza, non si può raggiungere che un decimo di queste altezze.

SOLIDO DI EGUALE RESISTENZA ALLA PRESSIONE. (*) Si chiami Ω l'area di una sezione qualunque del solido, assoggettato all'azione del

(*) cioè quel solido prismatico nel quale la pressione unitaria è la stessa per tutte le sue sezioni trasversali.

peso proprio, distante $a - x$ dalla sua base Ω_0 in B , e siano Π il peso dell'unità di volume del solido ed R il carico di sicurezza della sostanza che costituisce il solido.

Una sezione qualunque Ω del solido dovrà essere una funzione di $(a - x)$, e tale che

$$\begin{aligned} R d\Omega &= \Pi (\Omega + d\Omega) d(a - x) \\ &= - \Pi (\Omega + d\Omega) dx \end{aligned}$$

trascuando l'infinitesimo di 2° ordine $- \Pi d\Omega dx$ e integrando

$$\int_{\Omega_0}^{\Omega} \frac{d\Omega}{\Omega} = - \frac{\Pi}{R} \int_a^x dx$$

si ha che la forma (sezione verticale) del solido di egual resistenza sarà data da

$$\Omega = \Omega_0 e^{\frac{\Pi}{R} (a - x)}$$

essendo e la base dei logaritmi Neperiani, cioè da:

$$\log \Omega = \log \Omega_0 + 0,4343 \frac{\Pi}{R} (a - x),$$

prendendo i logaritmi ordinari.

Si avverta che alla base Ω_0 si assume che sia applicata una *forza esterna* $R \Omega_0$ diretta nel senso stesso del peso proprio del solido, per effetto della quale la base Ω_0 è soggetta anch'essa allo stesso sforzo R per unità quadrata cui sono soggette tutte le sezioni del solido.

Se si denota con Ω_1 la base in A la forma del solido di eguale resistenza sarà data da:

$$\Omega = \Omega_1 s^{-\frac{\Pi}{R} x}$$

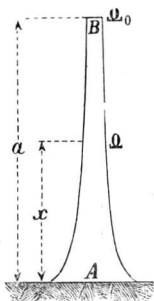


Fig. 56.

Il suo volume totale è

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a \Omega dx = \frac{R}{\Pi} \int_{\Omega_0}^{\Omega_1} d\Omega \\ &= \frac{R}{\Pi} (\Omega_1 - \Omega_0) \end{aligned}$$

ciò che risulta pure considerando che l'aumento della sezione ultima rispetto alla prima deve appunto resistere al peso del solido.

V. II. —

Se il solido ha una cavità cilindrica di sezione ω , la pressione in una sezione Ω qualunque sarà

$$R\Omega = R\Omega_1 e^{-\frac{\Pi}{R}x} - R\omega - \Pi\omega(a-x)$$

Se

$$\omega = \Omega_0 = \Omega_1 e^{-\frac{\Pi}{R}a}$$

allora

$$R\Omega = R\Omega_1 \left(e^{-\frac{\Pi}{R}x} - e^{-\frac{\Pi}{R}a} \right) - \Pi\omega(a-x)$$

TORRE DI EGUAL RESISTENZA ALLA PRESSIONE AVENTE LA CAVITÀ INTERNA CILINDRICA. Siano s_1 la spessezza del

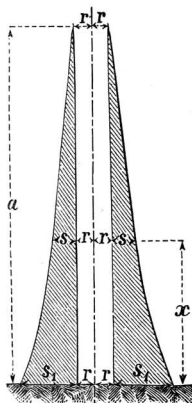


Fig. 57.

muro della torre alla base di fondazione, ed s la spessezza del muro stesso all'altezza x ; a l'altezza teorica della torre (la torre non è soggetta ad altri sforzi fuorchè a quelli dipendenti dal peso proprio, epperchè la spessezza dei muri alla sommità è teoricamente nulla), ed r il raggio della cavità interna.

Ritenendo le precedenti notazioni, la spessezza del muro alla altezza x sarà data da:

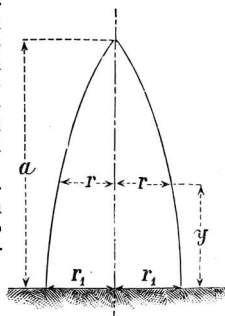


Fig. 58.

$$s = \sqrt{\left\{ r^2 + (r + s_1)^2 \left(e^{-\frac{\Pi}{R}x} - e^{-\frac{\Pi}{R}a} \right) - \frac{r^2}{R} \Pi (a-x) \right\}} - r .$$

SOLIDO DI EGUALE RESISTENZA ALLA PRESSIONE SOTTO L'AZIONE DI UN CARICO UNIFORMEMENTE RIPARTITO SU TUTTA LA SUA LUNGHEZZA (figura 58). Si chiami q il carico distribuito sopra ogni unità di lunghezza del solido, talchè il carico totale Q distribuito su tutta la lunghezza a del solido sarà $Q = qa$.

Sia r il raggio d'una sezione circolare qualunque a distanza y dalla base, r_1 il raggio della base.

Si dovrà avere :

$$r_1 = \sqrt{\frac{q a}{\pi R}} \quad , \quad r = \sqrt{\frac{q (a - y)}{\pi R}} \quad ,$$

di modo che il profilo del solido è parabolico.

DISTRIBUZIONE DELLE PRESSIONI TRASMESSE DA UN PRISMA ELASTICO AD UN FONDO COMPRESSIBILE, ESSENDO IL PRISMA CARICATO UNIFORMEMENTE SU TUTTA LA SUA LUNGHEZZA. La pressione q , per unità qua-

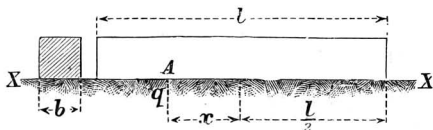


Fig. 59.

drata, che ha luogo in un punto A a distanza x , tanto a destra quanto a sinistra, dalla mezzeria del prisma, è data da :

$$q = \frac{Q}{b l} \left\{ \frac{8 k l}{\sin 2 k l + \sinh 2 k l} (\cos k l \cosh k l \cos k x \cosh k x + \right. \\ \left. + \sin 2 k l \sinh k l \sin k x \sinh k x) - 1 \right\} ,$$

essendo :

Q il peso totale distribuito sul prisma,

I il momento d'inerzia della sua sezione,

C il coefficiente di compressibilità del fondo su cui giace il prisma,

$$k = \sqrt[4]{\frac{C b}{4 E I}}$$

RESISTENZA DEI FILI METALLICI ALLA ROTTURA (tensione).

Dalle esperienze di Karmarsch risulta che la resistenza dei fili metallici è dipendente dal loro diametro; e cioè, per la rottura di un filo, di diametro d in mm., occorre uno sforzo

$$R_{d1} = \frac{a}{d} + R_{\infty} \quad \text{in kg. per mm.}^2 \text{ di sezione,}$$

nella quale a ed R_{∞} sono due costanti dipendenti dalla natura del materiale del filo, i cui valori sono dati dalla

TABELLA XII.

Natura del filo	crudo		ricotto		Natura del filo	crudo		ricotto	
	a	R_{∞}	a	R_{∞}		a	R_{∞}	a	R_{∞}
Ferro miglior qualità . . .	15,9	63,7	3,8	33,1	Ottone	10,2	54,8	7,0	28,7
Ferro ordinario	22,9	45,8	6,4	28,7	Piombo durissimo . . .	0	2,2	—	—
Acciaio	26,7	63,7	3,8	57,3	Piombo tenerissimo . . .	0	1,7	—	—
Zinco	2,2	12,7	—	—	Platino	12,1	22,3	9,6	18,5
Rame	9,6	35,0	0	23,6	Bronzo	18,6	50,3	—	—

Per es, per un filo di ferro crudo della miglior qualità, di 5 mm. di diametro, si avrà

$$R_5 = \frac{15,9}{5} + 63,7 = 66,9 \text{ kg./mm.}^2$$

e quindi esso si romperà sotto una tensione

$$N = \frac{\pi}{4} \cdot 5^2 \cdot 66,9 = 1310 \text{ kg.}$$

3. — Solidi caricati in punta.

Sia AB un solido verticale *fisso* nella sua base inferiore, ad *asse rettilineo*, e supponiamo che alla sua base superiore siano applicate:

a) *Delle forze verticali dirette dall'alto in basso, o, se si vuole, dei pesi distribuiti uniformemente su ciascuna parallela all'asse ZZ ;*

b) *delle forze tangenziali parallele all'asse ZZ la cui somma sia T_1 .*

Chiamiamo N_1 la somma di tutte le forze verticali o pesi applicati sulla base B , ed M_1 la somma dei loro momenti rispetto all'asse principale d'inerzia YY della base, talchè N_1 sia la pressione normale sulla base superiore, e su tutte le altre sezioni orizzontali del solido, ed M_1 il momento di flessione sulla base superiore.

Sia AB' la forma dell'asse del solido

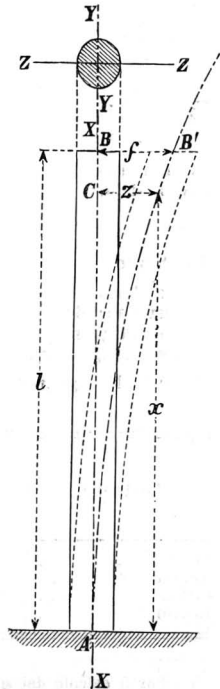


Fig. 60.

dopo la deformazione, f la freccia BB' della curva AB' , e z, x le coordinate di un punto qualunque C' della curva. L'equazione della curva AB' , ossia della linea elastica del solido deformato sarà:

$$M_1 + N_1(f - z) + T_1(l - x) = (M_1 + N_1 f + T_1 l) \cos \left(x \sqrt{\frac{N_1}{EI}} \right) - S_1 \sqrt{\frac{EI}{N_1}} \operatorname{sen} \left(x \sqrt{\frac{N_1}{EI}} \right),$$

nella quale I è il momento d'inerzia della sezione del solido in C , rispetto all'asse YY . (*) Dalla discussione della formola generale della linea elastica AB' si deducono le condizioni cui si deve soddisfare, per la stabilità, nei seguenti casi della pratica.

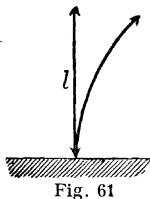


Fig. 61

1. Prisma *incastrato* colla base inferiore, e colla estremità superiore libera di spostarsi orizzontalmente e d'inclinarsi.

Il massimo carico N' , ammissibile in pratica, è dato da:

$$N' = \frac{2}{5} \frac{\pi^2 EI}{4 l^2} = 0,987 \frac{EI}{l^2},$$

Chiamando l' il massimo valore che può prendere l , senza pericolo, si ha:

$$l' = 0,9935 \sqrt{\frac{EI}{R \Omega}},$$

Adottando:

per il ferro	$E = 18000$ kg. per mm.^2 ,	$R = 6$ kg. per mm.^2
per l'acciaio	$E = 20000$ " " "	$R = 10$ " "
per la ghisa	$E = 9000$ " " "	$R = 11$ " "
per il legno quercia	$E = 1000$ " " "	$R = 0,6$ " "

si forma la seguente

TABELLA XIII.

Sostanze	Valori della lunghezza limite l'		
	Sezione circolare piena	Sezione rettangolare	Sezione a corona circolare
Ferro	$l' = 13,6 d$	$l' = 15,7 b$	$l' = 17,9 d'$
Acciaio	$l' = 12,2 d$	$l' = 12,8 b$	$l' = 14,6 d'$
Ghisa	$l' = 7,1 d$	$l' = 8,2 b$	$l' = 9,4 d'$
Legno	$l' = 10,1 d$	$l' = 11,7 b$	$l' = 13,3 d'$

(*) Per il calcolo dei solidi caricati in punta si prende per I il minimo momento d'inerzia della sezione.

In questa tabella d è il diametro del circolo pieno; b il lato minore del rettangolo, qualunque sia l'altro lato maggiore; d' è il diametro esterno della corona circolare il quale è preso eguale a $7/6$ del diametro interno.

II. Prisma appoggiato nel centro della sua base inferiore e caricato nel centro della sua base superiore, in modochè le due basi possono inclinarsi liberamente, ma i loro centri debbano conservarsi nella stessa verticale.

Ritenute le denominazioni del caso I, si ha:

$$N' = \frac{2}{5} \frac{\pi^2 EI}{l^2} = 3,948 \frac{EI}{l^2},$$

$$l' = 1,987 \sqrt{\frac{EI}{RQ}}$$

e quindi la seguente

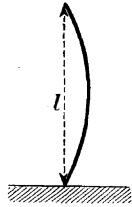


Fig. 62.

TABELLA XIV.

Sostanze	Valori della lunghezza limite l'		
	Sezione circolare piena	Sezione rettangolare	Sezione a corona circolare
Ferro	$l' = 27,2 d$	$l' = 31,4 b$	$l' = 35,8 d'$
Acciaio	$l' = 24,4 d$	$l' = 25,6 b$	$l' = 29,3 d'$
Ghisa	$l' = 14,2 d$	$l' = 16,4 b$	$l' = 18,7 d'$
Legno	$l' = 20,2 d$	$l' = 23,4 b$	$l' = 26,7 d'$

I valori adottati per E ed R sono sempre quelli stessi adottati per la tabella del caso I, ed i significati di d , b , d' sono pure i medesimi già definiti al caso I.

III. Prisma incastrato per la base inferiore, e colla base superiore libera d'inclinarsi, ma obbligata a mantenere il suo centro sulla verticale passante pel centro della base inferiore.

Ritenute le solite notazioni si ha:

$$N' = 0,82 \frac{\pi^2 EI}{l^2} = 8,093 \frac{EI}{l^2}$$

$$l' = 2,845 \sqrt{\frac{EI}{RQ}}$$

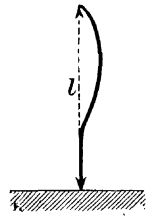


Fig. 63.

e quindi la qui riportata

TABELLA XV.

Sostanze	Valori della lunghezza limite l'		
	Sezione circolare piena	Sezione rettangolare	Sezione a corona circolare
Ferro	$l' = 38,95 d$	$l' = 44,98 b$	$l' = 51,30 d'$
Acciaio	$l' = 31,81 d$	$l' = 36,73 b$	$l' = 41,88 d'$
Ghisa	$l' = 20,34 d$	$l' = 23,49 b$	$l' = 26,80 d'$
Legno	$l' = 30,15 d$	$l' = 31,81 b$	$l' = 38,24 d'$

d, b, d' hanno i soliti significati.

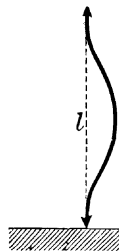


Fig. 64.

IV. Prisma *incastro* in *ambidue* le estremità, in modo che la base superiore può solo abbassarsi verticalmente, ma restando orizzontale. Ritenute ancora le solite notazioni, è:

$$N' = \frac{2}{5} \frac{4 \pi^2 E I}{l^2} = 15,791 \frac{E I}{l^2},$$

$$l' = 3,974 \sqrt{\frac{E I}{R \Omega}},$$

e quindi la seguente

TABELLA XVI.

Sostanze	Valori della lunghezza limite l'		
	Sezione circolare piena	Sezione rettangolare	Sezione a corona circolare
Ferro	$l' = 54,4 d$	$l' = 62,8 b$	$l' = 71,7 d'$
Acciaio	$l' = 48,8 d$	$l' = 51,2 b$	$l' = 58,5 d'$
Ghisa	$l' = 28,4 d$	$l' = 32,8 b$	$l' = 37,4 d'$
Legno	$l' = 40,4 d$	$l' = 46,8 b$	$l' = 53,4 d'$

d, b, d' hanno i soliti significati

NB. Quando, in tutti quattro i casi, l' sia minore di quello indicato nelle tabelle, il massimo carico, che il prisma può sopportare, si calcola colla *formola ordinaria*:

$$N' = R \Omega.$$

Quando il valore di N' dato dalle formole, espote per tutti quattro i casi, riescisse maggiore di $R \Omega$, il massimo carico, che il prisma può sopportare, si calcola colla formola

$$N' = R \Omega.$$

CAPITOLO IV.

Resistenza composta.

Flessione, pressione o tensione e taglio.

Pressione e tensioni eccentriche.

Flessione e torsione.

1. Flessione, pressione o tensione e taglio.

I solidi che in pratica si sottopongono alla flessione, hanno comunemente per asse *geometrico* una retta, oppure una curva piana; nel primo caso i luoghi geometrici dei loro assi *principali centrali* d'inerzia, od *assi d'inerzia principali passanti pei centri di gravità delle sezioni*, sono in generale, due piani perpendicolari fra loro; nel secondo caso il luogo geometrico di uno degli assi principali centrali d'inerzia è il piano stesso della curva, e l'altro è una superficie cilindrica perpendicolare al detto piano. Le forze esterne sono generalmente applicate in modo da non produrre torsione, ed è questo il caso che ora noi consideriamo.

Siano:

Ω l'area della sezione $m n p q$ considerata, normale all'asse $X X$

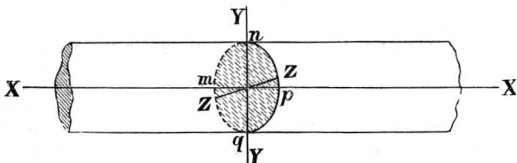


Fig. 65

del solido, I_y , I_z i momenti d'inerzia rispetto agli assi principali centrali delle y e delle z della sezione che si considera,

y , z le coordinate di un punto qualunque della sezione rispetto ai detti suoi assi centrali principali d'inerzia.

A_1 , A_2 e B_1 , B_2 delle funzioni di y e di z dipendenti dalla forma della sezione,

N_x la *pressione normale*, o somma delle componenti perpendicolari alla sezione considerata di tutte le forze applicate al solido a destra della sezione stessa,

T_y, T_z gli sforzi di taglio, o somma delle componenti parallele agli assi delle y e delle z delle forze sopraindicate,

M_y, M_z i momenti di flessione, o somma dei momenti delle stesse forze esterne rispetto ai detti assi delle y e delle z (*),

$\varepsilon_x, \tau_z, \tau_y$ le componenti della forza elastica, riferita al m.² che ha luogo nel punto (z, y) della sezione considerata, essendo

ε_x la componente perpendicolare alla sezione,

τ_z la componente contenuta nel piano della sezione, e parallela all'asse delle z ,

τ_y la componente contenuta nel piano della sezione e parallela all'asse delle y .

Le forze ε_x e τ_z, τ_y si dicono rispettivamente **pressione o forza elastica normale per m.²** e **forze elastiche tangenziali per m.²**.

Ciò posto i valori di queste forze $\varepsilon_x, \tau_z, \tau_y$ relative, ossia riferite al m.², che danno la misura degli sforzi elastici cui è affaticato il solido, sono dati da:

$$\varepsilon_x = \frac{N_x}{\Omega} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z,$$

$$\tau_z = A_1 \frac{T_y}{\Omega} + B_1 \frac{T_z}{\Omega},$$

$$\tau_y = A_2 \frac{T_y}{\Omega} + B_2 \frac{T_z}{\Omega}.$$

È facile vedere che, se si considera nella sezione la retta rappresentata dall'equazione:

$$\frac{N_x}{\Omega} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = C,$$

essendo C una costante, in tutti i punti di questa retta la tensione o pressione normale relativa è costante ed eguale a C . Se si prende $C = 0$, si ha una retta, nei punti della quale la pressione normale è nulla: essa chiamasi **asse neutro**. Le altre rette che contengono i punti di egual pressione sono parallele all'asse neutro. Se l'asse neutro attraversa la sezione si ha tensione nei punti posti da una parte di esso, e pressione nei punti posti dall'altra parte. In tal caso si ha un punto di massima tensione ed uno di massima pressione. Essi sono i punti del contorno della sezione posti alla massima distanza dall'asse neutro.

(*) In una sezione qualunque alla pressione normale, allo sforzo di taglio ed al momento di flessione delle forze esterne operanti a destra della sezione, si oppongono, con valori rispettivamente eguali, la pressione normale, lo sforzo di taglio ed il momento resistenti, dovuti alla reazione elastica molecolare.

La distanza di un punto (z, y) della sezione dall'asse neutro è data da

$$D = \frac{\frac{N_x}{\Omega} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z}{\sqrt{\left(\frac{M_z}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{I_y}\right)^2}}$$

quindi si avrà

$$\varepsilon_x = D \sqrt{\left(\frac{M_z}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{I_y}\right)^2}$$

ossia: in ciascun punto della sezione, ε_x è proporzionale alla distanza di quel punto dall'asse neutro.

Se l'asse neutro cade fuori della sezione ha luogo soltanto tensione o soltanto pressione in tutti i punti della sezione, ed in tal caso il massimo sforzo per m.² ha luogo nel punto del contorno più distante dell'asse neutro.

Quando la pressione normale N_x è nulla, l'asse neutro ha per equazione:

$$\frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = 0,$$

e perciò passa per l'origine delle coordinate ossia pel baricentro della sezione.

Chiamando R il carico di sicurezza, è necessario, per la stabilità, che sia soddisfatta la seguente disequaglianza:

$$R > \frac{3}{8} \varepsilon_x + \frac{5}{8} \sqrt{\varepsilon_x^2 + 4(\tau_z^2 + \tau_y^2)}.$$

Pei punti nei quali è nulla la forza tangenziale $\sqrt{\tau_z^2 + \tau_y^2}$, la condizione di stabilità si riduce a:

$$\varepsilon_x < R \quad \text{od a} \quad \frac{N_x}{\Omega} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z < R$$

ossia ancora a

$$D \sqrt{\left(\frac{M_y}{I_y}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{I_z}\right)^2} < R$$

Per contro nei punti dove è nulla la pressione normale ε_x , la condizione di stabilità si riduce a:

$$\sqrt{\tau_z^2 + \tau_y^2} < \frac{4}{5} R, \quad \text{ossia} \quad \sqrt{\tau_z^2 + \tau_y^2} < R_t.$$

Avvertenza. — Per alcuni corpi, come per la ghisa, pei quali la resistenza alla compressione differisce grandemente dalla resistenza alla tensione, non basta che si verifichi la formola di stabilità:

$$R > \frac{3}{8} \varepsilon_x + \frac{5}{8} \sqrt{\varepsilon_x^2 + 4 \tau_x^2},$$

ma bisognerà altresì che sia verificata la seguente:

$$R_1 > -\frac{3}{8} \varepsilon_x + \frac{5}{8} \sqrt{\varepsilon_x^2 + 4 \tau_x^2},$$

nella quale R_1 è il coefficiente di resistenza alla tensione (*).

VALORI DI A_1 , A_2 , B_1 , B_2 . Per la pratica si possono riguardare come nulli A_1 , B_2 . Gli altri due coefficienti hanno i seguenti valori approssimati.

Si chiami λ la lunghezza della retta $A A'$, e λ_z la lunghezza $C C'$ parallela all'asse delle z , e distante z da detto asse, G il momento statico del segmento $A B A'$ rispetto all'asse delle z , e G_z il momento statico del segmento $C B C'$ rispetto all'asse medesimo; parimenti si chiami λ' la lunghezza della retta $B B'$, λ'_y la lunghezza della retta $D D'$, parallela all'asse delle y , a distanza y del medesimo, e G' , G'_y i momenti statici dei segmenti $B A B'$, $D A D'$, rispetto all'asse delle y . Per tutti i punti della retta $C C'$ si avrà:

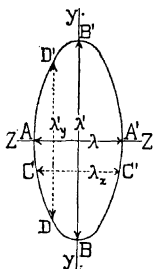


Fig. 66.

$$A_2 = \frac{G_z \Omega}{\lambda_z I_x} \quad \text{e quindi} \quad \tau_y = \frac{G_z T_y}{\lambda_z I_x}$$

e la massima tensione tangenziale parallela all'asse delle y , avrà luogo sull'asse $A A'$, dove sarà:

$$A_2 = \frac{G \Omega}{\lambda I_x} \quad \text{e} \quad \tau_y(\text{mass.}) = \frac{G T_y}{\lambda I_x}.$$

Per tutti i punti della retta $D D'$ avremo

$$B_1 = \frac{G'_y \Omega}{\lambda'_y I_y} \quad \text{e quindi} \quad \tau_z = \frac{G'_y T_z}{\lambda'_y I_y}$$

e la massima tensione tangenziale parallela all'asse delle z , avrà luogo sull'asse $B B'$, ove:

$$B_1 = \frac{G' \Omega}{\lambda' I_y} \quad \text{e} \quad \tau_z(\text{mass.}) = \frac{G' T_z}{\lambda' I_y}$$

(*) C. f. r. CASTIGLIANO, Manuale III, Nota pag. 119.

Caso particolare DI PIÙ FREQUENTE APPLICAZIONE PRATICA. Ordinariamente, salvo pochi casi eccezionali, i solidi che si impiegano per resistere a sforzi di flessione, vengono disposti in modo che uno degli assi principali d'inerzia delle sezioni sia perpendicolare al piano di sollecitazione, o piano nel quale agiscono le forze esterne, o rispetto al quale sono simmetricamente distribuite le forze esterne medesime. Prendendo quell'asse principale d'inerzia, supposto anche centrale, per asse delle z , sarà:

$$T_z = 0, \quad M_y = 0, \quad \tau_z = 0,$$

onde le formole sopra date divengono:

$$\varepsilon_x = \frac{N}{\Omega} + \frac{M}{I} y,$$

$$\tau_y = \frac{G_z T}{\lambda_z I}, \quad \tau_y \text{ (mass.)} = \frac{G T}{\lambda I},$$

nelle quali, per semplicità, si sono omissi gli indici di N , M , T , I perchè non sono più indispensabili; dimodochè qui è:

M il momento di flessione rispetto all'asse ($Z Z$) principale centrale d'inerzia perpendicolare al piano di sollecitazione;

I il momento d'inerzia principale centrale di Ω rispetto a tale asse $Z Z$;

y la distanza di un punto della sezione dallo stesso asse $Z Z$;

G_z e G i momenti statici dei segmenti CBC' e ABA' , rispetto allo stesso asse $Z Z$;

λ_z la lunghezza della retta CC' parallela ed alla distanza y da $Z Z$, e λ la lunghezza della retta AA' .

L'asse neutro sarà dato dall'equazione:

$$\frac{N}{\Omega} + \frac{M}{I} y = 0,$$

cioè sarà *parallelo all'asse delle z* , e posto a distanza $\frac{NI}{M\Omega}$ dal baricentro della sezione.

In questo caso particolare dunque l'asse di flessione di una sezione [che coincide con l'asse $Z Z$ principale centrale d'inerzia perpendicolare al piano di sollecitazione] è la parallela all'asse neutro condotta pel baricentro della sezione.

La condizione di stabilità per questo caso particolare è:

$$\frac{3}{8} \varepsilon_x + \frac{5}{8} \sqrt{\varepsilon_x^2 + 4 \tau_y^2} < R.$$

Pei punti, nei quali è nulla la forza tangenziale τ_y , che sono precisamente quelli del contorno della sezione, nei quali è massima la forza elastica normale ε_x , la condizione di stabilità si ri-

duce a :

$$\varepsilon_x < R \quad \text{ossia a} \quad \frac{N}{\Omega} + \frac{M}{I} y_1 < R ,$$

essendo y_1 la distanza dall'asse $A A'$ del punto del contorno più distante dall'asse neutro.

Quando non si vuol determinare la posizione dell'asse neutro, bisognerà osservare che questa diseuguaglianza dev'essere soddisfatta pei punti del contorno posti alla massima distanza dall'asse di flessione.

Pei punti nei quali è nulla la pressione normale ε_x , cioè pei punti dell'asse neutro, si ha :

$$\tau_y < \frac{4}{5} R ,$$

cioè :

$$\tau_y < R_t .$$

In moltissimi casi i solidi sottoposti a flessione sono travi rettilinee disposte orizzontalmente e caricate di pesi : allora la pressione normale N è nulla e si ha semplicemente :

$$\varepsilon_x = \frac{M}{I} y ,$$

cosicchè l'asse neutro coincide coll'asse delle z , ossia coll'asse di flessione.

Siano y_1 e y_2 i valori massimi di y dalla parte ove ha luogo pressione e da quella ove ha luogo tensione ; la massima pressione e la massima tensione elastica per $m.^2$, saranno rispettivamente

$$\frac{My_1}{I} \quad \text{e} \quad \frac{My_2}{I} ,$$

e per la stabilità bisognerà che la maggiore di queste due espressioni sia $<$ di R ; cioè se per esempio

$$y_1 \cong y_2 \quad \text{si dovrà avere} \quad \frac{My_1}{I} < R$$

ossia

$$M < R \frac{I}{y_1}$$

Esempio. FORMOLE PEL CALCOLO DELLE TRAVI A TRALICCIO. Nei solidi a traliccio devesi intendere per *sezione retta* la sezione normale all'asse fatta nei due *lungoni*, cioè nelle due membrature che corrono per tutta la lunghezza della trave e che sono collegate fra loro dalle *sbarre del traliccio*. Queste ultime devono venir riguardate come pezzi destinati a collegare i due lungoni per modo che si comportino come una trave unica.

Nei solidi a traliccio bisogna calcolare, tanto i lungoni quanto le sbarre, in modo che la massima tensione o pressione per $m.^2$ non oltrepassi il limite fissato per ciascuna di queste parti.

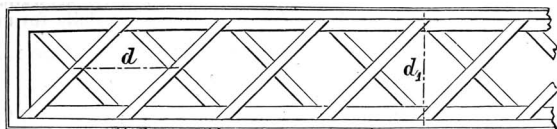


Fig. 67.

Considereremo soltanto il caso che le forze esterne applicate al solido agiscano tutte in un piano contenente l'asse del solido, e che questo piano sia quello del traliccio.

Ciò posto, rappresenti AB la sezione trasversale di una trave a traliccio e ZZ il suo *asse di flessione*, il quale passa pel centro di gravità della sezione retta, ossia della sezione complessa dei due lungoni, e chiamiamo:

Ω l'area della intera sezione dei due lungoni superiore ed inferiore,

G il momento statico della sezione di uno qualunque dei due lungoni rispetto all'asse ZZ di flessione,

I il momento d'inerzia della intera sezione dei due lungoni rispetto all'asse ZZ ,

y_1, y_2 le distanze di quest'asse dai punti più lontani delle figure A e B ,

ω l'area della sezione retta di ciascuna delle sbarre del traliccio,

d la diagonale delle maglie parallela all'asse della trave,

d_1 la diagonale delle maglie perpendicolare al detto asse,

M, N, T , il momento di flessione, la pressione normale, e lo sforzo di taglio nella sezione considerata.

Si calcolerà la massima e la minima pressione per $m.^2$ che ha luogo nei lungoni, a mezzo delle formole (identiche a quelle per le travi ad anima piena):

$$\frac{N}{\Omega} + \frac{M}{I} y_1, \quad \frac{N}{\Omega} - \frac{M}{I} y_2.$$

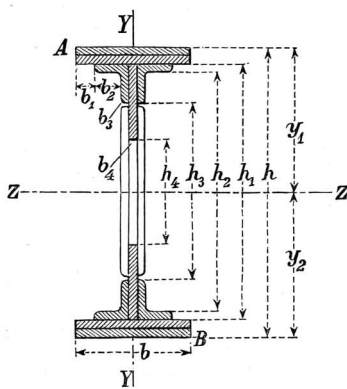


Fig. 68.

Per la stabilità questi valori non devono essere maggiori del coefficiente di resistenza della sostanza onde sono costituiti i lungoni.

Si calcolerà quindi la tensione di ciascuna delle sbarre del traliccio, che attraversano la sezione considerata, per mezzo della formola:

$$\frac{G}{I} \frac{T\sqrt{d^2 + d_1^2}}{2} ,$$

e la tensione delle stesse per m.² di sezione sarà:

$$\frac{G}{I} \frac{T\sqrt{d^2 + d_1^2}}{2 \omega} .$$

Se si vuole conoscere il massimo sforzo di taglio a cui può resistere una sezione, affinchè la massima tensione o pressione per m.² delle sbarre sia R' , si porrà:

$$R' = \frac{G}{I} \frac{T\sqrt{d^2 + d_1^2}}{2 \omega} ,$$

d'onde:

$$T = \frac{I}{G} \frac{2 \omega}{\sqrt{d^2 + d_1^2}} R' .$$

Questa formola serve a descrivere il **diagramma della resistenza del traliccio**.

Il più sovente in pratica, la sezione delle travi a traliccio è simmetrica rispetto all'asse di flessione, e le sbarre fanno l'angolo di 45° coll'asse della trave, cioè le due diagonali d , d_1 sono eguali.

In tal caso si ha per la sezione AB :

$$\Omega = b h - 2 b_1 h_1 - 2 b_2 h_2 - 2 b_3 h_3 - b_4 h_4 ,$$

$$G = \frac{1}{8} \left[b h^2 - 2 b_1 h_1^2 - 2 b_2 h_2^2 - 2 b_3 h_3^2 - b_4 h_4^2 \right] ,$$

$$I = \frac{1}{12} \left[b h^3 - 2 b_1 h_1^3 - 2 b_2 h_2^3 - 2 b_3 h_3^3 - b_4 h_4^3 \right] , \quad (*)$$

$$y_1 - y_2 = \frac{h}{2} ,$$

e pel traliccio:

$$\sqrt{d^2 + d_1^2} = d\sqrt{2} .$$

(*) In pratica si calcola addirittura $\frac{I}{y}$ [che moltiplicato per R dà il momento resistente o modulo della sezione (vedi pag. 105)], e a tal uopo è utile e speditivo l'uso di tavole, fra le quali sono molto pregevoli quelle dell'Ing. E. SCHENCK " *Momenti resistenti e pesi di travi metalliche composte* ", (Manuali Hoepli).

Le due formole che danno la massima e la minima pressione nei lungoni si possono allora raccogliere in una sola:

$$\frac{N}{\Omega} \pm \frac{M}{I} \frac{h}{2},$$

e la formola relativa al traliccio diviene

$$R' = \frac{G}{I} \frac{Td}{\omega \sqrt{2}} \quad \text{d'onde} \quad T = \frac{I}{G} \frac{\omega \sqrt{2}}{d} R'.$$

È da notare che il coefficiente R' di resistenza per le sbarre del traliccio, suole essere preso *minore* di quello che si adotta per i lungoni, perchè il traliccio resiste agli sforzi di taglio, che hanno luogo nella trave. Siccome però le sbarre del traliccio sono effettivamente soggette a tensione o pressione, non havvi ragione di adottare, almeno per le sbarre tese, un coefficiente di resistenza minore di quello dei lungoni. Per le sbarre compresse bisognerà calcolare la loro resistenza considerandole come solidi caricati in punta, incastrati alle loro estremità, dove si attaccano ai lungoni, e trattenuti nei punti intermedi, dove si attaccano ai montanti o ad altre sbarre rigide capaci d'impedire l'inflessione. Tutto ciò prescindendo dalle chiodature, in causa delle quali molte volte si è obbligati ad adottare un coefficiente di resistenza assai piccolo, come diremo in appresso.

Tensione o pressione e taglio. Nel caso che un solido sia soggetto a soli sforzi di pressione o di tensione e di taglio, senza flessione, si ha

$$\varepsilon_x = \frac{N}{\Omega}, \quad \tau_{xy} = \frac{G}{\lambda I} T$$

quindi la formola di stabilità

$$R > \frac{3}{8} \varepsilon_x + \frac{5}{8} \sqrt{\varepsilon_x^2 + 4 \tau_{xy}^2}$$

diviene

$$R > \frac{3}{8} \frac{N}{\Omega} + \frac{5}{8} \sqrt{\frac{N^2}{\Omega^2} + 4 \frac{G^2 T^2}{\lambda^2 I^2}} \quad (*)$$

Derivata del momento di flessione. Sia AB l'asse di un trave sulla quale è distribuito un carico secondo una legge qualsiasi

$$y = f(x).$$

(*) Se $N = 0$, il solido è cimentato a solo taglio: e allora si ha:

$$R = \frac{5}{4} \frac{G}{\lambda I} T.$$

Il momento M_x di flessione in una sezione qualunque in C della

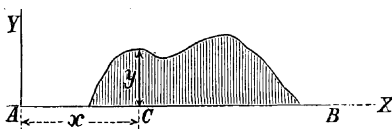


Fig. 69.

rave sarà una funzione di x , cioè si avrà

$$M_x = \Psi(x).$$

Se si prende la derivata

$$\frac{dM_x}{dx} = \Psi'(x),$$

dell'espressione del momento di flessione rispetto all'ascissa x , il valore $\Psi'(x)$ di questa derivata eguaglia lo sforzo di taglio T_x , che ha luogo nella sezione qualunque in C , ossia sarà:

$$T_x = \Psi'(x). \quad (*)$$

Linea elastica. Sia AB l'asse primitivo di una trave soggetta a flessione, ed ACB la forma che AB prende dopo la deformazione subita dalla trave in causa degli sforzi cui è assoggettata.

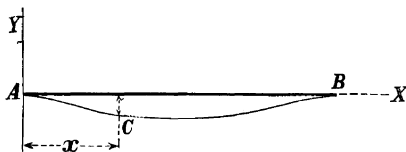


Fig. 70.

La curva ACB prende il nome di **linea elastica**. Questa linea può essere riferita a due assi ortogonali coordinati, prendendo l'asse primitivo della trave per asse delle x , e rappresentando con η l'ordinata alla linea elastica in un suo punto qualunque x ; talchè

$$\eta = \varphi(x)$$

sarà l'**equazione della linea elastica**.

(*) Anche se l'asse della trave è curvilineo, detta s l'*ascissa curvilinea*, si ha

$$\frac{dM_s}{ds} = T_s, \quad \text{e quindi} \quad M_s = \int T_s ds.$$

L'equazione differenziale della linea elastica è:

$$\pm EI \frac{d^2 \eta}{dx^2} = M_x,$$

essendo η , x , M_x ed I l'ordinata, l'ascissa, il momento flettente ed il momento d'inerzia corrispondenti ad una sezione qualunque C : si prenderà il segno + o -, secondochè la linea elastica nel punto che si considera rivolge la concavità dalla parte delle η rispettivamente positive o negative.

Questa equazione è soltanto approssimata, ma è sempre ammissibile nella pratica; per dedurla si è supposto: che la tangente trigonometrica dell'angolo che una tangente in un punto qualunque della curva fa con l'asse delle x sia tanto piccola da potersi trascurare in confronto dell'unità; ed inoltre tenendo conto soltanto delle deformazioni — per le quali il suo asse geometrico rettilineo passa nella curva elastica — prodotte nella trave da M_x , e ciò perchè quelle prodotte dallo sforzo di taglio sono trascurabili rispetto alle prime.

M_x ed I sono in generale funzioni di x , e così dopo due integrazioni l'equazione differenziale suscritta fornirà ∞ la $\eta = \varphi(x)$.

Momento resistente. Rappresentando, come di solito, con R la tensione o pressione, riferita al m.², che per effetto delle forze elastiche, ha luogo in una fibra di una trave soggetta a flessione, e con y la distanza di questa fibra dall'asse neutro della sezione della trave rispetto alla quale M_x è il momento di flessione, si ha:

$$M_x = R \frac{I}{y}$$

Il valore $R \frac{I}{y}$ chiamasi momento resistente della sezione considerata,

SEGNO DEI MOMENTI. Si possono prendere con segno *positivo* i momenti che tendono a far rotare una sezione secondo il *verso delle sfere di un orologio*, e con segno *negativo* i momenti che tendono a far rotare una sezione in *verso contrario* a quello delle dette sfere.

INCASTRAMENTO. Si usa dire che una trave è *incastrata* quando essa è fissata in un muro o altrimenti in modo che la sua sezione dove ha luogo l'incastro, non possa nè *scorrere*, nè *ruotare*.

L'incastramento perfetto in natura non è possibile, perchè tutti i corpi, assoggettati a sforzi, si deformano.

2. — Tensione o pressione eccentriche.

Tensione eccentrica. Un'asta incastrata in A , e piegata ad angolo retto ABC è sollecitata da una forza verticale P applicata in C . Sarà:

$$R = P \left(\frac{1}{\Omega} + a \frac{y}{I} \right)$$

il valore della forza elastica normale R , riferita al m^2 , nella fibra maggiormente tesa posta a distanza y dall'asse neutro, ed

$$R_t = P \left(\frac{1}{\Omega} - a \frac{y_t}{I} \right)$$

il valore della forza elastica normale R_t , riferita al m^2 , nella fibra maggiormente compressa posta a distanza y_t dall'asse neutro.

Ponendo

$$\varphi = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

l'equazione della linea elastica è

$$\eta = \frac{a}{\cosh \varphi l} (\cosh \varphi x - 1)$$

e quindi il massimo piegamento dell'asta (in B) sarà

$$\eta_B (\text{mass}) = a \left(1 - \frac{1}{\cosh \varphi l} \right).$$

Fig. 71.

Si ha ancora

$$M_x = a P \frac{\cosh \varphi x}{\cosh \varphi l}, \quad M_B (\text{mass.}) = a P.$$

PRESSIONE ECCENTRICA. Un'asta incastrata in A , piegata ad angolo retto ABC è caricata verticalmente con un peso P . Sarà

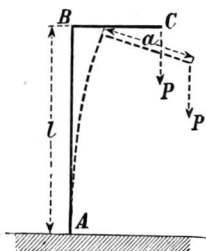


Fig. 72.

$$R = -P \left(\frac{1}{\Omega} - \frac{a y}{I \cos \varphi l} \right),$$

$$R_t = -P \left(\frac{1}{\Omega} + \frac{a y_t}{I \cos \varphi l} \right);$$

$$\eta = \frac{a}{\cos \varphi l} (1 - \cos \varphi x),$$

$$\eta_B (\text{mass.}) = a \left(\frac{1}{\cos \varphi l} - 1 \right);$$

$$M_x = a P \frac{\cos \varphi x}{\cos \varphi l},$$

$$M_B (\text{mass.}) = a P.$$

ASTA VERTICALE incastrata in A caricata da un peso P assiale e inoltre sollecitata da un'altra forza F orizzontale.

Si ha per il caso della fig. 73.

$$R = \frac{P}{\Omega} + \frac{y M_B (\text{mass.})}{I},$$

$$R_1 = \frac{P}{\Omega} - \frac{y_1 M_B (\text{mass.})}{I};$$

$$M_x = \frac{F}{\varphi} \frac{\sinh \varphi (l-x)}{\cosh \varphi l},$$

$$M_A (\text{mass.}) = \frac{F}{\varphi} \tanh \varphi l;$$

$$\eta = \frac{F}{P} \left[x - \frac{1}{\varphi} \frac{\sinh \varphi l - \sinh \varphi (l-x)}{\cosh \varphi l} \right],$$

$$\eta_B (\text{mass.}) = \frac{F}{P} \left(l - \frac{\tanh \varphi l}{\varphi} \right);$$

e per il caso della fig. 74.

$$R = -\frac{P}{\Omega} + \frac{y M_B (\text{mass.})}{I},$$

$$R_1 = -\frac{P}{\Omega} - \frac{y_1 M_B (\text{mass.})}{I};$$

$$M_x = \frac{F}{\varphi} \frac{\sin \varphi (l-x)}{\cos \varphi l},$$

$$M_A (\text{mass.}) = \frac{F}{\varphi} \tanh \varphi l;$$

$$\eta = \frac{F}{P} \left[-x + \frac{1}{\varphi} \frac{\sin \varphi l - \sin \varphi (l-x)}{\cos \varphi l} \right],$$

$$\eta_B (\text{mass.}) = \frac{F}{P} \left(\frac{\tanh \varphi l}{\varphi} - l \right).$$

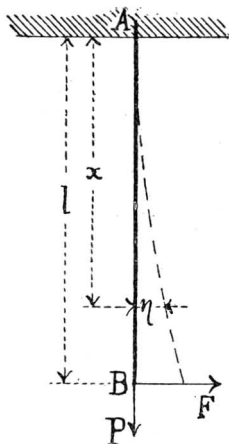


Fig. 73.

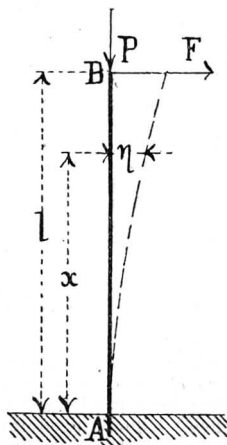


Fig. 74.

ASTA OBLIQUA. Un'asta incastrata sotto un angolo α colla verticale, è sollecitata da una forza P diretta verticalmente. Si ha:

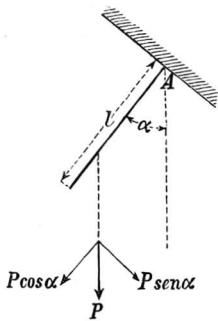


Fig. 75.

$$R = P \left(\frac{\cos \alpha}{\Omega} + \frac{l \sin \alpha}{I} y \right),$$

$$R_1 = P \left(\frac{\cos \alpha}{\Omega} - \frac{l \sin \alpha}{I} y_1 \right)$$

Se la sezione dell'asta è rettangolare sarà:

$$P = R \frac{b h^2}{6 l \sin \alpha + h \cos \alpha},$$

$$P_1 = R_1 \frac{b h^2}{6 l \sin \alpha - h \cos \alpha}.$$

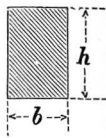


Fig. 76.

dei quali due valori P e P_1 il minore è il peso di cui si può caricare l'asta.

3. — Flessione e torsione.

Consideriamo solo il caso ordinario, che si presenta in pratica, di un albero motore o di trasmissione girevole intorno a due perni posti alle sue estremità, che porta in un punto una ruota, alla quale è applicata la forza motrice, e in un altro punto un'altra ruota alla quale è applicata la resistenza.

In una sezione hanno luogo le forze seguenti:

una pressione normale N_x distribuita uniformemente in tutta la sezione,

due momenti di flessione M_y, M_z rispetto agli assi principali centrali d'inerzia,

due sforzi di taglio T_y, T_z paralleli agli assi stessi,

un momento M_θ di torsione rispetto all'asse dell'albero.

Per la stabilità si deve avere:

$$\frac{3}{8} \varepsilon_x + \frac{5}{8} \sqrt{\varepsilon_x^2 + 4(\tau_z^2 + \tau_y^2)} < R.$$

Il più delle volte per gli alberi motori delle macchine la pressione N_x è nulla o trascurabile, ed anche la parte di scorrimento trasversale prodotta dagli sforzi di taglio T_y, T_z è trascurabile rispetto a quella prodotta dal momento di torsione M_θ . Di più la sezione è ordinariamente circolare piena o a corona circolare.

Per la sezione circolare piena, chiamando d il diametro, allora

si ha :

$$\frac{4}{\pi d^3} \left(3 \sqrt{M_y^2 + M_z^2} + 5 \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + M_\theta^2} \right) < R,$$

od anche, prendendo per asse della z l'asse della coppia risultante $\sqrt{M_y^2 + M_z^2}$, e ponendo quindi $M_y = 0$:

$$\frac{4}{\pi d^3} \left(3 M_z + 5 \sqrt{M_z^2 + M_\theta^2} \right) < R.$$

Per la sezione a **corona circolare**, chiamando d_1 e d_0 i diametri esterno ed interno, si ha :

$$\frac{4 d_1}{\pi (d_1^4 - d_0^4)} \left(3 \sqrt{M_y^2 + M_z^2} + 5 \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + M_\theta^2} \right) < R,$$

od anche, prendendo per asse delle z l'asse del momento risultante $\sqrt{M_y^2 + M_z^2}$, in modo che sia $M_y = 0$:

$$\frac{4 d_1}{\pi (d_1^4 - d_0^4)} \left(3 M_z + 5 \sqrt{M_z^2 + M_\theta^2} \right) < R.$$

Per facilitare l'applicazione di queste formole aggiungeremo alcuni schiarimenti.

Supponiamo che ad un albero sia applicata una ruota idraulica la quale facendo n giri al minuto primo, debba servire a trasmettere ad ogni minuto secondo un lavoro motore L , espresso in kgm. per mezzo d'una ruota dentata calettata sull'albero stesso. Il momento di torsione dell'albero fra la ruota idraulica e la ruota dentata sarà dato dalla formola :

$$M_\theta = \frac{60 L}{2 \pi n}.$$

Se il lavoro motore è espresso in HP, si avrà :

$$M_\theta = \frac{60 \times 75 L}{2 \pi n},$$

cosicchè si dedurrà immediatamente il momento di torsione dal valore del lavoro che l'albero deve trasmettere.

Riguardo al momento di flessione si dovrà ottenerlo avendo riguardo al peso delle diverse parti ed alla pressione che ha luogo tra la ruota dentata calettata sull'albero e quella calettata sull'altro albero a cui viene trasmesso il moto.

Il calcolo si farebbe nello stesso modo se la *trasmissione* del lavoro si facesse per mezzo di cinghie.

CAPITOLO V.

Dimensioni usuali delle travi in legno.

Peso proprio e sopracarichi di alcune costruzioni.

1. — Dimensioni delle travi in legno.

Il rapporto *più conveniente* fra l'altezza h e la base b di una trave, che si estrae da un tronco cilindrico, è

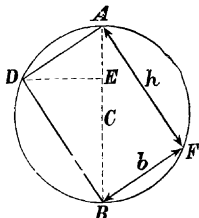


Fig. 77.

$$\frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

ossia ∞

$$b = \frac{5}{7} h.$$

Per ottenere questa sezione più conveniente, si prenda sopra un diametro AB della sezione circolare del tronco

$$\overline{AE} = \frac{1}{3} \overline{AB}$$

e si innalzi $\overline{ED} \perp \overline{AB}$; si congiunga il punto D — incontro della retta ED con la circonferenza — con A e B . Il rettangolo $ADBF$ è la sezione domandata.

Le travi squadrate del *commercio* hanno comunemente le dimensioni seguenti:

Listelli, correntini, o cotichette: sezione $0^m,04 \times 0^m,02 \div 0^m,09 \times 0^m,04$; lunghezza fino a $3^m,50 \infty$.

Travicelli: sezione $0^m,10 \times 0^m,075 \div 0^m,17 \times 0^m,15$: lunghezza fino a $5^m,25 \infty$.

Travi: base maggiore	$0^m,20 \times 0^m,15$;	lunghezza fino	$7^m \div 8^m$	∞
" "	$0^m,30 \times 0^m,20$	" "	$8^m,30$	"
" "	$0^m,35 \times 0^m,25$	" "	$9^m,50$	"
" "	$0^m,40 \times 0^m,30$	" "	$10^m,50$	"
" "	$0^m,45 \times 0^m,35$	" "	12^m	"

Assi o tavole: grossezza $0^m,012 \div 0^m,10$: lunghezza d'ordinario non $> 3^m,60$; larghezza da $0^m,30$ a $0^m,75$.

2. — Peso proprio e sopraccarico dei solai.

I) Peso proprio (carico permanente):

a) per l'orditura del solaio (escluse le travi maestre):

Travicelli di legno e assito	in media al m. ² kg.	35
Travicelli di ferro con sbadacchi e assito	" " "	40
Travicelli di ferro con vólte di quarto	" " "	250

Il peso del ferro nei solai metallici è:

pei solai leggeri	al m. ² kg.	16 ÷ 20
" " a vólte	" " "	20 ÷ 26
" " con travi maestre	" " "	30 ÷ 50

b) pei pavimenti o soffitti:

Pavimento di legno semplice colla sua armatura: al m. ² kg.	20 ÷	30
Pavimento a tavolette (<i>parquet</i>)	" "	50 ÷ 80
Pavimento di pianelle col suo letto	" "	60 : 90
Soffitto di stuoie a intonaco semplice	" "	20 ÷ 30
Soffitto di correntini con stucchi	" "	70 ÷ 120

II) Sopraccarico (carico accidentale);

Solai leggeri (camere sottotetto, ecc.)	al m. ² kg.	80 ÷ 100
Solai ordinari (camere d'abitazione)	" "	150 ÷ 180
Sale da ballo e di riunione	" "	250 ÷ 300
Opifici con macchine	" "	300 ÷ 500
Magazzini	" "	500 ÷ 2500

NB. Questi sopraccarichi suppongono che i carichi accidentali si possano considerare come *uniformemente* distribuiti: quando però questa considerazione induca ad ammettere una distribuzione del carico accidentale non abbastanza prossima al vero, converrà calcolare la resistenza dei solai adottando più sopraccarichi diversi a seconda della effettiva posizione in cui i carichi accidentali dovranno realmente trovarsi; ciò, per es. dovrà farsi quando negli edifizii si debbano collocar macchine di grande peso od altri carichi concentrati di alto valore.

III) Per le travi maestre il peso proprio si calcola in relazione alla grossezza della trave, ed il sovaccarico è la somma di tutti i carichi permanenti ed accidentali, che gravitano o possono gravitare sulla trave maestra. Per calcolare il sopraccarico sulle travi maestre, *per m. corr.*, si considerano tutti i carichi esistenti sulle due metà della distanza fra le travi maestre da una parte e dall'altra di ciascuna di esse.

3. — Peso proprio e sopracarico delle coperture.

Il **peso proprio**, escluse le incavallature (*capriate*) ed il materiale di coperta, per tetti sia in legno che in metallo, si compone come segue:

a) Correnti (arcarecci, terzere) . . per m.² di tetto kg. 12 ÷ 25

b) Orditura di travicelli, listelli od assito, ecc.,

I) per coperture leggere (ferro, zinco, vetri, ardesie) per m.² di tetto kg. 15 ÷ 25

II) per coperture pesanti (tegole) " " " " 25 ÷ 35

La pressione *verticale* dovuta alla neve, per tetti d'inclinazione ordinaria, cioè di 33° a 18° varia da kg. 30 a 90 per m.², secondo che l'altezza della neve varia fra m. 0,40 a 0,80.

La pressione *verticale* del vento, per le stesse inclinazioni, varia da kg. 20 a 80, secondo la violenza del vento (*).

Crescendo l'inclinazione del tetto, la pressione della neve diminuisce, mentre cresce quella del vento.

In media, per le nostre regioni si può ritenere per sopracarico *complessivo* dovuto alla neve ed al vento, da kg. 60 a 80 per m.² di tetto secondo il clima e l'esposizione, qualunque sia l'inclinazione.

(*) La relazione fra la velocità v , in m. per minuto secondo, e la pressione, in kg. per m.², sopra una superficie piana in quiete *normale* alla direzione del vento è

$$p_{90} = 0,122 v^2 \quad (a)$$

con la quale è calcolata la seguente

TABELLA XVII.

Natura del vento	v	p_{90}
leggero.	1 ÷ 2	0,12 ÷ 0,5
vivace	5 ÷ 10	3 ÷ 12
forte	15 ÷ 25	28 ÷ 76
uragano	30 ÷ 40	110 ÷ 195

Se la superficie piana in quiete è *inclinata* d'un angolo α sulla direzione

Quindi il carico totale per m.² di tetto, escluso il materiale di copertura:

per coperture leggere, secondo clima ed esposiz. kg. 90 ÷ 120
 " " pesanti, " " " " " 110 ÷ 140

A questo carico si deve aggiungere il peso del materiale di copertura, come risulta dalla seguente

del vento, la pressione normale sulla superficie stessa — in kg. per m.² — è data da:

- 1^a secondo I. Newton: $p_{\alpha} = p_{90} \text{ sen}^2 \alpha$,
 2^a " F. R. v. Lössl: $p_{\alpha} = p_{90} \text{ sen } \alpha$,
 3^a " Rayleigh e E. Gerlach: $p_{\alpha} = p_{90} \frac{(4 + \pi) \text{ sen } \alpha}{4 + \pi \text{ sen } \alpha}$,

dove p_{90} è sempre dato dalla (a). Non vi sono sufficienti esperienze per poter affermare quale di queste tre formole è la più attendibile. General-

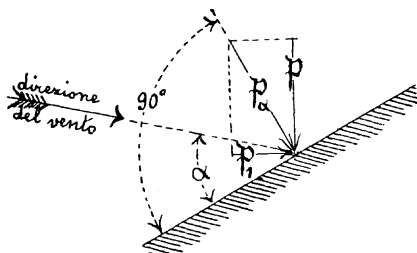


Fig. 78.

mente la 1^a dà valori troppo piccoli e la 3^a valori troppo grandi (c. f. r. Centralblatt der Bauverwaltung 1885 pag. 203).

La pressione normale p_{α} si può scomporre nelle due:

- pressione orizzontale: $p_1 = p_{90} \text{ sen } \beta$,
 " verticale: $p = p_{90} \text{ cos } \beta$,

dove β è l'angolo d'inclinazione sull'orizzonte della superficie piana suddetta.

TABELLA XVIII.

Materiale di coperta	Numero dei pezzi per m. ²	Monta in frazione della portata	Peso per m. ² in kg.
Tegole comuni a canale di 0 ^m ,40 × 0 ^m ,13 × 0 ^m ,19 a due strati .	36 ÷ 41	$\frac{1}{3} \div \frac{1}{4}$	70 ÷ 80
Tegole comuni a canale con ridoppi (a tre strati)	54	"	105
Tegole piane di 0 ^m ,42 × 0 ^m ,25	14	"	36,5
" " di 0 ^m ,28 × 0 ^m ,21	21	"	33,5
" " con sottoposto pannelato	—	"	110
Ardesie francesi, spess. mm. 3 ÷ 4	46 ÷ 60	"	30 ÷ 35
Ardesie lombarde, spess. mm. 6 ÷ 9	22 ÷ 24	"	30 ÷ 45
Lamiera zincata, spess. mm. 0,7 ÷ 1	—	$\frac{1}{5} \div \frac{1}{6}$	6 ÷ 8
Zinco N. 14-16, spess. mm. 0,9 ÷ 1,1	—	"	6 ÷ 7,5
Piombo, spessore mm. 3,5	—	"	40
Vetro, spessore mm. 3 ÷ 5	—	"	8 ÷ 14
" " " 10 ÷ 12	—	"	32

4. — Peso proprio e sopraccarico dei ponti.

Pei ponti accade che si abbia un peso concentrato mobile sulla lunghezza del ponte, e che possa convenire di raggugiare gli effetti, prodotti dal *peso concentrato*, a quelli prodotti da un *carico uniformemente ripartito* (carico *virtuale* uniforme) sulla portata del ponte.

Sia per es., un ponte su due appoggi, ad una sola travata. Se un peso concentrato P percorre il ponte, il massimo momento di flessione ha luogo quando il carico P trovasi nel mezzo della portata, ed allora, nella sezione di mezzo della portata si ha

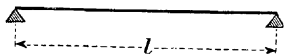


Fig. 79.

$$M = \frac{Pl}{4} .$$

Se sulla portata del ponte fosse distribuito un carico in ragione di q_1 kg. per m. corr. il momento inflettente massimo, che ha luogo per la sezione di mezzo della portata del ponte, è

$$M' = \frac{1}{8} q_1 l^2 .$$

Per *ragguagliare* il momento di flessione prodotto dal peso mobile a quello del carico uniformemente ripartito si deve porre:

$$M = M' ,$$

e perciò:

$$\frac{P l}{4} = \frac{1}{8} q_1 l^2$$

d'onde

$$q_1 = \frac{2P}{l}$$

è il valore del carico per m. corr. di ponte, da adottarsi affinché esso sia stabile, quando se ne siano calcolate le dimensioni delle travi supponendolo caricato uniformemente in tutta la sua lunghezza mentre esso può effettivamente trovarsi sottoposto alla flessione prodotta dal passaggio di un peso mobile P .

Lo sforzo di taglio massimo che il peso mobile P può produrre è:

$$T = P ,$$

e per un carico q_2 distribuito uniformemente sul ponte lo sforzo di taglio massimo è

$$T' = \frac{q_2 l}{2}$$

epperò dovendo porre $T = T'$ sarà:

$$q_2 = \frac{2P}{l} .$$

Così il valore del carico per m. corr. da adottarsi per un ponte su due appoggi, quando si ragguagliano gli effetti di un peso mobile a quelli di un carico uniformemente ripartito, è lo stesso tanto per momenti di flessione quanto per gli sforzi di taglio.

Quando adunque non si voglia cercare la posizione più sfavorevole che prende *un solo* carico mobile sopra un ponte ad una sola travata, si possono calcolare il momento di flessione e lo sforzo di taglio massimi, in relazione ai quali si devono assegnare le dimensioni delle sezioni delle travi del ponte, supponendo che il carico sia ripartito uniformemente sopra di esse, ed assumendo per *carico per m. corr.* i valori di q_1 e di q_2 dati dalle formole sopra esposte.

Quando si abbiano più carichi mobili sopra una travata, in generale bisogna cercare la posizione più sfavorevole del sistema di carichi, col metodo descritto al seguente Cap. . .

I ponti, avuto riguardo alla loro destinazione, si distinguono in ponti **pedonali**, detti anche **passerelle**, in ponti **per strada ordinaria** per la sola carreggiata, o per la carreggiata ed i marciapiedi, ed in **ponti per strade ferrate**.

Carichi accidentali.

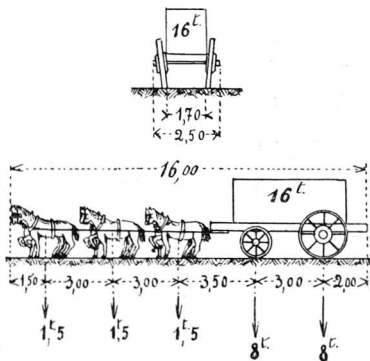
Passerelle per uso privato: carico acc. = kg. 240 ÷ 270 per m.²,
Passerelle per uso pubblico: carico acc. = kg. 400 ÷ 500 " " " " " "
 che è il peso per m.² corrispondente ad una *folla compatta* di persone.

Per i ponti per strada ordinaria si considera:
 un carico accidentale costituito da un seguito di carri -- in numero indefinito -- dei due seguenti tipi, ed in altrettante file quanto lo comporta la larghezza della carreggiata; e sui marciapiedi un carico uniformemente ripartito costituito da una folla più o meno compatta a seconda della categoria alla quale appartiene la strada come è qui sotto indicato:

Strade carreggiabili.

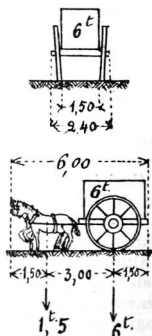
1°) di grande traffico

2°) di traffico limitato sulla carreggiata



kg. 500 per m.²

Fig. 80.



kg. 400 per m.²

Fig. 81.

sui marciapiedi

In alcuni casi, come nelle grandi città, si deve verificare la stabilità del ponte per il passaggio di quelle *spianatrici meccaniche*, o *rulli compressori* — di cui la fig. 82 dà un tipo.

Il Manuale del Colombo, per un ponte di m. 5 di carreggiata e

due marciapiedi di m. 1 cadauno, dà — nell'ipotesi più sfavorevole

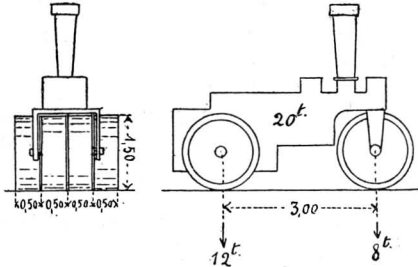


Fig. 82.

— il seguente valore del carico virtuale uniforme q_1 per m. corr. luce della travata l (in m.) ≤ 5 $= 10$ $= 15$ ≥ 20
 valore di q_1 (in kg.) . . . 3900 3600 3200 2800
 e per valore del carico virtuale uniforme q_2 per m. corr.

$$q_2 = 1500 + \frac{13000}{l} \text{ in kg.}$$

finchè non risulta $q_2 < \text{kg. } 2800$, valore questo da considerarsi come un *minimo*.

Per i ponti per strade ferrate si assumono carichi accidentali a seconda dell'importanza delle linee, ma non vi è un Regolamento internazionale in proposito.

Lo Stato prussiano ha pubblicato un nuovo Regolamento per il

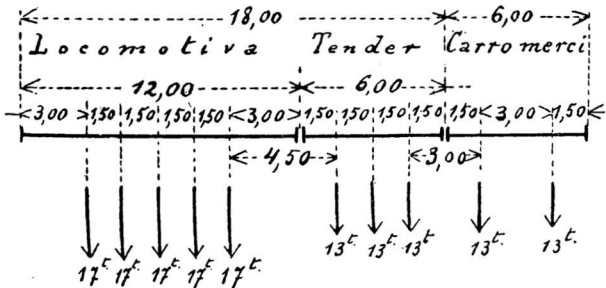


Fig. 83.

calcolo dei ponti delle sue ferrovie (opere dal 5 aprile 1901), che prescrive per carico accidentale un *treno-tipo* costituito da una locomotiva e tender seguiti da un numero *illimitato* di vagoni merci come nella fig. 83: notando che se sul ponte non possono stare

4 gruppi di (*locomotiva-tender* = fig. 84).
seguiti da un numero indefinito di (*carri merci* = fig. 85).

Cat. B. — 1 gruppo di (*locomotiva-tender* = fig. 84) seguito da un numero indefinito di (*carri merci* = fig. 85). salvo a verificare che siffatto treno tipo dia luogo a sollecitazioni non inferiori a quelle prodotte da un treno di tre locomotive del tipo prossimo a quello più sfavorevole delle locomotive in uso — o di quelle che si preveda dover ammettere in un prossimo avvenire — seguite da carri merci. Se speciali esigenze o circostanze richiedano il transito di più di 3 di queste ultime locomotive, si dovrà aggiungere una 4^a identica; invece soltanto 2, quando è escluso perentoriamente il transito di 3 di tali locomotive riunite.

Cat. C. — 3 locomotive del tipo prossimo più sfavorevole di quelle in uso sulla linea — o di quelle che si preveda dover ammettere in un prossimo avvenire — seguite da un numero indefinito di carri merci; invece soltanto 2, quando è escluso perentoriamente il transito di tre di tali locomotive riunite.

Per le opere su linee di questa *Cat.* — a *scartamento normale* — le quali siano, o possano essere in un prossimo avvenire, allacciate con linee delle due precedenti *Cat.*, si dovrà considerare anche l'ipotesi di 1 locomotiva *sciolta* del tipo in fig. 84.

Per futte tre le *Cat.* si dovrà considerare anche l'ipotesi d'un *asse isolato unico* fittizio pesante:

per le *Cat. A e B.* $\frac{1}{3}$ } in più dell'asse maggiormente gravato della
 „ *la Cat. C.* $\frac{1}{4}$ } locomotiva.

Per tutte tre le *Cat.*, invece dei treni tipi, si possono adottare i pesi uniformi virtuali

$\left. \begin{array}{l} q_1 \text{ per i momenti flettenti} \\ q_2 \text{ per gli sforzi di taglio} \end{array} \right\}$ al m. corr. di binario

registrati nelle seguenti Tabelle XIX, XX, XXI, XXII, calcolate in base ai corrispondenti treni tipi, nell'ipotesi che il sovraccarico agisca direttamente su travi di un'unica luce ad asse rettilineo orizzontale liberamente appoggiate ai loro estremi.

NB. In tutte queste tre tabelle per valori di *l* intermedi si farà l'interpolazione lineare.

TABELLA XIX.

Cat. A. — Numero massimo delle locomotive = 3 (Tipo fig. 84 e 85).

Luce o lunghezza di binario da so- vraccaricare per avere il massimo effetto	Sovraccarico in t. al m. corr. di binario		Luce o lunghezza di binario da sovraccaricare per avere il massimo effetto	Sovraccarico in t. al m. corr. di binario	
	per il massimo momento flettente	per il massimo sforzo di taglio		per il massimo momento flettente	per il massimo sforzo di taglio
<i>l</i>	<i>q</i> ₁	<i>q</i> ₂	<i>l</i>	<i>q</i> ₁	<i>q</i> ₂
<i>m.</i>	<i>t.</i>	<i>t.</i>	<i>m.</i>	<i>t.</i>	<i>t.</i>
1,0	30,00	30,00	6,5	10,99	12,71
1,1	27,27	27,27	7,0	10,69	12,18
1,2	25,00	25,00	7,5	10,37	11,68
1,3	23,08	23,08	8,0	10,04	11,20
1,4	21,43	22,19	8,5	9,72	10,82
1,5	20,00	22,00	9,0	9,41	10,52
1,6	18,75	21,68	9,5	9,11	10,22
1,7	17,65	21,28	10,0	8,82	9,97
1,8	16,67	20,83	10,5	8,54	9,77
1,9	15,79	20,36	11,0	8,27	9,56
2,0	15,00	19,88	11,5	8,05	9,39
2,1	14,29	19,39	12,0	7,88	9,25
2,2	13,64	18,90	12,5	7,71	9,10
2,3	13,04	18,43	13,0	7,54	8,95
2,4	12,91	17,97	13,5	7,38	8,78
2,5	12,79	17,52	14,0	7,27	8,63
2,6	12,65	17,09	14,5	7,16	8,62
2,7	12,50	16,67	15,0	7,06	8,59
2,8	12,34	16,65	15,5	6,99	8,54
2,9	12,18	16,59	16,0	6,91	8,48
3,0	12,01	16,50	16,5	6,83	8,42
3,2	12,31	16,26	17,0	6,78	8,35
3,4	12,46	15,96	17,5	6,72	8,27
3,5	12,49	15,80	18,0	6,67	8,19
3,6	12,50	15,63	18,5	6,64	8,12
3,8	12,47	15,27	19,0	6,60	8,06
4,0	12,38	14,91	19,5	6,55	7,99
4,2	12,05	14,80	20,0	6,51	7,95
4,4	12,09	14,72	21,0	6,45	7,84
4,5	12,00	14,67	22,0	6,42	7,76
4,6	11,91	14,60	23,0	6,44	7,67
4,8	11,72	14,45	24,0	6,43	7,56
5,0	11,52	14,28	25,0	6,40	7,48
5,5	11,44	13,79	26,0	6,36	7,40
6,0	11,25	13,25	27,0	6,31	7,33

(Seguito della tabella XIX)

Luce o lunghezza di binario da so- vraccaricare per avere il massimo effetto	Sovraccarico in t. al m. corr. di binario		Luce o lunghezza di binario da sovraccaricare per avere il massimo effetto	Sovraccarico in t. al m. corr. di binario	
	per il massimo momento flettente	per il massimo sforzo di taglio		per il massimo momento flettente	per il massimo sforzo di taglio
<i>l</i>	<i>q</i> ₁	<i>q</i> ₂	<i>l</i>	<i>q</i> ₁	<i>q</i> ₂
<i>m.</i>	<i>t.</i>	<i>t.</i>	<i>m.</i>	<i>t.</i>	<i>t.</i>
28,0	6,25	7,27	40,0	6,08	6,84
29,0	6,19	7,21	45,0	6,02	6,66
30,0	6,18	7,17	50,0	5,96	6,48
31,0	6,17	7,15	60,0	5,75	6,20
32,0	6,14	7,12	70,0	5,50	5,91
33,0	6,12	7,08	80,0	5,25	5,71
34,0	6,10	7,04	90,0	5,03	5,52
35,0	6,09	7,00	100,0	4,85	5,35
36,0	6,10	6,97	120,0	4,54	5,08
37,0	6,09	6,94	140,0	4,30	4,86
38,0	6,09	6,91	160,0	4,10	4,70
39,0	6,08	6,88			

TABELLA XX.

Cat. A. — Numero massimo delle locomotive = 4 (Tipo fig. 84 e 85).

Luce o lunghezza di binario da sovraccaricare per avere il massimo effetto	Sovraccarico in t. al m. corr. di binario per il massimo	
	momento flettente	sforzo di taglio
<i>l</i>	<i>q</i> ₁	<i>q</i> ₂
<i>m.</i>	<i>t.</i>	<i>t.</i>
40,0	6,08	6,84
45,0	6,02	6,70
50,0	5,97	6,63
60,0	5,92	6,45
70,0	5,84	6,24
80,0	5,70	6,06
90,0	5,52	5,88
100,0	5,34	5,72
120,0	5,03	5,44
140,0	4,75	5,21
160,0	4,53	5,02

TABELLA XXI.

Cat. B. Una locomotiva seguita da carri (merci) (Tipi fig. 84 e 85).

Luce o lunghezza di binario da so- vraccaricare per avere il massimo effetto	Sovraccarico in t. per m. corr. di binario per il massimo		Luce o lunghezza di binario da sovraccaricare per avere il massimo effetto	Sovraccarico in t. per m. corr. di binario per il massimo	
	momento flettente	sforzo di taglio		momento flettente	sforzo di taglio
	q_1	q_2		q_1	q_2
l	l	l	l	l	l
m.	t.	t.	m.	t.	t.
1,0	30,00	30,00	12,5	7,71	9,10
1,1	27,27	27,27	13,0	7,54	8,95
1,2	25,00	25,00	13,5	7,33	8,78
1,3	23,08	23,08	14,0	7,27	8,63
1,4	21,43	22,19	14,5	7,15	8,50
1,5	20,00	22,00	15,0	7,04	8,39
1,6	18,75	21,68	15,5	6,95	8,27
1,7	17,65	21,28	16,0	6,88	8,15
1,8	16,67	20,83	16,5	6,80	8,03
1,9	15,79	20,36	17,0	6,75	7,91
2,0	15,00	19,88	17,5	6,69	7,81
2,1	14,29	19,39	18,0	6,65	7,72
2,2	13,64	18,91	18,5	6,59	7,63
2,3	13,04	18,43	19,0	6,53	7,54
2,4	12,91	17,97	19,5	6,46	7,45
2,5	12,79	17,52	20,0	6,39	7,36
2,6	12,65	17,09	21,0	6,25	7,20
2,7	12,50	16,67	22,0	6,16	7,06
2,8	12,34	16,65	23,0	6,05	6,91
2,9	12,18	16,59	24,0	5,94	6,79
3,0	12,01	16,50	25,0	5,83	6,68
3,2	12,31	16,26	26,0	5,72	6,56
3,4	12,46	15,96	27,0	5,64	6,46
3,5	12,49	15,80	28,0	5,55	6,36
3,6	12,50	15,63	29,0	5,46	6,26
3,8	12,47	15,27	30,0	5,37	6,18
4,0	12,38	14,91	31,0	5,30	6,10
4,2	12,25	14,80	32,0	5,23	6,02
4,4	12,09	14,72	33,0	5,16	5,95
4,5	12,00	14,67	34,0	5,08	5,88
4,6	11,91	14,60	35,0	5,02	5,81
4,8	11,72	14,45	36,0	4,96	5,75
5,0	11,52	14,28	37,0	4,90	5,69
5,5	11,44	13,79	38,0	4,84	5,63
6,0	11,25	13,25	39,0	4,78	5,58
6,5	10,99	12,71	40,0	4,73	5,53
7,0	10,69	12,18	45,0	4,48	5,33
7,5	10,37	11,68	50,0	4,29	5,12
8,0	10,04	11,20	60,0	3,98	4,84
8,5	9,72	10,82	70,0	3,79	4,63
9,0	9,41	10,52	80,0	3,68	4,48
9,5	9,11	10,22	90,0	3,61	4,35
10,0	8,82	9,97	100,0	3,55	4,25
10,5	8,54	9,77	120,0	3,48	4,10
11,0	8,27	9,56	140,0	3,45	4,00
11,5	8,05	9,39	160,0	3,42	3,92
12,0	7,88	9,25			

TABELLA XXII.

Cat. C. — Una locomotiva sciolta (Tipo fig. 84^a).

Luce o lunghezza di binario da so- vraccaricare per avere il massimo effetto			Sovraccarico in t. per m. corr. di binario per il massimo			Luce o lunghezza di binario da sovraccaricare per avere il massimo effetto			Sovraccarico in t. per m. corr. di binaio per il massimo		
momento flettente			sforzo di taglio			momento flettente			sforzo di taglio		
<i>l</i>	<i>q₁</i>	<i>q₂</i>	<i>l</i>	<i>q₁</i>	<i>q₂</i>	<i>l</i>	<i>q₁</i>	<i>q₂</i>	<i>l</i>	<i>q₁</i>	<i>q₂</i>
<i>m.</i>	<i>t.</i>	<i>t.</i>	<i>m.</i>	<i>t.</i>	<i>t.</i>	<i>m.</i>	<i>t.</i>	<i>t.</i>	<i>m.</i>	<i>t.</i>	<i>t.</i>
1,0	30,00	30,00	11,0	8,27	9,56						
1,1	27,27	27,27	11,5	8,05	9,39						
1,2	25,00	25,00	12,0	7,88	9,25						
1,3	23,08	23,08	12,5	7,71	9,10						
1,4	21,43	22,19	13,0	7,54	8,95						
1,5	20,00	22,00	13,5	7,38	8,78						
1,6	18,75	21,68	14,0	7,27	8,63						
1,7	17,65	21,28	14,5	7,15	8,62						
1,8	16,67	20,83	15,0	7,04	8,59						
1,9	15,79	20,36	15,5	6,93	8,17						
2,0	15,00	19,88	16,0	6,84	8,02						
2,1	14,29	19,39	16,5	6,76	7,87						
2,2	13,64	18,91	17,0	6,67	7,72						
2,3	13,04	18,43	17,5	6,59	7,58						
2,4	12,91	17,97	18,0	6,50	7,44						
2,5	12,79	17,52	18,5	6,41	7,31						
2,6	12,65	17,09	19,0	6,33	7,18						
2,7	12,50	16,67	19,5	6,24	7,05						
2,8	12,34	16,65	20,0	6,16	6,93						
2,9	12,18	16,59	21,0	5,99	6,69						
3,0	12,01	16,50	22,0	5,83	6,47						
3,2	12,31	16,26	23,0	5,67	6,26						
3,4	12,46	15,96	24,0	5,52	6,06						
3,5	12,49	15,80	25,0	5,37	5,88						
3,6	12,50	15,63	26,0	5,23	5,70						
3,8	12,47	15,27	27,0	5,09	5,53						
4,0	12,38	14,91	28,0	4,97	5,37						
4,2	12,25	14,80	29,0	4,84	5,22						
4,4	12,09	14,72	30,0	4,72	5,08						
4,5	12,00	14,67	31,0	4,61	4,94						
4,6	11,91	14,60	32,0	4,50	4,82						
4,8	11,72	14,45	33,0	4,40	4,69						
5,0	11,52	14,28	34,0	4,30	4,58						
5,5	11,44	13,79	35,0	4,20	4,47						
6,0	11,25	13,25	36,0	4,11	4,36						
6,5	10,99	12,71	37,0	4,03	4,26						
7,0	10,69	12,18	38,0	3,94	4,16						
7,5	10,37	11,68	39,0	3,86	4,07						
8,0	10,04	11,20	40,0	3,78	3,98						
8,5	9,72	10,82	45,0	3,43	3,59						
9,0	9,41	10,52	50,0	3,14	3,27						
9,5	9,11	10,22	60,0	2,68	2,77						
10,0	8,82	9,97	70,0	2,33	2,40						
10,5	8,54	9,77	80,0	2,07	2,12						

Per le *opere sovrastanti alle Strade ferrate* si adottano i carichi accidentali che abbiamo indicato per le strade carreggiabili.

Le altre forze esterne di cui si terrà conto sono le seguenti:

1°) con prudente larghezza di quelle prodotte dalle *variazioni di temperatura*.

2°) di quelle prodotte dal *frenamento dei convogli*, che sono orizzontali e si computano assumendo il coefficiente d'attrito uguale a $\frac{1}{10}$, e supponendo frenate tutte le ruote insistenti sull'opera.

3°) di quelle dovute ai *serpeggiamenti o movimenti laterali* dei convogli; per le quali si adotterà un sistema di forze orizzontali, normali al binario e nel piano medesimo, e

per la *Cat. A.*: in numero di 4 di *t.* 1.5 cadauna e distanti fra loro m. 1,35:

e per le *Cat. B. e C.*: in numero uguale a quello degli assi della locomotiva del rispettivo treno-tipo è d'intensità ciascuna uguale a $\frac{1}{240}$ del prodotto della velocità (in km. ora) massima ammissibile nell'esercizio per la radice quadrata del massimo carico (in *t.*) sull'asse della locomotiva stessa.

Se è stabilito che nell'esercizio la velocità massima ammissibile dei treni sia minore di 40 km.-ora, si può omettere di considerare le forze laterali; e ciò anche se si tratta di ponti in curva, pei quali basta tenere calcolo della sola forza centrifuga.

4°) della *pressione del vento*, che si riterrà per superficie normalmente colpita:

di kg. 250, se l'opera è scarica;

di kg. 150, se l'opera è sovraccaricata.

nel mentre le opere sovrastanti alle ferrovie si supporranno scariche e perciò per esse si assumerà sempre kg. 250 per m.².

Inoltre, si riterrà che, passando il vento fra le maglie di una trave reticolata, la pressione per m.² da esso esercitata su *qualunque ostacolo* — che si trovi *sottovento* della trave stessa — venga diminuita nel modo seguente (*).

Indichiamo con

p la pressione per m.² sulla trave reticolata suddetta;

p_1 " " " " sull'ostacolo;

a l'area della superficie effettiva della trave reticolata;

a_1 " " " " completa (pieni e vuoti) limitata dal

contorno della trave stessa:
$$\rho = \frac{a}{a_1} .$$

(*) Però per le *pile metalliche* si suppone che la pressione del vento si eserciti senza alcuna riduzione su tutte le sue parti esposte al vento.

Se	$\rho > \frac{1}{3}$	si adotterà	$p_\rho = p(1 - \rho)$
"	$\rho = \frac{1}{3}$	" "	$p_\rho = \frac{2}{3} p$
"	$\frac{1}{5} < \rho < \frac{1}{3}$	" "	$p_\rho = \frac{1}{2} p(3 - 5\rho)$ (*)
"	$\rho < \frac{1}{5}$	" "	$p_\rho = p$

La *pressione del vento sul treno* verrà computata immaginandolo sostituito dalla superficie d'un rettangolo pieno delle seguenti dimensioni e posizione;

per le opere ferroviarie su linee a *scartamento normale*:

base inferiore elevata di m. 0,50 sul piano del ferro,

altezza del rettangolo m. 2,50;

per le opere ferroviarie su linee a *scartamento ridotto*:

base inferiore elevata di m. 0,30 sul piano del ferro;

altezza del rettangolo m. 2,20.

Gli ostacoli sottovento di tale rettangolo non sopporteranno alcuna pressione del vento.

Nei ponti in curva si terrà conto eziandio della forza centrifuga orizzontale che si svilupperà, normale all'asse del binario la cui intensità, come si sa, è data da $\frac{Mv^2}{r}$ distribuita uniformemente su tutto il tratto occupato dal convoglio di massa M avente una velocità v , ed essendo r il raggio della curva.

Se chiamiamo con

q il peso del treno in t . per m. corr. in media ($q = 2$),

v la sua velocità massima al minuto secondo, l'intensità della forza centrifuga risultante sarà data da

$$\frac{q v^2}{g r} \text{ in } t. \text{ per m. corr. , } (g = \text{acceleraz. della gravità} = 9,81 \text{ circa}).$$

che se invece si vorrà considerare un peso concentrato P (in t . per es. quello della locomotiva) essa sarà data da:

$$\frac{P v^2}{g r} \text{ in } t. .$$

Se vi è *sopraelevazione* della rotaia esterna sarà da tenere pure presente l'azione che ne risulta quando il treno vi passa sopra.

(*) Questa formola è dedotta supponendo che p_ρ vari linearmente fra $\frac{2}{3} p$ e p .

Infine si dovranno considerare ancora tutte quelle altre cause addizionali provenienti da una speciale ubicazione, conformazione, ecc. dell'opera, come quelle dovute per es. a cedimenti degli appoggi, all'attrito sugli appoggi, alle sollecitazioni eccezionali nelle membrature dovute a speciali procedimenti di collocamento in opera della costruzione.

Peso proprio.

A) **Pei ponti per strade ordinarie**, si ha;

a) *Orditura del piano stradale* per ponti di m. 5 di carreggiata, con marciapiedi di m. 1:

Ponti in pietra: approssimativamente . . . kg. 7000 p. m. corr.
 Ponti in ferro o legno, carreggiata in ghiaia . . . 3500 " "
 Ponti in ferro o legno, carreggiata in legno . . . 1600 " "

La sola carreggiata in ghiaia di m. 0,20 di spessore pesa circa kg. 2200 per m. corr. La carreggiata in tavole da kg. 250 ÷ 350 per m. corr.

b) *Peso approssimato P per m. corr. delle travature maestre longitudinali*:

$$P = \alpha l$$

essendo l la luce del ponte ed

$\alpha = 35 \div 40$ per ponti in ferro con carreggiata in ghiaia,
 $\alpha = 24 \div 30$ " " " " " in legname,
 $\alpha = 60 \div 80$ " " " " " legno.

c) *Peso complessivo* per m. corr. = somma dei pesi in a) e b).

d) Il *peso del ferro*, nei ponti metallici, si ottiene deducendo dal peso complessivo il peso della carreggiata.

B) Per i **ponti per strade ferrate** si ha:

a) *Peso dell'orditura del piano stradale* (armamento, correnti e travature trasversali, parapetti, ecc.), escluse le travi maestre longitudinali nei ponti a travate, e gli archi nei ponti in muro e pietra:

Ponti in ferro leggeri 350 ÷ 600 kg. per m. corr. e per binario.

Ponti in ferro pesanti 700 ÷ 800 kg. per m. corr. e per binario.

Ponti in legno 500 : 700 kg. per m. corr. e per binario.

Ponti in muratura e in pietra 5000 ÷ 5500 kg. per m. corr. e per binario.

b) *Peso approssimativo P per m. corr. e per binario delle travature maestre longitudinali*:

$$P = \alpha l$$

essendo l la portata della trave maestra, ed

$\alpha = 25 \div 35$ per ponti in ferro secondo il genere di costruz.,
 $\alpha = 50 \div 60$ " " provvisorii in legno,
 $\alpha = 70 \div 80$ " " definitivi.

c) *Peso complessivo* permanente per m. corr. e per binario = somma dei pesi in a) e b).

La Tabella XXIII seguente dà i valori minimi e massimi fra i quali devono essere compresi i pesi complessivi dei ponti ferroviari affinché — secondo le decisioni del Congresso internazionale delle Strade Ferrate del 1896 (Londra) — si possano ritenere accettabili.

TABELLA XXIII.

Portate (in m.) $l =$	0	10	50	100	200	300	400	500
peso minimo in t. . .	0,20	0,6	1,7	3,0	5,6	8,2	10,8	13,5
„ medio „ „ . . .	0,35	1,0	2,6	4,3	7,3	10,1	12,8	15,5
„ massimo „ „ . . .	0,50	1,4	3,5	5,6	9,0	12,0	14,8	17,5

d) Il *peso del ferro*, nei ponti metallici, si ottiene approssimativamente deducendo $120 \div 150$ kg. di legname per m. corr. e per binario.

Peso delle travi a traliccio. Essendo data la portata l di un ponte metallico a traliccio, si determina arbitrariamente o in base alle condizioni particolari a cui la costruzione dev'essere sottoposta, l'altezza H che conviene attribuire alla trave formata dai due lungoni e dal traliccio.

Per calcolare le dimensioni della trave, bisogna conoscere il peso q per m. corr. che il ponte deve sopportare, e questo peso si compone di due parti: l'una q' è il peso proprio della trave, l'altra q'' è il sopraccarico, il quale è noto, o lo si suppone noto, in dipendenza della destinazione del ponte.

Il peso adunque che importa di conoscere a priori per calcolare le dimensioni delle travi maestre è il peso proprio q' per m. corr. della trave maestra stessa.

Per conoscere questo peso si rappresentino, esprimendo le lunghezze in m. e le forze in kg., con

Π il peso di un m.³ del metallo di cui si compone la trave,

R il carico di sicurezza pei lungoni, riferito al m.²,

R' il carico di sicurezza per il traliccio, riferito al m.²;

si avrà la formola data dal Bresse:

$$q' = \frac{q'' \left(\frac{3}{16} \frac{l^2}{HR} + \frac{5}{8} \frac{l}{R'} \right) (1 + \lambda)}{\Pi - \left(\frac{3}{16} \frac{l^2}{HR} + \frac{5}{8} \frac{l}{R'} \right) (1 + \lambda)},$$

nella quale λ è una quantità che può variare da 0,30 a 0,40.

Carico di sicurezza per ferri ed acciai.

Determinati gli sforzi interni a cui potrà essere assoggettato una membratura metallica, si calcoleranno le sue dimensioni necessarie per resistere agli stessi, prendendo per base la *massima sollecitazione specifica R* (detta anche *carico di sicurezza*, o *coefficiente di resistenza*, o *limite di lavoro*) compatibile con la sicurezza della costruzione. Questa massima sollecitazione é dipendente:

1°) dalle qualità resistenti del metallo (carico di rottura e limite di elasticità);

2°) dalle variazioni, in intensità e verso, degli sforzi indotti nella membratura;

3°) dal modo particolare con cui le forze esterne vengono applicate alla costruzione (bruscamente = urti, scosse, vibrazioni; gradatamente, in guisa da indurre una sollecitazione semplicemente statica) e cioè dalle *sollecitazioni statiche* e da quelle *dinamiche* (*);

4°) dal grado di stabilità cui si deve conferire alla costruzione, tenendo presente i possibili difetti dei materiali, il loro deterioramento, e le approssimazioni, incertezze ed ipotesi dei dati sperimentali adottati e delle teorie seguite.

Il Launhardt, il Weyrauch, il Winkler e molti altri (**), dai risultati sperimentali del Wöhler sull'influenza degli sforzi ripetuti stabilirono formole empiriche con le quali si deduce il carico di sicurezza *R* dal *carico di rottura dinamico*. Chiamando con

N_1 lo sforzo minimo (unitario o relativo) } che la membratura
 N_2 " " massimo " " } dovrà sopportare,
 c' , c'' due costanti, dipendenti dalla qualità del materiale, si avrà:

$$R = c' + c'' \frac{N_1}{N_2}$$

notando che il rapporto $\frac{N_1}{N_2}$ dovrà considerarsi positivo o negativo a seconda che N_1 e N_2 saranno dello stesso genere (ambidue tensione, o ambidue pressione) o di genere opposto.

Nel *Regolamento Svizzero 1892*, per il calcolo di *R* per barre sem-

(*) Notiamo che fra le sollecitazioni dinamiche, quelle *ritmiche* — se il loro *periodo* concorda con quello delle vibrazioni del sistema (ciò che poteva avvenire per gli antichi ponti sospesi) — sono pericolosissime.

(**) C. f. r.: Weyrauch I. I. Di *Festigkeitseigenschaften und Methoden der Dimensionenberechnung von Eisen, und Stahlconstructions* — Zweite Auflage (1888); Jorini *Ponti e Guidi* II.

2°) Calvalcavia per strade ferrate ordinarie :

TABELLA XXV.

portate l (in m.)	$\leq 5 = 10$		$= 20 = 40$		≥ 80
a) Travi di ferro agglomerato.					
a parete piena: R (in kg. mm. ²) = . . .	6,0	7,2	7,7	8,2	8,2
" " reticolata: R (" " ") = . . .	6,0	6,7	7,2	7,7	
b) Travi di ferro colato (omogeneo).					
a parete piena: R (in kg. mm. ²) = . . .	7,0	8,5	9,5	10,2	10,2
" " reticolata: R (" " ") = . . .	7,0	8,0	9,0	9,7	

3°) Ponti-canali (esclusa l'azione del vento); tettoie, coperture in genere (tenendo conto dell'azione del vento); qualunque sia l :

a) opere in ferro agglomerato: R (in kg. mm.²) = 8,5

b) " " " colato (omogeneo) R (" " ") = 10,5 .

4°) Membrature di contravvento trasversale :

a) se di ferro agglomerato: R (in kg. mm.²) = 7

b) " " " colato (omogeneo) R (" " ") = 8 .

5°) Membrature in acciaio fuso o pudellato :

per la compressione diretta: R (in kg. mm.²) = 10,0

" " flessione: R_f (" " ") = 10,0

" " il taglio: R_t (" " ") = 7,0 .

Quando si tiene conto dell'azione del vento si ammette che per R si possa assumere valori superiori agli esposti nelle precedenti scale, fino a raggiungere un aumento di $\frac{1}{8}$.

CAPITOLO VI.

Sovrapposizione degli effetti. Variazione di temperatura. Sezione pericolosa per un sistema di carichi concentrati, e posizione più sfavorevole, sopra una trave, di un sistema mobile di carichi concentrati.

1. — Sovrapposizione degli effetti.

Una verga stirata da una forza F subisce un allungamento

$$\Delta = \varphi (F) .$$

Se più forze F_1, F_2, \dots agissero *contemporaneamente* a stirare la verga, produrrebbero l'allungamento

$$\varphi (F_1 + F_2 + \dots)$$

il quale è ben diverso dalla *somma degli allungamenti* prodotti nella verga *separatamente* dalle forze F_1, F_2, \dots : cioè

$$\varphi (F_1 + F_2 + \dots) \neq \varphi (F_1) + \varphi (F_2) + \dots .$$

Affinchè abbia luogo il **principio della sovrapposizione degli effetti**, cioè affinchè sia

$$\varphi (F_1 + F_2 + \dots) = \varphi (F_1) + \varphi (F_2) + \dots$$

la φ dev'essere una funzione **lineare** della forza F : ossia essendo c una *costante*, dev'essere

$$\varphi (F) = c F .$$

In tutti i sistemi elastici, articolati, gli spostamenti dei differenti punti e le rotazioni delle sezioni, nonchè le forze interne od elastiche, sono funzioni lineari delle forze esterne (*): dunque il principio della sovrapposizione degli effetti ha sempre luogo finchè

(*) CASTIGLIANO, *Théorie* pag. 40, 47. 294.
CROTTI, pag. 73 e seguenti.

trattisi di deformazioni elastiche e cioè di quelle piccole deformazioni che sole si considerano nella resistenza dei materiali.

Tale principio si può enunciare nel seguente modo :

più forze esterne producono sopra un corpo o sistema un effetto, quando sono applicate simultaneamente, esattamente eguale alla somma degli effetti che le medesime forze produrrebbero nel corpo o sistema medesimo, se fossero applicate isolatamente.

Ciò si può anche esprimere in altri termini dicendo che :
gli spostamenti dei differenti punti di un corpo o sistema elastico, come pure le forze interne od elastiche, sono funzioni lineari delle forze esterne.

Se adunque ad un solido o sistema qualunque siano applicate simultaneamente delle forze esterne $F, \Phi, \mathfrak{F}, \dots$ e si voglia trovare la pressione o tensione normale N in una sezione di una parte qualunque del sistema, il momento di flessione M o lo sforzo di taglio T in questa sezione qualunque, oppure si voglia trovare la rotazione Θ della sezione stessa o lo spostamento ϖ di un punto del sistema, prodotti dall'azione simultanea delle forze $F, \Phi, \mathfrak{F}, \dots$ si potrà semplificare la soluzione del problema, trovando ad una ad una le tensioni $n_f, n_\varphi, n_{\mathfrak{f}}, \dots$, ad uno ad uno i momenti di flessione $m_f, m_\varphi, m_{\mathfrak{f}}, \dots$ e gli sforzi di taglio $t_f, t_\varphi, t_{\mathfrak{f}}, \dots$, e ad una ad una le rotazioni $\theta_f, \theta_\varphi, \theta_{\mathfrak{f}}, \dots$, e gli spostamenti $\varpi_f, \varpi_\varphi, \varpi_{\mathfrak{f}}, \dots$ che nella sezione o nel punto considerato produrrebbero rispettivamente le forze $F, \Phi, \mathfrak{F}, \dots$ applicate al sistema ciascuna da sé sola, ben inteso essendo da sole le forze applicate nel modo stesso con cui erano applicate simultaneamente.

Trovati i valori delle tensioni, dei momenti di flessione, degli sforzi di taglio, delle rotazioni, e degli spostamenti, dovuti a ciascuna delle forze applicate da sole, si avranno subito i valori delle stesse cose, per le forze tutte applicate simultaneamente, a mezzo di semplici addizioni algebriche, cioè si avrà :

$$N = n_f + n_\varphi + n_{\mathfrak{f}} + \dots,$$

$$M = m_f + m_\varphi + m_{\mathfrak{f}} + \dots,$$

$$T = t_f + t_\varphi + t_{\mathfrak{f}} + \dots,$$

$$\Theta = \theta_f + \theta_\varphi + \theta_{\mathfrak{f}} + \dots,$$

$$\varpi = \varpi_f + \varpi_\varphi + \varpi_{\mathfrak{f}} + \dots.$$

Da ciò si vede come il principio della sovrapposizione degli effetti sia importante e quanto comoda possa nella pratica riescire la sua applicazione.

Supponiamo, per es. che nello studiare le condizioni di equilibrio di un sistema simmetrico rispetto alla sua mezzaria, quale sa-

rebbe una centina di tettoia, si fossero determinate le forze elastiche incognite per i due casi seguenti:

1.° Considerando solamente il peso permanente distribuito simmetricamente rispetto alla mezzaria;

2.° Facendo astrazione dal peso permanente, e considerando solamente un sopraccarico di q kg. per m.² soprastante al sistema (copertura della centina) sulla sua metà di sinistra.

Si comprende subito che si potrà a mezzo di questi risultati determinare le forze elastiche incognite nei diversi casi che importa di esaminare in pratica, e che noi considereremo qui.

Per maggior chiarezza applichiamo i nostri ragionamenti a *due tiranti simmetrici*, che supponiamo esistere nel sistema. Chiamiamo:

N' la tensione dell'uno o dell'altro tirante nel primo caso, quando si consideri la sola azione del peso permanente, e

n e n le tensioni ottenute rispettivamente per il tirante di sinistra e per quello di destra nel secondo caso, cioè per il solo sopraccarico di q kg. per m.² sulla metà di sinistra del sistema, facendo astrazione del peso permanente.

Risulta dalla simmetria del sistema, che se il sopraccarico di q kg. per m.² fosse supposto sulla metà di destra del sistema, sempre facendo astrazione del peso permanente, il tirante di sinistra avrebbe la tensione n e quello di destra la tensione n . Dunque pel principio della sovrapposizione degli effetti, se il sopraccarico di q kg. per m.² è distribuito tanto sulla metà di destra, quanto sulla metà di sinistra del sistema, ciascuno dei due tiranti avrebbe la tensione:

$$n + n .$$

Se si considera simultaneamente il sopraccarico completo, ed il peso permanente, la tensione N in ciascun tirante sarà:

$$N = N' + n + n .$$

Se si considera simultaneamente il peso permanente ed il sopraccarico sulla metà di sinistra, la tensione del tirante di sinistra sarà:

$$N' + n$$

e quella del tirante di destra sarà:

$$N' + n .$$

Se si fosse prima fatto il calcolo per il carico totale, cioè pel sopraccarico completo su tutto il sistema e pel peso permanente, ed in seguito si fosse fatto il calcolo pel sopraccarico sulla sola metà di sinistra, astrazione fatta dal peso permanente, si potrebbe dedurre da questi due casi il terzo, cioè quello in cui si tien conto solamente del sopraccarico sulla metà di sinistra e del peso per-

manente e si avrebbe:

$$N' + \mathfrak{n} = N - \mathfrak{R}$$

$$N' + \mathfrak{R} = N - \mathfrak{n}$$

Se il sopraccarico fosse di q_1 kg. per m.² sulla metà di sinistra, e di q_2 kg. per m.² sulla metà di destra, allora il solo peso permanente dà ai due tiranti la tensione N' , il sopraccarico q_1 dà per il tirante di sinistra e per quello di destra rispettivamente le tensioni

$$\frac{q_1}{q} \mathfrak{n}, \quad \frac{q_1}{q} \mathfrak{R},$$

ed il sopraccarico q_2 dà per gli stessi tiranti rispettivamente le tensioni

$$\frac{q_2}{q} \mathfrak{R}, \quad \frac{q_2}{q} \mathfrak{n};$$

per conseguenza, la tensione finale del tirante di sinistra sarà:

$$N' + \frac{q_1}{q} \mathfrak{n} + \frac{q_2}{q} \mathfrak{R},$$

e quella del tirante di destra

$$N' + \frac{q_1}{q} \mathfrak{R} + \frac{q_2}{q} \mathfrak{n}.$$

2. - Variazioni di temperatura.

Abbiasi un sistema qualunque, per es. $A B C D$ composto dei solidi $A B$, $B C$, $D H$ incastrati l'uno nell'altro, e d'un tirante $A C$ articolato nelle sue estremità. Quando la temperatura varia, questi solidi non possono deformarsi liberamente, perchè ciascuno d'essi è legato colle sue due estremità ad altri solidi. Ma se si suppone tagliato il solido $B C$ secondo la sezione trasversale $E F$, e libera l'estremità C del tirante $A C$, allora si vede che ciascuno dei solidi del sistema non sarà più attaccato agli altri che con una delle sue

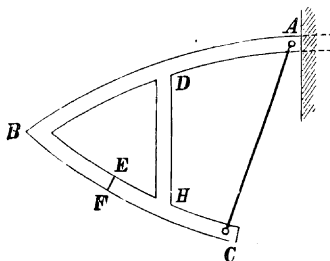


Fig. 87.

estremità, e che perciò il sistema potrà liberamente deformarsi in forza delle variazioni di temperatura.

Ora, alla temperatura iniziale t (cioè alla temperatura cui fu composto il sistema) i due solidi $DBFE$, CFE si riuniscono esattamente da se stessi secondo la sezione EF ed il tirante ha una lunghezza esattamente eguale alla distanza dei due punti A, C , che egli deve collegare. Ma ad un'altra temperatura t' le sezioni EF dei solidi $DBFE$, CFE andranno rispettivamente in $E'F'$, $E''F''$; di più la distanza dei punti A, C diverrà $A'C'$, mentre la lunghezza del tirante diverrà AC'' .

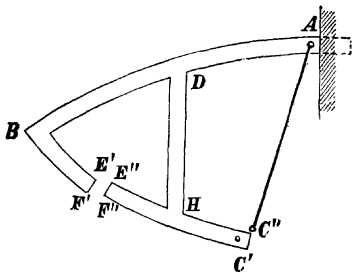


Fig. 88.

Chiamiamo:

λ la differenza fra la distanza $A'C'$ e la lunghezza AC'' ,

θ l'angolo piccolissimo delle due sezioni $E'F'$, $E''F''$,

ξ , η le proiezioni, sulla normale alla posizione iniziale della sezione EF e sulla sezione medesima, della retta di giunzione dei centri delle sezioni $E'F'$, $E''F''$.

Se noi supponiamo che si applichino al sistema primitivo, in cui tutti i legami sono, per dato, ristabiliti, delle forze esterne qualunque, il sistema si deformerà, e le deformazioni, come pure le forze interne, saranno variabili in funzione della temperatura; ma egli è evidente che, per una temperatura qualunque, si potranno esprimere le forze elastiche in ogni punto del sistema, quando si conosca la tensione \mathfrak{R} del tirante AC , e di più il momento di flessione M , la pressione normale N e lo sforzo di taglio T sulla sezione EF .

Per determinare il valore che avranno queste quattro incognite alla temperatura t' supponiamo che il sistema sia dapprima nella condizione rappresentata dalla fig. 88, e che vi si applichino le forze esterne date, ed inoltre le forze seguenti:

al punto C' una forza \mathfrak{R} diretta da C' verso A ,

all'estremità C'' del tirante un'altra forza \mathfrak{R} diretta da C'' verso C' ,

alla sezione $E'F'$ delle forze normali e delle forze tangenziali che diano un momento di flessione M , una pressione normale N , ed uno sforzo di taglio T ,

infine alla sezione $E''F''$ delle forze normali e delle forze tangenziali eguali e contrarie a quelle che agiscono sulla sezione $E'F'$, e che diano quindi ancora un momento di flessione M , una pressione normale N , ed uno sforzo di taglio T .

Quanto alla direzione delle forze applicate sulle sezioni $E'F'$, $E''F''$, noi ammettiamo:

1.° Che i momenti M tendono a far rotare queste sezioni in modo di far *diminuire* il loro angolo;

2.° Che le risultanti T siano delle vere pressioni normali, cioè che secondo la disposizione indicata nella fig. 88, esse tendano ad *aumentare* la proiezione sulla normale alla sezione $\overline{E\overline{F}}$ (fig. 87) della distanza dei centri delle due sezioni $\overline{E'F'}$, $\overline{E''F''}$;

3.° Infine che gli sforzi di taglio T siano diretti in modo che essi tendano a far *diminuire* la proiezione sulla sezione $\overline{E\overline{F}}$ della distanza dei detti centri.

Le quattro quantità \mathfrak{R} , M , N , T devono essere tali che, sotto la loro azione e sotto l'azione delle forze esterne date, i punti C' , C'' vengano a coincidere dopo la deformazione, come pure le sezioni $\overline{E'F'}$, $\overline{E''F''}$.

Per maggior chiarezza dinoteremo con \mathfrak{R}' , \mathfrak{R}'' le due forze \mathfrak{R} applicate ai punti C' , C'' ; con M' , N' , T' il momento M e le forze N , T sulla sezione $\overline{E'F'}$; in fine con M'' , N'' , T'' , il momento M e le forze N , T sulla sezione $\overline{E''F''}$.

Noi possiamo esprimere il momento di flessione, la pressione normale, e lo sforzo di taglio di una sezione qualunque dei pezzi componenti il sistema, per conseguenza anche il suo lavoro di deformazione, in funzione delle forze esterne date e delle quantità \mathfrak{R}' , \mathfrak{R}'' ; M' , N' , T' ; M'' , N'' , T'' .

Sia L questa espressione del lavoro di deformazione.

Si osservi subito che le somme

$$\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{R}'} + \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{R}''}, \quad \frac{\partial L}{\partial M'} + \frac{\partial L}{\partial M''}, \quad \frac{\partial L}{\partial N'} + \frac{\partial L}{\partial N''}, \quad \frac{\partial L}{\partial T'} + \frac{\partial L}{\partial T''} \quad (*)$$

non sono altro che le derivate della funzione L rispetto alle quantità \mathfrak{R} , M , N , T ; infatti, se si considerano, per esempio \mathfrak{R}' , \mathfrak{R}'' come funzioni di \mathfrak{R} date dalle equazioni

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}', \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}'',$$

si ottiene:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{R}} = \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{R}'} \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}'}{\partial \mathfrak{R}} + \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{R}''} \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}''}{\partial \mathfrak{R}},$$

e poichè

$$\frac{\partial \mathfrak{R}'}{\partial \mathfrak{R}} = 1, \quad \frac{\partial \mathfrak{R}''}{\partial \mathfrak{R}} = 1,$$

risulta

$$\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{R}} = \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{R}'} + \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{R}''}.$$

La formola

$$\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{R}'} + \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{R}''}$$

(*) ∂ simbolo relativo a derivata parziale.

esprime la somma degli spostamenti dei punti C' , C'' l'uno verso l'altro, cioè la *diminuzione* della distanza $C' C''$, di modo che, affinché questi punti coincidano dopo la deformazione, si dovrà avere:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{N}'} + \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{N}''} = \lambda, \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{N}} = \lambda. \quad (\text{I})$$

La formola

$$\frac{\partial L}{\partial M'} + \frac{\partial L}{\partial M''}$$

dà la somma delle rotazioni delle due sezioni $\overline{E' F'}$, $E'' F''$, cioè la *diminuzione* dell'angolo che queste sezioni fanno tra di loro; dunque perchè queste sezioni coincidano dopo la deformazione, si deve avere:

$$\frac{\partial L}{\partial M'} + \frac{\partial L}{\partial M''} = \theta, \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial L}{\partial M} = \theta. \quad (\text{II})$$

La formola

$$\frac{\partial L}{\partial N'} + \frac{\partial L}{\partial N''}$$

esprime la quantità di cui *aumenta*, durante la deformazione, la proiezione sulla normale alla sezione $E F$ della retta congiungente i centri delle sezioni $E' F'$, $E'' F''$; dunque perchè queste sezioni siano coincidenti dopo la deformazione, bisognerà che questa proiezione sia negativa ed eguale a $-\xi$, cioè si deve avere:

$$\frac{\partial L}{\partial N'} + \frac{\partial L}{\partial N''} = -\xi, \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial L}{\partial N} = -\xi. \quad (\text{III})$$

Infine la formola

$$\frac{\partial L}{\partial T'} + \frac{\partial L}{\partial T''}$$

dà la quantità di cui *diminuisce*, durante la deformazione, la proiezione, sulla sezione $\overline{E F}$, della retta congiungente i centri delle sezioni $\overline{E' F'}$, $E'' F''$; dunque perchè queste sezioni coincidano dopo la deformazione, si esige:

$$\frac{\partial L}{\partial T'} + \frac{\partial L}{\partial T''} = \gamma, \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial L}{\partial T} = \gamma. \quad (\text{IV})$$

Le quattro equazioni (I), (II), (III), (IV) servono a determinare completamente le quattro incognite \mathfrak{N} , M , N , T . Le quantità λ , θ , ξ , γ si possono, in generale, esprimere colla formola

$$\alpha (t' - t)$$

nella quale α è un coefficiente numerico differente per ciascuna delle quantità λ , θ , ξ , γ ma indipendente dalla variazione $(t' - t)$ di temperatura.

Noi abbiamo fin qui applicato il nostro ragionamento a un sistema elastico di forma particolare, ma è facile riconoscere che esso vale in tutti i casi. Se, per es., un sistema contiene più tiranti che possono essere levati, e più pezzi incastrati che possono essere tagliati, *senza che il sistema cessi d'essere di forma invariabile*, si avrà una tensione incognita \mathfrak{R} per ciascuno di questi tiranti e tre incognite M , N , T per ciascuno di questi pezzi.

Per determinare le incognite si avrà, relativamente a ciascun tirante un'equazione simile alla (I) e relativamente a ciascun pezzo tre equazioni simili alla (II). (III), (IV).

AVVERTENZA IMPORTANTE. — Si osservi che se L_0 è il lavoro di deformazione delle forze esterne alla temperatura iniziale (escluso il lavoro dovuto alle variazioni di temperatura) le quattro incognite \mathfrak{R} , M , N , T , corrispondenti alla temperatura finale (tenuto conto delle variazioni di temperatura) si possono ottenere eguagliando a zero le derivate rispetto a \mathfrak{R} , M , N , T della funzione

$$L_0 \pm \mathfrak{R} \lambda \pm (M \theta - N \xi + T \gamma),$$

nella quale il segno superiore vale per gli innalzamenti di temperatura, l'inferiore per gli abbassamenti.

Nel caso generale, quando si hanno più tiranti e più pezzi incastrati, le incognite si potranno ottenere eguagliando a zero le derivate rispetto a queste incognite della funzione

$$L_0 \pm \sum \mathfrak{R} \lambda \pm \sum (M \theta - N \xi + T \gamma).$$

3. — Sezione pericolosa in una trave su due appoggi, soggetta ad un sistema fisso di carichi isolati, e ad un peso uniformemente ripartito sulla portata.

Siano: l la portata della trave;

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_{m-1}, P_m, P_{m+1}, \dots, P_{n-1}, P_n$$

i carichi isolati su diversi punti

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{m-1}, A_m, A_{m+1}, \dots, A_{n-1}, A_n$$

della trave: R , R_1 , le reazioni degli appoggi; e rappresenti Q il peso totale uniformemente ripartito sulla portata della trave. Le altre lettere hanno il significato indicato nella fig. 89.

Si ha:

$$R = \sum_1^n \left(P \frac{b}{l} \right) + \frac{Q}{2},$$

$$R_1 = \sum_1^n \left(P \frac{a}{l} \right) + \frac{Q}{2} .$$

Se:

$$\sum_1^{m-1} P + \frac{Q}{l} a_{m-1} < R < \sum_1^{m-1} P + \frac{Q}{l} a_m ,$$

la sezione pericolosa cade fra i punti A_{m-1} e A_m ; e la sua posi-

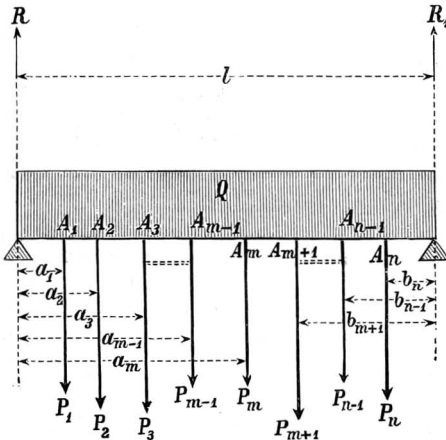


Fig. 89.

zione precisa è data dalla sua ascissa

$$x_m = \left(R - \sum_1^{m-1} P \right) \frac{l}{Q}$$

contata a partire dall'appoggio di sinistra. Il momento inflettente massimo è:

$$M_{x_m}(\text{mass.}) = \sum_1^{m-1} (Pa) + \frac{Q}{2l} x_m^2 .$$

Se:

$$\sum_1^{m-1} P + \frac{Q}{l} a_m < R < \sum_1^m P + \frac{Q}{l} a_m ,$$

la sezione pericolosa cade nel punto A_m , cioè si ha $x_m = a_m$; e qui è:

$$M_{a_m}(\text{mass.}) = \sum_1^{m-1} (Pa) + \left[R - \sum_1^{m-1} P \right] a_m - \frac{Q}{2l} a_m$$

Quando $Q = 0$, la sezione pericolosa cade nel punto A_m tale, per cui sia soddisfatta la condizione

$$\sum_1^{m-1} P < \sum_1^n \left(P \frac{b}{l} \right) < \sum_1^m P;$$

ed in questo caso si ha

$$M_{a_m}(\text{mass.}) = \sum_1^{m-1} (Pa) + \left[\sum_1^n \left(P \frac{b}{l} \right) - \sum_1^{m-1} P \right] a_m.$$

4. — Posizione più sfavorevole di un sistema di carichi mobili su di una travata.

CASO DI UN RUOTABILE AD ASSI ACCOPPIATI — per es. in numero di quattro — NON CONSIDERANDO IL PESO PROPRIO DELLA TRAVE.

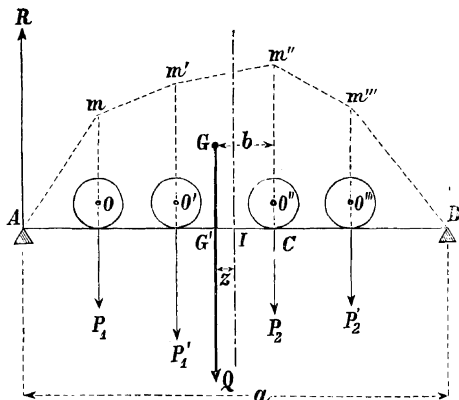


Fig. 90.

Cominciamo a dare la soluzione del problema per il caso particolare del passaggio sulla travata di una locomotiva a quattro accoppiati.

Siano O, O', O'', O''' i quattro assi di una locomotiva posta sopra una travata AB di portata a . Sono noti i pesi P_1, P_1', P_2, P_2' gravitanti su ciascuno dei quattro assi, la distanza degli assi fra di loro, o la posizione del centro G di gravità della locomotiva, a cui è applicato il peso totale della locomotiva

$$Q = P_1 + P_1' + P_2 + P_2' .$$

I momenti inflettenti sono rappresentati, per ciascuna posizione particolare della locomotiva dalle ordinate di un contorno poligonale $A m m' m'' m''' B$ (*poligono dei momenti o poligono funicolare*), i cui vertici sono situati sulle normali passanti per $P_1, P_1', ecc .$

Ne risulta che il momento di flessione massimo, corrispondente ad una data posizione della locomotiva sulla travata, ha luogo in uno dei punti d'applicazione dei pesi, salvo il caso che il poligono dei momenti abbia un lato orizzontale, in cui il momento di flessione massimo si verificherebbe per tutto l'intervallo corrispondente a quel lato, onde non vi sarebbe errore ad ammettere che il momento massimo abbia luogo per uno dei vertici che terminano il lato medesimo. Noi cercheremo quindi il momento inflettente massimo nei punti di contatto delle ruote colla trave.

Sia C uno di questi punti ed I il punto di mezzo della trave, e rappresentiamo con G' la proiezione sulla trave del centro G di gravità della locomotiva. Definiremo la posizione della locomotiva mediante la distanza $IG' = z$ positiva o negativa della proiezione G' del suo centro di gravità dal mezzo I della trave.

La distanza $G'C = b$ è data.

Il peso totale Q della locomotiva, applicato in G' , dà una reazione R , sull'appoggio A , espressa da:

$$R = Q \frac{\left(\frac{a}{2} + z\right)}{a}$$

Il momento inflettente M in C è eguale al momento della reazione R diminuito della somma μ dei momenti delle forze P_1, P_1' comprese fra A e C : sarà adunque

$$M = Q \frac{\left(\frac{a}{2} + z\right)}{a} \left(\frac{a}{2} + b - z\right) - \mu .$$

Si tratta di trovare il valore di z che rende massimo M . Ora μ è indipendente da z poichè lo spostamento della locomotiva lascia costanti le forze P_1, P_1' , nonchè le loro distanze dal punto C .

Questo massimo ha luogo adunque per

$$\frac{a}{2} + z = \frac{a}{2} + b - z ,$$

ossia per

$$z = \frac{b}{2}.$$

Quindi per avere il massimo momento inflettente relativo al punto di contatto C bisogna mettere la locomotiva in tale posizione che il punto I , di mezzo della trave, divida in parti eguali la distanza orizzontale $G' C$ fra il centro di gravità della locomotiva e il punto di contatto C della ruota considerata.

Fatto ciò per una delle ruote, lo si ripeterà per le altre. Si calcoleranno i momenti inflettenti corrispondenti a ciascuna, e si prenderà solo il più grande dei momenti così calcolati.

CASO IN CUI SI TIENE CONTO ANCHE DEL PESO PROPRIO DELLA TRAVE. Sia pa il peso proprio della trave; allora si avrà:

$$R = \frac{Q}{a} \left(\frac{a}{2} + z \right) + \frac{pa}{2}$$

e quindi:

$$M = \frac{Q}{a} \left(\frac{a}{2} + z \right) \left(\frac{a}{2} + b - z \right) + \frac{pa}{2} \left(\frac{a}{2} + b - z \right) - \frac{pa}{2} \left(\frac{a}{2} + b - z \right)^2 - \mu,$$

nella quale μ non varia con z .

Derivando l'espressione di M , rispetto a z , ed eguagliando a zero, si ottiene

$$z = b \frac{Q + pa}{2Q + pa}.$$

Tenendo adunque conto anche del peso proprio della trave la posizione più sfavorevole del sistema di carichi si otterrà ponendo il sistema in tale posizione sulla trave che la risultante di tutti i pesi, che si trovano sulla trave, passi per un punto G' , situato ad una certa distanza z dal mezzo I della trave, determinata per ciascuno dei pesi dalla formola ultima trovata.

Determinata questa posizione per uno qualunque dei carichi, si ripeterà la stessa cosa per ciascuno dei rimanenti. Si calcoleranno i momenti inflettenti massimi relativi a ciascuna di queste posizioni colla penultima formola sopra trovata, e si prenderà il più grande dei momenti relativi così calcolati, il quale sarà il momento inflettente massimo assoluto cercato.

CASO GENERALE. Se invece di quattro soli pesi, si ha un sistema mobile di un numero n qualunque di pesi, il massimo assoluto si ottiene sempre collo stesso metodo e colle stesse formole date pel caso particolare sopra considerato di quattro pesi; avvertendo però, nel caso generale, che $Q = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$, e che μ è la somma dei momenti di tutti i pesi che stanno fra l'appoggio A ed il punto C d'applicazione di ognuno dei pesi rispetto al quale si cerca il momento inflettente massimo relativo.

CAPITOLO VII. (*)

Travi rettilinee e orizzontali.

1. — Trave orizzontale incastrata ad una estremità e libera all'altra.

Sia P un peso concentrato applicato all'estremità libera della trave, q un peso per m. di trave, distribuito uniformemente su tutta la portata della trave, f la freccia d'inflexione alla estremità libera, M_x , T_x il momento inflettente e lo sforzo di taglio in una sezione a distanza x dall'incastro; si avrà:

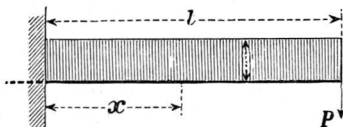


Fig. 91.

$$M_x = P(l - x) + \frac{q}{2}(l - x)^2,$$

$$T_x = -P - q(l - x),$$

$$f = \frac{l^3}{EI} \left(\frac{P}{3} + \frac{ql}{8} \right) + \frac{Al}{Et\Omega} \left(P + \frac{ql}{2} \right).$$

(*) In questo capitolo diamo le espressioni dei momenti inflettenti, degli sforzi di taglio e delle frecce d'inflexione nelle travi disposte orizzontalmente con una o due estremità incastrate od appoggiate, e nelle travi appoggiate in più punti, per i due casi più comuni della pratica, che il carico sia concentrato in un punto della portata o ripartito uniformemente su tutta la portata della trave. Per ambedue questi casi l'espressione della freccia d'inflexione è data completa, cioè tenendo conto anche della deformazione dovuta agli sforzi di taglio. Diamo inoltre le formole per determinare la linea elastica, il momento inflettente, e lo sforzo di taglio per travi, disposte nel modo ora detto, o altrimenti, soggette a carichi concentrati od uniformemente ripartiti e ad altre maniere di carico, e per prismi o travi immersi nella materia o giacenti in contatto sopra di essa, ma queste formole furono trovate trascurando, come si sa che si può fare con sufficiente approssimazione, la parte di deformazione dovuta agli sforzi di taglio. Le lettere E , E_t , R , R_t , I , G , Ω , A , λ , d , ω hanno i significati soliti e definiti ai Cap. II e IV.

I massimi di M_x e di T_x hanno luogo ambedue per $x = 0$ (sezione d'incastro):

$$M_0 \text{ (mass.)} = P l + \frac{q}{2} l^2, \quad T_0 \text{ (mass.)} = - (P + q l).$$

In questo caso, pel calcolo di resistenza della trave, si dovrà aver riguardo al fatto, che il massimo momento di flessione ed il massimo sforzo di taglio hanno luogo nella stessa sezione. Si calcoleranno

$$\varepsilon_x = \frac{M_0 y_1}{I}, \quad \tau_y = \frac{G T_0}{\lambda I}.$$

e bisognerà che sia:

$$\frac{3}{8} \frac{M_0 y_1}{I} + \frac{5}{8} \sqrt{\left\{ \frac{M_0^2 y_1^2}{I^2} + 4 \frac{G^2 T_0^2}{\lambda^2 I^2} \right\}} < R.$$

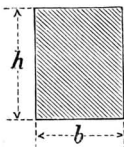
Inoltre bisognerà assicurarsi anche che la pressione normale nei punti più lontani dall'asse di flessione, ove è nullo lo scorrimento trasversale, sia minore di R ; e così pure che la tensione tangenziale nei punti dell'asse di flessione, ove è nulla la pressione normale, sia minore di R_t ; cioè bisognerà assicurarsi che siano anche:

$$\frac{M_0 y_1}{I} < R, \quad \frac{G T_0}{\lambda I} < R_t.$$

Per le travi a traliccio dovranno essere soddisfatte separatamente le due condizioni:

$$\frac{M_0 y_1}{I} < R, \quad \frac{G}{I} \frac{T_0 d}{\omega \sqrt{2}} < R'.$$

La freccia d'inflessione nelle travi a traliccio è:



$$f = \frac{l^3}{EI} \left(\frac{P}{3} + \frac{q l}{8} \right) + \frac{G d \sqrt{2}}{I E \omega} l \left(P + \frac{q l}{2} \right).$$

Le due presenti tabelle XXVI e XXVII sono calcolate assumendo per il legno rovere $R = 0,6$ kg. per mm.^2 , e tenendo conto del peso proprio della trave.

Fig. 92.

TABELLA XXVI.

Pesi concentrati P che si possono applicare all'estremità libera di una trave orizzontale in legno rovere incastrata per l'altra estremità.

Sez. Fig. 92.		P in kg. per una portata l in m.									
lato											
orizz.	vert.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
b	h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m.	m.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.
0,01	0,01	0,055	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,02	0,04	2,84	0,88	—	—	—	—	—	—	—	—
0,02	0,05	4,55	1,60	0,32	—	—	—	—	—	—	—
0,03	0,03	2,30	0,55	—	—	—	—	—	—	—	—
0,03	0,05	6,82	2,40	0,48	—	—	—	—	—	—	—
0,04	0,07	18,34	7,28	2,76	0,42	—	—	—	—	—	—
0,05	0,10	47,75	20,50	10,00	3,50	—	—	—	—	—	—
0,10	0,10	95,5	41,00	19,83	7,00	—	—	—	—	—	—
0,10	0,15	218,25	99,00	54,75	29,25	11,25	—	—	—	—	—
0,15	0,15	347,37	158,50	88,80	48,87	14,90	—	—	—	—	—
0,15	0,20	586,50	273,00	159,50	96,00	52,50	19	—	—	—	—
0,20	0,20	782,0	364,0	213,0	128	70	25	—	—	—	—
0,14	0,22	664	311	184	114	66	30	—	—	—	—
0,20	0,30	1773	846	519	342	225	138	68	9	—	—
0,25	0,35	3023	1452	902	609	416	274	162	68	—	—
0,35	0,45	7017	3402	2150	1488	1063	756	516	319	150	—
0,50	0,50	12387	6025	3830	2675	1939	1408	1000	662	377	125

TABELLA XXVII.

Sopracarico q per m. corr. che può essere disposto uniformemente su tutta la portata di una trave orizzontale in legno rovere incastrata per un'estremità libera all'altra.

Sez. Fig. 92		q in kg. per m. corr. per una portata l in m.									
lato											
orizz.	vert.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
b	h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m.	m.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.
0,01	0,01	0,11	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,02	0,04	5,63	0,88	—	—	—	—	—	—	—	—
0,02	0,05	9,10	1,60	0,21	—	—	—	—	—	—	—
0,03	0,03	4,59	0,54	—	—	—	—	—	—	—	—
0,03	0,05	13,65	2,40	0,32	—	—	—	—	—	—	—
0,04	0,07	36,68	7,28	1,83	—	—	—	—	—	—	—
0,05	0,10	95,50	20,50	6,65	1,75	—	—	—	—	—	—
0,10	0,10	191,00	41,00	13,22	3,50	—	—	—	—	—	—
0,10	0,15	436,50	93,00	36,50	14,62	4,50	—	—	—	—	—
0,15	0,20	1173	273,00	106,32	48,00	21,00	6,33	—	—	—	—
0,20	0,20	1564	364	142	64	28	8	—	—	—	—
0,14	0,22	1327	311	123	57	26	10	—	—	—	—
0,20	0,30	3546	846	346	171	90	46	19	—	—	—
0,25	0,35	6046	1452	602	304	166	91	46	17	—	—
0,30	0,40	9492	2292	958	492	276	159	88	42	—	—
0,35	0,45	14033	3402	1433	744	425	252	147	79	33	—
0,50	0,50	24775	6025	2552	1337	775	469	285	165	83	25

Avvertenza. — Comunque siano trattenute le travi, mediante incastri od appoggi, si avverta che quando è noto dalle tabelle, q

altrimenti, il peso q che può sopportare una trave di sezione con lati b orizzontale ed h verticale, si può subito trovare il peso q_1 che può sopportare una trave, trattenuta come quella $b \times h$, ed avente la sezione col medesimo lato verticale h , ma col lato orizzontale b_1 , a mezzo della semplice formola:

$$q_1 = \frac{b_1}{b} q .$$

TABELLA XXVIII.

Carico concentrato P all'estremità libera e sopracarico q per m. corr., disposto uniformemente su tutta la portata l , cui si può assoggettare un ferro quadro incastrato per un'estremità e libero all'altra.

Sez. quadra	P in kg. per l in m.					q in kg. per m. corr. per l in m.				
	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
	0,10	0,20	1,00	2,00	3,00	0,20	0,50	1,00	2,00	3,00
Lato	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.
0,005	1,24	0,605	0,027	—	—	6,05	0,80	0,055	—	—
0,006	2,15	1,052	0,076	—	—	10,52	1,45	0,151	—	—
0,007	3,41	1,677	0,152	—	—	16,77	2,36	0,304	—	—
0,008	5,09	2,510	0,262	—	—	25,10	3,60	0,505	—	—
0,009	8,15	3,581	0,413	—	—	35,82	5,20	0,826	—	—
0,010	9,96	4,922	0,610	—	—	49,22	7,22	1,22	—	—
0,011	13,26	6,560	0,859	—	—	65,61	9,70	1,72	—	—
0,012	17,22	8,527	1,166	—	—	85,27	12,70	2,33	—	—
0,013	21,90	10,85	1,538	—	—	108,5	16,26	3,08	—	—
0,014	27,36	13,57	1,98	—	—	135,7	20,42	3,96	—	—
0,015	33,66	16,70	2,50	—	—	167,0	25,24	4,99	—	—
0,016	40,86	20,28	3,10	0,051	—	202,8	30,77	6,19	0,051	—
0,017	49,02	24,34	3,79	0,202	—	243,4	37,05	7,57	0,202	—
0,018	58,19	28,91	4,57	0,389	—	289,1	44,13	9,14	0,389	—
0,019	68,44	34,01	5,45	0,614	—	340,1	52,06	10,90	0,614	—
0,020	79,84	39,69	6,44	0,880	—	396,9	60,88	12,88	0,880	—
0,022	106,3	52,86	8,76	1,549	—	528,6	81,41	17,52	1,549	—
0,025	156,0	77,64	13,19	2,937	—	776,4	120,1	26,37	2,937	—
0,027	191,1	95,16	16,38	4,041	—	951,6	147,6	32,76	4,041	—
0,030	269,6	134,3	23,49	6,480	—	1343	209	46,98	6,480	—
0,032	327,3	163	28,77	8,397	—	1630	254,2	57,55	8,397	—
0,035	428,3	213,4	38,10	11,88	—	2134	333,4	76,19	11,88	—
0,037	506	252	45,31	14,65	0,836	2520	394,5	90,63	14,65	0,580
0,040	639	319	57,76	19,52	2,613	3187	499,5	115,5	19,52	1,741
0,045	910	454	83,23	29,77	6,682	4540	713,2	166,4	29,77	4,455
0,050	1249	623	115,25	43,00	12,41	6230	980,5	230,5	43,00	8,28

NB. — In questa Tabella XXVIII e nella seguente Nota, si è assunto per il ferro $R = 6$ kg. per mm^2 .

Nota. — Il sopracarico q per m. corr. uniformemente distribuito,

su tutta la portata l di un ferro rotondo del diametro d , cui si può assoggettarlo è dato da:

$$q = 2 \left(\frac{58905^3 d}{l^2} - 6126 \right) d^2 ,$$

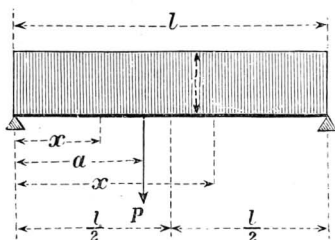
ed il carico concentrato P , che lo stesso ferro può sopportare alla estremità libera, è:

$$P = \left(\frac{589050 d}{l} - 6126 l \right) d^2 .$$

2. — Trave orizzontale appoggiata in ambedue le estremità.

CARICO CONCENTRATO.

Sia P un carico concentrato applicato a distanza $a < \frac{l}{2}$ dall' appoggio di sinistra. Ritenute le denominazioni del numero precedente si ha:



nel tronco da $x = 0$ ad $x = a$:

$$M_x = P \frac{l-a}{l} x ,$$

$$T_x = P \frac{l-a}{l} ,$$

nel tronco da $x = a$ ad $x = l$:

$$M_x = P \frac{a}{l} (l-x) , \quad T_x = - P \frac{a}{l} .$$

Fig. 93.

Il massimo M_x ha luogo nel punto d'applicazione del peso P ed è:

$$M_a (\text{mass.}) = P \frac{a(l-a)}{l} .$$

Lo sforzo di taglio T_x è costante in ciascuno dei due tronchi della trave, ma pel tronco fra $x = 0$ ed $x = a$ esso è maggiore che pel tronco fra $x = a$ ed $x = l$.

Per le travi a sezione continua (a pareti piene), si dovrà generalmente applicare la formola della resistenza composta

$$\frac{3}{8} \varepsilon_x + \frac{5}{8} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \tau_y^2} < R .$$

Se la trave è a traliccio si applicheranno separatamente le formole:

$$\frac{M y_1}{I} < R, \quad \frac{G}{I} \frac{T d}{\omega \sqrt{2}} < R'.$$

La freccia d'inflessione della trave (*saetta*) nel punto di mezzo (non nel punto d'applicazione del peso) è data da:

$$f = \frac{P a}{2} \left(\frac{3 l^2 - 4 a^2}{24 E I} + \frac{A}{E t \Omega} \right),$$

quando la sezione è continua e costante.

Se invece la trave a traliccio si ha:

$$f = P a \frac{3 l^2 - 4 a^2}{48 E I} \left[1 + \frac{24 G d \sqrt{2}}{(3 l^2 - 4 a^2) \omega} \right].$$

CARICO UNIFORMEMENTE RIPARTITO SU TUTTA LA PORTATA. — Ritenute le solite notazioni, si ha:

$$M_x = \frac{q}{2} (l - x) x, \quad T_x = \frac{q}{2} (l - 2x).$$

Il massimo M_x ha luogo nel mezzo della portata:

$$M_l (\text{mass.}) = \frac{q l^2}{8},$$

ed il massimo T_x ha luogo alle estremità:

$$T_o (\text{mass.}) = T_l (\text{mass.}) = \frac{q l}{2}.$$

Se la sezione è continua e costante basterà, per la stabilità, che siano soddisfatte le due condizioni:

$$\frac{M y_1}{I} < R, \quad \frac{G T}{I} < R_t,$$

prendendo per M e T i valori massimi.

Se però la trave è a traliccio la seconda condizione diventa:

$$\frac{G}{I} \frac{T d}{\omega \sqrt{2}} < R'.$$

Quando la trave ha sezione variabile non basta più assicurarsi che le equazioni di stabilità siano soddisfatte per la sezione di mezzo e per quelle estreme; bisogna in tal caso anche assicurarsi che le equazioni di stabilità siano soddisfatte altresì per le sezioni

intermedie, epperciò potrà occorrere di applicare la formola della resistenza composta :

$$\frac{3}{8} \varepsilon_x + \frac{5}{8} \sqrt{\varepsilon_x^2 + 4 \tau_y^2} < R,$$

nella quale ε_x , τ_y hanno il solito significato, cioè :

$$\varepsilon_x = \frac{M y_1}{I}, \quad \tau_y = \frac{G T}{\lambda I}.$$

Se però, essendo la sezione variabile, la trave è a traliccio, si applicheranno separatamente le formole :

$$\frac{M y_1}{I} < R, \quad \frac{G}{I} \frac{T d}{\omega \sqrt{2}} < R'.$$

La freccia d'inflessione (*saetta*) nel punto di mezzo della trave, è data da :

$$f = \frac{p l^2}{8} \left(\frac{5 l^2}{48 E I} + \frac{A}{E_t \Omega} \right),$$

quando la sezione è continua e costante.

Se invece la trave è a traliccio, sarà :

$$f = \frac{5 p l^4}{384 E I} \left(1 + \frac{48 G d \sqrt{2}}{5 l^2 \omega} \right).$$

Le due seguenti tabelle XXIX e XXX sono calcolate assumendo per il legno rovere $R = 6$ kg. per mm^2 e tenendo conto del peso proprio della trave.

Per trovare il peso concentrato P_n od il sopraccarico uniforme q_n in kg., relativi ad una trave avente un lato orizzontale *qualunque* $b = \text{cm. } n$ si moltiplica il P_1 od il q_1 (che si ricavano entrando nelle dette tabelle con la portata ed il lato verticale dati) per n :

$$P_n = P_1 n, \quad q_n = q_1 n$$

Es.: $l = \text{m. } 3,00$, $h = \text{m. } 0,12$, $b = \text{m. } 0,08 = \text{cm. } 8$

Per $l = \text{m. } 3,00$, $h = \text{m. } 0,12$, $b = \text{m. } 0,01$

le tabelle XXIX e XXX danno rispettivamente

$$P_1 = \text{kg. } 17,58, \quad q_1 = \text{kg. } 11,72$$

onde per $b = \text{cm. } 8$ si avrà :

$$P_8 = 17,58 \cdot 8 = \text{kg. } 140,64, \quad q_8 = 11,72 \cdot 8 = \text{kg. } 93,76.$$

TABELLA XXIX.

Pesi concentrati P_1 che si possono applicare nel mezzo di una trave orizzontale, in legno rovere, appoggiata in ambedue le estremità.

Sez. Fig. 92.		P_1 in kg. per una portata l in m.						
Lato								
orizz.	vert.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
b	h	0,20	0,50	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
m.	m.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.
0,01	0,01	1,99	0,77	0,36	0,11	—	—	—
	0,02	7 98	3,13	1,51	0,62	0,27	0,04	—
	0,03	17,97	7,14	3,46	1,53	0,79	0,36	0,045
	0,04	31,96	12,71	6,22	2,84	1,59	0,88	0,380
	0,05	49,96	19,89	9,77	4,55	2,65	1,60	0,875
	0,06	71,95	28,66	14,13	6,66	3,99	2,52	1,530
	0,07	97,94	39,04	19,28	9,17	5,59	3,64	2,345
	0,08	127,93	51,02	25,24	12,08	7,45	4,96	3,320
	0,09	161,92	64,59	31,99	15,39	9,58	6,48	4,455
	0,10	199,91	79,77	39,55	19,10	11,98	8,20	5,750
	0,11	241,90	96,55	47,90	23,21	14,65	10,12	7,205
	0,12	287,89	114,93	57,06	27,72	17,58	12,24	8,820
	0,13	337,88	144,90	62,01	32,63	20,79	14,56	10,595
	0,14	391,87	156,48	72,77	37,94	24,20	17,08	12,530
	0,15	449,86	179,66	89,32	43,65	27,99	19,80	14,625
	0,16	511,86	204,44	101,68	49,76	31,99	22,72	16,880
	0,17	577,86	230,82	114,83	56,27	36,25	25,84	19,335
	0,18	647,84	258,79	123,79	63,18	40,80	29,16	21,910
	0,19	721,83	288,37	143,54	70,49	45,60	32,68	24,645
	0,20	799,82	319,55	159,10	78,20	50,64	36,40	27,540
0,21	881,81	352,08	175,45	86,31	55,96	40,32	30,595	
0,22	967,80	386,70	192,61	94,82	61,57	44,44	33,810	
0,23	1057,79	422,68	210,56	103,73	67,44	48,76	37,185	
0,24	1151,78	460,26	229,32	113,04	73,59	53,28	40,720	
0,25	1249,78	499,44	248,87	122,75	79,99	58,00	44,415	
0,26	1351,77	540,21	269,23	132,86	86,65	62,92	48,270	
0,27	1457,76	582,59	290,38	143,37	93,58	68,04	52,285	
0,28	1567,74	626,58	312,33	154,28	100,78	73,36	56,460	
0,29	1681,73	672,16	335,07	165,59	108,25	78,88	60,795	
0,30	1799,72	719,34	358,60	177,30	115,99	84,60	65,290	
0,31	1921,71	768,12	382,92	189,41	124,00	90,52	69,945	

(*Sequitur tabella XXIX.*)

Sez. Fig. 92		P_1 in kg. per una portata l in m.									
lato											
orizz.	vert.	m.	m.	m	m	m.	m	m	m.	m.	
b	h	1,00	2,00	3.00	4,00	5.00	6,00	7.00	8,00	10.00	
m.	m.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	
0,32	408,0	192,5	132,28	96,64	74,760	59,65	48,43	39,68	26,56		
0,33	433,9	206,0	140,83	102,96	79,735	63,72	51,83	42,57	28,71		
0,34	470,6	220,0	149,65	109,48	84,870	67,94	55,34	45,56	30,94		
0,35	508,1	234,2	158,7	116,20	90,165	72,30	58,96	48,65	33,25		
0,36	546,5	249,0	168,1	123,12	95,602	76,79	62,70	51,84	35,64		
0,37	585,5	267,1	177,7	130,24	101,235	81,42	66,56	55,13	38,11		
0,38	625,4	285,6	187,6	137,7	107,010	86,18	70,52	58,52	40,66		
0,39	666,0	304,5	197,8	145,2	112,945	91,08	74,60	62,01	43,29		
0,40	707,4	323,8	208,2	152,9	119,040	96,11	78,80	65,60	46,00		
0,41	749,6	343,5	218,9	160,8	125,295	101,28	83,10	69,29	48,79		
0,42	792,7	363,6	229,9	168,9	131,710	106,58	87,52	73,08	51,66		
0,43	836,5	384,1	241,2	177,3	138,285	112,02	92,06	76,97	54,61		
0,44	881,1	405,0	252,7	185,8	145,020	117,59	96,71	80,96	57,64		
0,45	926,4	426,3	264,5	194,5	151,915	123,30	101,47	85,05	60,75		
0,46	972,6	448,0	277,6	203,4	158,970	129,14	106,35	89,24	63,94		
0,47	1019,6	470,2	289,9	212,5	166,185	135,12	111,35	93,53	67,21		
0,48	1067,3	492,7	302,5	221,9	173,540	141,23	116,45	97,92	70,56		
0,49	1115,9	515,6	325,3	231,4	181,055	147,48	121,67	102,41	73,99		
0,50	1165,2	538,9	338,5	241,1	188,730	153,86	127,01	107,00	77,50		
0,51	1215,3	562,6	351,9	251,0	196,565	160,38	132,46	111,62	81,09		
0,52	1266,2	586,7	365,6	261,0	204,56	167,03	138,02	116,48	84,76		
0,53	1317,9	611,2	379,5	271,5	212,715	173,82	143,70	121,37	88,51		
0,54	1370,4	636,1	393,7	282,0	221,03	180,75	149,50	126,36	92,34		
0,55	1423,7	661,4	408,2	292,7	229,505	187,80	155,39	131,45	96,25		
0,56	1477,8	687,2	423,0	303,6	238,14	195,00	161,41	136,64	100,24		
0,57	1533,6	713,3	438,0	314,7	246,935	202,32	167,55	141,93	104,31		
0,58	1590,3	739,8	453,3	326,0	255,89	209,79	173,79	147,32	108,46		
0,59	1647,7	766,7	468,9	337,6	265,005	217,39	180,15	152,82	112,69		
0,60	1705,9	794,0	484,7	349,3	274,28	225,12	186,63	158,40	117,00		
0,61	1765,0	821,7	500,8	361,2	283,715	232,99	193,22	164,09	121,39		
0,62	1824,8	849,8	517,2	373,2	293,31	240,99	199,92	169,88	125,86		

TABELLA XXX.

Sopracarico q_1 per m. corr. che si può disporre uniformemente su tutta la portata di una trave orizzontale in legno rovere appoggiata in ambedue le estremità.

Sez. Fig. 92.		q_1 in kg. per m. corr. per una portata l in m.							
Lato									
orizz.	vert.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	
b	h	0,20	0,50	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	
m.	m.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	
0,01	0,01	19,91	3,11	0,71	0,11	—	—	—	
	0,02	79,82	12,62	3,02	0,62	0,18	0,02	—	
	0,03	179,73	28,53	6,93	1,53	0,53	0,18	0,018	
	0,04	319,64	50,84	12,44	2,84	1,06	0,44	0,152	
	0,05	499,55	79,55	19,55	4,55	1,77	0,80	0,382	
	0,06	719,46	114,66	28,26	6,66	2,66	1,26	0,612	
	0,07	979,37	156,17	38,57	9,17	3,73	1,82	0,938	
	0,08	1279,28	204,08	50,48	12,08	4,97	2,48	1,328	
	0,09	1619,19	258,39	63,99	15,39	6,39	3,21	1,782	
	0,10	1999,10	319,10	79,10	19,10	7,99	4,10	2,300	
	0,11	2419,01	386,21	95,81	23,21	9,77	5,06	2,882	
	0,12	2878,92	459,72	114,12	27,72	11,72	6,12	3,528	
	0,13	3378,83	539,63	134,03	32,63	13,86	7,28	4,238	
	0,14	3918,74	625,94	155,44	37,94	16,17	8,54	5,012	
	0,15	4498,65	718,65	178,65	43,65	18,66	9,90	5,850	
	0,16	5118,56	817,76	203,35	49,76	21,33	11,36	6,752	
	0,17	5778,47	923,27	229,67	56,27	24,17	12,92	7,734	
	0,18	6478,38	1035,18	257,58	63,18	27,20	14,58	8,764	
	0,19	7218,29	1153,49	287,09	70,49	30,40	16,34	9,858	
	0,20	7998,20	1278,20	318,20	78,20	33,76	18,20	11,016	
	0,21	8818,11	1408,31	350,91	86,31	37,31	20,16	12,238	
	0,22	9678,02	1546,82	385,22	94,82	41,05	22,22	13,524	
	0,23	10577,93	1690,73	421,13	103,73	44,96	24,38	14,874	
	0,24	11517,84	1841,04	458,64	113,04	49,06	26,64	16,288	
	0,25	12497,75	1997,75	497,75	122,75	53,33	29,00	17,766	
	0,26	13517,66	2160,86	538,46	132,86	57,77	31,46	19,308	
	0,27	14577,57	2330,38	588,77	143,37	62,38	34,02	20,914	

(Seguito tabella XXX).

Sez Fig 92.		q_1 in kg. per m. corr. per una portata l in m.								
lato										
orizz.	vert.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
b	h	1,00	2,00	3,00	4,00	5 00	6,00	7,00	8,00	10,00
m	m.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.
0,01	0,28	624,68	154,28	67,16	36,68	22,584	14,90	10,28	7,28	3,75
	0,29	670,19	165,59	72,11	39,44	24,318	16,08	11,12	7,90	4,14
	0,30	717,30	177,30	77,23	41,30	26,116	17,29	11,99	8,55	4,50
	0,31	766,01	189,41	82,52	45,26	27,978	18,56	12,89	9,22	4,89
	0,32	816,32	201,92	87,98	48,32	29,90	19,87	13,84	9,92	5,31
	0,33	868,23	214,83	93,61	51,48	31,89	21,23	14,81	10,64	5,74
	0,34	921,74	228,14	99,41	54,74	33,95	22,64	15,71	11,39	6,19
	0,35	976,85	241,85	105,38	58,10	36,07	24,09	16,84	12,16	6,65
	0,36	1033,56	255,96	111,52	61,56	38,25	25,59	17,91	12,96	7,13
	0,37	1091,87	270,47	117,83	65,12	40,49	27,13	19,01	13,78	7,62
	0,38	1151,78	285,38	124,31	68,8	42,80	28,72	20,15	14,63	8,13
	0,39	1213,29	300,69	130,96	72,6	45,18	30,36	21,31	15,50	8,66
	0,40	1276,40	316,40	138,80	76,4	47,62	32,04	22,51	16,40	9,20
	0,41	1341,11	332,51	145,79	80,4	50,12	33,76	23,74	17,32	9,76
	0,42	1407,42	349,02	152,78	84,5	52,68	35,52	25,01	18,27	10,33
	0,43	1475,33	365,93	160,01	88,6	55,31	37,34	26,30	19,24	10,92
	0,44	1544,84	383,24	167,58	92,9	58,01	39,16	27,63	20,24	11,53
	0,45	1615,95	400,95	175,26	97,2	60,77	41,10	28,99	21,26	12,15
	0,46	1688,66	419,06	183,11	101,7	63,59	43,05	30,40	22,31	12,79
	0,47	1762,97	437,57	191,13	106,2	66,47	45,04	31,81	23,38	13,44
0,48	1838,88	456,48	199,32	110,9	69,42	47,07	33,27	24,48	14,11	
0,49	1916,39	475,79	207,68	115,7	72,42	49,16	34,76	25,60	14,79	
0,50	1995,50	495,50	217,71	120,5	75,49	51,29	36,28	26,75	15,50	
0,51	2076,21	515,61	226,41	125,0	78,63	53,46	37,84	27,92	16,22	
0,52	2158,52	536,12	235,28	130,5	81,82	55,67	39,43	29,12	16,95	
0,53	2242,23	557,03	244,32	135,7	85,09	57,94	41,06	30,34	17,70	
0,54	2327,94	578,34	253,53	141,0	88,41	60,25	42,71	31,59	18,47	
0,55	2415,05	600,05	262,9	146,3	91,80	62,60	44,39	32,86	19,25	
0,56	2503,76	622,16	272,5	151,8	95,26	65,00	46,89	34,16	20,05	
0,57	2594,07	644,67	282,0	157,3	98,77	67,44	47,87	35,48	20,86	
0,58	2685,98	667,58	292,0	163,0	102,36	69,93	49,65	36,33	21,61	
0,59	2779,49	690,89	302,0	168,8	106,00	72,93	51,47	38,20	22,54	

NB. Se ai numeri di questa tabella, che danno il sopraccarico q , si aggiunge il relativo peso proprio di m. 1 di trave, si ottiene una somma, la quale moltiplicata per $\frac{R}{0,6}$ dà un prodotto, che, dimi-

nuito del relativo peso proprio di m. 1 di trave fornisce una differenza che è il *sopracarico* per m. corr. che la trave considerata può sopportare, lavorando a R kg. per mm^2 .

Con questa tabella, calcolata, per una trave su due appoggi, si può anche facilmente avere il *sopracarico* per m. corr. che può sopportare:

1.° Una trave incastrata per un'estremità, libera all'altra, aggiungendo, ai risultati esposti nella tabella, il relativo peso proprio di m. 1 di trave, dividendo per 4 la somma così ottenuta, e sottraendo da questo quoziente il peso di m. 1 di trave.

2.° Una trave incastrata in ambedue le estremità, aggiungendo, ai risultati esposti nella tabella, il relativo peso proprio di m. 1 di trave, moltiplicando per 1.5 la somma così ottenuta, e sottraendo da questo prodotto il peso di m. 1 di trave

3.° Una trave incastrata in un'estremità, appoggiata all'altra, prendendo gli stessi numeri di questa tabella senz'alcuna variazione.

TABELLA XXXI.

Peso concentrato P che si può applicare nel mezzo della portata, e del sopracarico q per m. corr. che si può distribuire su tutta la portata, dei ferri quadri disposti orizzontalmente su due appoggi.

Sez. quadra	P in kg. per l in m.					q in kg. per m. corr. per l in m.				
	m. 0,10	m. 0,20	m. 1,00	m. 2,00	m. 3,00	m. 0,10	m. 0,20	m. 1,00	m. 2,00	m. 3,00
Lato	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.
0,005	4,59	2,48	0,40	0,055	—	89,8	24,8	0,80	0,055	—
0,006	8,63	4,29	0,72	0,15	—	172,5	42,9	1,45	0,15	—
0,007	13,70	6,82	1,18	0,30	—	275,0	68,2	2,36	0,30	—
0,008	20,46	10,19	1,80	0,52	—	409,1	101,9	3,59	0,52	—
0,009	29,13	14,52	2,60	0,83	0,026	582,6	145,2	5,20	0,83	0,014
0,010	39,96	19,92	3,61	1,22	0,163	799,2	199,2	7,22	1,22	0,109
0,011	53,19	26,52	4,85	1,72	0,359	1064	265,2	9,90	1,72	0,239
0,012	69,06	34,5	6,35	2,33	0,619	1381	344,5	12,70	2,33	0,413
0,013	87,81	43,8	8,13	3,08	0,952	1756	438,1	16,25	3,08	0,635
0,014	109,7	54,7	10,21	3,96	1,36	2193	547,3	20,42	3,96	0,910
0,015	131,9	67,3	12,62	4,99	1,87	2698	673,2	25,24	4,99	1,24
0,016	163,7	81,7	15,39	6,19	2,46	3275	817,2	30,77	6,19	1,64
0,017	196,4	98,0	18,52	7,57	3,17	3928	980,3	37,05	7,57	2,11
0,018	233,1	116,4	22,06	9,14	3,88	4663	1164	44,12	9,14	2,59
0,019	274,2	136,9	26,03	10,90	4,92	5484	1369	52,05	10,90	3,28

(Seguito della tabella XXXI).

Sez. quadra	P in kg. per l in m.					q in kg. per m. corr. per l in m.				
	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
	0,10	0,20	1,00	2,00	3,00	0,10	0,20	1,00	2,00	3,00
Lato	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.
0,020	319,8	159,7	30,44	12,88	5,98	6397	1597	60,88	12,88	3,99
0,021	370,3	184,9	35,32	15,08	7,18	7405	1849	70,65	15,08	4,79
0,022	425,7	212,6	40,70	17,52	8,53	8515	2126	81,40	17,52	5,68
0,023	486,5	242,9	46,60	20,21	10,03	9729	2429	93,21	20,21	6,68
0,024	552,7	276,0	53,05	23,16	11,69	11055	2760	106,1	23,16	7,79
0,025	624,7	312,0	60,06	26,37	13,52	12495	3120	120,1	26,37	9,01
0,026	702,8	350,1	67,67	29,87	15,5	14056	3501	135,3	29,87	10,3
0,027	787,0	393,1	75,88	33,68	17,7	15740	3931	151,7	33,68	11,8
0,028	877,8	438,4	84,75	37,78	20,1	17555	4384	169,5	37,78	13,3
0,029	975,2	487,1	94,28	42,21	22,7	19505	4871	188,5	42,21	15,1
0,030	1079,6	539,3	104,5	46,98	25,5	21593	5393	209,0	46,98	17,0

NB. In questa Tabella XXXI e nella seguente Nota, si è assunto per il ferro $R = 6$ kg. per mm.^2 .

Moltiplicando i pesi esposti dei ferri quadri per un numero n si ottengono i pesi ammissibili pei ferri a sezione rettangolare dell'altezza indicata dalla tabella e della larghezza n volte quella segnata nella tabella.

Nota. Il sopracarico concentrato nel mezzo della portata, che un ferro rotondo può sopportare è dato da:

$$P = \left(\frac{2356193 d}{l} - 6126 l \right) d^2,$$

ed il sopracarico per m. corr. è dato da:

$$q = 2 \left(\frac{2356193 d}{l^2} - 6126 \right) d.$$

TABELLA XXXII.

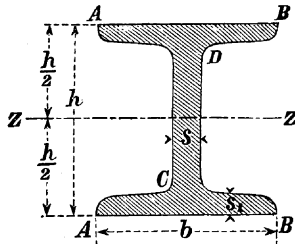


Fig. 94.

Ferri a doppio T. Peso proprio in kg. per m. corr., momento d'inerzia I_z (cm⁴), e intero carico (peso proprio e sopraccarico) Q in kg., che si può uniformemente distribuire su tutta la loro portata quando i ferri sono orizzontalmente disposti su due appoggi situati alle loro estremità.

Chiamiamo *tavole* le parti $A B$ del ferro ed *anima* la parte $C D$.

I ferri controsegnati da * sono dell'Unione Germanica, quelli non controsegnati sono del Creusot.

Alt. in mm.	Largh. in mm.	Spessegza		Peso proprio in kg. per m. corr.	I_z riferito al cm.	Q in kg. uniformemente distribuibile sull'intera portata l in m.										
		anima	tavole			m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
b	h	s	s_1			1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	10,00
mm.	mm.	mm.	mm.	kg.	cm. ⁴	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.
80	40	4,5	7	6,75	84,3	—	—	506	404	338	253	202	168	145	126	—
*80	42	3,9	5,9	6,0	78,4	941	627	470	376	313	235	188	157	134	118	—
80	45,5	10	7,2	10,18	107,5	—	—	645	516	430	322	254	215	184	162	—
*90	46	4,2	6,3	7,1	118	1258	838	629	503	419	314	251	209	179	157	—
100	43	5	7,5	8,40	160,7	—	—	771	617	513	385	308	257	220	193	—
100	48,5	10,5	5	12,70	209,8	—	—	1007	806	672	503	403	336	288	252	—
*100	50	4,5	6,8	8,3	172	1651	1101	826	661	550	413	330	274	253	206	—
*110	54	4,8	7,2	9,6	241	2102	1397	1051	841	701	526	421	350	301	263	—
120	45	5,5	8,25	9,60	281,8	—	—	1127	902	752	563	451	376	322	282	—
120	50,5	11	8,5	14,75	363,4	—	—	1454	1162	970	727	582	485	415	363	—
*130	62	54	8,1	12,6	441	3254	2170	1627	1301	1085	814	651	512	465	407	—

(Seguito della tabella XXXII).

Alt. in mm.	Largh. in mm.	Spessezza		Peso proprio in kg. per m corr.	I_z riferito al cm.	Q in kg. uniformemente distribuibile sull'intera portata l in m.										
		anima	tavole			m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	
		s	s_t			1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	10,00
mm	mm.	mm.	mm.	kg.	cm. ⁴	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.
140	49	6	8.1	12,25	453,7	—	—	1552	1241	1034	776	620	517	443	388	—
140	55	12	8,5	18,50	590,9	—	—	2024	1619	1349	1012	809	674	578	506	—
*140	66	5,7	8,6	14,3	579	3970	2646	2185	1588	1323	992	793	662	567	496	—
*150	70	6	9	16,0	743	4752	3168	2376	1901	1584	1188	950	792	678	590	—
160	54	6,5	9,25	14,50	709,8	—	—	2128	1702	1418	1064	851	709	608	532	—
160	59,5	12	9,25	21,50	897,5	—	—	2688	2150	1792	1344	1075	896	768	672	—
*160	74	6,3	9,3	17,9	945	5864	3775	2832	2266	1886	1416	1133	943	833	708	—
*170	78	6,6	9,9	19,8	1177	6672	4447	3336	2669	2224	1668	1334	1112	952	834	—
180	58	8	10	18,75	1096	—	—	2920	2336	1946	1460	1168	973	834	730	—
180	65	15	10	28,50	1436	—	—	3828	3062	2552	1914	1531	1276	1093	957	—
*180	82	6,9	10,4	21,9	1460	7776	5184	3888	3110	2592	1944	1555	1296	1110	972	777
*190	86	7,2	10,8	24,0	1779	8976	5984	4488	3590	2992	2244	1795	1495	1282	1122	898
200	60	8	11	21,20	1533	—	—	3690	2952	2460	1845	1478	1232	1057	922	—
*200	90	7,5	11,3	26,2	2162	10368	6912	5184	4147	3456	2592	2074	1728	1481	1296	1038
200	90	9	10,75	28,50	2493	—	—	5260	4208	3506	2630	2104	1753	1503	1315	—
200	97	15	10,75	37,50	2593	—	—	6220	4976	4146	3110	2488	2073	1777	1555	—
*210	94	7,8	11,7	28,5	2587	11808	7872	5904	4723	3936	2952	2362	1968	1687	1476	1170
220	64	8,5	11,75	24,60	2152	—	—	4696	3756	3130	2348	1880	1565	1345	1174	—
220	71	15,5	12,12	36,60	2869	—	—	6260	5007	4173	3130	2500	2085	1790	1565	—
*220	98	8,1	12,2	31,0	3090	13488	8992	6744	5395	4496	3372	2698	2248	1927	1686	1349
*230	102	8,4	12,6	33,5	3642	15216	10144	7608	6086	5072	3804	3043	2536	2174	1903	1522
235	95	9,0	12,0	32,00	3494	—	—	7132	5706	4755	3566	2853	2374	2037	1783	—
235	100	14,0	12,0	41,00	4035	—	—	8236	6589	5491	4118	3294	2745	2353	2059	—
*240	106	8,7	13,1	36,2	4288	17136	11424	8568	6854	5812	4284	3427	2856	2448	2142	1714
250	130	11,0	13,5	46,00	5480	—	—	10520	8416	7013	5260	4208	3506	3005	2630	—
250	135	16,0	13,5	56,00	6131	—	—	11768	9414	7845	5884	4707	3922	3362	2942	—

*260	113	9,4	14,1	41,9	5798	21408	14272	10704	8563	7135	5352	4282	3568	3058	2676	2141
*280	119	10,1	15,2	47,9	7658	26256	17503	13128	10502	8752	6564	5251	4374	3751	3282	2625
*300	125	10,8	16,2	54,1	9888	31632	21088	14816	12653	10543	7808	6326	5272	4518	3954	3163
*320	131	11,5	17,3	61,0	12622	37872	25248	18936	15149	12624	9468	7574	6312	5410	4674	3787
*340	137	12,2	18,3	68,0	15827	44688	29792	22344	17875	14896	11172	8938	7248	6384	5486	4469
*360	143	13,0	19,5	76,1	19766	52704	35136	26352	21082	17568	13176	10540	8784	7529	6588	5270
*380	149	13,7	20,5	83,9	24208	61152	40768	30576	24461	20383	15283	12230	10192	8736	7644	6115
*400	155	14,4	21,6	92,3	29146	70656	47104	35328	28260	23551	17664	14131	11776	10093	8832	7065
*425	163	15,3	23,0	103,7	37266	84192	56128	42096	33677	28064	21048	16838	14032	12028	10524	8419
*450	170	16,2	24,3	115,2	46204	98592	65728	49296	40437	32863	24648	19618	16432	14084	12324	9859
*475	178	17,1	25,6	127,6	56912	115008	76672	57504	46003	38335	28752	23002	19168	15572	14376	11501
*500	185	18,0	27,0	140,5	90245	132960	88639	66480	53184	44320	33240	26592	22159	18994	16620	13296

NB. In questa tabella si è assunto che il ferro possa lavorare a 6 kg: per mm.², e mentre le tabelle precedenti furono calcolate tenendo conto anche del peso proprio della trave, talchè i numeri in esse esposti danno addirittura il *sopracarico* che si può disporre sulla trave, nel calcolo di questa tabella invece non fu tenuto conto del detto peso proprio, talchè i numeri in questa riportati danno *l'intero carico* (peso proprio e sopra carico) di cui la trave può essere caricata, e quindi per ottenere il solo sopracarico per m. corr. che si può porre sulla trave, si deve sottrarre dalla relativa quantità $\frac{Q}{l}$ il peso proprio di un m. di trave pure esposto in questa tabella.

Coi risultati esposti in questa tabella si possono facilmente calcolare i *carichi* ammissibili, uniformemente distribuiti, sulle intere portate di travi aventi le portate stesse indicate sulla tabella e la stessa sezione, e:

- 1.° *Incastrate in un'estremità, libere all'altra*, dividendo per 4 i risultati della tabella.
- 2.° *Incastrate in ambedue le estremità*, moltiplicando per 1,5 i risultati della tabella.
- 3.° *Incastrate in un'estremità, appoggiate all'altra*, prendendo i numeri stessi della tabella senza modificazione.

Osservazione. — SEZIONI DA ADOTTARSI PER OTTENERE LA MASSIMA RESISTENZA ALLA FLESSIONE.

Vari costruttori hanno già notato il fatto — apparentemente paradossale — che, in alcuni casi, aumentando l'area Ω della sezione d'una trave si viene a produrre una diminuzione del momento resistente alla flessione $W = \frac{I}{z_1}$ (*).

Il Prof. R. Lauenstein, in una sua Nota alla Deutschen Bauzeitung (N. 68), ne dà un es. considerando la sezione quadrata e l'ingegner Gustavo Griot considerando sezioni a doppio T composte.

Questo fatto venne a conoscenza casualmente del Prof. Cullmann nel 1867, secondo quanto riferisce il Prof. Amsler Laffon nella Schweizerische Bauzeitung (Sett. 1899).

Nella sua *Statica grafica* il Cullmann ha enunciato la seguente regola approssimata. Indicando con

Δz_1 l'aumento della mass. dist. baricentrica z_1 delle fibre,
 $\Delta \Omega$ " dell'area primitiva Ω ;

si ha.

se z_1 aumenta proporzionalmente a Ω , cioè

se $\frac{\Delta \Omega}{\Delta z_1} = \frac{\Omega}{z_1}$ non ha luogo variaz. di W ;

se Ω aumenta più rapidamente in confronto di z_1 , cioè

se $\frac{\Delta \Omega}{\Delta z_1} < \frac{\Omega}{z_1}$ si ha diminuzione di W .

Il Chiar.mo Prof. Ing. A. F. Jorini, in una sua Nota al " Politecnico " (Giugno 1901), stabilisce una regola precisa per riconoscere quando ad un aumento di Ω consegue una diminuzione di W limitatamente alle sezioni simmetriche rispetto all'asse neutro ed alla sua perpendicolare baricentrica; ed applica detta regola ai due casi particolari: della sezione quadrata — confermando il risultato del Lauenstein suddetto, — e della sezione circolare. Sia:

I_1 il momento d'inerzia — rispetto

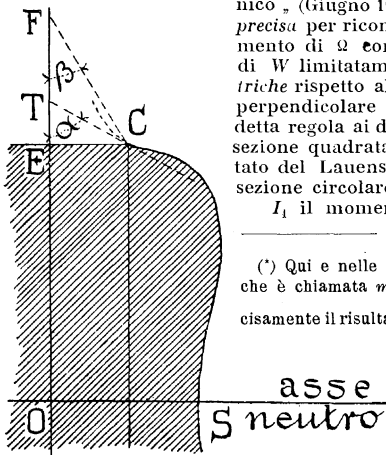


Fig 95.

(*) Qui e nelle tabelle seguenti la quantità che è chiamata momento resistente, non è precisamente il risultato della formola $R \frac{I}{z_1}$, bensì

il rapporto $\frac{I}{z_1} = W \cos \alpha$ cioè —
 che per ottenere il vero momento resistente $R \frac{I}{z_1}$ bisognerà moltiplicare W per R

all'asse neutro — del rettangolo centrale *inscritto* nel contorno della sez.,

I_2 il momento d'inerzia — rispetto all'asse neutro — di una delle due parti laterali separate da tale rettangolo,

CT la tangente in C alla curva del contorno della sezione.

$$\overline{EF} = \frac{1}{2} OE :$$

la regola precisa suddetta è espressa dalle:

$$I_1 = I_2 , \quad \alpha < \beta .$$

TIPY NORMALI DEI FERRI LAMINATI (WALZEISEN) ADOTTATI IN GERMANIA. La diversità dei tipi adottati dalle diverse officine di fabbricazione del ferro e dell'acciaio è causa di un grave inconveniente in pratica. Infatti se nella compilazione del progetto di una costruzione in ferro od in acciaio, vennero adottati i tipi di una data officina, l'Impresario che deve eseguire il progetto è obbligato a ricorrere a quella sola officina, oppure deve ottenere il permesso di sostituire altri tipi di sezione a quelli previsti nel progetto. Il che ad ogni modo è causa di perdita di tempo e di lavoro. D'altra parte se anche l'Impresario volesse rivolgersi all'officina i cui tipi di sezione furono adottati nel progetto, potrebbe succedere, come succede molto spesso, che essa non fosse fornita delle occorrenti sbarre per l'esecuzione del progetto, o che la quantità richiesta fosse di così poca importanza da non permetterne convenientemente la fabbricazione, o che non potesse subito fabbricarne, trovandosi già impegnata in altri lavori.

Per evitare questi inconvenienti, la *Lega della Società degli Ingegneri tedeschi* nominò una *Commissione* — composta dei Direttori di officine per la fabbricazione di ferri laminati, di Direttori di officine per l'esecuzione di lavori in ferro, di Ingegneri delle Strade Ferrate, e di Professori delle Scuole superiori per gli Ingegneri — coll'incarico di proporre una serie di tipi per le diverse forme di sezione, in modo da poter soddisfare a tutte le ordinarie esigenze della pratica.

I lavori di questa Commissione — della quale facevano parte, fra altri, il Dr. Winkler ed i signori Heinzerling ed Intze, tutti e tre professori di Istituti tecnici superiori germanici — furono pubblicati (1881) a cura dei ricordati due ultimi membri, ed oramai le officine tedesche adottano i **tipi normali** da essa Commissione proposti.

Riporto qui le tabelle della Commissione tedesca — prendendole dall'ultima pubblicazione “ *Deutschen Normalprofilbuche für Walzeisen* (5 Aufl.; Aachen 1897, Ios. La Ruelle) — colle aggiunte e modificazioni che l'ing. Castigliano ha trovato d'introdurvi (*) — cal-

(*) CASTIGLIANO - Manuale III.

colate nuovamente in base ai dati della detta ultima pubblicazione tedesca (*) — e premettendo le seguenti spiegazioni:

1.° I momenti d'inerzia sono ottenuti supponendo le misure espresse in cm.; onde bisognerà spostare la virgola di otto posti verso sinistra, se le dimensioni fossero espressi in m.

2.° La quantità, che nelle tabelle è chiamato momento resistente, non è precisamente il risultato della formola $R \frac{I}{z_1}$, che dà il va-

lore del momento resistente, ma è il rapporto $\frac{I}{z_1}$; cosicchè, per ottenere il vero momento resistente, bisogna moltiplicare i numeri della colonna delle tabelle intestata "Momento resistente", per il carico R di sicurezza riferito al cm. Ma volendo poscia confrontare il momento resistente così ottenuto col momento di flessione prodotto dalle forze esterne, bisognerà che i bracci di leva di queste forze siano espressi in cm. Ordinariamente però sarà preferibile ottenere il momento di flessione nel modo più comune esprimendo le forze in kg. ed i bracci di leva in m., e confrontarlo col momento resistente che si ottiene moltiplicando il numero dato dalla tabella pel valore del coefficiente R di resistenza riferito al mm.². Per es. dalla tabella XXXIII si ha 29,2 cm.³ pel momento resistente di un ferro d'angolo a braccia eguali e coi lati di 10 cm. e lo spessore di 12 mm.: se il valore del coefficiente di resistenza, che si vuole assumere pel detto ferro d'angolo, è $R=6$ kg. per mm.², il vero momento resistente che si cerca sarà

$$29,2 \cdot 6 = 175,2 \text{ kg. m.,}$$

cioè la sbarra della sezione ad angolo considerato potrà sopportare un momento di flessione di 175,2 intendendo le forze espresse in kg. ed i loro loro bracci di leva in m.

3.° Le tabelle danno il rapporto $\frac{W}{II}$ che l'ing. Castigliano ha denominato **rapporto di buon impiego**, il quale esprime, in sostanza, la parte del momento resistente corrispondente a ciascun kg. di peso per m. corr.: ne consegue che una sezione è tanto più utile, e dà un miglior impiego della materia, quanto maggiore è tale rapporto.

4.° I dati pesi II valgono per il ferro saldato (*Schweisseisen* — peso specifico = 7,8): per il ferro fuso (*Flusseisen* — peso specifico = 7,85) bisogna moltiplicare i II dati dalle tabelle per il rapporto $\frac{7,85}{7,8} = 1,0064$.

(*) dall'Autore di questa 2.^a ediz., Ing. GUIDO SANDRINELLI.

TABELLA XXXIII.

Sezione ad angolo a lati uguali.

Lunghezze normali m. 4 ÷ 8
 „ massime m. 12

Il N.º del profilo indica anche il lato b della sezione in cm.; così il N.º $7\frac{1}{2}$ del profilo corrisponde ad una sezione il cui lato è cm. 7,5.

I raggi R , r , degli arrotondamenti o raccordi restano gli stessi per le due o tre sezioni aventi lo stesso N.º di profilo: il raggio R deve essere uguale alla media degli spessori limiti indicati per dette sezioni; il raggio r deve essere la metà di R (arrotondando al

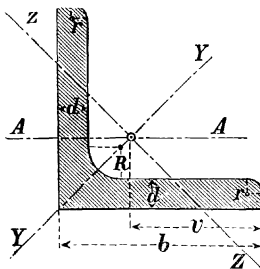


Fig. 96.

mezzo mm). Per es. el N.º $7\frac{1}{2}$ del profilo gli spessori limiti essendo mm. 8 e mm. 12, la media è di mm. 10, onde si avrà:

$$R = \text{mm. } 10, \quad r = \text{mm. } 5.$$

Osservazione. — Esaminando la colonna che dà il rapporto di buon impiego rispetto all'asse AA , si scorge che questo rapporto va crescendo col crescere della sezione; quindi per sopportare un dato peso converrà impiegare poche sbarre di grande sezione, piuttosto che molte di piccola.

Per es. in un coperto di lamiera di zinco ondulata, nel quale occorrono i soli arcarecci sulle incavallature, converrebbe mettere gli arcarecci distanti il più possibile, per poter impiegare delle sbarre di grande sezione.

(Vedi tabella a pagina seguente).

N.º del profilo o lato della sez.	Spessore	Area della sez.	Peso per m. corr.	Dist. baricentrica	Mom. princ. centrali d'inerzia		Mom. centr. d'inerzia	Mom. resist.	Rapp. buon impiego	Mom. centr. princ. d'inerzia	Mom. resistente				
					Rispetto all'asse							Rispetto all'asse di fless. A A			(rispetto all'asse di fless. B B) per 4 sez. riunite in croce:
					Y Y	Z Z						I_a	W_a	$\frac{W_a}{I}$	
<i>b</i>	<i>d</i>	Ω	Π	<i>v</i>	I_y (mass.)	I_z (min.)	I_a	W_a	$\frac{W_a}{I}$	$B \dots \frac{I}{I} \dots B$					
cm.	mm	cm ²	kg	cm.	cm ⁴	cm ⁴	cm. ⁴	cm. ³	$\frac{I}{I}$	cm. ⁴	cm. ³				
1	$\frac{1}{2}$	3	0,82	0,64	1,02	0,24	0,06	0,15	0,15	0,23	1,32	0,83			
		4	1,05	0,82	0,99	0,29	0,08	0,18	0,18	0,22	1,74	1,16			
	2	3	1,12	0,87	1,40	0,62	0,15	0,38	0,27	0,31	3,12	1,56			
		4	1,45	1,13	1,36	0,77	0,19	0,48	0,35	0,31	4,28	2,14			
2	$\frac{1}{2}$	3	1,42	1,11	1,77	1,27	0,31	0,79	0,45	0,41	6,12	2,45			
		4	1,85	1,44	1,74	1,61	0,40	1,00	0,57	0,40	8,24	3,30			
	3	4	2,27	1,77	2,11	2,85	0,76	1,80	0,85	0,48	14,0	4,7			
		6	3,27	2,55	2,04	3,91	1,06	2,48	1,22	0,48	22,0	7,3			
3	$\frac{1}{2}$	4	2,67	2,08	2,50	4,68	1,24	2,96	1,18	0,57	22,4	6,4			
		6	3,87	3,02	2,42	6,50	1,77	4,13	1,71	0,57	34,4	9,8			
	4	4	3,08	2,40	2,88	7,09	1,86	4,47	1,55	0,65	33,2	8,3			
		6	4,48	3,49	2,80	9,98	2,67	6,35	2,27	0,65	51,2	12,8			
4	$\frac{1}{2}$	8	5,80	4,52	2,72	12,4	3,38	7,90	2,90	0,64	69,6	17,4			
		5	4,30	3,36	3,22	12,4	3,25	7,85	2,44	0,73	59,6	13,2			
	7	7	5,86	4,57	3,14	16,4	4,39	10,4	3,31	0,72	84,8	18,8			
		9	7,34	5,73	3,06	19,8	5,40	12,6	4,12	0,72	111,2	24,7			
5	5	5	4,80	3,75	3,60	17,4	4,59	11,0	3,06	0,81	81,6	16,3			
		7	6,56	5,12	3,51	23,1	6,02	14,5	4,13	0,81	116,0	23,2			
	9	8	8,24	6,43	3,44	28,1	7,67	17,9	5,20	0,81	142,0	28,4			
		6	6,31	4,92	3,94	27,4	7,24	17,3	4,39	0,89	131,2	23,9			
6	$\frac{1}{2}$	8	8,23	6,42	3,86	34,8	9,35	22,1	5,73	0,89	176,8	32,1			
		10	10,07	7,85	3,78	41,4	11,27	26,3	6,96	0,89	224,0	40,7			
	6	6	6,91	5,39	4,31	36,1	9,43	22,7	5,27	0,98	170,0	28,3			
		8	9,03	7,04	4,23	46,1	12,1	29,2	6,90	0,98	230,0	38,3			
7	$\frac{1}{2}$	10	11,07	8,63	4,15	55,1	14,6	34,8	8,39	0,97	291,2	48,5			
		7	8,7	6,8	4,65	53,0	13,8	33,4	7,18	1,06	252	38,8			
	9	9	11,0	8,6	4,57	63,4	17,2	41,3	9,4	1,05	328	50,5			
		11	13,2	10,3	4,50	76,8	20,7	48,7	10,82	1,05	404	62,2			
7	7	7	9,4	7,3	5,03	67,1	17,6	42,3	8,41	1,15	316	45,1			
		9	11,9	9,3	4,95	83,1	22,0	52,5	10,61	1,14	408	58,3			
	11	14,3	11,1	4,87	97,6	26,0	62,0	12,73	1,15	504	72,0				

(Seguito della tabella XXXIII).

N.° del profilo o lato della sez.	Spessore	Area della sez.	Peso per m. corr.	Dist. baricentrica	Mom. princ. centrali d'inerzia		Mom. centr. d'inerzia	Mom. resist.	Rapp. buon impiego	Mom. centr. princ. d'inerz.	Mom. resistente				
					Rispetto all'asse							Rispetto all'asse di fless. A A			(rispetto all'asse di fless. B B) per 4 sez. riunite in croce:
					Y Y	Z Z						I_a	W_a	W_a	
					I_y (mass.)	I_z (min.)									
b	d	Ω	Π	v	I_y (mass.)	I_z (min.)	I_a	W_a	W_a	$B \dots$	$\dots B$				
cm.	mm.	cm. ²	kg.	cm.	cm. ⁴	cm. ⁴	cm. ⁴	cm. ³	Π	cm. ⁴	cm. ³				
7 $\frac{1}{2}$	8	11,5	8,9	5,37	93,3	24,4	59,0	11,0	1,23	444	59,2				
	10	14,1	11,0	5,29	113	29,8	71,0	13,4	1,22	560	74,7				
	12	16,7	13,0	5,21	130	34,7	82,5	15,9	1,22	680	90,7				
8	8	12,3	9,6	5,74	115	29,6	72,0	12,5	1,31	540	67,5				
	10	15,1	11,8	5,66	139	35,9	87,5	15,5	1,31	680	85,0				
	12	17,9	13,9	5,59	161	43,0	102	18,2	1,31	824	103,0				
9	9	15,5	12,1	6,46	184	47,8	116	18,0	1,49	864	96,0				
	11	18,7	14,6	6,38	218	57,1	138	21,6	1,48	1064	118,2				
	13	21,8	17,0	6,30	250	65,9	158	25,1	1,48	1268	140,9				
10	10	19,2	14,9	7,18	280	73,3	177	24,7	1,65	1316	132				
	12	22,7	17,7	7,10	328	86,2	207	29,2	1,65	1592	159				
	14	26,2	20,4	7,02	372	98,3	235	33,5	1,64	1872	187				
11	10	21,2	16,5	7,93	379	98,6	239	30,1	1,83	1752	159				
	12	25,1	19,6	7,85	444	116	280	35,7	1,82	2116	192				
	14	29,0	22,6	7,79	505	133	319	41,0	1,81	2484	226				
12	11	25,4	19,8	8,64	541	140	340	39,4	1,99	2504	209				
	13	29,7	23,2	8,56	625	162	393	45,9	1,98	2980	248				
	15	33,9	26,5	8,49	705	186	445	52,4	1,98	3456	288				
13	12	30,0	23,4	9,36	750	194	472	50,4	2,16	3476	267				
	14	34,7	27,0	9,28	857	223	540	58,2	2,16	4080	314				
	16	39,3	30,6	9,20	959	251	604	65,7	2,15	4684	360				
14	13	35,0	27,3	10,08	1014	262	638	63,3	2,32	4700	336				
	15	40,0	31,2	10,00	1148	298	723	72,3	2,32	5452	389				
	17	45,0	35,1	9,92	1276	334	805	81,1	2,31	6216	444				
15	14	40,3	31,4	10,8	1343	347	845	78,2	2,49	6236	416				
	16	45,7	35,7	10,7	1507	391	949	88,7	2,48	7160	477				
	18	51,0	39,9	10,6	1665	438	1052	99,2	2,49	8092	539				
16	15	46,1	35,9	11,5	1745	453	1099	95,6	2,66	8108	507				
	17	51,8	40,4	11,4	1945	506	1225	107,5	2,66	9232	577				
	19	57,5	44,9	11,3	2137	558	1348	119,3	2,66	10360	648				

TABELLA
Sezioni ad angolo

Lunghezze nor-
mas

Il N.º del profilo indica anche i lati b e B
indica che il lato minore b della sezione

Il raggio R è la stesso per le due sezioni
è uguale alla media dei loro spessori. Il
al mezzo mm.) Per es. sotto il N.º del pro-
sori di mm. 7 e mm. 9, si farà:

$$R = \text{mm. } 8$$

Osservazione. — Riguardo al rapporto di
1.º Che esso cresce col crescere dei lati
2.º Che per una medesima sezione esso
l'asse BB , ossia è maggiore quando l'asse
giore;

3.º Che a parità di area della sezione, esso

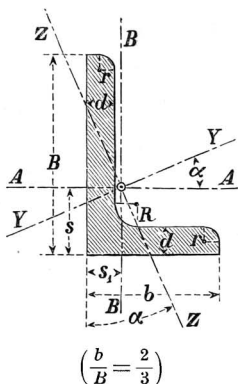


Fig. 97.

N.º del profilo o lati della sez.	Spessore	Area della sez.	Peso per m. corr.	Dist. del baricentro dai lati		Direz. asse princ. centr. d'inert. Y Y
				s	s ₁	
b c B	d	Ω	Π	cm.	cm.	tang α
cm.	mm.	cm ²	kg.	cm.	cm.	
Profili						
2/3	3	1,42	1,11	0,99	0,49	0,4216
	4	1,85	1,44	1,03	0,54	0,4214
3/4 1/2	4	2,87	2,24	1,48	0,74	0,4334
	5	3,53	2,75	1,52	0,78	0,4228
4/6	5	4,79	3,74	1,95	0,97	0,4319
	7	6,55	5,11	2,04	1,05	0,4275
5/7 1/2	7	8,33	6,50	2,47	1,24	0,4304
	9	10,5	8,20	2,56	1,32	0,4272
6 1/2/10	9	14,2	11,0	3,31	1,59	0,4101
	11	17,1	13,3	3,40	1,67	0,4074

XXXIV.

a lati disuguali.

mali m. $4 \div 8$

sime „ 12

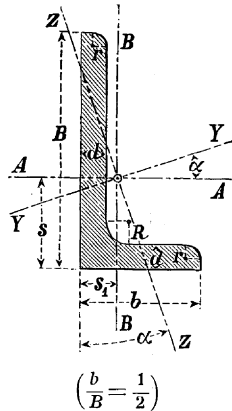
della sezione in cm.. Così il profilo $\frac{5}{7} \frac{1}{2}$ è di 5 cm., e il maggiore B di cm. 7,5. corrispondenti a ciascun N.º del profilo, ed raggio r dev'essere la metà di R (rotondando filo $\frac{5}{7} \frac{1}{2}$ essendovi due sezioni cogli spes-

$$r = \text{mm. } 4$$

buon impiego risulta da questa tabella :
della sezione ;

è sempre maggiore per l'asse A A che per di flessione è perpendicolare al lato mag-

è maggiore per il tipo indicato nella fig. 98.



$$\left(\frac{b}{B} = \frac{1}{2} \right)$$

Fig. 98.

Mom. princ. centr. d'inertz. rispetto all'asse		Mom. centr. d'inertz.	Mom. resist.	Rapp. buon impiego	Mom. princ. centr. d'inertz. rispetto all'asse		Mom. resist.	Rapp. buon impiego
Y Y	Z Z				rispetto all'asse B B			
I_y (mass.)	I_z (min.)	I_z	W_b	$\frac{W_b}{\Pi}$	I_a	W_a	$\frac{W_a}{\Pi}$	
cm. ⁴	cm. ⁴	cm. ⁴	cm. ³		cm. ⁴	cm. ³		
<i>b : B = 2 : 3</i>								
1,42	0,28	0,45	0,30	0,27	1,25	0,62	0,56	
1,82	0,33	0,55	0,38	0,26	1,60	0,82	0,57	
6,63	1,19	2,05	0,91	0,40	5,77	1,91	0,85	
8,01	1,44	2,46	1,11	0,40	6,99	2,35	0,85	
19,8	3,66	6,20	2,05	0,55	17,3	4,27	1,14	
26,3	4,63	8,10	2,75	0,54	22,8	5,76	1,13	
53,1	9,58	16,4	4,36	0,67	46,3	9,20	1,42	
65,4	11,9	20,1	5,46	0,67	57,2	11,6	1,41	
160	26,8	46,6	9,49	0,86	140	20,9	1,90	
189	32,9	55,3	11,4	0,86	167	25,3	1,90	

(Seguito della tabella XXXIV).

N.º del profilo o lati della sez	Spessore	Area della sez.	Peso per m corr.	Dist. del baricentro dai lati		Direz. asse princ. centr. d'inerzia Y Y
				s	s ₁	
b e B cm.	d mm	Ω cm.²	ll kg.	s cm	s ₁ cm.	tang α
8 / 12	10	19,1	14,9	3,92	1,95	0,4348
	12	22,7	17,7	4,00	2,02	0,4304
10 / 15	12	28,7	22,1	4,89	2,42	0,4361
	14	33,2	25,9	4,97	2,50	0,4339
Profili						
2 / 1	3	1,72	1,34	1,43	0,44	0,2575
	4	2,25	1,76	1,47	0,48	0,2528
3 / 6	5	4,29	3,35	2,15	0,68	0,2544
	7	5,85	4,56	2,24	0,76	0,2479
4 / 8	6	6,89	5,37	2,85	0,88	0,2568
	8	9,01	7,03	2,94	0,96	0,2518
5 / 10	8	11,5	8,93	3,59	1,12	0,2565
	10	14,1	11,0	3,67	1,20	0,2658
6 $\frac{1}{2}$ / 13	10	18,6	14,5	4,65	1,45	0,2569
	12	22,1	17,2	4,75	1,53	0,2549
8 / 16	12	27,5	21,5	5,72	1,77	0,2586
	14	31,8	24,8	5,81	1,85	0,2679
10 / 20	14	40,3	31,4	7,12	2,18	0,2608
	16	45,7	35,6	7,20	2,26	0,2586

Mom. princ. centr. d'inertz. rispetto all'asse		Mom. centr. d'inertz.	Mom. resist.	Rapp. buon impiego	Mom. centr. d'inertz.	Mom. resist.	Rapp. buon impiego
Y Y	Z Z	rispetto all'asse B B			rispetto all'asse A A		
I_y (mass.) cm. ⁴	I_z (min.) cm. ⁴	I_x cm. ⁴	W_b cm. ³	$\frac{W_b}{\Pi}$	I_a cm. ⁴	W_a cm. ³	$\frac{W_a}{\Pi}$
317	56,8	979	16,2	1,09	276	34,2	2,29
370	67,5	115	19,2	1,09	323	40,4	2,28
747	134	232	30,6	1,37	649	64,2	2,87
854	153	263	35,1	1,35	744	74,2	2,86
b : B = 1 : 2							
2,96	0,31	0,46	0,29	0,22	2,81	1,09	0,81
3,78	0,40	0,60	0,39	0,22	3,58	1,42	0,80
16,5	1,71	2,61	1,13	0,34	15,6	4,05	1,21
21,8	2,28	3,42	1,53	0,33	20,6	5,48	1,20
47,6	4,99	7,66	2,46	0,46	44,9	8,72	1,62
60,8	6,41	9,70	3,19	0,45	57,5	11,4	1,62
123	12,8	19,6	5,01	0,56	116	18,1	2,03
150	14,6	23,5	6,18	0,56	141	22,3	2,02
339	35,4	54,4	10,8	0,74	320	38,3	2,64
395	41,3	62,8	12,6	0,73	374	45,3	2,63
762	79,4	122	19,6	0,91	719	69,9	3,25
875	86,0	139	22,6	0,91	822	80,7	3,25
1754	182	282	36,1	1,15	1654	128,4	4,09
1973	205	315	40,7	1,14	1863	145,5	4,09

TABELLA XXXV.

Sezione a T .

Lunghezze normali m. 4 ÷ 8
massime „ 12 .

Il N.º del profilo indica, in cm., col numeratore la lunghezza b della tavola. e col denominatore l'altezza h della sezione.

I raggi R , r e ρ degli arrotondamenti sono dati dalle

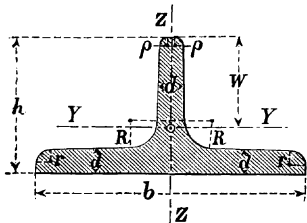
$$R = d, \quad r = 0,5 d, \quad \rho = 0,25 d \text{ (} r \text{ e } \rho \text{ rotondati al mezzo mm.)}$$

Le inclinazioni delle linee di ciascun profilo sono:

nei profili $b : h = 2 : 1$ } per l'anima 4 ‰
 } la tavola 2 ‰

Fig. 99.

nei profili $b : h = 1 : 1$ tanto per l'anima che per la tavola 2 ‰.



$b : h = 2 : 1$

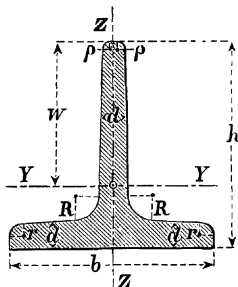


Fig. 100.

$b : h = 1 : 1$

Lo spessore d è alla distanza $\frac{h}{2}$ o $\frac{b}{4}$ dagli estremi.

Osservazione. — Anche qui il coefficiente di *buon impiego* cresce col crescere dei lati della sezione, ed è maggiore pei profili $b : h = 2 : 1$.

N.º del prof. lati della sez.	Spessore	Area della sez.	Peso per m. corr.	Dist. del baricentro	per l'asse di flessione Y Y			per l'asse di flessione Z Z		
					Mom. inerz. (princ. centr.)	Mom. resist.	Rapporto buon impiego	Mom. inerz. (princ. centr.)	Mom. resist.	Rapporto buon impiego
b e h cm.	d mm.	Ω cm. ²	Π kg.	w cm.	I_y cm. ⁴	W_y cm. ³	$\frac{W_y}{\Pi}$	I_z cm. ⁴	W_z cm. ³	$\frac{W_z}{\Pi}$

Profili $b : h = 2 : 1$

6/3	5,5	4,64	3,62	2,33	2,58	1,11	0,31	8,62	2,87	0,80
$7\frac{1}{2}$	6	5,94	4,63	2,73	4,49	1,64	0,36	15,1	4,73	1,02
8/4	7	7,91	6,17	3,12	7,81	2,50	0,41	28,5	7,12	1,15
$9\frac{1}{2}$	8	10,2	7,93	3,50	12,7	3,63	0,46	46,1	10,2	1,29
10/5	8,5	12,0	9,38	3,91	18,7	4,78	0,51	67,7	13,5	1,44
12/6	10	17,0	13,2	4,70	38,0	8,09	0,61	137	22,8	1,73
14/7	11,5	22,8	17,8	5,49	68,9	12,6	0,71	258	36,9	2,07
16/8	13	29,5	23,0	6,28	11,7	18,6	0,81	422	52,8	2,29
18/9	14,5	37,0	28,8	7,07	18,5	26,2	0,91	670	74,4	2,58
20/10	16	45,4	35,4	7,86	27,7	35,2	1,00	1000	100	2,82

Profili $b : h = 1 : 1$

2/2	3	1,12	0,87	1,42	0,38	0,27	0,31	0,20	0,20	0,23
$2\frac{1}{2}$	3,5	1,64	1,28	1,77	0,87	0,49	0,39	0,43	0,34	0,27
3/3	4	2,26	1,76	2,15	1,72	0,80	0,45	0,87	0,58	0,33
$3\frac{1}{2}$	4,5	2,97	2,32	2,51	3,10	1,24	0,53	1,57	0,90	0,39
4/4	5	3,77	2,94	2,88	5,28	1,84	0,62	2,58	1,29	0,44
$4\frac{1}{2}$	5,5	4,67	3,64	3,24	8,13	2,51	0,69	4,01	1,78	0,49
5/5	6	5,66	4,42	3,61	12,1	3,35	0,76	6,06	2,41	0,55
6/6	7	7,94	6,19	4,34	23,8	5,48	0,89	12,2	4,07	0,66
7/7	8	10,6	8,27	5,06	44,5	8,79	1,06	22,1	6,71	0,81
8/8	9	13,6	10,6	5,78	73,7	12,8	1,21	37,0	9,25	0,87
9/9	10	17,1	13,3	6,52	119	18,3	1,37	58,5	13,0	0,98
10/10	11	20,9	16,3	7,26	179	24,7	1,51	88,3	17,7	1,08
12/12	13	29,6	23,1	8,72	366	42,0	1,82	178	29,7	1,28
14/14	15	39,9	31,1	10,20	660	64,7	2,08	330	47,1	1,52

TABELLA XXXVI.

Sezione a Ω .

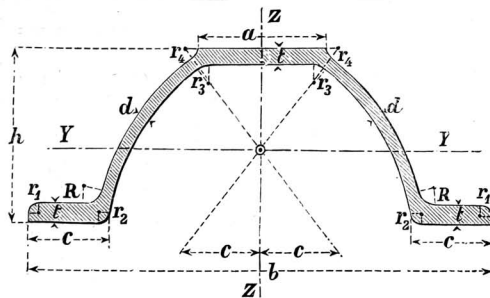
Lunghezze normali m. 4 ÷ 8
 „ massime „ 12.

Il N.º del profilo indica in cm. l'altezza h della sezione.

I raggi — in mm. — degli arrotondamenti sono

$$R = r_3 = t, \quad r_1 = d, \\ r_2 = d - 0,5, \quad r_4 = 0,6 d - 1,3.$$

Per queste sezioni non si è indicata la posizione del centro di gravità, perchè esso cade quasi esattamente alla metà dell'altezza.

Fig 101. $b = 2h + 20$ mm.

N.º del prof. o altezza della sez.	Larghezze			Spessori		Area della sez. Ω	Peso per m. corr. Π	Mom. inerz. I_y	Mom. resist. W_y	Rapp. buon impiego W_y	Mom. inerz. I_z	Mom. resist. W_z	Rapp. buon impiego W_z							
	h	b	a	c	t									d	Rispetto $Y Y$			Rispetto $Z Z$		
															cm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.
5	120	33	21	5	3	6,71	5,24	23,2	9,27	1,8	86,4	14,4	2,75							
6	140	38	24	6	3,5	9,34	7,28	47,2	15,8	2,2	164	23,4	3,21							
7 $\frac{1}{2}$	170	45,5	28,5	7	4	13,2	10,3	105	27,9	2,1	347	40,8	3,96							
9	200	53	33	8	4,5	17,9	14,0	206	45,8	3,3	651	65,1	4,65							
11	240	63	39	9	5	24,1	18,8	421	76,5	4,1	1272	106	5,64							

TABELLA XXXVII.

Sezione a Z.

Lunghezze normali m. 4 ÷ 8
 „ massime „ 12 .

Il N.º del profilo indica in cm. l'altezza h della sezione.
 Raggi dei raccordi

$$R = t, \quad r = 0,5 t \text{ (rotondando al mezzo mm.)}$$

Non si è considerata nella presente tabella la resistenza dei ferri a Z anche rispetto ad un asse di flessione perpendicolare ad AA , perchè questo caso non si presenta quasi mai in pratica.

Anche per questa sezione il rapporto di *buon impiego* cresce rapidamente col crescere delle dimensioni della sezione.

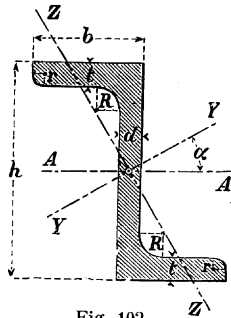


Fig. 102.

N.º del prof. o altezza della sez.	Largh. b	Spessori		Area della sez. Ω	Peso per m. corr. Π	Direz. asse princ. centr. d'inertz. YY	Mom. princ centr. d'inertz. rispetto all'asse		Mom. centr. d'inertz. I_a	Mom. resist. W_a	Rapp. buon impiego
		d	t				rispetto all'asse				
							YY	ZZ			
h	b	d	t	Ω	Π	YY	ZZ	I_a	W_a	W_a	
cm.	mm.	mm.	mm.	cm. ²	kg.	tang α	I_y (mass.) cm. ⁴	I_y (min.) cm. ⁴	cm. ⁴	cm. ³	Π
3	38	4	4,5	4,32	3,37	1,655	18,1	1,54	5,94	3,96	1,18
4	40	4,5	5	5,43	4,23	1,181	28,0	3,05	13,4	6,70	1,58
5	43	5	5,5	6,77	5,28	0,939	44,9	5,23	25,7	10,3	1,95
6	45	5	6	7,91	6,17	0,779	67,2	7,60	44,0	14,7	2,38
8	50	6	7	11,1	8,67	0,588	142	14,7	108	27,0	3,11
10	55	6,5	8	14,5	11,3	0,492	270	24,6	220	44,0	3,89
12	60	7	9	18,2	14,2	0,433	470	37,7	400	66,7	4,69
14	65	8	10	22,9	17,9	0,385	768	56,4	671	95,9	5,36
16	70	8,5	11	27,5	21,5	0,357	1184	79,5	1055	131,9	6,13
18	75	9,5	12	33,3	26,0	0,329	1759	110	1594	177,1	6,81
20	80	10	13	38,7	30,2	0,313	2509	147	2289	228,9	7,58

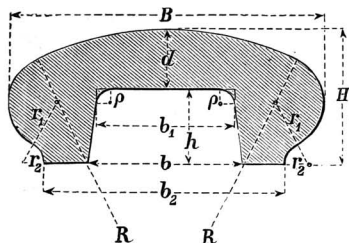


Fig. 105.

TABELLA XXXIX.

Sezione a Corrimano.

Lunghezze normali m. 4 ÷ 8

„ massime „ 12.

Il N.º del profilo indica la larghezza B — in cm. — della sezione.
Relazioni proporzionali fra i diversi elementi — in mm. — della sezione (B in mm.):

$$H = 0,45 B, \quad b = 0,5 B,$$

$$h = 0,25 B, \quad b_1 = H,$$

$$d = 0,2 B, \quad b_2 = \frac{3}{2} b.$$

Raggi — in mm. — dei raccordi (B in mm.):

$$R = B, \quad r_1 = 0,15 B,$$

$$r_2 = 0,1 B, \quad \rho = 0,05 B.$$

Dalle relazioni riportate risulta che l'altezza H è uguale a $\frac{45}{100}$ della larghezza B , donde segue che questa è uguale all'altezza moltiplicata pel numero 2,222

N.º del prof. o largh della sez.	Dimensioni principali			Area della sez. Ω cm ²	Peso per m. corr. Π kg.	
	B cm.	H mm.	b mm.			h mm.
4		18	20	10	4,20	3,28
6		27	30	15	9,46	7,38
8		36	40	20	16,8	13,1
10		45	50	25	26,3	20,5
12		54	60	30	37,8	29,5

Profili nuovi.

SANDRINELLI.	3	33	5	7	5,44	4,24	2,09	6,39	4,3	1,0	5,33	2,6	0,60	1,69
	4	35	5	7	6,21	4,85	2,17	14,1	7,1	1,5	6,68	3,1	0,63	2,35
	5	38	5	7	7,12	5,55	2,43	26,4	10,6	1,9	9,12	3,8	0,67	2,83
	6 ¹ / ₂	42	5,5	7,5	9,03	7,05	2,78	57,5	17,7	2,5	14,1	5,1	0,72	3,49
	8	45	6	8	11,0	8,60	3,05	106	26,5	3,1	19,4	6,4	0,74	4,17
	10	50	6	8,5	13,5	10,5	3,45	206	41,1	3,9	29,3	8,5	0,81	4,84
	12	55	7	9	17,0	13,3	3,90	364	60,8	4,6	43,2	11,1	0,83	5,48
	14	60	7	10	20,4	15,9	4,25	605	86,4	5,4	62,7	14,8	0,93	5,86
	16	65	7,5	10,5	24,0	18,7	4,66	925	116	6,2	85,3	18,3	0,98	6,34
	18	70	8	11	28,0	21,8	5,08	1354	150	6,9	114	22,4	1,03	6,68
	20	75	8,5	11,5	32,2	25,1	5,49	1911	191	7,6	148	27,0	1,07	7,07
	22	80	9	12,5	37,4	29,2	5,86	2690	245	8,4	197	33,6	1,15	7,29
	24	85	9,5	13	42,3	33,0	6,27	3598	300	9,1	248	39,6	1,20	7,50
26	90	10	14	48,3	37,7	6,64	4823	371	9,8	317	47,7	1,27	7,77	
28	95	10	15	53,3	41,6	6,97	6276	450	10,8	399	57,2	1,38	7,86	
30	100	10	16	58,8	45,8	7,30	8026	535	11,7	495	67,8	1,48	7,89	

Profili vecchi.

10 ¹ / ₂	65	8	8	17,3	13,5	4,62	287	54,7	4,1	61,2	13,2	0,98	4,13
11 ³ / ₄	65	10	10	22,6	17,6	4,59	447	76,1	4,3	77,1	16,8	0,95	4,53
14 ¹ / ₂	60	8	8	19,8	15,4	4,50	585	80,7	5,2	53,6	11,9	0,77	6,78
23 ¹ / ₂	90	10	12	42,4	33,1	6,72	3429	292	8,8	272	43,7	1,32	6,68
26	90	10	10	41,6	32,5	7,03	3900	300	9,2	237	33,7	1,04	8,90
30	75	10	10	42,8	33,3	6,00	4925	328	9,8	145	24,2	0,73	13,55

TABELLA XLI.

Sezione a C .

(Vedi Fig. 106 nella pag. 176).

Carichi e frecce di flessione delle travi di ferro o d'acciaio, con sezione C , disposte col loro asse orizzontale, semplicemente appoggiate per le estremità e cariche d'un peso $q l$ uniformemente distribuito su tutta la loro lunghezza l . (Si suppone che l'asse di flessione sia $Y Y$).

Es. — Un ferro a C deve impiegarsi come trave orizzontale fra due appoggi distanti m. 7,50, e deve sopportare un carico uniformemente distribuito di kg. 260 per m. corr.: cercasi qual N.° del profilo dev'essere adottare, volendo che il massimo sforzo del ferro non superi 8 kg. per mm.².

Si ha $q l^2 = 260 \times 7,50^2 = 14625$, il qual numero nella prima delle colonne relative ad $R = 8$ è compreso fra quelli corrispondenti ai profili 20 e 22. Bisognerà dunque adottare il N.° 22 cui corrisponde $q l^2 = 15680$.

La freccia d'inflessione sarà $f = \frac{14625}{15680} \cdot 0,378 \cdot 7,50^2 = 20$ mm.

N.° del prof.	Peso per m. corr.	Mom. resist. per $R = 1$ per mm. ²	$R = 6$ kg. per mm. ²		$R = 8$ kg. per mm. ²		$R = 10$ kg. per mm. ²		$R = 12$ kg. per mm. ²	
			Prodotto $q l^2$	Freccia di fless. nel mezzo	Prodotto $q l^2$	Freccia di fless. nel mezzo	Prodotto $q l^2$	Freccia di fless. nel mezzo	Prodotto $q l^2$	Freccia di fless. nel mezzo
			$8 M$	f	$8 M$	f	$8 M$	f	$8 M$	f
h	W	W	kg./m.	mm.	kg m.	mm.	kg./m.	mm.	kg /m.	mm.
3	4,24	4,3	206	2,083 l^2	275	2,778 l^2	344	3,472 l^2	413	4,167 l^2
4	4,85	7,1	341	1,563 l^2	454	2,083 l^2	568	2,604 l^2	682	3,125 l^2
5	5,55	10,6	509	1,250 l^2	678	1,667 l^2	848	2,083 l^2	1018	2,500 l^2

6 ¹ / ₂	7,05	17,7	850	0,962 ^l 2	1133	1,282 ^l 2	1416	1,603 ^l 2	1699	1,923 ^l 2
8	8,60	26,5	1272	0,781 ^l 2	1696	1,042 ^l 2	2120	1,302 ^l 2	2544	1,563 ^l 2
10	10,5	41,1	1973	0,625 ^l 2	2630	0,833 ^l 2	3288	1,042 ^l 2	3946	1,250 ^l 2
12	13,3	60,7	2914	0,521 ^l 2	3885	0,694 ^l 2	4856	0,867 ^l 2	5827	1,041 ^l 2
14	15,9	86,4	4147	0,446 ^l 2	5530	0,595 ^l 2	6912	0,744 ^l 2	8294	0,892 ^l 2
16	18,7	116	5568	0,391 ^l 2	7424	0,521 ^l 2	9280	0,651 ^l 2	11136	0,782 ^l 2
18	21,8	150	7200	0,347 ^l 2	9600	0,463 ^l 2	12000	0,579 ^l 2	14400	0,694 ^l 2
20	25,1	191	9168	0,313 ^l 2	12224	0,417 ^l 2	15280	0,522 ^l 2	18316	0,626 ^l 2
22	29,2	245	11760	0,284 ^l 2	15680	0,378 ^l 2	19600	0,473 ^l 2	23520	0,568 ^l 2
26	37,7	371	17808	0,240 ^l 2	23744	0,320 ^l 2	29680	0,400 ^l 2	35616	0,480 ^l 2
30	45,8	535	25680	0,208 ^l 2	34240	0,227 ^l 2	42800	0,347 ^l 2	51360	0,416 ^l 2
10 ¹ / ₂	13,5	54,7	2626	0,595 ^l 2	3501	0,794 ^l 2	4376	0,992 ^l 2	5249	1,190 ^l 2
11 ³ / ₄	17,6	76,1	3653	0,531 ^l 2	4870	0,708 ^l 2	6088	0,885 ^l 2	7306	1,062 ^l 2
14 ¹ / ₂	15,4	80,7	3874	0,431 ^l 2	5165	0,575 ^l 2	6456	0,719 ^l 2	7747	0,863 ^l 2
23 ¹ / ₂	33,1	292	14016	0,266 ^l 2	18688	0,355 ^l 2	23360	0,443 ^l 2	28032	0,532 ^l 2
26	32,5	300	14400	0,240 ^l 2	19200	0,320 ^l 2	24000	0,400 ^l 2	28800	0,480 ^l 2
30	33,3	328	15744	0,208 ^l 2	20992	0,277 ^l 2	26240	0,347 ^l 2	31488	0,416 ^l 2

TABELLA XLII.

Sezione a doppio T.

Lunghezze normali m. 4 ÷ 10

„ massime „ 14.

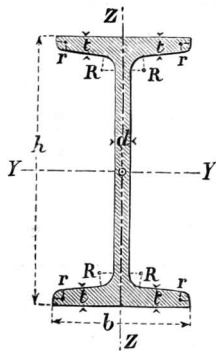


Fig. 107.

Anche per questa forma di sezione, il N.º del profilo indica in cm. l'altezza h della sezione.

Raggi dei raccordi

$$R = d, \quad r = 0,6 d.$$

L'inclinazione delle linee delle tavole di ciascun profilo è del 14 %.

Lo spessore t è alla distanza $\frac{b}{4}$ dagli estremi.

Si ha $t = 1,5 d$ circa.

Il rapporto di buon impiego cresce rapidamente, soprattutto quando è YY l'asse di flessione, col crescere dell'altezza della sezione.

Confrontando poi i momenti resistenti, o i rapporti di buon impiego, rispetto all'asse YY con quelli relativi all'asse ZZ vedesi che i primi sono sempre per le stesse sezioni, molto maggiori degli ultimi.

N.º del prof. o altezza della sez.	Larghezza	Spessori		Area della sez.	Peso per m. corr.	Rispetto YY			Rispetto ZZ		
		d	t			Ω	II	Mom. inerz. (princ. centr.)	Mom. resist.	Rapp. buon impiego	Mom. inerz. (princ. centr.)
h	b	d	t	Ω	II	I_y	W_y	$\frac{W_y}{I_y}$	I_z	W_z	$\frac{W_z}{I_z}$
cm.	mm.	mm.	mm.	cm. ²	kg.	cm. ⁴	cm. ³	II	cm. ⁴	cm. ³	II

8	42	3,9	5,9	7,57	5,9	77,7	19,4	3,29	6,3	2,99	0,51
9	46	4,2	6,3	8,99	7,0	117	25,9	3,70	8,8	3,81	0,54
10	50	4,5	6,8	10,6	8,3	170	34,1	4,11	12,2	4,86	0,59
11	54	4,8	7,2	12,3	9,6	238	43,3	4,51	16,2	5,99	0,62
12	58	5,1	7,7	14,2	11,1	327	54,5	4,91	21,4	7,33	0,66
13	62	5,4	8,1	16,1	12,6	435	67,0	5,32	27,4	8,85	0,70
14	66	5,7	8,6	18,2	14,2	572	81,7	5,75	35,2	10,7	0,75
15	70	6,0	9,0	20,4	15,9	734	97,9	6,16	43,7	12,5	0,79
16	74	6,3	9,5	22,8	17,8	933	117	6,52	54,5	14,7	0,83
17	78	6,6	9,9	25,2	19,7	1165	137	6,95	66,5	17,1	0,87
18	82	6,9	10,4	27,9	21,7	1444	161	7,42	81,3	19,8	0,91
19	86	7,2	10,8	30,5	23,8	1759	185	7,82	97,2	22,6	0,95
20	90	7,5	11,3	33,4	26,1	2139	214	8,20	117	26,0	0,99
21	94	7,8	11,7	36,3	28,3	2554	244	8,62	137	29,3	1,04
22	98	8,1	12,2	39,5	30,8	3055	278	9,03	163	33,3	1,08
23	102	8,4	12,6	42,6	33,3	3605	314	9,43	188	36,9	1,11
24	106	8,7	13,1	46,1	35,9	4239	353	9,83	220	41,6	1,16
25	110	9,0	13,6	49,7	38,7	4954	396	10,23	255	46,4	1,20
26	113	9,4	14,1	53,3	41,6	5735	441	10,60	287	50,6	1,21
27	116	9,7	14,7	57,1	44,5	6623	491	11,03	325	56,0	1,24
28	119	10,1	15,2	61,0	47,6	7575	541	11,37	363	60,8	1,28
29	122	10,4	15,7	64,8	50,6	8619	594	11,74	403	66,1	1,31
30	125	10,8	16,2	69,0	53,8	9785	652	12,12	449	71,9	1,34
32	131	11,5	17,3	77,7	60,6	12493	781	12,89	554	84,0	1,39
34	137	12,2	18,3	86,7	67,6	15670	922	13,64	672	98,1	1,45
36	143	13,0	19,5	97,0	75,7	19576	1088	14,37	817	114	1,51
38	149	13,7	20,5	107	83,4	23978	1262	15,11	972	131	1,57
40	155	14,4	21,6	118	91,8	29173	1459	15,89	1160	150	1,63
42 ^{1/2}	163	15,3	23,0	132	103	36956	1739	16,88	1433	176	1,71
45	170	16,2	24,3	147	115	45888	2040	17,74	1722	203	1,77
47 ^{1/2}	178	17,1	25,6	163	127	56410	2375	18,70	2084	234	1,84
50	185	18,0	27,0	179	140	68736	2750	19,64	2470	267	1,91
55	200	19,0	30,0	212	166	99054	3602	21,70	3486	349	2,10

8	5,9	19,4	931	0,781 ^{l2}	1242	1,042 ^{l2}	1552	1,302 ^{l2}	1862	1,563 ^{l2}	
9	7,0	25,9	1243	0,694 ^{l2}	1658	0,926 ^{l2}	2072	1,157 ^{l2}	2486	1,389 ^{l2}	
10	8,3	34,1	1637	0,625 ^{l2}	2182	0,833 ^{l2}	2728	1,042 ^{l2}	3274	1,250 ^{l2}	
11	9,6	43,3	2078	0,568 ^{l2}	2771	0,757 ^{l2}	3464	0,946 ^{l2}	4157	1,136 ^{l2}	
12	11,1	54,5	2616	0,521 ^{l2}	3488	0,694 ^{l2}	4360	0,867 ^{l2}	5232	1,041 ^{l2}	
13	12,6	67,0	3216	0,481 ^{l2}	4288	0,641 ^{l2}	5360	0,801 ^{l2}	6432	0,962 ^{l2}	
14	14,2	81,7	3922	0,446 ^{l2}	5029	0,595 ^{l2}	6536	0,744 ^{l2}	7843	0,892 ^{l2}	
15	15,9	97,8	4699	0,417 ^{l2}	6266	0,556 ^{l2}	7832	0,695 ^{l2}	9398	0,834 ^{l2}	
16	17,8	117	5616	0,391 ^{l2}	7568	0,521 ^{l2}	9360	0,651 ^{l2}	11232	0,728 ^{l2}	
17	19,7	137	6576	0,368 ^{l2}	8768	0,490 ^{l2}	10960	0,613 ^{l2}	13152	0,736 ^{l2}	
18	21,7	161	7728	0,347 ^{l2}	10304	0,463 ^{l2}	12880	0,579 ^{l2}	15456	0,694 ^{l2}	
19	23,8	185	8880	0,329 ^{l2}	11840	0,438 ^{l2}	14800	0,547 ^{l2}	17760	0,657 ^{l2}	
20	26,1	214	10272	0,313 ^{l2}	13696	0,417 ^{l2}	17120	0,522 ^{l2}	20544	0,626 ^{l2}	
21	28,3	244	11712	0,298 ^{l2}	15616	0,397 ^{l2}	19520	0,496 ^{l2}	23424	0,596 ^{l2}	
22	30,8	278	13344	0,284 ^{l2}	17792	0,378 ^{l2}	22240	0,473 ^{l2}	26688	0,568 ^{l2}	
23	33,3	314	15072	0,272 ^{l2}	20096	0,362 ^{l2}	25120	0,453 ^{l2}	30144	0,544 ^{l2}	
24	35,9	353	16944	0,261 ^{l2}	22592	0,348 ^{l2}	28240	0,435 ^{l2}	33888	0,522 ^{l2}	
26	41,6	441	21168	0,240 ^{l2}	28224	0,320 ^{l2}	35280	0,400 ^{l2}	42336	0,480 ^{l2}	
28	47,6	541	25968	0,223 ^{l2}	34624	0,297 ^{l2}	43280	0,372 ^{l2}	51936	0,446 ^{l2}	
30	53,8	652	31296	0,208 ^{l2}	41728	0,277 ^{l2}	52160	0,347 ^{l2}	64592	0,416 ^{l2}	
32	60,6	781	37488	0,195 ^{l2}	49984	0,260 ^{l2}	62480	0,325 ^{l2}	74976	0,390 ^{l2}	
34	67,6	922	44256	0,184 ^{l2}	59008	0,245 ^{l2}	73760	0,306 ^{l2}	88512	0,368 ^{l2}	
36	75,7	1088	52224	0,174 ^{l2}	69632	0,232 ^{l2}	87040	0,290 ^{l2}	104448	0,348 ^{l2}	
38	83,4	1262	60576	0,164 ^{l2}	80768	0,218 ^{l2}	100960	0,273 ^{l2}	121152	0,328 ^{l2}	
40	91,8	1459	70032	0,156 ^{l2}	93367	0,208 ^{l2}	116720	0,260 ^{l2}	140064	0,312 ^{l2}	
42	$\frac{1}{2}$	103	1739	83472	0,147 ^{l2}	111296	0,196 ^{l2}	139120	0,245 ^{l2}	166944	0,294 ^{l2}
45		115	2040	97920	0,139 ^{l2}	130560	0,185 ^{l2}	163200	0,232 ^{l2}	195840	0,278 ^{l2}
47	$\frac{1}{2}$	127	2375	114000	0,132 ^{l2}	152000	0,176 ^{l2}	190000	0,220 ^{l2}	228000	0,264 ^{l2}
50		140	2750	132000	0,125 ^{l2}	176000	0,166 ^{l2}	220000	0,208 ^{l2}	264000	0,250 ^{l2}

Ferri della Società degli Alti Forni, Fonderie e Acciaierie di Terni.

TABELLA XLIV.

Travi a I.

(Vedi Fig. 107 a pagina 180).

Altezza della sez.	Larghezza	Spessori		Area della sez.	Peso per m. corr.	Mom. resist. rispetto Y Y	Freccia di fless. nel mezzo per il mass carico	$R = 8 \text{ kg. per mm.}^2$ Carico Q , in kg., che si può uniformemente distribuire sull'intera portata l (in m.) =									
								m	m	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
h	b	d	t	Ω	Π	W_y	f	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
mm.	mm.	mm.	mm.	mm. ²	kg.	mm. ³	mm.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.	kg.
80	38,5	4	7,5	821	6,40	20710	0,832	441	332	—	—	—	—	—	—	—	—
80	40,5	6	"	921	7,65	22842		487	366	292	—	—	—	—	—	—	—
80	42,5	8	"	1141	8,90	24974		533	400	320	—	—	—	—	—	—	—
80	44	9,5	"	1261	9,85	26574		568	425	340	—	—	—	—	—	—	—

100	41,5	4,5	8,25	1042	8,15	32402	0,665	692	519	415	346	—	—	—	—	—	—	—	—
100	43	6	"	1192	9,32	34901		744	558	447	372	—	—	—	—	—	—	—	—
100	45	8	"	1392	10,88	38233		816	612	489	408	—	—	—	—	—	—	—	—
100	47	10	"	1592	12,45	41566		888	665	532	444	—	—	—	—	—	—	—	—
120	43,5	5	9,25	1274	9,95	46543	0,553	993	745	596	497	427	—	—	—	—	—	—	—
120	45,5	7	"	1514	11,82	51346		1095	822	657	549	467	—	—	—	—	—	—	—
120	47,5	9	"	1754	13,70	56148		1198	898	719	601	511	—	—	—	—	—	—	—
120	49	10,5	"	1934	15,10	59750		1275	956	765	637	547	478	—	—	—	—	—	—
140	47,25	5,5	10,25	1605	12,55	63090	0,476	1453	1089	872	727	624	545	—	—	—	—	—	—
140	49,75	8	"	1955	15,28	76253		1626	1220	976	816	694	610	541	—	—	—	—	—
140	51,75	10	"	2235	17,46	82784		1766	1325	1060	886	753	662	588	—	—	—	—	—
140	53,25	11,5	"	2445	19,10	87682		1872	1404	1123	936	803	703	623	561	—	—	—	—
160	52	6	11	1972	15,38	95701	0,416	2043	1532	1225	1021	876	767	680	613	—	—	—	—
160	54	8	"	2292	17,88	104231		2223	1668	1334	1115	949	834	740	667	—	—	—	—
160	56	10	"	2612	20,38	112761		2405	1804	1443	1207	1026	902	801	722	654	—	—	—
160	57,5	11,5	"	2852	22,24	119158		2544	1907	1525	1272	1091	953	847	763	695	—	—	—
180	55,5	6	11,75	2169	16,92	118444	0,369	2358	1896	1516	1264	1184	948	841	759	691	632	—	—
180	57,5	8	"	2529	19,73	129240		2757	2068	1654	1383	1176	1034	918	827	750	689	—	—
180	59,5	10	"	2889	22,54	140036		2987	2241	1792	1498	1274	1120	994	896	812	746	—	—
180	61,5	12	"	3249	25,34	150831		3217	2413	1931	1614	1373	1207	1071	965	875	804	—	—
180	63,5	14	"	3609	28,15	161627		3451	2587	2069	1725	1480	1293	1148	1035	941	863	—	—
200	57,5	6,5	12,5	2524	19,69	151274	0,333	3229	2421	1936	1615	1385	1211	1075	968	881	808	—	—
200	59	8	"	2824	22,03	161270		3440	2580	2064	1726	1468	1290	1145	1032	935	860	—	—
200	61	10	"	3224	25,15	174598		3724	2794	2235	1868	1589	1397	1240	1117	1013	931	—	—
200	63	12	"	3624	28,27	187926		4008	3007	2405	2011	1710	1503	1334	1203	1090	1002	—	—
200	65	14	"	4024	31,39	201254		4296	3220	2576	2148	1843	1611	1431	1288	1172	1075	—	—
220	61,5	7	13,25	2903	22,64	189017	0,303	4035	3025	2420	2017	1731	1513	1343	1211	1101	1009	—	—
220	63,5	9	"	3343	26,07	205144		4376	3282	2626	2195	1867	1641	1457	1313	1190	1093	—	—
220	65,5	11	"	3783	29,50	221270		4720	3540	2832	2368	2014	1770	1571	1416	1283	1179	—	—
220	67,5	13	"	4223	32,94	237397		5064	3798	3039	2540	2160	1899	1686	1519	1377	1265	—	—
220	69	14,5	"	4553	35,51	249492		5325	3992	3193	2663	2284	1996	1773	1597	1453	1332	—	—
250	125	10	14,75	5835	45,52	472949	0,267	10095	7568	6055	5048	4329	3784	3360	3028	2755	2524	—	—
250	115	12	19	6811	53,15	533762		11393	8541	6832	5697	4885	4271	3792	3416	3109	2849	—	—
350	127	13	19	8770	68,50	926067	0,191	19767	14817	11853	9884	8476	7409	6579	5927	5393	4943	—	—

TABELLA XLV.

Travi Zorés a $y \cdots \square \cdots y$.

Altezza della sez.	Larghezza alla base		Spessori		Area della sez	Peso per m. corr.	Mom. resist. rispetto all'asse baricentrico \parallel alla base
	esterna	interna	dei piedi e della tavoletta sup.	dei lati			
h	b	$b-2c$	d	t	Ω	Π	W_y
mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm. ²	kg.	mm. ³
90	200	134	4,5	8	13,80	1769	45800
86	210	148	8	10	20,35	2606	51760
90,3	225	161	5,2	9,3	17,40	2232	51600

TABELLA XLVI.

Travi a \square .

Altezza della sez.	Larghezza	Spessori		Area della sez.	Peso per m. corr.	Mom. resist. rispetto $Y Y$ (Fig. 106 pagina 176)
		d	t			
h	b	d	t	Ω	Π	W_y
mm.	mm.	mm.	mm.	mm. ²	kg.	mm. ³
100	50	6	8,5	1350	10,60	41400
140	50	7	7,5	1625	12,70	63350
140	60	7	10	2040	15,90	87000
175	60	8	10	2440	19,10	121830
250	80	10	11,5	4110	32,10	287470
250	80	8	10,5	3512	27,40	256900

TABELLA XLVII.
Ferri e travi a Γ .

Altezza della sez.	Larghezze delle traverse		Spessore dell'asta e delle traverse	Area della sez.	Peso per m. corr.	Mom. resist. rispetto A A (Fig. 102 pagina 173)
	h	b_1				
mm.	mm.	mm.	mm.	mm. ²	kg.	mm. ³
24	12	12	4	1,25	160	925
32	15	18	5,5	2,32	297	2167
36	17	22	6	2,95	378	3111
40	17	22	6	3,15	402	3710
45	20	24	6	3,60	462	5050
150	75	90	10	23,00	2950	125860
150	75	90	12	27,30	3500	145130

TABELLA XLVIII.

Lamiera ondulata (Hein, Lehmann & C., Berlino).

Altezza della sez.	Largh. di un'ondulaz. completa	Spessore	Peso al m. corr.	Mom. resist. per un'ondulaz.	$R = 9$ kg. per mm. ² Carico Q , in kg., che si può distribuire uni- formemente, per una dist. (in m.) fra gli ap- poggi $l =$				
					m.	m.	m.	m.	m.
h	b	d	Π	W	1,50	2,00	2,50	3,00	3,40
mm.	mm.	mm.	kg.	mm. ³	kg	kg.	kg.	kg	kg.
50	90	1	13	1835	650	370	230	160	130
60	90	1	15	2445	870	490	310	220	170
70	90	1	16	3130	1110	630	400	280	220
80	100	1	17	4050	1300	730	470	320	250
80	100	1,5	25,5	6040	1930	1090	700	480	380
80	100	2	34	8000	2560	1440	900	640	500
80	100	3	51	11860	3800	2140	1370	950	740
100	100	3	61	17100	5470	3078	1970	1370	1070

3. — Trave orizzontale incastrata per un'estremità, appoggiata all'altra.

CARICO CONCENTRATO. Sia il peso concentrato P applicato a distanza a dalla sezione d'incastro. Detta R_1 la reazione all'estremità

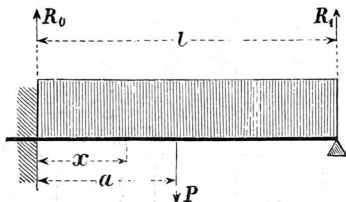


Fig 108.

semplicemente appoggiata, e ritenute le solite notazioni, si ha:

$$R_1 = P \frac{a^2 (3l - a)}{2 l^3} \cdot \frac{1 + \frac{15 A I}{a (3l - a) \Omega}}{1 + \frac{15 A I}{2 l^2 \Omega}}$$

per le travi a sezione continua ed

$$R_1 = P \frac{a^2 (3l - a)}{2 l^3} \frac{1 + 6 \frac{G d \sqrt{2}}{a (3l - a) \omega}}{1 + 3 \frac{G d \sqrt{2}}{l^2 \omega}}$$

per le travi a traliccio.

All'estremità incastrata si ha la reazione verticale ed il momento di flessione dati dalle formole:

$$R_0 = P - R_1, \quad M_0 = P a - R_1 l.$$

Per una sezione qualunque fra il punto d'applicazione del peso P e l'estremità semplicemente appoggiata, chiamando x la distanza della sezione dall'incastro, si ha:

$$M_x = -R_1 (l - x), \quad T_x = R_1$$

e per una sezione compresa fra l'estremità incastrata ed il punto di applicazione del peso, si ha:

$$M_x = P (a - x) - R_1 (l - x), \quad T_x = -P + R_1.$$

La curva, secondo la quale s'infilette l'asse del solido, non è continua, ma si compone di due parti aventi diversa equazione. Chia-

mando η l'ordinata di questa curva riferita all'asse primitivo, non deformato della trave, si ha:

da $x = 0$ ad $x = a$

$$\eta = -R_1 \left[\frac{x^2}{2EI} \left(l - \frac{x}{3} \right) + \frac{Ax}{E_t \Omega} \right] + P \left[\frac{x^2 (3a - x)}{6EI} + \frac{Ax}{E_t \Omega} \right],$$

e da $x = a$ ad $x = l$:

$$\eta = -R_1 \left[\frac{x^2}{2EI} \left(l - \frac{x}{3} \right) + \frac{Ax}{E_t \Omega} \right] + P \left[\frac{a^2 (3x - a)}{6EI} + \frac{Aa}{E_t \Omega} \right].$$

Per trovare la freccia d'inflessione nel mezzo della trave bisogna servirsi della prima di queste due formole se $a > \frac{l}{2}$, e della seconda se $a < \frac{l}{2}$.

La freccia d'inflessione nel punto di applicazione del peso è:

$$\eta = -R_1 \left[\frac{a^2 (3l - a)}{6EI} + \frac{Aa}{E_t \Omega} \right] + Pa \left(\frac{a^2}{3EI} + \frac{A}{E_t \Omega} \right).$$

Per le travi a traliccio bisogna porre in queste formole:

$$\frac{G d \sqrt{2}}{EI \omega} \quad \text{invece di} \quad \frac{A}{E_t \Omega}.$$

CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO $Q = ql$ SU TUTTA LA PORTATA.
Sarà:

$$R_1 = \frac{3}{8} ql \frac{1 + 10 \frac{AI}{\Omega l^2}}{1 + \frac{15}{2} \frac{AI}{\Omega l^2}}$$

per le travi a sezione continua ed

$$R_1 = \frac{3}{8} ql \frac{1 + \frac{4Gd\sqrt{2}}{l^2 \omega}}{1 + \frac{3Gd\sqrt{2}}{l^2 \omega}}$$

per le travi a traliccio; ed

$$R_0 = ql - R_1, \quad M_0 = \frac{1}{2} ql^2 - R_1 l.$$

Il valore di M_0 ponendo per R_1 il suo valore, diviene:

$$M_0 = \frac{1}{8} ql^2 \frac{1}{1 + \frac{15}{2} \frac{AI}{\Omega l^2}}$$

per le travi a sezione continua, ed

$$M_0 = \frac{1}{8} q l^2 \frac{1}{1 + 3 \frac{G d \sqrt{2}}{l^2 \omega}}$$

per le travi a traliccio.

Il momento M_0 è il massimo che abbia luogo nella trave.

Per una sezione qualunque a distanza x dall'incastro, si ha:

$$M_x = \frac{1}{2} q (l - x)^2 - R_1 (l - x) ,$$

$$T_x = -q (l - x) + R_1 .$$

La freccia d'inflessione è, nel mezzo della trave:

$$f = -R_1 \left(\frac{5 l^3}{48 E I} + \frac{A l}{2 E_t \Omega} \right) + q \left(\frac{17 l^4}{384 E I} + \frac{3 A l^2}{8 E_t \Omega} \right) .$$

Per le travi a traliccio bisognerà sostituire:

$$\frac{G d \sqrt{2}}{E I \omega} \quad \text{in luogo di} \quad \frac{A}{E_t \Omega} .$$

4. - Trave orizzontale incastrata in ambedue le estremità.

CARICO CONCENTRATO. Sia P il peso concentrato applicato a di-

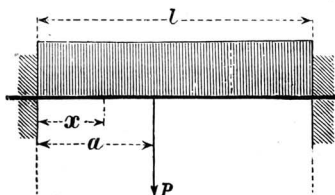


Fig. 108.

stanza a dalla più vicina sezione d'incastro. Sarà:

$$M_l = P \frac{a^2}{l^2} (l - a) \frac{1 + 15 \frac{A I}{a l \Omega}}{1 + 30 \frac{A I}{l^2 \Omega}} ,$$

$$T_l = \frac{P a^2 (3 l - 2 a)}{l^3} \frac{1 + 30 \frac{A I}{a (3 l - 2 a) \Omega}}{1 + 30 \frac{A I}{l^2 \Omega}} .$$

Il momento di flessione e lo sforzo di taglio in una sezione, a distanza x dall'incastro più vicino al peso, saranno :

da $x = 0$ ad $x = a$:

$$M_x = M_l - T_l (l - x) + P (a - x) ,$$

$$T_x = T_l - P ;$$

e da $x = a$ ad $x = l$:

$$M_x = M_l - T_l (l - x) , \quad T_x = T_l .$$

La freccia d'inflessione nel mezzo della trave è :

$$f = \frac{P a^2 (3 l - 4 a)}{48 E I} + \frac{A a P}{2 E_t \Omega} .$$

Per le travi a traliccio bisognerà porre in queste formole

$$\frac{G d \sqrt{2}}{E I \omega} \quad \text{invece di} \quad \frac{A}{E_t \Omega} .$$

Se $a = \frac{l}{2}$, cioè se il peso P è nel mezzo della trave, sarà :

$$M_l = \frac{1}{8} P l , \quad T_l = \frac{P}{2} ,$$

$$f = \frac{P l^3}{192 E I} \left(1 + \frac{120 A I}{l^2 \Omega} \right) .$$

CARICO UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO $Q = q l$ SU TUTTA LA PORTATA.
Si ha :

$$M_l = \frac{1}{12} q l^2 , \quad T_l = \frac{1}{2} q l ,$$

$$M_x = \frac{q}{2} \left(\frac{l^2}{6} - l x + x^2 \right) , \quad T_x = - q \left(\frac{l}{2} - x \right) .$$

Il momento massimo ha luogo nelle sezioni d'incastro.

La freccia d'inflessione nel mezzo della trave, è :

$$f = \frac{q l^4}{384 E I} \left(1 + \frac{120 A I}{l^2 \Omega} \right)$$

per le travi a sezione continua, ed

$$f = \frac{q l^4}{384 E I} \left(1 + \frac{48 G d \sqrt{2}}{l^2 \omega} \right)$$

per le travi a traliccio.

5. — Trave incastrata per un'estremità ed appoggiata in un suo punto intermedio.

a) CARICO CONCENTRATO P ALLA ESTREMITÀ LIBERA. Si chiami R la reazione dell'appoggio in C , e si rappresentino con η_x, H_x

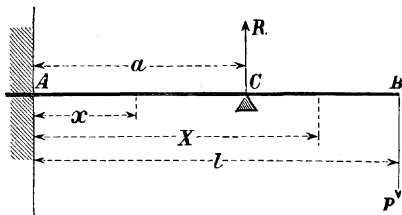


Fig 109.

le ordinate della linea elastica nei tronchi AC , CB rispettivamente, ritenendo del resto le solite notazioni. Si avrà:

$$R = \frac{3l-a}{2a} P,$$

e pel tronco AC sarà:

$$\eta_x = \frac{P}{4EIa} \left[(l-a)x - a(l-a) \right] x^2,$$

$$M_x = \frac{P}{4a} \left[6(l-a)x - 2a(l-a) \right], \quad T_x = \frac{3}{2} \frac{P}{a} (l-a)$$

$$M_a = P(l-a), \quad M_o = -\frac{P}{2}(l-a);$$

mentre pel tronco CB sarà:

$$H_x = \frac{P}{12EI} \left[-2X^3 + 6lX^2 + (3a-9l)aX + (3l-a)a^2 \right],$$

$$M_x = P(l-X), \quad T_x = -P.$$

b) CARICO UNIFORMEMENTE RIPARTITO IN RAGIONE DI q UNITÀ DI PESO PER OGNI UNITÀ DI LUNGHEZZA DELLA TRAVE. Sarà

$$R = \frac{a^2 - 4al + 6l^2}{8a} q$$

la reazione dell'appoggio intermedio in C , e si avrà:

pel tronco AC :

$$\gamma_x = \frac{q}{48 E I a} \left[2 a x^2 + (6 l^2 - 12 a l + a^2) x - (6 a l^2 - 12 a^2 l + 3 a^3) \right] x^2$$

$$M_x = \frac{q}{8 a} \left[4 a x^2 + (6 l^2 - 12 a l + a^2) x - (2 a l^2 - 4 a^2 l + a^3) \right] ,$$

$$T_x = \frac{q}{8 a} \left[8 a x + (6 l^2 - 12 a l - a^2) \right] ,$$

$$M_a = \frac{q}{2} (l - a)^2 , \quad M_o = - \frac{q}{8} (2 l^2 - 4 a l + a^2) ,$$

$$T_a = \frac{q}{8 a} (9 a^2 + 6 l^2 - 12 a l) ;$$

e pel tronco CB :

$$H_X = \frac{q}{48 E I} \left[2 X^4 - 8 l X^3 + 12 l^2 X^2 - 3 a (a^2 - 4 a l + 6 l^2) X + \right. \\ \left. + a^2 (a^2 - 4 a l + 6 l^2) \right] ,$$

$$M_X = \frac{q}{2} (l - X)^2 , \quad T_X = - q (l - X) ,$$

$$T_a = - q (l - a) .$$

6. Trave orizzontale su due appoggi equidistanti dalle sue estremità.

CARICHI P , P EGUALI, CONCENTRATI ALLE ESTREMITÀ. Ritenute le solite notazioni si ha :

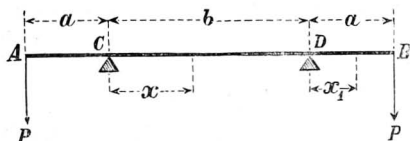


Fig. 110.

Linea elastica nel tronco CD (origine delle coordinate in C):

$$\gamma_x = \frac{P a}{2 E I} (x^2 - b x) ,$$

e quindi la freccia di inflessione nel mezzo del tronco CD è :

$$f = \frac{P a b^2}{8 E I} .$$

Il momento di flessione e lo sforzo di taglio in una sezione qualunque del tronco CD , sono:

$$M_x = P a, \quad T_x = 0.$$

Linea elastica nel tronco DB (origine delle coordinate in D):

$$v_{x_1} = \frac{P}{6EI} \left\{ 3 a b x_1 + 3 a x_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{P a b}{2EI}\right)^2} - x_1^3 \left[1 + \left(\frac{P a b}{2EI}\right)^2 \right] \right\}.$$

Quindi la freccia d'inflessione alla estremità B , è:

$$f_1 = \frac{P a^2}{6EI} \left\{ 3 b + a \left[3 \sqrt{1 + \left(\frac{P a b}{2EI}\right)^2} - \left(1 + \frac{P^2 a^2 b^2}{4 E^2 I^2} \right) \right] \right\}.$$

Il momento di flessione e lo sforzo di taglio in una sezione qualunque del tronco DB , sono:

$$M_{x_1} = P \left\{ a - x_1 \left[1 + \left(\frac{P a b}{2EI}\right)^2 \right] \right\},$$

$$T_{x_1} = -P \left[1 + \left(\frac{P a b}{2EI}\right)^2 \right].$$

CARICO UNIFORMEMENTE RIPARTITO $Q = q(2a + b)$ SU TUTTA LA TRAVE.

Linea elastica nel tronco CD (origine delle coordinate in C):

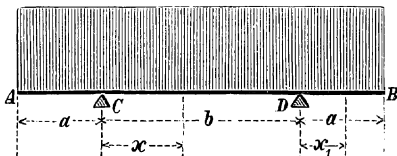


Fig. 111.

$$v_{x_1} = \frac{q x}{48EI} \left\{ 2 x^3 - 4 b x^2 + 12 a^2 x + (b^2 - 6 a^2) b \right\},$$

e quindi la freccia d'inflessione nel mezzo del tronco CD , è:

$$f = \frac{q b^4}{384 EI}.$$

Il momento inflettente e lo sforzo di taglio in una sezione qualunque del tronco CD , sono:

$$M_x = \frac{q}{2} (a^2 - b x + x^2), \quad T_x = \frac{q}{2} (2x - b).$$

7. Peso che possono sopportare le travi orizzontali a sezione rettangolare, e sezioni da darsi alle medesime.

I pesi, di cui si possono caricare le travi, indicati nelle precedenti tabelle vennero calcolati, *approssimatamente*, trascurando la parte dovuta agli sforzi di taglio, ciò che nei più comuni casi della pratica si può fare.

Trascurando la detta parte, si hanno per le più ordinarie disposizioni delle travi, le seguenti formole semplici, che servono a determinare il peso concentrato P nel punto di mezzo della portata (*) od il peso (solo sopraccarico, escluso il peso proprio) q per m. corr. che possono sopportare le travi orizzontali a sezione rettangolare nota, e reciprocamente servono a determinare la sezione da darsi alla trave quando P o q sono noti. Chiamiamo b il lato orizzontale della sezione, h il lato verticale, Π il peso di un m.³ del materiale ond'è costituita la trave. Le altre lettere hanno il solito significato.

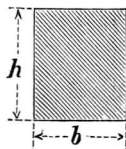


Fig. 112.

Si ha:

TRAVE INCASTRATA IN UN'ESTREMITÀ LIBERA ALL'ALTRA:

$$P = \left(\frac{R h}{6 l} - \frac{\Pi}{2} l \right) b h ,$$

$$q = \left(\frac{R h}{3 l^2} - \Pi \right) b h .$$

Quando si conosca P si può determinare q colla formola:

$$q = \frac{2 P}{l} ,$$

e quando si conosca q si può determinare P colla formola:

$$P = \frac{q l}{2} .$$

TRAVE SU DUE APPOGGI:

$$P = \left(\frac{2}{3} \frac{R}{l} h - \frac{\Pi}{2} l \right) b h ,$$

$$q = \left(\frac{4}{3} \frac{R}{l^2} h - \Pi \right) b h .$$

(*) Il peso P , per le formole qui date, è sempre assunto concentrato nel mezzo della portata, salvo che per la trave incastrata per un solo estremo, libera all'altro, nella quale P è assunto applicato alla estremità libera della trave.

Quando P sia noto si può determinare q , e quando q sia noto si può determinare P , colla formola:

$$q l = 2 P .$$

TRAVE INCASTRATA IN UN' ESTREMITÀ APPOGGIATA ALL'ALTRA:

$$P = \left(\frac{8}{9} \frac{R}{l} h - \frac{2}{3} \Pi l \right) b h ,$$

$$q = \left(\frac{4}{3} \frac{R}{l^2} h - \Pi \right) b h .$$

Quando P sia noto si può determinare q , e quando q sia noto si può determinare P , colla formola:

$$2 q l = 3 P .$$

TRAVE INCASTRATA IN AMBEDUE LE ESTREMITÀ:

$$P = \left(\frac{4}{3} \frac{R}{l} h - \frac{2}{3} \Pi l \right) b h ,$$

$$q = \left(\frac{2R}{l^2} h - \Pi \right) b h .$$

Quando P sia noto si può determinare q , e quando q sia noto si può determinare P , colla formola:

$$2 q l = 3 P .$$

8. Trave orizzontale continua appoggiata su più punti.

Sia n il numero delle travate, e quindi $n + 1$ il numero degli appoggi compresi i due estremi. Chiamiamo l_1, l_2 le lunghezze di due travate consecutive, ed M_1, M_2, M_3 i momenti di flessione sui tre appoggi di queste due travate.

La sezione della trave è costante in tutte le travate. Riteniamo le solite notazioni.

L'equazione dei tre momenti di flessione su tre appoggi consecutivi, applicata prima agli appoggi 1, 2, 3 e poi agli altri tre 2, 3, 4 e così di seguito fornisce un sistema di $n - 1$ equazioni fra i momenti di flessione sugli appoggi. Quindi, se la trave è semplicemente appoggiata alle estremità, cioè se i momenti sugli appoggi estremi sono nulli, si hanno appunto tante equazioni quante incognite. La stessa cosa ha ancora luogo se i momenti di flessione sugli appoggi estremi senza essere nulli sono però conosciuti. Invece se la trave è incastrata alle estremità, nel qual caso i momenti di flessione alle estremità, sono incogniti, bisogna aggiungere altre due equazioni alle $n - 1$ sopradette per compiere il numero di equazioni necessario alla determinazione di tutte le incognite.

Queste due equazioni sono date dalle due condizioni, che ciascuna delle due sezioni estreme incastrate debba rimanere verticale.

Detti λ_1, λ_2 gli abbassamenti del primo e del secondo appoggio, λ_{n+1}, λ_n gli abbassamenti dell'ultimo e del penultimo appoggio, l_1 la portata della prima travata, l_n la portata dell'ultima, M, T il momento inflettente e lo sforzo di taglio in una sezione qualunque della prima travata fatta a distanza x dal primo appoggio, M', T' il momento inflettente e lo sforzo di taglio in una sezione qualunque dell'ultima travata fatta a distanza y dall'ultimo appoggio, le due equazioni domandate, sono:

$$\int_0^{l_1} \frac{M(l_1 - x)}{E I} dx - \int_0^{l_1} \frac{A T}{E_t \Omega} dx = \lambda_2 - \lambda_1 ,$$

$$\int_0^{l_n} \frac{M'(l_n - y)}{E I} dy - \int_0^{l_n} \frac{A T'}{E_t \Omega} dy = \lambda_{n+1} - \lambda_n .$$

Se la trave è a sezione costante, e non si tiene conto del lavoro di deformazione dovuto agli sforzi di taglio, le due equazioni precedenti divengono:

$$2 M_1 + M_2 = P \left[(a - l_1) + \frac{a^2}{l_1^2} (a - 3 l_1) \right] + \frac{6 E I}{l_1} (\lambda_2 - \lambda_1) ,$$

$$2 M_{n+1} + M_n = P' \left[(b_n - l_n) + \frac{b_n^2}{l_n^2} (b_n - 3 l_n) \right] + \frac{6 E I}{l_n} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) ,$$

essendo la trave sottoposta ad un carico concentrato P sulla prima travata a distanza a dal primo appoggio, e ad un carico concentrato P' sull'ultima travata a distanza b_n dall'ultimo appoggio, qualunque siano d'altronde i carichi sulle travate intermedie; e le stesse due equazioni divengono:

$$4 M_1 + 2 M_2 = q l_1^3 + 12 \frac{E I}{l_1^3} (\lambda_2 - \lambda_1) ,$$

$$4 M_{n+1} + 2 M_n = q' l_n^3 + 12 \frac{E I}{l_n^3} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) ,$$

essendo q e q' i carichi per unità di lunghezza ripartiti uniformemente sulla prima e sull'ultima travata, qualunque siano d'altronde i carichi sulle travate intermedie.

In queste equazioni, quando non si tien conto dell'abbassamento degli appoggi, è nullo l'ultimo termine contenente $E I$, del secondo membro.

a) CARICO ISOLATO SU CIASCUNA TRAVATA. Per la trave a sezione

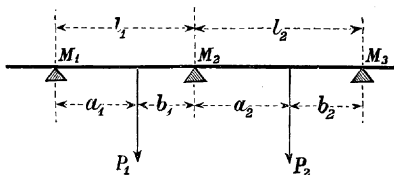


Fig. 113.

continua l'equazione dei tre momenti è:

$$M_1 l_1 \left(1 - \frac{15 \mathbf{A} I}{l_1^2 \Omega}\right) + 2 M_2 (l_1 + l_2) \left(1 + \frac{15 \mathbf{A} I}{2 l_1 l_2 \Omega}\right) + M_3 l_2 \left(1 - \frac{15 \mathbf{A} I}{l_2^2 \Omega}\right) = \frac{P_1 a_1 (l_1^2 - a_1^2)}{l_1} + \frac{P_2 b_2 (l_2^2 - b_2^2)}{l_2}$$

Se la trave è a traliccio è:

$$M_1 l_1 \left(1 - \frac{6 G d \sqrt{2}}{l_1^2 \omega}\right) + 2 M_2 (l_1 + l_2) \left(1 + \frac{3 G d \sqrt{2}}{l_1 l_2 \omega}\right) + M_3 l_2 \left(1 - \frac{6 G d \sqrt{2}}{l_2^2 \omega}\right) = \frac{P_1 a_1 (l_1^2 - a_1^2)}{l_1} + \frac{P_2 b_2 (l_2^2 - b_2^2)}{l_2}$$

Se non si tien conto del lavoro dovuto agli sforzi di taglio, tanto l'una quanto l'altra di queste due formole, si riducono a:

$$M_1 l_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 = \frac{P_1 a_1 (l_1^2 - a_1^2)}{l_1} + \frac{P_2 b_2 (l_2^2 - b_2^2)}{l_2}$$

Se l'altezza della trave è considerevole rispetto all'ampiezza delle travate converrà tener conto anche del lavoro di deformazione dovuto al taglio e fare quindi uso delle formole esatte.

Ottenuti i momenti di flessione sugli appoggi, si calcolerà il momento di flessione e lo sforzo di taglio in una sezione qualunque di una travata l_1 , per mezzo delle formole seguenti.

Si chiami x la distanza della sezione che si considera dall'appoggio di sinistra della travata l_1 ; si avrà:
da $x=0$ ad $x=a_1$, cioè per le sezioni a sinistra del peso:

$$M_x = M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l_1} x - P_1 \frac{l_1 - a_1}{l_1} x$$

$$T_x = \frac{M_2 - M_1}{l_1} - P_1 \frac{l_1 - a_1}{l_1}$$

e da $x = a_1$ ad $x = l_1$, cioè per le sezioni a destra del peso:

$$M_x = M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l_1} x - P_1 a_1 \frac{l_1 - x}{l_1}, \quad T_x = \frac{M_2 - M_1}{l_1} + P_1 \frac{a_1}{l_1}.$$

Supponendo $a_1 < \frac{l}{2}$, cioè supponendo che il peso P_1 sia applicato a sinistra del punto di mezzo della travata, la freccia d'inflexione nel punto di mezzo della travata, sarà, per le travi a sezione continua:

$$f = \frac{P_1 a_1}{2} \left(\frac{3 l_1^2 - 4 a_1^2}{24 E I} + \frac{\mathbf{A}}{E_t \Omega} \right) - \frac{(M_1 + M_2) l_1^2}{16 E I},$$

e per quelle a traliccio

$$f = \frac{P_1 a_1 (3 l_1^2 - 4 a_1^2)}{48 E I} \left[1 + \frac{24 G d \sqrt{2}}{(3 l_1^2 - 4 a_1^2) \omega} \right] - \frac{(M_1 + M_2) l_1^2}{16 E I}.$$

Se $a_1 > \frac{l}{2}$ si avrà la freccia nel punto di mezzo della travata sostituendo in queste formole $l_1 - a_1$ ad a_1 .

Quando $a_1 = \frac{l}{2}$, cioè quando il peso P_1 è applicato nel mezzo della travata, si ha per le travi a sezione continua:

$$f = \frac{P_1 l_1^3}{48 E I} \left(1 + \frac{30 \mathbf{A} I}{\Omega l_1^2} \right) - \frac{(M_1 + M_2) l_1^2}{16 E I},$$

e per quelle a traliccio

$$f = \frac{P_1 l_1^3}{48 E I} \left(1 + \frac{12 G d \sqrt{2}}{\omega l_1^2} \right) - \frac{(M_1 + M_2) l_1^2}{16 E I}.$$

b) CARICO UNIFORMEMENTE RIPARTITO SU CIASCUNA TRAVATA. Sia q_1 il carico per m. corr. sulla travata l_1 , e q_2 il carico per m. corr. sulla travata l_2 .

L'equazione dei tre momenti per la trave a sezione continua è:

$$M_1 l_1 \left(1 - \frac{15 \mathbf{A} I}{l_1^2 \Omega} \right) + 2 M_2 (l_1 + l_2) \left(1 + \frac{15 \mathbf{A} I}{2 l_1 l_2 \Omega} \right) + M_3 l_2 \left(1 - \frac{15 \mathbf{A} I}{l_2^2 \Omega} \right) = \frac{1}{4} (q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3).$$

Se la trave è a traliccio è:

$$M_1 l_1 \left(1 - \frac{6 G d \sqrt{2}}{l_1^2 \omega} \right) + 2 M_2 (l_1 + l_2) \left(1 + \frac{3 G d \sqrt{2}}{l_1 l_2 \omega} \right) + M_3 l_2 \left(1 - \frac{6 G d \sqrt{2}}{l_2^2 \omega} \right) = \frac{1}{4} (q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3)$$

Se si trascura il lavoro dovuto al taglio l'equazione dei tre momenti si riduce a:

$$M_1 l_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 = \frac{1}{4} (q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3) .$$

Questa formola dà i momenti di flessione sugli appoggi sensibil-

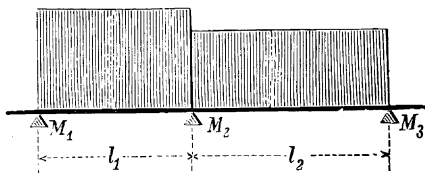


Fig. 114.

mente maggiori del vero quando l'altezza della trave è considerevole e si avvicina ad $\frac{1}{10}$ dell'ampiezza della travata.

Ottenuti i momenti di flessione sugli appoggi si ha:

$$M_x = M_1 + \left(\frac{M_2 - M_1}{l_1} - \frac{1}{2} q_1 l_1 \right) x + \frac{1}{2} q_1 x^2 ,$$

$$T_x = \frac{M_2 - M_1}{l_1} - \frac{1}{2} q_1 l_1 + q_1 x ,$$

per una travata qualunque l_1 , essendo x la distanza della sezione considerata dall'appoggio a cui corrisponde il momento di flessione M_1 .

Le ultime due formole servono a descrivere il **diagramma dei momenti di flessione** e quello **degli sforzi di taglio**. Il primo è un arco di parabola, le cui ordinate alle estremità della travata sono M_1 , M_2 ed il cui vertice corrisponde alle coordinate:

$$x = \frac{l_1}{2} - \frac{M_2 - M_1}{q_1 l_1} ,$$

$$M_x = M_1 - \frac{q_1}{2} \left(\frac{l_1}{2} - \frac{M_2 - M_1}{q_1 l_1} \right)^2 ;$$

il secondo è una linea retta, le cui ordinate alle estremità della travata sono:

$$T_1 = \frac{M_2 - M_1}{l_1} - \frac{1}{2} q_1 l_1 , \quad T_2 = \frac{M_2 - M_1}{l_1} + q_1 l_1 ,$$

ed il cui punto di ordinata zero ha la medesima ascissa come il vertice della parabola dei momenti.

La freccia d'inflexione nel punto di mezzo della travata è data dalle formole seguenti.

Per le travi a sezione continua o piena :

$$f = \frac{l^2}{16 EI} \left[\frac{5 q_1 l^2}{24} \left(1 + \frac{24 AI}{\Omega l^2} \right) - M_1 - M_2 \right],$$

e per quelle a traliccio :

$$f = \frac{l^2}{16 EI} \left[\frac{5 q_1 l^2}{24} \left(1 + \frac{48 G d \sqrt{2}}{5 \omega l^2} \right) - M_1 - M_2 \right].$$

9. — Altre maniere di carico.

Le formole precedenti intorno alla resistenza delle travi orizzontali rettilinee si riferiscono a carichi concentrati od uniformemente ripartiti, *quali più di frequente si riscontrano in pratica*. Aggiungiamo ora altre formole, per altre maniere di carico, che pure occorre di considerare in pratica, avvertendo, come fu già detto, che in queste altre formole il *lavoro di deformazione dovuto all'aglio*, per semplicità, venne trascurato.

A) *Trave incastrata in un'estremità, libera all'altra.*

Formole generali. Supponiamo che sopra una parte qualunque *CB* della trave sia distribuito il carico secondo una legge qualunque :

$$q_x = f(x).$$

Quando la legge di carico sia nota si saprà calcolare il momento di flessione in una sezione qualunque. Per la sezione a distanza X_1 dall'estremità *A*, il momento di flessione è dato da :

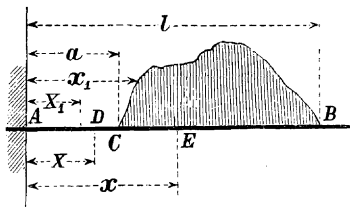


Fig. 115.

$$M_{X_1} = \int_a^l (x - X_1) f(x) dx,$$

e per la sezione a distanza x_1 dall'estremità stessa esso è dato da :

$$M_{x_1} = \int_{x_1}^l (x - x_1) f(x) dx.$$

Chiamiamo H_X l'ordinata della linea elastica della trave nel punto *D scarico*, ed η_x l'ordinata, nel punto *E carico*, della linea stessa, sarà :

$$H_X = \frac{1}{EI} \int_0^X M_{X_1} (x - x_1) dX_1,$$

$$\eta_x = \frac{1}{EI} \left[\int_a^x M_{x_1} (x - x_1) dx_1 + \int_0^a M_{X_1} (x - X_1) dX_1 \right] .$$

La prima di queste equazioni è l'equazione della linea elastica, valedole pel tronco AC scarico; la seconda è l'equazione della linea elastica, valedole pel tronco CB carico.

Formole particolari per il caso in cui la $q_x = f(x)$ è una costante.

CARICO PARZIALE UNIFORMEMENTE RIPARTITO $q_x = \text{cost.} = q$.

Si ha:

$$H_x = \frac{q}{12EI} (l-a) [3(l+a) - 2X] X^2 ,$$

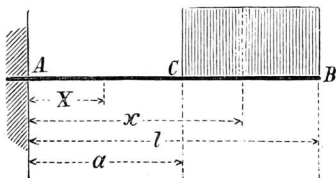


Fig. 116.

$$q_x = \frac{q}{24EI} (x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2 - 4a^3x + a^4) ;$$

e quindi:

$$M_X = \frac{q}{2} (l-a)(l+a-2X) , \quad M_x = \frac{q}{2} (l-x)^2 ,$$

$$T_X = -q(l-a) , \quad T_x = -q(l-x) .$$

Formole particolari per i casi in cui la $q_x = f(x)$ è una funzione lineare in x .

CARICO PARZIALE (*) DISTRIBUITO CON LEGGE TRAPEZIA:

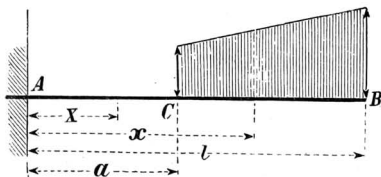


Fig. 117.

$$q_x = \frac{(x-a)q_l + (l-x)q_a}{l-a} .$$

(*) Da tutte le formole pei carichi parziali si ottengono quelle pei carichi completi ponendo $a=0$, oppure, a seconda dei casi, $a=l$.

Si ha:

$$H_X = \frac{l-a}{12EI} [q_a(2a+l) + q_l(2l+a) - (q_a + q_l)X] X^2,$$

$$\eta_x = \frac{1}{24EI} \left\{ q_a(x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2 - 4a^3x + a^4) + \right.$$

$$+ \frac{q_l - q_a}{5(l-a)} [x^5 - 5ax^4 + (2)al - 10l^2] x^3 + (20l^3 - 30al^2) x^2 +$$

$$\left. + 5a^4x - a^5 \right\}.$$

Quando il carico è distribuito con legge trapezia su tutta la trave

$$\left[\text{cioè } q_x = \frac{xq_l + (l-x)q_o}{l} \right],$$

l'ordinata η della linea elastica, in un punto qualunque D , è:

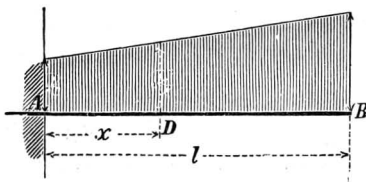


Fig. 118.

$$\eta = \frac{1}{12EI} \left[(q_o + 2q_l)l^2 - (q_o + q_l)lx + \frac{q_o}{2}x^2 - \frac{q_o - q_l}{10l}x^3 \right] x^2,$$

e si ha:

$$M_x = \frac{q_o + 2q_l}{6} l^2 - \frac{q_o + q_l}{2} lx + \frac{q_o}{2} x^2 - \frac{q_o - q_l}{6l} x^3,$$

$$T_x = -\frac{q_o + q_l}{2} l + q_o x - \frac{q_o - q_l}{2l} x^2.$$

L'abbassamento dell'estremità libera della trave è:

$$\eta_l = \frac{4q_o + 11q_l}{120EI} l^4.$$

Il momento massimo di flessione alla sezione d'incastro è:

$$M_o = \frac{q_o + 2q_l}{6} l^2.$$

Lo sforzo di taglio alla sezione d'incastro è:

$$T_0 = -\frac{q_0 + ql}{2} l.$$

CARICO PARZIALE TRIANGOLARE CRESCENTE VERSO L'ESTREMITÀ LIBERA: cioè:

$$q_x = -ql \frac{x-a}{l-a}.$$

Si ha:

$$H_X = \frac{ql(l-a)}{12EI} [(2l+a) - X] X^2,$$

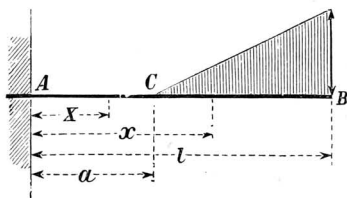


Fig. 119.

$$q_x = \frac{ql}{120EI(l-a)} [x^5 - 5ax^4 + (20al - 10l^2)x^3 + (20l^3 - 30al^2)x^2 + 5a^4x - a^5];$$

e quindi:

$$M_X = \frac{ql(l-a)}{6} [(2l+a) - 3X],$$

$$M_x = \frac{ql}{6(l-a)} [x^3 - 3ax^2 + (6al - 3l^2)x + (2l^3 - 3al^2)],$$

$$T_X = -\frac{ql}{2}(l-a), \quad T_x = \frac{ql}{2(l-a)}(x^2 - 2ax + 2al - l^2).$$

Quando il carico triangolare si estende su tutta la trave, cioè:

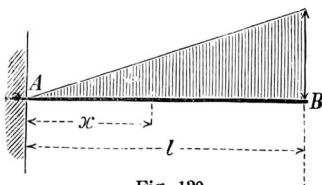


Fig. 120.

$$q_x = ql \frac{x}{l},$$

si ha :

$$\eta = \frac{ql}{12EI} \left(2l^2 - lx + \frac{x^3}{10l} \right) x^2 ,$$

$$M_x = ql \left(\frac{l^2}{3} - \frac{lx}{2} + \frac{x^3}{6l} \right) ,$$

$$T_x = \frac{ql}{2} \left(-l + \frac{x^2}{l} \right) ,$$

$$\eta_l = \frac{11ql}{120EI} l^4 ,$$

$$M_o = \frac{ql^2}{3} , \quad T_o = -\frac{ql}{2} l .$$

CARICO PARZIALE TRIANGOLARE DECRESCENTE VERSO L'ESTREMITÀ LIBERA, cioè :

$$q_x = q_a \frac{l-x}{l-a} .$$

Si ha :

$$H_X = \frac{q(l-a)}{12EI} (2a + l - X) X^2 ,$$

$$\eta_x = \frac{qa}{120EI(l-a)} [-x^5 + 5lx^4 - 10l^2x^3 + 10l^3x^2 + (15a^4 - 20a^3l)x + a^4(5l - 4a)] ;$$

$$M_X = \frac{qa(l-a)}{6} [(2a + l) - 3X] ,$$

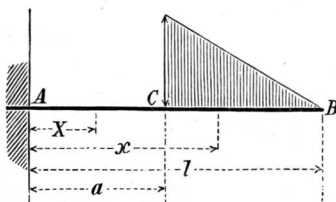


Fig. 120

$$M_x = \frac{qa}{6(l-a)} (l-x)^3 ;$$

$$T_X = -\frac{qa(l-a)}{2} , \quad T_x = -\frac{qa}{2(l-a)} (l-x)^2 .$$

Quando il carico triangolare si estende su tutta la trave, cioè:

$$q_x = q_0 \frac{l-x}{l} ,$$

si ha:

$$v = \frac{q_0}{12EI} \left(l^2 - lx + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{10l} \right) x^2$$

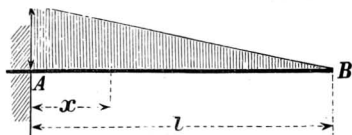


Fig. 121.

$$M_x = \frac{q_0}{6l} (l-x)^3 \qquad T_x = -\frac{q_0}{2l} (l-x)^2 ;$$

$$v_l = \frac{q_0}{30EI} l^4 ; \qquad M_0 = \frac{q_0 l^2}{6} , \qquad T_0 = -\frac{q_0 l}{2} .$$

Formole particolari per un caso in cui la $q_x = f(x)$ è una funzione quadratica in x .

CARICO PARABOLICO SU TUTTA LA TRAVE. Sia:

$$Y^2 = 2mX$$

l'equazione dell'arco BEF di parabola riferita al vertice O .

Il valore del parametro m si ricava ponendo

$$X = l + a , \qquad Y = q_0 + b$$

nell'equazione della parabola. epperò l'equazione dell'arco BEF

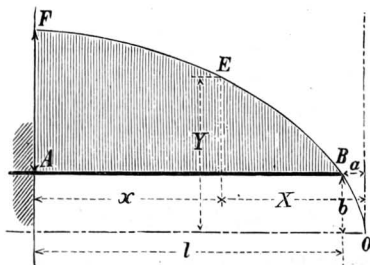


Fig. 122.

sarà:

$$Y_2 = \frac{(q_0 + b)^2}{l + a} X ,$$

ossia, trasportando l'origine delle coordinate da O in A , sarà:

$$q_x = -b + \frac{q_0 + b}{\sqrt{l + a}} \sqrt{l + a - x} ,$$

la quale è l'equazione della legge con cui è distribuito il carico sulla portata l . Ciò posto si ha:

$$\begin{aligned} \eta = \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{6}{12} (bl^2 x^2 - 4lx^3 + x^4) + \frac{q_0 + b}{15\sqrt{l+a}} \left[-\frac{16}{63} \sqrt{(l+a)^9} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{8}{7} \sqrt{(l+a)^7} x + \frac{16}{63} \sqrt{(l+a-x)^9} - (2\sqrt{a^5} + 5l\sqrt{a^3})x^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5}{3} \sqrt{a^3} x^3 \right] \right\} , \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} M_x = -\frac{b}{2} (l-x)^2 + \frac{q_0 + b}{15\sqrt{l+a}} \left[-4\sqrt{a^5} - 10l\sqrt{a^3} + \right. \\ \left. + 10\sqrt{a^3} x + 4\sqrt{(l+a-x)^5} \right] \end{aligned}$$

$$T_x = b(l-x) + \frac{q_0 + b}{15\sqrt{l+a}} \left[10\sqrt{a^3} - 10\sqrt{(l+a-x)^3} \right] .$$

Quando l'arco di parabola ha il vertice all'estremità libera della

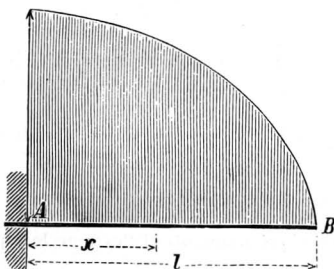


Fig. 123.

trave, è $b=0$, $a=0$, e quindi si ha:

$$\eta = \frac{q_0}{945 EI} \left[16l^4 + 72l^3 x + 16 \frac{\sqrt{(l-x)^9}}{\sqrt{l}} \right] ,$$

$$M_x = \frac{4 q_0}{15 \sqrt{l}} \sqrt{(l-x)^5}, \quad T_x = -\frac{2 q_0}{3 \sqrt{l}} \sqrt{(l-x)^3},$$

$$q_l = \frac{8 q_0 l^4}{135 E I}, \quad M_0 = \frac{4 q_0 l^2}{15}, \quad T_0 = -\frac{2}{3} q_0 l.$$

B) Trave appoggiata alle due estremità.

Formole generali. Sia :

$$q_x = f(x)$$

la legge di carico Tenendo le solite notazioni avremo :

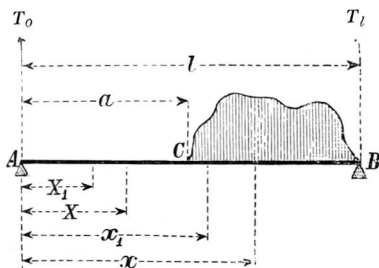


Fig. 124.

$$T_l + T_0 = \int_a^l f(x) dx,$$

$$T_l \left\{ (l-a) \int_a^l f(x) dx - \int_a^l (x-a) f(x) dx \right\} =$$

$$= T_0 \left\{ a \int_a^l f(x) dx + \int_a^l (x-a) f(x) dx \right\},$$

dalle quali due equazioni si ricavano i valori delle reazioni T_0, T_l degli appoggi.

Quindi si avranno per i momenti di flessione le espressioni :

$$M_{X_1} = -T_l (l - X_1) + \int_a^l (x - X_1) f(x) dx,$$

$$M_{x_1} = -T_l (l - x_1) + \int_{x_1}^l (x - x_1) f(x) dx,$$

e le equazioni della linea elastica saranno :

$$H_X = \frac{1}{EI} \left[-\frac{l-X}{l} \int_0^X X_1 M_{X_1} dX_1 - \frac{X}{l} \int_X^a (l-X_1) M_{X_1} dX_1 \right],$$

$$\eta_x = \frac{1}{EI} \left[-\frac{l-x}{l} \int_0^a X_1 M_{X_1} dX_1 - \right.$$

$$\left. -\frac{l-x}{l-a} \int_a^x (x_1-a) M_{x_1} dx_1 - \frac{x-a}{l-a} \int_x^l (l-x_1) M_{x_1} dx_1 \right].$$

Formole particolari per il caso in cui la $q_x = f(x)$ è una costante. CARICO PARZIALE UNIFORMEMENTE RIPARTITO $q_x = q = \text{cost.}$. Si ha :

$$H_X = \frac{q(l-a)^2}{12EI l^2} [-lX^2 + a^2(3l-2a)X],$$

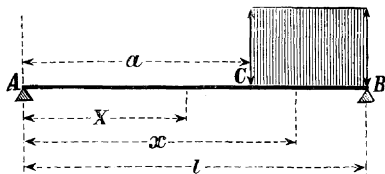


Fig. 125.

$$\eta_x = \frac{q}{24EI(l-a)l^2} [l^2(l-a)x^4 - 2l(l^3 - al^2 + a^2l - a^3)x^3 +$$

$$+ 6a^2l^2(l-a)x^2 + (l^6 - 4a^2l^4 - 6a^3l^3 + 19a^4l^2 - 14a^5l + 4a^6)x -$$

$$- al(l^5 - 10a^2l^3 + 19a^3l^2 - 14a^4l + 4a^5)] ;$$

e quindi :

$$M_X = -\frac{q}{2l} (l-a)^2 X ,$$

$$M_x = \frac{q}{2l} [lx^2 - (a^2 + l^2)x + a^2l] ,$$

$$T_X = -\frac{q}{2l} (l-a) , \quad T_o = -\frac{q}{2l} (l-a)^2 ,$$

$$T_x = \frac{q}{2l} [2lx - (a^2 + l^2)] , \quad T_l = \frac{q}{2l} (l^2 - a^2) .$$

Formole particolari per i casi in cui la $q_x = f(x)$ è una funzione lineare in x .

CARICO PARZIALE CON LEGGE TRIANGOLARE CRESCENTE VERSO UN APPOGGIO, cioè:

$$q_x = ql \frac{x-a}{l-a}.$$

Si ha:

$$H_X = \frac{ql(l-a)^2}{36EI l^2} [-lX^2 + a^2(3l-2a)] X,$$

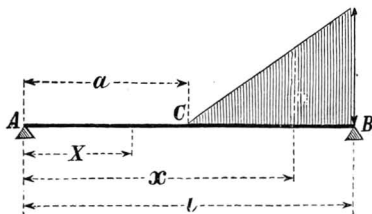


Fig. 126.

$$\begin{aligned} q_x = & \frac{ql}{360EI(l-a)^2 l^2} [3]l^2(l-a)x^5 - 15a l^2(l-a)x^4 - \\ & - 10l(l^4 - 4a l^3 + 3a^2 l^2 - a^3 l + a^4)x^3 - 30a^3 l^2(l-a)x^2 + \\ & + (7l^7 - 15a l^6 - 10a^3 l^4 + 110a^4 l^3 - 162a^5 l^2 + 90a^6 l - 20a^7)x - \\ & - (7a l^7 - 15a^2 l^6 - 30a^3 l^5 + 130a^4 l^4 - 162a^5 l^3 + 90a^6 l^2 - 20a^7 l)]; \end{aligned}$$

e quindi

$$M_X = -\frac{ql}{6l}(l-a)^2 X,$$

$$M_x = \frac{ql}{6(l-a)l} [lx^3 - 3alx^2 - (l^3 - 3al^2 - a^3)x - a^3 l],$$

$$T_X = -\frac{ql}{6l}(l-a),$$

$$T_x = \frac{ql}{6(l-a)l} [3lx^2 - 6alx - (l^3 - 3al^2 - a^3)].$$

CARICO PARZIALE RIPARTITO CON LEGGE TRAPEZIA SOPRA UNA METÀ DELLA PORTATA, cioè:

$$q_x = 2 \frac{\left(x - \frac{l}{2}\right) ql + (l-x) q \frac{l}{2}}{l}.$$

Sarà :

$$H_X = \frac{l}{144 EI} \left[(l^2 - 2X^2) q_{\frac{l}{2}} + \left(\frac{l^2}{2} - X^2 \right) q_l \right] X .$$

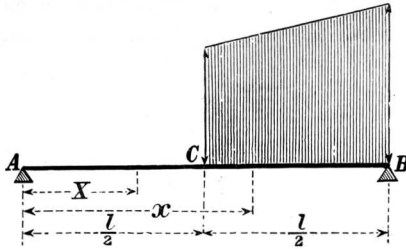


Fig. 127.

$$\eta_x = \frac{1}{2880 EI} \left[\left(-\frac{48x^5}{l} + 240x^4 - 400lx^3 + 240l^2x^2 - 27l^3x - 5l^4 \right) \frac{q_{\frac{l}{2}}}{2} + \left(\frac{48x^5}{l} - 120x^4 + 100lx^3 - 60l^2x^2 + 42l^3x - 10l^4 \right) q_l \right] .$$

CARICO RIPARTITO SULLA METÀ DELLA PORTATA CON LEGGE TRIANGOLARE DECRESCENTE VERSO UN APPOGGIO, CIÒÈ :

$$q_x = q_{\frac{l}{2}} \frac{l-x}{\frac{l}{2}} .$$

Sarà :

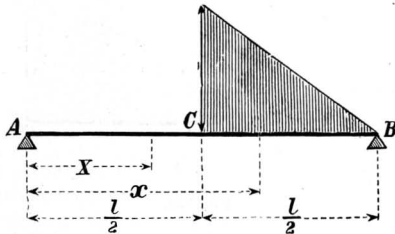


Fig. 128

$$H_X = \frac{q_{\frac{l}{2}} l}{144 EI} (l^2 - 2X^2) X ,$$

$$\eta_x = \frac{q \frac{l}{2}}{2880 EI} \left(-\frac{48x^5}{l} + 240x^4 - 400lx^3 + 240l^2x^2 - 27l^3x - 5l^4 \right)$$

Ponendo $X = \frac{l}{2}$ nella prima di queste equazioni, oppure $x = \frac{l}{2}$ nella seconda, si ottiene, l'abbassamento nel mezzo della trave, cioè:

$$H_{\frac{l}{2}} = \eta_{\frac{l}{2}} = \frac{q \frac{l}{2} l^4}{576 EI}$$

I momenti inflettenti e gli sforzi di taglio sono:

$$M_X = -\frac{q \frac{l}{2} l}{12} X, \quad T_X = -\frac{q \frac{l}{2} l}{12};$$

$$M_x = \frac{q \frac{l}{2}}{6} \left(-\frac{2x^3}{l} + 6x^2 - 5lx + l^2 \right),$$

$$T_x = \frac{q \frac{l}{2}}{6} \left(-\frac{6x^2}{l} + 12x - 5l \right).$$

CARICO TRIANGOLARE SU TUTTA LA PORTATA, CRESCENTE DA UN APPOGGIO ALL'ALTRO, cioè:

$$qx = ql \frac{x}{l}.$$

Sarà:

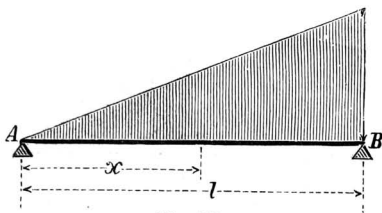


Fig. 129.

$$\eta = \frac{ql}{360 EI} \left(3 \frac{x^5}{l} - 10lx^3 + 7l^3x \right),$$

e quindi

$$M_x = \frac{ql}{6l} (x^3 - l^2x), \quad T_x = \frac{ql}{6l} (3x^2 - l^2)$$

L'abbassamento massimo della trave ha luogo per

$$x = 0,79677 l ,$$

ed è:

$$\eta_{0,79677} = 0,002659 \frac{q l^4}{E I} .$$

Il momento massimo ha luogo per

$$x = \frac{l}{\sqrt{3}} ,$$

ed è:

$$\frac{M_l}{\sqrt{3}} = - \frac{q l^2}{9 \sqrt{3}} .$$

CARICO TRIANGOLARE SU TUTTA LA TRAVE, CRESCENTE DAL MEZZO DELLA PORTATA, DOVE È $q_l = 0$, AGLI APPOGGI, DOVE È q_l . Si ha:

$$\eta_x = \frac{q}{2880 E I} \left(48 \frac{x^5}{l} - 120 x^4 + 120 l x^3 - 120 l^2 x^2 + 92 l^3 x - 20 l^4 \right) ,$$

la quale vale solo per i punti D del tronco CB .

La stessa equazione però serve ancora a trovare l'ordinata della linea elastica per i punti D_1 del tronco AC , ma allora bisogna porre

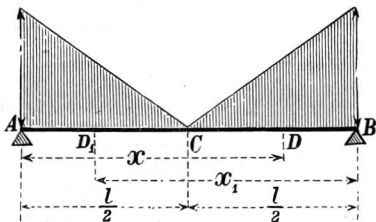


Fig. 130.

in essa x_1 in luogo di x , cioè bisogna prendere l'appoggio B per origine delle coordinate.

L'abbassamento della trave nel mezzo C della sua portata è dato da:

$$\eta_{\frac{l}{2}} = \frac{q l^4}{576 E I} .$$

Il momento inflettente nella sezione in D , è:

$$M_x = \frac{q}{12} \left(\frac{4 x^3}{l} - 6 x^2 + 3 l x - l^2 \right) ,$$

e lo sforzo di taglio, è:

$$T_x = \frac{q}{4} \left(\frac{4x^2}{l} - 4x + l \right) .$$

Cambiando x in x_1 le ultime due formole danno il momento inflettente e lo sforzo di taglio in una sezione in D_1 riferita all'appoggio B .

Il momento inflettente nel mezzo della portata, è:

$$M_{\frac{l}{2}} = - \frac{q}{36} l^2 .$$

CARICO TRIANGOLARE SU TUTTA LA TRAVE, DECRESCENTE DAL MEZZO DELLA PORTATA, DOVE È $q_{\frac{l}{2}} = q$, AGLI APPOGGI, DOVE È NULLO. Si ha:

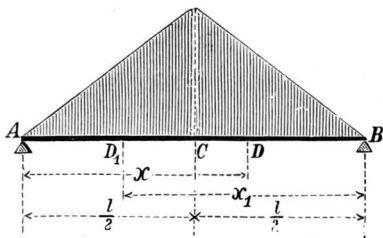


Fig. 131.

$$v_x = \frac{q}{2880 EI} \left(- 48 \frac{x^5}{l} + 240 x^4 - 360 l x^3 + 120 l^2 x^2 + 73 l^3 x - 25 l^4 \right) ,$$

$$v_{\frac{l}{2}} = \frac{q l^4}{288 EI} ;$$

$$M_x = \frac{q}{12} \left(- \frac{4x^3}{l} + 12x^2 - 9lx + l^2 \right) ,$$

$$M_{\frac{l}{2}} = - \frac{q}{12} l^2 ;$$

$$T_x = \frac{q}{4} \left(- \frac{4x^2}{l} + 8x - 3l \right) .$$

CARICO TRAPEZIO SU TUTTA LA TRAVE, cioè

$$q_x = \frac{x q_l + (l-x) q_0}{l} .$$

Per qualunque punto D della portata, si ha:

$$q = \frac{1}{360 EI} \left[(8 q_0 + 7 q_l) l^3 x - (20 q_0 + 10 q_l) l x^3 + 15 q_0 x^4 + 3 (q_l - q_0) \frac{x^5}{l} \right],$$

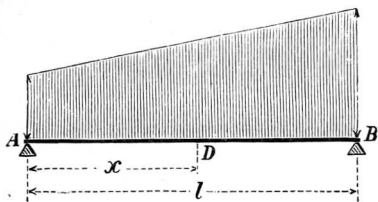


Fig. 132.

e quindi:

$$M_x = \frac{1}{6} \left[-(2 q_0 + q_l) l x + 3 q_0 x^2 + (q_l - q_0) \frac{x^3}{l} \right].$$

$$T_x = \frac{1}{6} \left[-(2 q_0 + q_l) l + 6 q_0 x + 3 (q_l - q_0) \frac{x^2}{l} \right].$$

Formole per un caso in cui la $q_x = f(x)$ è una funzione quadratica in x .

CARICO DISTRIBUITO CON LEGGE PARABOLICA SU TUTTA LA TRAVE.

Sia il carico distribuito sull'intera portata secondo la legge delle

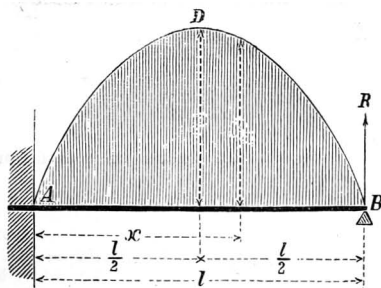


Fig. 133.

ordinate q_x all'arco ADB di parabola ordinaria avente il vertice in D , e sia $q_{\frac{l}{2}} = q$ l'ordinata massima tirata al vertice D . Sarà:

$$q_x = \frac{4q}{l^2} (lx - x^2)$$

la legge di carico, e si avrà per un punto qualunque F della portata:

$$\eta = \frac{q}{90 EI} \left(3 l^2 x - 5 l x^3 + \frac{3 x^5}{l} - \frac{x^6}{l^2} \right) ;$$

$$M_x = \frac{q}{3} \left(- l x + 2 \frac{x^3}{l} - \frac{x^4}{l^2} \right) , \quad T_x = \frac{q}{3} \left(- l + 6 \frac{x^2}{l} - 4 \frac{x^3}{l^2} \right)$$

L'abbassamento nel mezzo della portata è:

$$\eta_{\frac{l}{2}} = 0,0106 \frac{q l^4}{EI} ,$$

ed il momento inflettente nella sezione in C nel mezzo della portata è:

$$M_{\frac{l}{2}} = - \frac{5}{16} q l^2 .$$

C) Trave appoggiata ad un'estremità ed incastrata all'altra.
Formole generali. Sia:

$$q_x = f(x)$$

la legge di carico sul tronco CB , e chiamiamo R la reazione in-

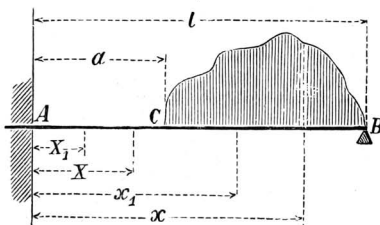


Fig. 134.

cognita dell'appoggio B .

Il valore di R si troverà, ricavandolo dalla equazione:

$$\int_a^l (x - x_1) [m_{x_1} - R(l - x_1)] dx_1 + \\ + \int_0^a (x - X_1) [m_{X_1} - R(l - X_1)] dX_1 = 0 ,$$

nella quale

$$m_{x_1} = \int_{x_1}^l (x - x_1) f(x) dx , \\ m_{X_1} = \int_a^l (x - X_1) f(x) dx .$$

Determinato così il valore di R l'equazione della linea elastica pel tronco AC , scarico, sarà :

$$H_X = \frac{1}{EI} \int_0^X (X - X_1) [m_{X_1} - R(l - X_1)] dX_1 ;$$

e l'equazione della linea elastica pel tronco CB , carico, sarà :

$$\eta_x = \frac{1}{EI} \int_0^a (x - X_1) [m_{X_1} - R(l - X_1)] dX_1 + \int_a^x (x - x_1) [m_{X_1} - R(l - x_1)] dx_1 .$$

Se il carico si trovasse (Fig. 134) soltanto sul tronco AC ed il tronco CB fosse scarico, le equazioni della linea elastica si possono trovare applicando il principio della sovrapposizione degli effetti.

A tal fine s'immagini che la curva ADC , che definisce la data legge di carico, continui per tutta la portata della trave divenendo per esempio $ADCEB$. Si determini l'equazione della linea elastica

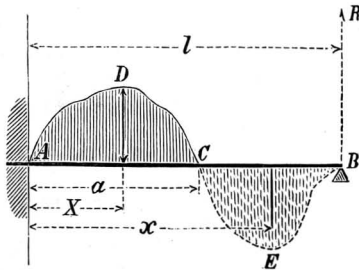


Fig. 135.

dovuta a tutto il carico definito dalla curva continua $ADCEB$, e quindi la linea elastica dovuta al solo carico definito dalla curva CEB . Si sottragga dal valore dell'ordinata della linea elastica dovuta a tutto il carico $ADCEB$ il valore dell'ordinata dovuta al carico CEB ; il resto che così si ottiene darà l'ordinata della linea elastica domandata, dovuta al solo carico ADC sul tronco AC .

Formole particolari per i casi in cui la $q_x = f(x)$ è una funzione lineare in x .

CARICO PARZIALE DISTRIBUITO CON LEGGE TRAPEZIA SUL TRONCO CB :

$$q_x = \frac{(x - a) q_1 + (l - x) q_a}{l - a} .$$

Sarà:

$$R = \frac{1}{40(l-a)l^3} [4l^5 - 20a^3l^2 + 20a^4l - 4a^5] q_a + \\ + (11l^5 - 15a^4l^4 + 5a^4l - a^5) q_l] .$$

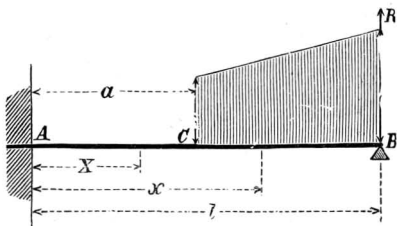


Fig 136.

e quindi:

$$H_X = \frac{1}{12EI} \left\{ (l-a)[q_a(2a+l) + q_l(2l+a) + (q_a + q_l)X] X^2 + \right. \\ \left. + R(2X^3 - 6lX^2) \right\} ,$$

$$\eta_x = \frac{1}{24EI} \left\{ q_a (x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2 - 4a^3x + a^4) + \right. \\ \left. + \frac{q_l - q_a}{5(l-a)} [x^5 - 5ax^4 + (20al - 10l^2)x^3 + \right. \\ \left. + (20l^3 - 30al^2)x^2 + 5a^4x - a^5] + R(4x^3 - 12lx^2) \right\} .$$

CARICO PARZIALE DISTRIBUITO CON LEGGE TRAPEZIA SUL TRONCO AC

$$q_X = \frac{(a-X)q_o + Xq_a}{a} .$$

L'equazione della linea elastica, dovuta a tutto il carico completo ABGE, è:

$$\eta_x' = \frac{1}{240EI} \left[(8q_o + 7q_a)l^2 - \right. \\ \left. (16q_o + 9q_a)lx + 10q_o x^2 - \frac{2(q_o - q_a)}{l} x^3 \right] x^2 ,$$

quando si considera un punto *d* della trave nel tronco CB; e quando si considera un punto *D* nel tronco AC l'equazione della linea elastica, dovuta a tutto il carico completo ABGE è ancora la stessa, salvo che bisogna scrivere *X* in luogo di *x*, di modo che

si ha:

$$H_X' = \frac{1}{240 EI} \left[(8 q_o + 7 q_a) l^2 - (16 q_o + 9 q_a) l X + 10 q_o X^2 - \frac{2 (q_o - q_a)}{l} X^3 \right] X^2 .$$

Rappresentando con η_x , H_X i valori delle ordinate della linea elastica dovuta al solo carico parziale $GFCB$, già trovati nel

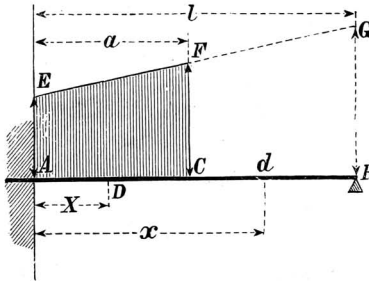


Fig 137.

caso precedente, e con η_x'' , H_X'' i valori delle ordinate domandate della linea elastica per il caso dato del carico parziale sul solo tronco AC , sarà:

$$H_X'' = H_X - H_X' ,$$

ed

$$\eta_x'' = \eta_x - \eta_x' .$$

Osservazione. Dalle formole, che abbiamo dato per il caso del carico distribuito con legge trapezia, si deducono facilmente la reazione R e le equazioni della linea elastica per i casi seguenti:

1.° *Pel carico parziale distribuito uniformemente sopra il tronco CB , o sopra il tronco AC , ponendo nelle formole date*

$$q_a = q_l = q = \text{cost.}$$

o

$$q_o = q_a = q = \text{cost.}$$

2.° *Pel carico parziale distribuito con legge triangolare, crescente o decrescente verso l'appoggio, sul tronco CB o sul tronco AC ponendo, a seconda del caso, $q_o = 0$, ovvero $q_a = 0$, ovvero $q_l = 0$.*

3.° *Pel carico completo ponendo $a = l$.*

CARICO DISTRIBUITO CON LEGGE TRIANGOLARE DECRESCENTE DALL'INCASTRO SU TUTTA LA PORTATA DELLA TRAVE:

$$q_x = q_0 \frac{l-x}{l} .$$

Sarà :

$$R = \frac{1}{10} q_0 l ;$$

$$\eta = \frac{q_0}{120 EI} \left(4l^2 - 8lx + 5x^2 - \frac{x^3}{l} \right) x^2 ,$$

$$M_x = \frac{q_0}{30} \left(2l^2 - 12lx + 15x^2 - \frac{5x^3}{l} \right) ,$$

$$T_x = \frac{q_0}{10} \left(-4l + 10x - \frac{5x^2}{l} \right) .$$

Il più grande momento inflettente ed il più grande sforzo di taglio hanno luogo all'incastro e sono :

$$M_0 = \frac{q_0 l^2}{15} , \quad T_0 = -\frac{2}{3} q_0 l .$$

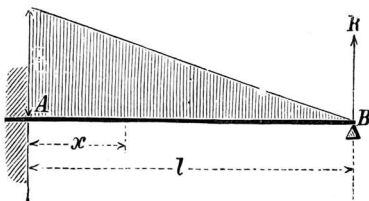


Fig. 138.

L'abbassamento massimo della trave ha luogo per

$$x = 0,55279 l ,$$

ed è :

$$\eta_{0,55279 l} = 0,002385 \frac{q_0 l^4}{EI} .$$

CARICO DISTRIBUITO CON LEGGE TRIANGOLARE, CRESCENTE DALL'INCASTRO, SU TUTTA LA PORTATA DELLA TRAVE:

$$q_x = ql \frac{x}{l} .$$

Si ha :

$$R = \frac{11}{40} ql l ;$$

$$\eta = \frac{q_l}{240 E I} \left(7 l^2 - 9 l x + \frac{2 x^3}{l} \right) x^2 ,$$

$$M_x = \frac{q_l}{120} \left(7 l^2 - 27 l x + 20 \frac{x^3}{l} \right) ,$$

$$T_x = \frac{q_l}{40} \left(-9 l + 20 \frac{x^2}{l} \right) .$$

Il più grande momento inflettente ha luogo all'incastro ed è:

$$M_o = \frac{7}{120} q_l l^2 .$$

Il più grande sforzo di taglio ha luogo all'appoggio ed è eguale alla reazione R .

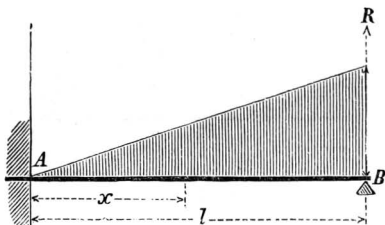


Fig. 139.

L'abbassamento massimo della trave ha luogo per

$$x = 0,60099 l ,$$

ed è:

$$\eta_{0,60099} l = 0,008438 \frac{q_l l^4}{E I} .$$

Formole particolari per un caso in cui la $q_x = f(x)$ è una funzione quadratica in x .

CARICO DISTRIBUITO CON LEGGE PARABOLICA SULL'INTERA PORTATA DELLA TRAVE. Sia il carico distribuito sull'intera portata secondo la legge delle ordinate q_x all'arco di parabola ordinaria avente il vertice in D e sia q l'ordinata massima tirata al vertice D . Sarà:

$$q_x = \frac{4q}{l^2} (lx - x^2) ; \quad R = \frac{7}{30} q l ;$$

$$\eta = \frac{q}{180 E I} \left(9 l^2 - 13 l x + \frac{6 x^3}{l} - \frac{2 x^4}{l^2} \right) x^2 ,$$

$$M_x = \frac{q}{30} \left(3 l^2 - 13 l x + \frac{20 x^3}{l} - \frac{10 x^4}{l^2} \right)$$

$$T_x = \frac{q}{30} \left(-13 l + \frac{60 x}{l} - \frac{40 x^3}{l^2} \right) .$$

L'abbassamento massimo della trave ha luogo per

$$x = 0,573 l ,$$

ed è:

$$\eta_{0,573 l} = 0,00448 \frac{q l^4}{E I} .$$

Il più grande momento inflettente ha luogo all'incastro ed è:

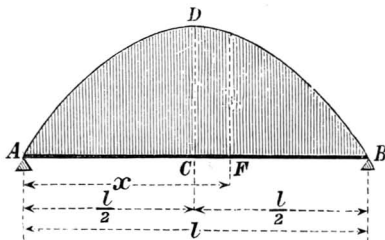


Fig. 140.

$$M_o = \frac{q l^2}{10} .$$

I più grandi sforzi di taglio sono due: l'uno ha luogo all'incastro, ed è:

$$T_o = -\frac{13}{30} q l .$$

l'altro ha luogo per

$$x = \frac{3}{2} l ,$$

ed esso pure è:

$$T_{\frac{3}{2} l} = -\frac{13}{30} q l .$$

D) Trave incastrata in ambedue le estremità.

Formole generali. Sia

$$q_x = f(x)$$

la legge di carico sul tronco AC, essendo il tronco CB scarico.

Chiamiamo M_l e T_l il momento inflettente e lo sforzo di taglio incogniti nella sezione in B . I valori di M_l e di T_l si determinano

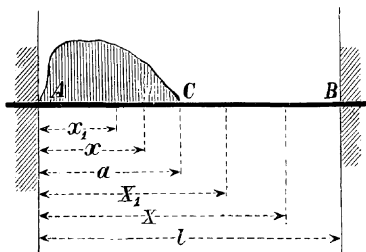


Fig. 141.

per mezzo delle formole:

$$M_l l - T_l \frac{l^2}{2} + \int_0^a \Psi(x_1) dx_1 = 0 ,$$

$$M_l \frac{l^2}{2} - T_l \frac{l^3}{3} + \int_0^a \Psi(x_1) dx_1 = 0 ,$$

essendo

$$\Psi(x_1) = \int_{x_1}^a f(x) (x - x_1) dx .$$

Determinati i valori di M_l e di T_l si calcolano le equazioni della linea elastica colle formole:

$$H_X = \frac{1}{EI} \left\{ M_l \frac{X^2}{2} - T_l \left(\frac{lX^2}{2} - \frac{X^3}{6} \right) + \int_0^a \Psi(x_1) (X - x_1) dx_1 \right\} ,$$

$$q_x = \frac{1}{EI} \left\{ M_l \frac{x^2}{2} - T_l \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \int_0^x \Psi(x_1) (x - x_1) dx_1 \right\} .$$

Formole particolari per il caso in cui la $q_x = f(x)$ è una costante.
CARICO PARZIALE UNIFORMEMENTE RIPARTITO SUL TRONCO A C :

$$q_x = q_a = q = \text{cost.} .$$

Sarà :

$$M_l = \frac{4 a^3 l - 3 a^4}{12 l^2} q ,$$

$$T_l = \frac{2 a^3 l - a^4}{2 l^3} q ;$$

e quindi:

$$v_x = \frac{q}{24 E I l^3} [l^3 x^4 + (4 a^3 l - 4 a l^3 - 2 a^4) x^3 + (6 a^2 l^3 - 8 a^3 l^2 + 3 a^4 l) x^2],$$

$$H_X = \frac{q}{24 E I l^3} [(4 a^3 l - 2 a^4) X^3 - (8 a^3 l^2 - 3 a^4 l) X^2 + 4 a^3 l^3 X - a^4 l^3];$$

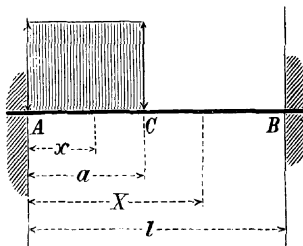


Fig. 142.

$$M_x = \frac{q}{12 l^3} [6 l^3 x^2 + (12 a^3 l - 12 a l^3 - 6 a^4) x + (6 a^2 l^3 - 8 a^3 l^2 + 3 a^4 l)],$$

$$M_X = \frac{q}{12 l^3} [(12 a^3 l - 6 a^4) X - (8 a^3 l^2 - 3 a^4 l)];$$

$$T_x = \frac{q}{2 l^3} (2 l^3 x + 2 a^3 l - 2 a l^3 - a^4),$$

$$T_X = \frac{q}{2 l^3} (2 a^3 l - a^4).$$

Formole particolari per i casi in cui la $q_x = f(x)$ è una funzione lineare in x .

CARICO PARZIALE RIPARTITO CON LEGGE TRAPEZIA SUL TRONCO A C:

$$q_x = \frac{(a-x) q_0 + x q_a}{a}.$$

Sarà:

$$M_l = \frac{(5 q_0 + 15 q_a) a^3 l - (3 q_0 + 12 q_a) a^4}{60 l^2},$$

$$T_l = \frac{(5 q_0 + 15 q_a) a^3 l - (2 q_0 + 8 q_a) a^4}{20 l^3}.$$

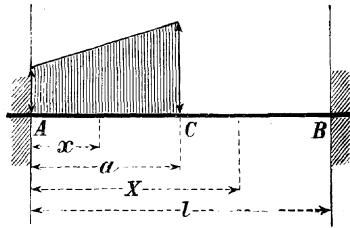


Fig. 143.

e quindi:

$$q_x = \frac{1}{120 E I a l^3} \left\{ (q_a - q_0) l^3 x^5 + 5 q_0 a l^3 x^4 + \right. \\ \left. + [(5 q_0 + 15 q_a) a^4 l - (2 q_0 + 8 q_a) a^5 - (10 q_0 + 10 q_a) a^2 l^3] x^3 + \right. \\ \left. + [(3 q_0 + 12 q_a) a^5 l - (10 q_0 + 30 q_a) a^4 l^2 + (10 q_0 + 20 q_a) a^3 l^3] x^2 \right\}, \\ H_X = \frac{1}{120 E I l^3} \left\{ [(5 q_0 + 15 q_a) a^3 l - (2 q_0 + 8 q_a) a^4] X^3 + \right. \\ \left. + [(3 q_0 + 12 q_a) a^4 l - (10 q_0 + 30 q_a) a^3 l^2] X^2 + \right. \\ \left. + (5 q_0 + 15 q_a) a^3 l^3 X - (q_0 + 4 q_a) a^4 l^3 \right\}$$

Osservazione. Da queste formole, pel caso del carico parziale trapezoidale, si deducono:

1.° Le formole pel carico parziale uniformemente ripartito, facendo $q_0 = q_a$;

2.° Le formole pel carico parziale triangolare crescente da $x = 0$ ad $x = a$, facendo $q_0 = 0$;

3.° Le formole pel carico parziale triangolare decrescente da $x = 0$ ad $x = a$, facendo $q_a = 0$;

4.° Le formole del carico completo su tutta la portata della trave, facendo $a = l$.

CARICO PARZIALE TRIANGOLARE DECRESCENTE DA UN INCASTRO FINO AD $x = a$:

$$q_x = q_0 \frac{a - x}{a}.$$

Si ha:

$$q_x = \frac{q_0}{120 E I a l^3} \left[- l^3 x^5 + 5 a l^3 x^4 + (5 a^4 l - 2 a^5 - 10 a^2 l^3) x^3 + \right. \\ \left. + (3 a^5 l - 10 a^4 l^2 + 10 a^3 l^3) x^2 \right],$$

$$H_X = \frac{q_0}{120 E I l^3} [(5 a^3 l - 2 a^4) X^3 + (3 a^4 l - 10 a^3 l^2) X^2 + 5 a^3 l^3 X - a^4 l^3] ,$$

e quindi:

$$M_x = \frac{q_0}{60 l^3 a} \{ 10 l^3 x^3 + 30 a l^3 x^2 + (15 a^4 l - 6 a^5 - 30 a^2 l^3) x + (3 a^5 l - 10 a^4 l^2 + 10 a^3 l^3) \} ,$$

$$M_X = \frac{q_0}{60 l^3} \{ (15 a^3 l - 6 a^4) X + (3 a^4 l - 10 a^3 l^2) \}$$

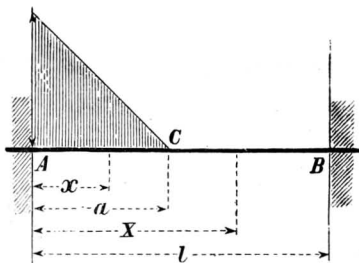


Fig. 144.

$$T_x = \frac{q_0}{20 l^3 a} \{ -10 l^3 x^2 + 20 a l^3 x + (5 a^4 l - 2 a^5 - 10 a^2 l^3) \} ,$$

$$T_X = \frac{q_0}{20 l^3} (5 a^3 l - 2 a^4 l) .$$

Osservazione. Se il carico parziale triangolare decrescente dall'incastro occupa metà della portata si deve fare $a = \frac{l}{2}$ nelle formule precedenti. Così le equazioni, per es. della linea elastica divengono in tal caso:

$$\eta_x = \frac{q_0}{1920 E I} \left(-32 \frac{x^5}{l} + 80 x^4 - 72 l x^3 + 23 l^2 x^2 \right) ,$$

$$H_X = \frac{q_0}{1920 E I} (8 l X^3 - 17 l^2 X^2 + 10 l^3 X - l^4) ,$$

le quali danno entrambe per l'abbassamento della trave nel punto di mezzo della portata:

$$\eta_{\frac{l}{2}} = H_{\frac{l}{2}} = \frac{3 q_0 l^4}{7680 E I} .$$

CARICO PARZIALE TRIANGOLARE CRESCENTE DA UN INCASTRO FINO AD $x = a$:

$$q_x = q_a \frac{x}{a} .$$

Sarà :

$$q_x = \frac{q_a}{120 E I a l^3} \{ l^3 x^5 + (15 a^4 l - 8 a^5 - 10 a^2 l^3) x^3 + \\ + (12 a^5 l - 30 a^4 l^2 + 20 a^3 l^3) x^3 \} ,$$

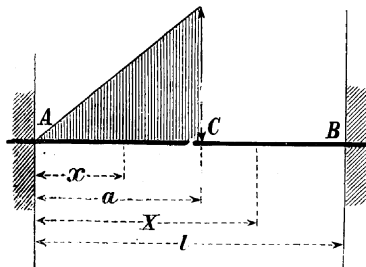


Fig. 145.

$$H_X = \frac{q_a}{120 E I l^3} \{ (15 a^3 l - 8 a^4) X^3 + (12 a^4 l - 30 a^3 l^2) X^2 + \\ + 15 a^3 l^3 X - 4 a^4 l^3 \} ,$$

e quindi :

$$M_x = \frac{q_a}{60 a l^3} [10 l^3 x^3 + (45 a^4 l - 24 a^5 - 30 a^2 l^3) x + \\ + (12 a^5 l - 3) a^4 l^2 + 2) a^3 l^3] ,$$

$$M_X = \frac{q_a}{60 l^3} [(45 a l^3 - 24 a^4) X + (24 a^4 l - 60 a^3 l^2)] ;$$

$$T_x = \frac{q_a}{20 l^3 a} [10 l^3 x^2 + (15 a^4 l - 8 a^5 + 10 a^2 l^3)] ,$$

$$T_X = \frac{q_a}{20 l^3} (15 a^3 l - 8 a^4) .$$

Se $a = \frac{l}{2}$ le equazioni della linea elastica divengono :

$$q_x = \frac{q_a}{960 E I} \left(\frac{16 x^5}{l} - 29 l x^3 + 16 l^2 x^2 \right) ,$$

$$H_X = \frac{q_a}{960 EI} (11 l X^3 - 24 l^2 X^2 + 15 l^3 X - 2 l^4) ;$$

e l'abbassamento del punto di mezzo della trave è:

$$\eta_{\frac{l}{2}} = H_{\frac{l}{2}} = \frac{7 q_a l^4}{7680 EI} .$$

CARICO TRIANGOLARE COMPLETO SU TUTTA LA PORTATA, DECRESCENTE DAL MEZZO DELLA PORTATA, DOVE È $q_{\frac{l}{2}} = q$, AGLI INCASTRI, DOVE È NULLO. Sarà per il tronco A C :

$$\eta_{x'} = \frac{q}{960 EI} \left(16 \frac{x'^5}{l} - 40 l x'^3 + 25 l^2 x'^2 \right) ,$$

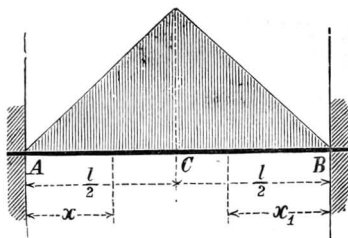


Fig. 146.

e per il tronco CB varrà la stessa equazione, purchè facciasi $x = x_1$ cioè prendasi B . invece di A , per origine delle coordinate.

Inoltre si avrà :

$$\eta_{\frac{l}{2}} = \frac{7 q l^4}{3840 EI} ;$$

$$M_{x'} = \frac{q}{96} \left(32 \frac{x'^3}{l} - 24 l x' + 5 l^2 \right) , \quad T_{x'} = \frac{q}{4} \left(\frac{4 x'^2}{l} - l \right) ;$$

$$M_{\frac{l}{2}} = -\frac{q l^2}{32} , \quad M_o = \frac{5 q l^2}{96}$$

CARICO TRIANGOLARE COMPLETO SU TUTTA LA TRAVE, CRESCENTE DAL MEZZO DELLA PORTATA, DOVE È NULLO, AGLI INCASTRI, DOVE È q .

Sarà per il tronco A C :

$$\eta_{x'} = \frac{q}{960 EI} \left(-\frac{16 x'^5}{l} + 40 x'^4 - 40 l x'^3 + 15 l^2 x'^2 \right)$$

e pel tronco CB varrà la stessa equazione, purchè facciasi $x = x_1$, cioè si prenda B , in luogo di A , per origine delle coordinate.

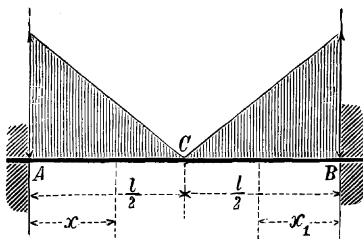


Fig. 147.

Inoltre si avrà :

$$q \frac{l}{2} = \frac{3 q l^4}{3840 E I} ;$$

$$M_x = \frac{q}{96} \left(-\frac{32 x^3}{l} + 48 x^2 - 24 l x + 3 l^2 \right) ,$$

$$M_{\frac{l}{2}} = -\frac{q l^2}{96} ; \quad M_o = \frac{q l^2}{32} ;$$

$$T_x = \frac{q}{4} \left(-\frac{4 x^2}{l} + x - l \right) .$$

CARICO TRIANGOLARE COMPLETO SU TUTTA LA TRAVE CRESCENTE DA UN INCASTRO ALL'ALTRO :

$$q_x = q l \frac{x}{l} .$$

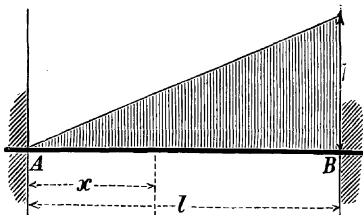


Fig. 148.

Si ha :

$$q = \frac{q l}{120 E I} \left(2 l^2 - 3 l x + \frac{x^3}{l} \right) x^2 ,$$

$$M_x = \frac{q_l}{60} \left(2l^2 - 9lx + 10 \frac{x^3}{l} \right), \quad T_x = \frac{q_l}{20} \left(-9l + \frac{10x^2}{l} \right);$$

$$M_o = \frac{q_l}{30} l^2, \quad M_l = \frac{q_l}{20} l^2;$$

$$T_o = -\frac{3}{20} q_l l, \quad T_l = \frac{7}{20} q_l l.$$

Il massimo abbassamento della trave ha luogo per

$$x = 0,5248 l,$$

ed è:

$$\eta_{0,5248 l} = 0,001308 \frac{q_l l^4}{EI}.$$

CARICO COMPLETO DISTRIBUITO CON LEGGE TRAPEZIA SU TUTTA LA PORTATA:

$$q_x = \frac{x q_l + (l-x) q_o}{l}$$

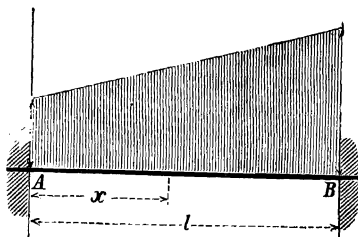


Fig. 149.

Sarà:

$$\eta = \frac{1}{120 EI} \left[(3 q_o + 2 q_l) l^2 - (7 q_o + 3 q_l) l x + 5 q_o x^2 + (q_l - q_o) \frac{x^3}{l} \right] x^2;$$

$$M_x = \frac{1}{60} \left[(3 q_o + q_l) l^2 - (21 q_o + 9 q_l) l x + 30 q_o x^2 + 10 (q_l - q_o) \frac{x^3}{l} \right],$$

$$T_x = \frac{1}{20} \left[-(7 q_o + 3 q_l) l + 20 q_o x + 10 (q_l - q_o) \frac{x^2}{l} \right],$$

$$M_l = \frac{2 q_o + 3 q_l}{60} l^2, \quad T_l = \frac{3 q_o + 7 q_l}{20} l;$$

Formole particolari per un caso in cui la $q_x = f(x)$ è una funzione quadratica in x .

CARICO DISTRIBUITO CON LEGGE PARABOLICA SU TUTTA LA PORTATA. Sia il carico distribuito sull'intera portata secondo la legge delle

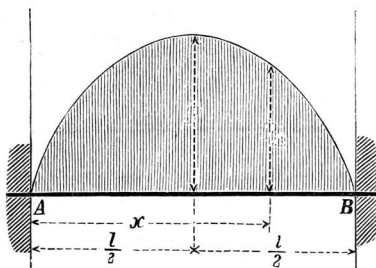


Fig. 150.

ordinate q_x all'arco di parabola ordinaria avente il vertice in D , e sia q l'ordinata tirata al vertice D .

Sarà:

$$q_x = \frac{4}{l^2} q (lx - x^2) ;$$

$$M_l = \frac{ql^2}{15} , \quad T_l = \frac{ql}{3} ;$$

$$\eta = \frac{q}{90EI} \left(3l^2 - 5lx + \frac{3x^3}{l} - \frac{x^4}{l^2} \right) x^2 ;$$

$$M_x = \frac{q}{15} \left(l^2 - 5lx + \frac{10x^3}{l} - \frac{5x^4}{l^2} \right) ,$$

$$T_x = \frac{q}{3} \left(-l + \frac{6x^2}{l} - \frac{4x^3}{l^2} \right) .$$

Il massimo abbassamento della trave ha luogo nel mezzo della portata ed è:

$$\eta_{\frac{l}{2}} = 0,00226 \frac{ql^4}{EI} .$$

Osservazione. Colle formole date in questo numero si possono determinare le linee elastiche, i momenti inflettenti e gli sforzi di taglio per molte altre maniere di carico applicando il principio della sovrapposizione degli effetti. Così, per es., comunque sia trattata la trave nelle sue estremità A, B se sul solo tronco CD della portata si avesse un carico trapezio, essendo scarichi i tron-

chi AC, DB , si troverà l'equazione della linea elastica per ciascun tronco della trave calcolando prima la ordinata η della linea ela-

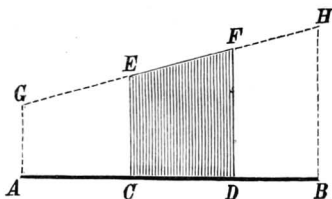


Fig. 151.

stica pel carico $AGHB$, che si imagina completo su tutta la portata, e le ordinate η_1 ed η_2 , pei carichi $AGEC$ solo, ed $FHBD$ solo. L'ordinata η_3 , pel carico $CEFD$ dato sul solo tronco CD , sarà :

$$\eta_3 = \eta - \eta_1 - \eta_2.$$

Analogamente si procede per determinare i momenti e gli sforzi di taglio.

10. — Trave continua su più appoggi fissi o compressibili.

A) Teorema dei tre momenti.

a) Gli appoggi sono fissi. Sia $ZA_1A_2A_3Z$ una trave continua su più appoggi, e consideriamo due travate consecutive A_1A_2, A_2A_3 qualunque, di luce l_1, l_2 . Denotiamo con M_1, M_2, M_3 i momenti

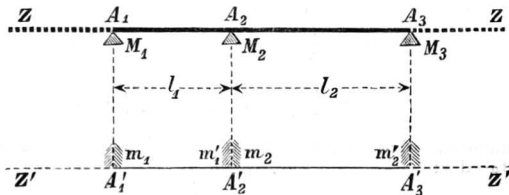


Fig. 152.

inflettenti che hanno luogo sugli appoggi A_1, A_2, A_3 della trave continua, con m_1, m_1' i momenti inflettenti che si produrrebbero alle sezioni d'incastro in A_1', A_2' della travata A_1A_2 , se questa travata fosse incastrata nelle sue estremità, e con m_2, m_2' i momenti inflettenti che si produrrebbero alle sezioni d'incastro in A_2', A_3' della travata A_2A_3 , se questa travata fosse incastrata nelle

sue estremità; si avrà la seguente relazione fra i momenti incogniti M_1, M_2, M_3 ed i momenti cognitivi m_1, m_1', m_2, m_2' :

$$M_1 l_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 = (m_1 + 2 m_1') l_1 + (2 m_2 + m_2') l_2 .$$

Questa relazione è sempre vera, essendo fissi gli appoggi, per qualsivoglia legge di carico parziale o completo.

b) Gli appoggi sono soggetti ad abbassamento. Siano A_1, A_2, A_3 , le posizioni primitive degli appoggi che non hanno ancora ceduto ed A_1', A_2', A_3' le posizioni degli appoggi dopo avvenuto il loro abbassamento, e rappresentiamo con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ il cedimento rispettivo dei tre appoggi A_1, A_2, A_3 .

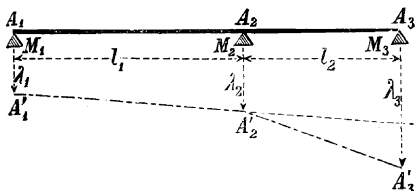


Fig. 153.

Rappresentiamo con L il lavoro di deformazione della travata $A_1 A_2$, espresso in funzione dei momenti M_1, M_2 , prendendo A_1 per origine delle coordinate, e con L' il lavoro di deformazione della travata $A_2 A_3$, espresso in funzione dei momenti M_3, M_2 , prendendo A_3 per origine delle coordinate. Qualunque sia la legge di carico, e purchè gli abbassamenti degli appoggi siano molto piccoli, ha sempre luogo la seguente relazione:

$$\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{l_2} - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{l_1} = \frac{dL}{dM_2} + \frac{dL'}{dM_2} .$$

Quando l'abbassamento degli appoggi fosse nullo, questa relazione si riduce a:

$$\frac{dL}{dM_2} + \frac{dL'}{dM_2} = 0 .$$

CARICO CONCENTRATO. Se sulle due travate contigue si trovano i carichi concentrati P_1, P_2 , si avrà:

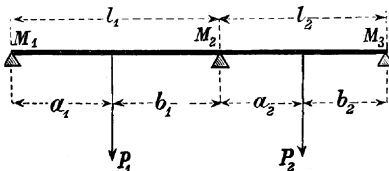


Fig. 154.

$$M_1 l_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 = \frac{P_1 a_1}{l_1} (l_1^2 - a_1^2) + \frac{P_2 b_2}{l_2} (l_2^2 - b_2^2) + 6 EI \left(\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{l_2} - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{l_1} \right)$$

quando gli appoggi si abbassano di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Se l'abbassamento degli appoggi è nullo, cioè se gli appoggi sono fissi, sarà:

$$M_1 l_1 + 2 (l_1 + l_2) M_2 + M_3 l_2 = \frac{P_1 a_1}{l_1} (l_1^2 - a_1^2) + \frac{P_2 b_2}{l_2} (l_2^2 - b_2^2) .$$

CARICO TRAPEZIO COMPLETO SU CIASCUNA TRAVATA: q_1', q_2' per gli appoggi in A_1, A_2 della 1.^a travata l_1 ; e q_2'', q_3'' per gli appoggi in A_2, A_3 della 2.^a travata l_2 .

In questo caso l'equazione dei tre momenti, se gli appoggi cedono, è:

$$M_1 l_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 = \frac{(7 q_1' + 8 q_2') l_1^3 + (7 q_2'' + 8 q_3'') l_2^3}{60} + 6 EI \left(\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{l_2} - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{l_1} \right)$$

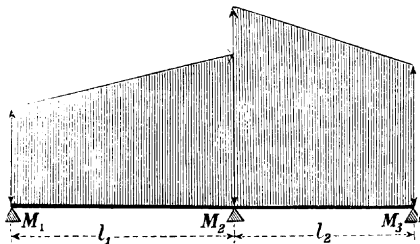


Fig. 155.

Se gli appoggi sono fissi si ha la stessa relazione, salvo che è nullo il termine

$$6 EI \left(\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{l_2} - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{l_1} \right) .$$

CARICO COMPLETO UNIFORMEMENTE RIPARTITO: q' per la 1.^a travata l_1 ; q'' per la 2.^a travata l_2 .

Per il caso che gli appoggi cedano si ha:

$$l_1 M_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 = \frac{q' l_1^3 + q'' l_2^3}{4} + 6 EI \left(\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{l_2} - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{l_1} \right) .$$

Se gli appoggi sono fissi si ha:

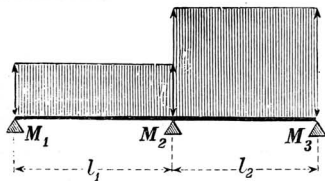


Fig. 156.

$$l_1 M_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 = \frac{1}{4} (q' l_1^3 + q'' l_2^3) .$$

CARICO TRIANGOLARE COMPLETO DECRESCENTE DAGLI APPOGGI ESTREMI A_1, A_3 , DOVE È q , ALL'APPOGGIO INTERMEDIO A_2 , DOVE È NULLO, ES-

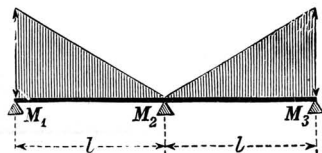


Fig. 157.

SENDO LE TRAVATE EGUALI. In questo caso supponendo fissi gli appoggi, si ha:

$$M_1 + 4 M_2 + M_3 = \frac{7}{30} q l^2$$

CARICO TRIANGOLARE COMPLETO CRESCENTE DA UN APPOGGIO ESTREMO, DOVE È NULLO, ALL'ALTRO, DOVE È q_3 , ESSENDO LE TRAVATE EGUALI. Si

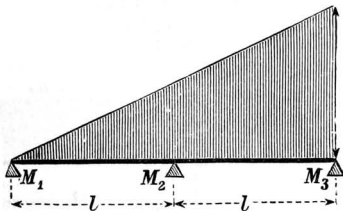


Fig. 158.

ha per gli appoggi fissi:

$$M_1 + 4 M_2 + M_3 = \frac{q_3 l^2}{4}$$

CARICO TRIANGOLARE COMPLETO CRESCENTE DAGLI APPOGGI ESTREMI, DOVE È NULLO, ALL'APPOGGIO INTERMEDIO, DOVE È q_2 , ESSENDO LE

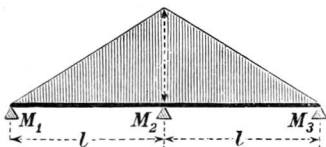


Fig. 159.

TRAVATE EGUALI. Si ha per gli appoggi fissi :

$$M_1 + 4 M_2 + M_3 = \frac{4}{15} q_2 l^2 .$$

CARICO TRIANGOLARE COMPLETO DECRESCENTE DAL MEZZO DI CIA-

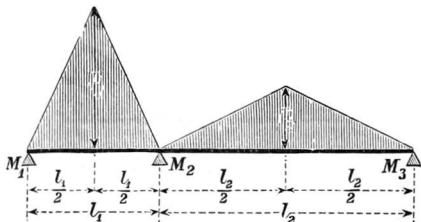


Fig. 160.

SCUNA TRAVATA, DOVE È RISPETTIVAMENTE q_1 , q_2 , VERSO I SUOI APPOGGI, DOVE È NULLO. Essendo gli appoggi fissi, si ha :

$$M_1 l_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 = \frac{5}{32} (q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3) .$$

CARICO PARZIALE UNIFORMEMENTE RIPARTITO q_1 , q_2 , SUI TRONCHI ESTREMI DELLE DUE TRAVATE. Gli appoggi essendo fissi la relazione dei tre momenti in questo caso è :

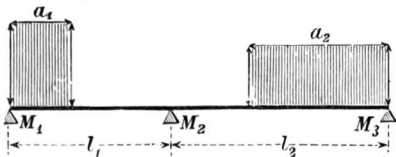


Fig. 161.

$$M_1 l_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 = \frac{1}{4} \left[q_1 (2 l_1^2 - a_1^2) \frac{a_1^2}{l_1} + q_2 (4 l_2^2 - 4 a_2 l_2 + a_2^2) \frac{a_2^2}{l_2} \right] .$$

CARICO PARZIALE UNIFORMEMENTE RIPARTITO q_1, q_2 , IN UNA POSIZIONE QUALUNQUE SULLE TRAVATE. Gli appoggi essendo fissi si ha:

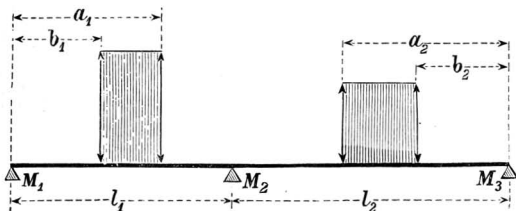


Fig. 162.

$$M_1 l_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l = \frac{q_1}{4} \left[2 l_1 (a_1^2 - b_1^2) - \frac{a_1^4 - b_1^4}{l_1} \right] +$$

$$+ \frac{q_2}{4} \left\{ 4 l_2 [a_2^2 - b_2^2 - 4(a_2^3 - b_2^3)] + \frac{a_2^4 - b_2^4}{l_2} \right\}$$

B) Momento di flessione e sforzo di taglio in una sezione qualunque di una travata qualunque per qualsivoglia legge di carico. Sia AB una travata qualunque della trave continua, e con-

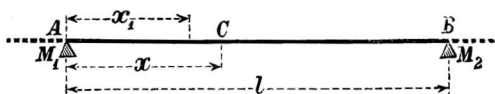


Fig. 163.

sideriamo una sezione qualunque fatta in questa travata in C a distanza x dall'appoggio A .

Sia l la luce della travata, M_1 ed M_2 i momenti inflettenti sui suoi appoggi, $\varphi(x)$ il momento di tutti i carichi situati sul tronco CB ; il momento inflettente M_x , e lo sforzo di taglio T_x , nella sezione in C , saranno dati da:

$$M_x = M_1 \frac{l-x}{l} + M_2 \frac{x}{l} + \varphi(0) \frac{l-x}{l} + \varphi(x),$$

$$T_x = \frac{M_2 - M_1}{l} - \frac{\varphi(0)}{l} + \varphi'(x),$$

esprimendo con $\varphi'(x)$ la derivata di $\varphi(x)$ (*).

(*) La reazione R_2 di un appoggio qualunque B è data da $R_2 = +T - T'$ essendo T ed T' gli sforzi di taglio sull'appoggio B da una parte e dall'altra dell'appoggio stesso.

C) **Equazione della linea elastica e freccia d'inflexione in una travata qualunque.** Qualunque sia la legge di carico, se questo è completo su una travata qualunque, si ha:

$$\eta = -\frac{l-x}{l} \int_0^x \frac{M_{x_1} x_1}{EI} dx_1 - \frac{x}{l} \int_0^x \frac{M_{x_1} (l-x_1)}{EI} dx_1,$$

o più esattamente, volendo tener conto anche della parte dovuta agli sforzi di taglio

$$\eta = -\frac{l-x}{l} \left[\int_0^x \frac{M_{x_1} x_1}{EI} dx_1 + \int_0^x \frac{A T_{x_1}}{E_t \Omega} dx_1 \right] - \frac{x}{l} \left[\int_x^l \frac{M_{x_1} (l-x_1)}{EI} dx_1 - \int_x^l \frac{A T_{x_1}}{E_t \Omega} dx_1 \right].$$

La freccia d'inflexione f nel mezzo della travata sarà:

$$f = -\frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_{x_1} x_1}{EI} dx_1 + \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{M_{x_1} (l-x_1)}{EI} dx_1 \right],$$

ovvero più esattamente, volendo tener conto della parte dovuta agli sforzi di taglio,

$$f = -\frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_{x_1} x_1}{EI} dx_1 + \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{M_{x_1} (l-x_1)}{EI} dx_1 \right] - \frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{A T_{x_1}}{E_t \Omega} dx_1 - \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{A T_{x_1}}{E_t \Omega} dx_1 \right].$$

Se invece il carico è parziale sopra una travata qualunque, e situato verso un appoggio sul tronco CB , le equazioni della linea elastica sono:

$$H_X = \left[-\frac{l-X}{l} \int_0^X \frac{x_1 M_{x_1}}{EI} dx_1 - \frac{X}{l} \int_X^a \frac{(l-x_1) M_{x_1}}{EI} dx_1 \right],$$

$$v_x = \left[-\frac{l-x}{l} \int_0^a \frac{X_1 M_{X_1} dX_1}{EI} - \frac{l-x}{l-a} \int_a^x \frac{(x_1 - a) M_{x_1} dx_1}{EI} - \frac{x-a}{l-a} \int_x^l \frac{(l-x_1) M_{x_1} dx_1}{EI} \right],$$

nelle quali la parte dovuta agli sforzi di taglio venne trascurata.

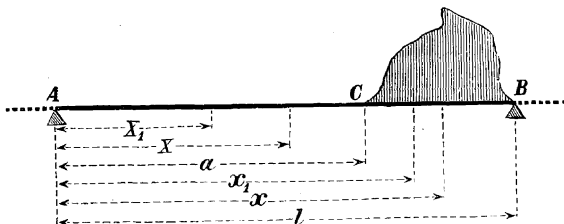


Fig. 164.

Se il carico parziale è situato in una posizione qualunque della portata le equazioni della linea elastica si determinano applicando il principio della sovrapposizione degli effetti.

La freccia d'inflessione nel punto di mezzo della travata si ottiene dall'una o dall'altra delle equazioni della linea elastica ponendo $X = \frac{l}{2}$ se il punto di mezzo è scarico, oppure ponendo $x = \frac{l}{2}$ se il punto stesso è carico.

11. — Freccia d'inflessione di una trave, a sezione simmetricamente variabile rispetto alla sua mezzeria, posta su due appoggi, e dovuta ad un carico completo uniformemente ripartito.

Se una trave su due appoggi ha le sezioni variabili, ma *simmetricamente* rispetto alla sua mezzeria, come sarebbe per es., una *trave parabolica*, e se su essa gravita un *carico completo uniformemente ripartito* di q unità di peso per unità di lunghezza di trave, la freccia d'inflessione si ottiene *approssimativamente* nel modo seguente.

Si supponga suddivisa ciascuna metà della trave in tronchi

$$a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, \frac{1}{2}l - a_6$$

simmetrici rispetto alla mezzeria, e tali che i due tronchi estremi a_1 abbiano il momento d'inerzia *prossimamente* costante ed uguale

si avrà :

$$f'' = \frac{q}{4 E_t} \left[l \left\{ \frac{A_1}{\Omega_1} \alpha_1 + \frac{A_2}{\Omega_2} (\alpha_2 - \alpha_1) + \dots + \frac{A_{\frac{1}{2}}}{\Omega_{\frac{1}{2}}} l \left(\frac{1}{2} l - \alpha_n \right) \right\} - \left\{ \frac{A_1}{\Omega_1} \alpha_1^2 + \frac{A_2}{\Omega_2} (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) + \dots + \frac{A_{\frac{1}{2}}}{\Omega_{\frac{1}{2}}} l \left(\frac{1}{4} l^2 - \alpha_n^2 \right) \right\} \right]$$

In generale avviene che per le travi a parete piena *i tronchi* siano i medesimi tanto per rapporto alla flessione che al taglio; per le travi a traliccio invece i tronchi in cui fu divisa la trave per rapporto alla flessione sono in generale diversi da quelli in cui la si deve dividere per rapporto al taglio, cioè gli α sono diversi dagli α .

Per le travi a traliccio l'ultima formola dev'essere modificata sostituendo, al coefficiente E_t di elasticità trasversale, il coefficiente E' di elasticità longitudinale delle barre del traliccio, ed alla sezione Ω della trave la sezione ω delle sbarre del traliccio.

12. — Travata di una trave continua o di una trave ad un'unica campata a sezione costante oppure variabile comunque o simmetricamente rispetto alla sua mezzeria, su due appoggi, sollecitata da un numero qualunque di carichi concentrati in diversi punti.

Le membrature dei ponti metallici sono generalmente disposte in modo che il sovracarico si trasmette alle travi principali per mezzo di travicelli trasversali eccettochè nelle travate di piccola luce nelle quali questi mancano; dimodochè, anche formando il sovracarico con materiale uniformemente distribuito sul pavi-

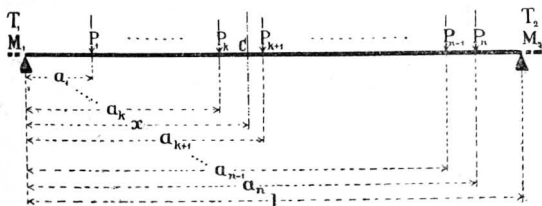


Fig. 166.

mento del ponte, le travi maestre vengono ad essere sollecitate da pesi effettivamente discontinui concentrati in diversi punti.

Per i ponti, specialmente di grande portata, conviene quindi te-

ner conto dell'effettiva distribuzione del sovracarico e della sezione variabile delle travi principali.

A) Momenti di flessione e sforzi di taglio.

Sia una travata qualunque (fig. 166) a sezione costante o variabile comunque, di una trave continua: M_1 , T_1 , M_2 , T_2 e M_x , T_x i momenti flettenti e gli sforzi di taglio agli appoggi sinistro, destro ed in una sezione C qualsiasi comprese fra due carichi qualunque P_k , P_{k+1} .

Sarà:

$$M_x = \left[M_1 + \sum_{\nu=k-1}^{\nu=n} a_\nu P_\nu \right] \frac{l-x}{l} + M_2 \frac{x}{l} + \sum_{\nu=k+1}^{\nu=n} (a_\nu - x) P_\nu \quad (1)$$

$$T_x = - \left[M_1 + \sum_{\nu=k-1}^{\nu=n} a_\nu P_\nu \right] \frac{1}{l} + M_2 \frac{1}{l} - \sum_{\nu=k+1}^{\nu=n} P_\nu \quad (2).$$

Se la travata fosse *unica indipendente* con le estremità su due appoggi, M_x , T_x sono ancora dati dalle precedenti formole ponendo in esse

$$M_1 = 0, \quad M_2 = 0.$$

B) Freccia d'inflessione nel mezzo della travata (*).

a) Travata a sezione variabile comunque o simmetricamente rispetto alla sua mezzeria.

Sia la travata (fig. 167) suddivisa in tronchi di lunghezza

$$a_1, \quad a_2 - a_1, \quad \dots, \quad l - a_n,$$

aventi rispettivamente *costanti* i momenti d'inerzia

$$I_1, \quad I_2, \quad \dots, \quad I_n$$

della sezione trasversale; come pure in tronchi di lunghezza

$$a_1, \quad a_2 - a_1, \quad \dots, \quad l - a_p,$$

aventi rispettivamente *costanti* le quantità

$$\frac{A_1}{\Omega_1}, \quad \frac{A_2}{\Omega_2}, \quad \dots, \quad \frac{A_p}{\Omega_p}$$

della sezione trasversale.

(*) Da una Memoria dell'ingegnere del Genio Civile, Sig. Francesco Cavaliere (*Giornale del Genio Civile* — 1892, pag. 84), nella quale si trova pure un'applicazione numerica della teoria esposta al calcolo del ponte sul torrente Mela nel tronco S. Filippo-Barcellona (ferrovia Messina-Patti-Cerda).

Supponiamo che $a_m - a_b$ sia il tronco che comprende la mezzeria della travata e si tenga presente che rispettivamente con α_a e

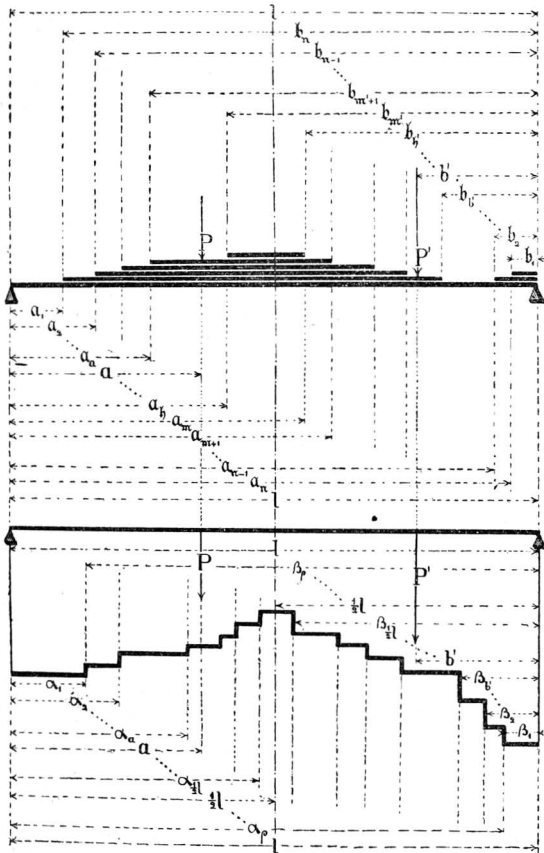


Fig. 167.

α_a si intenderà d'indicare quello degli α e quello degli α immediatamente più piccolo di a .

La freccia d'inflessione nel mezzo della travata, dovuta ad un peso P , situato a distanza $a < \frac{1}{2}l$ dall'appoggio di sinistra, essendo M_1 e M_2 i momenti flettenti sugli appoggi sinistro e destro e T_2 lo sforzo di taglio sull'appoggio di destra, è data dalla:

$$\begin{aligned}
 f = \frac{M_1 - Pu}{12EI} & \left\{ \begin{aligned} & \frac{3l\alpha_1^2 - 2\alpha_1^3}{I_1} - \frac{3l(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) - 2(\alpha_2^3 - \alpha_1^3)}{I_2} \\ & \dots - \frac{3l\left(\frac{1}{4}l^2 - \alpha_b^2\right) - 2\left(\frac{1}{8}l^3 - \alpha_b^3\right)}{I_{\frac{1}{2}l}} + \\ & \frac{6l\left(\alpha_m^2 - \frac{1}{4}l^2\right) - 6l^2\left(\alpha_m - \frac{1}{2}l\right) - 2\left(\alpha_m^3 - \frac{1}{8}l^3\right)}{I_{\frac{1}{2}l}} + \\ & \frac{6l\left(\alpha_{m+1}^2 - \alpha_m^2\right) - 6l^2\left(\alpha_{m+1} - \alpha_m\right) - 2\left(\alpha_{m+1}^3 - \alpha_m^3\right)}{I_{m+1}} + \\ & \dots + \frac{6l(l^2 - \alpha_{n+1}^2) - 6l^2(l - \alpha_{n+1}) - 2(l^3 - \alpha_{n+1}^3)}{I_n} \end{aligned} \right\} + \\
 & \left\{ \begin{aligned} & -2\left\{ \frac{\alpha_1^3}{I_1} + \frac{\alpha_2^3 - \alpha_1^3}{I_2} + \dots + \frac{\frac{1}{8}l^3 - \alpha_b^3}{I_{\frac{1}{2}l}} \right\} - \\ & \frac{3l\left(\alpha_{m+1}^2 - \frac{1}{4}l^2\right) - 2\left(\alpha_{m+1}^3 - \frac{1}{8}l^3\right) - 3l\left(\alpha_{m+1}^2 - \alpha_m^2\right) - 2\left(\alpha_{m+1}^3 - \alpha_m^3\right)}{I_{\frac{1}{2}l}} - \\ & \dots - \frac{3l(l^2 - \alpha_{n+1}^2) - 2(l^3 - \alpha_{n+1}^3)}{I_n} \end{aligned} \right\} + \\
 & + \frac{M_2}{12EI}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{P}{12E} \left\{ - \frac{3 a a_1^2}{I_1} - \frac{2 a_1^3}{I_2} - \frac{3 a (a_2^2 - a_1^2) - 2 (a_2^3 - a_1^3)}{I_2} - \dots - \frac{3 a (a^2 - a_{\alpha}^2) - 2 (a^3 - a_{\alpha}^3)}{I_{\alpha}} \right\} + \\
 & + \frac{T_2}{E_t} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left[\frac{A_1}{\Omega_1} a_1 + \frac{A_2}{\Omega_2} (a_2 - a_1) + \dots + \frac{A_{\rho}}{\Omega_{\rho}} (l - a_{\rho}) \right] - \right. \right. \\
 & \left. \left[\frac{A_1}{\Omega_1} a_1 + \frac{A_2}{\Omega_2} (a_2 - a_1) + \dots + \frac{A_{\frac{1}{2}}}{\Omega_{\frac{1}{2}}} l \left(\frac{1}{2} l - a_{\frac{1}{2}} \right) \right] \right\} + \\
 & + \frac{P}{2E_t} \left[\frac{A_1}{\Omega_1} a_1 + \frac{A_2}{\Omega_2} (a_2 - a_1) + \dots + \frac{A_{\alpha}}{\Omega_{\alpha}} (a - a_{\alpha}) \right] \quad (3) .
 \end{aligned}$$

In questa espressione nei coefficienti di $\frac{M_1 - P_{\alpha}}{12 E I}$ e di $\frac{M_2}{12 E l}$ vi figurano due frazioni aventi a denominatore $I_{\frac{1}{2} l}$; però è da osservarsi che nella 1.^a di queste due frazioni il denominatore è il momento d'inerzia della sezione nel tratto di trave $\frac{1}{2} l - a_{\frac{1}{2}}$, mentre nella 2.^a è il momento d'inerzia della sezione nel tratto di trave $a_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} l$. Siccome vi è sempre un tratto a sezione costante, che comprende la mezzeria della trave, così si è posto $I_{\frac{1}{2} l}$ al denominatore di entrambe tali due frazioni.

Si dica analogamente per i due termini in $\frac{A_{\frac{1}{2}} l}{\Omega_{\frac{1}{2}} l}$ che figurano

nel coefficiente di $\frac{T_2}{E_t}$.

Se invece sulla travata gravita un peso P' posto alla distanza $b < \frac{1}{2} l$ dall'appoggio di destra, la freccia f' nel mezzo della travata sarà data dall'espressione, che distingueremo con (3'), e che si ottiene dalla (3) ponendovi gli elementi indicativi della figura rovesciata, ossia cambiando nella (3) gli elementi

$$a_1, a_2, \dots, a_{\alpha}, a_{\beta}, a_{\text{III}}, a_{\text{III} - 1}, \dots, a_{\text{II}} ;$$

$$a_1, a_2, \dots, a_{\alpha}, \dots, a_{\frac{1}{2} l}, \dots, a_r ; u ;$$

$$I_1, I_2, \dots, I_a, \dots, I_{\frac{1}{2}}, I_{m+1}, \dots, I_{11};$$

$$\frac{A_1}{\Omega_1}, \frac{A_2}{\Omega_2}, \dots, \frac{A_a}{\Omega_a}, \dots, \frac{A_{\frac{1}{2}} l}{\Omega_{\frac{1}{2}} l}, \dots, \frac{A_r}{\Omega_r};$$

$$M_1, M_2, T_2, P$$

rispettivamente con gli

$$b_1, b_2, \dots, b_b, b_{b'}, b_{m'}, b_{m'+1}, \dots, b_{11};$$

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_b, \dots, \beta_{\frac{1}{2}} l, \beta_r; b;$$

$$I_{11}, I_{n-1}, \dots, I_b, \dots, I_{\frac{1}{2}} l, I_{11} - (m+1), \dots, I_1;$$

$$\frac{A_r}{\Omega_r}, \frac{A_{r-1}}{\Omega_{r-1}}, \dots, \frac{A_b}{\Omega_b}, \dots, \frac{A_{\frac{1}{2}} l}{\Omega_{\frac{1}{2}} l}, \dots, \frac{A_1}{\Omega_1},$$

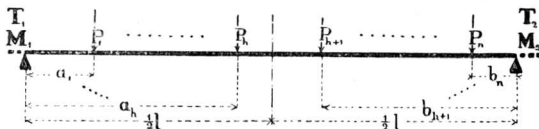
$$M_2', M_1', T_1', P'$$

dove si è segnato con un apice i momenti inflettenti M_2', M_1' sugli appoggi destro e sinistro e lo sforzo di taglio T_1' sull'appoggio sinistro per distinguerli dagli altri M_1, M_2 e T_1 relativi al caso precedente.

Qui il tronco che comprende la mezzera della travata si è indicato con $b_{m'} - b_{b'}$ e con b_b e β_b quello dei b e quello dei β immediatamente più piccolo di b .

Se contemporaneamente insistono sulla trave i pesi P, P' il 1.º alla distanza $a < \frac{1}{2} l$ dall'appoggio di sinistra e il 2.º alla distanza $b < \frac{1}{2} l$ da quello di destra, per il principio della sovrapposizione degli effetti, la freccia complessiva si otterrà sommando le due espressioni di f e f' .

Se si ha un sistema di pesi concentrati $P_1 \dots P_n$ sulla travata, l'espressione della freccia f nel mezzo della travata stessa sarà:



(Travata a sezione variabile come nella fig. 167).

Fig. 168.

$$\begin{aligned}
 f = & \frac{\sum_{\nu=1}^{\nu=h} P_{\nu} a_{\nu} - \mathbf{M}_1}{12 E l} \left[2 \left\{ \frac{b_1^3}{I_{11}} + \frac{b_2^3 - b_1^3}{I_{11-1}} + \dots + \frac{1}{8} \frac{l^3 - b_b^3}{I_{\frac{1}{2}} l} \right\} - \right. \\
 & \frac{2 \left(b_{m'}^3 - \frac{1}{8} l^3 \right) - 3 l \left(b_{m'}^2 - \frac{1}{4} l^2 \right)}{I_{\frac{1}{2}} l} \\
 & \frac{2 \left(b_{m'}^3 - 1 - b_{m'}^3 \right) - 3 l \left(b_{m'}^2 - 1 - b_{m'}^2 \right)}{I_{11} - (m' + 1)} \\
 & \left. - \dots - \frac{2(l^3 - b_{11}^3) - 3l(l^2 - b_{11}^2)}{I_{11}} \right] + \\
 + & \frac{\sum_{\nu'=h+1}^{\nu'=n} P_{\nu'} b_{\nu'} - \mathbf{M}_2}{12 E l} \left[2 \left\{ \frac{a_1^3}{I_1} + \frac{a_2^3 - a_1^3}{I_2} + \dots + \frac{1}{8} \frac{l^3 - a_b^3}{I_{\frac{1}{2}} l} \right\} - \right. \\
 & \frac{2 \left(a_m^3 - \frac{1}{8} l^3 \right) - 3 l \left(a_m^2 - \frac{1}{4} l^2 \right)}{I_{\frac{1}{2}} l} \\
 & \frac{2 \left(a_{m'}^3 - 1 - a_{m'}^3 \right) - 3 l \left(a_{m'}^2 - 1 - a_{m'}^2 \right)}{I_{m+1}} \\
 & \left. - \dots - \frac{2(l^3 - a_{11}^3) - 3l(l^2 - a_{11}^2)}{I_{11}} \right] - \\
 - & \frac{1}{12 E} \sum_{\nu=1}^{\nu=h} \left[P_{\nu} \left\{ \frac{3 a_{\nu} a_1^2 - 2 a_1^3}{I_1} + \frac{3 a_{\nu} (a_2^2 - a_1^2) - 2 (a_2^3 - a_1^3)}{I_2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \dots + \frac{3 a_{\nu} (a_{\nu}^2 - a_{\nu-1}^2) - 2 (a_{\nu}^3 - a_{\nu-1}^3)}{I_{a_{\nu}}} \right\} \right] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{12E} \sum_{\nu'=h+1}^{\nu'=n} \left[P_{\nu'} \left\{ \frac{3 b_{\nu'} b_1^2 - 2 b_1^3}{I_{11}} + \frac{3 b_{\nu'} (b_2^2 - b_1^2) - (b_2^3 - b_1^3)}{I_{11-1}} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \dots + \frac{3 b_{\nu'} (b_{\nu'}^2 - b_b^2) - 2 (b_{\nu'}^3 - b_b^3)}{I_{b_{\nu'}}} \right\} \right] + \\
 & \quad + \frac{T_2 + T_1}{2 E_t} \left[\frac{A_1}{\Omega_1} \alpha_1 + \frac{A_2}{\Omega_2} (\alpha_2 - \alpha_1) + \dots + \frac{A_\rho}{\Omega_\rho} (l - \alpha_\rho) \right] - \\
 & \quad - \frac{T_2}{E_t} \left[\frac{A_1}{\Omega_1} \alpha_1 + \frac{A_2}{\Omega_2} (\alpha_2 - \alpha_1) + \dots + \frac{A_{\frac{1}{2}} l}{\Omega_{\frac{1}{2}} l} \left(\frac{1}{2} l - \alpha_{\frac{1}{2}} l \right) \right] - \\
 & \quad - \frac{T_1}{E_t} \left[\frac{A_\rho}{\Omega_\rho} \beta_1 + \frac{A_{\rho-1}}{\Omega_{\rho-1}} (\beta_2 - \beta_1) + \dots + \frac{A_{\frac{1}{2}} l}{\Omega_{\frac{1}{2}} l} \left(\frac{1}{2} l - \beta_{\frac{1}{2}} l \right) \right] + \\
 & \quad + \frac{1}{2 E_t} \sum_{\nu=1}^{\nu=h} \left[P_\nu \left\{ \frac{A_1}{\Omega_1} \alpha_1 + \frac{A_2}{\Omega_2} (\alpha_2 - \alpha_1) + \dots + \frac{A_{a_\nu}}{\Omega_{a_\nu}} (\alpha_\nu - \alpha_{a_\nu}) \right\} \right] + \\
 & \quad + \frac{1}{2 E_t} \sum_{\nu'=h+1}^{\nu'=n} \left[P_{\nu'} \left\{ \frac{A_\rho}{\Omega_\rho} \beta_1 + \frac{A_{\rho-1}}{\Omega_{\rho-1}} (\beta_2 - \beta_1) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \dots + \frac{A_{b_{\nu'}}}{\Omega_{b_{\nu'}}} (b_{\nu'} - \beta_{b_{\nu'}}) \right\} \right] \tag{4}
 \end{aligned}$$

che è la **formola generale** pel calcolo della freccia nel mezzo di una travata qualsiasi comunque caricata da pesi concentrati e comunque fissata ai suoi estremi; e nella quale, secondo i casi che si considerano, bisognerà mettere per M_1 , M_2 i loro valori.

Per le travi ad una sol luce e semplicemente appoggiate agli estremi basterà fare

$$M_1 = M_2 = 0 .$$

Nella *campata centrale di una trave continua a più luci, simmetricamente disposte rispetto alla centrale, la quale è simmetrica rispetto alla sua mezzeria*, si avrà:

$$\begin{aligned}
 f = & \frac{\sum_{\nu=1}^{\nu=h} P_{\nu} a_{\nu} + \sum_{\nu'=h+1}^{\nu'=n} P_{\nu'} b - (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2)}{12 E l} \left[2 \left\{ \frac{a_1^3}{I_1} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{a_2^3 - a_1^3}{I_2} + \dots + \frac{\frac{1}{8} l^3 - \frac{a_1^3}{24} \frac{l}{I_{\frac{1}{2}} l}}{I_{\frac{1}{2}} l} \right\} - \right. \\
 & \left. - \frac{2 \left(a_m^3 - \frac{1}{8} l^3 \right) - 3 l \left(a_m^2 - \frac{1}{4} l^2 \right)}{I_{\frac{1}{2}} l} - \right. \\
 & \left. - \frac{2 \left(a_{m+1}^3 - a_m^2 \right) - 3 l \left(a_{m+1}^2 - a_m^2 \right)}{I_{m+1}} - \right. \\
 & \left. - \dots - \frac{2 \left(l^3 - a_n^3 \right) - 3 l \left(l^2 - a_n^2 \right)}{I_n} \right] - \\
 & - \frac{1}{12 E} \sum_{\nu=1}^{\nu=h} \left[P_{\nu} \left\{ \frac{3 a_{\nu} a_1^2 - 2 a_1^3}{I_1} + \frac{3 a_{\nu} (a_2^2 - a_1^2) - 2 (a_2^3 - a_1^3)}{I_2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \dots + \frac{3 a_{\nu} (a_{\nu}^2 - a_{\nu-1}^2) - 2 (a_{\nu}^3 - a_{\nu-1}^3)}{I_{a_{\nu}}} \right\} \right] - \\
 & - \frac{1}{12 E} \sum_{\nu'=h+1}^{\nu'=n} \left[P_{\nu'} \left\{ \frac{3 b_{\nu'} b_1^2 - 2 b_1^3}{I_n} + \frac{3 b_{\nu'} (b_2^2 - b_1^2) - 2 (b_2^3 - b_1^3)}{I_{n-1}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \dots + \frac{3 b_{\nu'} (b_{\nu'}^2 - b_{b_{\nu'}}^2) - 2 (b_{\nu'}^3 - b_{b_{\nu'}}^3)}{I_{b_{\nu'}}} \right\} \right] + \\
 & + \frac{1}{2 E t} \sum_{\nu=1}^{\nu=h} \left[P_{\nu} \left\{ \frac{\mathbf{A}_1}{\Omega_1} a_1 + \frac{\mathbf{A}_2}{\Omega_2} (a_2 - a_1) + \dots + \frac{\mathbf{A}_{a_{\nu}}}{\Omega_{a_{\nu}}} (a_{\nu} - a_{a_{\nu}}) \right\} \right] + \\
 & + \frac{1}{2 E t} \sum_{\nu'=h+1}^{\nu'=n} \left[P_{\nu'} \left\{ \frac{\mathbf{A}_{\rho}}{\Omega_{\rho}} \beta_1 + \frac{\mathbf{A}_{\rho-1}}{\Omega_{\rho-1}} (\beta_2 - \beta_1) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \dots + \frac{\mathbf{A}_{b_{\nu'}}}{\Omega_{b_{\nu'}}} (b_{\nu'} - \beta_{b_{\nu'}}) \right\} \right] \quad (5) .
 \end{aligned}$$

b) Travata a sezione costante.

Se la travata è a sezione costante la formola (3) si riduce alla

$$f = \frac{-1}{48 E I} \left[3 l^2 (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) - P a (3 l^2 - 4 a^2) \right] + \frac{\mathbf{A}}{2 E t \Omega} P a \quad (3_1) ,$$

già data dal Castigliano nel suo Manuale (Parte III pag. 84) e riportata in questo a pag. 199; mentre la (3') diverrebbe:

$$f' = \frac{1}{48 E I} \left[3 l^2 (M_1' + M_2') - P' b (3 l^2 - 4 b^2) \right] + \frac{A}{2 E_t \Omega} P' b \quad (3'').$$

Se contemporaneamente insistono sulla trave i due pesi P , P' , per il principio della sovrapposizione degli effetti, si avrà:

$$f + f' = \frac{1}{48 E I} \left[3 l^2 (M_1 + M_1' + M_2 + M_2') \right. \\ \left. \left\{ P a (3 l^2 - 4 a^2) + P' b (3 l^2 - 4 b^2) \right\} \right] + \frac{A}{2 E_t \Omega} (P a + P' b) \quad (III).$$

Avendo un sistema di pesi concentrati P_1, P_2, \dots, P_n sulla travata, l'espressione della freccia f nel mezzo di essa sarà:

$$f = \frac{1}{48 E I} \left[3 l^2 (M_1 + M_2) - \sum_{\nu=1}^n P_{\nu} c_{\nu} (3 l^2 - 4 c_{\nu}^2) \right] + \\ + \frac{A}{2 E_t \Omega} \sum_{\nu=1}^n P_{\nu} c_{\nu} \quad (4),$$

nella quale c_{ν} indica la distanza della forza P_{ν} dall'appoggio più vicino (cioè a o b).

Osservazione. — Le formole (4) e (5), dopo avervi fatto

$$M_1 = M_2 = 0$$

servono per la determinazione della freccia di flessione nel mezzo d'una travata ad una sola luce, appoggiata agli estremi, comunque caricata di pesi concentrati (*treno di prova* in un ponte ferroviario); e le formole (4), (4) e (5) servono per la determinazione della freccia di flessione nel mezzo d'una travata caricata di pesi concentrati ed appartenente ad una travata continua comunque caricata nelle altre campate.

14. — Risoluzione del sistema di equazioni a cui conduce il teorema dei tre momenti.

Sia n il numero delle travate,
sarà $n + 1$ „ „ degli appoggi.

Indichiamo con $\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ i secondi membri delle equazioni dei tre momenti, che sono funzioni dei pesi e delle luci delle campate.

Si ha:

$$M_1 = 0, \quad M_{n+1} = 0,$$

$$M_2 = \frac{\sum_{\nu=2}^{\nu=n} \mu_\nu \delta_{n-\nu}}{\delta_{n-1} l_1}, \quad M_n = \frac{\sum_{\nu=2}^{\nu=n} \mu_\nu \gamma_{\nu-2}}{\gamma_{n-1} l_n},$$

e per un appoggio A_s intermedio qualunque :

$$M_s = \frac{\alpha_{n-s} \sum_{\nu=2}^{\nu=s} \mu_\nu \gamma_{\nu-2} + \gamma_{s-2} \sum_{\nu'=s+1}^{\nu'=n} \mu_{\nu'} \delta_{n-\nu'}}{\varrho}$$

essendo

$$\begin{aligned} \varrho &= l_{s-1} (\delta_{n-(s-1)} \gamma_{s-2} - \delta_{n-s} \gamma_{s-3}) = \\ &= l_s (\delta_{n-s} \gamma_{s-1} - \delta_{n-(s+1)} \gamma_{s-2}) ; \\ \delta_0 &= 1 , \end{aligned}$$

$$\delta_1 = -2 \left(1 + \frac{l_n}{l_{n-1}} \right) ,$$

$$\delta_2 = -2 \delta_1 \left(1 + \frac{l_{n-1}}{l_{n-2}} \right) - \frac{l_{n-1}}{l_{n-2}} ,$$

$$\delta_3 = -2 \delta_2 \left(1 + \frac{l_{n-2}}{l_{n-3}} \right) - \delta_1 \frac{l_{n-2}}{l_{n-3}} ,$$

.....

$$\delta_{n-2} = -2 \delta_{n-3} \left(1 + \frac{l_3}{l_2} \right) - \delta_{n-4} \frac{l_3}{l_2} ,$$

$$\delta_{n-1} = -2 \delta_{n-2} \left(1 + \frac{l_2}{l_1} \right) - \delta_{n-3} \frac{l_2}{l_1} ;$$

$$\gamma_0 = 1 ,$$

$$\gamma_1 = -2 \left(1 + \frac{l_1}{l_2} \right) ,$$

$$\gamma_2 = -2 \gamma_1 \left(1 + \frac{l_2}{l_3} \right) - \frac{l_2}{l_3} ,$$

$$\gamma_3 = -2 \gamma_2 \left(1 + \frac{l_3}{l_4} \right) - \gamma_1 \frac{l_3}{l_4} ,$$

.....

$$\gamma_{n-2} = -2\gamma_{n-3} \left(1 + \frac{l_{n-2}}{l_{n-1}} \right) - \gamma_{n-4} \frac{l_{n-2}}{l_{n-1}} .$$

$$\gamma_{n-1} = -2\gamma_{n-2} \left(1 + \frac{l_{n-1}}{l_n} \right) - \gamma_{n-3} \frac{l_{n-1}}{l_n} .$$

Con queste formole si avranno speditamente i momenti inflettenti $M_2, M_3, \dots, M_s, \dots, M_{n-1}, M_n$ sugli appoggi; noti i quali, con le formole date al N. 10 *B*) (pag. 237) di questo capitolo, si otterrà facilmente il momento inflettente e lo sforzo di taglio in una sezione qualunque di una travata qualunque.

CAPITOLO VIII.

Ponti a travi continue.

1. — La teoria della trave continua, o trave riposante su più appoggi, presenta questa difficoltà, che *la legge secondo la quale conviene variare la sezione della trave è solidale colla ripartizione degli sforzi, mentre d'altra parte è questa legge che si deve cercare di determinare.* Si è riuscito in qualche caso particolare a risolvere il problema complesso, ma in generale si è ridotti a sostituire in un primo calcolo la sezione variabile con una sezione costante; allora dopo aver determinato gli sforzi a cui è soggetta la trave in questa ipotesi si potranno riprendere i calcoli, supponendo che la trave abbia la sezione variabile dovuta ai primi sforzi trovati, ed otterrà nuovamente gli sforzi cui è soggetta in questa seconda supposizione, per dare quindi alla medesima una sezione variabile in modo da resistere a questi secondi sforzi. Replicando più volte questa calcolo, si ottiene l'approssimazione che si vuole.

Il più delle volte però non si eseguono questi calcoli ripetuti, accontentandosi dell'approssimazione che si ha col primo calcolo supponendo la sezione costante.

RIPARTIZIONE DELLE TRAVATE. In generale si fanno le travate centrali della medesima lunghezza, e le travate estreme pure della medesima lunghezza, ma un po' minore della lunghezza delle travate centrali. Le travate estreme non si devono fare troppo piccole in confronto delle centrali, acciocchè non avvenga che la reazione delle spalle del ponte sia negativa e che perciò le estremità della trave, invece di giacere sui loro appoggi, tendano a sollevarsi. Detta l la portata delle travate centrali ed l_1 quella delle travate laterali, sembra soddisfacente sotto tutti i rapporti, fare

$$l \quad \text{compreso fra} \quad 1,2 l_1 \div 1,3 l_1 .$$

2. — Determinazione dell'equazione dei tre momenti.

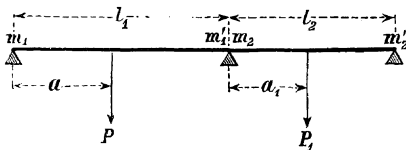


Fig. 169.

Abbiamo dato al N.º 10 del capitolo VII l'equazione

$$M_1 l_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 = (m_1 + 2 m_1') l_1 + (2 m_2 + m_2') l_2 .$$

Dalle formole del N. 4 dello stesso capitolo si ha :

$$m_1 + 2 m_1' = \frac{P}{l_1^2} (l_1^2 - a^2) a ,$$

$$2 m_2 + m_2' = \frac{P_1}{l_2^2} (2 l_2^2 - 3 a_1 l_2 + a_1^2) a_1 ,$$

essendo P e P_1 i carichi concentrati sulle travate a distanza a ed a_1 dall'appoggio di sinistra.

Se il carico è parziale ed uniformemente ripartito sopra l'una e l'altra travata in ragione di q e q_1 unità di peso per unità di lunghezza della trave, dalle formole del N.º 9- D) si ha:

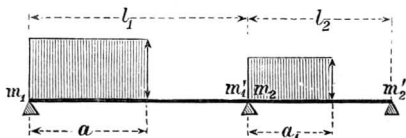


Fig. 170.

$$m_1 + 2 m_1' = \frac{q}{4 l_1^2} (2 l_1^2 - a^2) a^2 \quad 2 m_2 + m_2' = \frac{q_1}{4 l_2^2} (2 l_2 - a_1)^2 a_1^2 .$$

Con queste formole si è ottenuta la tabella seguente, mediante la quale si può facilmente calcolare il secondo membro della sovrariportata equazione dei tre momenti per i diversi casi della pratica.

TABELLA XLIX.

$\frac{a}{l_1}$ od $\frac{a_1}{l_2}$	Carico concentrato (Fig. 169)		Carico parziale uniformemente ripartito (Fig. 170)	
	$m_1 + 2 m_1'$	$2 m_2 + m_2'$	$m_1 + 2 m_1'$	$2 m_2 + m_2'$
0,0	0,000 $P l_1$	0,000 $P_1 l_2$	0,00000 $q l_1^2$	0,00000 $q_1 l_2^2$
0,1	0,099 $P l_1$	0,171 $P_1 l_2$	0,00497 $q l_1^2$	0,00903 $q_1 l_2^2$
0,2	0,192 $P l_1$	0,288 $P_1 l_2$	0,01960 $q l_1^2$	0,03240 $q_1 l_2^2$
0,3	0,273 $P l_1$	0,357 $P_1 l_2$	0,04298 $q l_1^2$	0,06503 $q_1 l_2^2$
0,4	0,336 $P l_1$	0,384 $P_1 l_2$	0,07360 $q l_1^2$	0,10240 $q_1 l_2^2$
0,5	0,375 $P l_1$	0,375 $P_1 l_2$	0,10938 $q l_1^2$	0,14063 $q_1 l_2^2$
0,6	0,384 $P l_1$	0,336 $P_1 l_2$	0,14760 $q l_1^2$	0,17640 $q_1 l_2^2$
0,7	0,357 $P l_1$	0,273 $P_1 l_2$	0,18497 $q l_1^2$	0,20703 $q_1 l_2^2$
0,8	0,288 $P l_1$	0,192 $P_1 l_2$	0,21760 $q l_1^2$	0,23040 $q_1 l_2^2$
0,9	0,171 $P l_1$	0,099 $P_1 l_2$	0,24097 $q l_1^2$	0,24503 $q_1 l_2^2$
1,0	0,000 $P l_1$	0,000 $P_1 l_2$	0,25000 $q l_1^2$	0,25000 $q_1 l_2^2$

I numeri della prima colonna di questa tabella esprimono i valori di a o di a_1 in parti delle rispettive portate l_1 ed l_2 .

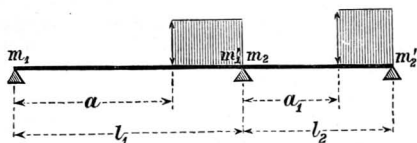


Fig. 171.

I valori di $m' + 2 m_1'$ e di $2 m_2 + m_3'$ dati dalla precedente tabella per il carico parziale uniformemente ripartito valgono per il caso che questo carico sia a sinistra della travata (Fig. 170).

Se invece esso è a destra (Fig. 171) i valori di $m' + 2 m_1'$ e di $2 m_2 + m_2'$ sono dati dalla tabella seguente:

TABELLA L.

$a \frac{1}{l_1}$ od $a_1 \frac{1}{l_2}$	Carico parziale uniformemente ripartito		$a \frac{1}{l_1}$ od $a_1 \frac{1}{l_2}$	Carico parziale uniformemente ripartito	
	$m_1 + 2 m_1'$	$2 m_2 + m_2'$		$m' + 2 m_1'$	$2 m_2 + m_2'$
0,0	0,25000 $q l_1^2$	0,25000 $q_1 l_2^2$	0,6	0,10240 $q l_1^2$	0,07360 $q_1 l_2^2$
0,1	0,24503 $q l_1^2$	0,24097 $q_1 l_2^2$	0,7	0,06503 $q l_1^2$	0,04298 $q_1 l_2^2$
0,2	0,23040 $q l_1^2$	0,21760 $q_1 l_2^2$	0,8	0,03240 $q l_1^2$	0,01960 $q_1 l_2^2$
0,3	0,20703 $q l_1^2$	0,18497 $q_1 l_2^2$	0,9	0,00903 $q l_1^2$	0,00497 $q_1 l_2^2$
0,4	0,17640 $q l_1^2$	0,14760 $q_1 l_2^2$	1,0	0,00000 $q l_1^2$	0,00000 $q_1 l_2^2$
0,5	0,14063 $q l_1^2$	0,10938 $q_1 l_2^2$	—	—	—

3. — Disposizione più sfavorevole del sopracarico.

Sui ponti il sopracarico consiste in un sistema dato di carichi mobili, che può ridursi a più carichi uniformemente ripartiti. Qui poniamo che il sistema dei dati carichi mobili sia ridotto ad un sistema di carichi tutti uniformemente ripartiti nella stessa ragione di q unità di peso per unità di lunghezza di trave carica.

A) Sforzi di taglio.

a) Sopracarico sulla travata considerata. « Lo sforzo di taglio in una sezione qualunque raggiunge il suo massimo positivo o negativo, allorché il sopracarico si estende su tutta la porzione compresa tra la sezione considerata e l'appoggio di destra o di sinistra ».

b) Sopracarico sopra le altre travate. « Lo sforzo di taglio in una travata diviene massimo allorché le altre travate sono alternativamente caricate; questo massimo è positivo quando la travata

contigua di sinistra è sovracaricata, e quella di destra scarica; ed è negativo allorchè la travata contigua di destra è sovracarica e quella di sinistra scarica „.

(Le linee piene nelle presenti figure indicano le parti cariche della trave, le tratteggiate indicano le scariche; ed i segni + e -, posti sopra le linee, si riferiscono agli sforzi di taglio).

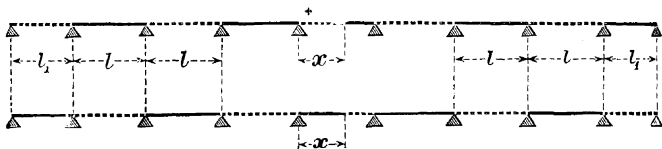


Fig. 172.

Nelle figure sopra delineate sono rappresentate le posizioni più sfavorevoli rispetto agli sforzi di taglio.

Generalmente però non si considera la possibilità di una separazione multipla del sovracarico, ma solamente della separazione in due. Allora basta occuparsi delle sole due parti più vicine alla sezione considerata; e lo sforzo di taglio raggiunge il suo massimo positivo in una sezione della travata considerata, quando il sovracarico si estende su tutta la parte di questa travata situata a destra della sezione considerata ed inoltre su tutta la lunghezza della travata contigua di sinistra; invece lo sforzo di taglio raggiunge il suo massimo negativo quando il sovracarico si estende sulla parte di travata situata a sinistra della sezione considerata, ed inoltre su tutta la travata contigua di destra.

c) Massimo assoluto. " Lo sforzo di taglio raggiunge il suo massimo assoluto, nelle sezioni sugli appoggi, nel caso di un sovracarico alternativo delle travate, le due travate contigue all'appoggio considerato essendo intieramente sovracariche; e si ha:

$$+ T_{(\text{mass})} = \frac{M_1 - M_2}{l} + \frac{q l}{2}, \quad - T_{(\text{mass})} = \frac{M_1 - M_2}{l} - \frac{q l}{2} . "$$

Le reazioni degli appoggi, essendo la differenza fra gli sforzi di taglio che hanno luogo dall'una e dall'altra parte di un appoggio, diverranno massime per la medesima disposizione del sovracarico che rende massimi gli sforzi di taglio.

B) Momenti di flessione.

a) Sovracarico sulla travata considerata. Sia AB una travata scarica. Al N.º 8 b) del Cap. VII si è data l'espressione

$$M_x = M_1 + \left(\frac{M_2 - M_1}{l_1} - \frac{1}{2} q_1 l_1 \right) x + \frac{1}{2} q_1 x^2 ,$$

la quale nel caso presente, essendo la travata AB scarica, di-

viene:

$$M_x = M_1 + \left(\frac{M_2 - M_1}{l} \right) x, \quad \text{ovvero} \quad M_x = M_1 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + M_2 \frac{x}{l}$$

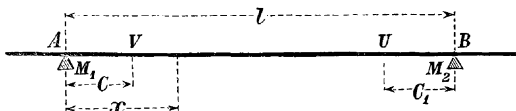


Fig. 173

ponendo $q_1 = 0$, e scrivendo, per semplicità l in luogo di l_1 .

Ora, man mano che la travata AB si avvicina alla travata sovraccaricata (supponendo che un'unica travata sia sovraccaricata) M_1 ed M_2 aumentano di valore, epperò si può dire che il momento inflettente M_x , per un medesimo valore di $\frac{x}{l}$, aumenta avvicinandosi alla travata sovraccaricata.

Per l'ultima espressione qui data del valore di M_x , e se la travata sovraccaricata si trova a destra della travata AB , questa si divide in due tronchi AV e VB nei quali i momenti inflettenti sono di segno contrario. Chiamiamo C la distanza AV e risolviamo rispetto a C l'equazione soprascritta, che ci dà il valore di M_x , ponendo in essa $x = C$, $M_x = 0$, si avrà:

$$C = \frac{M_1}{M_1 - M_2} l = \frac{1}{1 - \frac{M_2}{M_1}} l.$$

Il rapporto di M_2 ad M_1 avendo un valore costante, la lunghezza C non varia qualunque sia quella delle travi a destra che sopporta il sovraccarico. Se si pone $M_2 = -\mu M_1$ (dove $\mu = \text{cost.}$), sarà

$$C = \frac{l}{1 + \mu}.$$

Se la travata sovraccaricata si trova a sinistra della travata considerata AB , questa si dividerà in due tronchi AU , UB , nei quali i momenti inflettenti sono di segno contrario, onde posto $BU = C_1$, $M_1 = -\nu M_2$ (dove $\nu = \text{cost.}$), sarà:

$$C_1 = \frac{l}{1 + \nu}.$$

I punti ed V ed U si dicono **punti fissi**, ed essi non cambiano di posizione in una travata, qualunque sia, rispettivamente, quella delle travi di destra o di sinistra che sopporta il sovraccarico.

Per la 1.^a campata si ha $C = 0$ e per l'ultima $C_1 = 0$.

Ciò posto, sia ξ_x la radice ammissibile dell'equazione

$$[C_1 x - C(l-x)]\xi^2 + [C_1(l-3C)x + C(2l-3C_1)(l-x)]\xi - (l-C-C_1)l^2 x = 0,$$

e sia ξ_{lx} la radice ammissibile dell'equazione:

$$[C(l-x) - C_1 x]\xi^2 - 3Cl(l-C_1-x)\xi - l^2(l-3C)(l-C_1-x) = 0,$$

intendendo per radici ammissibili quelle non maggiori di l ; si avrà il seguente teorema:

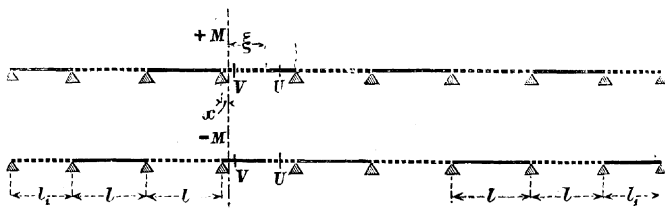
Divisa la travata in **tre tronchi** nei punti fissi V , U , il momento inflettente raggiunge il suo massimo positivo o negativo:

I) Nel tronco di sinistra quando il sovracarico si estende da $x = \xi_x$ all'appoggio di destra o di sinistra (fig. 174);

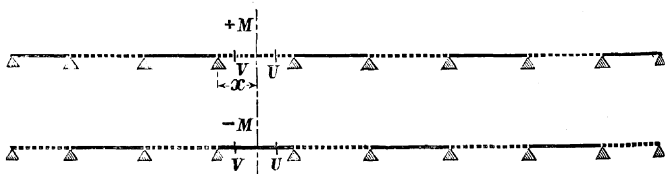
II) Nel tronco di mezzo quando la travata è tutta scarica o tutta carica (fig. 175);

III) Nel tronco di destra quando il sovracarico si estende da $x = \xi_{lx}$ all'appoggio di sinistra o di destra (fig. 175).

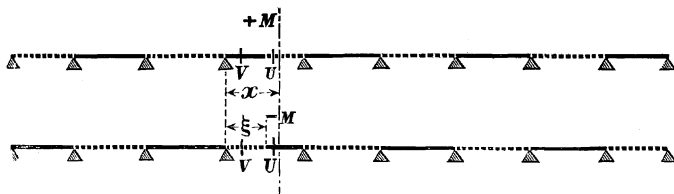
(Le linee piene nelle presenti figure indicano le parti cariche della trave, le tratteggiate indicano le scariche).



I) — Fig. 174.



II) — Fig. 175.



III) — Fig. 176.

b) Sopracarico sulle altre travate. Il momento in una travata qualunque diviene un massimo, quando le altre travate sono alternativamente sovraccaricate, ma di tal maniera, che una travata scarica sia contigua all'estremità sovraccarica della travata considerata e che una travata carica sia contigua all'estremità scarica della travata considerata.

Nelle figure sopra delineate sono rappresentate le disposizioni più sfavorevoli rispetto ai momenti positivi e negativi.

Anche pei momenti inflettenti generalmente non si considera la possibilità di una separazione multipla del sopracarico, ma solamente della separazione in due.

C) Determinazione del momento massimo.

a) Tronco di mezzo VU. La disposizione più svantaggiosa del sopracarico è la stessa per tutte le sezioni. Il massimo positivo si produrrà quando la travata sarà interamente scarica, e sarà:

$$+ M_{(\text{mass.})} = M_1 - (M_1 - M_2) \frac{x}{l} ,$$

ed il massimo negativo si produrrà quando la travata sarà completamente carica e sarà:

$$- M_{(\text{mass.})} = M_1 - (M_1 - M_2) \frac{x}{l} - \frac{1}{2} q (l - x) x .$$

b) Tronco di sinistra AV. Il massimo positivo in questo tronco ha luogo quando la parte situata a sinistra della sezione considerata è interamente scarica, e sarà:

$$+ M_{(\text{mass.})} = M_1 - (M_1 - M_2) \frac{x}{l} - \frac{q \xi_1^2 x}{2l} ,$$

ed il massimo negativo avrà luogo quando il sopracarico si estende su tutta la parte della travata a sinistra della sezione considerata e oltrepassa anche questa sezione, e sarà:

$$- M_{(\text{mass.})} = M_1 - (M_1 - M_2) \frac{x}{l} - \frac{q}{2l} (2l\xi - \xi^2 - lx) x .$$

c) Tronco di destra UB . Si otterrà nello stesso modo:

$$+ M_{(\text{mass.})} = M_1 - (M_1 - M_2) \frac{x}{l} - \frac{q \xi^2 (l-x)}{2l},$$

$$- M_{(\text{mass.})} = M_1 - (M_1 - M_2) \frac{x}{l} - \frac{q(l-x)(lx - \xi^2)}{2l}.$$

D) Tabelle dei valori di μ , ν e C .

a) La tabella seguente dà i valori di μ e ν per il caso di travate intermedie eguali fra loro. In essa l_1 è la lunghezza di ciascuna delle due travate estreme, ed l è la lunghezza di ciascuna delle travate intermedie; l'indice ai piedi delle lettere μ e ν indica la travata a cui si riferiscono i valori di μ e ν . (Si avverta che

$$\mu_m = \nu_{n-m+1},$$

essendo n il numero totale delle travate, ed m indicando una travata emmesima qualunque).

TABELLA LI.

$\frac{l}{l_1}$	$\mu_2 = \nu_{n-1}$	$\mu_3 = \nu_{n-2}$	$\mu_4 = \nu_{n-3}$	$\mu_5 = \nu_{n-4}$	$\mu_6 = \nu_{n-5}$
0,9	4,22222	3,76316	3,73426	3,73221	3,73206
1,0	4,00000	3,75000	3,73333	3,73214	3,73206
1,1	3,81818	3,73810	3,73246	3,73208	3,73205
1,2	3,66667	3,72727	3,73171	3,73203	3,73205
1,3	3,53846	3,71739	3,73099	3,73197	3,73205

Si otterrà il valore limite di μ_m quando m aumenta, ponendo $\mu_{m-1} = \mu_m$, cioè sarà $\lim. \mu_m = 3,73205$. Il valore di μ_m per una travata qualunque è dato dalla formola

$$\mu_m = \frac{2(l_{m-1} + l_m) - \frac{l_{m-1}}{\mu_{m-1}}}{l_m}.$$

b) La tabella seguente dà i valori di $\frac{C}{l}$ per il medesimo caso delle travate estreme eguali fra loro e delle intermedie eguali fra loro.

Essa fu calcolata colla formola $C_m = \frac{l_m}{1 + \mu_m}$ (vedi pag. 257).

TABELLA LII.

$\frac{l}{l_1}$	$\frac{C}{l}$ 2 ^a travata	$\frac{C}{l}$ 3 ^a travata	$\frac{C}{l}$ 4 ^a travata	$\frac{C}{l}$ 5 ^a travata
0,9	0,1915	0,2099	0,2112	0,2113
1,0	0,2000	0,2105	0,2113	0,2113
1,1	0,2075	0,2111	0,2113	0,2113
1,2	0,2143	0,2115	0,2113	0,2113
1,3	0,2203	0,2120	0,2114	0,2113

4. — Le tabelle che seguono danno i valori dei momenti inflettenti e degli sforzi di taglio per travi continue da due e da tre travate, secondo i rapporti migliori della lunghezza delle travate estreme e delle intermedie, distinti separatamente quelli dovuti al carico permanente K e quelli dovuti al sovraccarico q ambedue supposti uniformemente distribuiti. (K e q sono riferiti al m. corr. di trave).

Trave a due travate nel rap

x	SFORZI DI TAGLIO		
	dovuti a K	dovuti a q	
	T_x	$+ T_{(mass)}$	$- T_{(mass.)}$
0,0 l	+ 0,375 $K l$	+ 0,4375 $q l$	- 0,0625 $q l$
0,1 l	+ 0,275 $K l$	+ 0,3437 $q l$	- 0,0687 $q l$
0,2 l	+ 0,175 $K l$	+ 0,2624 $q l$	- 0,0874 $q l$
0,3 l	+ 0,075 $K l$	+ 0,1932 $q l$	- 0,1182 $q l$
0,375 l	0	+ 0,1491 $q l$	- 0,1491 $q l$
0,4 l	- 0,025 $K l$	+ 0,1359 $q l$	- 0,1609 $q l$
0,5 l	- 0,125 $K l$	+ 0,0898 $q l$	- 0,2148 $q l$
0,6 l	- 0,225 $K l$	+ 0,0544 $q l$	- 0,2794 $q l$
0,7 l	- 0,325 $K l$	+ 0,0287 $q l$	- 0,3537 $q l$
0,8 l	- 0,425 $K l$	+ 0,0119 $q l$	- 0,4369 $q l$
0,9 l	- 0,525 $K l$	+ 0,0027 $q l$	- 0,5277 $q l$
1,0 l	- 0,625 $K l$	0	- 0,6250 $q l$

Reazione degli appoggi: $R_{l(mass.)} = 0,3750 K l + 0,4375 q l$;

Per il carico permanente: $-M_{(mass.)} = -0,07031 K l^2$ per

Per il carico accidentale: $-M_{(mass.)} = -0,09566 q l^2$ per

Sforzo di taglio medio: $T_m = 0,2656 K l + 0,3287 q l^2$.

Momento di flessione medio: $M_m = 0,04948 K l^2 + 0,07080 q l^2$.

LIII.

porto 1:1 (cioè eguali fra loro).

x	y	MOMENTI DI FLESSIONE		
		dovuti a K	dovuti a q	
			M_x	$+ M_{(mass)}$
0,0 l	—	0	0	0
0,1 l	—	$- 0,0325 K l^2$	$+ 0,00625 q l^2$	$- 0,03875 q l^2$
0,2 l	—	$- 0,0550 K l^2$	$+ 0,01250 q l^2$	$- 0,06750 q l^2$
0,3 l	—	$- 0,0675 K l^2$	$+ 0,01875 q l^2$	$- 0,08625 q l^2$
0,4 l	—	$- 0,0700 K l^2$	$+ 0,02500 q l^2$	$- 0,09500 q l^2$
0,5 l	—	$- 0,0625 K l^2$	$+ 0,03125 q l^2$	$- 0,09375 q l^2$
0,6 l	—	$- 0,0450 K l^2$	$+ 0,03750 q l^2$	$- 0,08250 q l^2$
0,7 l	—	$- 0,0175 K l^2$	$+ 0,04375 q l^2$	$- 0,06125 q l^2$
0,75 l	—	0	$+ 0,04688 q l^2$	$- 0,04688 q l^2$
0,8 l	0	$+ 0,0200 K l^2$	$+ 0,05000 q l^2$	$- 0,03000 q l^2$
0,85 l	0,5423 l	$+ 0,0425 K l^2$	$+ 0,05773 q l^2$	$- 0,01523 q l^2$
0,9 l	0,7454 l	$+ 0,0675 K l^2$	$+ 0,07361 q l^2$	$- 0,00611 q l^2$
0,95 l	0,8885 l	$+ 0,0950 K l^2$	$+ 0,09638 q l^2$	$- 0,00138 q l^2$
1,0 l	1,0 l	$+ 0,1250 K l^2$	$+ 0,01250 q l^2$	0

$$R_{2(mass.)} = 1,25 (K + q) l .$$

$$x = 0,3750 l .$$

$$x = 0,4374 l .$$

Nelle tabelle seguenti i risultati sono dati in funzione della media λ delle aperture delle travate.
Per la trave a tre travate si ha:

$$l_1 = \frac{3}{2+\rho} \lambda \quad l = \frac{3\rho}{2+\rho} \lambda, \quad \text{essendo} \quad l = \rho l_1, \quad 2l_1 + l = 3\lambda.$$

TABELLA LIV.

Trave a tre travate nel rapporto 1:1:1 (cioè tutte e tre eguali fra loro).

$\frac{x}{l_1}$ od $\frac{x}{l}$	SFORZI DI TAGLIO			$\frac{x}{l_1}$ od $\frac{x}{l}$	$\frac{\xi}{l_1}$ od $\frac{\xi}{l}$	MOMENTI DI FLESSIONE		
	dovuti a K T_x	dovuti a q				dovuti a K M_x	dovuti a q	
		$+ T_{(mass.)}$	$- T_{(mass.)}$				$+ M_{(mass.)}$	$- M_{(mass.)}$
1 ^a trav. 0,0	+ 0,4 K λ	+ 0,4500 q λ	- 0,0500 q λ	1 ^a trav. 0,0	-	0	0	0
0,1	+ 0,3 K λ	+ 0,3560 q λ	- 0,0563 q λ	0,1	-	- 0,035 K λ^2	+ 0,005 q λ^2	- 0,040 q λ^2
0,2	+ 0,2 K λ	+ 0,2752 q λ	- 0,0752 q λ	0,2	-	- 0,060 K λ^2	+ 0,010 q λ^2	- 0,070 q λ^2
0,3	+ 0,1 K λ	+ 0,2065 q λ	- 0,1065 q λ	0,3	-	- 0,075 K λ^2	+ 0,015 q λ^2	- 0,090 q λ^2
0,4	0	+ 0,1496 q λ	- 0,1496 q λ	0,4	-	- 0,080 K λ^2	+ 0,020 q λ^2	- 0,100 q λ^2
0,5	- 0,1 K λ	+ 0,1042 q λ	- 0,2042 q λ	0,5	-	- 0,075 K λ^2	+ 0,025 q λ^2	- 0,100 q λ^2
0,6	- 0,2 K λ	+ 0,0694 q λ	- 0,2694 q λ	0,6	-	- 0,060 K λ^2	+ 0,030 q λ^2	- 0,090 q λ^2
0,7	- 0,3 K λ	+ 0,0443 q λ	- 0,3443 q λ	0,7	-	- 0,035 K λ^2	+ 0,035 q λ^2	- 0,070 q λ^2
0,8	- 0,4 K λ	+ 0,0280 q λ	- 0,4280 q λ	0,7895	0,0	- 0,00414 K λ^2	+ 0,03948 q λ^2	- 0,04362 q λ^2
0,9	- 0,5 K λ	+ 0,0193 q λ	- 0,5191 q λ	0,8	0,2500	0	+ 0,04022 q λ^2	- 0,04022 q λ^2
1,0	- 0,6 K λ	+ 0,0167 q λ	- 0,6167 q λ	0,85	0,5816	+ 0,02125 K λ^2	+ 0,04898 q λ^2	- 0,02773 q λ^2

				0,9	0,7638	+ 0,04500 K λ ²	+ 0,06544 q λ ²	- 0,02042 q λ ²
				0,95	0,8959	+ 0,07125 K λ ²	+ 0,08331 q λ ²	- 0,01706 q λ ²
				1,0	1,0	+ 0,10000 K λ ²	+ 0,11667 q λ ²	- 0,01667 q λ ²
2 ^a trav.				2 ^a trav.				
0,0	+ 0,5 K λ	+ 0,5833	- 0,0833 q λ	0,0	0,0	+ 0,10000 K λ ²	+ 0,11667 q λ ²	- 0,01667 q λ ²
0,1	+ 0,4 K λ	+ 0,4870	- 0,0870 q λ	0,05	0,1209	+ 0,07625 K λ ²	+ 0,09033 q λ ²	- 0,01408 q λ ²
0,2	+ 0,3 K λ	+ 0,3991	- 0,0991 q λ	0,1	0,2785	+ 0,05500 K λ ²	+ 0,06248 q λ ²	- 0,00748 q λ ²
0,3	+ 0,2 K λ	+ 0,3210	- 0,1210 q λ	0,15	0,5000	+ 0,03625 K λ ²	+ 0,05678 q λ ²	- 0,02053 q λ ²
0,4	+ 0,1 K λ	+ 0,2537	- 0,1537 q λ	0,2	1,0	+ 0,020 K λ ²	+ 0,050 q λ ²	- 0,030 q λ ²
0,5	0	+ 0,1979	- 0,1979 q λ	0,2764	—	0	+ 0,050 q λ ²	- 0,050 q λ ²
				0,3	—	- 0,005 K λ ²	+ 0,050 q λ ²	- 0,055 q λ ²
				0,4	—	- 0,020 K λ ²	+ 0,050 q λ ²	- 0,070 q λ ²
				0,5	—	- 0,025 K λ ²	+ 0,025 q λ ²	- 0,075 q λ ²

Reazione degli appoggi: $R_1(\text{mass.}) = 0,40 K \lambda + 0,45 q \lambda$, $R_2(\text{mass.}) = 1,1 K \lambda + 1,2 q \lambda$.

Valore medio dello sforzo di taglio: $T_m = -0,2567 K \lambda + 0,3425 q \lambda$.

Massimo negativo assoluto.

Per il carico $\left\{ \begin{array}{l} \text{permanente:} \\ \text{accidentale:} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ travata:} \\ 2^{\text{a}} \text{ travata:} \\ 1^{\text{a}} \text{ travata:} \\ 2^{\text{a}} \text{ travata:} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -M_{(\text{mass.})} = -0,080 K \lambda^2 \\ -M_{(\text{mass.})} = -0,025 K \lambda^2 \\ -M_{(\text{mass.})} = -0,10125 q \lambda^2 \\ -M_{(\text{mass.})} = -0,07500 q \lambda^2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{per } x = 0,4 l_1 \\ \text{per } x = 0,5 l_1 \\ \text{per } x = 0,45 l_1 \\ \text{per } x = 0,50 l_1 \end{array} \right.$

Valor medio del momento di flessione: $M_m = 0,04519 K \lambda^2 + 0,07068 q \lambda^2$.

TABELLA LV.

Trave a tre travate nel rapporto $1:(1,1):1$ ($\lambda = \frac{31}{30} l_1 = \frac{31}{33} l$)

$\frac{x}{l_1}$ od $\frac{x}{l}$	SFORZI DI TAGLIO			$\frac{x}{l_1}$ od $\frac{x}{l}$	$\frac{\xi}{l_1}$ od $\frac{\xi}{l}$	MOMENTI DI FLESSIONE		
	dovuti a K	dovuti a q				dovuti a K	dovuti a q	
		T_x	$+T_{(mass.)}$				$-T_{(mass.)}$	M_x
1 ^a trav. 0,0	+0,3775 $K \lambda$	+0,4382 $q \lambda$	$-0,6007 q \lambda$	0,0	—	0	0	0
0,1	$+0,2807 K \lambda$	$+0,3475 q \lambda$	$-0,0668 q \lambda$	0,1	—	$-0,03185 K \lambda^2$	$+0,00588 q \lambda^2$	$-0,03773 q \lambda^2$
0,2	$+0,1839 K \lambda$	$+0,2689 q \lambda$	$-0,0850 q \lambda$	0,2	—	$-0,05433 K \lambda^2$	$+0,01176 q \lambda^2$	$-0,06609 q \lambda^2$
0,3	$+0,0871 K \lambda$	$+0,2021 q \lambda$	$-0,1150 q \lambda$	0,3	—	$-0,06744 K \lambda^2$	$+0,01764 q \lambda^2$	$-0,08508 q \lambda^2$
0,3900	0	+0,1519 $q \lambda$	-0,1519 $q \lambda$	0,4	—	$-0,07119 K \lambda^2$	$+0,02351 q \lambda^2$	$-0,09470 q \lambda^2$
0,4	$-0,0096 K \lambda$	$+0,1468 q \lambda$	$-0,1564 q \lambda$	0,5	—	$-0,06558 K \lambda^2$	$+0,02939 q \lambda^2$	$-0,09497 q \lambda^2$
0,5	$-0,1064 K \lambda$	$+0,1024 q \lambda$	$-0,2088 q \lambda$	0,6	—	$-0,05060 K \lambda^2$	$+0,03527 q \lambda^2$	$-0,08587 q \lambda^2$
0,6	$-0,2032 K \lambda$	$+0,0683 q \lambda$	$-0,2715 q \lambda$	0,7	—	$-0,02626 K \lambda^2$	$+0,04114 q \lambda^2$	$-0,06740 q \lambda^2$
0,7	$-0,3000 K \lambda$	$+0,0437 q \lambda$	$-0,3437 q \lambda$	0,7801	—	0	+0,04586 $q \lambda^2$	-0,04586 $q \lambda^2$
0,8	$-0,3967 K \lambda$	$+0,0275 q \lambda$	$-0,4242 q \lambda$	0,7964	0,0	$+0,00161 K \lambda^2$	$+0,04683 q \lambda^2$	$-0,04075 q \lambda^2$
0,9	$-0,4935 K \lambda$	$+0,0188 q \lambda$	$-0,5123 q \lambda$	0,8	0,1483	$+0,00761 K \lambda^2$	$+0,04706 q \lambda^2$	$-0,03945 q \lambda^2$
1,0	-0,5903 $K \lambda$	$+0,0162 q \lambda$	-0,6065 $q \lambda$	0,85	0,5565	$+0,02782 K \lambda^2$	$+0,05486 q \lambda^2$	$-0,02704 q \lambda^2$
				0,9	0,7519	+0,05053 $K \lambda^2$	+0,07013 $q \lambda^2$	-0,01960 $q \lambda^2$

				0,95	0,8911	+ 0,07558 K λ ²	+ 0,09171 q λ ²	- 0,01613 q λ ²
				1,00	1,0	+ 0,10297 K λ ²	+ 0,11865 q λ ²	- 0,01568 q λ ²
2 ^a trav.				2 ^a trav.				
0,0	+ 0,5323 K λ	+ 0,6032 q λ	- 0,0709 q λ	0,0	0,0	+ 0,10297 K λ ²	+ 0,11865 q λ ²	- 0,01568 q λ ²
0,1	+ 0,4258 K λ	+ 0,5005 q λ	- 0,0747 q λ	0,05	0,1155	+ 0,07606 K λ ²	+ 0,08976 q λ ²	- 0,01370 q λ ²
0,2	+ 0,3194 K λ	+ 0,4068 q λ	- 0,0876 q λ	0,1	0,2644	+ 0,05198 K λ ²	+ 0,06723 q λ ²	- 0,01525 q λ ²
0,3	+ 0,2129 K λ	+ 0,3234 q λ	- 0,1105 q λ	0,15	0,4709	+ 0,03073 K λ ²	+ 0,05232 q λ ²	- 0,02159 q λ ²
0,4	+ 0,1065 K λ	+ 0,2517 q λ	- 0,1451 q λ	0,2	0,8288	+ 0,01231 K λ ²	+ 0,04478 q λ ²	- 0,03247 q λ ²
0,5	0	+ 0,1922 q λ	0,1922 q λ	0,2075	1,0	+ 0,00992 K λ ²	+ 0,04417 q λ ²	- 0,03427 q λ ²
				0,2368	—	0	+ 0,04417 q λ ²	- 0,04417 q λ ²
				0,3	—	0,01701 K λ ²	+ 0,04417 q λ ²	- 0,06118 q λ ²
				0,4	—	- 0,03301 K λ ²	+ 0,04417 q λ ²	- 0,07718 q λ ²
				0,5	—	- 0,03868 K λ ²	+ 0,04417 q λ ²	0,08285 q λ ²

Reazione degli appoggi: $R_{1(\text{mass})} = 0,3775 K \lambda + 0,4382 q \lambda$; $R_{2(\text{mass})} = 1,1226 K \lambda + 1,2007 q \lambda$.

Valore medio dello sforzo di taglio: $T_m = 0,2580 K \lambda + 0,3325 q \lambda$.

Massimo negativo assoluto.

Per il carico $\left\{ \begin{array}{l} \text{permanente:} \\ \text{accidentale:} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ travata:} \\ 2^{\text{a}} \text{ travata:} \\ 1^{\text{a}} \text{ travata:} \\ 2^{\text{a}} \text{ travata:} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} - M_{(\text{mass.})} = - 0,07124 K \lambda^2 \\ - M_{(\text{mass.})} = - 0,03868 K \lambda^2 \\ - M_{(\text{mass.})} = - 0,09602 q \lambda^2 \\ - M_{(\text{mass.})} = - 0,08285 q \lambda^2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{per } x = 0,3901 l_1 \\ \text{per } x = 0,5 l \\ \text{per } x = 0,4528 l_1 \\ \text{per } x = 0,5 l \end{array} \right.$

Valore medio del momento di flessione: $M_m = 0,04344 K \lambda^2 + 0,07011 q \lambda^2$.

TABELLA LVI.

Trave a tre travate nel rapporto

1:(1.2):1

$$\left(\lambda = \frac{16}{15} l_1 = \frac{8}{9} l \right).$$

$\frac{x}{l}$ $\frac{l_1}{l}$ od $\frac{x}{l}$	SFORZI DI TAGLIO			$\frac{x}{l}$ $\frac{l_1}{l}$ od $\frac{x}{l}$	$\frac{\xi}{l}$ $\frac{l_1}{l}$ od $\frac{\xi}{l}$	MOMENTI DI FLESSIONE		
	dovuti a K	dovuti a q				dovuti a K	dovuti a q	
		T_x	+ $T_{(mass.)}$				- $T_{(mass.)}$	M_x
1 ^a trav. 0,0	+ 0,3516 K λ	+ 0,4269 q λ	- 0,0723 q λ	1 ^a trav. 0,0	—	0	0	0
0,1	+ 0,2608 K λ	+ 0,3390 q λ	- 0,0728 q λ	0,1	—	- 0,02885 K λ^2	+ 0,00678 q λ^2	- 0,03563 q λ^2
0,2	+ 0,1671 K λ	+ 0,2627 q λ	- 0,0956 q λ	0,2	—	- 0,04890 K λ^2	+ 0,01356 q λ^2	- 0,06246 q λ^2
0,3	+ 0,0733 K λ	+ 0,1977 q λ	- 0,1244 q λ	0,3	—	- 0,06017 K λ^2	+ 0,02034 q λ^2	- 0,08051 q λ^2
0,3782	0	+ 0,1547 q λ	- 0,1547 q λ	0,4	—	- 0,06265 K λ^2	+ 0,02710 q λ^2	- 0,08975 q λ^2
0,4	- 0,0204 K λ	+ 0,1438 q λ	- 0,1642 q λ	0,5	—	- 0,05634 K λ^2	+ 0,03390 q λ^2	- 0,09024 q λ^2
0,5	- 0,1142 K λ	+ 0,1005 q λ	- 0,2147 q λ	0,6	—	- 0,04124 K λ^2	+ 0,04069 q λ^2	- 0,08193 q λ^2
0,6	- 0,2079 K λ	+ 0,0671 q λ	- 0,2750 q λ	0,7	—	- 0,01736 K λ^2	+ 0,04746 q λ^2	- 0,06482 q λ^2
0,7	- 0,3017 K λ	+ 0,0429 q λ	- 0,3446 q λ	0,7564	—	0	+ 0,05127 q λ^2	- 0,05127 q λ^2
0,8	- 0,3954 K λ	+ 0,0270 q λ	- 0,4224 q λ	0,8	—	+ 0,01532 K λ^2	+ 0,05424 q λ^2	- 0,03892 q λ^2
0,9	- 0,4802 K λ	+ 0,0183 q λ	- 0,5075 q λ	0,8029	0	+ 0,01639 K λ^2	+ 0,05443 q λ^2	- 0,03804 q λ^2
1,0	- 0,5829 K λ	+ 0,0157 q λ	- 0,5986 q λ	0,85	0,5304	+ 0,03496 K λ^2	+ 0,06016 q λ^2	- 0,02520 q λ^2
				0,90	0,7399	+ 0,05679 K λ^2	+ 0,07558 q λ^2	- 0,01879 q λ^2

				0,95	0,8864	+ 0,08082 K λ ²	+ 0,09606 q λ ²	- 0,01524 q λ ²
				1,00	1,00	+ 0,10704 K λ ²	+ 0,12176 q λ ²	- 0,01472 q λ ²
2 ^a trav.				2 ^a trav.				
0,0	+ 0,5625 K λ	+ 0,6235 q λ	- 0,0610 q λ	0	0	+ 0,10704 K λ ²	+ 0,12176 q λ ²	- 0,01472 q λ ²
0,1	+ 0,4500 K λ	+ 0,5150 q λ	- 0,0650 q λ	0,05	0,1104	+ 0,07698 K λ ²	+ 0,08995 q λ ²	- 0,01297 q λ ²
0,2	+ 0,3375 K λ	+ 0,4156 q λ	- 0,0781 q λ	0,1	0,2528	+ 0,05009 K λ ²	+ 0,06536 q λ ²	- 0,01527 q λ ²
0,3	+ 0,2250 K λ	+ 0,3274 q λ	- 0,1024 q λ	0,15	0,4475	+ 0,02637 K λ ²	+ 0,04882 q λ ²	- 0,02245 q λ ²
0,4	+ 0,1125 K λ	+ 0,2514 q λ	- 0,1389 q λ	0,2	0,7619	+ 0,00579 K λ ²	+ 0,04039 q λ ²	- 0,03460 q λ ²
0,5	0	+ 0,1885 q λ	- 0,1885 q λ	0,2043	0,1	+ 0,00050 K λ ²	+ 0,03923 q λ ²	- 0,03875 q λ ²
				0,2157	—	0	+ 0,03923 q λ ²	- 0,03923 q λ ²
				0,3	—	- 0,02585 K λ ²	+ 0,03923 q λ ²	- 0,06508 q λ ²
				0,4	—	- 0,04483 K λ ²	+ 0,03923 q λ ²	- 0,08406 q λ ²
				0,5	—	- 0,05116 K λ ²	+ 0,03923 q λ ²	- 0,09040 q λ ²

Reazione degli appoggi: $R_1(\text{mass.}) = 0,3546 K \lambda + 0,4269 q \lambda$; $R_2(\text{mass.}) = 1,1454 K \lambda + 1,2221 q \lambda$.

Valore medio dello sforzo di taglio: $T_m = 0,2607 K \lambda + 0,3450 q \lambda$.

Massimo negativo assoluto.

Per il carico $\left\{ \begin{array}{l} \text{permanente:} \\ \text{accidentale:} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ travata:} \\ 2^{\text{a}} \text{ travata:} \\ 1^{\text{a}} \text{ travata:} \\ 2^{\text{a}} \text{ travata:} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -M_{(\text{mass.})} = -0,06286 K \lambda^2 \\ -M_{(\text{mass.})} = -0,05116 K \lambda^2 \\ -M_{(\text{mass.})} = -0,09111 q \lambda^2 \\ -M_{(\text{mass.})} = -0,09040 q \lambda^2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{per } x = 0,378 l_1 \\ \text{per } x = 0,5 l \\ \text{per } x = 0,456 l_1 \\ \text{per } x = 0,50 l \end{array} \right.$

Valore medio del momento di flessione: $M_m = 0,04242 K \lambda^2$ per $x = 0,06997 q \lambda$.

TABELLA LVII.

Trave a tre travate nel rapporto $1:(1,3):1$ ($\lambda = \frac{11}{10} l_1 = \frac{11}{13} l$).

$\frac{x}{l_1}$ od $\frac{x}{l}$	SFORZI DI TAGLIO			$\frac{x}{l_1}$ od $\frac{x}{l}$	$\frac{\xi}{l_1}$ od $\frac{\xi}{l}$	MOMENTI DI FLESSIONE		
	dovuti a K	dovuti a q				dovuti a K	dovuti a q	
		T_x	$+T_{(mass.)}$				$-T_{(mass.)}$	M_x
1 ^a trav. 0,0	+ 0,3314 $K \lambda$	+ 0,4160 $q \lambda$	$- 0,0846 q \lambda$	0,0	—	0	0	0
0,1	$+ 0,2405 K \lambda$	$+ 0,3307 q \lambda$	$- 0,0902 q \lambda$	0,1	—	$- 0,02599 K \lambda^2$	$+ 0,00769 q \lambda^2$	$- 0,03369 q \lambda^2$
0,2	$+ 0,1496 K \lambda$	$+ 0,2566 q \lambda$	$- 0,1070 q \lambda$	0,2	—	$- 0,04373 K \lambda^2$	$+ 0,01539 q \lambda^2$	$- 0,05911 q \lambda^2$
0,3	$+ 0,0587 K \lambda$	$+ 0,1954 q \lambda$	$- 0,1347 q \lambda$	0,3	—	$- 0,05319 K \lambda^2$	$+ 0,02308 q \lambda^2$	$- 0,07627 q \lambda^2$
0,3646	0	+ 0,1583 $q \lambda$	- 0,1583 $q \lambda$	0,4	—	$- 0,05439 K \lambda^2$	$+ 0,03077 q \lambda^2$	$- 0,08517 q \lambda^2$
0,4	$- 0,0322 K \lambda$	$+ 0,1409 q \lambda$	$- 0,1731 q \lambda$	0,5	—	$- 0,04733 K \lambda^2$	$+ 0,03847 q \lambda^2$	$- 0,08580 q \lambda^2$
0,5	$- 0,1232 K \lambda$	$+ 0,0986 q \lambda$	$- 0,2218 q \lambda$	0,6	—	$- 0,03200 K \lambda^2$	$+ 0,04616 q \lambda^2$	$- 0,07816 q \lambda^2$
0,6	$- 0,2141 K \lambda$	$+ 0,0659 q \lambda$	$- 0,2800 q \lambda$	0,7	—	$- 0,00841 K \lambda^2$	$+ 0,05385 q \lambda^2$	$- 0,06226 q \lambda^2$
0,7	$- 0,3050 K \lambda$	$+ 0,0421 q \lambda$	$- 0,3471 q \lambda$	0,7291	—	0	+ 0,05609 $q \lambda^2$	- 0,05609 $q \lambda^2$
0,8	$- 0,3959 K \lambda$	$+ 0,0264 q \lambda$	$- 0,4223 q \lambda$	0,8	—	$+ 0,02341 K \lambda^2$	$+ 0,06155 q \lambda^2$	$- 0,03810 q \lambda^2$
0,9	$- 0,4868 K \lambda$	$+ 0,0178 q \lambda$	$- 0,5046 q \lambda$	0,8089	0	$+ 0,02668 K \lambda^2$	$+ 0,06225 q \lambda^2$	$- 0,03556 q \lambda^2$
1,0	- 0,5777 $K \lambda$	$+ 0,0152 q \lambda$	- 0,5929 $q \lambda$	0,85	0,5031	$+ 0,04247 K \lambda^2$	$+ 0,06804 q \lambda^2$	$- 0,02557 q \lambda^2$
				0,9	0,7278	$+ 0,06356 K \lambda^2$	$+ 0,08155 q \lambda^2$	$- 0,01799 q \lambda^2$

				0,95	0,8816	+ 0,08673 K λ ²	+ 0,10108 q λ ²	- 0,01435 q λ ²
				1,0	1,0	+ 0,11196 K λ ²	+ 0,12575 q λ ²	- 0,01380 q λ ²
2 ^a trav.				2 ^a trav.				
0,0	+ 0,5909 K λ	+ 0,6439 q λ	- 0,0530 q λ	0,0	0,0	+ 0,11196 K λ ²	+ 0,12575 q λ ²	- 0,01380 q λ ²
0,1	+ 0,4727 K λ	+ 0,5290 q λ	- 0,0571 q λ	0,05	0,1067	+ 0,07878 K λ ²	+ 0,09124 q λ ²	- 0,01246 q λ ²
0,2	+ 0,3545 K λ	+ 0,4252 q λ	- 0,0707 q λ	0,1	0,2429	+ 0,04910 K λ ²	+ 0,06433 q λ ²	- 0,01523 q λ ²
0,3	+ 0,2364 K λ	+ 0,3323 q λ	- 0,0950 q λ	0,15	0,4282	+ 0,02357 K λ ²	+ 0,04610 q λ ²	- 0,02253 q λ ²
0,4	+ 0,1182 K λ	+ 0,2523 q λ	- 0,1341 q λ	0,2	0,7152	+ 0,00022 K λ ²	+ 0,03672 q λ ²	- 0,03650 q λ ²
0,5	0	+ 0,1862 q λ	- 0,1862 q λ	0,2005	0,7207	0	+ 0,03644 q λ ²	- 0,03644 q λ ²
				0,2203	1,0	- 0,00802 K λ ²	+ 0,03503 q λ ²	- 0,04305 q λ ²
				0,3	—	- 0,03469 K λ ²	+ 0,03503 q λ ²	- 0,06972 q λ ²
				0,4	—	- 0,05566 K λ ²	+ 0,03503 q λ ²	- 0,09069 q λ ²
				0,5	—	- 0,06264 K λ ²	+ 0,03503 q λ ²	- 0,09767 q λ ²

Reazione degli appoggi: $R_1(\text{mass.}) = 0,3314 K \lambda + 0,4160 q \lambda$, $R_2(\text{mass.}) = 1,1686 K \lambda + 1,2368 q \lambda$.

Valore medio dello sforzo di taglio: $T_m = 0,2642 K \lambda + 0,3487 q \lambda$.

Massimo negativo assoluto.

Per il carico $\left\{ \begin{array}{l} \text{permanente:} \\ \text{accidentale:} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 1^a \text{ travata:} \\ 2^a \text{ travata:} \\ 1^a \text{ travata:} \\ 2^a \text{ travata:} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -M_{(\text{mass.})} = -0,05491 K \lambda^2 \\ -M_{(\text{mass.})} = -0,06263 K \lambda^2 \\ -M_{(\text{mass.})} = -0,08654 q \lambda^2 \\ -M_{(\text{mass.})} = -0,09767 q \lambda^2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{per } x = 0,365 l_1 \\ \text{per } x = 0,5 l \\ \text{per } x = 0,458 l_1 \\ \text{per } x = 0,5 l \end{array} \right.$

Valore medio del momento di flessione: $M_m = 0,04243 K \lambda^2 + 0,07075 q \lambda^2$.

5. — **Travate tutte eguali tra loro.**

A) Per quattro travate eguali :

$$R_1 = R_5 = 0,393 K l ; \quad R_2 = R_4 = 1,143 K l , \quad R_3 = 0,929 K l .$$

$$M_1 = M_5 = 0 ; \quad M_2 = M_4 = 0,107 K l^2 , \quad M_3 = 0,071 K l^2 .$$

1^a e 4^a travata :

$$M_{(\text{mass.})} = 0,077 K l^2 \quad \text{per} \quad x = 0,393 l \quad \text{e per} \quad x = 0,607 l .$$

2^a e 3^a travata :

$$M_{(\text{mass.})} = 0,036 K l^2 \quad \text{per} \quad x = 0,536 l \quad \text{e per} \quad x = 0,464 l .$$

B) Per cinque travate eguali :

$$R_1 = R_6 = 0,395 K l , \quad R_2 = R_5 = 1,13 K l , \quad R_3 = R_4 = 0,974 K l .$$

$$M_4 = M_6 = 0 , \quad M_2 = M_5 = 0,105 K l^2 , \quad M_3 = M_4 = 0,079 K l^2 .$$

1^a e 5^a travata :

$$M_{(\text{mass.})} = 0,078 K l^2 \quad \text{per} \quad x = 0,395 l \quad \text{e per} \quad x = 0,605 l .$$

2^a e 4^a travata :

$$M_{(\text{mass.})} = 0,033 K l^2 \quad \text{per} \quad x = 0,526 l \quad \text{e per} \quad x = 0,474 l .$$

3^a travata :

$$M_{(\text{mass.})} = 0,046 K l^2 \quad \text{per} \quad x = 0,5 .$$

NB. In tutte queste formole K è il carico *permanente* uniformemente ripartito per ogni m. corr. di trave (*).

(*) Fra le tabelle analoghe a queste e molto estese, oltre a quelle conoscintissime del Winkler cito le recenti compilate dai Sigg. Ingg. Dupuy e Cuénot (Barèmes destinés a faciliter le calcul des ponts métalliques a une ou plusieurs travées).

CAPITOLO IX.

Travi sostenute e travi armate. Incavallature.

In questo capitolo diamo delle formole *esatte* e delle formole *approssimate*. Queste possono servire, per un primo calcolo d'approssimazione, ad assegnare una determinata sezione alle travi od ai puntoni; dopo di ciò si potrà riprendere il calcolo applicando le formole esatte, determinando più esattamente gli sforzi che hanno luogo nei pezzi del sistema ed assegnandone così le sezioni convenienti.

Per le travi **sostenute** diamo prima le formole per calcolare le incognite dovute alle *sole forze esterne* (carichi) applicate al sistema, senza tener conto delle variazioni di temperatura, ed in seguito diamo le formole per calcolare le incognite dovute alle *sole variazioni di temperatura*. Il valore totale delle incognite dovuto alle forze esterne ed alle variazioni di temperatura, si otterrà adunque, per le travi sostenute, applicando il *principio della sovrapposizione degli effetti*, cioè addizionando i valori delle incognite dovuti alle forze esterne coi valori delle rispettive incognite dovuti alle variazioni di temperatura.

Per le travi **armate** e per le **incavallature**, i termini dovuti alle variazioni di temperatura sono stabiliti assumendo che la dilatazione lineare della trave o dei puntoni sia trascurabile di fronte a quella dei tiranti o delle saette, come avviene per travi e puntoni in legno e tiranti in ferro; quando tutti i pezzi del sistema sono formati del medesimo materiale si dovranno trascurare nelle formole delle travi armate e delle incavallature i termini, contenenti la notazione Δt dovuti alle variazioni di temperatura.

1. — Trave incastrata per un'estremità, libera all'altra, sostenuta da una saetta o da un tirante.

a) Carico concentrato applicato alla estremità libera B della trave. Sia AB la trave, DC la saetta *incastrata* in D ed unita a *snodo* in C , e si chiamino:

P il carico concentrato in B che agisce *normalmente* all'asse della trave;

N la pressione o tensione incognita della saetta;

E ed e i moduli di elasticità della trave e della saetta;

I ed i i momenti d'inerzia delle sezioni della trave e della saetta:

Ω e ω le aree delle sezioni della trave e della saetta.

Per determinare l'incognita N si hanno le seguenti formole:

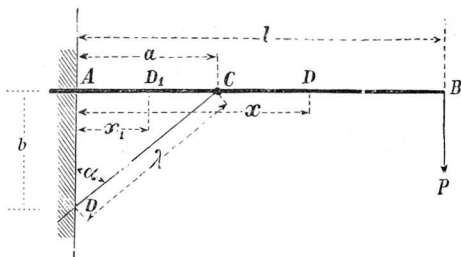


Fig. 177.

SAETTA. (*): *Formola approssimata:*

$$N = \frac{(3l - a)P}{2a \cos \alpha \left(1 + \frac{EI}{e i \sin \alpha}\right)} \quad (a)$$

Formola esatta:

$$N = \frac{a \cos \alpha (3l - a)P}{2a^2 \cos^2 \alpha \left(1 + \frac{EI}{e i \sin \alpha}\right) + 6 \frac{EI}{e \omega \sin \alpha} + 6 \frac{I}{\Omega} \sin^2 \alpha} \quad (a')$$

TIRANTE:

Qui faremo un' *avvertenza generale*, che vale per tutti i sistemi di travi *sostenute*, cioè che le formole, che danno le tensioni incognite dei tiranti, si deducono immediatamente da quelle delle saette con questa sola modificazione: *che si devono trascurare i termini contenenti la lettera i* .

Così, nel caso presente, la tensione del tirante si ottiene dalle formole (a), (a') cancellando in esse il termine $\frac{EI}{e i \sin \alpha}$, talchè si ha:

(*) Nei sistemi di travi *sostenute* chiamiamo sempre **tiranti** i pezzi aventi uno snodo in ambedue le loro estremità, e **saette** i pezzi uniti a snodo alla trave con una loro estremità, ma incastrati nei piedritti coll'altra loro estremità. Invece nelle travi *armate* e nelle *incavallature* tutti i pezzi, tanto che si chiamino tiranti, quanto che si chiamino saette, sono, nelle nostre formole, considerati uniti al sistema mediante semplice snodo in ambedue le loro estremità, senza incastro.

Formola approssimata:

$$N = \frac{(3l - a)P}{2a \cos \alpha} = \frac{(3l - a)\lambda}{2ab} P. \quad (b)$$

Formola esatta:

$$N = \frac{a \cos \alpha (3l - a) P}{2a^2 \cos^2 \alpha + 6 \frac{EI}{e\omega \sin \alpha} + 6 \frac{I}{\Omega} \sin^2 \alpha}. \quad (b')$$

TENSIONE MASSIMA AMMESSIBILE: Faremo un'altra osservazione generale. In tutti i sistemi che contengono dei tiranti o delle saette (travi sostenute, travi armate, incavallature), conviene per l'economia, che questi pezzi siano assoggettati ai massimi sforzi, che possono con sicurezza sopportare. Pertanto, chiamando N_m il valore massimo ammissibile della tensione N in un tirante di sezione ω ed r il carico di sicurezza che si suole adottare per il materiale ond'è costituito il tirante, converrà prendere ω in modo che sia soddisfatta la condizione:

$$\frac{N_m}{\omega} = r,$$

da cui:

$$\frac{1}{\omega} = \frac{r}{N_m}. \quad (c)$$

Introducendo nella (b') il valore (c) di $\frac{1}{\omega}$, e scrivendo N_m in luogo di N , si ottiene:

$$N_m = \frac{a(3l - a) \cos \alpha P - 6 \frac{EI r}{e \sin \alpha}}{2a^2 \cos^2 \alpha + 6 \frac{I}{\Omega} \sin^2 \alpha}.$$

Per calcolare la sezione della trave e del tirante, in modo da soddisfare a buone condizioni di economia e di stabilità, si comincia dall'assumere come data una certa sezione per la trave e si calcola il valore di N_m corrispondente a questa sezione (se N_m risulta negativo, è segno che si è assunto Ω troppo grande, e che la si deve diminuire). Noto N_m , si calcolano i momenti inflettenti (*)

(*) Il momento inflettente, in una sezione qualunque di una trave, è la somma algebrica dei momenti di tutte le forze che agiscono da una stessa parte della sezione (o solo a destra o solo a sinistra) siano queste forze pesi, o reazioni d'appoggi, o tensioni, o pressioni di tiranti e di saette, o momenti inflettenti esistenti dalla parte considerata della sezione. Così per es. nel caso sopra trattato il momento inflettente in D è:

$$M_x = P(l - x)$$

ed il momento inflettente in D_1 è:

$$M_{x_1} = P(l - x_1) - N_m(a - x_1) \cos \alpha.$$

in diverse sezioni della trave, nonchè le pressioni normali, prodotte dall'azione dei tiranti o delle saette, in quelle, di queste sezioni, che si trovano in tronchi della trave nei quali si verificano le dette pressioni normali. Detti M e \mathfrak{N} il momento inflettente e la pressione normale in una qualunque delle sezioni considerate, e v la distanza della fibra più affaticata della sezione dall'asse neutro della sezione medesima si dovrà prendere la sezione della trave di tale grandezza che sia soddisfatta, per tutte le sezioni considerate, la condizione di stabilità:

$$\frac{\mathfrak{N}}{\Omega} \pm M \frac{v}{I} = R \quad (\text{I})$$

nella quale R è il carico di sicurezza della trave.

Se la sezione assunta da principio, come data, soddisfa alla condizione (I), essa è la sezione da adottarsi; se non soddisfa, converrà assumere, come data un'altra sezione e ripetere il calcolo finchè si sia assunta una sezione che soddisfi abbastanza approssimativamente alla condizione (I). Ciò fatto non resta che assegnare la sezione del tirante, il che si fa subitamente colla semplice formola:

$$\omega = \frac{N_{\text{max}}}{r} \quad (\text{II})$$

Si potrebbe anche, invece di soddisfare alla condizione (I) con una sezione costante per tutta la trave, soddisfarvi con una sezione variabile in modo che la trave prenda la forma di un **solido di eguale resistenza**. Il sistema più economico sarebbe quello che si otterrebbe in quest'ultimo caso.

Quando il sistema sia formato di tiranti o saette di rilevante lunghezza, converrà verificare anche se questi tiranti o queste saette si trovano in buone condizioni riguardo agli **sforzi in punta**.

b) Carico uniformemente ripartito sulla trave nella ragione di q unità di peso per unità di lunghezza della trave.

Il metodo di calcolo è affatto lo stesso come pel caso *a)* e le formole da applicarsi sono le seguenti.

SAETTA: Formola approssimata:

$$N = \frac{(6 l^2 - 4 a l + a^2) q}{8 a \cos \alpha \left(1 + \frac{E I}{e \text{isen} \alpha} \right)}$$

Formola esatta:

$$N = \frac{\cos \alpha (6 l^2 - 4 a l + a^2) a q}{8 a^2 \cos^2 \alpha \left(1 + \frac{E I}{e \text{isen} \alpha} \right) + 24 \frac{E I}{e \omega \text{sen} \alpha} + 24 \frac{I}{\Omega \text{sen}^2 \alpha}}$$

TIRANTE: Formola approssimata:

$$N = \frac{(6 l^2 - 4 a l + a^2) q}{8 a \cos \alpha} = \frac{(6 l^2 - 4 a l + a^2) \lambda}{8 a b} q$$

Formola esatta :

$$N = \frac{\cos \alpha (6 l^2 - 4 a l + a^2) a q}{8 a^2 \cos^2 \alpha + 24 \frac{E I}{e \omega \sin \alpha} + 24 \frac{I}{\Omega} \sin^2 \alpha}$$

TENSIONE MASSIMA AMMESSIBILE:

$$N_m = \frac{\cos \alpha (6 l^2 - 4 a l + a^2) a q - \frac{24 E I r}{e \sin \alpha}}{8 a^2 \cos^2 \alpha + 24 \frac{I}{\Omega} \sin^2 \alpha}$$

Casi particolari. Pei seguenti casi particolari diamo la formola numerica esatta (non tenendo conto delle variazioni di temperatura). Le unità di misura sono sempre il m. ed il kg. .

1.º)

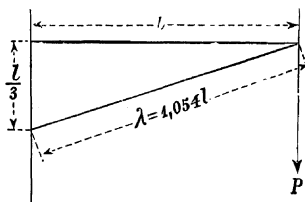


Fig. 178 [Caso 1.º)].

SAETTA :

$$N = \frac{0,634 P}{0,2 \left(1 + 1,054 \frac{I}{i} \right) + 6,324 \frac{I}{\omega l^2} + 5,394 \frac{I}{\Omega l^2}}$$

per trave e saetta ambedue in ferro od ambedue in legno;

$$N = \frac{0,634 P}{0,2 \left(1 + 0,070 \frac{I}{i} \right) + 0,422 \frac{I}{\omega l^2} + 5,394 \frac{I}{\Omega l^2}}$$

per trave in legno e saetta in ferro.

TIRANTE. I valori di \$N\$ pel caso del tirante si ottengono, come si è già detto, dalle precedenti formole cancellando in esse i termini contenenti la lettera \$i\$.

Per le tensioni \$N_m\$, massime ammessibili, si ha :

$$N_m = \frac{0,634 l^2 P - 37974000 I}{0,2 l^2 + 5,394 \frac{I}{\Omega}} \quad \text{trave e tirante in ferro:}$$

$$N_m = \frac{0,634 l^2 P - 3797400 I}{0,2 l^2 + 5,394 \frac{I}{\Omega}} \quad \text{trave e tirante in legno;}$$

$$N_m = \frac{0,634 l^2 P - 2531600 I}{0,2 l^2 + 5,394 \frac{I}{\Omega}} \quad \text{trave in legno e tirante in ferro.}$$

2.º)

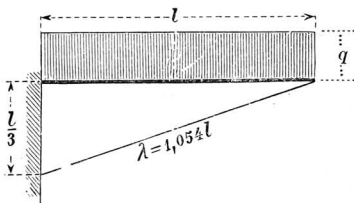


Fig. 179 [Caso 2.º)].

SAETTA:

$$N = \frac{0,951 q l}{0,8 \left(1 + 1,054 \frac{I}{i} \right) + 25,296 \frac{I}{\omega l^2} + 21,576 \frac{I}{\Omega l^2}}$$

per trave e saetta ambedue in ferro, od ambedue in legno.

$$N = \frac{0,951 q l}{0,8 \left(1 + 0,070 \frac{I}{i} \right) + 1,684 \frac{I}{\omega l^2} + 21,576 \frac{I}{\Omega l^2}},$$

per trave in legno e saetta in ferro.

TIRANTE:

$$N_m = \frac{0,951 l^3 q - 151896000 I}{0,8 l^2 + 21,576 \frac{I}{\Omega}}, \quad \text{trave e tirante in ferro;}$$

$$N_m = \frac{0,951 l^3 q - 15189600 I}{0,8 l^2 + 21,576 \frac{I}{\Omega}}, \quad \text{trave e tirante in legno;}$$

$$N_m = \frac{0,951 l^3 q - 10126400 I}{0,8 l^2 + 21,576 \frac{I}{\Omega}}, \quad \text{trave in legno e tirante in ferro.}$$

NB. In questo caso, come in tutti gli altri di travi sostenute, il

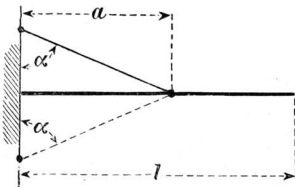


Fig. 180.

tirante (od i tiranti) possono essere collocati sopra la trave, come è segnato in linea piena nella fig. 180, o sotto la trave come è segnato in linea punteggiata nella figura stessa. Le formole che danno le tensioni o pressioni sono sempre le stesse.

3.º)

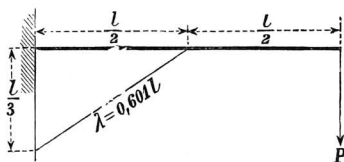


Fig. 181 [Caso 3.º)].

SAETTA:

$$N = \frac{0,692 P}{0,1535 \left(1 + 1,201 \frac{I}{i}\right) + 7,206 \frac{I}{\omega l^2} + 4,152 \frac{I}{\Omega l^2}}$$

per trave e saetta ambedue in ferro od ambedue in legno;

$$N = \frac{0,692 P}{0,1535 \left(1 + 0,080 \frac{I}{i}\right) + 0,480 \frac{I}{\omega l^2} + 4,152 \frac{I}{\Omega l^2}}$$

per trave in legno e saetta in ferro.

TIRANTE:

$$N_m = \frac{0,692 l^2 P - 43236000 I}{0,1535 l^2 + 4,152 \frac{I}{\Omega}} \quad \text{trave e tirante in ferro;}$$

$$N_m = \frac{0,692 l^2 P - 4323600 I}{0,1535 l^2 + 4,152 \frac{I}{\Omega}} \quad \text{trave e tirante in legno;}$$

$$N_m = \frac{0,692 l^2 P - 2882400 I}{0,1535 l^2 + 4,152 \frac{I}{\Omega}} \quad \text{trave in legno e tirante in ferro}$$

4.º)

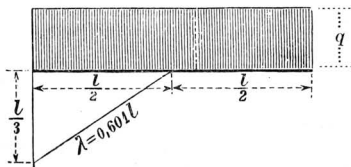


Fig. 182 [Caso 4.º)].

SAETTA:

$$N = \frac{0,177 q l}{0,614 \left(1 + 1,201 \frac{I}{i}\right) + 28,824 \frac{I}{\omega l^2} + 16,608 \frac{I}{\Omega l^2}}$$

per trave e saetta ambedue in ferro od ambedue in legno;

$$N = \frac{0,177 q l}{0,614 \left(1 + 0,080 \frac{I}{i}\right) + 1,922 \frac{I}{\omega l^2} + 16,608 \frac{I}{\Omega l^2}}$$

per trave in legno e saetta in ferro.

TIRANTE:

$$N_m = \frac{0,177 l^3 q - 172944000 I}{0,614 l^2 + 16,608 \frac{I}{\Omega}} \quad \text{trave e tirante in ferro;}$$

$$N_m = \frac{0,177 l^3 q - 17294400 I}{0,614 l^2 + 16,608 \frac{I}{\Omega}} \quad \text{trave e tirante in legno;}$$

$$N_m = \frac{0,177 l^3 q - 15529600 I}{0,614 l^2 + 16,608 \frac{I}{\Omega}} \quad \text{trave in legno e tirante in ferro}$$

Variazioni di temperatura.

Cercheremo il valore della tensione o pressione N_1 sviluppantesi nella trave (tronco AC), e della tensione o pressione N sviluppantesi nella saetta o tirante, per effetto di una variazione di tempe-

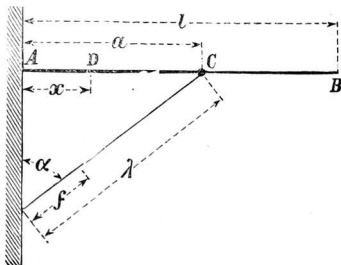


Fig. 183.

ratura di Δt gradi, superiore od inferiore alla temperatura media, in cui si suppone composto il sistema.

Siccome per il principio della sovrapposizione degli effetti po-

tremo, dopo trovati i valori di N e di N_1 , dovuti alle sole variazioni di temperatura, sommarli con quelli di N e di $N \text{ sen } \alpha$, dovuti ai carichi. così nella ricerca di N e di N_1 supporremo scarica la trave.

Chiamando M_x il momento di flessione in una sezione qualunque del tronco AC della trave, ed μ_x il momento di flessione in una sezione qualunque della saetta, che si producono per una variazione di temperatura, sarà:

$$M_x = N \cos \alpha (a - x) ,$$

$$\mu_x = N_1 \cos \alpha (\lambda - x) ,$$

ed il lavoro di deformazione del sistema sarà:

$$\left(\frac{1}{2EI} \cos^2 \alpha \cdot \frac{a^3}{3} + \frac{1}{2E\Omega} \text{sen}^2 \alpha \cdot a + \frac{1}{2e\omega} \lambda \right) N^2 + \\ + \left(\frac{1}{2e\bar{i}} \cos^2 \alpha \cdot \frac{\lambda^3}{3} + \frac{1}{2e\omega} \text{sen}^2 \alpha \cdot \lambda + \frac{1}{2E\Omega} a \right) N_1^2 .$$

Derivando quest'espressione rispetto a N e a N_1 si ottiene:

$$\left(\frac{a^3}{3EI} \cos^2 \alpha + \frac{a}{E\Omega} \text{sen}^2 \alpha + \frac{\lambda}{e\omega} \right) N \quad (\alpha) ,$$

$$\left(\frac{\lambda^3}{3e\bar{i}} \cos^2 \alpha + \frac{\lambda}{e\omega} \text{sen}^2 \alpha + \frac{a}{E\Omega} \right) N_1 \quad (\beta) ;$$

e pel teorema delle derivate del lavoro di deformazione si sa che le due formole (α) e (β) esprimono lo spostamento del punto C nelle direzioni dell'asse della saetta e dell'asse della trave.

Sia $\frac{1}{\delta}$ il coefficiente di dilatazione lineare (*) della saetta

ed $\frac{1}{\delta_1}$ il coefficiente di dilatazione lineare della trave:

lo spostamento del punto C nella direzione della saetta, supposto che essa possa *dilatarsi liberamente*, è:

$$\pm \frac{1}{\delta} \lambda \Delta t , \quad (\gamma)$$

e lo spostamento del punto C nella direzione della trave, supposto che questa possa *dilatarsi liberamente*, è:

$$\pm \frac{1}{\delta_1} a \Delta t . \quad (\delta)$$

(*) Pel ferro, esprimendo Δt in gradi centigradi, si può prendere:

$$\delta = 82500 .$$

Dunque eguagliando fra loro i valori (α) e (γ) ed i valori (β) e (δ) si ricava:

$$N = \frac{\pm \lambda \Delta t}{\delta \left(\frac{a^3}{3EI} \cos^2 \alpha + \frac{a}{E\Omega} \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{a}{e\omega} \right)},$$

$$N_1 = \frac{\pm a \Delta t}{\delta_1 \left(\frac{\lambda^3}{3e i} \cos^2 \alpha + \frac{\lambda}{e\omega} \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{a}{E\Omega} \right)}.$$

le quali danno i domandati valori delle tensioni o pressioni. In queste formole il segno superiore vale per gli *innalzamenti di temperatura*, e l'inferiore per gli *abbassamenti della stessa*.

2. — Trave incastrata per un'estremità, appoggiata all'altra e sostenuta, dalla parte dell'incastro, da una saetta o da un tirante.

Si ritengono le notazioni precedenti e di più sia c la distanza

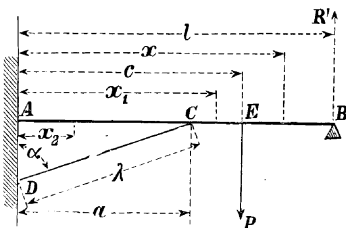


Fig. 184.

del punto E d'applicazione del peso concentrato P dall'incastro in A , ed R' la reazione dell'appoggio B .

Per determinare le incognite N ed R' si dovrà risolvere un sistema di due equazioni di primo grado e si avrà:

a) Carico concentrato.

Formole approssimate:

SAETTA:

$$2 l^3 R' + a^2 \cos \alpha (3 l - a) N = c^2 (3 l - c) P,$$

$$(3 l - a) R' + 2 a \cos \alpha \left(1 + \frac{EI}{e i \operatorname{sen} \alpha} \right) N = (3 c - a) P;$$

dalle quali:

$$N = \frac{c^2 (3 l - c) (3 l - a) - 2 l^3 (3 c - a)}{a^2 (3 l - a)^2 - 4 a l^3 \left(1 + \frac{EI}{e i \operatorname{sen} \alpha} \right)} \frac{P}{\cos \alpha},$$

$$R' = \frac{c^2(3l - c)P - a^2 \cos \alpha (3l - a)N}{2l^3} .$$

Formole esatte :

SAETTA :

$$\begin{aligned} 2l^3 R' + \cos \alpha (3l - a) a^2 N &= c^2(3l - c)P , \\ \alpha(3l - a) \cos \alpha . R' + \left[2a^2 \cos^2 \alpha \left(1 + \frac{EI}{e i \sin \alpha} \right) + 6 \frac{EI}{e \omega \sin \alpha} + \right. \\ &\left. + 6 \frac{I}{\Omega} \sin^2 \alpha \right] N = a(3c - a)P \cos \alpha . \end{aligned}$$

TIRANTE :

$$\begin{aligned} 2l^3 R' + \cos \alpha (3l - a) a^2 N_m - c^2(3l - c)P , \\ \alpha(3l - a) \cos \alpha . R' + \left(2a^2 \cos^2 \alpha + 6 \frac{I}{\Omega} \sin^2 \alpha \right) N_m = \\ = a(3c - a) \cos \alpha . P - 6 \frac{EI r}{e i \sin \alpha} . \end{aligned}$$

b) Carico uniformemente ripartito.

Formole approssimate :

SAETTA :

$$\begin{aligned} 8l^3 R' + 4a^2 \cos \alpha . (3l - a)N &= 3q l^4 , \\ 4(3l - a)R' + 8a \cos \alpha \left(1 + \frac{EI}{e i \sin \alpha} \right) N &= (6l^2 - 4al + a^2)q \end{aligned}$$

dalle quali :

$$\begin{aligned} N &= \frac{3(3l - a)l^4 - 2l^3(6l^2 - 4al + a^2)}{4a^2(3l - a)^2 - 16al^3 \left(1 + \frac{EI}{e i \sin \alpha} \right)} \frac{q}{\cos \alpha} , \\ R' &= \frac{3q l^4 - 4a^2 \cos \alpha (3l - a)N}{8l^3} . \end{aligned}$$

Formole esatte :

SAETTA.

$$\begin{aligned} 8l^3 R' + 4a^2 \cos \alpha (3l - a)N &= 3q l^4 , \\ 4\alpha(3l - a) \cos \alpha R' + \left[8a^2 \cos^2 \alpha \left(1 + \frac{EI}{e i \sin \alpha} \right) + \right. \\ &\left. + 24 \frac{EI}{e \omega \sin \alpha} + 24 \frac{I}{\Omega} \sin^2 \alpha \right] N = (6l^2 - 4al + a^2) a q \cos \alpha . \end{aligned}$$

TIRANTE :

$$8l^3 R' + 4a^2 \cos \alpha (3l - a)N_m = 3q l^4 ,$$

$$4 a (3 l - a) \cos \alpha R' + \left(8 a^2 \cos^2 \alpha + 24 \frac{I}{\Omega} \sin^2 \alpha \right) N_m =$$

$$= (6 l^2 - 4 a l + a^2) a q \cos \alpha - 24 \frac{E I r}{e \sin \alpha} .$$

Casi particolari.

Pei seguenti casi particolari diamo le formole numeriche esatte (non tenendo conto delle variazioni di temperatura).

1.°)

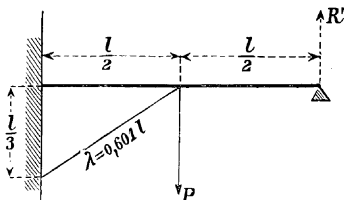


Fig. 185 [Caso 1.°].

SAETTA.

Trave e saetta ambedue in ferro od ambedue in legno :

$$2 R' + 0,346 N = 0,625 P ,$$

$$0,692 R' + \left[0,1535 \left(1 + 1,201 \frac{I}{i} \right) + 7,206 \frac{I}{\omega l^2} + \right. \\ \left. + 4,152 \frac{I}{\Omega l^2} \right] N = 0,277 P .$$

Trave in legno e saetta in ferro :

$$2 R' + 0,346 N = 0,625 P ,$$

$$0,692 R' + \left[0,1535 \left(1 + 0,080 \frac{I}{i} \right) + 0,480 \frac{I}{\omega l^2} + \right. \\ \left. + 4,152 \frac{I}{\Omega l^2} \right] N = 0,277 P .$$

TIRANTE.

Trave e tirante in ferro :

$$2 R' + 0,346 N_m = 0,625 P ,$$

$$0,692 R' + \left(0,1535 + 4,152 \frac{I}{\Omega l^2} \right) N_m = 0,277 P - 43236000 \frac{I}{l^2} .$$

Trave e tirante in legno :

$$2 R' + 0,346 N_m = 0,625 P ,$$

$$0,692 R' + \left(0,1535 + 4,152 \frac{I}{\Omega l^2} \right) N_m = 0,277 P - 4323600 \frac{I}{l^2} ;$$

Trave in legno e tirante in ferro :

$$2 R' + 0,346 N_m = 0,625 P ,$$

$$0,692 R' + \left(0,1535 + 4,152 \frac{I}{\Omega l^2} \right) N_m = 0,277 P - 2882400 \frac{I}{l^2} .$$

2.º)

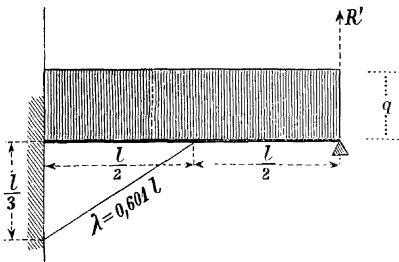


Fig. 186 [Caso 2.º].

SAETTA.

Trave e saetta ambedue in ferro od ambedue in legno :

$$8 R' + 1,384 N = 3 q l ,$$

$$2,768 R' +$$

$$+ \left[0,614 \left(1 + 1,201 \frac{I}{i} \right) + 28,824 \frac{I}{\omega l^2} + 16,608 \frac{I}{\Omega l^2} \right] N = 1,177 q l$$

Trave in legno e saetta in ferro :

$$8 R' + 1,384 N = 3 q l .$$

$$2,768 R' +$$

$$+ \left[0,614 \left(1 + 0,080 \frac{I}{i} \right) + 1,922 \frac{I}{\omega l^2} + 16,608 \frac{I}{\Omega l^2} \right] N = 1,177 q l .$$

TIRANTE.

Trave e tirante in ferro :

$$8 R' + 1,384 N_m = 3 q l ,$$

$$2,768 R' + \left(0,614 + 16,608 \frac{I}{\Omega l^2} \right) N_m = 1,177 q l - 172944000 \frac{I}{l^2} ;$$

Trave e tirante in legno :

$$8 R' + 1,384 N_m = 3 q l ,$$

$$2,768 R' + \left(0,614 + 16,608 \frac{I}{\Omega l^2} \right) N_m = 1,177 q l - 17294400 \frac{I}{l^2} ;$$

Trave in legno e tirante in ferro:

$$8 R' + 1,384 N_m = 3 q l ,$$

$$2,768 R' + \left(0,614 + 16,608 \frac{I}{\Omega l^2}\right) N_m = 1,177 q l - 11529600 \frac{I}{l^2} ,$$

Variazioni di temperatura.

Indichiamo con:

N tensione o pressione nella saetta o tirante,
 N_1 " " " " trave (tronco a).

In questo sistema dobbiamo distinguere due casi:

a) la temperatura aumenta di Δt gradi sopra la temperatura media, cui si suppone composto il sistema: allora la saetta allungandosi, e la trave essendo supposta scarica, la trave si stacca dall'ap-

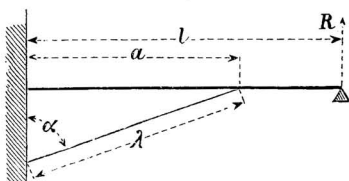


Fig. 187.

poggio, epperò i valori di N a N_1 saranno quelli già trovati nel caso precedente per la trave incastrata ad un'estremità e libera all'altra.

b) la temperatura diminuisce di Δt gradi sotto la temperatura media: allora il lavoro di deformazione dovuto alla forza N_1 sarà lo stesso lavoro trovato nel detto caso precedente, e quindi il valore di N_1 sarà dato dalla formola data per quel caso. Non resta così che a determinare N ed R sviluppantisi per una diminuzione di temperatura di Δt gradi, il che si fa a mezzo del seguente sistema di due equazioni di primo grado:

$$2 l^3 R - a^2 (3 l - a) \cos \alpha N = 0 ,$$

$$a (3 l - a) \cos \alpha R - \left(2 a^2 \cos^2 \alpha + 6 \frac{E I}{e \omega \sin \alpha} + 6 \frac{I}{\Omega} \sin^2 \alpha \right) N = \\ = + 6 E I \frac{\lambda}{a} \frac{\Delta t}{\delta} .$$

Abbiamo considerato che la saetta sia posta *al di sotto* della trave; se invece la saetta od il tirante sono poste *al di sopra* della trave, valgono le stesse cose ma invertitamente; di modo che: per una diminuzione di temperatura, N e N_1 saranno date dalle formole del caso precedente per la trave incastrata in un'estremità e libera al-

tra; e, per un aumento di temperatura, N_1 sarà ancora dato dalla formola trovata in quel caso, mentre N ed R si troveranno mediante le due equazioni qui sopra scritte.

3. — Trave incastrata per un'estremità, appoggiata all'altra e sostenuta dalla parte dell'appoggio da una saetta o da un tirante.

Ritenendo le solite notazioni si hanno le seguenti equazioni di primo grado a due incognite:

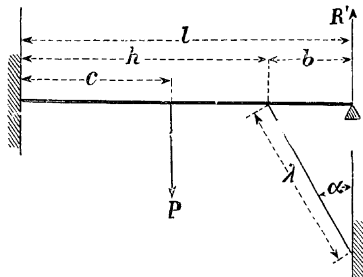


Fig. 188.

Carico concentrato.

SAETTA.

Formole approssimate:

$$2 l^3 R' + h^2 \cos \alpha (3 l - h) N = c^2 (3 l - c) P ,$$

$$h^2 (3 l - h) R' + 2 \cos \alpha \left(h^3 + b^3 \frac{E I}{e i \sin \alpha} \right) N = c^3 (3 h - c) P .$$

Formole esatte:

$$2 l^3 R' + h^2 \cos \alpha (3 l - h) N = c^2 (3 l - c) P ,$$

$$h^2 \cos \alpha (3 l - h) R' + \left[2 \cos^2 \alpha \left(h^3 + b^3 \frac{E I}{e i \sin \alpha} \right) + 6 \frac{E I b}{e \omega \sin \alpha} + 6 h \frac{I}{\Omega} \sin^2 \alpha \right] N = c^2 \cos \alpha (3 h - c) P$$

TIRANTE:

$$2 l^3 R' + h^2 \cos \alpha (3 l - h) N_m = c^2 (3 l - c) P ,$$

$$h^2 \cos \alpha (3 l - h) R' + \left(2 h^3 \cos^2 \alpha + 6 h \sin^2 \alpha \frac{I}{\Omega} \right) N_m = c^2 \cos \alpha (3 h - c) P - 6 \frac{E I r b}{\sin \alpha} .$$

Carico uniformemente ripartito.

Si hanno ancora le stesse equazioni come pel carico concentrato, salvochè nei membri noti si dovrà scrivere:

$$\frac{3}{4} q l \quad \text{in luogo di} \quad c^2 (3l - c) P ,$$

$$3 \cos \alpha \left(\frac{h^2 l^2}{2} - \frac{h^3 l}{3} + \frac{h^4}{12} \right) q \quad \text{in luogo di} \quad c^2 \cos \alpha (3h - c) P .$$

Caso particolare.

SAETTA.

Carico concentrato :

$$2 R' + 0,346 N = 0,625 P ,$$

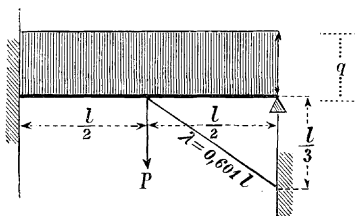


Fig. 189.

$$0,346 R' + \left[0,077 \left(1 + 1,201 \frac{EI}{e i} \right) + 3,603 \frac{EI}{e \omega l^2} + 2,076 \frac{I}{\Omega l^2} \right] N = 0,1385 P .$$

Carico uniformemente ripartito:

$$2 R' + 0,346 N = 0,750 q l ,$$

$$0,346 R' + \left[0,077 \left(1 + 1,201 \frac{EI}{e i} \right) + 3,603 \frac{EI}{e \omega l^2} + 2,076 \frac{I}{\Omega l^2} \right] N = 0,147 q l .$$

Osservazione. Se si confrontano le equazioni di questo caso particolare con quelle del caso particolare, già dato, in cui la saetta unita a snodo nel mezzo della portata, è posta dalla parte dell'incastro, si vede che queste equazioni sono equivalenti a quelle. È adunque indifferente quando la trave è sostenuta, con una saetta o con un tirante nel punto di mezzo della sua portata, ed è caricata di un peso, concentrato nel detto punto di mezzo, od uniformemente ripartito, l'applicare la saetta od il tirante dalla parte dell'incastro o dalla parte dell'appoggio.

Variazioni di temperatura.

N tens. o press. nella saetta o tirante
 N_1 " " trave (tronco h).

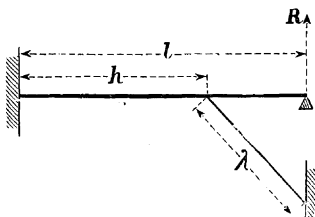


Fig. 190.

Per un aumento di temperatura si ha:

$$N = \frac{+\lambda \Delta t}{\delta \left(\frac{h^3}{3EI} \cos^2 \alpha + \frac{h}{E\Omega} \sin^2 \alpha + \frac{\lambda}{e\omega} \right)},$$

$$N_1 = \frac{-h \Delta t}{\delta \left(\frac{\lambda^3}{3EI} \cos^2 \alpha + \frac{\lambda}{e\omega} \sin^2 \alpha + \frac{h}{E\Omega} \right)}.$$

Per una diminuzione di temperatura N_1 ha il valore precedente, ma col segno cambiato, ed R e N sono dati dalle seguenti equazioni:

$$2l^3 R - h^2(3l - h) \cos \alpha N = 0,$$

$$h^2(3l - h) \cos \alpha R -$$

$$- (2h^3 \cos^2 \alpha + 6 \frac{EI}{e\omega} \lambda + 6 \frac{I}{\Omega} h \sin^2 \alpha) N = 6EI \lambda \frac{\Delta t}{\delta}.$$

4. — Trave incastrata in ambedue le estremità e sostenuta da due saette o da due tiranti ad angoli eguali.

Ritenute le solite notazioni, e ponendo l'indice 1 alle lettere e , r ed N che si riferiscono alla saetta o tirante λ_1 , si ha:

SAETTE.

Carico concentrato.

Formole approssimate:

$$2lM - l^2T - h^2 \cos \alpha N_1 - a^2 \cos \alpha N = -C^2P,$$

$$3l^2M - 2l^3T - h^2 \cos \alpha (3l - h) N_1 -$$

$$- a^2 \cos \alpha (3l - a) N = -C^2(3l - C)P,$$

$$\begin{aligned}
 3 M - (3 l - a) T - \cos \alpha (3 l - a) N_1 - 2 a \cos \alpha N &= - (3 C - a) P , \\
 3 h^2 M - h^2 (3 l - h) T - a^2 \cos \alpha (3 l - a) N - \\
 - 2 h^2 \cos \alpha N_1 &= - C^2 (3 h - C) P ;
 \end{aligned}$$

sistema di quattro equazioni di primo grado mediante il quale si determinano le quattro incognite, che sono le tensioni N e N_1 dei

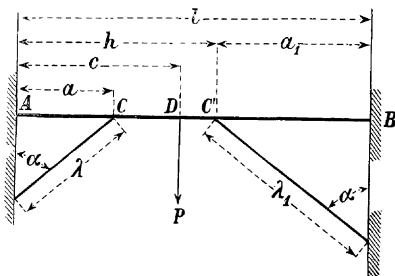


Fig. 191.

tiranti, ed il momento di flessione M e lo sforzo di taglio T nella sezione d'incastro in B .

Formole esatte.

$$\begin{aligned}
 2 l M - l^2 T - h^2 \cos \alpha N_1 - a^2 \cos \alpha N &= - c^2 P , \\
 3 l^2 M - 2 l^3 T - h^2 \cos \alpha (3 l - h) N_1 - \\
 - a^2 \cos \alpha (3 l - a) N &= - (3 l - c) c^2 P , \\
 3 a^2 \cos \alpha \cdot M - a^2 \cos \alpha (3 l - a) T - a^2 \cos^2 \alpha (3 l - a) N_1 - \\
 - \left[2 \cos^2 \alpha \cdot a^3 \left(1 + \frac{E I}{e i \sin \alpha} \right) + 6 \frac{E I a}{e \omega \sin \alpha} + 6 \frac{I}{\Omega} l \sin \alpha \right] N &= \\
 = - a^2 \cos \alpha (3 c - a) P , \\
 3 h^2 \cos \alpha \cdot M - h^2 \cos \alpha (3 l - h) T - a^2 \cos^2 \alpha (3 l - a) N - \\
 - \left[2 \cos^2 \alpha \left(h^3 + a_1^3 \frac{E I}{e_1 i_1 \sin \alpha} \right) + 6 \frac{E I a_1}{e \omega \sin \alpha} + 6 \frac{I}{\Omega} l \sin^2 \alpha \right] N_1 &= \\
 = - c^2 \cos \alpha (3 h - c) P .
 \end{aligned}$$

TIRANTI:

$$\begin{aligned}
 2 l M - l^2 T - h^2 \cos \alpha N_m' - a^2 \cos \alpha \cdot N_m &= - c^2 P , \\
 3 l^2 M - 2 l^3 T - h^2 \cos \alpha (3 l - h) N_m' - \\
 - a^2 \cos \alpha (3 l - a) N_m &= - (3 l - c) c^2 P ,
 \end{aligned}$$

$$3 a^2 \cos \alpha . M - a^2 \cos \alpha (3 l - a) T - a^2 \cos^2 \alpha (3 l - a) N_m' -$$

$$- \left(2 a^3 \cos^2 \alpha + 6 l \operatorname{sen}^2 \alpha \frac{I}{\Omega} \right) N_m = - a^2 \cos \alpha (3 c - a) P + 6 \frac{E I r a}{e \operatorname{sen} \alpha} ,$$

$$3 h^2 \cos \alpha . M - h^2 \cos \alpha (3 l - h) T - a^2 \cos^2 \alpha (3 l - a) N_m -$$

$$- \left(2 h^3 \cos^2 \alpha + 6 l \operatorname{sen}^2 \alpha \frac{I}{\Omega} \right) N_m' = - c^2 \cos \alpha (3 h - c) P + 6 \frac{E I r_1 a_1}{e_1 \operatorname{sen} \alpha} .$$

Carico uniformemente ripartito.

Valgono le equazioni date per il caso precedente, salvochè nei membri noti delle medesime si deve scrivere:

$$\frac{1}{3} q l^3 \quad \text{in luogo di} \quad c^2 P ,$$

$$\frac{3}{4} q l^4 \quad \text{in luogo di} \quad c^2 (3 l - c) P ,$$

$$3 \cos \alpha \left(\frac{l^2}{2} - \frac{a l}{3} + \frac{a^2}{12} \right) a^2 q \quad \text{in luogo di} \quad a^2 \cos \alpha (3 c - a) P ,$$

$$3 \cos \alpha \left(\frac{l^2}{2} - \frac{h l}{3} + \frac{h^2}{12} \right) h^2 q \quad \text{in luogo di} \quad c^2 \cos \alpha (3 h - c) P$$

Casi particolari.

1.º

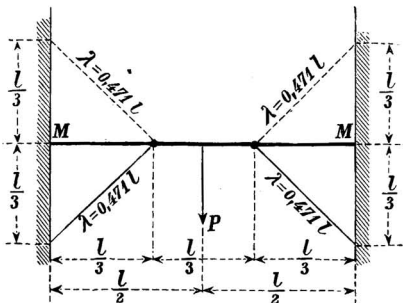


Fig. 192 [Caso 1.º].

Carico concentrato.

SAETTE :

$$2 M - l T - 0,393 l N = - 0,25 l P ,$$

$$3 M - 2 l T - 0,943 l N = - 0,625 l P ,$$

$$0,236 M - 0,209 l T - \left(0,185 l + 0,052 l \frac{E I}{e i} + \right.$$

$$\left. + 4,242 \frac{E I}{e \omega l} + 3,000 \frac{I}{\Omega l} \right) N = - 0,092 l P .$$

TIRANTI.

$$2 M - l T - 0,393 l N_m = - 0,25 l P ,$$

$$3 M - 2 l T - 0,943 l N_m = - 0,625 l P ,$$

$$0,236 M - 0,209 l T - \left(0,185 l + 3,000 \frac{I}{\Omega l} \right) N_m =$$

$$= - 0,092 l P + 2,828 \frac{E I r}{e l} .$$

Carico uniformemente ripartito.

Si hanno le stesse equazioni come per il carico concentrato, salvochè in esse si deve scrivere:

$$0,333 q l^2 \quad \text{in luogo di} \quad 0,25 l P ,$$

$$0,750 q l^2 \quad \text{in luogo di} \quad 0,625 l P ,$$

$$0,094 q l^2 \quad \text{in luogo di} \quad 0,092 l P .$$

2.°

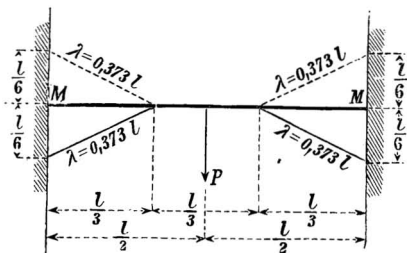


Fig. 193 [Caso 2.°].

Carico concentrato.

SAETTE :

$$2 M - l T - 0,248 l N = - 0,25 l P ,$$

$$3 M - 2 l T - 0,595 l N = - 0,625 l P ,$$

$$0,149 M - 0,132 l T - \left(0,074 l + 0,017 l \frac{E I}{e i} + 3,351 \frac{E I}{e \omega l} + \right.$$

$$\left. + 1,194 \frac{I}{\Omega l} \right) N = - 0,058 l P .$$

TIRANTI:

$$2 M - l T - 0,284 l N_m = - 0,25 l P ,$$

$$3 M - 2 l T - 0,595 l N_m = - 0,625 l P ,$$

$$0,149 M - 0,132 l T - \left(0,074 l + 1,194 \frac{I}{\Omega l}\right) N_m =$$

$$= -0,058 l P + 2,234 \frac{E I r}{e l} .$$

Carico uniformemente ripartito.

Si hanno le stesse equazioni come per il carico concentrato, salvochè in esse si deve scrivere:

$$0,333 q l \quad \text{in luogo di} \quad 0,25 l P ,$$

$$0,750 q l \quad \text{in luogo di} \quad 0,652 l P ,$$

$$0,059 q l \quad \text{in luogo di} \quad 0,058 l P .$$

Variazioni di temperatura.

Porremo che le due saette oltre ad essere disposte ad angoli α eguali, abbiano anche la stessa lunghezza λ e siano formate dello stesso materiale, e scinderemo il problema in due parti, cioè supporremo:

a) Che la dilatazione della trave sia trascurabile di fronte a quella delle saette: allora il momento M di flessione e lo sforzo

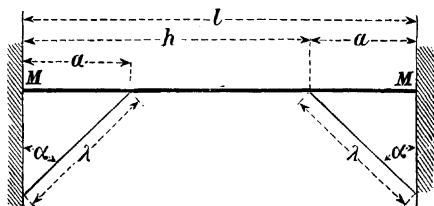


Fig. 194.

di taglio T all'incastro e la tensione N di ciascuna saetta, dovuti alle sole variazioni di temperatura, saranno dati dalle equazioni seguenti:

$$2 l M - l^2 T + (2 a - h) h N = 0 ,$$

$$3 l^2 M - 2 l^3 T + [3 (l h - a^2) - h^2 + 6 l a] h N = 0 ,$$

$$3 a^2 M + a^2 (3 l - a) T + \left(6 a^3 + 3 \frac{E J}{e \omega} \lambda\right) N = \pm 3 E I \lambda \frac{\Delta t}{\delta} .$$

b) Che la dilatazione delle saette sia trascurabile di fronte a quella della trave; allora la tensione N_1 , che ha luogo nella trave, sarà data da:

$$N_1 = \frac{l \Delta t}{\delta_1 \left(\frac{\lambda^3}{3 e i} \cos^2 \alpha + \frac{l}{E \Omega} \right)} .$$

Osservazione. Le equazioni date ad a) valgono anche pel caso che la trave, invece che da due saette, sia sostenuta da due tiranti; ma la formola data a b) deve essere privata del termine contenente i , pel che essa diviene:

$$N_1 = E \Omega \frac{\Delta t}{\delta} .$$

Se le saette e la trave si dilatano simultaneamente, le incognite M , T , N e N_1 saranno date dalle formole riunite date ad a) e a b).

5. — Trave appoggiata in ambedue le estremità ed armata con due tiranti ed una saetta, sottoposta ad un carico uniformemente ripartito in ragione di q unità di peso per unità di lunghezza della trave. (*)

Qui le incognite da determinare sono tre, cioè:

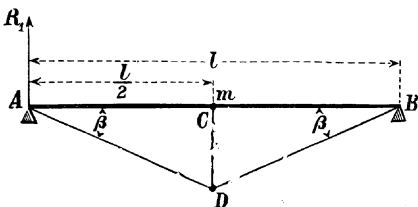


Fig. 195.

la tensione N eguale in ciascuno dei due tiranti AD e BD di eguale lunghezza n ,

la pressione N_1 della saetta CD di lunghezza n_1

il momento m di flessione nella sezione in C della trave, nel mezzo della sua portata.

Le incognite si ricaveranno risolvendo il sistema di tre equazioni di primo grado seguente:

$$N_1 = 2 N \sin \beta ,$$

$$m = \frac{1}{2} N l \sin \beta - \frac{1}{8} q l^2 = \frac{1}{4} N_1 l - \frac{1}{8} q l^2 ,$$

(*) Queste formole sono trovate in base alla teoria del Castigliano (c. f. r. CASTIGLIANO, *Théorie*, pag. 315 e seguenti).

$$\frac{l \operatorname{sen} \beta}{6 E I} \left(m - \frac{1}{32} q l^2 \right) + \frac{\cos^2 \beta}{E \Omega} N + \frac{1}{e \omega \cos \beta} N + \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{e_1 \omega_1 \cos \beta} N_{l=0}, (*)$$

nelle quali E , e , I , ω , e_1 , ω_1 hanno gli stessi significati come nelle travi sostenute da tiranti.

Se si vuole, come sempre conviene, che i tiranti e la saetta siano soggetti ai massimi sforzi che possono con sicurezza sopportare, chiamando N_m la tensione in ciascun tirante, N_m' la pressione nella saetta corrispondenti a questi massimi sforzi, il sistema delle tre equazioni diverrà:

$$N_m' = 2 N_m \operatorname{sen} \beta, \quad (1)$$

$$m = \frac{1}{2} N_m l \operatorname{sen} \beta - \frac{1}{8} q l^2, \quad (2)$$

$$\frac{l \operatorname{sen} \beta}{6 E I} m + \frac{\cos^2 \beta}{E \Omega} N = \frac{l \operatorname{sen} \beta}{192 E I} q l^2 - \frac{r}{e \cos \beta} - \frac{r_1 \operatorname{sen}^2 \beta}{e_1 \cos \beta}, \quad (3)$$

essendo r ed r_1 i carichi di sicurezza dei tiranti e della saetta, ed e ed e_1 i moduli di elasticità dei medesimi.

Il momento di flessione in una sezione a distanza x dall'appoggio più vicino è:

$$M_x = -\frac{q l}{2} x + N_m \operatorname{sen} \beta \cdot x + \frac{1}{2} q x^2,$$

e con questa si determina la sezione del momento M massimo nella trave, avvertendo che $R_1 = \frac{q l}{2}$ è la reazione di ciascun appoggio.

Agli appoggi si ha: $M_o = M_l = 0$.

La trave è soggetta a una pressione normale

$$\mathfrak{N} = N \cos \beta.$$

Le condizioni di stabilità sono:

$$\frac{\mathfrak{N}}{\Omega} \pm M \frac{v}{I} = R.$$

$$\frac{N_m}{\omega} = r, \quad \frac{N_m}{\omega_1} = r_1.$$

nelle quali R è il carico di sicurezza del materiale della trave.

(*) Il Castigliano trascura il termine ultimo.

Il metodo di calcolo per determinare la grandezza più conveniente da adottarsi per ω ed Ω è affatto analogo a quello già indicato per le travi sostenute da tiranti.

Quando si voglia accontentarsi in un primo calcolo di una certa approssimazione si può far uso delle seguenti formole approssimate (*):

$$N = \frac{5}{16} q l \operatorname{cosec} \beta = 0,3125 q l \frac{n}{n_1}$$

$$N = \frac{5}{8} q l = 0,625 q l \quad m = \frac{1}{32} q l^2 = 0,03125 q l^2$$

$$N = 0,15625 q \frac{l^2}{n_1}$$

6. — Trave appoggiata in ambedue le estremità, armata con tre tiranti e due saette e sottoposta a carico completo uniformemente ripartito.

Ritenute le solite notazioni e avvertito che $AB = BC = CD$, per-

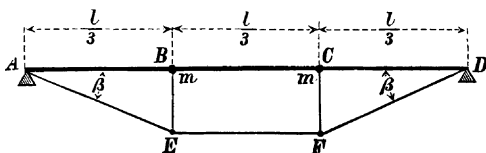


Fig. 196.

chè si assume che la trave sia composta in modo che gli snodi delle saette verticali, dividano la trave in tre parti uguali, per determinare le quattro incognite

m momento flettente in ciascuna delle due sezioni in B e in C della trave,

N tensione eguale in ciascuno dei due tiranti laterali AE e DF di ugual lunghezza n ,

N_1 tensione del tirante mediano EF di lunghezza n_1 ,

N_2 pressione eguale in ciascuna delle due saette EB e FC di ugual lunghezza n_2 ;

si avranno le seguenti quattro equazioni:

$$N_1 = N \cos \beta,$$

$$N_2 = N \sin \beta,$$

(*) date dalla Statica (c. f. r. Manuale Colombo).

$$m = \frac{1}{3} N l \operatorname{sen} \beta - \frac{1}{9} q l^2 = \frac{1}{3} N_1 l \operatorname{tang} \beta - \frac{1}{9} q l^2 ,$$

$$\frac{l \operatorname{tang} \beta}{9 E I} \left(10 m - \frac{1}{9} q l^2 \right) + \frac{6 N_1}{E \Omega} + \frac{4 N}{e \omega \cos^2 \beta} + \frac{2 N_1}{e_1 \omega_1} + \frac{4 N_2 \operatorname{tang}^2 \beta}{e_2 \omega_2} = 0 , \quad (*)$$

ossia, volendo che le saette ed i tiranti lavorino ai massimi sforzi che possono con sicurezza sopportare, chiamando

N_m la tensione in ciascuno dei tiranti $A E$ e $D F$,

N_m' la tensione del tirante $E F$,

N_m'' la pressione in ciascuna delle due saette $E B$ e $F C$,

corrispondenti a questi massimi sforzi, si avrà:

$$N_m' = N_m \cos \beta , \quad (4)$$

$$N_m'' = N_m \operatorname{sen} \beta \quad (5)$$

$$m = \frac{l \operatorname{sen} \beta}{3} N_m - \frac{1}{9} q l^2 , \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{10 l \operatorname{tang} \beta}{9 E I} m + \frac{6 N_m'}{E \Omega} = \\ & = \frac{l \operatorname{tang} \beta}{81 E I} q l^2 \quad \left. \begin{aligned} & \frac{4 r}{e \cos^2 \beta} - \frac{2 r_1}{e_1} - \frac{4 r_2 \operatorname{tang}^2 \beta}{e_2} \end{aligned} \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

La pressione normale dei tronchi $A B$, $C D$, è $\mathfrak{R}_n = N_m \cos \beta$, e nel tronco $B C$ è N_1 , cioè ancora $\mathfrak{R}_n = N_m \cos \beta$. La reazione verticale di ciascun appoggio è $q \frac{l}{2}$.

Il momento di flessione per una sezione nel tronco $A B$, o nel tronco $D C$, a distanza x dall'appoggio A , o dall'appoggio D , è:

$$M_x = - \frac{q l}{2} x + N \operatorname{sen} \beta \cdot x + \frac{1}{2} q x^2 ,$$

e con questa espressione si determina la sezione del momento massimo nel tronco $A B$ o nel tronco $D C$.

Il momento massimo di flessione in tutta la trave ha luogo nella sezione di mezzo del tronco $B C$ ed è:

$$M_{\frac{l}{2}} = \frac{1}{3} N_1 l \operatorname{tang} \beta - \frac{1}{8} q l^2$$

(*) Il Castigliano trascura il termine ultimo.

Le condizioni di stabilità sono :

$$\frac{\mathfrak{N}}{\Omega} \pm M \frac{v}{I} = R ,$$

$$\frac{N_m}{\omega} = r . \quad \frac{N_m'}{\omega_1} = r_1 , \quad \frac{N_m''}{\omega_2} = r_2 .$$

Per un primo calcolo si può far uso delle seguenti formole approssimate :

$$N = \frac{11}{30} q l \operatorname{cosec} \beta = 0,367 q l \frac{n}{n_2} , \quad N_1 = \frac{11}{30} q l \operatorname{cotang} \beta = 0,122 q \frac{l^2}{n_2} ,$$

$$N_2 = \frac{11}{30} q l = 0,367 q l \quad m = \frac{1}{90} q l^2 = 0,0111 q l^2 .$$

$$\mathfrak{N} = N_t .$$

VARIAZIONI DI TEMPERATURA PER LE TRAVI ARMATE. Per tener conto, quando la trave è in legno e i tiranti in ferro, delle variazioni di temperatura nelle travi armate del caso del N.° 6 e del caso del N.° 7 le incognite si determineranno colle medesime equazioni già date pei detti casi; soltanto, però, si dovrà aggiungere al membro noto della (3) il termine :

$$\pm \frac{1}{2} \frac{1 + \operatorname{sen}^2 \beta}{\cos \beta} \frac{\Delta t}{\delta}$$

ed al membro noto della (7) il termine :

$$\pm \left(\frac{1}{3 \cos \beta} + \frac{\cos \beta}{6} + \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{3 \cos \beta} \right) \frac{\Delta t}{\delta} = \pm \frac{3 + \operatorname{sen}^2 \beta}{6 \cos \beta} \frac{\Delta t}{\delta}$$

dove il segno superiore varrà per gli innalzamenti di temperatura, e l'inferiore per gli abbassamenti.

7. — Cavalletto semplice — formato da due puntoni, trattenuti senz'incastro nel vertice dell'incavallatura, e da una catena — caricato di un peso uniformemente ripartito in ragione di q unità di peso per unità di lunghezza del puntone misurata orizzontalmente.

Ritenute sempre le solite notazioni, i valori delle tensioni N e N_m della catena saranno :

$$N = \frac{\left(5 l^2 \operatorname{tang} \alpha - 12 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \frac{I}{\Omega} \right) q \mp 24 \frac{EI}{l \delta} \Delta t \cos \alpha}{8 \left(l \operatorname{tang}^2 \alpha + 3 \frac{I}{\Omega l} \cos^2 \alpha + 3 \frac{EI}{\Theta \omega l} \cos \alpha \right)} ,$$

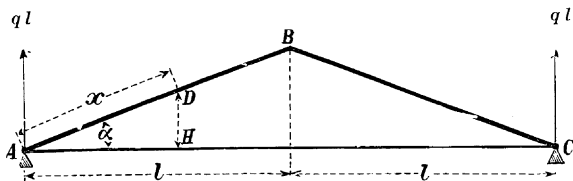


Fig. 197.

$$N_m = \frac{\left(5 l^2 \operatorname{tang} \alpha \cdot - 12 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha \frac{I}{\Omega}\right) q - \frac{24 E I}{l} \left(\frac{r}{e} \pm \frac{\Delta l}{\delta}\right) \cos^2 \alpha}{8 \left(l \operatorname{tang}^2 \alpha + 3 \frac{I}{\Omega l} \cos^2 \alpha\right)}$$

Il momento di flessione e la pressione normale del puntone in una sezione qualunque in D a distanza x , misurata obliquamente lungo il puntone, dall'appoggio A , sono:

$$M_x = -q l x \cos \alpha + \frac{q x^2 \cos^2 \alpha}{2} + N x \operatorname{sen} \alpha ,$$

$$N_x = q l \operatorname{sen} \alpha - q x \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + N \cos \alpha .$$

Per un primo calcolo si può far uso della formola approssimata

$$N = \frac{5}{8} q l \operatorname{cotang} \alpha .$$

Le equazioni di stabilità sono:

$$\frac{N}{\Omega} \pm M \frac{v}{I} = R , \quad \frac{N_m}{\omega} = r .$$

Questo cavalletto per lo più ha la **monta** che varia fra un *terzo* ed un *sesto* della portata, e prendendo per unità di misura il m. ed il kg., si ha:

A) Se la **monta** è $\frac{1}{6}$ della portata, il valore di N_m è dato da:

$$N_m = \frac{\left(1,667 l^2 - 3,576 \frac{I}{\Omega}\right) q - 11388000 \frac{I}{l}}{0,889 l + 21,352 \frac{I}{\Omega l}} ,$$

per cavalletto con puntone e catena in legno; e da:

$$N_m = \frac{\left(1,667 l^2 - 3,576 \frac{I}{\Omega}\right) q - (9110400 \pm 7999992) \frac{I}{l}}{0,889 l + 21,352 \frac{I}{\Omega l}}, \quad (*)$$

per cavalletto con puntoni in legno e catena in ferro; e da:

$$N_m = \frac{\left(1,667 l^2 - 3,576 \frac{I}{\Omega}\right) q - 136656000 \frac{I}{l}}{0,889 l + 21,352 \frac{I}{\Omega l}},$$

per cavalletto con puntoni e catena in ferro.

B) Se la monta è $\frac{1}{4}$ della portata si ha:

$$N_m = \frac{\left(2,500 l^2 - 4,785 \frac{I}{\Omega}\right) q - 10728000 \frac{I}{l}}{2,000 l + 19,182 \frac{I}{\Omega l}},$$

per cavalletto con puntoni e catena in legno:

$$N_m = \frac{\left(2,500 l^2 - 4,785 \frac{I}{\Omega}\right) q - (8582400 \pm 7151993) \frac{I}{l}}{2,000 l + 19,182 \frac{I}{\Omega l}},$$

per cavalletto con puntoni in legno e catena in ferro;

$$N_m = \frac{\left(2,500 l^2 - 4,785 \frac{I}{\Omega}\right) q - 128736000 \frac{I}{l}}{2,000 l + 19,182 \frac{I}{\Omega l}},$$

per cavalletto con puntoni e catena in ferro.

C) Se la monta è $\frac{1}{3}$ della portata sarà:

$$N_m = \frac{\left(3,333 l^2 - 5,531 \frac{I}{\Omega}\right) q - 9984000 \frac{I}{l}}{3,577 l + 16,613 \frac{I}{\Omega l}},$$

per cavalletto con puntoni e catena in legno;

(*) In queste formole particolari, quando i puntoni sono in legno e la catena in ferro, si è tenuto conto anche delle variazioni di temperatura per una differenza di $\pm 25^\circ$.

$$N_m = \frac{\left(3,333 l^2 - 5,531 \frac{I}{\Omega}\right) q - (7987200 \pm 6655993) \frac{I}{l}}{3,577 l + 16,613 \frac{I}{\Omega l}},$$

per cavalletto con puntoni in legno e catena in ferro;

$$N_m = \frac{\left(3,333 l^2 - 5,531 \frac{I}{\Omega}\right) q - 119808000 \frac{I}{l}}{3,577 l + 16,613 \frac{I}{\Omega l}},$$

pel cavalletto con puntoni e catena in ferro.

Es. Si vuole costruire un cavalletto della portata $2l = m. 5,00$ formato da due puntoni in *abete* e di una catena in *ferro* che sia il più conveniente per sopportare un carico totale (permanente ed accidentale) di kg. 200 per m. corr. di puntone misurato orizzontalmente. Si domandano le sezioni da adottarsi per i puntoni e per la catena, dovendo la monta essere un *quarto* dell'intera portata.

Cominciamo ad assumere una sezione di m. 0.15·0.21 pel puntone. Allora sarà $\Omega = m.^2 0,0315$, $I = 0,00077175$, e quindi, applicando la formola particolare data di sopra per la monta di un quarto, si avrà:

$$N_m = \frac{\left(2,500 \cdot 2,50^2 - 4,785 \frac{0,00077175}{0,0315}\right) 200 - (8582400 \pm 7151993) \frac{0,00077175}{2,50}}{2,000 \cdot 2,50 + 19,182 \frac{0,00077175}{0,0315 \cdot 2,50}},$$

cioè, eseguendo il conteggio:

$$N_m = -338 \text{ per le massime temperature, fino a circa } 40^\circ,$$

$$N_m = 513 \text{ " " minime " " " " } -10^\circ,$$

Da questi risultati si vede che per le massime temperature la catena è compressa, e per le minime è tesa ed è soggetta allo sforzo maggiore.

Per le minime temperature il momento di flessione in una sezione qualunque del puntone è:

$$M_x = -200 \cdot 2,50 \cos \alpha \cdot x + \frac{200 \cdot \cos^2 \alpha}{2} x^2 + 513 \sin \alpha \cdot x,$$

ed eseguendo il conteggio, osservando che, per la monta di un quarto prossimamente $\cos \alpha = 0,894$, $\sin \alpha = 0,446$, si ottiene:

$$M_x = -218 x + 80 x^2.$$

Dunque il momento inflettente massimo ha luogo per

$$x = \frac{218}{2 \cdot 80} = \text{m. } 1,36 \text{ circa,}$$

ed è :

$$M_m = -70 .$$

La pressione normale in una sezione qualunque del puntone, per le minime temperature, è :

$$\mathfrak{N}_x = 200 \cdot 2,5 \cdot 0,446 - 200 \cdot 0,894 \cdot 0,446 x + 0,894 \cdot 513 ;$$

cioè :

$$\mathfrak{N}_x = 295 - 79,7 x$$

e quindi la pressione normale nella sezione in cui ha luogo il momento inflettente massimo è :

$$\mathfrak{N}_m = 295 - 79,7 \cdot 1,36 = 187 .$$

Per la formola di stabilità

$$\mathfrak{N}_n \pm M \frac{v}{I} = R \quad \text{si ha :} \quad \frac{187}{0,0315} \mp 70 \frac{0,21}{2 \cdot 0,00077175} = R ,$$

nella quale R è il coefficiente di resistenza che per l'*abete* si può prendere di 400000 kg. al m.². Il più grande valore del primo membro dell'ultima eguaglianza è 15460; dunque, per le minime temperature la sezione di 0.15 · 0.21 sarebbe troppo grande.

Per le massime temperature il momento di flessione in una sezione qualunque del puntone è :

$$M_x = 200 \cdot 2,50 \cdot 0,894 x + 80 x^2 - 338 \cdot 0,446 x ,$$

cioè :

$$M_x = -598 x + 80 x^2 .$$

Un massimo di questa espressione avrebbe luogo per

$$x = \frac{598}{2 \cdot 80} = \text{m } 3,74 .$$

Ma il puntone ha soltanto la lunghezza di m. $\frac{2,50}{0,894} = \text{m. } 2,80$, ed il più grande momento inflettente sarà :

$$M_m = -598 \cdot 2,80 + 80 \cdot \overline{2,80^2} = -1047 .$$

La pressione normale nella sezione, ove il momento di flessione ha il valore 1047, è :

$$\mathfrak{N}_n = 200 \cdot 2,5 \cdot 0,446 - 200 \cdot 0,894 \cdot 0,446 \cdot 2,80 - 0,894 \cdot 338 ,$$

cioè :

$$\mathfrak{N}_n = -302 .$$

Dunque avremo per la formola di stabilità:

$$- \frac{302}{0,0315} \mp \frac{0,21}{2 \cdot 0,00077175} = R .$$

Così il più grande valore di R è -152036 ; dunque anche per le massime temperature la sezione di $0,15 \cdot 0,21$ è troppo grande.

Rifaremo pertanto il calcolo assumendo la sezione di $0,10 \cdot 0,14$. Allora;

$$\Omega = 0,014 , \quad I = 0,0000229 ,$$

e quindi:

$$N_m = \frac{\left(2,500 \cdot \frac{0,0000229}{0,014} - 4,785 \right) 200 - (8582400 \pm 71511993) \frac{0,0000229}{2,50}}{2,000 \cdot 2,5 + 19,82 \frac{0,0000229}{0,014 \cdot 2}} ,$$

cioè:

$N_m = 591$ kg. per le massime temperature.

$N_m = 617$ kg. „ „ minime „

Per le minime temperature il momento massimo ha luogo per $x = m. 1,075$ ed è $M_m = -92$, e la pressione normale nella sezione in cui si verifica il momento massimo è $\mathfrak{N}_n = 683$: per conseguenza il massimo lavoro cui è assoggettato l'abete del puntone è di kg. 343000 al m.². Per le massime temperature il momento massimo si verifica per $x = m. 1,146$ ed $M_m = 105$, e la pressione normale corrispondente è $\mathfrak{N}_n = 660$: per conseguenza il massimo lavoro dell'abete del puntone è di kg. 368000 al m.². Si vede così che la sezione di $m. 0,10 \cdot 0,14$ è conveniente, e non resta che determinare la sezione della catena, il che si ottiene subito colla formola $\frac{N_m}{\Omega} = r$.

Prendendo una catena di ferro di sezione circolare col diametro d si ha da questa formola:

$$\frac{617}{3,1416 d^2} = 6000000 ,$$

d'onde si ricava il valore del diametro domandato, cioè:

$$d = \sqrt{\frac{617}{0,7854 \times 6000000}} = m. 0,01144 ,$$

ossia circa mm. 11 $\frac{1}{2}$.

8. — Puntone inclinato appoggiato con un'estremità contro un piano verticale e coll'altra sopra un piano orizzontale.

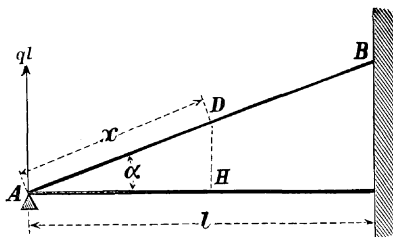


Fig. 198.

Ritenute le solite notazioni, i valori di N , N_m , M_x , \mathfrak{R}_x sono dati dalle stesse formole, che si hanno per il cavalletto semplice del N.º 7.

9. — Incavallatura Polonceau semplice.

Supponiamo sempre i puntone trattenuti, senza incastro, nel vertice C della incavallatura. Questa incavallatura è composta da due puntone AC , CB , da due saette DG , EF perpendicolari ai puntone nel punto di mezzo della loro lunghezza, da un tirante DE orizzontale, e da quattro tiranti AD , DC , CE , EB eguali fra loro.

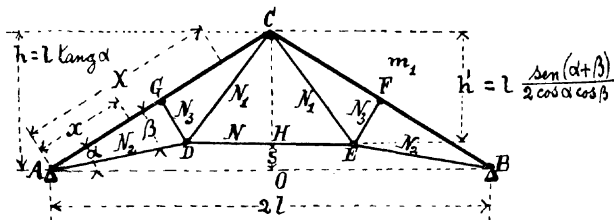


Fig. 199.

Chiamiamo N , N_1 , N_2 , N_3 , le tensioni ed a , a_1 , a_2 , a_3 le lunghezze dei tiranti DE , CE , BE , FE , e riteniamo le solite denominazioni. Avremo per determinare le quattro incognite N , N_1 , N_2 , N_3 il sistema delle quattro seguenti equazioni di primo grado :

$$N = ql \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)} = \frac{1}{2} \frac{ql^2}{h'}$$

$$N_1 = N_2 \quad q l \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$$

$$N_3 = 2 N_2 \operatorname{sen} \beta \quad q l \cos \alpha .$$

$$\frac{l}{EI \cos \alpha} \left(\frac{1}{2} m_1 - \frac{1}{3} q l^2 \right) + \frac{l \cos \beta}{2 E \Omega \cos \alpha} (2 N_2 \cos \beta + q l \operatorname{sen} \alpha) +$$

$$+ \frac{N_1 a_1}{e_1 \omega_1} + \frac{N_2 a_2}{e_2 \omega_2} + \frac{2 N_3 a_3}{e_3 \omega_3} \operatorname{sen} \beta = 0 ,$$

nell'ultima delle quali m_1 è il momento inflettente nella sezione in F del puntone, ed è :

$$m_1 = N_2 \frac{l \operatorname{sen} \beta}{2 \cos \alpha} - \frac{3}{8} q l^2 .$$

Volendo poi che i tiranti lavorino ai massimi sforzi che possono con sicurezza sopportare si determineranno le tensioni corrispondenti a questi sforzi massimi colle equazioni :

$$N_m = q l \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} ,$$

$$N_m' = N_m'' - q l \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} ,$$

$$N_m''' = 2 N_m'' \operatorname{sen} \beta - q l \cos \alpha ,$$

$$\left(\frac{l^2 \operatorname{sen}^2 \beta}{\cos^3 \alpha} + 6 \frac{\cos^2 \beta}{\cos \alpha} \frac{I}{\Omega} \right) N_m'' + \left(3 \cos \beta \operatorname{tang} \alpha \frac{I}{\Omega} - \frac{13}{16} \frac{l^2 \operatorname{sen} \beta}{\cos^2 \alpha} \right) q l + \frac{6 EI}{l} \left(\frac{a_1 r_1}{e_1} + \frac{a_2 r_2}{e_2} + 2 a_3 \frac{r_3 \operatorname{sen} \beta}{e_3} \right) = 0 .$$

Per tener conto delle variazioni di temperatura si dovrà aggiungere al primo membro di quest'ultima equazione il termine :

$$\pm \frac{6 EI}{l} \left(\frac{a_1}{\delta_1} + \frac{a_2}{\delta_2} + \frac{2 a_3}{\delta_3} \operatorname{sen} \beta \right) \Delta t .$$

essendo sempre Δt la variazione di temperatura, ed esprimendo con $\frac{1}{\delta_1}$, $\frac{1}{\delta_2}$, $\frac{1}{\delta_3}$, i rispettivi coefficienti di dilatazione dei tiranti a_1 , a_2 , a_3 ,

Se la monta dell'incavallatura è un quarto della intera portata, il rialzo HO nullo in modo che i tiranti AD , BE e DE coincidono colla corda teorica AB , ed i tiranti tutti formati dello stesso materiale, le precedenti equazioni divengono :

$$N_m = q l ,$$

$$N_m' = N_m'' - q l ,$$

$$N_m''' = 0,892 N_m'' - 0,894 q l ,$$

$$\left(0,278 + 5,364 \frac{l}{\Omega l^2}\right) N_m'' + \left(1,341 \frac{l}{\Omega l} - 0,453 l\right) q + \\ + 9 \frac{EI}{l^2} \left(\frac{r}{e} \pm \frac{\Delta t}{\delta}\right).$$

Per un primo calcolo si può anche far uso delle seguenti formole approssimate (*).

$$N = ql \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \\ N_1 = ql \frac{\cos \alpha}{2 \sin \beta} \left[\frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} - \frac{3}{8} \right] = \\ = \frac{ql}{2 \sin \beta} \left[\frac{l}{h'} \sin \alpha - \frac{3}{8} \cos \alpha \right], \\ N_2 = \frac{13}{16} ql \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}, \\ N_3 = \frac{5}{8} ql \cos \alpha.$$

Il momento inflettente è dato in una sezione qualunque del tronco AG , da:

$$M_x = -ql \cos \alpha \cdot x + \frac{q}{2} \cos^2 \alpha \cdot x^2 + N_m'' \sin \beta \cdot x,$$

ed in una sezione qualunque del tronco GC , da:

$$M_X = -ql \cos \alpha \cdot X + \frac{q}{2} \cos^2 \alpha \cdot X^2 + \\ + N(X \sin \alpha - s) + T_1 \left(\frac{l}{\cos \alpha} - X \right).$$

La pressione normale è data in una sezione qualunque del tronco AG , da:

$$\mathfrak{N}_x = ql \sin \alpha - q \sin \alpha \cos \alpha \cdot x + N_m'' \cos \beta$$

ed in una sezione qualunque del tronco GC , da:

$$\mathfrak{N}_X = ql \sin \alpha - q \sin \alpha \cos \alpha \cdot X + N_m \cos \alpha + N_m' \cos \beta.$$

Con queste formole si possono calcolare il momento inflettente e la pressione normale per diverse sezioni dei puntoni e quindi

(*) C. f. r. CURIONI — *Resistenza dei Materiali e Stabilità delle Costruz.* (Sviluppando coincide con le formole del Manuale Colombo).

con le formole di stabilità

$$\frac{N}{\Omega} \pm M \frac{v}{I} = R$$

$$\frac{N_m}{\omega} = r, \quad \frac{N_m'}{\omega_1} = r_1, \quad \frac{N_m''}{\omega_2} = r_2, \quad \frac{N_m'''}{\omega_3} = r_3$$

si assegnano le dimensioni dei diversi pezzi dell'incavallatura.

10. — Metodo generale per determinare le tensioni dei tiranti in un'incavallatura a puntoni retti o curvi con un numero qualunque di tiranti simmetrici rispetto al mezzo dell'incavallatura.

Il metodo generale per calcolare le tensioni dei tiranti in una incavallatura di qualunque sistema consiste nel ricercare l'espressione del lavoro di deformazione del sistema elastico che costituisce la incavallatura che si considera, supponendo ciascun puntone diviso in un numero *p* pari di tronchi eguali, applicando le formole date al Cap II pel lavoro di deformazione, tenendo conto dell'azione dei tiranti e giovandosi delle equazioni date dalla Statica fra le tensioni dei tiranti medesimi. Eguagliando quindi a zero le derivate dell'espressione del lavoro di deformazione del sistema, prese rispetto alle tensioni incognite dei tiranti si avrà un sistema di equazioni di primo grado mediante il quale si potranno trovare le incognite che si cercano.

A spiegazione di questo metodo risolveremo il seguente

PROBLEMA

Calcolare le condizioni di stabilità per una tettoia a sette tiranti, con incavallature Polonceau a puntoni curvi (fig. 201) essendo proposti i seguenti dati:

1.º L'incavallatura deve avere le seguenti dimensioni:

$$\begin{aligned} \text{Corda dell'asse dell'arco} & \dots \dots \dots = 2c \\ f = \text{Freccia teorica} & \dots \dots \dots = \frac{4}{9}c \\ r = \text{Raggio} & \dots \dots \dots = 1,8c \\ \text{Angolo al centro di ciascun semiarco} & = 35^\circ 23' 36'' \end{aligned}$$

2.º L'incavallatura deve resistere ad un peso totale uniformemente ripartito su ciascun puntone nella misura di *q* unità di peso per unità di lunghezza del puntone.

3.º La distanza del tirante orizzontale dalla corda teorica deve essere = 0,088888 *c*, cioè $\frac{1}{5}$ della freccia teorica.

Calcoli geometrici. Coi dati proposti si calcolino le lunghezze *x*

ed y indicate nella tavola qui unita. pel che si deve risolvere il sistema delle due equazioni

$$(c + x)^2 + y^2 = r^2 : \quad x^2 + (y + f)^2 = r^2 .$$

Così si ottiene :

$$x = 0.196455 c : \quad y = 1.344803 c .$$

Si determinino quindi gli angoli φ e φ' a mezzo delle relazioni

$$\text{sen } \varphi = \frac{x}{r} . \quad \text{sen } \varphi' = \frac{c + x}{r} .$$

Ciò fatto, si divida la semicentina o puntone curvo in un numero pari di tronchi eguali, per es., in otto tronchi eguali, e si segnino i punti di mezzo di ciascuno di questi tronchi o centri di gravità dei carichi totali su ciascun tronco; si calcolino gli angoli che comprendono questi tronchi e per mezzo delle solite formole di trigonometria, i bracci di leva dei pesi applicati ai centri di gravità di ciascun tronco rispetto ai centri delle sezioni in cui fu diviso il puntone, nonchè i bracci di leva delle tensioni incognite dei tiranti rispetto alle sezioni medesime.

Si calcolino le ascisse e le ordinate dei centri delle sezioni, prese la corda e la freccia teorica per assi coordinati, la lunghezza 0,138989 c di uno dei tronchi eguali in cui fu divisa la semicentina, e l'angolo ε del tirante, applicato in prossimità ad un appoggio, colla corda teorica dell'incavallatura.

Si avranno così tutti i dati per calcolare le pressioni normali ed i momenti inflettenti nelle diverse sezioni 0, 1, 2, 3, .. 8 della semicentina, e quindi il lavoro di deformazione della semicentina stessa.

Espressione del lavoro di deformazione e valori delle incognite. Accade talvolta che una tettoia possa, per effetto del vento o per lo sciogliersi delle nevi nella parte esposta al sole, trovarsi *caricata soltanto sopra metà delle centine*. Perciò incominceremo a stabilire i calcoli in questa ipotesi, che per fissare le idee, la *mezza centina di sinistra* sia *carica* di un peso q per m. corr., e la *mezza centina di destra* sia del tutto *scarica*. Allora chiamando R la reazione dell'appoggio di sinistra, ed R_1 la reazione dell'appoggio di destra si ha :

$$R = 0.8468335 c q , \quad R_1 = 0.2650785 c q .$$

Per calcolare i momenti inflettenti, le pressioni normali, e gli sforzi di taglio dovuti alle reazioni, ai carichi, e alle tensioni incognite dei tiranti si calcoleranno separatamente tutti questi sforzi prima per la parte dovuta alle reazioni e ai carichi, quindi per la parte dovuta ai tiranti; poi si sommeranno algebricamente insieme queste due parti. Si formeranno così le tabelle seguenti, in cui sono indicati con M , N , T , i momenti inflettenti, le pressioni normali

e gli sforzi di taglio nelle sezioni della semicentina carica, di sinistra, e con M' , \mathfrak{N}' , T' , le stesse cose nella mezza centina scarica, di destra. L'indice posto a piedi di queste lettere indica le sezioni cui le medesime si riferiscono; N_1, N_2, N_3, N_4 (fig. 200) sono le tensioni incognite dei tiranti di sinistra, e N_1', N_2', N_3', N_4' le tensioni dei tiranti di destra.

$$M_0 = 0$$

$$M_1 = 0,070350 c N_1 - 0,083292 c^2 q$$

$$M_2 = 0,131242 c N_1 - 0,155826 c^2 q$$

$$M_3 = 0,182326 c N_1 - 0,215461 c^2 q$$

$$M_4 = 0,223286 c N_1 - 0,260314 c^2 q$$

$$M_5 = 0,253881 c N_1 + 0,138851 c N_2 - 0,288818 c^2 q$$

$$M_6 = 0,273929 c N_1 + 0,273875 c N_2 - 0,299693 c^2 q$$

$$M_7 = 0,283310 c N_1 + 0,413249 c N_2 - 0,291986 c^2 q$$

$$M_8 = 0,281969 c N_1 + 0,547159 c N_2 - 0,265078 c^2 q$$

$$\mathfrak{N}_0 = 0,842186 N_1 + 0,562679 c q$$

$$\mathfrak{N}_1 = 0,881269 N_1 + 0,428306 c q$$

$$\mathfrak{N}_2 = 0,915100 N_1 + 0,308244 c q$$

$$\mathfrak{N}_3 = 0,943478 N_1 + 0,204365 c q$$

$$\mathfrak{N}_4 = 0,966234 N_1 + 0,118136 c q$$

$$\mathfrak{N}_5 = 0,983231 N_1 + 0,077139 N_2 + 0,050797 c q$$

$$\mathfrak{N}_6 = 0,994369 N_1 + 0,153819 N_2 + 0,003363 c q$$

$$\mathfrak{N}_7 = 0,999581 N_1 + 0,229579 N_2 - 0,023389 c q$$

$$\mathfrak{N}_8 = 0,998834 N_1 + 0,303978 N_2 - 0,28931 c q$$

$$T_0 = 0,539187 N_1 - 0,623679 c q$$

$$T_1 = 0,472615 N_1 - 0,563557 c q$$

$$T_2 = 0,403226 N_1 - 0,478101 c q$$

$$T_3 = 0,331434 N_1 - 0,378177 c q$$

$$T_4 \left\{ \begin{array}{l} = 0,257667 N_1 - 0,265807 c q \\ = 0,257667 N_1 + N_2 - 0,265807 c q \end{array} \right.$$

$$T_5 = 0,182364 N_1 + 0,997020 N_2 - 0,143147 c q$$

$$T_6 = 0,105974 N_1 + 0,988099 N_2 - 0,012494 c q$$

$$T_7 = 0,028954 N_1 + 0,973289 N_2 + 0,123908 c q$$

$$T_8 = 0,048240 N_1 + 0,952679 N_2 + 0,263511 c q$$

$$M_0' = 0$$

$$M_1' = 0,070350 c N_1' - 0,028443 c^2 q$$

$$M_2' = 0,131242 c N_1' - 0,058607 c^2 q$$

$$M_3' = 0,182326 c N_1' - 0,090315 c^2 q$$

$$M_4' = 0,223286 c N_1' - 0,123369 c^2 q$$

$$M_5' = 0,253286 c N_1' + 0,138851 c N_2' - 0,157581 c^2 q$$

$$M_6' = 0,273929 c N_1' + 0,276875 c N_2' - 0,192743 c^2 q$$

$$M_7' = 0,283310 c N_1' + 0,413249 c N_2' - 0,228647 c^2 q$$

$$M_8' = 0,281969 c N_1' + 0,547159 c N_2' - 0,265078 c^2 q$$

$$\mathfrak{N}_0' = 0,842196 N_1' + 0,176193 c q$$

$$\mathfrak{N}_1' = 0,881269 N_1' + 0,160395 c q$$

$$\mathfrak{N}_2' = 0,915100 N_1' + 0,143637 c q$$

$$\mathfrak{N}_3' = 0,943478 N_1' + 0,126022 c q$$

$$\mathfrak{N}_4' = 0,966234 N_1' + 0,107658 c q$$

$$\mathfrak{N}_5' = 0,983231 N_1' + 0,077139 N_2' + 0,088652 c q$$

$$\mathfrak{N}_6' = 0,994369 N_1' + 0,153819 N_2' + 0,069117 c q$$

$$\mathfrak{N}_7' = 0,999581 N_1' + 0,229579 N_2' + 0,049170 c q$$

$$\mathfrak{N}_8' = 0,998834 N_1' + 0,303978 N_2' + 0,028931 c q$$

$$T_0' = 0,539187 N_1' - 0,198043 c q$$

$$T_1' = 0,472615 N_1' - 0,211045 c q$$

$$T_2' = 0,403226 N_1' - 0,222788 c q$$

$$T_3' = 0,331434 N_1' - 0,233205 c q$$

$$T_4' \left\{ \begin{array}{l} = 0,257667 N_1' - 0,242231 c q \\ = 0,257667 N_1' + N_2' - 0,242231 c q \end{array} \right.$$

$$T_5' = 0,182364 N_1' + 0,997020 N_2' - 0,249788 c q$$

$$T_6' = 0,105974 N_1' + 0,988099 N_2' - 0,255908 c q$$

$$T_7' = 0,028954 N_1' + 0,973289 N_2' - 0,260492 c q$$

$$T_8' = 0,048240 N_1' + 0,952679 N_2' - 0,263510 c q$$

Applicando ora la formola del lavoro di deformazione di un solido a sezione costante, data al Cap. II, trascurando il lavoro dovuto agli sforzi di taglio, e aggiungendo il lavoro dei tiranti, dovremo calcolare l'espressione:

$$L = \frac{0,138989 c}{2 E I} \cdot \frac{M_0^2 + 4 M_1^2 + 2 M_2^2 + 4 M_3^2 + 2 M_4^2 + 4 M_5^2 + 2 M_6^2 + 4 M_7^2 + M_8^2}{3} + \frac{0,138989 c}{2 E \Omega} \cdot \frac{\mathfrak{N}_0^2 + 4 \mathfrak{N}_1^2 + 2 \mathfrak{N}_2^2 + 4 \mathfrak{N}_3^2 + 2 \mathfrak{N}_4^2 + 4 \mathfrak{N}_5^2 + 2 \mathfrak{N}_6^2 + 4 \mathfrak{N}_7^2 + \mathfrak{N}_8^2}{3} + \frac{1}{2 E} \left(\frac{0,566279 c N_1^2}{\omega_1} + \frac{0,440741 c N_2^2}{\omega_2} + \frac{0,566279 c N_3^2}{\omega_3} + \frac{0,231087 c N_4^2}{\omega_4} \right)$$

per avere il lavoro di deformazione della semicentina di sinistra co' suoi tiranti, ossia di mezza incavallatura carica; e dovremo calcolare l'espressione:

$$L' = \frac{0,138989 c}{2 E I} \cdot \frac{M_0'^2 + 4 M_1'^2 + 2 M_2'^2 + 4 M_3'^2 + 2 M_4'^2 + 4 M_5'^2 + 2 M_6'^2 + 4 M_7'^2 + M_8'^2}{3} + \frac{0,138989 c}{2 E \Omega} \cdot \frac{\mathfrak{N}_0'^2 + 4 \mathfrak{N}_1'^2 + 2 \mathfrak{N}_2'^2 + 4 \mathfrak{N}_3'^2 + 2 \mathfrak{N}_4'^2 + 4 \mathfrak{N}_5'^2 + 2 \mathfrak{N}_6'^2 + 4 \mathfrak{N}_7'^2 + \mathfrak{N}_8'^2}{3} + \frac{1}{2 E} \left(\frac{0,566279 c N_1'^2}{\omega_1} + \frac{0,440741 c N_2'^2}{\omega_2} + \frac{0,566279 c N_3'^2}{\omega_3} + \frac{0,231087 c N_4'^2}{\omega_4} \right)$$

per avere il lavoro di deformazione della mezza incavallatura scarica di destra.

Sostituendo nelle espressioni del lavoro i valori di M , \mathfrak{N} , M' , \mathfrak{N}' dati dalle tabelle precedenti si potranno calcolare le dette espressioni, e si otterrà un risultato espresso in funzione delle incognite $N_1, N_2, N_3, N_4, N_1', N_2', N_3', N_4'$.

Da questo risultato le incognite N_2, N_3, N_2', N_3' si potranno eliminare a mezzo delle seguenti relazioni date dalla statica.

Sia O lo snodo dove concorrono tutti e quattro i tiranti d'una mezza incavallatura, per es., quello di sinistra. Si prenda un punto A sopra il tirante AO , e si abbassino da questo punto le perpendicolari sulla direzione degli altri tre tiranti: si prenda un

punto B sul tirante OB e si abbassino da questo punto le perpen-

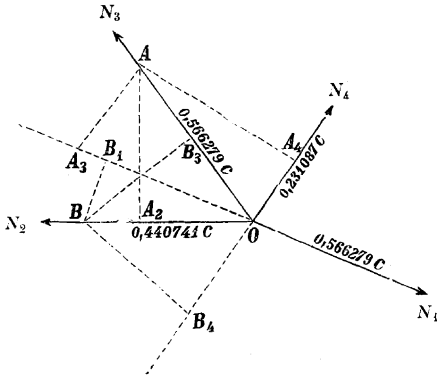


Fig. 200.

dicolari sulla direzione degli altri tre tiranti. Il sistema essendo in equilibrio, dovranno farsi equilibrio fra loro i momenti delle forze N_1, N_2, N_4 , rispetto al punto A , e si dovranno fare equilibrio fra loro i momenti delle forze N_1, N_3, N_4 , rispetto al punto B , pel che si avrà:

$$N_2 = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA_2}} N_1 + \frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA_2}} N_4 ; \quad N_3 = \frac{\overline{BB_1}}{\overline{BB_3}} N_1 - \frac{\overline{BB_1}}{\overline{BB_3}} N_4 .$$

Facendo lo stesso per lo snodo dove concorrono tutti e quattro i tiranti della semicentina di destra, si avrà pure:

$$N_2' = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA_2}} N_1' + \frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA_2}} N_4' ; \quad N_3' = \frac{\overline{BB_1}}{\overline{BB_3}} N_1' - \frac{\overline{BB_1}}{\overline{BB_3}} N_4' .$$

Queste equazioni si semplificano prendendo i punti A e B in modo che siano $\overline{AA_2} = 1$, $\overline{BB_3} = 1$.

Sostituendo questi valori di N_2, N_3, N_2', N_3' nel precedente risultato che si ha dall'espressione del lavoro di deformazione, imponendosi la condizione che debbasi avere $\omega_1 = \omega_2, \omega_3 = \omega_4 = \frac{\omega_1}{4}$,

e dividendo il detto risultato per $\frac{0,138989 c}{2 E I}$, col che non si alterano le equazioni che si otterranno facendo le derivate dall'espressione del lavoro, e trascurando inoltre i termini indipendenti dalle incognite, avremo:

$$\begin{aligned}
& 0,265077 c^2 N_1^2 + 2 \cdot 0,305096 c^2 N_1 N_4 + 0,404307 c^2 N_4^2 - 2 \cdot 0,400252 c^3 q N_1 - \\
& - 2 \cdot 0,321352 c^3 q N_4 + \frac{I}{\Omega} \left(7,252425 N_1^2 + 2 \cdot 0,610281 N_1 N_4 + 0,124783 N_4^2 + \right. \\
& \quad \left. + 2 \cdot 1,210496 c q N_1 - 2 \cdot 0,004522 c q N_4 \right) + \frac{I}{\omega} \left(7,076792 N_1^2 - \right. \\
& \quad \left. - 2 \cdot 2,051692 N_1 N_4 + 48,700726 N_4^2 \right) + 0,365077 c^2 N_1'^2 + \\
& + 2 \cdot 0,305096 c^2 N_1' N_4' + 0,404307 c^2 N_4'^2 - 2 \cdot 0,247762 c^3 q N_1' - \\
& \quad 2 \cdot 0,239082 c^3 q N_4' + \frac{I}{\Omega} \left(7,252425 N_1'^2 + 2 \cdot 0,610281 N_1 N_4 + \right. \\
& \quad \left. + 0,124783 N_4' + 2 \cdot 0,780577 c q N_1 + 2 \cdot 0,034122 c q N_4' \right) + \\
& \quad \left. + \frac{I}{\omega} \left(7,076792 N_1'^2 - 2 \cdot 2,051692 N_1' N_4' + 48,700725 N_4'^2 \right)
\end{aligned}$$

le cui derivate rispetto a N_1 , N_4 , e N_1' , N_4' ci danno, eguagliate a zero, i valori delle incognite N_1 , N_4 , N_1' , N_4' . I valori poi di N_2 , N_3 , N_2' , N_3' si otterranno dalle precedenti equazioni di equilibrio intorno ai punti A e B dei quattro tiranti concorrenti nello snodo O . Si otterrà così:

per la mezza incavallatura carica:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \left(1,183622 - \frac{I}{c^2 \Omega} 65,8913 - \frac{I}{c^2 \omega} 83,0358 \right) c q , \\
N_2 &= \left(0,759997 + \frac{I}{c^2 \Omega} 16,0746 + \frac{I}{c^2 \omega} 8,5133 \right) c q , \\
N_3 &= \left(0,464863 - \frac{I}{c^2 \Omega} 81,0958 - \frac{I}{c^2 \omega} 91,0894 \right) c q , \\
N_4 &= \left(-0,116313 + \frac{I}{c^2 \Omega} 44,4052 + \frac{I}{c^2 \omega} 48,3299 \right) c q ;
\end{aligned}$$

per la mezza incavallatura scarica:

$$\begin{aligned}
N_1' &= \left(0,486760 - \frac{I}{c^2 \Omega} 33,6810 + \frac{I}{c^2 \omega} 14,5808 \right) c q , \\
N_2' &= \left(0,759997 + \frac{I}{c^2 \Omega} 16,0746 + \frac{I}{c^2 \omega} 8,5133 \right) c q , \\
N_3' &= \left(-0,232014 - \frac{I}{c^2 \Omega} 48,8833 + \frac{I}{c^2 \omega} 6,5288 \right) c q , \\
N_4' &= \left(0,242866 + \frac{I}{c^2 \Omega} 27,8033 + \frac{I}{c^2 \omega} 19840 \right) c q .
\end{aligned}$$

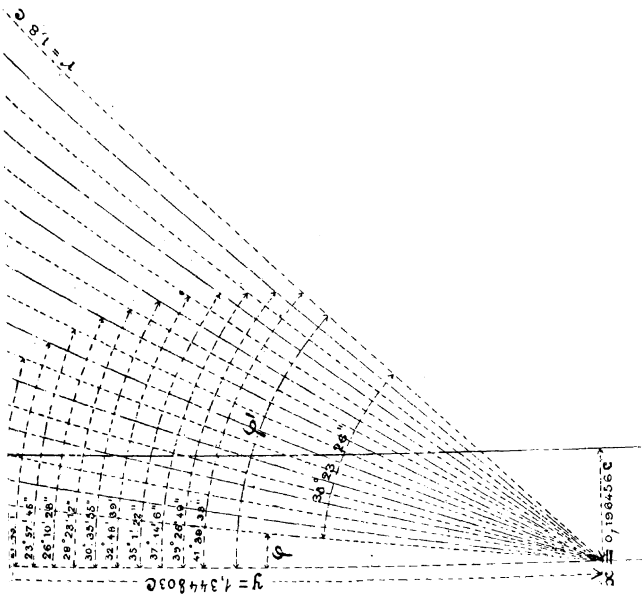


Fig. 201.

Sostituendo questi valori nelle precedenti tabelle si trovano i momenti inflettenti, le pressioni normali e gli sforzi di taglio che hanno luogo nelle sezioni 0, 1, 2, 3, ... 8 di ciascuna mezza incavallatura, e quindi si può far sì che la tettoia sia in buone condizioni di stabilità, assegnando alla sezione Ω del puntone ed al momento d'inerzia I della sezione stessa valori convenienti.

Carico completo. Pel principio della sovrapposizione degli effetti i momenti inflettenti \mathbf{M} , le pressioni normali \mathbf{N} e gli sforzi di taglio \mathbf{T} del carico completo, si otterranno per qualsiasi sezione dalle formole

$$\mathbf{M} = M + M', \quad \mathbf{N} = \mathfrak{N} + \mathfrak{N}', \quad \mathbf{T} = T + T'.$$

Per lo stesso principio, si ottengono nello stesso modo le tensioni $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4$ per il carico completo, le quali sono:

$$\mathbf{N}_1 = \left(1,670382 - \frac{I}{c^2 \Omega} 99,572233 - \frac{I}{c^2 \omega} 68,4550 \right) c q,$$

$$\mathbf{N}_2 = \left(1,519994 + \frac{I}{c^2 \Omega} 32,1492 + \frac{I}{c^2 \omega} 17,0266 \right) c q,$$

$$\mathbf{N}_3 = \left(0,232849 - \frac{I}{c^2 \Omega} 129,9791 - \frac{I}{c^2 \omega} 84,5606 \right) c q,$$

$$\mathbf{N}_4 = \left(0,126553 + \frac{I}{c^2 \Omega} 72,2095 + \frac{I}{c^2 \omega} 46,3460 \right) c q,$$

Osservazione. Si comprende che il modo col quale abbiamo ottenuto, per la tettoia a puntoni curvi con 7 tiranti, le incognite in funzione della corda teorica del carico uniformemente ripartito, può applicarsi a qualunque tipo d'incavallatura a puntoni retti o curvi con quanti tiranti, si voglia, di modo che con questo metodo si potrebbero calcolare diverse tabelle per diversi tipi d'incavallatura, le quali fornirebbero alla pratica un mezzo eccellente per assicurarsi in brevissimo tempo della stabilità delle costruzioni di questo genere, ciò che non si fa esattamente col metodo del Ritter (*).

(*) La calcolazione delle tabelle suaccennate non conviene sia fatta da una sola persona, perchè si impiegherebbe troppo tempo, e perchè è bene che i calcolatori si controllino fra loro. Sarebbe desiderabile che un tale utile lavoro, nella considerazione che potrebbe estendersi anche agli archi in muratura e ad altre applicazioni della *teoria del Castigliano*, e che fatto una volta, vale per sempre, venisse compiuto in qualche adatto Ufficio del Governo o di qualche grande Amministrazione competente, o meglio da una Commissione di tecnici appositamente nominata, prima che come per altre cose non di rado avviene, le scoperte del genio italiano vengano da noi stimate soltanto quando ci ritornano più o meno travestite dall'opera straniera.

CAPITOLO X.

Metodo del Ritter per il calcolo delle travi reticolate.

Chiodature dei ponti metallici.

1. — Nel metodo del Ritter (*) pel calcolo delle travi reticolate sono trascurate le deformazioni dei pezzi componenti le travi. Questo metodo si basa sul seguente teorema di Meccanica razionale:

“ In un sistema in equilibrio di punti, contenuti in un piano, fra loro invariabilmente uniti, la somma algebrica dei momenti delle forze esterne sollecitanti, rispetto ad un punto qualunque del piano, è eguale a zero „

Col metodo del Ritter, detto anche dei momenti statici, si determinano in un sistema articolato le tensioni delle varie sbarre che lo compongono, allorchè si conoscano l'intensità, la direzione ed il punto d'applicazione delle forze esterne sollecitanti, comprese le reazioni sugli appoggi.

In una trave reticolata i nodi rappresentano i punti collegati invariabilmente dalle sbarre. Il punto di riferimento dei momenti chiamasi polo dei momenti.

Per la determinazione delle forze interne delle singole parti di una trave (od in generale di una costruzione qualunque), si ha la seguente regola:

Immaginando di sezionare la trave, con un taglio qualunque fatto con un piano o con una superficie curva, in modo da tagliare tre sole sbarre le cui tensioni sono incognite, si può prendere in considerazione o la sola parte di trave che sta a sinistra, o la sola a destra del piano di sezione. Bisogna sostituire alle sbarre sezionate la loro tensione onde non sia alterato l'equilibrio. Per valutare la tensione di una qualunque delle tre sbarre sezionate si prende per polo il punto d'incontro delle altre due. Ponendo allora eguale a zero la somma algebrica dei momenti delle forze esterne sollecitanti, comprese le reazioni, e di tutte le tensioni delle tre sbarre tagliate, si ha un'equazione ad una sola incognita, poichè il momento delle due altre tensioni è nullo passando esse pel polo. Questa equazione si chiama equazione dei momenti statici.

(*) C. f. r. A. RITTER — *Eiserne Dach- und Brücken-Konstruktionen*, 5 Aufl.; Leipzig 1894.

Si prenderanno positivi i momenti che fanno girare il sistema intorno al polo secondo le frecce di un orologio, negativi i momenti nel verso contrario. Le tensioni che si otterranno col segno (+) saranno veramente tensioni; se le si otterranno col segno (-) saranno pressioni.

Nell'applicare il metodo del Ritter al calcolo delle incavallature bisogna supporre completo il carico che su esse agisce, perchè è in tale ipotesi che i singoli pezzi sono maggiormente affaticati.

Per il calcolo delle travi a traliccio o reticolate (articolate), si suppongano i carichi concentrati nei nodi, facendo distinzione fra il carico permanente ed il carico accidentale, e si ordini l'espressione della reazione di un pezzo qualunque in modo che l'influenza che ha su questa reazione ciascun carico, risulti da un solo termine di cui si possa facilmente riconoscere il segno. Si tralascino allora tutti i termini, dipendenti da carichi accidentali, che hanno segno negativo, si otterrà il valore *massimo* della reazione cercata; si tralascino poi invece tutti i termini che entrano nell'equazione con segno positivo, si otterrà il valore *minimo* della stessa reazione.

Nel caso in cui in quell'equazione generale tutti i termini dipendenti dai carichi abbiano lo stesso segno, la soluzione della medesima dà direttamente il valore della reazione massima.

Il metodo di Ritter risulterà più chiaro facendone applicazione a qualche caso particolare.

2. — Es. Sia il sistema articolato delineato nella fig. 202. Per la determinazione della tensione S della sbarra EC si immagini fatta la sezione mn , e si prendano i momenti rispetto al polo O ; si ottiene l'equazione:

$$Ss - Ax + P\left(\frac{l}{4} + x\right) = 0, \quad (1)$$

essendo s il braccio di leva di S rispetto al polo O , A la reazione

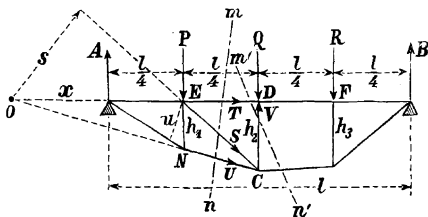


Fig. 202.

dell'appoggio di sinistra, x il braccio di leva di questa reazione rispetto ad O , P il carico sul nodo E , ed $\frac{l}{4} + x$ il braccio di leva di P rispetto ad O .

Il valore della reazione A è:

$$A = \frac{3}{4} P + \frac{1}{2} Q + \frac{1}{4} R$$

essendo Q ed R i carichi sui nodi D ed F .

Ponendo in (1) questo valore di A si ottiene:

$$S = \frac{1}{s} \left[-P \left(\frac{x}{4} + \frac{l}{4} \right) + \frac{Q}{2} x + \frac{R}{4} x \right]. \quad (2)$$

Nella (2) il termine che contiene P tende a diminuire il valore di S ; i termini contenenti Q ed R tendono ad aumentarlo; quindi si avrà:

$$S_{(\text{mass.})} = \frac{\frac{Q}{2} x + \frac{R}{4} x}{s}, \quad S_{(\text{min.})} = \frac{P \left(\frac{x}{4} + \frac{l}{4} \right)}{s}.$$

Per la tensione T del pezzo ED , prendendo i momenti rispetto al polo C , si ha:

$$T = \left(-\frac{Pl}{8} - \frac{Ql}{4} - \frac{Rl}{8} \right) \frac{1}{h_2},$$

e per la tensione U del terzo pezzo NC , intersecato da mn , prendendo i momenti rispetto al polo E , si ha:

$$U = \left(\frac{3Pl}{16} + \frac{Ql}{8} + \frac{Rl}{16} \right) \frac{1}{u}.$$

Queste due ultime equazioni fanno vedere che i pezzi le cui reazioni (tensioni o pressioni) si sono rappresentate con T ed U , sono *maggiormente* compressi o tesi quando il carico è completo.

In modo analogo si determina la reazione V del pezzo CD , immaginando fatta la sezione $m'n'$. Si noti che quando si dice *reazione* di un pezzo s'intende o tensione o pressione; ma si può anche chiamare tensione la reazione incognita di qualsiasi pezzo, salvo poi a distinguerla in tensione o pressione secondo che essa risulta di segno positivo o negativo.

Nel caso in cui due delle tre sbarre sezionate siano parallele, si scriva che *la somma delle proiezioni delle forze perpendicolarmente a queste direzioni parallele, è eguale a zero*, e si otterrà immediatamente la reazione della terza sbarra.

Travi paraboliche (*) e travi rettilinee.

(*) Qui si considerano soltanto le travi paraboliche col contorno inferiore rettilineo.

In generale pei ponti a travi reticolati si usano le paraboliche o le rettilinee. In una di queste travi reticolate si distinguono:

1.° Le sbarre della nervatura o briglia inferiore divisa in un numero di scomparti eguali; di modo che essendo l la lunghezza della trave, ed n il numero degli scomparti, ciascuna sbarra della nervatura inferiore sarà lunga $\frac{l}{n}$. La tensione di queste sbarre si rappresenta con I_m , ed il braccio di leva con i_m .

2.° Le sbarre della nervatura o briglia superiore le cui lunghezze si rappresentano colla lettera τ_m , e le cui tensioni si denotano con S_m , ed i bracci di leva con s_m .

3.° Le verticali o montanti la cui lunghezza si rappresenta con h_m e la tensione ed i bracci di leva con V_m, v_m .

4.° Le diagonali e le controdiagonali, le cui lunghezze, tensioni e bracci di leva si rappresentano con δ_m, D_m, d_m se trattasi di diagonali, e con γ_m, C_m, c_m se trattasi di controdiagonali.

5.° La lunghezza $\frac{l}{n}$ di uno scomparto si rappresenta anche con λ .

Per essere tutti gli scomparti in cui è divisa la trave di eguale lunghezza fra loro, ed i carichi (p e k per m. corr. di trave) *uniformemente distribuiti*, tutti i nodi sono egualmente caricati, ad eccezione degli estremi, i quali portano un peso eguale alla metà di quello che carica ciascun nodo intermedio.

Il carico permanente per ogni nodo intermedio è	$P = q \lambda$;
" " mobile " " " " " " " "	$K = k \lambda$;
" " totale " " " " " " " "	$Q = (q + k) \lambda$.

Per i nodi estremi i carichi sono rispettivamente:

$$\frac{1}{2} P, \quad \frac{1}{2} K, \quad \frac{1}{2} Q .$$

Nelle formole che seguono si è sempre presa in considerazione la parte di trave che sta a sinistra del piano di sezione, e quindi fra le forze esterne sollecitanti il sistema si tiene conto della reazione dell'appoggio di sinistra. Si indica con A_p la reazione dovuta al solo *peso permanente* e con A_k quella dipendente dal *carico mobile*, e quindi $A_p + A_k$ sarà la *reazione totale*, che si indica con A se è *costante*, e con A_m se è *variabile*.

3. — Formole pel calcolo delle travi paraboliche reticolate.

Sia n il numero degli scomparti in cui è divisa la trave, essendo

λ la lunghezza di ciascuno di questi n scomparti eguali. Si hanno

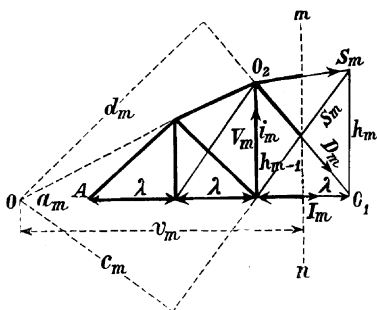


Fig. 203.

le seguenti formole generali per questo tipo di trave ;

L'altezza h_m di una verticale qualunque è data da :

a) Per un numero n pari di scomparti :

$$h_m = \frac{4m(n-m)}{n^2} h ,$$

essendo h la freccia dell'arco parabolico ; cosicchè se la trave è lunga per es. m. 36, ed è divisa in un numero $n=12$ di scomparti eguali, essendo la freccia dell'arco parabolico di m. 6, la lunghezza della verticale del terzo scomparto, sarà

$$h_3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot (12 - 3)}{12^2} \cdot 6 = \text{m. } 4,50 .$$

Inoltre si ha :

$$\alpha_m = \frac{m(m-1)\lambda}{n+1-2m} ,$$

essendo α_m la distanza del polo O, corrispondente allo scomparto emmesimo, dall'estremità A di sinistra della trave ;

$$\sigma_m = \sqrt{(h_m - h_{m-1})^2 + \lambda^2} , \quad \delta_m = \sqrt{h_{m-1}^2 + \lambda^2} ,$$

$$s_m = \frac{h_m \lambda}{\sigma_m} , \quad i_m = h_{m-1} ,$$

$$d_m = (\alpha_m + m\lambda) \frac{h_{m-1}}{\delta_m} , \quad c_m = [\alpha_m + (m-1)\lambda] \frac{h_m}{\gamma_m} ,$$

$$v_m = \alpha_m + m\lambda .$$

ASTE DI CONTORNO.

Per calcolare le tensioni, considerando la sbarra qualunque σ_m appartenente all'emmesimo scomparto, si ha la seguente equazione dei momenti statici

$$S_m s_m + A_m \lambda - \frac{m^2}{2} Q \lambda = 0 .$$

La reazione costante dell'appoggio A è:

$$A = \frac{1}{2} n Q .$$

Il valore della tensione S_m di una sbarra nella nervatura superiore, corrispondente ad uno scomparto emmesimo, è:

$$S_m = - \frac{Q n^2}{8 h} \sigma_m .$$

La trave essendo simmetrica rispetto alla sua mezzeria, basterà calcolare una metà della trave.

Dall'ultima formola risulta che *le reazioni delle sbarre superiori della nervatura poligonale sono proporzionali alla loro lunghezza e sono sempre sforzi di compressione.*

Il valore della tensione I_m per le sbarre della nervatura inferiore rettilinea è:

$$I_m = \frac{Q n^2}{8 h} \lambda ,$$

dalla quale risulta che *le reazioni delle sbarre della nervatura inferiore rettilinea sono proporzionali alla loro lunghezza e sono sempre tensioni.*

Le tensioni S_m , I_m date da queste formole sono le *massime*, poichè esse risultano massime pel carico completo.

TRALICCIO.

Il peso permanente caricando egualmente tutti i nodi non ha alcuna influenza nel valore delle tensioni delle diagonali, in quanto che *le travi paraboliche soddisfano appunto alla condizione che pel carico completo le diagonali rimangono senza tensione.* Quindi si tiene conto solo dei nodi caricati col carico mobile K . Considerando le due posizioni del carico mobile che danno la tensione massima e la tensione minima, si avrà:

$$tensione_{(mass.)} = - tensione_{(min.)} .$$

Basta adunque calcolare uno solo di questi valori, e si avrà:

$$D_{m(\text{mass.})} = \frac{K n}{8 h} \delta_m, \quad D_{m(\text{min.})} = - \frac{K n}{8 h} \delta_m.$$

In pratica, per lo più, si costruiscono le travi in modo che le diagonali non debbano essere cementate che alla *trazione*; quindi basta tener conto solo del valore di $D_{m(\text{mass.})}$.

Per la tensione delle controdiagonali si ha:

$$C_{m(\text{mass.})} = \frac{K n}{8 h} \gamma_m, \quad C_{m(\text{min.})} = - \frac{K n}{8 h} \gamma_m.$$

Siccome la lunghezza d'una diagonale è eguale alla lunghezza della controdiagonale dello scomparto successivo, così sarà:

$$C_m = D_{m+1}.$$

La tensione massima è eguale in tutte le verticali ed è:

$$V_{m(\text{mass.})} = P + K = Q.$$

La tensione minima delle verticali varia invece a seconda degli scomparti ed è:

$$V_{m(\text{min.})} = P - \frac{1}{2} K \cdot \frac{(m-1)(n-1-m)^2}{n(n-m)-(m-1)} \quad (*).$$

Si noti bene che il valore della tensione minima delle verticali può essere numericamente più grande del valore della tensione massima, e che quindi si devono calcolare tutti e due per scegliere quello *numericamente più grande*.

b) Per un numero n pari di scomparti. Si ha:

$$h_m = \frac{4 m (n-m)}{n^2 - 1} h,$$

$$a_m = \frac{m(m-1)\lambda}{n+1-2m},$$

$$\sigma_m = \sqrt{(h_m - h_{m-1})^2 + i^2}, \quad \delta_m = \sqrt{h_{m-1}^2 + \lambda^2},$$

$$s_m = \frac{4 m (n-m)\lambda}{(n^2-1)\sigma_m}, \quad i_m = \frac{4(m-1)(n-m+1)}{n^2-1} h,$$

$$d_m = \frac{4 m \lambda (n-m)(m-1)(n-m+1)}{(n+1-2m)(n^2-1)\delta_m} h,$$

(*) C. f. r. GUIDI-PONTI, pag. 99.

$$c_m = \frac{4 m^2 \lambda (n-m)(m-1)(n-m+1)}{(n+1-2m)(n^2-1)\gamma_m} h ;$$

e per le tensioni dei vari pezzi si ha:

$$S_m = - \frac{Q(n^2-1)}{8h} \sigma_m ,$$

$$I_m = \frac{Q(n^2-1)}{8h} \lambda ,$$

$$D_m(\text{mass}) = \frac{K(n^2-1)}{8nh} \delta_m , \quad C_m(\text{mass.}) = - \frac{K(n^2-1)}{8nh} \gamma_m .$$

In queste formole, per n dispari, h non è più la freccia dell'arco parabolico (nervatura superiore), ma è il valore dato da:

$$h = \frac{f(l^2 - \lambda^2)}{l^2} ,$$

rappresentando f la freccia del detto arco parabolico; quindi mentre per n pari $h=f$, invece per n dispari $h < f$. Però h è sempre l'altezza massima della trave.

4. — Formole per il calcolo delle travi rettilinee reticolate (Travi Mohriè).

Barre delle briglie. Il massimo sforzo in tutte le barre delle ner-

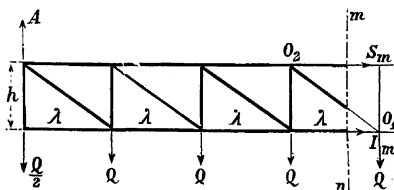


Fig 204.

vature superiore ed inferiore, entrambi rettilinee, ha luogo pel carico completo.

La reazione dell'appoggio di sinistra è:

$$A = \frac{n}{2} Q .$$

Ritenendo le solite denominazioni, l'equazione dei momenti sta-

tici è:

$$S_m h + A_m \lambda - Q \frac{m^2 \lambda}{2} = 0$$

per lo scomparto emmesimo, a partire dall'appoggio di sinistra. Quindi si ha:

$$S_m = -\frac{Q \lambda}{2 h} m (n - m) ,$$

$$I_m = \frac{Q \lambda}{2 h} (m - 1) (n + 1 - m) :$$

e siccome:

$$S_{m-1} = -\frac{Q \lambda}{2 h} (m - 1) (n - 1 - m) ,$$

così risulta:

$$I_m = -S_{m-1} .$$

Traliccio. Per tutte le sbarre del traliccio, diagonali e verticali, il polo si trova a distanza infinita, poichè sarebbe determinato dal punto d'incontro delle corrispondenti sbarre σ e λ fra loro parallele in ogni scomparto. I bracci di leva acquistano adunque valori infiniti: ciò non pertanto è ancora applicabile il metodo dei momenti statici, poichè l'equazione dei momenti statici si tramuta nell'altra, che è l'espressione analitica della seguente proposizione: *la somma algebrica delle forze verticali, che sollecitano un sistema rigido, in equilibrio, di punti in un piano è uguale a zero.* E quindi, condotto il piano di sezione in modo di tagliare la sbarra che si considera, si pone eguale a zero la somma algebrica delle forze verticali, che si trovano da una medesima parte del piano di sezione. L'equazione risultante dicesi *equazione dell'equilibrio statico*. Fra le forze esterne va compresa la reazione del relativo appoggio, nonchè la tensione della sbarra sezionata (*per le verticali*) oppure la *componente verticale* di questa tensione (*per le diagonali*). Noi consideriamo sempre la parte a sinistra della sezione, prendendo come forze positive quelle che cospirano all'insù e come negative quelle che cospirano all'ingiù. La reazione A_p , dipendente dal carico permanente, è costante ed ha il valore:

$$A_p = \frac{nP}{2} .$$

mentre quella A_k , dipendente dal carico mobile, è variabile.

La reazione totale si indica con

$$A_m = A_p + A_k .$$

Diagonali, o diagonali principali. Chiamando φ l'angolo d'inclinazione delle diagonali coll'orizzontale si ottiene:

$$\left. \begin{aligned} D_m(\text{mass.}) &= \frac{1}{2} \left[P(n+1-2m) + K \frac{(n-m)^2}{n-1} \right] \frac{1}{\text{sen } \varphi} \\ D_m(\text{min.}) &= \frac{1}{2} \left[P(n+1-2m) - K \frac{(m-1)^2}{n-1} \right] \frac{1}{\text{sen } \varphi} \end{aligned} \right\} (*)$$

Controdiagonali o diagonali secondarie. Si ha :

$$C_m(\text{mass.}) = -D_m(\text{min.})$$

$$C_m(\text{min.}) = -D_m(\text{mass.})$$

le quali servono a dedurre speditamente le tensioni delle diagonali secondarie, o controdiagonali, una volta note quelle delle diagonali principali.

Verticali. Indicando con $\sum F$ la somma algebrica delle forze che

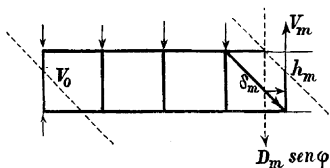


Fig. 205.

stanno a sinistra del piano di sezione, compresa la reazione dell'appoggio :

se l'**impalcato** è posto al di sopra (fig. 205), si ha :
sezionando la diagonale δ_m :

$$\sum F - D_m \text{sen } \varphi = 0 ,$$

e sezionando la verticale h_m :

$$\sum F + V_m = 0 ,$$

dalle quali si ricava :

$$V_m = -D_m \text{sen } \varphi .$$

Se l'**impalcato** è posto al di sotto (fig. 206), si ha :

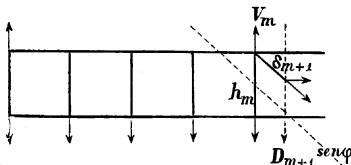


Fig. 206.

(*) C. f. r. GUIDI-PONTI — pag. 104 e seguenti.

sezionando la diagonale δ_{m-1} :

$$\sum F - D_{m-1} \text{sen } \varphi = 0 ,$$

e sezionando la verticale h_m :

$$\sum F - V_m = 0 .$$

dalle quali:

$$V_m = - D_{m-1} \text{sen } \varphi .$$

Così le verticali si calcolano speditamente tosto che si è calcolata la tensione delle diagonali.

Volendo che la trave abbia solo diagonali stirate, ne viene che le verticali saranno sempre compresse; e quindi basta calcolare la sola tensione minima delle stesse verticali, la quale si determina: per l'impalcato al di sopra, colla formola:

$$V_m (\text{min.}) = - D_{m(\text{mass.})} \text{sen } \varphi .$$

e per l'impalcato al di sotto, colla formola:

$$V_m (\text{min.}) = - D_{m-1(\text{mass.})} \text{sen } \varphi .$$

La penultima di queste equazioni cade in difetto per la prima verticale V_0 , sull'appoggio, perchè manca la diagonale D_0 . Però il valore di V_0 si trova colla formola:

$$V_0 = - \frac{n}{2} (P + K) .$$

Modo di costruire in pratica le travi reticolate paraboliche e rettilinee.

In pratica si usa costruire la trave in modo che le diagonali non abbiano da resistere che a sforzi di trazione, e non di compressione. Perciò le diagonali si fanno con *ferri piatti*, i quali sono incapaci di resistere a sforzi di compressione. Quindi in tutti quegli scomparti, nei quali le diagonali hanno tanto la tensione (mass.) quanto la tensione (min.) entrambe positive, (cioè si hanno solo sforzi di trazione) si lascia la sola diagonale principale, la quale non viene, per qualunque posizione del carico mobile, mai cimentata alla compressione; in quegli scomparti nei quali le diagonali hanno la tensione (mass.) positiva e la tensione (min.) negativa, si mette anche la controdiagonale, con che si ottiene che per la posizione del carico mobile, che produce la tensione (mass.) positiva, lavora la diagonale principale, e, per la posizione del carico mobile che produce la tensione (min.) negativa, lavora la controdiagonale. In queste travi alcuni scomparti sono adunque ad una sola diagonale (gli estremi); altri hanno la diagonale e la controdiagonale incrociate (gli intermedi).

Negli scomparti dove le diagonali hanno la tensione (mass.) positiva e la tensione (min.) negativa, quando si vuole con una sola diagonale resistere agli sforzi di trazione e di compressione la si foggia a T od a C.

5. — Travi a traliccio dissimetrico composto con diagonali tese e compresse.

Quando si vuol costruire la trave con ambedue le diagonali (diagonale e controdiagonale) in tutti gli scomparti allora si può supporre la trave composta di due sistemi a traliccio dissimetrico semplice aventi le diagonali inversamente inclinate e si può ritenere che ogni sistema semplice porti metà dei carichi totali, ma operanti nell'un sistema sui nodi superiori, nell'altro sui nodi inferiori. Pel calcolo delle tensioni di tutte le sbarre servono le formole sopra date avvertendo che in luogo di P , K , Q si devono prendere i valori dimezzati:

$$P' = \frac{1}{2} q \lambda, \quad K' = \frac{1}{2} k \lambda, \quad Q' = \frac{1}{2} (q + k) \lambda.$$

Es. Fig. 207-208. Si vuol costruire un ponte a travi reticolate paraboliche della portata di m. 36 divisa in 12 scomparti eguali (ciascuno di m 3) avente la freccia della nervatura superiore di m. 6. Il ponte deve servire per strada ferrata ad un solo binario, sul quale le locomotive più pesanti, che possono correre, sono le Sigl.

Per mezzo della formola del Bresse e colla tabella dei sopraccarichi da adottarsi pei ponti in ferro sulle strade ferrate italiane riportate al N.º 4 del capitolo V, si calcolano i carichi permanente e mobile per m. corr. di trave, e quindi i carichi su ciascun nodo, e si ha:

per il calcolo nelle nervature :

$$P = \frac{1600}{2} \cdot 3.00 = \text{kg. } 2400 \quad \text{carico permanente.}$$

$$K = \frac{5146}{2} \cdot 3.00 = \text{kg. } 7720 \quad \text{„ mobile.}$$

$$Q = P + K = \text{kg. } 10120 \quad \text{„ totale.}$$

per il calcolo del traliccio :

$$K' = \frac{5800}{2} \cdot 3.00 = \text{kg. } 8700 \quad \text{carico mobile.}$$

Applicando ora le formole date si trovano i risultati indicati nelle due seguenti figure 207-208, di cui la prima dà il tracciato geometrico di una metà della trave, la seconda dà gli sforzi nelle diverse sbarre.

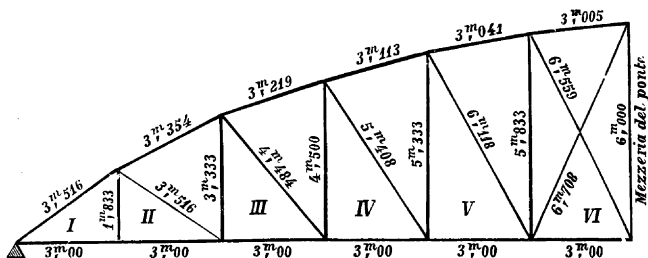


Fig. 207.

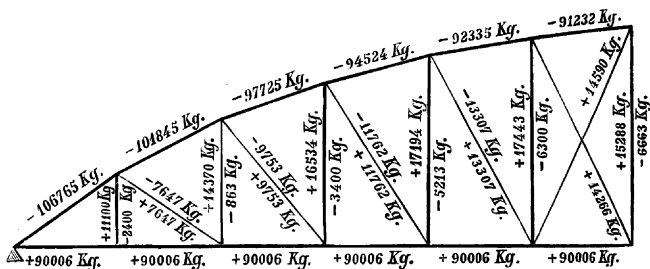


Fig. 208.

In questa trave il sesto scomparto (VI) ha le due diagonali incrociate, che sono ferri piatti. Negli altri scomparti vi è una diagonale sola, ma è un ferro a T.

Es. Fig. 209. Si vuol costruire una trave reticolata rettilinea, di m. 32 di portata, colle due diagonali in tutti gli scomparti, talchè resista ad un carico permanente $P = 2240$ kg., ad un carico mobile per le nervature di kg. 7520, e pel traliccio di kg. 8960, essendo la trave divisa in 10 scomparti eguali, ed essendo l'altezza h della medesima di m. 3,20.

Si avrà :

$$P' = \frac{2240}{2} = 1120 \text{ kg.} \quad K' = \frac{7520}{2} = 3760 \text{ kg.}$$

$$Q' = P' + K' , \quad K_1' = \frac{8960}{2} = 4480 \text{ kg.}$$

$$\lambda = \text{m. } 3,20 ; \quad h = \text{m. } 3,20 ; \quad \text{sen } \varphi = 0,7072 ; \quad \frac{1}{\text{sen } \varphi} = 1,414$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
 S_m &= -2240 m (10 - m) , & I_m &= -S_{m-1} : \\
 D_m(\text{mass.}) &= [560 (11 - 2 m) + 224 (10 - m) (11 - m)] 1.414 \\
 D_m(\text{min.}) &= [560 (11 - 2 m) - 224 m (m - 1)] 1.414 ; \\
 V_m(\text{mass.}) &= -0,7072 D_m(\text{min.}) , \\
 V_m(\text{min.}) &= -0,7072 D_m(\text{mass.}) , \\
 V_o(\text{mass.}) &= -\frac{n}{2} P' = -5600 \text{ kg.} . \\
 V_o(\text{min.}) &= \frac{n}{2} Q' = -24400 \text{ kg.} , \\
 V_n(\text{mass.}) &= -\frac{P'}{2} = -560 , & V_n(\text{min.}) &= -\frac{Q'}{2} = 2440 \text{ kg.} .
 \end{aligned}$$

Con queste formole si trovano i risultati indicati nella fig. A (Fig. 209) (primo sistema semplice).

Se si suppone di girare il sistema, cosicchè la estremità di sinistra passi a destra, si ottiene il secondo sistema semplice, nel quale però i carichi si devono supporre applicati ai nodi inferiori. E siccome le tensioni delle nervature e delle diagonali si conservano le stesse tanto che siano caricati i nodi superiori, quanto che lo siano gli inferiori, così ne viene che le tensioni di queste sbarre mantengono, nel secondo sistema semplice, i valori stessi che avevano nel primo sistema semplice, ma in ordine inverso come sono riportati nella fig. B (Fig. 209).

In quanto alle verticali di questo secondo sistema le tensioni sono date da:

$$\begin{aligned}
 V_m(\text{mass.}) &= D_m(\text{min.}) \text{ sen } \gamma . \\
 V_m(\text{min.}) &= D_m(\text{mass.}) \text{ sen } \gamma .
 \end{aligned}$$

Queste formole sono come le corrispondenti del primo sistema semplice, ma in quel sistema le verticali e le diagonali che si corrispondono sono quelle che concorrono nei nodi inferiori (scarichi), mentre nel secondo sistema semplice le verticali e diagonali che si corrispondono sono quelle che concorrono nei nodi superiori (ancora scarichi).

Per questo secondo sistema si ha poi:

$$V_o(\text{mass.}) = V_o(\text{min.}) = 0 .$$

e questi valori non si potrebbero ricavare dalle due ultime equazioni, che cadono in difetto per la verticale V_o .

Calcolati così i due sistemi semplici, si immagini ora che essi si sovrappongano, e si colleghino saldamente fra loro in modo da

formare il sistema della fig. C (Fig. 209). In questo sistema le parti sovrapposte e congiunte avranno una tensione eguale alla somma algebrica delle parziali (cioè per le sbarre delle nervature e per le verticali) mentre le sbarre che rimangono sole (le diagonali) conservano la tensione che avevano nel sistema semplice.

Riguardo alle verticali poi è facile vedere, che per ognuna la somma algebrica delle tensioni è eguale a zero, eccetto che per le estreme. Ciò sarebbe esatto, se veramente i carichi fossero applicati metà sui nodi superiori, metà sugli inferiori: invece il carico è direttamente applicato solo sugli uni o solo sugli altri. Se l'impalcato è applicato superiormente (caricati i nodi superiori), allora le verticali devono trasmettere metà del carico totale dei nodi superiori sugli inferiori, e sono allora soggette ad uno sforzo di compressione:

$$Q' = \frac{1}{2} (P + K) = - \frac{1}{2} Q .$$

Se invece l'impalcato è posto sotto (caricati i nodi inferiori), allora le verticali devono trasmettere metà del carico totale dei nodi inferiori sui superiori, e sono allora soggette ad uno sforzo di trazione:

$$Q' = \frac{1}{2} (P + K) = \frac{1}{2} Q .$$

Le verticali estreme hanno sempre la tensione (mass.) e la tensione (min.) entrambe negative (compressione), e la tensione (min.) che corrisponde a un carico mobile completo, maggiore della tensione (mass.) che corrisponde invece a un ponte scarico. Basta perciò tener conto soltanto della tensione (min.). Esse inoltre devono trasmettere al nodo inferiore uno sforzo:

$$\frac{1}{2} Q' = - \frac{1}{4} Q . \quad \text{se l'impalcato è sopra,}$$

e sul nodo superiore uno sforzo:

$$+ \frac{1}{2} Q' = + \frac{1}{4} Q , \quad \text{se l'impalcato è sotto :}$$

per cui complessivamente la tensione nelle diagonali estreme si calcola colle seguenti formole:

per l'impalcato posto sopra:

$$V_o = V_n = - \frac{n}{2} Q' = - \frac{1}{2} Q' = - \frac{n+1}{2} Q' ,$$

e per l'impalcato posto sotto:

$$V_o = V_n = - \frac{n}{2} Q' + \frac{1}{2} Q' = - \frac{n-1}{2} Q' .$$

Osservazione. Dopo calcolate col metodo di Ritter le tensioni e quindi le dimensioni dei diversi pezzi di una trave reticolata rettilinea o parabolica, sarà conveniente di verificare ancora colle formole date al capitolo VII, se supponendo le nervature o briglie (lungoni) indissolubilmente collegati dal traliccio resistono sufficientemente alla flessione: inoltre, quando si ammettono dei pezzi nel traliccio, che lavorano alla compressione, si dovrà verificare colle formole date al cap. III, se essi si trovano in condizioni di sicurezza rispetto agli sforzi in punta cui possono essere soggetti.

6. — Chiodature nei ponti metallici.

DIAMETRI E DISTANZA FRA I CHIODI.

In generale nei ponti in ferro si cerca di schivare la molteplicità dei tipi di chiodi, e perciò si adottano soltanto *due o tre tipi* di chiodi di diametro diverso.

Per la chiodatura dell'anima delle travi principali coi ferri ad angolo e di questi ultimi colle lamiere correnti, *si adottano chiodi da 20 a 30 mm. di diametro secondo la grandezza dei ponti e lo spessore delle lamiere: e la loro distanza si fa da 5 a 7 diametri.* Questa regola vale tanto per le travi a parete piena come per quelle a traliccio.

Per le travi trasversali e per quelle longitudinali secondarie *si adottano chiodi col diametro da 20 a 24 mm. e la loro distanza si fa da 5 a 7 diametri,* come per le travi principali.

CHIODATURA DEI COPRIGIUNTI.

I **coprigiunti** dell'anima, tanto nelle travi a parete piena quanto in quelle a traliccio, si fanno generalmente **doppi**, onde *ciascun chiodo produce un attrito*

$$\frac{\pi d^2}{2} K .$$

denotando con d il diametro del chiodo, e con K la resistenza di attrito fra le due lamiere. Perciò si calcola il numero dei chiodi in modo che la *resistenza d'attrito*, prodotta da quelli posti da una parte del giunto, sia uguale allo sforzo che avrebbe sopportato l'anima se fosse stata continua. La resistenza d'attrito delle chiodature varia fra 8 e 16 kg. per mm^2 ; in *pratica* si prende $K = 5$ kg. per mm^2 , onde in pratica l'attrito di ciascun chiodo si prenderà $7,85 d^2$.

Siano ε la tensione, e τ lo sforzo di scorrimento trasversale sull'altezza d'anima di 1 mm. presso i lungoni, nelle travi a parete piena, n il numero dei chiodi, i l'interasse dall'uno all'altro.

Nelle travi a parete piena dove l'anima è sottoposta a scorrimento crescente dall'estremità verso il mezzo, e a tensione (prodotta dalla flessione) nulla nel mezzo e crescente verso le estremità, bisognerà considerare un'altezza d'anima uguale ad 1 mm. presso i longoni, determinare tanto ε quanto τ su tale altezza d'a-

nima. cercare la risultante $\sqrt{\varepsilon^2 + \tau^2}$ dei due sforzi e determinare la distanza i dei chiodi da ciascuna parte del giunto. con la

$$i = \frac{\pi d^2 K}{2\sqrt{\varepsilon^2 + \tau^2}} = \frac{7,85 d^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + \tau^2}} \left(\begin{array}{l} \text{in} \\ \text{pratica} \end{array} \right) \left. \vphantom{\frac{\pi d^2 K}{2\sqrt{\varepsilon^2 + \tau^2}}} \right\} \begin{array}{l} \text{travi a parete piena con una sola} \\ \text{fila di chiodi (come ordinariamen-} \\ \text{te si fa) da ciascuna parte del giunto.} \end{array}$$

Nelle travi a traliccio dove l'anima di ciascun longone si riguarda come sottoposta a sola tensione, si calcolerà il numero n dei chiodi con la

$$n = \frac{2\varepsilon}{\pi d^2 K} = \frac{\varepsilon}{7,85 d^2} \left(\begin{array}{l} \text{in} \\ \text{pratica} \end{array} \right) \left. \vphantom{\frac{2\varepsilon}{\pi d^2 K}} \right\} \text{travi a traliccio.}$$

Quando il coprigiunto si mette sopra una sola faccia bisogna duplicare il numero dei chiodi risultante da queste regole.

I coprigiunti dei ferri ad angolo sono ferri ad angolo arrotondati nello spigolo esterno; la loro lunghezza dev'essere tale da comprendere almeno tre intervalli di chiodi da ciascuna parte del giunto; cosicchè, se la distanza dei chiodi è di m. 0.125, la lunghezza del coprigiunto dovrà essere di $0,125 \cdot 6 = \text{m. } 0,75$.

I coprigiunti per le lamiere dei lungoni devono anch'essi comprendere tre intervalli di chiodi da ciascuna parte del giunto, e quindi avere la stessa lunghezza come quelli dei ferri d'angolo.

Cio per due ragioni: in 1.º luogo perchè nell'attacco delle sbarre del traliccio all'anima, i chiodi che trovansi presso il bordo interno di essa sono i più efficaci, e gli altri lo sono via via meno, cosicchè dopo i tre primi gli altri sarebbero quasi inerti; in 2.º luogo per non dover dare una altezza troppo grande all'anima.

Per questa condizione delle chiodature, non si potrà sempre adottare nel calcolo della sezione delle sbarre, quel coefficiente di resistenza che si potrebbe adottare se non si dovesse tener conto delle chiodature, perchè le sbarre riuscirebbero molte volte troppo piccole per poterle convenientemente chiodare.

In tali casi, determinata la tensione che ciascuna sbarra deve sopportare, bisognerà dividerla per $3,93 d^2$, per ottenere il numero dei chiodi occorrenti per ciascun attacco, e scegliere poi la sezione della sbarra in modo da potervi applicare quel numero di chiodi seguendo la disposizione indicata.

ATTACCO DELLE SBARRE DEL TRALICCIO.

Le sbarre del traliccio si attaccano generalmente all'anima dei lungoni per mezzo di chiodi, i quali producono attrito in una sola superficie, cosicchè bisogna determinare il numero di chiodi di-

videndo lo sforzo D a cui ciascuna sbarra è soggetta per

$$\frac{\pi d^2}{4} K$$

cioè si avrà:

$$n = \frac{4D}{\pi d^2 K}, \quad \text{in pratica} = \frac{D}{3,93 d^2}$$

Però non è conveniente mettere più di tre chiodi in una sola fila nel senso dell'asse delle sbarre, e perciò si deve studiare la forma delle sbarre in modo da poter distribuire i chiodi in due o più file, così che ciascuna fila non contenga più di tre chiodi.

ATTACCO DELLE TRAVI TRASVERSALI ALLE PRINCIPALI.

Per l'attacco delle travi trasversali colle principali, e delle longitudinali secondarie colle trasversali, non si possono dar regole generali, potendo questi attacchi essere studiati in molti modi diversi. Esamineremo una delle disposizioni più spesso adottate; e quello che diremo per essa servirà di guida per istudiare il grado di stabilità anche per tutte le altre disposizioni.

Contro un montante AB costituito da un ferro ad angolo o da

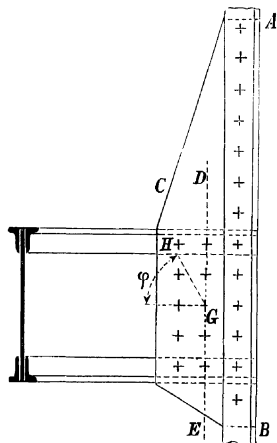


Fig 211.

un ferro a T, è chiodata una squadra di ferro C contro la quale si applica l'anima della trave trasversale. I ferri d'angolo della trave trasversale, posti al di dietro della squadra d'attacco C , corrono sino all'estremità di essa, come risulta dalle linee punteggiate; mentre quelli anteriori terminano il più delle volte all'incontro della squadra. In generale non conviene che le file orizzontali di chiodi che attaccano la trave trasversale alla squadra contengano più di tre chiodi per ciascuna fila, perchè gli ultimi chiodi verso il montante sarebbero pressochè inefficaci.

Supponiamo ora che nella sezione DE della trave trasversale, passante pel centro di gravità G di tutte le sezioni dei chiodi, che attaccano la trave trasversale colla squadra C , abbia luogo un momento di flessione M ed uno sforzo di taglio T . Si misurino le di-

stanze effettive di tutti i chiodi, dell'attacco dal punto G , e si faccia la somma dei loro quadrati, che rappresenteremo con $\sum \delta^2$;

chiamando d il diametro dei chiodi, n il loro numero, $\delta_1 = \overline{GH}$ la maggiore fra le distanze δ , e φ l'angolo che la retta GH fa coll'oriz-

zontale. si dovrà avere:

$$\frac{\pi d^2}{4} K = \sqrt{\left(\frac{\delta_1 M}{\sum \delta^2}\right)^2 + 2 \frac{\delta_1 M T}{\sum \delta^2} \cos \varphi + \left(\frac{T}{n}\right)^2}$$

Questa formola servirà a determinare K ossia lo sforzo massimo dei chiodi, il quale dovrà riescire minore di 5 kg. per mm^2 . Se per ottenere T ed M si sono espresse le forze in kg., ed i bracci di leva in m., si dovranno esprimere in m. anche le distanze δ , ma il diametro dei chiodi si potrà esprimere in mm purchè lo sforzo K si riferisca al mm^2 .

Quando è nullo il momento di flessione M , il che succede quando le travi longitudinali possono liberamente inclinarsi seguendo la inflessione delle travi trasversali, si ha semplicemente:

$$\frac{\pi d^2}{4} K = \frac{T}{n} .$$

Fin qui abbiamo parlato dell'attacco fra la trave trasversale e la squadra C ; quest'ultima però è attaccata al montante con una fila di chiodi, e il montante stesso è attaccato con altri chiodi alla trave principale. Bisogna adunque assicurarsi che queste due ultime chiodature abbiano una resistenza sufficiente.

Riguardo alla prima si avrà la formola:

$$\frac{\pi d^2}{4} K = \sqrt{\left(\frac{\delta_1 M}{\sum \delta^2}\right)^2 + \left(\frac{T}{n}\right)^2} .$$

chiamando δ la distanza di un chiodo qualunque della fila dal mezzo della medesima, δ_1 la massima delle distanze δ , e conservando per le altre lettere il precedente significato. Il valore di K che si ricava da questa formola è sempre minore di quello che si ottiene per la chiodatura fra la trave trasversale e la squadra C , quando le due chiodature hanno lo stesso numero di chiodi come ordinariamente si suol fare; perciò in tale caso è inutile il calcolo dell'ultima formola.

Infine riguardo ai chiodi per l'attacco del montante colla trave principale, è da notare che essi agiscono in modo alquanto diverso dagli altri sin qui considerati, perchè il momento M tende a far ruotare il montante nel piano perpendicolare alla trave principale, intorno alla sua estremità inferiore, producendo nei chiodi una tensione tanto maggiore (oltre quella naturale dovuta al raffreddamento dopo la ribaditura), quanto più i chiodi sono prossimi all'estremità superiore. Invece all'estremità inferiore del montante, questo preme contro la trave principale con forza eguale alla somma delle tensioni naturali di tutti i chiodi e di quelle prodotte dal momento M .

Perciò basterà assicurarsi che l'equazione:

$$\frac{\pi d^2}{4} K = \frac{T}{n} .$$

(n essendo il numero dei chiodi) sia verificata per un valore di K minore di 5 kg per mm.²; indi si determinerà la massima tensione \mathfrak{N} prodotta dal momento M per mezzo della formola:

$$\frac{\pi d^2}{4} \mathfrak{N} = \frac{\delta_1 M}{\sum \delta^2} .$$

intendendosi ora che le distanze δ dei chiodi siano misurate dalla estremità inferiore del montante, e che δ_1 sia la maggiore delle distanze δ . Il valore di \mathfrak{N} dato per questa formola non dovrà eccedere 3, o tutt'al più 4 kg. per mm.². essendo già il chiodo soggetto ad una forte tensione iniziale.

ATTACCO DELLE TRAVI LONGITUDINALI SECONDARIE COLLE TRASVERSALI.

Le formole sopra date, per l'attacco delle travi trasversali colle principali, si possono facilmente applicare all'attacco delle travi longitudinali secondarie colle trasversali.

CAPITOLO XI.

Travi a carico comune.

1. — Quando si hanno due o più travi sovrapposte, e si vuole che resistano simultaneamente ad un carico distribuito sopra di esse con qualsiasi legge, bisogna che le due saette d'inflessione delle travi in ogni punto di sovrapposizione siano fra loro eguali, acciocchè tutte le travi si mantengano fra di loro in contatto in detti punti dopo la deformazione.

Perchè ciò avvenga, bisognerebbe distribuire il carico su ciascuna trave in quel modo speciale per cui le linee elastiche di tutte le travi, considerate isolatamente caricate, prendano un andamento tale, che, dopo la deformazione, le saette dei punti di sovrapposizione risultino fra loro eguali; oppure si dovrà, essendo il carico su ciascuna trave distribuito con una legge qualsivoglia *data*, formare le travi di tali dimensioni e di tale materiale per ciascuna, che nel deformarsi sotto l'azione del carico dato, le loro linee elastiche debbano riescire tali che le saette d'inflessione nei punti di sovrapposizione risultino fra loro eguali.

Queste saette, nel caso che le travi siano sottoposte a carichi distribuiti lungo le loro portate, dovranno risultare eguali senza che le travi superiori esercitino pressioni sulle travi inferiori nei punti di sovrapposizione; giacchè, se queste pressioni si verificassero, le linee elastiche delle travi inferiori non sarebbero più linee dell'ordine dovuto alla legge di carico che si vuol considerare, perchè, oltre a questo carico le travi inferiori sarebbero soggette nei punti d'incrocio a carichi concentrati che sarebbero le pressioni delle travi superiori; e così pure le linee elastiche delle travi superiori non sarebbero più quelle dovute alla loro legge di carico perchè nei punti d'incrocio vi sarebbero anche le reazioni delle travi inferiori. Quando vi fossero le dette pressioni bisognerebbe trovare le linee elastiche delle travi applicando il principio della sovrapposizione degli effetti.

Di più converrà fare in modo che ciascuna trave lavori al carico di sicurezza nella propria sezione pericolosa

Di questa teoria si deve tener conto nei consolidamenti di costruzioni esistenti, come nelle costruzioni nuove.

A) **Sistema di due travi entrambe incastrate in un'estremità e libere all'altra.**

CARICO CONCENTRATO NEL PUNTO DI SOVRAPPOSIZIONE. Siano $A C$,

DC le due travi, E ed E_1 i loro moduli di elasticità, l ed l_1 le

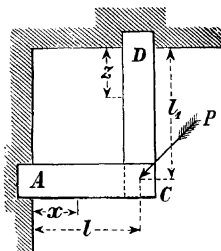


Fig. 212.

loro lunghezze, I ed I_1 i momenti d'inerzia delle sezioni delle medesime, η e ζ le ordinate delle linee elastiche nei punti di ascisse x e z , P il carico dato concentrato in C , e P' , P'' i carichi concentrati in C sull'una e sull'altra trave che fanno loro prendere eguale freccia nel punto C di sovrapposizione. Si dovrà avere:

$$P' + P'' = P$$

ed i valori di P' e P'' saranno dati da:

$$P' = \frac{E I l_1^3 P}{E_1 I_1 l^3 + E I l_1^3},$$

$$P'' = \frac{E_1 I_1 l^3 P}{E_1 I_1 l^3 + E I l_1^3},$$

che sono le due condizioni di eguale abbassamento delle due travi (*). L'equazione della linea elastica sarà:

per la trave $A C$

$$\eta = \frac{1}{6} \frac{P'}{E I} (3 l x^2 - x^3),$$

(*) In questo e in tutti i casi di carico concentrato comune le due condizioni di eguale abbassamento, per le quali cioè si richiede che siano eguali fra loro le frecce d'inflessione delle due travi nel loro punto di sovrapposizione, sono sempre soddisfatte naturalmente, qualunque siano le sezioni delle travi, le loro lunghezze, ed il materiale di cui sono formate, se il carico concentrato $P = P' + P''$ è tutto applicato alla trave superiore. Nel caso che l , l_1 , E , E_1 siano dati, e che P' abbia un valore dato e sia applicato ad una delle travi, e P'' abbia un valore dato e sia applicato all'altra trave, o che i carichi siano uniformemente ripartiti in una data ragione q per m. corr., sopra una trave ed in una data ragione q' per m. corr. sull'altra trave, le due condizioni di eguale abbassamento in generale, non saranno soddisfatte; ma si potranno sempre soddisfare, dando alle sezioni delle due travi grandezze tali che i due momenti d'inerzia I , I_1 risultino di valore conveniente per soddisfarle. In tutti questi casi poi, affinché le due travi lavorino entrambe al massimo sforzo che possono, con sicurezza, sopportare nella rispettiva loro sezione pericolosa, dopo che saranno note le grandezze dei momenti d'inerzia delle sezioni delle due travi, quali si richiedono per soddisfare alle condizioni di eguale abbassamento, si dovrà ancora, senza alterare i momenti d'inerzia delle sezioni, prendere ciascuna di queste sezioni di tale forma che i valori di

per la trave DC

$$z = \frac{1}{6} \frac{P''}{E_1 I_1} (3 l_1 z^2 - z^3);$$

ed i momenti di flessione in una sezione qualunque saranno
per la trave a AC

$$M_x = \frac{E I l_1^3 P}{E_1 I_1 l^3 + E I l_1^3} (l - x),$$

per la trave CD

$$M_z = \frac{E_1 I_1 l^3 P}{E_1 I_1 l^3 + E I l_1^3} (l_1 - z).$$

Chiamando R ed R_1 i carichi di sicurezza, le equazioni di stabilità saranno:

$$R = \frac{E I l_1^3 v P}{E_1 I_1 l^3 + E I l_1^3}, \quad R_1 = \frac{E_1 I_1 l^3 v_1 P}{E_1 I_1 l^3 + E I l_1^3}$$

Quando queste due condizioni di stabilità saranno soddisfatte, ciascuna delle due travi sarà, nella propria sezione pericolosa, soggetta al massimo sforzo che può con sicurezza sopportare.

CARICO UNIFORMEMENTE RIPARTITO. Sia Q il carico totale sulle due

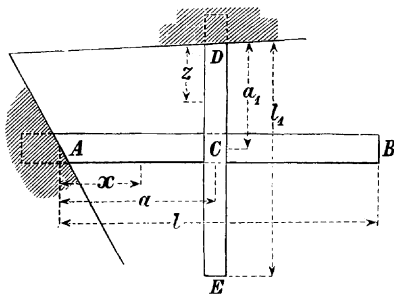


Fig. 214.

v e v_1 (distanze delle fibre più affaticate dai relativi assi neutri) soddisfino alle condizioni di stabilità.

Può anche essere che siano l ed l_1 , od E ed E_1 , o P' e P'' , o q e q' le quantità da determinare in modo soddisfacente alle condizioni di eguale abbassamento e di stabilità. Comunque sia le due condizioni di eguale abbassamento e le due condizioni di stabilità, si potranno sempre soddisfare quando sia in nostro arbitrio assegnare a quattro delle quantità contenute in queste condizioni dei valori che le possano soddisfare.

travi, e q , q' i carichi per unità di lunghezza delle medesime, che fanno loro prendere eguale freccia in C .

Ritenute le precedenti denominazioni, e dette a , a_1 le distanze del punto C di sovrapposizione dagli incastri, sarà:

$$q l + q_1 l_1 = Q,$$

e

$$q = \frac{E I (6 l^2 - 4 a_1 l_1 + a_1^2) a_1^2 Q}{E_1 I_1 l_1 (6 l^2 - 4 a l + a^2) a^2 + E I l (6 l_1^2 - 4 a_1 l_1 + a_1^2) a_1^2},$$

$$q_1 = \frac{E_1 I_1 (6 l^2 - 4 a l + a^2) a^2 Q}{E_1 I_1 l_1 (6 l^2 - 4 a l + a^2) a^2 + E I l (6 l_1^2 - 4 a_1 l_1 + a_1^2) a_1^2}.$$

saranno le due condizioni di eguale abbassamento.

Le equazioni delle linee elastiche saranno:

$$y = \frac{q}{2 E I} \left(\frac{l^2}{2} - \frac{l x}{3} + \frac{x^2}{12} \right) x^2,$$

$$z = \frac{q_1}{2 E_1 I_1} \left(\frac{l_1^2}{2} - \frac{l_1 z}{3} + \frac{z^2}{12} \right) z^2, \quad (*)$$

ed i momenti inflettenti saranno:

$$M_1 = \frac{E I (6 l^2 - 4 a_1 l_1 + a_1^2) a_1^2 Q}{E_1 I_1 l_1 (6 l^2 - 4 a l + a^2) a^2 + E I l (6 l_1^2 - 4 a_1 l_1 + a_1^2) a_1^2} \frac{(l-x)^2}{2},$$

$$M_2 = \frac{E_1 I_1 (6 l^2 - 4 a l + a^2) a^2 Q}{E_1 I_1 l_1 (6 l^2 - 4 a l + a^2) a^2 + E I l (6 l_1^2 - 4 a_1 l_1 + a_1^2) a_1^2} \frac{(l_1-z)^2}{2}.$$

dalle quali ponendo $x=0$, $z=0$ si ottengono i momenti inflettenti M_l , M_{l_1} nelle sezioni d'incastro.

Le equazioni di stabilità sono:

$$M_l \frac{v}{I} = R, \quad M_{l_1} \frac{v_1}{I_1} = R_1.$$

B) Sistema di due travi appoggiate in ambedue le estremità.

CARICO CONCENTRATO NEL PUNTO DI SOVRAPPOSIZIONE.

Ritenendo le denominazioni precedenti, si ha la freccia eguale in C , quando:

(*) Tutte le equazioni delle linee elastiche, date per le travi a carico comune, valgono in ogni caso anche se si trattasse di una sola trave, isolatamente considerata, soggetta allo stesso carico concentrato P' o P'' , od allo stesso carico q o q' per m. corr. di trave, qualunque sia il valore di questi carichi.

$$P' = \frac{E I l (l_1 - a_1)^2 a_1^2 P}{E_1 I_1 l_1 (l - a)^2 a^2 + E I l (l_1 - a_1)^2 a_1^2} ,$$

$$P'' = \frac{E_1 I_1 l_1 (l - a)^2 a^2 P}{E_1 I_1 l_1 (l - a)^2 a^2 + E I l (l_1 - a_1)^2 a_1^2} .$$

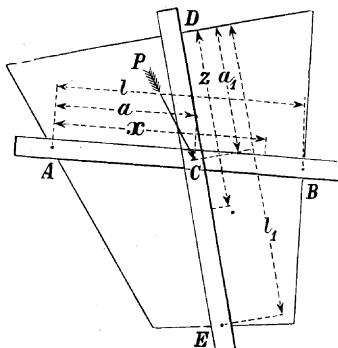


Fig. 215.

Le equazioni delle linee elastiche saranno :

$$\eta = \frac{P' a}{6 E I l} \left[x^3 - 3 l x^2 + (a^2 + 2 l^2) x - a^2 l \right] ,$$

$$\zeta = \frac{P'' a_1}{6 E_1 I_1 l_1} \left[z^3 - 3 l_1 z^2 + (a_1^2 + 2 l_1^2) z - a_1^2 l_1 \right] ;$$

ed i momenti di flessione :

$$M_x = \frac{P' a}{l} (x - l) , \quad M_z = \frac{P'' a_1}{l_1} (z - l_1) .$$

Nelle equazioni delle linee elastiche e dei momenti, x e z prendono soltanto valori compresi fra l ed a , e fra l_1 ed a_1 .

Il momento di flessione massimo ha luogo nel punto C.

Le equazioni di stabilità sono :

$$R = \frac{E (l_1 - a_1)^2 a_1^2 a (a - l) v P}{l [E_1 I_1 l_1 (l - a)^2 a^2 + E I l (l_1 - a_1)^2 a_1^2]} ,$$

$$R_1 = \frac{E (l - a)^2 a^2 a_1 (a_1 - l_1) v_1 P}{l_1 [E_1 I_1 l_1 (l - a)^2 a^2 + E I l (l_1 - a_1)^2 a_1^2]} .$$

CARICO UNIFORMEMENTE RIPARTITO. Ritenute le notazioni prece-

denti saranno:

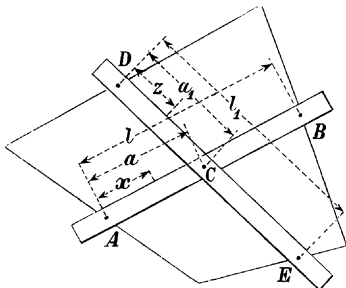


Fig. 216.

$$q = \frac{E I (l_1^3 a_1 - 2 l_1 a_1^3 + a_1^4) Q}{E_1 I_1 l_1 (l^3 a - 2 l a^3 + a^4) + E I l (l_1^3 a_1 - 2 l_1 a_1^3 + a_1^4)},$$

$$q' = \frac{E_1 I_1 (l^3 a - 2 l a^3 + a^4) Q}{E_1 I_1 l_1 (l^3 a - 2 l a^3 + a^4) + E I l (l_1^3 a_1 - 2 l_1 a_1^3 + a_1^4)},$$

le due condizioni di eguale abbassamento.

Le equazioni delle linee elastiche saranno:

$$\eta = \frac{q}{24 E I} (l^3 x - 2 l x^3 + x^4), \quad \zeta = \frac{q_1}{24 E I} (l_1^3 z - 2 l_1 z^3 + z_1^4);$$

ed i momenti di flessione:

$$M_x = \frac{q}{2} (x - l) x, \quad M_z = \frac{q_1}{2} (z - l_1) z.$$

Le equazioni di stabilità sono:

$$R = \frac{E l^2 (l_1^3 a_1 - 2 l_1 a_1^3 + a_1^4) v Q}{8 [E_1 I_1 l_1 (l^3 a - 2 l a^3 + a^4) + E I l (l_1^3 a_1 - 2 l_1 a_1^3 + a_1^4)]},$$

$$R_1 = \frac{E_1 l_1^2 (l^3 a - 2 l a^3 + a^4) v_1 Q}{8 [E_1 I_1 l_1 (l^3 a - 2 l a^3 + a^4) + E I l (l_1^3 a_1 - 2 l_1 a_1^3 + a_1^4)]}.$$

C) Sistema di due travi entrambe incastrate in un'estremità ed appoggiate all'altra.

CARICO CONCENTRATO NEL PUNTO DI SOVRAPPOSIZIONE. Presi A e D (sezioni d'incastro) per origine, le linee elastiche dall'appoggio al punto C d'applicazione del carico, sono:

$$\eta = \frac{c^2 P'}{12 E I l^3} \left[(3 l - c)(x - 3 l) x^2 + l^3 (6 x - 2 c) \right],$$

$$\zeta = \frac{c_1^2 P''}{12 E_1 I_1 l_1^3} \left[(3 l_1 - c_1) (z - 3 l_1) z^2 + l_1^3 (6 z - 2 c_1) \right],$$

e le linee elastiche dal punto C all'incastro sono:

$$\eta_X = \frac{P'}{12 E I l^3} \left[c^2 (3 l - c) (X - 3 l) + (6 c - 2 X) l^3 \right] X^2,$$

$$\zeta_Z = \frac{P''}{12 E_1 I_1} \left[c_1 (3 l_1 - c_1) (Z - 3 l_1) + (6 c_1 - 2 Z) l_1^3 \right] Z^2.$$

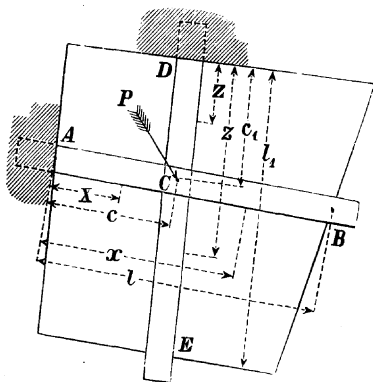


Fig. 217.

I momenti inflettenti sono nei detti tronchi

$$M_x = \frac{c^2 P'}{2 l^3} (3 l - c) (x - l), \quad M_z = \frac{c_1^2 P''}{2 l_1^3} (3 l_1 - c_1) (z - l_1);$$

$$M_X = \frac{P'}{2 l^3} \left[c^2 (3 l - c) (X - l) + 2 l^3 (c - X) \right],$$

$$M_Z = \frac{P''}{2 l_1^3} \left[c_1^2 (3 l_1 - c_1) (Z - l_1) + 2 l_1^3 (c_1 - Z) \right],$$

e si ha il più grande momento inflettente nella sezione d'incastro.

I carichi P' , P'' sono dati da:

$$P' = \frac{E I l^3 [4 c_1 l_1^3 - (3 l_1 - c_1)^2 c_1^2] c_1^2 P}{E_1 I_1 l_1^3 [4 c l^3 - (3 l - c)^2 c^2] c^2 + E I l^3 [4 c_1 l_1^3 - (3 l_1 - c_1)^2 c_1^2] c_1^2},$$

$$P'' = \frac{E_1 I_1 l_1^3 [4 c l^3 - (3 l - c)^2 c^2] c^2 P}{E_1 I_1 l_1^3 [4 c l^3 - (3 l - c)^2 c^2] c^2 + E I l^3 [4 c_1 l_1^3 - (3 l_1 - c_1)^2 c_1^2] c_1^2},$$

che sono le condizioni di eguale abbassamento.

Le condizioni di stabilità sono :

$$R = \frac{P' c [2 l^3 - l c (3 l - c)]}{2 l^3 I} v ,$$

$$R' = \frac{P' c_1 [2 l_1^3 - l_1 c_1 (3 l_1 - c_1)]}{2 l_1^3 I_1} v_1 .$$

CARICO UNIFORMEMENTE RIPARTITO. Saranno :

$$q = \frac{E I (3 l_1^2 - 5 l_1 a_1 + 2 a_1^2) a_1^2 Q}{E_1 I_1 (3 l^2 - 5 l a + 2 a^2) a^2 l_1 + E I (3 l_1^2 - 5 l_1 a_1 + 2 a_1^2) a_1^2 l} ,$$

$$q_1 = \frac{E_1 I_1 (3 l^2 - 5 l a + 2 a^2) a^2 Q}{E_1 I_1 (3 l^2 - 5 l a + 2 a^2) a^2 l_1 + E I (3 l_1^2 - 5 l_1 a_1 + 2 a_1^2) a_1^2 l} ;$$

le due condizioni di eguale abbassamento.

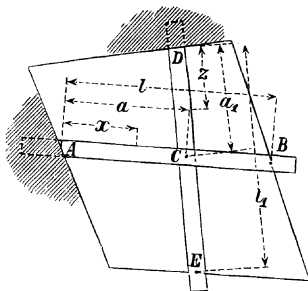


Fig. 218.

Le equazioni delle linee elastiche sono :

$$v = \frac{q}{48 E I} (3 l^2 - 5 l x + 2 x^2) x^2 , \quad z = \frac{q_1}{48 E_1 I_1} (3 l_1^2 - 5 l_1 z + 2 z^2) z^2 ,$$

ed i momenti inflettenti

$$M_x = \frac{q}{8} (l^2 - 5 l x + 4 x^2) , \quad M_z = \frac{q_1}{8} (l_1^2 - 5 l_1 z + 4 z^2) .$$

Le equazioni di stabilità sono :

$$R = \frac{q l^2}{8 I} v , \quad R_1 = \frac{q_1 l_1^2}{8 I_1} v_1 .$$

D) Sistema di due travi l'una e l'altra incastrata in ambedue le estremità.

CARICO CONCENTRATO NEL PUNTO DI SOVRAPPOSIZIONE. Saranno :

$$P' = \frac{E I (l_1 - a_1)^3 a_1^3 l^3 P}{E_1 I_1 (l - a)^3 a^3 l_1^3 + E I (l_1 - a_1)^3 a_1^3 l^3},$$

$$P'' = \frac{E_1 I_1 (l - a)^3 a^3 l_1^3 P}{E_1 I_1 (l - a)^3 a^3 l_1^3 + E I (l_1 - a_1)^3 a_1^3 l^3},$$

le condizioni di eguale abbassamento; e le equazioni delle linee elastiche saranno fra $x = l$ ed $x = a$, e fra $z = l_1$ e $z = a_1$:

$$\eta = \frac{P'}{6 E I l^3} \left[(3 l - 2 a) a^2 x^3 + (3 a - 6 l) a^2 l x^2 + 3 a^2 l^3 x - a^3 l^3 \right],$$

$$\zeta = \frac{P''}{6 E_1 I_1 l_1^3} \left[(3 l_1 - 2 a_1) a_1^2 z^3 + (3 a_1 - 6 l_1) a_1^2 l_1 z^2 + 3 a_1^2 l_1^3 z - a_1^3 l_1^3 \right].$$

I momenti inflettenti saranno:

$$M_x = \frac{P'}{l^3} \left[(3 l - 2 a) a^2 x + (a - 2 l) a^2 l \right],$$

$$M_z = \frac{P''}{l_1^3} \left[(3 l_1 - 2 a_1) a_1^2 z + (a_1 - 2 l_1) a_1^2 l_1 \right],$$

e le equazioni di stabilità:

$$R = -\frac{2 P' a^2 (l - a)^2}{I l^3} v, \quad R_1 = -\frac{2 P'' (l_1 - a_1)^2}{I_1 l_1^3} v_1.$$

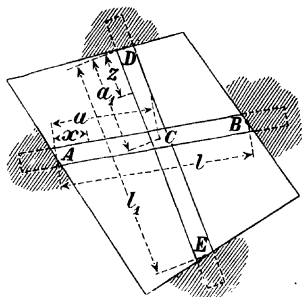


Fig. 219.

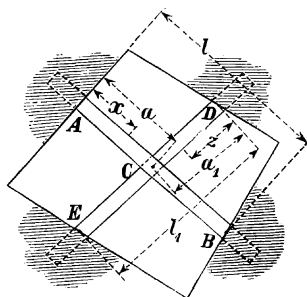


Fig. 220.

CARICO UNIFORMEMENTE RIPARTITO. Saranno:

$$q = \frac{E I a_1^2 (l_1 - a_1)^2 Q}{E_1 I_1 l_1 (l - a)^2 a^2 + E I l (l_1 - a_1)^2 a_1^2},$$

$$q_1 = \frac{E_1 I_1 a^2 (l - a)^2 Q}{E_1 I_1 l_1 (l - a)^2 a^2 + E I l (l_1 - a_1)^2 a_1^2},$$

le condizioni di eguale abbassamento. — Le equazioni delle linee elastiche saranno:

$$\eta = \frac{q}{24 EI} (l^2 - 2 l x + x^2) x^2 ,$$

$$\zeta = \frac{q_1}{24 E_1 I_1} (l_1^2 - 2 l_1 z + z^2) z^2 ,$$

ed i momenti inflettenti:

$$M_x = \frac{q}{12} (l^2 - 6 l x + 6 x^2) , \quad M_z = \frac{q_1}{12} (l_1^2 - 6 l_1 z + 6 z^2) .$$

Le equazioni di stabilità saranno:

$$R = \frac{q l^2}{12 I} v , \quad R' = \frac{q_1 l_1^2}{12 I} .$$

E) Sistema di tre travi eguali e formate dello stesso materiale, appoggiate ai vertici di un esagono regolare, sostenente un peso concentrato P nel loro punto di sovrapposizione nel mezzo.

Se si chiamano P' , P'' , P''' i pesi che, applicati a ciascuna trave, fanno loro prendere freccia eguale, dovrà essere:

$$P' = P'' = P''' = \frac{P}{3} .$$

Sia r il raggio del circolo circoscritto all'esagono, ρ l'ascissa della linea elastica di una qualunque delle travi riferita al centro dell'esagono; l'equazione della linea elastica di una qualunque delle travi sarà:

$$\eta = \frac{P}{36 EI} (2 r^3 - 3 r \rho^2 + \rho^3) ,$$

e la condizione di stabilità per una qualunque delle tre travi sarà:

$$R = \frac{P}{6} \frac{v}{I} r ,$$

essendo I il momento d'inerzia, v la distanza della fibra più affaticata dall'asse neutro ed R il carico di sicurezza per una qualunque delle tre travi eguali.

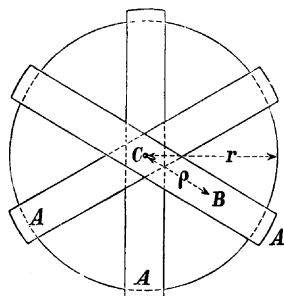


Fig. 221.

CAPITOLO XII.

Stabilità delle costruzioni in terra ed in muratura.

1. — Resistenza dei muri.

A) Formole fondamentali.

Sia $A B C D$ la sezione (verticale) trasversale d'un muro di lunghezza (orizzontale) arbitraria. Consideriamo una sezione qualunque condotta per una retta $G H$ normale all'asse geometrico $E F$ della sezione $A B C D$; e indichiamo con

$s = \overline{G H}$ la sua larghezza

l " " lunghezza (orizzontale)

$\Omega = l s$ " " area

$I = \frac{1}{12} l s^3$ il suo momento d'inerzia rispetto al-

l'asse di flessione condotto pel punto di mezzo J .

Supponiamo che sulla faccia $B C$ del muro siano applicate delle forze distribuite con legge qualunque nel senso verticale ma *uniformemente* nel senso *orizzontale*, per modo che in tutti i punti di una medesima orizzontale l'intensità della forza sia la stessa.

Considerando tutte le forze applicate al muro superiormente alla sezione $G H$ (compreso il peso proprio), si potrà rappresentare con

$l M$ il momento di flessione di tali forze rispetto all'asse di flessione della sezione $G H$, cioè all'orizzontale condotta per J ;

$l N$ la pressione normale rispetto a detta sezione;

$l T$ lo sforzo di taglio,

(M , N , T rappresentano rispettivamente le stesse quantità quando si considera un solo m. di lunghezza del muro).

La pressione per m.² in un punto L è (vedi pag. 99):

$$\varepsilon_x = \frac{l N}{\Omega} + \frac{l M}{I} y = \frac{N}{s} \left(1 + \frac{12 M}{s^2 N} y \right) \quad (1)$$

(siccome qui è scomparso l , il risultato è lo stesso come se si fosse considerato un solo m. di lunghezza del muro).

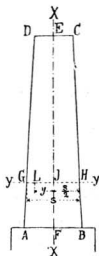


Fig. 222.

Osserviamo che

$$\frac{M}{N} = 3 \quad (\text{II})$$

esprime la distanza del centro di pressione nella sezione GH dall'asse di flessione J , onde

$$\varepsilon_x = \frac{N}{s} \left(1 + \frac{12\beta}{s^2} y \right), \quad (\text{III})$$

per mezzo della quale, noti N e β , si può determinare la distribuzione delle pressioni normali ε_x nella sezione GH . La *massima* e la *minima pressione* si hanno per

$$y = \frac{s}{2} \quad \text{e} \quad y = -\frac{s}{2},$$

cioè sono

$$\varepsilon_x(\text{mass.}) = \frac{N}{s} \left(1 + \frac{6\beta}{s} \right), \quad (\text{IV})$$

$$\varepsilon_x(\text{min.}) = \frac{N}{s} \left(1 - \frac{6\beta}{s} \right).$$

Affinchè in *nessun punto* abbia luogo *tensione* dovrà sempre essere

$$1 - \frac{6\beta}{s} > 0, \quad \text{ossia} \quad \beta < \frac{s}{6}; \quad (\text{V})$$

dunque: *il centro di pressione può oscillare da una parte e dall'altra dell'asse di flessione fra i due punti posti alla distanza $\frac{s}{6}$ dallo stesso;*

sicchè divisa la larghezza della sezione in tre parti uguali, esso dovrà sempre cadere nella parte di mezzo, detta il *terzo medio*.

Quando $\beta = \frac{s}{6}$ si ha

$$\varepsilon_x(\text{min.}) = 0, \quad \varepsilon_x(\text{mass.}) = \frac{2N}{s};$$

cioè la pressione per m.² è nulla su uno dei lati della sezione, e va crescendo uniformemente fino all'altro lato, dove risulta uguale al doppio della *pressione media* che si avrebbe, se la pressione normale N fosse distribuita uniformemente sulla sezione.

Risulta dunque che, tutte le forze applicate alla porzione di muro posta al disopra della sezione GH (compreso il peso proprio) si riducono, per ogni m. di lunghezza del muro, ad una *coppia* di momento M ed a due forze N e T applicate al centro J della sezione, delle quali la prima *normale* alla sezione, e la seconda contenuta in essa e agente nella direzione HG . Ritenendo come positivi i momenti che tendono a produrre una rotazione nel verso

contrario al movimento degli indici d'un orologio, il momento M' di tutte le forze applicate al tronco $CDGH$ del muro, rispetto al punto L posto a sinistra di J nella sezione GH , sarà

$$M' = M - Ny .$$

Se per centro dei momenti si prende il centro di pressione nella sezione GH , si ha

$$y = \frac{M}{N} , \quad \text{onde} \quad M' = 0 ;$$

quindi, quando in seguito, per determinare le dimensioni d'un muro capace di resistere ad una data spinta esterna, ci fisseremo la posizione del *centro di pressione alla base*, otterremo l'equazione di stabilità relativa alla flessione, uguagliando a zero la somma dei momenti, rispetto al detto centro, di tutte le forze agenti sul muro.

La forza tangenziale τ_y per m.² nel punto L , prodotta dallo sforzo di taglio T , sarà [considerando un solo m. di lunghezza di muro (cioè $l=1$) — vedi pag. 99]:

$$\tau_y = \frac{G_z T}{\lambda_s I} = \left(\frac{s^2}{4} - y^2 \right) \frac{6 T}{s^3} , \quad (VI)$$

la quale risulta massima in J (cioè per $y = 0$) e minima in G ed H (cioè per $y = \pm \frac{s}{2}$) :

$$\tau_{0(\text{mass.})} = \frac{3}{2} \frac{T}{s} , \quad \tau_{\pm \frac{s}{2}} (\text{min.}) = 0 .$$

Si noti che, ordinariamente si suppone che lo scorrimento trasversale sulle murature venga impedito non già dalla coesione, ma bensì dall'*attrito*, e ciò perchè le esperienze hanno dimostrato che la resistenza tangenziale delle murature è molto piccola, e molto inferiore agli sforzi che in pratica la mettono in giuoco.

Avuto riguardo dell'imperfezione delle nostre cognizioni intorno al modo di comportarsi delle murature sotto l'azione delle forze esterne, *non ci preoccuperemo* — come fanno la maggior parte degli Autori — della distribuzione della τ_y , e ci contenteremo di verificare se il rapporto fra lo sforzo di taglio, che ha luogo in ciascuna sezione, e la corrispondente pressione normale, risulta minore del coefficiente d'attrito f della muratura su muratura.

Notiamo ancora che se sopra un elemento d'una sezione ha luogo una forza normale ε_x , ed una forza tangenziale τ_y ; e se sopra un altro elemento intersecante il primo, ma normale alla sezione e parallelo all'asse di flessione, ha luogo soltanto la τ_y , necessaria per l'equilibrio del parallelepipedo elementare: esiste un altro elemento, condotto per la linea d'intersezione dei due ortogonali già considerati, per il quale la pressione tangenziale è nulla, e quella

normale ha il valore massimo

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_x^2 + 4 \tau_y^2} .$$

Ammetteremo — con alcuni Scrittori recenti — che la distribuzione delle τ_y nei diversi punti d'una sezione abbia luogo colla stessa legge della ε_x , cioè che in ciascun punto il rapporto $\frac{\tau_y}{\varepsilon_x}$ sia costante; essendo σ l'angolo che la risultante delle forze esterne agenti sopra una sezione, fa con la normale alla stessa, si avrà in tutti i punti

$$\frac{\tau_y}{\varepsilon_x} = \tan \sigma = \frac{T}{N} < f \quad (\text{VII}) ,$$

e quindi la massima pressione per m.²

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_x}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \tan^2 \sigma} \right) = \frac{\varepsilon_x (N + \sqrt{N^2 + 4 T^2})}{2 N} .$$

Sostituendo in questa il valore della ε_x (mass.) si otterrà la pressione massima intorno al punto considerato:

$$\varepsilon_n = \left(1 + \frac{6 S}{s} \right) \frac{N + \sqrt{N^2 + 4 T^2}}{2 s} . \quad (\text{VIII})$$

Notisi però che allorchè si suppone che la distribuzione delle τ_y nella sezione sia data dalla (VI), si ha $\tau_{\pm \frac{s}{2}} = 0$, ossia la τ_y è nulla nei punti ove è massima la ε_x ; e allora si ha semplicemente

$$\varepsilon_n = \frac{N}{s} \left(1 + \frac{6 S}{s} \right) . \quad (\text{IX})$$

Conclusione. Ecco dunque come si dovrà procedere per il calcolo delle murature:

Determinate N , T ed M per una data sezione, e verificato che

$$\frac{M}{N} = S < \frac{s}{6} , \quad \frac{T}{N} < f$$

si calcolerà la pressione massima per m.² nella sezione colla

$$\varepsilon_{x(\text{mass})} = \frac{N}{s} \left(1 + \frac{6 S}{s} \right)$$

e dovrà risultare, essendo K il coefficiente di resistenza alla compressione,

$$\frac{N}{s} \left(1 + \frac{6 S}{s} \right) < K ,$$

oppure

$$\frac{N + \sqrt{N^2 + 4 T^2}}{2s} \left(1 + \frac{6 \bar{s}}{s} \right) < K$$

a seconda dell'ipotesi che si vuol adottare riguardo alla distribuzione delle τ_y .

Noi adopereremo la prima, perchè non solo è più semplice, ma è *rigorosamente* esatta, quando la distribuzione delle τ_y nelle murature, ha luogo con la stessa legge come nei solidi elastici.

B) Muri con speroni.

Rappresenti $A B C D$ una sezione orizzontale in un muro di sostegno munito di contrafforti o speroni. Considerando il tratto di muro fra i due piani $M N$, $M_1 N_1$ condotti nel mezzo degli intervalli fra tre speroni consecutivi, ed essendo G il baricentro della sezione, si avrà:

$$\Omega = l s - (l - l) \bar{s} \quad , \quad v_1 = \frac{l s^2 - (l - l) \bar{s}}{2 \Omega} \quad ,$$

$$v = s - v_1 \quad ;$$

$$I = \frac{1}{3} \left[l s^3 - (l - l) \bar{s}^3 \right] - \Omega v_1^2 \quad .$$

Chiamiamo M , N e T il momento flettente, la pressione normale e lo sforzo di taglio sulla parte compresa fra i piani $M N$, $M_1 N_1$.

Se M tende a far ruotare il muro attorno allo spigolo $E F$ degli speroni, si avrà

$$\varepsilon_x (\text{mass.}) = \frac{N}{\Omega} + \frac{M v_1}{I} \quad ,$$

$$\varepsilon_x (\text{min.}) = \frac{N}{\Omega} - \frac{M v}{I}$$

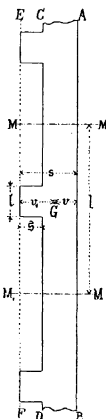


Fig. 223.

avendo la 1^a luogo su $E F$ e la 2^a su $A B$. Affinchè in tutti i punti della sezione vi sia pressione, dev'essere

$$\frac{N}{\Omega} - \frac{M v}{I} > 0 \quad , \quad \text{ed al limite} \quad \frac{N}{\Omega} - \frac{M v}{I} = 0 \quad ,$$

onde la pressione massima risulta

$$\frac{N}{\Omega} \left(1 + \frac{v_1}{v} \right) = \frac{N s}{\Omega v} \quad \text{e perciò} \quad K = \frac{N s}{\Omega v} = \frac{M s}{I} \quad (X)$$

essendo K il coefficiente di resistenza alla pressione.

Se invece M tende a far ruotare il muro attorno allo spigolo

AB si avrà

$$\varepsilon_r(\text{mass.}) = \frac{N}{\Omega} \div \frac{Mv}{I}, \quad \varepsilon_r(\text{min.}) = \frac{N}{\Omega} - \frac{Mv_1}{I},$$

avendo, la 1.^a luogo su AB e la 2.^a su EF .

Affinchè in tutti i punti della sezione vi sia pressione, dev'essere

$$\frac{N}{\Omega} - \frac{Mv_1}{I} > 0, \quad \text{ed al limite} \quad \frac{N}{\Omega} - \frac{Mv_1}{I} = 0;$$

epperò la pressione massima risulta

$$\frac{N}{\Omega} \left(1 + \frac{v}{v_1}\right) = \frac{Ns}{\Omega v_1} \quad \text{e perciò} \quad K = \frac{Ns}{\Omega v_1} = \frac{Ms}{I}. \quad (\text{XI})$$

In tutti questi casi bisognerà ancora assicurarsi che

$$\frac{T}{N} < f.$$

A parità di dimensioni i muri con speroni all'esterno sono più resistenti di quelli con speroni all'interno.

C) **Valori da adottarsi per il carico di sicurezza K .**

Da esperienze del prof. Curioni risulta che per *pilastrini* di tre o di quattro corsi di *mattoni* il carico di rottura varia da kg. 84 a kg. 139 per cm.^2 ; onde volendo adottare per K circa $\frac{1}{10}$ di questi valori si assumerà $K = \text{kg. } 9 \div \text{kg. } 14$ per cm.^2 .

Si potrà tuttavia prendere K anche maggiore di kg. 14 per cm.^2 , allorchè le murature si facciano con malta idraulica e mattoni di ottima qualità. Per es., al ponte sull'Oglio (linea diretta Treviglio Chiari-Rovato) si impiegarono mattoni sceltissimi della fornace Murginotti di Bergamo, i quali resisterono nelle esperienze a più di kg. 300 per cm.^2 , e la malta di calce idraulica Palazzolo e sabbia venne eseguita con ogni cura; onde nei calcoli di resistenza relativi alla grande arcata di m. 42 di luce (vedi pag. 430) si potè ammettere uno sforzo di oltre kg. 18 per cm.^2 ; e nell'arditissimo edificio costruito in Torino dall'Arch. Alessandro Antonelli — allo scopo di farne un tempio ed una scuola israelita, — i pilastrini di mattoni sopportano fin dal 1869, cioè da 35 anni, una pressione maggiore di kg. 40 per cm.^2 .

In molte altre costruzioni, specialmente antiche, la pressione raggiunge un valore assai alto; tuttavia nelle circostanze ordinarie non converrà oltrepassare i limiti seguenti:

TABELLA LVIII.

QUALITÀ DELLE MURATURE	Carico di sicurezza in kg. per cm. ²
	K kg.
Murature mattoni ordinari - malta ordinaria	7
" " scelti - " idraulica molto buona	22
" pietrame - " comune	9
" " - " idraulica buona . . .	14
" di pietra da taglio (*)	40

D) Valori da adottarsi per il coefficiente d'attrito f allo scorrimento della muratura su muratura o su terra.

TABELLA LIX.

QUALITÀ DEI MATERIALI	Coeff. di attrito
	f
Muratura sopra muratura	0,76
" " argilla secca	0,50
" " " umida coperta di sabbia	0,40
" " " " e rammolita	0,30
" " terra ordinaria	0,57

(*) Nell'arcata [granito del Malanaggio (Pinerolo)] del ponte Mosca sulla Dora a Torino, la pressione oltrepassa kg. 42 per cm.². — I quattro pilastri (gneis o sarizzo) sorreggenti la guglia centrale del Duomo di Milano sopportano una pressione maggiore di kg. 42 per cm.².

2. — Spinta delle terre.

A) Espressione della spinta.

Ci atteniamo ai risultati dalla teoria del prisma di massima spinta, seguendo l'antica ipotesi di Coulomb e di Navier, ma faremo l'ipotesi che la direzione della spinta formi con la normale alla parete un angolo γ — che per ora lasceremo indeterminato e che determineremo alla seguente lett. B) — il quale però fin d'ora lo supporremo minore dell'angolo d'attrito tra la terra e la parete.

Sia: AB la faccia interna del muro di sostegno d'un terrapieno;
 $ACDEFF_1$ il profilo superiore del terreno;

$\alpha = \widehat{HBL}$ l'angolo di *natural declivio* delle terre costituenti il terrapieno, onde sarà:

$f = \text{tang } \alpha$ il loro coefficiente d'attrito;

$\beta = \widehat{ABH}$ l'angolo che la parete interna del muro fa col l'orizzontale condotta pel piede B dalla parte del terrapieno;

γ l'angolo che la direzione della spinta

S fa colla normale alla parete;

$h = \overline{AI}$ l'altezza verticale del muro di sostegno;

Π il peso di un m.^3 di terra.

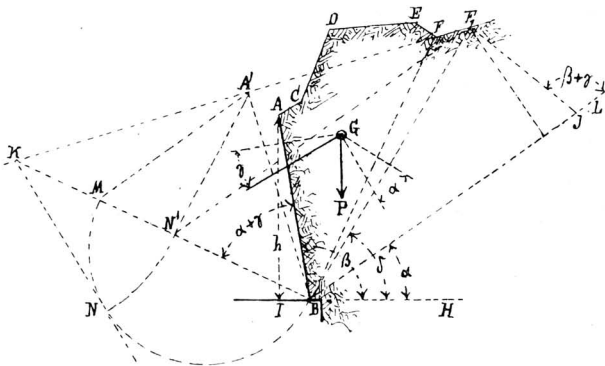


Fig. 224.

Si prescinde totalmente dalla *coesione* delle terre, cioè si suppone già distrutta la coesione, cosicchè resti solamente la resistenza d'attrito ad impedire lo scoscendimento del terreno, o meglio a moderare la pressione che il terreno esercita contro il muro di sostegno.

Si considera un m. lineare del muro e del terrapieno, in modo che i loro volumi restino espressi dagli stessi numeri che danno le aree corrispondenti nella sezione trasversale.

Sia $B F_1$ un piano pel quale il rapporto fra la pressione tangenziale e quella normale sia uguale a $\tan \alpha = f$; indicando con:

δ l'angolo $\widehat{F_1 B H}$; P il peso del prisma di terra $A B F_1 F E$: la spinta S contro la parete $A B$ è data dalla

$$S = P \frac{\text{sen}(\delta - \alpha)}{\text{sen}(\alpha + \beta + \gamma - \delta)} :$$

ora si dimostra facilmente che il valore di δ è quello che rende massimo il valore di S , tenendo presente che anche P varia col variare di δ ; e per conseguenza di ciò dimostrasi pure che se si

conduce da F_1 la retta $F_1 J$ tale che $\widehat{F_1 J L} = \beta + \gamma$, le due aree

$$B F_1 J, \quad A B F_1 F E D C$$

sono uguali; inoltre ne risulta che la *massima spinta* è data dalla

$$S = \frac{\Pi}{2} \frac{F_1 J^2}{F_1 J} \text{sen}(\beta + \gamma),$$

nella quale è ignoto $\overline{F_1 J}$; ma la proprietà dell'eguaglianza delle aree suddette conduce ad eleganti costruzioni grafiche per determinare il punto F_1 e quindi $\overline{F_1 J}$, fra le quali indichiamo la seguente comoda per l'uso pratico:

quando il profilo del terreno è poligonale (come ordinariamente succede) e si presuma che F_1 debba trovarsi sopra un lato, per es., $F F_1$, si prolunghi questo, e si conduca $B A'$ in modo che l'area del triangolo $A' B F$ risulti uguale all'area del poligono $A B F E D C$:

si conduca inoltre $B K$ tale che $\widehat{A B K} = \alpha + \gamma$, e $A' M \parallel B L$; si avrà

$$S = \frac{\Pi}{2} \left(\overline{B K} - \sqrt{\overline{B K} \cdot \overline{M K}} \right) \text{sen}(\beta + \gamma)$$

in cui tutte le quantità sono note.

Si osservi ancora che, se sulla $B M$ come diametro si descrive una semicirconferenza, e da K si tira la tangente $K N$, si ha

$$\overline{K N} = \sqrt{\overline{B K} \cdot \overline{M K}}.$$

onde descrivendo l'arco $N N'$ con centro in K , risulterà

$$\overline{B N'} = \overline{B K} - \sqrt{\overline{B K} \cdot \overline{M K}} = \overline{F_1 J},$$

e perciò tirando da N' la parallela alla $B L$, essa taglierà il profilo del terreno nel punto cercato F_1 , il quale determina il piano

BF_1 corrispondente al prisma di massima spinta. Per verifica si condurrà da B la parallela a $N'A'$, la quale dovrà passare per F_1 .

L'espressione della spinta può ora scriversi

$$S = \frac{\Pi}{2} \overline{BN'}^2 \text{sen}(\beta + \gamma)$$

e si può calcolare, se è noto γ .

Casi particolari più comuni nella pratica.

1.º Il terreno è limitato superiormente da un sol piano. Si prolunghi CA , e si tirino BK , AM come è indicato nella fig. 225 e si avranno così i seguenti \overline{BK} e \overline{MK} che entrano nell'espressione della spinta.

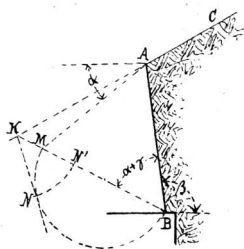


Fig. 225.

2.º Il terreno è limitato superiormente da due piani.

Prolungato DC , si tiri $AA' \parallel BC$, con che si otterrà il triangolo $BA'C$ equivalente al triangolo BAC ; indi si tirino BK e $A'M$ come è indicato nella fig. 226 e si otterranno così \overline{BK} e \overline{KM} che servono a calcolare la spinta.

B) Valore dell'angolo γ .

L'angolo γ non può mai evidentemente essere maggiore dell'angolo d'attrito fra la terra e la parete; cosicchè se la parete fosse

perfettamente liscia e perciò senza attrito, γ dovrebbe essere nullo, onde la spinta S le sarebbe normale.

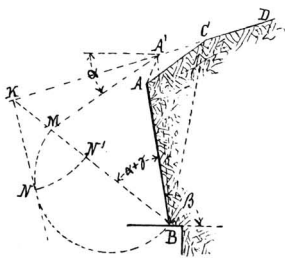


Fig. 226.

Ma con pareti scabrose vi sono dei casi nei quali si può facilmente dimostrare che la direzione di S è normale alla parete: ciò accade, per es. quando la parete è verticale e la superficie superiore del terreno è orizzontale: dunque non è razionale fissare per tutti i casi $\gamma = \text{costante}$, come fanno parecchi Autori Il Sig. J. Weyrauch ha

esposto (1878) una sua teoria, che consiste nell'adottare l'espressione di S data alla lett. A), aggiungendovi poi la condizione che la direzione di S incontri la parete nel punto posto ad $\frac{1}{3}$ dell'altezza h della stessa partendo dal piede B ; e che la *risultante delle pressioni oblique* sul piano di distacco si trovi ad $\frac{1}{3}$ dell'altezza del

Escludendo le terre argillose ridotte fangose dall'acqua, per le altre terre α varia dunque da 31° a 55° ; in generale però in pratica non converrà contare sopra un angolo d'attrito maggiore di 45° .

D) Casi particolari più comuni nella pratica, allorché il terrapieno è terminato superiormente da un solo piano.

Le inclinazioni sulla verticale più in uso della parete interna dei muri di sostegno sono le seguenti

del 25 per $\frac{1}{10}$ verso l'interno del terrapieno :

del 10 per $\frac{1}{10}$ verso l'interno del terrapieno :

a parete verticale ;

del 20 per $\frac{1}{10}$ verso l'esterno del terrapieno.

Per i casi ordinari della pratica si può far dunque uso della tabella seguente a pag. 358-359.

E) Punto d'applicazione della spinta S sulla parete.

Allorché la superficie superiore del terreno è un piano (fig. 225), la risultante S delle *pressioni elementari* sulla parete è ad $\frac{1}{3}$ dell'altezza della stessa, partendo dalla base.

Quando la superficie superiore del terreno è costituita da due piani (fig. 226), per determinare il punto d'applicazione di S si deve introdurre un'ipotesi riguardo al modo di distribuzione delle pressioni elementari: siccome però immaginando sostituito al profilo superiore del terreno una retta, che dia approssimativamente lo stesso peso del prisma di massima spinta si altererebbero di poco le condizioni del terrapieno riguardo ad S , ed allora il suo punto di applicazione sarebbe all'altezza di $\frac{1}{3}$ della parete partendo dalla

base, si può ammettere che in tutti i casi (quando sul terrapieno non vi siano *sovraccarichi*), il punto d'applicazione di S cada in detto punto, come se il profilo superiore fosse una retta.

Poncelet e Culmann avendo considerato diversi casi particolari, nei quali il terrapieno era terminato superiormente da due piani, facendo un'ipotesi sulla distribuzione delle pressioni elementari, hanno trovato rispettivamente che il punto d'applicazione di S può salire sino a $0,35 h$, e sino a $0,375 h$; e questi risultati poco maggiori di $\frac{h}{3}$, potranno essere adottati per ottenere una maggiore stabilità nei muri di sostegno.

F) Altre formole per determinare la spinta delle terre.

I risultati che si ottengono colla teoria del prisma di massima spinta sono sufficientemente approssimati; tuttavia è importante conoscere anche altre formole basate su principi rigorosi, i quali in avvenire condurranno alla soluzione esatta del problema.

a) Accenniamo a quella del celebre matematico *Boussinesq* (*)

(*) C. f. r. *Annales des Ponts et Chaussées*, 1883-84. — *Académie des Sciences*, 1884.

il quale giunse a stabilire la *perfetta concordanza* delle teorie dell'equilibrio dei massicci polverulenti coi fatti di esperienza constatati dal Darwin e dal Gobin, e spiegò certe osservazioni fatte precedentemente dall'Audé, dall'Ardan, ecc.; per cui bisogna ritenere la teoria del Boussinesq sufficientemente dimostrata dall'esperienza e quindi raccomandabile d'esser applicata in pratica. La sola ipotesi restrittiva ammessa è che si tratti di terre assolutamente *prive di coesione*, ciò che non solo è accettabile, ma è prudentissimo accettare, perchè col tempo la coesione della terra può diminuire senza poter scoprire di quanto.

Conservando sempre gli stessi simboli, dati precedentemente in questo N. 2, la spinta S esercitata da un massiccio di terra terminato superiormente da un piano contro la parete interna d'un muro di sostegno — supposto piano — è data dalla

$$S = C \Pi \frac{h^2}{2}$$

essendo C un coefficiente numerico che il Boussinesq esprime in funzione:

- dell'angolo d'attrito α della terra contro terra,
- dell'angolo d'attrito α_1 della terra contro la muratura,
- della inclinazione ω della superficie del terreno coll'orizzontale, e
- della inclinazione i della scarpa interna del muro colla verticale.

Un primo risultato importantissimo e rigoroso di questa teoria è che il punto d'applicazione di S è sempre al terzo inferiore di h .

L'angolo γ risulta una funzione di α , α_1 , ω ed i .

Un fatto sperimentale costantemente osservato è che sensibilmente $\alpha = \alpha_1$.

Ponendo ciò nella formola che dà γ , ne consegue che tale angolo γ risulta quasi sempre uguale a α , o se ne discosta di pochissimo (*).

Il Sig. Flamant fece vedere come C si possa mettere sotto la forma

$$C = z \frac{1}{2 \cos \alpha \cos^2 i},$$

dove z è un numero compreso fra due altri z_1 e z_2 , tal che:

$$z_1 = \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\cos \Psi \cos (\alpha + \varphi) \cos (\omega - i) \cos \alpha}{\cos (\alpha - \varphi) \cos (\omega + \Psi)},$$

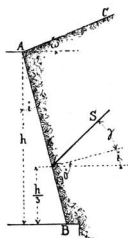


Fig. 227.

(*) C. f. r. Memoria del Sig. FLAMANT negli "Annales des Ponts et Chaussées".

TABELLA LXI (*)

Inclinaz. della scarpa superio- re del terreno coll' orizz.	VALORI DELLA SPINTA S SULLA PARETE				
	colla scarpa di $\frac{1}{4}$, inclinata dalla parte del terrapieno rispetto alla verticale condotta pel piede	colla scarpa di $\frac{15}{100}$, inclinata dalla parte del terrapieno rispetto alla verticale condotta pel piede	colla scarpa di $\frac{1}{10}$, inclinata dalla parte del terrapieno rispetto alla verticale condotta pel piede	verticale	colla scarpa di $\frac{1}{5}$, inclinata dalla parte opposta al terrapieno rispetto alla verticale condotta pel piede
ω	Fig. 235.	Fig. 235.	Fig. 235.	Fig. 233.	Fig. 225.

Angolo d'attrito delle terre $\alpha = 45^\circ$; $f = \tan \alpha = 1$

0°	0,0482 Πh^2	0,0616 Πh^2	0,0697 Πh^2	0,0858 Πh^2	0,1240 Πh^2
5°	0,0496 Πh^2	0,0630 Πh^2	0,0721 Πh^2	0,0893 Πh^2	0,1295 Πh^2
10°	0,0514 Πh^2	0,0663 Πh^2	0,0751 Πh^2	0,0921 Πh^2	0,1363 Πh^2
15°	0,0541 Πh^2	0,0680 Πh^2	0,0784 Πh^2	0,0967 Πh^2	0,1425 Πh^2
20°	0,0565 Πh^2	0,0715 Πh^2	0,0819 Πh^2	0,1029 Πh^2	0,1509 Πh^2
25°	0,0594 Πh^2	0,0760 Πh^2	0,0870 Πh^2	0,1080 Πh^2	0,1613 Πh^2
26° 34'	0,0600 Πh^2	0,0776 Πh^2	0,0880 Πh^2	0,1100 Πh^2	0,1671 Πh^2
30°	0,0635 Πh^2	0,0810 Πh^2	0,0941 Πh^2	0,1170 Πh^2	0,1763 Πh^2
33° 41'	0,0675 Πh^2	0,0879 Πh^2	0,0995 Πh^2	0,1263 Πh^2	0,1890 Πh^2
35°	0,0704 Πh^2	0,0905 Πh^2	0,1041 Πh^2	0,1301 Πh^2	0,1953 Πh^2
40°	0,0830 Πh^2	0,1067 Πh^2	0,1227 Πh^2	0,1531 Πh^2	0,2288 Πh^2
45°	0,1462 Πh^2	0,1804 Πh^2	0,2044 Πh^2	0,2500 Πh^2	0,3686 Πh^2

Angolo d'attrito delle terre $\alpha = 40^\circ$; $f = \tan \alpha = 0,839$

0°	0,0676 Π h ²	0,0828 Π h ²	0,0909 Π h ²	0,1087 Π h ²	0,1478 Π h ²
5°	0,0700 Π h ²	0,0870 Π h ²	0,0943 Π h ²	0,1134 Π h ²	0,1552 Π h ²
10°	0,0735 Π h ²	0,0897 Π h ²	0,0977 Π h ²	0,1193 Π h ²	0,1631 Π h ²
15°	0,0763 Π h ²	0,0934 Π h ²	0,1038 Π h ²	0,1250 Π h ²	0,1715 Π h ²
20°	0,0809 Π h ²	0,0998 Π h ²	0,1110 Π h ²	0,1327 Π h ²	0,1857 Π h ²
25°	0,0878 Π h ²	0,1071 Π h ²	0,1192 Π h ²	0,1428 Π h ²	0,2018 Π h ²
26° 34'	0,0896 Π h ²	0,1098 Π h ²	0,1213 Π h ²	0,1475 Π h ²	0,2101 Π h ²
30°	0,0970 Π h ²	0,1187 Π h ²	0,1309 Π h ²	0,1583 Π h ²	0,2223 Π h ²
33° 41'	0,1061 Π h ²	0,1317 Π h ²	0,1441 Π h ²	0,1754 Π h ²	0,2480 Π h ²
35°	0,1136 Π h ²	0,1372 Π h ²	0,1515 Π h ²	0,1828 Π h ²	0,2601 Π h ²
40°	0,1895 Π h ²	0,2458 Π h ²	0,2494 Π h ²	0,2957 Π h ²	0,4087 Π h ²

Angolo d'attrito delle terre

$\alpha = 35^\circ ; f = \text{tang } \alpha = 0,700$

0°	0,0924 Π h ²	0,1090 Π h ²	0,1175 Π h ²	0,1355 Π h ²	0,1751 Π h ²
5°	0,0959 Π h ²	0,1128 Π h ²	0,1222 Π h ²	0,1426 Π h ²	0,1850 Π h ²
10°	0,1013 Π h ²	0,1187 Π h ²	0,1276 Π h ²	0,1498 Π h ²	0,1955 Π h ²
15°	0,1069 Π h ²	0,1249 Π h ²	0,1355 Π h ²	0,1576 Π h ²	0,2100 Π h ²
20°	0,1149 Π h ²	0,1360 Π h ²	0,1488 Π h ²	0,1729 Π h ²	0,2274 Π h ²
25°	0,1254 Π h ²	0,1492 Π h ²	0,1614 Π h ²	0,1883 Π h ²	0,2531 Π h ²
26° 34'	0,1315 Π h ²	0,1549 Π h ²	0,1672 Π h ²	0,1959 Π h ²	0,2648 Π h ²
30°	0,1454 Π h ²	0,1727 Π h ²	0,1881 Π h ²	0,2176 Π h ²	0,2889 Π h ²
33° 41'	0,1806 Π h ²	0,2127 Π h ²	0,2278 Π h ²	0,2643 Π h ²	0,3536 Π h ²
35°	0,2356 Π h ²	0,2715 Π h ²	0,2919 Π h ²	0,3345 Π h ²	0,4379 Π h ²

Angolo d'attrito delle terre

$\alpha = 30^\circ ; f = \text{tang } \alpha = 0,577$

0°	0,1224 Π h ²	0,1384 Π h ²	0,1458 Π h ²	0,1667 Π h ²	0,2074 Π h ²
5°	0,1275 Π h ²	0,1457 Π h ²	0,1522 Π h ²	0,1743 Π h ²	0,2204 Π h ²
10°	0,1371 Π h ²	0,1551 Π h ²	0,1614 Π h ²	0,1959 Π h ²	0,2335 Π h ²
15°	0,1454 Π h ²	0,1650 Π h ²	0,1764 Π h ²	0,1982 Π h ²	0,2541 Π h ²
20°	0,1601 Π h ²	0,1812 Π h ²	0,1926 Π h ²	0,2162 Π h ²	0,2830 Π h ²
25°	0,1834 Π h ²	0,2064 Π h ²	0,2161 Π h ²	0,2479 Π h ²	0,3077 Π h ²
26° 34'	0,1914 Π h ²	0,2217 Π h ²	0,2353 Π h ²	0,2679 Π h ²	0,3379 Π h ²
30°	0,2801 Π h ²	0,3157 Π h ²	0,3345 Π h ²	0,3750 Π h ²	0,4757 Π h ²

(*) I due angoli $\omega = 26^\circ 34'$ e $\omega = 33^\circ 41'$ l d'altezza e di 3 di base per 2 d'altezza.

corrispondono rispettivamente alle scarpe di 2 di base per

essendo Ψ e φ due angoli ausiliari definiti dalle:

$$\operatorname{sen}(\omega + 2\Psi) = \frac{\operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \Psi - i,$$

e z_2 è determinato nello stesso modo di z_1 , tranne che si deve scrivere in luogo di α l'angolo α' alquanto minore che soddisfa all'equazione:

$$\operatorname{sen} \alpha' = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \varphi},$$

dove α' designa alla sua volta l'angolo d'attrito dato.

Secondo il Boussinesq, il valore più probabile di z è

$$z = z_1 + \frac{9}{22}(z_2 - z_1).$$

Il Sig. Flamant, partendo dalle formole del Boussinesq, ha calcolato i valori di C e di γ corrispondenti ad un numero assai esteso di valori di ω ed i , ed ha raccolto tutti i risultati in apposite tabelle che rendono molto comoda l'applicazione della teoria del Boussinesq ed alle quali rimando il Lettore per non aumentare eccessivamente la mole del presente Manuale (*).

Invece estraggo da tali tabelle tutti i valori di C corrispondenti a valori di ω uguali a quelli di α ; cioè i valori di C che corrispondono ai capi di muro sorreggenti le terre a natural declivio, e li raccolgo nella seguente

(*) Vedere pure RÉSAL - *Ponts en maçonnerie* - Vol. I, pag. 380 e seg.

TABELLA LXII.

$\omega = \alpha =$	21°	24°	27°	30°	33°	36°	39°	42°	45°
$i = 0^\circ$									
$C =$	0,934	0,914	0,891	0,866	0,839	0,809	0,777	0,743	0,707
$\gamma =$	21°	24°	27°	30°	33°	36°	39°	42°	45°
$i = 5^\circ$									
$C =$	1,034	1,028	1,015	1,003	0,988	0,974	0,953	0,932	0,904
$\gamma =$	20°4'	23°40'	26°35'	29°35'	32°30'	35°25'	38°25'	41°20'	44°15'
$i = 10^\circ$									
$C =$	1,145	1,153	1,158	1,164	1,160	1,159	1,151	1,146	1,134
$\gamma =$	19°50'	22°40'	25°30'	28°20'	31°10'	34°0'	36°50'	39°35'	42°25'
$i = 15^\circ$									
$C =$	1,271	1,297	1,318	1,336	1,352	1,367	1,380	1,389	1,397
$\gamma =$	18°30'	21°10'	23°55'	26°35'	29°15'	31°55'	34°35'	37°15'	39°55'
$i = 20^\circ$									
$C =$	1,383	1,425	1,464	1,502	1,537	1,572	1,607	1,638	1,664
$\gamma =$	16°55'	19°20'	21°50'	24°20'	26°55'	29°25'	31°55'	34°25'	36°55'
$i = 25^\circ$									
$C =$	1,581	1,644	1,708	1,766	1,826	1,886	1,945	2,003	2,061
$\gamma =$	14°55'	14°15'	19°30'	21°50'	24°10'	26°50'	28°55'	31°15'	33°35'

Dalla teoria esposta e dalla tabella precedente il Chiar.mo Prof. Ing. G. G. Ferria (*) trae la conseguenza interessante che vi è una coppia di valori di i e di C che rimangono pressochè gli stessi per tutti i casi di terreno a natural declivio: e tale coppia è prossimamente $C = 1,15$ e $i = 10^\circ$. Di più per $i = 10^\circ$ i valori di γ sono molto prossimi a quelli di α , per cui si può ritenere che per

(*) C. f. r. Nota sul Periodico " *L'ingegneria civile e le arti industriali* ", Vol. XXIV (1898) " *Una buona massima di alcuni pratici nel costruire i muri di sostegno* ».

$i = 10^\circ$ sia $\gamma = \alpha$. Da ciò risulta che l'uso di dare ai muri di sostegno una scarpa interna di $i = 10^\circ$, semplifica molto il problema allorchè si tratta di terreno a natural declivio ($\omega = \alpha$), e rende facile calcolare il muro in modo che non possa cadere, anche se il declivio naturale venisse col tempo a cambiare. Tale uso pertanto, soddisfa alla migliore delle soluzioni teoriche.

b) Passiamo a vedere un'altra nuova soluzione del problema.

Come hanno dimostrato *Rankine, Mohr, Lewy* ed il nostro compianto *Crotti*, se si ha un masso di terra privo di coesione, terminato superiormente da un piano e illimitato in tutte le direzioni nel piano e al di sotto di esso, si possono determinare in modo rigoroso le sue *condizioni di equilibrio limite*, ed ottenere quindi la grandezza e la direzione della pressione sopra un elemento piano posto ad una profondità qualunque, e comunque inclinato.

Per applicare tali risultati ai casi pratici si suppone che, se tolta una parte del terrapieno, vi si sostituisce un muro per impedire lo scoscendimento dell'altra parte, la pressione sopra ogni *elemento* del muro abbia la stessa direzione e la stessa intensità come sull'elemento corrispondente del terrapieno levato.

Tale ipotesi non è evidentemente esatta, in primo luogo, perchè nel terrapieno indefinito la direzione della pressione sopra un elemento, può trovarsi inclinata colla normale all'elemento stesso, fino all'angolo α d'attrito delle terre, mentre contro un elemento della parete, l'angolo tra la direzione della pressione e la normale non può mai sorpassare l'angolo d'attrito fra le terre e la parete; in secondo luogo, perchè la pressione che nel terrapieno indefinito ha luogo sul piano al quale si vuol sostituire la parete di un muro di sostegno, può provenire dalla terra formante la parte del terrapieno che vien tolta e non da quella che vien conservata: per es., se nel terrapieno indefinito, supposto terminato superiormente da un piano orizzontale, si considera un piano, inclinato all'orizzonte coll'angolo di natural declivio, è evidente che su questo piano deve aversi una pressione finita, la quale è dovuta alla parte del terrapieno posta al disopra di esso; quindi le formole esprimeranno tale pressione; mentre tolta la parte di terrapieno al di sopra del piano considerato, la pressione prodotta dall'altra parte sul piano considerato dovrebbe essere nulla.

Tuttavia riflettendo che le pareti interne dei muri di sostegno sono sempre scabrose e presentano un attrito poco minore di quello delle terre, ed inoltre che le pareti interne dei muri di sostegno si scostano sempre pochissimo dalla verticale, si può ritenere che la pressione contro le pareti dei muri di sostegno sia, con molta approssimazione, la stessa che avrebbe luogo nel terrapieno indefinito, sopra la superficie interna corrispondente alla parete di sostegno.

Manteniamo sempre gli stessi simboli adottati in questo N.º e di più indichiamo qui con (Fig. 228):

q il peso in kg del *sopracarico* che si suppone *uniformemente* distribuito sopra ogni m.² della *superficie del terrapieno*;

x la profondità d'un *elemento* della parete sotto il piano che forma la superficie del terrapieno misurata tale profondità sulla normale a detto piano.

Poniamo per semplicità

$$\begin{aligned} \xi &= 1 + f^2 - \sqrt{(1 + f^2)(f^2 - \operatorname{tang}^2 \omega)} , \\ \nu &= 90^\circ + \omega - \beta . \end{aligned}$$

La *pressione* s per $m.^2$ sull'*elemento* considerato della parete, è generalmente obliqua; e le sue *componenti*, s_n normale alla parete, e s_t tangenziale, sono date dalle:

$$\begin{aligned} s_n &= (q + \Pi x) [\xi \cos \omega (1 + \cos 2 \nu) - \\ &\quad - \cos (2 \nu - \omega)] , \\ s_t &= (q + \Pi x) [\xi \cos \omega \operatorname{sen} 2 \nu - \\ &\quad - \operatorname{sen} (2 \nu - \omega)] . \end{aligned}$$

Queste formole danno la *pressione* s sopra un *elemento* qualunque di parete interna del muro;

perciò permettono di determinare esattamente, sia il valore della spinta totale S sopra una parete piana, o curva, o poligonale, qualunque sia la posizione del punto d'applicazione;

onde avuto riguardo a ciò, la nuova teoria è non solo più perfetta di quella del prisma di massima spinta, ma è altresì più generale.

1) **Caso particolare:**

parete interna del muro piana (Fig. 228).

Denotando con z la distanza d'un *elemento* di essa dal suo ciglio superiore, si ha $x = z \cos \nu$, onde

$$\begin{aligned} s_n &= (q + \Pi z \cos \nu) [\xi \cos \omega (1 + \cos 2 \nu) - \cos (2 \nu - \omega)] , \\ s_t &= (q + \Pi z \cos \nu) [\xi \cos \omega \operatorname{sen} 2 \nu - \operatorname{sen} (2 \nu - \omega)] ; \end{aligned}$$

quindi le *componenti* normale S_n e tangenziale S_t della spinta S sull'intera parete, sono date dalle:

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{q h}{\operatorname{sen} \beta} + \Pi \frac{h^2 \cos \nu}{2 \operatorname{sen}^2 \beta} \right) \left[\xi \cos \omega (1 + \cos 2 \nu) - \cos (2 \nu - \omega) \right] , \\ S_t &= \left(\frac{q h}{\operatorname{sen} \beta} + \Pi \frac{h^2 \cos \nu}{2 \operatorname{sen}^2 \beta} \right) \left[\xi \cos \omega \operatorname{sen} 2 \nu - \operatorname{sen} (2 \nu - \omega) \right] ; \end{aligned}$$

ed il punto d'applicazione della risultante si trova all'altezza verticale

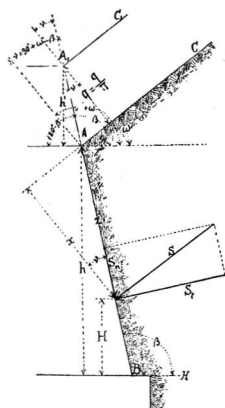


Fig. 228.

$$H = \frac{h}{2} \frac{q + \Pi \frac{h \cos \nu}{3 \operatorname{sen} \beta}}{q + \Pi \frac{h \cos \nu}{2 \operatorname{sen} \beta}} .$$

Queste formole si semplificano, rappresentando il sopraccarico con uno strato di terra $CA A_1 C_1$ uniformemente disteso sulla superficie AC del terrapieno: chiamando q lo spessore di questo strato perpendicolarmente ad AC , si ha $q = \Pi q'$; e imaginando poscia prolungata superiormente la parete premuta BA fino all'incontro con $C_1 A_1$, e chiamando h' l'altezza verticale del tratto di parete prolungata, si avrà

$$\overline{AA_1} = \frac{q}{\cos \nu} = \frac{h'}{\operatorname{sen} \beta} ,$$

onde

$$q = \Pi h' \frac{\cos \nu}{\operatorname{sen} \beta} ;$$

indi le formole finali assai semplici:

$$S_n = C_1 \Pi (2 h h' + h^2) , \quad S_t = C_2 \Pi (2 h h' + h^2) ,$$

$$H = \frac{h}{3} \frac{h + 3 h'}{h + 2 h'} ,$$

avendo posto, per brevità,

$$C_1 = \frac{\cos \nu}{2 \operatorname{sen}^2 \beta} \left[\operatorname{t} \cos \omega (1 + \cos 2 \nu) - \cos (2 \nu - \omega) \right] ,$$

$$C_2 = \frac{\cos \nu}{2 \operatorname{sen}^2 \beta} \left[\operatorname{t} \cos \omega \operatorname{sen} 2 \nu - \operatorname{sen} (2 \nu - \omega) \right] .$$

Si noti che le ultime espressioni di S_n e S_t sono le stesse, come se la parete di sostegno avesse l'altezza verticale $h + h'$ e giungesse sino alla superficie superiore del terrapieno supposto senza sopraccarico, e si cercasse la spinta sulla porzione di parete di altezza h a partire dal piede.

Allorchè il sopraccarico è nullo ($q = 0$), $h' = 0$, quindi

$$S_n = C_1 \Pi h^2 , \quad S_t = C_2 \Pi h^2 : \quad H = \frac{h}{3} .$$

Sottocasi particolari, i più importanti in pratica, quando non vi è sopraccarico.

Le formole che daremo, valgono pel caso del sopraccarico, sostituendo

$$2 h h' + h^2 \quad \text{ad} \quad h^2 .$$

TABELLA LXIII.

Parete di sostegno verticale ($\beta = 90^\circ$) (Fig. 233).

Angolo d'attrito delle terre	Terrapieno con la superficie		
	orizzontale	a scarpa di	
		2 di base per 1 d'altezza	3 di base per 2 d'altezza
α	$\omega = 0$	$\omega = 26^\circ 34'$	$\omega = 33^\circ 41'$
45°	$S_n = 0,0858 \Pi h^2$ $S_t = 0$	$S_n = 0,0960 \Pi h^2$ $S_t = 0,0480 \Pi h^2$	$S_n = 0,1073 \Pi h^2$ $S_t = 0,0714 \Pi h^2$
40°	$S_n = 0,1087 \Pi h^2$ $S_t = 0$	$S_n = 0,1276 \Pi h^2$ $S_t = 0,0638 \Pi h^2$	$S_n = 0,1518 \Pi h^2$ $S_t = 0,1010 \Pi h^2$
35°	$S_n = 0,1355 \Pi h^2$ $S_t = 0$	$S_n = 0,1708 \Pi h^2$ $S_t = 0,0854 \Pi h^2$	$S_n = 0,2429 \Pi h^2$ $S_t = 0,1617 \Pi h^2$
30°	$S_n = 0,1667 \Pi h^2$ $S_t = 0$	$S_n = 0,2400 \Pi h^2$ $S_t = 0,1200 \Pi h^2$	— —

TABELLA LXIV.

Parete di sostegno colla scarpa di $\frac{1}{5}$ inclinato dalla parte opposta al terrapieno rispetto alla verticale condotta pel piede ($\beta = 101^\circ 19'$) (Fig. 234), e superficie del terreno orizzontale ($\omega = 0$).

$$\text{Per } \alpha = \begin{cases} 45^\circ : & S_n = 0,1040 \Pi h^2, & S_t = 0,0812 \Pi h^2; \\ 40^\circ : & S_n = 0,1262 \Pi h^2, & S_t = 0,0768 \Pi h^2; \\ 35^\circ : & S_n = 0,1525 \Pi h^2, & S_t = 0,0715 \Pi h^2. \end{cases}$$

TABELLA LXV.

Parete di sostegno colla scarpa di $\frac{1}{10}$ inclinata dalla parte del terrapieno rispetto alla verticale condotta pel piede (Fig. 235).

(Per tale inclinazione della parete di sostegno non consideriamo il caso della superficie del terreno orizzontale perchè si otterrebbero S_t negative; ciò che è giusto allorchè si ha il terrapieno indefinito, ma non più quando si suppone tolta la parte di esso, posta davanti alla parete, che è precisamente quella alla quale sarebbero dovuti i valori che si ottengono per S).

Angolo d'attrito delle terre	Terrapieno con la superficie a scarpa di	
	2 di base per 1 d'altezza	3 di base per 2 d'altezza
α	$\omega = 26^{\circ}34'$	$\omega = 33^{\circ}41'$
45°	$S_n = 0,0868 \Pi h^2$, $S_t = 0,0045 \Pi h^2$	$S_n = 0,0914 \Pi h^2$, $S_t = 0,0248 \Pi h^2$
40°	$S_n = 0,1136 \Pi h^2$, $S_t = 0,0214 \Pi h^2$	$S_n = 0,1274 \Pi h^2$, $S_t = 0,0544 \Pi h^2$
35°	$S_n = 0,1504 \Pi h^2$, $S_t = 0,0447 \Pi h^2$	$S_n = 0,2011 \Pi h^2$, $S_t = 0,1149 \Pi h^2$

TABELLA LXVI.

Parete di sostegno colla scarpa di $\frac{15}{100}$ inclinata dalla parte del terrapieno rispetto alla verticale condotta pel piede (Fig. 235).

Angolo d'attrito delle terre	Terrapieno con la superficie a scarpa di	
	2 di base per 1 d'altezza	3 di base per 2 d'altezza
α	$\omega = 26^{\circ}34'$	$\omega = 33^{\circ}41'$
45°		$S_n = 0,0874 \Pi h^2$, $S_t = 0,0034 \Pi h^2$
40°	$S_n = 0,1101 \Pi h^2$, $S_t = 0,0016 \Pi h^2$	$S_n = 0,1195 \Pi h^2$, $S_t = 0,0325 \Pi h^2$
35°	$S_n = 0,1439 \Pi h^2$, $S_t = 0,0233 \Pi h^2$	$S_n = 0,1851 \Pi h^2$, $S_t = 0,0921 \Pi h^2$
30°	$S_n = 0,1981 \Pi h^2$, $S_t = 0,0634 \Pi h^2$	

TABELLA LXVII.

Parete di sostegno colla scarpa di $\frac{1}{4}$, inclinata dalla parte del terrapieno rispetto alla verticale condotta pel piede (Fig. 235).
 (Per $\alpha = 45^{\circ}$ e $\alpha = 40^{\circ}$ la S_t risulta negativa; per $\alpha = 35^{\circ}$, se la scarpa del terrapieno è di 2 di base per 1 d'altezza, la S_t risulta pure negativa; onde in questi casi non si possono adottare i risultati della nuova teoria).

Terrapieno con la scarpa di 3 di base per 2 d'altezza

per $\alpha = 35^{\circ}$: $S_n = 0,1616 \Pi h^2$, $S_t = 0,0489 \Pi h^2$;

Terrapieno con la scarpa di 2 di base per 1 d'altezza

per $\alpha = 30^{\circ}$: $S_n = 0,1825 \Pi h^2$, $S_t = 0,0275 \Pi h^2$.

Osservazione sui risultati ottenuti con la nuova teoria e con quella del prisma di massima spinta.

Confrontando tali risultati, risulta che la S_n data dalla nuova teoria è quasi sempre *minore* della spinta totale S data dalla vecchia teoria del prisma di massima spinta (nella quale si suppone tale spinta S normale alla parete): siccome inoltre la S_t (che naturalmente deve essere sempre positiva, cioè rivolta all'ingiù) favorisce la stabilità dei muri, ne consegue che i valori della spinta forniti dalla vecchia teoria assegnerebbero generalmente una eccessiva grossezza ai muri con inutile aumento di spesa. Perciò gli Autori che ancor adottano la vecchia teoria, suppongono S obliqua rispetto alla parete e rivolta all'ingiù; ma in tal modo essi sono condotti a dare ai muri di sostegno uno spessore minore del necessario in tutti quei casi in cui la direzione di S fa con la normale alla parete un angolo minore di quello da loro adottato.

3. — Notazioni ed ipotesi generale pel calcolo dei muri di sostegno.

In tutti i casi particolari seguenti si seguirà la nuova teoria ultima esposta. e:

A) si supporrà sempre S applicata ad $\frac{1}{3} h$ dal piede :

B) si porrà l'equazione di stabilità esprimendo la condizione che la risultante di S e del peso del muro, passi all'*limite del terzo medio* nella base del muro stesso, in modo che la pressione per m^2 riesca nulla sullo spigolo interno e doppia della pressione media sullo spigolo esterno (vedi pag. 346). Però in qualche caso particolare si porrà invece la condizione che la suddetta risultante passi pel *centro della base*, onde la pressione sulla stessa risulti uniformemente distribuita:

C) oltre alle notazioni del N.º 2 precedente, denoteremo con:

Π_1 il peso d'un m^3 di muratura (che prenderemo = kg. 2250),
(prenderemo $\Pi = \text{kg. } 1650$, onde $\frac{\Pi}{\Pi_1} = 0,733$).

h l'altezza verticale della parete su cui ha luogo la spinta delle terre, potendo essere $h \neq h$ (vedi pag. 364),

s_0, s_1 le grossezze del muro alla base ed alla sommità,

V il volume di un m. corr. di muro,

C_1, C_2 i coefficienti numerici definiti nel N.º 2 precedente (pag. 364) e che entrano nell'espressione delle componenti S_n, S_t di S , onde

$$S_n = C_1 \Pi h^2, \quad S_t = C_2 \Pi h^2;$$

D) la 1.ª espressione che daremo per l'equazione di stabilità conterrà nel 1.º membro il *momento del peso del muro*, e nel 2.º membro il *momento di S* , rispetto al *centro di pressione sulla base* (vedi N.º 1. lett. A pag. 347).

4. — Muro verticale ($\beta = 0$) di spessore costante $s_0 = s_1$.

L'equazione di stabilità è:

$$\Pi s_0 h \cdot \frac{s_0}{6} = S_n \frac{h}{3} - S_t \frac{2s_0}{3},$$

ossia

$$s_0^2 + \frac{4 S_t}{\Pi h} s_0 = \frac{2 S_n}{\Pi}$$

od ancora

$$s_0^2 + 2,932 C_2 h s_0 = 1,466 C_1 h^2,$$

equazione di 2.º grado rispetto allo spessore incognito s_0 .

Se la faccia esterna si conservasse alta come l'interna, sarebbe $V = s_0 h$; però ordinariamente quando il terrapieno è a scarpa, si taglia la parte superiore del muro in continuazione della scarpa stessa, e allora

$$V = s_0 h - \frac{1}{2} s_0 \text{ tang } \omega.$$

È importante notare che la soppressione del triangolo DAE non diminuisce menomamente la stabilità del muro, perchè il baricentro di tale triangolo cade sulla verticale passante pel centro di pressione alla base.

La pressione per m.² sullo spigolo interno è nulla, e su quello esterno è

$$\varepsilon_{(\text{mass.})} = \frac{2}{s_0} (\Pi_1 V + S_t).$$

Se la superficie del terreno è orizzontale ($\omega = 0$)

$$S_t = 0, \quad V = s_0 h, \quad \varepsilon_{(\text{mass.})} = 2 \Pi_1 h = 4500 h.$$

Nella pratica sarà utile la seguente

TABELLA LXVIII.

Angolo d'attrito delle terre	Scarpa della superficie del terrapieno	Groschezza del muro	Volume del muro per ogni m. di lungh.	Press. mass. in kg. per m. sulla base
α		$s_0 = s_1$	V	$\varepsilon_{(\text{mass.})}$
45°	orizzontale	0,3546 h	0,3546 h^2	4500 h
	2 per 1	0,3113 h	0,2871 h^2	4659 h
	3 " 2	0,3035 h	0,2744 h^2	4813 h
40°	orizzontale	0,4003 h	0,4003 h^2	4500 h
	2 per 1	0,3490 h	0,3146 h^2	4711 h
	3 " 2	0,3443 h	0,3063 h^2	4971 h
35°	orizzontale	0,4462 h	0,4462 h^2	4500 h
	2 per 1	0,3906 h	0,3525 h^2	4783 h
	3 " 2	0,4055 h	0,3503 h^2	5203 h
30°	orizzontale	0,4914 h	0,4914 h^2	4500 h
	2 per 1	0,4428 h	0,3933 h^2	4891 h

Da questa tabella si rileva il fatto notevole che, per uno stesso α passando dal terrapieno orizzontale a quello a scarpa, diminuisce s_0 ; e ciò quantunque la S_n sia tanto maggiore, quanto maggiore è tale scarpa: questo proviene dalla S_t , che agisce in favore della stabilità, ed è nulla allorchè la superficie del terreno è orizzontale, mentre cresce molto rapidamente col crescere della scarpa dello stesso. Si noti ancora che V diminuisce ancor più rapidamente che s_0 , e ciò in causa della soppressione del triangolo DAE (fig. 229).

5. — Muro teorico di spessore $s_1 = 0$, colla parete interna verticale ($\beta = 90^\circ$) e colla parete esterna a scarpa.

La considerazione fatta al N.º 4 precedente — cioè che nel muro verticale di grossezza costante si può sopprimere alla sommità il triangolo DAE (fig. 229) qualunque sia DE , senza diminuire nemmeno la stabilità del muro, ossia senza che la risultante di S e del peso del muro cessi di passare al limite esterno del terzo medio della base — ci conduce alla conseguenza importantissima che, condotta la diagonale CA , si può sopprimere tutto il triangolo CAE , riducendo V alla metà soltanto, ed ottenendo anche il vantaggio di ridurre alla metà la pressione massima per m.² sulla base.

Ciò ci offre — per molti casi — una forma economica e semplice dei muri di sostegno: naturalmente che non si potrà fare $s_1 = 0$, ma si potrà ottenere una forma pratica fissando arbitrariamente s_1 , e mantenendo costante tale spessore fino al punto L , in cui la parete verticale esterna incontra la scarpa inclinata CA , come in fig. 230.

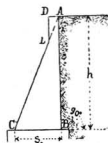


Fig. 230.

Se, per es., si fa $s_1 = \frac{1}{8} h$ considerando solo il caso di $\omega = 0$, si avrà:

per $\alpha =$	}	45° : $s_0 = 0,3546 h$, $V = 0,1993 h^2$
		40° : $s_0 = 0,4003 h$, $V = 0,2196 h^2$
		35° : $s_0 = 0,4462 h$, $V = 0,2406 h^2$
		30° : $s_0 = 0,4914 h$, $V = 0,2615 h^2$.

Si è considerato soltanto il caso di $\omega = 0$, perchè i valori di s_0 sono in tutti i casi gli stessi dati al N.º 4 precedente, ed i valori di V si calcolano facilmente.

La pressione massima per m.² sulla base (spigolo esterno), quando $\omega \neq 0$, ed il muro ha la forma teorica, è:

$$\varepsilon_{(mass.)} = \Pi_1 h = 2250 h$$

e l'aggiunta del triangolo LAD , come si è detto sopra, diminuisce alquanto questa pressione massima.

6. — Muro colla parete interna inclinata dalla parte opposta al terrapieno rispetto alla verticale passante pel piede, e colla base orizzontale.

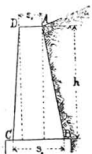


Fig. 231.

Annotiamo con :

i la scarpa della parete interna per ogni m. di altezza verticale.

$j = \frac{s_0 - s_1}{h}$ l'aumento di grossezza del muro per ogni m. d'altezza verticale (se la parete esterna del muro è verticale $i = j$) ;

l'equazione di stabilità sarà [vedi N.º 3 lett. D)]:

$$\frac{\Pi_1 h}{6} \left[s_0^2 + s_0 s_1 - s_1^2 - (s_0 + 2 s_1) i h \right] =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{1+i^2}} \left[S_n h (1+i^2) - 2 s_0 (S_n i + S_t) \right]$$

da cui, ponendo $s_0 = s_1 + j h$:

$$s_1^2 + 3 (j - i) s_1 h + (j - i) j h^2 =$$

$$= \frac{2}{\Pi_1 h \sqrt{1+i^2}} \left[S_n h (1+i^2) - 2 (s_1 + j h) (S_n i + S_t) \right] .$$

Si avrà poi

$$V = \frac{s_0 + s_1}{2} h = \left(s_1 + \frac{1}{2} j h \right) h ,$$

$$\varepsilon (\text{mass.}) = \frac{2}{s_0} \left[\Pi_1 h \frac{s_0 + s_1}{2} + \frac{S_n i + S_t}{\sqrt{1+i^2}} \right] .$$

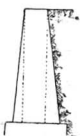


Fig. 232.

Se la superficie del terrapieno è orizzontale ($\omega = 0$) (Fig. 232):

$$\frac{S_n i + S_t}{\sqrt{1+i^2}} = \frac{1}{2} \Pi_1 h^2 i ,$$

onde

$$s_1^2 + 3 (j - i) s_1 h + (j - i) j h^2 =$$

$$= \frac{2}{\Pi_1 h} \left[S_n h \sqrt{1+i^2} - \Pi_1 h^2 i (s_1 + j h) \right] ,$$

$$V = \left(s_1 + \frac{1}{2} i h \right) h , \quad \varepsilon \text{ (mass.)} = \frac{h}{6} \left[\Pi_1 (s_0 + s_1) + \Pi h i \right]$$

Casi particolari.

TABELLA LXIX.

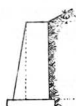


Fig. 233.

Muro con la parete interna verticale e con quella esterna a scarpa del 20 per 100 [i=0 , j=0,20 , onde ponendo $S_n = C_1 \Pi h^2$, si ottiene:

$$s_1^2 + 0,20 h (3 s_1 + 0,20 h) = 1,466 C_1 h^2 - 2,932 C_2 h (s_1 + 0,20 h)$$

ossia :

$$s_1^2 + s_1 h (0,60 + 2,932 C_2) = (1,466 C_1 - 0,04 - 0,5864 C_2) h^2] .$$

Angolo d'attrito delle terre	Scarpa della superficie del terrapieno	Spessore del muro alla		Volume del muro per ogni m. di lungh.	Pressione per m. ² sullo spigolo esterno
		sommità	base		
α	cotg ω	s_1	s_0	V	$\varepsilon \text{ (mass.)}$
45°	orizz.	0,1193 h	0,3193 h	0,2183 h ²	3100 h
	2 : 1	0,0877 h	0,2877 h	0,1877 h ²	3500 h
	3 : 2	0,0844 h	0,2844 h	0,1844 h ²	3780 h
40°	orizz.	0,1576 h	0,3576 h	0,2576 h ²	3240 h
	2 : 1	0,1207 h	0,3207 h	0,2207 h ²	3750 h
	3 : 2	0,1212 h	0,3212 h	0,2212 h ²	4140 h
35°	orizz.	0,1986 h	0,3986 h	0,2986 h ²	3400 h
	2 : 1	0,1589 h	0,3589 h	0,2589 h ²	4030 h
	3 : 2	0,1769 h	0,3769 h	0,2769 h ²	4730 h

Si osserva anche qui, come nella tabella LXVIII, che gli spessori del muro pel terrapieno a scarpa sono minori che pel terrapieno orizzontale; onde, quando in pratica, per resistere ad un terrapieno a scarpa si adotti un muro colla parete interna verticale e quella esterna a scarpa di 0,20, converrà fare s_1 come se la superficie fosse orizzontale.

TABELLA LXX.

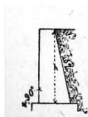


Fig. 234.

Muro colla parete interna inclinata del 20 per 100 dalla parte opposta al terrapieno rispetto alla verticale passante pel piede, e colla parete esterna verticale, essendo orizzontale la superficie del terrapieno ($\omega = 0$).

$$\left\{ i = 0,20 , \quad j = 0,20 , \quad i - i = 0 , \quad \text{onde ponendo} \right.$$

$$S_{zz} = C_1 \Pi h^2, \quad \frac{\Pi}{\Pi_1} = 0,733, \quad \text{risulta}$$

$$s_1^2 + 0,2932 s_1 h = (1,495 C_1 - 0,0586) h^2,$$

$$V = (s_1 + 0,1 h) h,$$

$$\varepsilon (\text{mass.}) = \frac{h}{s_0} \left[\Pi_1 (s_1 + s_0) + 0,2 \Pi h \right] \}.$$

Angolo d'attrito delle terre	Spessore del muro alla		Volume del muro per ogni m. di lungh.	Pressione massima per m. ² sulla base
	sommità	base		
α	s_1	s_0	V	ε (mass.)
45°	0,1974 h	0,3974 h	0,2974 h^2	4200 h
40°	0,2426 h	0,4426 h	0,3426 h^2	4230 h
35°	0,2902 h	0,4902 h	0,3902 h^2	4250 h

Spesse volte, invece di costruire la parete interna piana, si fa a riseghe, adottando sempre gli stessi spessori come se fosse tutta d'un sol piano.

7. — Muro a strapiombo verso il terrapieno, colla parete interna che si eleva fino alla superficie dello stesso (Fig. 235).

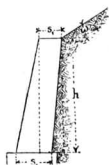


Fig. 235.

Chiamiamo :

h l'altezza del muro, ossia l'altezza verticale della parete interna sulla quale si esercita la spinta.

i la scarpa della parete interna per ogni m. d'altezza,

j l'aumento di grossezza del muro per ogni m. d'altezza verticale del muro ;

A) Se si vuole che il centro di pressione sulla base passi al limite esterno del terzo medio, l'equazione d'equilibrio è :

$$\frac{\Pi_1 h}{6} \left[s_0^2 + s_0 s_1 - s_1^2 + h i \sqrt{1 + i^2} (2 s_1 + s_0) \right] =$$

$$= \frac{h}{3} \sqrt{1 + i^2} S_{zz} - \frac{2}{3} s_0 S_t$$

ossia

$$s_0^2 + s_0 s_1 - s_1^2 + h i \sqrt{1 + i^2} (2 s_1 + s_0) = \\ = \frac{2}{\Pi_1} \sqrt{1 + i^2} S_{\nu} - \frac{4}{\Pi_1} \frac{s_0}{h} S_t \quad ;$$

essendo $S_{\nu} = C_1 \Pi h^2$, $S_t = C_2 \Pi h^2$ ove C_1 , C_2 sono coefficienti numerici (pag. 364); quest'equazione è di 2.^o grado quando si prende ad arbitrio s_1 , e si vuol determinare s_0 .

Sostituendo a s_0 il suo valore $s_1 + j h$, risulta:

$$s_1^2 + (3s_1 + jh) \left(j + i \sqrt{1 + i^2} \right) h = \frac{2}{\Pi_1} \sqrt{1 + i^2} S_{\nu} - \frac{4}{\Pi_1} \frac{s_1 + j h}{h} S_t \quad ,$$

equazione pur essa di 2.^o grado, quando si dà tanto la scarpa della parete interna quanto quella della parete esterna, e si vuol determinare lo spessore del muro alla sommità.

B) Quando si fa i alquanto grande — come spesso succede — il muro riesce assai sottile; ed allora per diminuire la pressione massima sulla base, alcuni calcolano le dimensioni del muro, ponendo la condizione che il centro di pressione sulla sua base coincida col centro della base stessa; allora l'equazione di stabilità è:

$$\frac{\Pi_1}{6} h \left[\frac{s_0^2 + s_0 s_1 - 2 s_1^2}{2} + h i \sqrt{1 + i^2} (2 s_1 + s_0) \right] - \\ = \frac{h}{3} \sqrt{1 + i^2} S_{\nu} - \frac{s_0}{2} S_t$$

ossia

$$\frac{s_0^2 + s_0 s_1 - 2 s_1^2}{2} + h i \sqrt{1 + i^2} (2 s_1 + s_0) = \\ = \frac{2}{\Pi_1} \sqrt{1 + i^2} S_{\nu} - \frac{3}{\Pi_1} \frac{s_0}{h} S_t \quad ;$$

od ancora, sostituendo a s_0 il suo valore $s_1 + j h$,

$$(3 s_1 + j h) \left(\frac{j}{2} + i \sqrt{1 + i^2} \right) h = \frac{2}{\Pi_1} \sqrt{1 + i^2} S_{\nu} - \frac{3}{\Pi_1} \frac{s_1 + j h}{h} S_t$$

equazione di 1.^o grado in s_1 .

C) In ambedue le condizioni alle lett. A) e B), si ha:

$$V = 1,031 \frac{s_0 + s_1}{2} h \quad ;$$

e la pressione massima per m.² sulla base, si ottiene dividendo

$$\Pi_1 \frac{s_0 + s_1}{2} h + \Pi C_2 h^2 \quad \text{per} \quad \frac{S_0}{2} \quad \text{oppure per } s_0 \quad ,$$

a seconda che si pone la condizione in A) oppure in B).

TABELLA LXXI.

Parete interna a strapiombo verso il terrapieno colla scarpa del 10 per $\%$, e parete esterna colla scarpa del 20 per $\%$.
 $\{ i = 0,1, \quad j = 0,10 ; \text{ onde per la condizione in A) }$

$$s_1^2 + (3 s_1 + 0,1 h) 0,2 h = 1,466 C_1 h^2 - 2,932 C_2 h (s_1 + 0,1 h)$$

ossia

$$s_1^2 + (0,6 + 2,932 C_2) h s_1 = (1,466 C_1 - 0,2932 C_2 - 0,02) h^2 ;$$

e per la condizione in B)

$$(3 s_1 + 0,1 h) 0,15 h = 1,466 C_1 h^2 - 2,199 C_2 h (s_1 + 0,1 h)$$

cioè

$$(0,45 + 2,199 C_2) s_1 = (1,466 C_1 - 0,2199 C_2 - 0,015) h .$$

NB. Quando la superficie del terrapieno è orizzontale, bisogna adottare i risultati della teoria del prisma di massima spinta, ossia porre $C_2 = 0$, e per C_1 i valori dati alla pag. 364; quando invece la superficie del terrapieno ha 2:1, o 3:2 di scarpa si possono sostituire per C_1, C_2 i valori della teoria esatta (pag. 364). ;

Angolo d'attrito delle terre	Scarpa della superf. del terra- pieno	Se il centro di pressione sulla base cade					
		al limite esterno del terzo medio			nel centro di figura		
		Spess. del muro alla som- mità	Vol. del muro per ogni m. di lungh.	Press. mass. per m. ²	Spess. del muro alla som- mità	Vol. del muro per ogni m di lungh.	Press. mass. per m. ²
α	cotg ω	s_1	V	ϵ (mass.)	s_1	V	ϵ (mass.)
45°	orizz.	0,1150 h	0,1658 h ²	3460 h	0,1942 h	0,2454 h ²	1860 h
	2:1	0,1405 h	0,1914 h ²	3630 h	0,2418 h	0,2933 h ²	1950 h
	3:2	0,1326 h	0,1835 h ²	3900 h	0,2252 h	0,2766 h ²	2040 h
40°	orizz.	0,1508 h	0,2018 h ²	3600 h	0,2633 h	0,3149 h ²	1940 h
	2:1	0,1687 h	0,2198 h ²	3920 h	0,2953 h	0,3470 h ²	2060 h
	3:2	0,1635 h	0,2146 h ²	4350 h	0,2805 h	0,3322 h ²	2180 h
35°	orizz.	0,1922 h	0,2434 h ²	3730 h	0,3500 h	0,4020 h ²	2000 h
	2:1	0,2011 h	0,2524 h ²	4170 h	0,3569 h	0,4089 h ²	2170 h
	3:2	0,2102 h	0,2615 h ²	4970 h	0,3622 h	0,4143 h ²	2410 h

TABELLA LXXII.

Parete interna a strapiombo del 25 per % verso l'interno del terrapieno e parete esterna a scarpa del 30 per %.

$i = 0,25$, $j = 0,05$. Si deve adottare i risultati della teoria del prisma di massima spinta (tab. LXI) salvo per $\alpha = 35^\circ$ e terrapieno a scarpa di 3:2 e per $\alpha = 30^\circ$ e terrapieno a scarpa di 2:1 (come si era osservato già nella Tabella LXVII).

Per la condizione alla lett. A):

$$s_1^2 + (3 s_1 + 0,05 h) 0,258 h = 1,511 C_1 h^2 - 2,932 C_2 h (s_1 + 0,05 h) ;$$

e per la condizione di cui alla lett. B):

$$(3 s_1 + 0,05 h) 0,283 h = 1,511 C_1 h^2 - 2,199 C_2 h (s_1 + 0,05 h) .$$

In ambedue queste equazioni si dovrà porre $C_2 = 0$, salvo per i due casi indicati }.

Angolo d'attrito delle terre	Scarpa della superf. del terra- pieno	Se il centro di press. sulla base cade					
		al limite esterno del terzo medio			nel centro di figura		
		Spess. del muro alla som- mità	Vol. del muro per ogni m. di lungh.	Press. mass. per m. ²	Spess. del muro alla som- mità	Vol. del muro per ogni m. di lungh.	Press. mass. per m. ²
α	cotg ω	s_1	V	ε (mass.)	s_1	V	ε (mass.)
45°	2:1	0,0752 h	0,1033 h ²	3600 h	0,0902 h	0,1187 h ²	1840 h
		0,0857 h	0,1141 h ²	3690 h	0,1035 h	0,1325 h ²	1880 h
40°	2:1	0,1324 h	0,1623 h ²	3310 h	0,1429 h	0,1731 h ²	1950 h
		0,1365 h	0,1665 h ²	3880 h	0,1723 h	0,2034 h ²	1990 h
35°	2:1	0,1677 h	0,1987 h ²	3970 h	0,2175 h	0,2500 h ²	2040 h
		0,2004 h	0,2324 h ²	4700 h	0,2348 h	0,2679 h ²	2340 h
30°	2:1	0,2372 h	0,2703 h ²	4340 h	0,2844 h	0,3190 h ²	2210 h

8. — Muro a strapiombo verso il terrapieno essendo la faccia superiore del muro coperta dal terrapieno.

Oltre alle notazioni precedenti, indichiamo ancora con ν l'angolo che la superficie superiore del terrapieno fa colla normale alla parete interna del muro.

A) Se si vuole che il centro di pressione alla base cada al limite esterno del terzo medio, si ha l'equazione di stabilità:

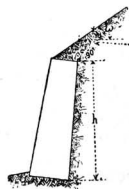


Fig. 236.

$$\frac{\Pi_1}{6} h \left[s_0^2 + s_0 s_1 - s_1^2 + h i \sqrt{1 + i^2} (2 s_1 + s_0) \right] +$$

$$+ \frac{\Pi}{2} s_1^2 \operatorname{tang} \nu \left(\frac{2 s_0 - s_1}{3} + h i \right) =$$

$$= \frac{h \sqrt{1 + i^2} + s_1 \operatorname{tang} \nu}{3} S_n - \frac{2}{3} s_0 S_t$$

ossia

$$s_0^2 + s_0 s_1 - s_1^2 + h i \sqrt{1 + i^2} (2 s_1 + s_0) + \frac{\Pi}{\Pi_1} \frac{s_1^2}{h} \operatorname{tang} \nu (2 s_0 - s_1 + 3 h i) =$$

$$= 2 \frac{h \sqrt{1 + i^2} + s_1 \operatorname{tang} \nu}{\Pi_1 h} S_n - \frac{4}{\Pi_1} \frac{s_0}{h} S_t .$$

Quest'equazione è molto generale e potrà servire per la maggior parte dei casi pratici.

Ponendo $s_0 = s_1 + j h$, risulta

$$s_1^2 + (3 s_1 + j h) \left(i + i \sqrt{1 + i^2} \right) h + \frac{\Pi}{\Pi_1} \frac{s_1^2}{h} \operatorname{tang} \nu \left[s_1 + (3 i + 2 j) h \right] =$$

$$= 2 \frac{h \sqrt{1 + i^2} + s_1 \operatorname{tang} \nu}{\Pi_1 h} S_n - \frac{4 (s_1 + j h)}{\Pi_1 h} S_t .$$

Si noti che per altezza verticale della parete interna, sulla quale si esercita S , si deve prendere quell'altezza che si avrebbe se la parete interna del muro fosse prolungata sino all'incontro della superficie del terrapieno, ossia

$$h + \frac{s_1 \operatorname{tang} \nu}{\sqrt{1 + i^2}} .$$

Onde

$$S_n = C_1 \Pi \left(h + \frac{s_1 \operatorname{tang} \nu}{\sqrt{1 + i^2}} \right)^2, \quad S_t = C_2 \Pi \left(h + \frac{s_1 \operatorname{tang} \nu}{\sqrt{1 + i^2}} \right)^2 .$$

Risulta che l'equazione definitiva per determinare s_1 è di 3.^o grado, e per risolverla converrà servirsi del metodo delle successive approssimazioni di Newton.

Quando S si suppone normale alla parete, come abbiamo consigliato di fare nell'applicare la teoria del prisma di massima spinta, si dovrà porre $S_t = 0$, ciò che semplifica l'equazione.

B) Se si vuole che il centro di pressione alla base cada nel centro della stessa, si ha

$$\frac{\Pi_1}{6} h \left[\frac{s_0^2 + s_0 s_1 - 2 s_1^2}{2} + h i \sqrt{1 + i^2} (2 s_1 + s_0) \right] +$$

$$+ \frac{\Pi}{2} s_1^2 \operatorname{tang} \nu \left(\frac{3 s_0 - 2 s_1}{6} + h i \right) =$$

$$= \frac{h \sqrt{1 + i^2} + s_1 \operatorname{tang} \nu}{3} S_n - \frac{s_0}{2} S_t$$

ossia

$$\frac{s_0^2 + s_0 s_1 - 2 s_1^2}{2} + h i \sqrt{1 + i^2} (2 s_0 + s_1) +$$

$$+ \frac{\Pi}{\Pi_1} s_1^2 \operatorname{tang} \nu \left(\frac{3 s_0}{2 h} + \frac{2 s_1}{h} + 3 i \right) =$$

$$= \frac{2}{\Pi_1} \frac{h \sqrt{1 + i^2} + s_1 \operatorname{tang} \nu}{h} S_n - \frac{3}{\Pi_1} \frac{s_0}{h} S_t .$$

Ponendo anche qui $s_0 = s_1 + j h$, ne viene

$$(3 s_1 + j h) \left(\frac{j}{2} + i \sqrt{1 + i^2} \right) h + \frac{\Pi}{\Pi_1} s_1^2 \operatorname{tang} \nu \left(\frac{s_1}{2 h} + \frac{3}{2} j + 3 i \right) =$$

$$= \frac{2}{\Pi_1} \frac{h \sqrt{1 + i^2} + s_1 \operatorname{tang} \nu}{h} S_n - \frac{3}{\Pi_1} \frac{s_1 + j h}{h} S_t$$

equazione di 3.^o grado in s_1 .

C) In ambedue le condizioni alle lett. A) e B), si ha

$$V = \frac{s_0}{2} + \frac{s_1}{2} h \sqrt{1 + i^2} = \left(s_1 + \frac{h}{2} j \right) h \sqrt{1 + i^2} .$$

e la pressione massima per m.² sulla base si ottiene dividendo la quantità

$$\Pi_1 h \frac{s_0 + s_1}{2} + \Pi \frac{s_1^2 \operatorname{tang} \nu}{2} + S_t .$$

per $\frac{s_0}{2}$ oppure per s_0 , a seconda che si pone la condizione in A) oppure in B).

TABELLA LXXIII.

Muro a strapiombo verso il terrapieno, colla parete interna avente la scarpa di $\frac{1}{10}$, e quella esterna con la scarpa di $\frac{1}{5}$

($i=0,1$, $j=0,1$).

Per questa forma di muri si considererà soltanto il caso allorchè si pone la condizione espressa alla lettera A), perchè se si

volesse soddisfare alla condizione in B), si otterrebbero dimensioni esagerate pel muro. L'equazione di stabilità è:

$$\frac{s_1^2}{h^2} + 0,2005 \left(3 \frac{s_1}{h} + 0,1 \right) + 0,733 \operatorname{tang} \nu \frac{s_1^2}{h^2} \left(\frac{s_1}{h} + 0,5 \right) =$$

$$= 1,473 \left(1 + \frac{s_1 \operatorname{tang} \nu}{h \cdot 1,005} \right)^3 C_1 - 2,932 \left(\frac{s_1}{h} + 0,1 \right) \left(1 + \frac{s_1 \operatorname{tang} \nu}{h \cdot 1,005} \right)^2,$$

ove si porrà:

$$\nu = 5^{\circ}43', \quad \nu = 5^{\circ}43' + 26^{\circ}34' = 32^{\circ}17',$$

$$\nu = 5^{\circ}43' + 33^{\circ}41' = 39^{\circ}24'$$

a seconda che la superficie del terrapieno è rispettivamente:
orizzontale, a scarpa 2:1, a scarpa 3:2.

Nel primo di questi tre casi, dovendosi adottare i valori di S dati dalla teoria vecchia, si dovrà porre $C_2 = 0$.

Si ha poi

$$V = 1,005 h^2 \left(\frac{s_1}{h} + 0,05 \right),$$

$$\varepsilon (\text{mass.}) = \frac{2}{s_0} \left[2250 \left(\frac{s_1}{h} + 0,05 \right) + 1650 \left(\frac{s_1^2}{2h^2} \operatorname{tang} \nu + C_2 \right) \right] \}.$$

Angolo d'attrito delle terre	Scarpa della superficie del terrapieno	Spessore del muro alla		Volume del muro per ogni m. di lungh.	Pressione massima per m. ² sulla base
		sommità	base		
α	$\operatorname{cotg} \omega$	s_1	s_0	V	$\varepsilon (\text{mass.})$
45°	orizz.	0,1190 h	0,2190 h	0,1698 h ²	3480 h
	2:1	0,1809 h	0,2809 h	0,2321 h ²	3880 h
	3:2	0,1856 h	0,2856 h	0,2368 h ²	4140 h
40°	orizz.	0,1570 h	0,2570 h	0,2080 h ²	3620 h
	2:1	0,2247 h	0,3247 h	0,2761 h ²	4160 h
	3:2	0,2360 h	0,3360 h	0,2874 h ²	4580 h
35°	orizz.	0,2012 h	0,3012 h	0,2525 h ²	3760 h
	2:1	0,2766 h	0,3766 h	0,3282 h ²	4960 h
	3:2	0,3230 h	0,4230 h	0,3748 h ²	5200 h

TABELLA LXXIV.

Muro a strapiombo verso il terrapieno, con la scarpa della parete interna del 25 per % e quella della parete esterna del 30 per %

$$(i = 0,25, \quad \sqrt{1 + i^2} = 1,031, \quad \text{e circa} \quad j = 0,30 - 0,25 = 0,05),$$

Si porrà $S_t = 0$, eccettuato che per il caso $\alpha = 35^\circ$, $\cotg \omega = 3,2$, perchè per gli altri casi contemplati nella tabella — come si è già osservato precedentemente — si è costretti di adottare per S il valore dato dalla teoria del prisma di massima spinta, dando la teoria moderna per S_t un valore negativo, epperò inammissibile.

Volendo soddisfare alla condizione in A), allorchè $S_t = 0$ l'equazione di stabilità è

$$\begin{aligned} \frac{s_1^2}{h^2} + 0,308 \left(\frac{3s_1}{h} + 0,05 \right) + 0,733 \operatorname{tang} \nu \frac{s_1^2}{h^2} \left(\frac{s_1}{h} + 0,85 \right) = \\ = 1,511 \left(1 + \frac{\operatorname{tang} \nu}{1,031} \frac{s_1}{h} \right)^3 C_1 \end{aligned}$$

ove si porrà

$$\nu = 14^\circ 2' + 26^\circ 34' = 40^\circ 36', \quad \nu = 14^\circ 2' + 33^\circ 41' = 47^\circ 43'$$

a seconda che la superficie del terrapieno ha rispettivamente la scarpa

$$2 : 1, \quad 3 : 2.$$

Nel caso della scarpa $3:2$, e per $\alpha = 35^\circ$, siccome si prende $S_t \neq 0$, devesi aggiungere al 2.^o membro dell'ultima equazione il termine

$$-2,932 \left(\frac{s_1}{h} + j \right) \left(1 + \frac{\operatorname{tang} \nu}{1,031} \frac{s_1}{h} \right)^2 C_2.$$

Se invece si vuol soddisfare alla condizione in B), l'equazione di stabilità è

$$\begin{aligned} 0,283 \left(\frac{3s_1}{h} + 0,05 \right) + 0,733 \operatorname{tang} \nu \frac{s_1^2}{h^2} \left(\frac{s_1}{2h} + 0,825 \right) = \\ = 1,511 \left(1 + \frac{\operatorname{tang} \nu}{1,031} \frac{s_1}{h} \right)^3 C_1. \end{aligned}$$

Per $\alpha = 35^\circ$ e pel terrapieno a scarpa di $3:2$, si deve aggiungere al 2.^o membro dell'ultima equazione il termine

$$-2,199 \left(\frac{s_1}{h} + j \right) \left(1 + \frac{\operatorname{tang} \nu}{1,031} \frac{s_1}{h} \right)^2 C_2,$$

però non daremo il valore di s_1 che si ottiene in questo caso, perchè eccessivamente grande.

Si ha poi

$$V = 1,031 h (s_1 + 0,025 h).$$

e la pressione massima per m.² si ottiene dividendo la quantità

$$2250 h \frac{s_0 + s_1}{2} + 1650 \frac{s_1^2 \operatorname{tang} \nu}{2} + 1650 h^2 C_2$$

per $\frac{s_0}{2}$ o per s_0 , a seconda che si pone la condizione in A) oppure in B).

Angolo d'attrito delle terre	Scarpa della superf. del terra- pieno	Se il centro di press. sulla base cade					
		al limite esterno del terzo medio			nel centro della base		
		Spess. del muro alla som- mità	Vol. del muro per ogni m. di lungh.	Press. mass. per m. ²	Spess. del muro alla som- mità	Vol. del muro per ogni m. di lungh.	Press. mass. per m. ²
α	cotg ω	s_1	V	ϵ (mass)	s_1	V	ϵ (mass.)
45°	2:1	0,0880 h	0,1565 h ²	3760 h	0,1152 h	0,1445 h ²	1960 h
	3:2	0,1141 h	0,1434 h ²	4200 h	0,1522 h	0,1827 h ²	2060 h
40°	2:1	0,1533 h	0,1848 h ²	4120 h	0,2110 h	0,2433 h ²	2150 h
	3:2	0,2130 h	0,2454 h ²	4360 h	0,3594 h	0,3963 h ²	2390 h
35°	2:1	0,2430 h	0,2763 h ²	4400 h	0,4240 h	0,4629 h ²	2370 h
	3:2	0,3075 h	0,3428 h ²	4520 h	—	—	—

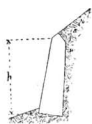


Fig. 237.

Si rileva da questa tabella che ponendo la condizione in A), la grossezza del muro risulta molto maggiore che ponendo la condizione in B): ma, in generale, basterà adottare gli spessori che soddisfano a questa seconda condizione, poichè con essi si ha già un grado di stabilità sufficiente in pratica.

Quest'osservazione vale per tutti gli altri casi trattati in questo N.º 8 e nel precedente N.º 7.

La Fig. 237 indica come si usa modificare in pratica la forma del muro alla sommità.

9. — Muri con contrafforti.

Comunemente non è conveniente l'impiego di tale specie di muri: gli speroni interni si devono adottare soltanto quando si costruiscono dei muri di sostegno con forte strapiombo interno, i quali non potrebbero reggersi prima di trovarsi appoggiati al terrapieno, se non sorretti da tali speroni (i quali però, non dovranno essere considerati nella resistenza del muro, e cioè a questo si assegneranno le dimensioni che gli competerebbero come se gli speroni non esistessero); gli speroni esterni saranno il miglior ripiego per rinforzare un muro di sostegno già eseguito.

Il calcolo dei muri con speroni esterni od interni, con o senza archi fra gli speroni, è ovvio dopo quanto s'è esposto precedentemente: e cioè, basterà porre la condizione che risultino uguali i momenti di S e del peso del muro, rispetto al centro di pressione sulla base [per la determinazione del centro di pressione si veda al N.º 1 lett. B), e per il calcolo di S si veda al N.º 2 e seguenti].

10. — Generalità sulle fondazioni dei muri di sostegno delle terre.

A) Per la stabilità dei muri di sostegno è necessario che abbiano una fondazione assolutamente immobile.

Se la base del muro sta sulla *viva roccia*, non occorrono fondazioni speciali, bastando tagliare la roccia a superficie orizzontale o leggermente inclinata verso il terrapieno per posarvi la base del muro, od anche a gradini di m. $0.30 \div 0.40$ d'altezza con lieve inclinazione in senso opposto a quella generale della fondazione.

Allorchè il terreno, ancorchè non sia roccia viva, si presenti *naturalmente atto a sopportare costruzioni murarie*, la profondità dello scavo di fondazione non dev'essere $<$ di m. $0.70 \div 0.80$ e larghezza al fondo alquanto maggiore di quella della base del muro in elevazione, e tale che ivi il terreno resista stabilmente alla pressione complessiva che si esercita su esso.

In caso diverso si deve raggiungere colla fondazione il *terreno resistente*, che può essere roccia, ghiaia, sabbia od anche un banco d'argilla di spessore non minore di m. 3. Però, affinché la sabbia offra una buona fondazione, è necessario che sia asciutta, od almeno non soggetta ad essere asportata da *lame d'acqua sotterranee*; per l'argilla fa duopo che si trovi al riparo dagli *agenti atmosferici*.

Quando il terreno sodo non si trova a grande profondità sotto la base del muro di sostegno, si scava fino a raggiungerlo, e lo scavo alquanto più largo della base del muro si riempie di calcestruzzo o di muratura di pietrame, od anche di buona sabbia (però per un'altezza non maggiore di m. 1) ben battuta per strati di m. 0.20 circa, e ciò sino a m. 0.50 sotto al piano di campagna — elevandovi poscia sopra il muro di sostegno.

Quando invece il terreno sodo è molto profondo si fonda con *pilastrì* o con *palificate*. Infine, allorchè si tratta di *terreno cedevole* e non si può raggiungere il terreno sodo coi mezzi testè indicati, si deve cercare di distribuire la pressione uniformemente sopra una *ampia platea*, onde rendere piccola la pressione per m.².

B) *Carichi di sicurezza che possono sopportare i terreni.*

Indichiamo con:

K il carico di sicurezza sul terreno di fondazione in kg. per m.²,

Π il peso in kg. di 1 m.³ di terreno,

h la profondità in m. del piano di fondazione,

α l'angolo di natural declivio del terreno ($30^\circ \div 37^\circ 30'$ vedi

Tabella LX pag. 355);

si ha, secondo esperienze di Yankowsky (*):

$$K = 2 \Pi \eta \left(\frac{1 + \sqrt{2 \operatorname{sen} \alpha}}{1 - \sqrt{2 \operatorname{sen} \alpha}} \right)^2 = 2 \Pi \eta B^2 ;$$

per $\alpha = 15^\circ \quad 20^\circ \quad 25^\circ \quad 30^\circ \quad 35^\circ \quad 37^\circ 30' \quad 40^\circ \quad 45^\circ$
 si ha $B^2 = 4,6427 \quad 8,2578 \quad 15,769 \quad 33,971 \quad 91,987 \quad 179,03 \quad 440,66 \quad \infty$

Per un buon terreno $K = 25000 \div 30000$ kg. per m.².

In generale si prende K :

per roccia 0,1 della relativa resistenza a rottura, per compressione,

cioè ordinariamente circa $5 \div 15$ kg. per cm.²,

per ciottoli e sabbia circa $2,5 \div 7$ kg. per cm.²,

per argilla e sabbia circa $2 \div 3$ kg. per cm.².

Naturalmente che non bisogna mai superare il valore di K in corrispondenza agli spigoli ove si ha la massima pressione.

11. — Muri di sostegno delle acque.

A) Pressione dell'acqua sulle pareti piane.

Si sa che, sopra una porzione piana della parete d'un recipiente contenente un liquido, esso esercita una pressione data dal peso di un prisma di liquido avente per base quella porzione di parete, e per altezza la profondità del suo baricentro sotto la superficie libera del liquido. Però il centro di pressione non coincide col baricentro della superficie premuta, ma trovasi più basso.

Se la parete premuta è un rettangolo con due lati orizzontali, denotando con h_1, h_2 le loro profondità sotto la superficie libera del liquido, la profondità del centro di pressione sotto la stessa è

$$h_1 + \frac{h_1 + 2h_2}{h_1 + h_2} \cdot \frac{h_2 - h_1}{3}$$

onde, l'altezza verticale del centro di pressione al disopra del lato inferiore del rettangolo, sarà:

$$\frac{2h_1 + h_2}{h_1 + h_2} \cdot \frac{h_2}{3} - \frac{h_1}{3}$$

Quando $h_1 = 0$, ossia allorchè il lato superiore orizzontale si trova nella superficie libera del liquido, l'ultima espressione diventa

$$\frac{h_2}{3} .$$

B) Forma teorica dei muri di sostegno delle acque (**).

(*) C. f. r. HÜTTE 1903 — II pag. 55.

(**) C. f. r. CASTIGLIANO Manuale IV.

In un muro con la base AB orizzontale, la cui sezione trasversale verticale è un triangolo rettangolo ABC , il centro di pressione su AB , se nessuna forza agisce su di esso all'infuori del proprio peso, cade al limite D del terzo medio verso il vertice B dell'angolo retto; la stessa cosa accade per una sezione orizzontale qualunque. Segue che la retta CD è il luogo dei centri di pressione, allorchè il muro è sottoposto soltanto all'azione del proprio peso.

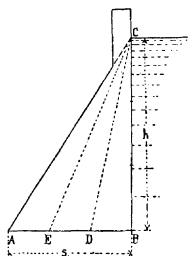


Fig. 238.

Se contro la parete piana e verticale BC si eleva dell'acqua sino in C , e se si vuole che il centro di pressione sulla base cada al limite esterno E del terzo medio, la parete AC esterna del muro dovrà avere la scarpa

$$i_4 = \sqrt{\frac{\Pi}{\Pi_1}}$$

dove

Π è il peso di 1 m.^3 d'acqua, e
 Π_1 è il peso di 1 m.^3 di muratura ;
 assumendo $\Pi = 1000$, $\Pi_1 = 2250$, ne viene

$$i_4 = \frac{2}{3} ,$$

cioè la faccia AC del muro deve avere la scarpa di 2 di base per 3 d'altezza.

Quando ciò ha luogo, la retta CE è il luogo dei centri di pressione sotto l'azione del peso proprio del muro e della spinta dell'acqua, ossia a serbatoio carico.

Dunque: *passando dal serbatoio vuoto al carico, il luogo dei centri di pressione, passa dalla retta CD alla retta CE* ; ossia il centro di pressione in una sezione qualunque passa dal *limite interno* al *limite esterno* del terzo medio.

È importante osservare — come si è già fatto pèi muri di sostegno — che se la sezione del muro fosse rettangolare colla grossezza costante \overline{BA} , il suo volume sarebbe doppio di quello del muro triangolare, e tuttavia il centro di pressione sulla base a serbatoio carico cadrebbe al limite esterno del terzo medio, e perciò non si avrebbe maggior stabilità. Anzi, relativamente alla pressione massima per m.^2 sulla base, il muro rettangolare — benchè con un volume doppio di quello triangolare — avrebbe una stabilità minore: infatti, pel muro triangolare si ha

$$V = \frac{1}{2} \Pi_1 s_0 h ,$$

onde la pressione media per m.² sulla base è

$$\frac{1}{2} \Pi_1 h ;$$

siccome poi la pressione massima sulla base è doppia della media — tanto a serbatoio vuoto, quanto carico — ne segue che la pressione massima per m.² sulla base è $\Pi_1 h$ ed ha luogo a serbatoio vuoto sullo spigolo interno, ed a serbatoio carico sullo spigolo esterno: pel muro rettangolare la pressione sulla base a serbatoio vuoto è uniformemente distribuita ed è uguale a $\Pi_1 h$, cioè al massimo che si ha pel muro triangolare: ma a serbatoio carico la pressione massima è doppia della media, ossia è uguale a $2 \Pi_1 h$, od ancora, al doppio della massima che ha luogo nel muro triangolare.

Dunque, *teoricamente*, i muri di sostegno delle acque hanno per sezione un *triangolo rettangolo con la parete interna verticale, con quella esterna a scarpa 2:3 ed uno spessore nullo alla sommità*.

Se h è espresso in m., la pressione massima per m.² sul serbatoio è $\Pi_1 h = \text{kg. } 2250 h$.

Si ha poi

$$V = \frac{h^2 i_1}{2} = \frac{h^2}{2} \left\{ \frac{\Pi}{\Pi_1} = \frac{h^2}{3} \right.$$

C) Forma pratica dei muri di sostegno delle acque.

a) In pratica si usa assegnare uno spessore costante per una certa altezza a partire dalla sommità, ed il ciglio del muro si suole tenere alquanto più alto del massimo livello dell'acqua (figura 238 pag. 383).

Inoltre, in generale, non si vuole che la massima pressione per cm.² oltrepassi un certo valore, che taluni prendono di kg. 6 ed altri fino di kg. 9 ÷ 10. Noi stabiliamo kg. 7 come limite massimo della pressione nella parte superiore, ma riteniamo che per muri altissimi si possa ammettere presso la base una pressione alquanto maggiore, per non andare incontro a spessori esagerati, coi quali la trasmissione delle pressioni non potrebbe più aver luogo con la legge adottata nel calcolo.

Ciò posto, essendo $\Pi_1 h = 2250 h$ la pressione massima per m.² che si ha nel muro teorico, è chiaro che per $h = \text{m. } 30$, la pressione massima sarà di $\Pi_1 \cdot 30 = \text{kg. } 67500$ per m.², ossia di kg. 6,75 per cm.².

Pertanto per i muri di $h < \text{m. } 30$ si potrà adottare senz'altro la forma teorica con la variante suddetta alla sommità (Fig. 238 pag. 383) fissando lo spessore costante e la sopraelevazione (franco) della stessa a seconda delle particolari esigenze di ciascun serbatoio.

Per i muri di $h > \text{m. } 30$, si adotterà sino alla profondità di m. 30 la forma dei muri di $h < \text{m. } 30$: ma per la parte infe-

riore converrà aumentare la larghezza delle sezioni rispetto a quelle teoriche, tanto verso l'interno, quanto verso l'esterno, per diminuire la pressione massima unitaria, e contenerla al disotto del limite fissato; e si potranno seguire le seguenti regole (compendiate nella fig. 239).

1.^o fra le profondità di m. 30 e di m. 45 sotto il più alto livello del liquido, si darà al muro la scarpa esterna di 1 di base per 1 d'altezza, e la scarpa interna di $\frac{1}{3}$ di base per 1 d'altezza;

2.^o fra la profondità di m. 45 e quelle maggiori, si continuerà alla parete esterna la scarpa di 1:1, e si darà alla parete interna la scarpa di $\frac{2}{3}$ di base per 1 d'altezza.

b) Formole e tabelle relative alla forma di muro proposta (Fig. 239).

Prescindendo dal piccolo trapezio aggiunto superiormente, la sezione posta ad una profondità h sotto il vertice C del muro, ha la stessa larghezza in tutti i muri di altezza maggiore di h , ed è la base di un muro avente esattamente l'altezza h : cosicchè le condizioni di stabilità nelle diverse sezioni di un muro avente una data altezza, saranno esattamente le stesse, come per le sezioni poste alla stessa profondità sotto il ciglio teorico C , in un muro avente un'altra altezza qualunque.

Analogamente il volume della porzione di muro posta al di sopra d'una sezione orizzontale alla profondità h sotto C , è uguale al volume d'un muro avente l'altezza h , astrazione fatta dal solito piccolo trapezio.

Chiamando:

h la profondità — in m. — d'una sezione sotto il ciglio teorico C del muro,

s la larghezza di tale sezione;

N, N_1 le pressioni normali,

T, T_1 gli sforzi di taglio,

M, M_1 i momenti di flessione rispetto al centro della sezione, corrispondenti rispettivamente ai casi del serbatoio vuoto e del serbatoio pieno;

si avranno le seguenti *formole generali*:

1.^o) Per $h < m. 30$;

$$s = \frac{2}{3} h, \quad V = \frac{1}{3} h^2,$$

$$N = 2250 \frac{h^2}{3}, \quad T = 0, \quad M = 2250 \frac{h^3}{27} = \frac{250}{3} h^3,$$

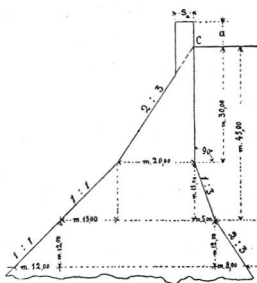


Fig. 239.

$$N_1 = N, \quad T_1 = 1000 \frac{h^2}{2}, \quad M_1 = M - 1000 \frac{h^3}{6}.$$

2.^o Per $m. 30 < h < m. 45$:

$$s = m. 20 + \frac{4}{3}(h - 30), \quad V = m.^3 300 + 20(h - 30) + \frac{(2h - 30)^2}{3};$$

$$N = 2250 [300 + 20(h - 30) + \frac{2}{3}(h - 30)^2],$$

$$T = o,$$

$$M = 2250 [1000 + 100(h - 30) + \frac{10}{3}(h - 30)^2 + \frac{2}{27}(h - 30)^3],$$

$$N_1 = N + 1000 \left[10(h - 30) + \frac{(h - 30)^2}{6} \right],$$

$$T_1 = 1000 \frac{h^2}{2},$$

$$M_1 = M - 1000 [4500 + 350(h - 30) + \frac{25}{3}(h - 30)^2 + \frac{2}{27}(h - 30)^3].$$

3.^o Per $h > m. 45$:

$$s = m. 40 + \frac{5}{3}(h - 45), \quad V = m.^3 750 + 40(h - 45) + \frac{5}{6}(h - 45)^2;$$

$$N = 2250 [750 + 40(h - 45) + \frac{5}{6}(h - 45)^2],$$

$$T = o,$$

$$M = 2250 [3500 + 125(h - 45) + \frac{10}{3}(h - 45)^2 + \frac{5}{108}(h - 45)^3],$$

$$N_1 = N + 1000 \left[187.5 + 30(h - 45) + \frac{(h - 45)^2}{3} \right],$$

$$T_1 = 1000 \frac{h^2}{2},$$

$$M_1 = M - 1000 \left[11875 + 381.25(h - 45) + \frac{5}{6}(h - 45)^2 + \frac{(h - 45)^3}{27} \right].$$

Per avere la distanza ζ del centro di pressione dal centro della sezione, come si sa, si divide in ciascun caso il momento di flessione per la pressione normale: ed applicando la formola

$$\varepsilon_x = \frac{N}{\Omega} \pm M \frac{v}{I}, \quad \text{ossia} \quad \varepsilon_x = \frac{N}{s} \pm \frac{6M}{s^2},$$

si ottiene la pressione per $m.^2$ tanto sullo spigolo interno, quanto su quello esterno della sezione considerata.

Dalla tabella LXXV a pagina seguente si rileva come cresca rapidamente s nonchè V col crescere di h : per es., mentre

per $h = m. 30$ si ha $s = m. 20$ e $V = m.^3 300$,
 per $h = m. 60$ „ „ $s = m. 65$ e $V = m.^3 1538$.

Il volume \mathfrak{B} totale per m. di lunghezza del muro, e cioè compresa la parte corrispondente al piccolo trapezio aggiunto superiormente, è

$$\mathfrak{B} = V + V_a = V + s_a \alpha + \frac{3}{4} s_a^2 .$$

L'aggiunta di questa parte di muratura, in generale, migliora alquanto le condizioni di stabilità, perchè aumenta, il momento della resistenza del muro: essendo $\Pi_1 V_a = 2250 V_a$ il peso della parte di muro aggiunta, e chiamando M_a il suo momento rispetto al centro di una data sezione, di larghezza s , si ha che: la pressione per m.² sullo spigolo a monte (tanto a serbatoio vuoto, che carico) aumenta della quantità

$$\frac{2250 V_a}{s} + \frac{6 M_a}{s^2} ,$$

e la pressione per m.² sullo spigolo a valle aumenta della quantità

$$\frac{2250 V_a}{s} - \frac{6 M_a}{s^2} .$$

Pertanto sarà facile in ciascun caso particolare calcolare di quanto si devono modificare le pressioni per m.² date dalla precedente tabella; però il più delle volte non occorrerà alcun calcolo, adottando senz'altro le pressioni date dalla tabella, e ritenendo che la parte di muro aggiunta alla sommità, aumenta la stabilità.

12. — Formole empiriche sugli spessori dei muri.

A) Muri isolati.

Devono resistere alla spinta del vento ed al peso proprio. Chiamando

p la spinta del vento in kg. per m.² ,

$\mathfrak{B} = \Pi_1 V$ il peso d'un m. corr. di muro,

K il carico di sicurezza della muratura;

per la stabilità si deve prendere

$$s > \frac{1}{2K} \left(\mathfrak{B} + \sqrt{\mathfrak{B}^2 + 12 K p h^2} \right) . \quad (1)$$

Rondelet ha dato le formole empiriche

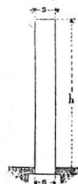


Fig. 240.

A SERBATOIO VUOTO

Profondità in m. delle sezioni	Largh. in m. delle sezioni	Vol. in m. ³ del muro per ogni m. di lungh. del muro, al disopra della sez. considerata	Momento flettente	Pressione normale	Dist. in m. del centro di press. dal centro della sezione	Press. in kg. per m. ² sullo spigolo a	
						monte	valle
<i>h</i>	<i>s</i>	<i>V</i>	<i>M</i>	<i>N</i>	$\delta = \frac{M}{N}$	ϵ (mass.)	ϵ (min.)
3	2	3	2250	6750	0,33	6750	0
6	4	12	18000	27000	0,67	13500	0
9	6	27	60750	60750	1,00	20250	0
12	8	48	144000	108000	1,33	27000	0
15	10	75	281250	168750	1,67	33750	0
18	12	108	486000	243000	2,00	40500	0
21	14	147	771750	330750	2,33	47250	0
24	16	192	1152000	432000	2,67	54000	0
27	18	243	1640250	546750	3,00	60750	0
30	20	300	2250000	675000	3,33	67500	0
33	24	366	2997000	823500	3,64	65531	3094
36	28	444	3906000	999000	3,91	65572	5786
39	32	534	5004000	1201500	4,16	66867	8227
42	36	636	6318000	1431000	4,42	69000	10500
45	40	750	7875000	1687500	4,67	71719	12656
48	45	878	8789063	1974375	4,45	69917	17833
51	50	1020	9855000	2295000	4,29	69552	22248
54	55	1178	11089688	2649375	4,18	70166	26174
57	60	1350	12510000	3037500	4,12	71475	29775
60	65	1538	14132813	3459375	4,09	73291	33151
63	70	1740	15975000	3915000	4,08	75490	36367
66	75	1958	18053438	4404375	4,10	77982	39468
69	80	2190	20385000	4927500	4,14	80705	42483

A SERBATOIO CARICO

Momento flettente	Pressione normale	Sforzo di taglio	Dist. in m. del centro di press. dal centro della sezione	Press. in kg. per m. ² sullo spigolo a		Rapporto fra lo sforzo di taglio e la press. norm.
				monte	valle	
M_1	N_1	T_1	$\beta_1 = \frac{M_1}{N_1}$	$\varepsilon_1(\text{mass.})$	$\varepsilon_1(\text{min})$	$\frac{T_1}{N_1}$
— 2250	6750	4500	— 0,33	0	6750	0,67
— 18000	27000	18000	— 0,67	0	13500	0,67
— 60750	60750	40500	— 1,00	0	20250	0,67
— 144000	108000	72000	— 1,33	0	27000	0,67
— 281250	168750	112500	— 1,67	0	33750	0,67
— 486000	243000	162000	— 2,00	0	40500	0,67
— 771750	330750	220500	— 2,33	0	47250	0,67
— 1152000	432000	288000	— 2,67	0	54000	0,67
— 1640250	546750	364500	— 3,00	0	60750	0,67
— 2250000	675000	450000	— 3,33	0	67500	0,67
— 2630000	855000	544500	— 3,08	8229	63021	0,63
— 3010000	1065000	648000	— 2,83	15000	61072	0,61
— 3375000	1305000	760500	— 2,59	21006	60556	0,58
— 3710000	1575000	882000	— 2,36	26574	60926	0,56
— 4000000	1875000	1012500	— 2,13	31875	61875	0,54
— 4237187	2254875	1152000	— 1,88	37554	62663	0,51
— 4329500	2674500	1300500	— 1,62	43099	63881	0,49
— 4257062	3133875	1458000	— 1,36	48536	65423	0,47
— 3996000	3633000	1624500	— 1,10	53890	67210	0,45
— 3523437	4171875	1800000	— 0,84	59179	69186	0,43
— 2816500	4750500	1984500	— 0,59	64416	71313	0,42
— 1852312	5368875	2178000	— 0,35	69609	73561	0,41
— 608000	6027000	2380000	— 0,11	74768	75908	0,39

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{1}{8} h && \text{per avere una grande stabilità,} \\ s &= \frac{1}{10} h && \text{'' '' '' media '' ,} \\ s &= \frac{1}{12} h && \text{'' '' il minimo grado di stabilità.} \end{aligned} \right\} (2).$$

Si impiega anche la formola

$$s = \frac{1}{4} \sqrt{h}.$$

B) **Muro di contorno legato nelle estremità ad altri muri.**
Essendo l la lunghezza del muro, si deve prendere

$$s > \frac{1}{2K} \left(p + \sqrt{p^2 + 270 K p \frac{l h^4}{l^2 + 36 h^2}} \right) \quad (3).$$

Rondelet ha dato la

$$s = \frac{1}{8} \frac{h l}{\sqrt{h^2 + l^2}} \quad (4),$$

che si applica anche a muri isolati cingenti una pianta poligonale d'un numero di lati non maggiore di 12. Se il poligono ha più di 12 lati od è un circolo

$$s = \frac{1}{8} \frac{h r}{\sqrt{4 h^2 + r^2}} \quad (5),$$

dove r è il raggio del circolo circoscritto.

C) **Muri sostenenti un tetto a due pioventi su pianta rettangolare.**

Pei muri paralleli al comignolo

$$s = \frac{1}{12} \frac{l h}{\sqrt{l^2 + h^2}} \quad (6),$$

ove l è la distanza fra i due muri ossia la larghezza dell'edificio.

Pei muri perpendicolari al comignolo serve pure la (6) prendendo per h l'altezza media.

Pei muri sostenenti una tettoia a padiglione su pianta rettangolare serve sempre la (6) prendendo per l il lato minore del rettangolo.

Negli edifici a tre navate, pei muri longitudinali interni (Fig. 241).

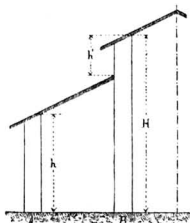


Fig. 241.

$$s = \frac{1}{24} \frac{(H + h') l}{\sqrt{(H + h')^2 + l^2}} \quad (7).$$

invece lo spessore s dei muri longitudinali esterni è dato dalla (6) ponendo $l = \overline{AB}$.

Per gli altri muri normali al comignolo serve la (4) ponendovi per h l'altezza media.

Nelle fabbriche a diversi piani con solai, quando fra i muri di ambito o perimetrali non vi sia alcun muro intermedio parallelo, il loro spessore è

$$s = \frac{1}{48}(2l + h) + cn,$$

ove:

- l distanza orizzontale dei muri perimetrali.
- h distanza verticale del pavimento del piano considerato dalla radice del tetto.
- n numero dei piani sovrastanti.
- c coefficiente dipendente dalla natura dei materiali impiegati ($-0,027 \div 0,054$).

Nelle fabbriche in cui fra i muri d'ambito se ne trova un terzo ad essi parallelo, gli spessori s , s_1 e s_2 dei muri perimetrali, del muro di mezzo e dei muri trasversali, sono

$$s = \frac{1}{48}(l + h) + cn, \quad s_1 = \frac{1}{36}(l + h_1) + c_1 n, \quad s_2 = \frac{1}{36}(l' + h_1) + c_1 n,$$

in cui:

- h_1 altezza del piano considerato.
- l' distanza fra i muri trasversali.
- c_1 coefficiente variabile fra $0,013 \div 0,027$

e le altre lettere conservano i significati precedenti.

Redtenbacher, pei muri delle case d'abitazione e fabbriche civili, dà

$$s_1 = \frac{l}{40} + \frac{h_1}{25},$$

$$s_2 = \frac{l}{40} + \frac{h_1 + h_2}{25},$$

.

$$s_n = \frac{l}{40} + \frac{h_1 + h_2 + \dots + h_n}{25},$$

dove:

- l larghezza della fabbrica.
- h_1, h_2, \dots, h_n altezze dei diversi piani contate da alto in basso:
- s_1, s_2, \dots, s_n spessori dei muri ai singoli piani.

CAPITOLO XIII.

Tubi circolari. Caldaie a vapore. Archi e vòlte a botte circolari. Anelli. Rulli. Archi molto ribassati. Archi di forma qualunque. Piedritti.

1. — Tubi circolari.

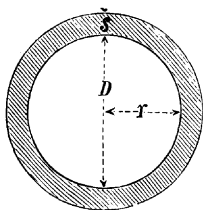


Fig. 242.

Siano:

D ed r il diametro ed il raggio interno del tubo,

s lo spessore delle pareti,

P_i la pressione interna per ogni unità di superficie,

P_e la pressione esterna per ogni unità di superficie,

K il carico di sicurezza, riferito alla unità di superficie, della sostanza ond'è fatto il tubo.

Per la stabilità si dovrà avere (formola

esatta del Lamè):

$$s = \frac{D}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{P_i - P_e}{K + P_i}}} - 1 \right)$$

Se P_i e P_e sono molto piccoli di fronte a K , si può calcolare lo spessore dei tubi colla formola approssimata:

$$s = r \frac{P_i - P_e}{K + P_i},$$

ed anche più semplicemente, con sufficiente approssimazione, colla formola

$$s = r \frac{P_i - P_e}{K},$$

ossia, chiamando n il numero di atmosfere che misura la pressione $P_i - P_e$, si può calcolare s colla formola:

$$s = \frac{10330}{2K} n D .$$

Queste formole si potranno impiegare pei tubi di condotta, perchè in essi la pressione interna è sempre di poche atmosfere, ma pei cilindri dei torchi idraulici, nei quali ordinariamente la pressione raggiunge valori altissimi, bisogna far uso della prima formola data.

Nel calcolo dello spessore dei tubi per condotta d'acqua, occorre tener conto anche dei colpi d'ariete che si producono quando si chiude il robinetto allo sbocco.

Chiamando:

p l'incremento di pressione interna che si produce durante il colpo d'ariete,

Π il peso di 1 m.³ d'acqua,

v la velocità colla quale l'acqua corre nel tubo prima del colpo d'ariete,

α il coefficiente di compressibilità cubica dell'acqua, per ogni kg. di pressione sopra 1 m.² di superficie (che secondo Regnault è

$$\alpha = \frac{0,0000477}{10330} = 0,0000000464) ,$$

si deve avere per la stabilità:

$$s = r \left(\sqrt{\frac{K + P_i + p}{K - P_i + 2P_e - p}} - 1 \right) . (*)$$

calcolando il valore di p a mezzo della formola:

$$p = \frac{7,14 v \sqrt{E}}{\sqrt{\frac{K - P_i + 2P_e - p}{P_i - P_e + p} + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} + \alpha E \right)}}$$

nella quale E è il modulo di elasticità del tubo; il valore di p si ricava dall'ultima equazione a mezzo di successive sostituzioni, ponendo in prima approssimazione $p = 0$

Se le pressioni sono espresse in atmosfere, bisogna nelle due formole precedenti sostituire

$$\frac{K}{10330} \text{ al posto di } K$$

e nel 1.º membro della seconda

$$10330 p \quad \text{al posto di} \quad p .$$

(*) C. f. r. CASTIGLIANO — Intorno alla resistenza dei tubi alle pressioni continue ed ai colpi d'ariete — Memoria presentata all'Accademia delle scienze di Torino, 25 Gennaio 1874.

Pei tubi di ferro laminato

$$E = 18000000000 \quad , \quad K = \frac{5000000}{10330} = 484 \quad ,$$

perciò

$$p = \frac{92,75 \ v}{\sqrt{\frac{484 - P_i + 2 P_e - p}{P_i - P_e + p} + 43,01}}$$

e per quelli di ghisa

$$E = 12000000000 \quad , \quad K = \frac{2170000}{10330} = 210 \quad ,$$

onde

$$p = \frac{75,70 \ v}{\sqrt{\frac{210 - P_i + 2 P_e - p}{P_i - P_e + p} + 29,09}}$$

È importante di osservare che questi valori di p sono indipendenti dal diametro del tubo; permodochè per tubi della stessa sostanza, sottoposti alle stesse pressioni P_i e P_e e nei quali l'acqua corra colla stessa velocità, la pressione p risulta la stessa, qualunque sia D , e perciò lo spessore riesce proporzionale a D .

In pratica lo spessore dei tubi di condotta si calcola ordinariamente colle seguenti formole, nelle quali il primo termine non è altro che lo *spessore costante teorico* $\frac{10330}{2K} n D$, ed il secondo è uno *spessore costante necessario per resistere ai colpi d'ariete ed agli urti* che i tubi subiscono durante il trasporto e la posa in opera:

pei tubi di ferro	per	$K = 5000000$, $s = 0,00103 \ n D + 0^m,0030$
"	"	$ghisa$	" $K = 2170000$, $s = 0,00238 \ n D + 0^m,0085$
"	"	$rame$	" $K = 3500000$, $s = 0,00147 \ n D + 0^m,0040$
"	"	$piombo$	" $K = 213000$, $s = 0,02420 \ n D + 0^m,0050$
"	"	$zinco$	" $K = 833000$, $s = 0,00620 \ n D + 0^m,0040$
"	"	$legno$	" $K = 160000$, $s = 0,03230 \ n D + 0^m,0270$
pei tubi di pietre natur.		$K = 1400000$, $s = 0,00363 \ n D + 0^m,0300$
"	"	$artif.$	$K = 960000$, $s = 0,00538 \ n D + 0^m,0400$

Per assicurarsi della resistenza di un tubo, soggetto a colpi di ariete, si dovrà anche determinare la massima pressione dovuta ai detti colpi, che è:

$$P_{(mass.)} = \frac{0,000978 \ v \sqrt{E}}{\sqrt{s(D+s)} + \left(\alpha E + \frac{5}{2} \right)}$$

la quale pei tubi di ferro diventa:

$$P_{(\text{mass.})} = \frac{131,25}{\sqrt{s(D+s)} + 86,02},$$

e per quelli di ghisa:

$$P_{(\text{mass.})} = \frac{107,14}{\sqrt{s(D+s)} + 58,18};$$

e quindi si otterrà la massima tensione per m.², che ha luogo nel tubo colla formola:

$$K = \frac{[P_i + P_{(\text{mass.})}] D^2 + [P_i + P_{(\text{mass.})} - 2 P_e] (D + 2 s)^2}{4 s (D + s)}.$$

2. — Caldaie a vapore.

La spessorezza della lamiera delle caldaie a vapore veniva calcolata in Francia colla formola:

$$s = 0,0018 (n - 1) D + 0^m,003,$$

nella quale

s è la spessorezza da darsi alla lamiera.

D il diametro interno della caldaia in m.

n la pressione assoluta in atmosfere nell'interno della caldaia.

Il decreto del 25 gennaio 1865, non stabilisce invece la spessorezza da darsi alle caldaie, lasciandolo alla pratica dei costruttori, ma riserva al Governo la prova delle caldaie. Queste prove si fanno col torchio idraulico, e la pressione di prova, che dappprincipio si era stabilito dovesse raggiungere il triplo dell'effettiva pressione a cui la caldaia poteva essere assoggettata in servizio, venne col citato decreto ridotta al doppio soltanto.

È da notare che nelle caldaie cilindriche le sezioni di massimo sforzo sono quelle diametrali, fatte secondo le generatrici, mentre nel senso trasversale lo sforzo delle lamiere è appena la metà. Così pure lo sforzo massimo nelle pareti di una caldaia sferica non è che la metà di quello massimo che ha luogo in una caldaia cilindrica a parità di diametro e di pressione interna. Tuttavia nelle caldaie frequentemente impiegate, composte di una parte cilindrica, e di due parti emisferiche alle estremità, suolsi mantenere la spessorezza costante ed eguale a quella occorrente alla parte cilindrica.

Sia un involuppo cilindrico di raggio interno r e di raggio esterno R soggetto ad una pressione *relativa* interna od esterna di P kg. per m.² della superficie interna od esterna dell'involuppo; deno-

tiamo con s la spessore

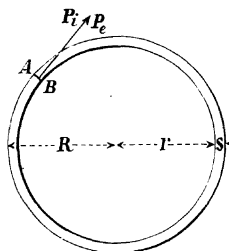


Fig. 243.

da assegnarsi, per la stabilità, alla lamiera dell'involuppo, essendo K il carico di sicurezza per m^2 della sostanza con cui sono fatte le lamiere, e consideriamo un m . di lunghezza dell'involuppo misurato secondo una sua generatrice rettilinea. S'immagini una sezione \overline{AB} fatta nell'involuppo con un piano passante per una generatrice e per un raggio; allora la pressione o tensione normale, alla sezione \overline{AB} si ottiene applicando i teoremi del Castigliano, ed è:

$$P_i = r P, \text{ se la pressione } P \text{ è interna,}$$

$$P_e = R P, \text{ se la pressione } P \text{ è esterna.}$$

Per conseguenza la pressione relativa cui potrà essere assoggettato l'involuppo sarà data da:

$$P = K \frac{s}{r} \quad \text{se la pressione } P \text{ è interna,}$$

$$P = K \frac{s}{R} \quad \text{se la pressione } P \text{ è esterna.}$$

La pressione relativa P si può esprimere per mezzo della differenza delle pressioni assolute che premono contemporaneamente sulla superficie interna ed esterna dell'involuppo: chiamando n il numero di atmosfere che premono la superficie interna, ed n_1 il numero di atmosfere che premono la superficie esterna, si avrà:

$$P = 10330 (n - n_1), \quad \text{quando l'eccesso } P \text{ di pressione è interno,}$$

$$P = 10330 (n_1 - n), \quad \text{quando l'eccesso } P \text{ di pressione è esterno,}$$

e quindi per la stabilità si dovrà prendere:

$$s = 5165 (n - n_1) \frac{2r}{K}, \quad \text{quando la pressione } P \text{ è interna,}$$

$$s = 5165 (n_1 - n) \frac{2R}{K}, \quad \text{quando la pressione } P \text{ è esterna.}$$

Queste due formole di stabilità danno le spessezze teoriche da assegnarsi alle lamiere; in pratica però conviene aumentare di una costante queste spessezze, e tener conto che il coefficiente K diminuisce coll'elevata temperatura ed in causa dei chiodi. Se nella prima di queste formole si fa $K = \text{kg. } 2,80$ per mm.^2 , che è il massimo valore che si può assegnare a K per le caldaie a vapore, $n_1 = 1$, e se si aggiunge la costante $0^{\text{m}},003$, si ottiene:

$$s = 0,0018 (n - 1) 2r + 0,003,$$

che è appunto la formola già usata in Francia e sopra riportata.

Applicando i detti teoremi del Castigliano si trovano pure l'allungamento od accorciamento ξ che subisce la circonferenza media dell'inviluppo sotto la pressione P , e si ha:

$$\xi = \frac{Pr}{E\Omega} 2\pi r = \frac{P_i}{E\Omega} 2\pi r \quad , \text{ se la pressione } P \text{ è interna,}$$

$$\xi = \frac{PR}{E\Omega} 2\pi R = \frac{P_e}{E\Omega} 2\pi R \quad , \text{ se la pressione } P \text{ è esterna,}$$

essendo Ω l'area della sezione AB per una lunghezza d'inviluppo di 1 m., ed E il modulo di elasticità delle lamiere, il quale ad alta temperatura è assai minore di quello dato dall'esperienza fatta a bassa temperatura.

L'allungamento od accorciamento δ di un diametro dell'inviluppo è:

$$\delta = \frac{Pr}{E\Omega} 2r = 20660 (n - n_1) \frac{r^2}{E\Omega} \quad , \quad \text{ se la pressione } P \text{ è interna,}$$

$$\delta = \frac{PR}{E\Omega} 2R = 20660 (n_1 - n) \frac{R^2}{E\Omega} \quad , \quad \text{ se la pressione } P \text{ è esterna.}$$

La seguente tabella dà i valori di s per diversi diametri D di una caldaia a vapore assoggettata ad una pressione assoluta interna di n atmosfere.

TABELLA LXXVI.

D (in m.) =	1	1	1,50	2	1	1,50	2	1
n (in atm) =	2	4	4	4	6	6	6	8
s (in mm.) =	5	8,5	11	14	12	16,5	21	15,5
D (in m.) =	1,50	2	1	1,50	2	1	1,50	2,00
n (in atm.) =	8	8	10	10	10	15	15	15
s (in mm.) =	22	28	21	30	39	29	42	55

Noi abbiamo sin qui ammesso che si possa prendere $K = 2,80$ per mm.^2 , ciò che infatti si può fare per le caldaie a vapore colle chiodature a doppia fila di chiodi. Però se le chiodature delle caldaie a vapore sono ad una sola fila di chiodi non converrà prendere $K > \text{kg. } 2,10$ per mm.^2 .

B) Fondo delle caldaie e dei serbatoi (*).

a) FONDO PIANO MOLTO SOTTILE. Se il fondo è molto sottile rispetto al suo diametro, e se trovasi tutto all'intorno collegato ad un robusto anello, il quale impedisca quasi interamente il restringimento del diametro del fondo, detta p la pressione per m^2 sul fondo, s lo spessore e D il diametro di esso, la tensione P del fondo riferita al m^2 . può calcolarsi colla formola:

$$P = \sqrt[3]{\frac{p^2 D^2 E}{72 s^2}}$$

la freccia f d'inflessione nel centro della lastra colla formola:

$$f = \frac{p D^2}{16 P}$$

e lo spessore da darsi alla lastra sarà:

$$s \geq p D \sqrt{\frac{E}{72 K^3}}$$

b) FONDO SFERICO MOLTO SOTTILE. Siano:

Q il peso totale che il fondo deve sopportare,

D il diametro del serbatoio,

F la saetta del fondo,

s la spessorezza del fondo stesso.

R il raggio della sfera a cui appartiene il fondo del serbatoio,

P la tensione per m^2 nei punti del fondo in cui esso si congiunge alle pareti laterali,

K il carico di sicurezza del materiale del fondo riferito al m^2 , sarà:

$$R = \frac{D^2 + 4 F^2}{8 F}, \quad P = \frac{2 R Q}{\pi D^2 s} - \frac{(D^2 + 4 F^2) Q}{4 \pi D^2 F s},$$

e lo spessore da assegnarsi al fondo sarà:

$$s > \frac{(D^2 + 4 F^2) Q}{4 \pi D^2 F K}$$

Se il serbatoio contiene dell'acqua, ed ha una saetta assai piccola rispetto al diametro, si potrà con molta approssimazione prendere:

$$s = \frac{1000 (D^2 + 4 F^2) \left(H + \frac{F}{2} \right)}{16 F K},$$

(*) C. f. r. CASTIGLIANO. Manuale III, pag. 94 e seguenti.

essendo H l'altezza dell'acqua misurata sulla parete laterale del serbatoio, talchè sarà $H + F$ l'altezza d'acqua sul centro del fondo.

In pratica pei fondi dei serbatoi conviene aumentare di 2 mm. le spessezze s date da queste formole, e prendere per K , a seconda del genere delle chiodature uno dei valori forniti dalle formole (α), (β), (γ) del seguente N.º 4; e, pei fondi delle caldaie a vapore conviene aumentare di 3 mm. le spessezze date da queste formole e prendere K non maggiore di kg. 2,30 per mm.² se le chiodature sono a due file di chiodi, e K non maggiore di kg. 2,10 per mm.² se le chiodature hanno una sola fila di chiodi.

c) FONDO PIANO DI GRANDE SPESSEZZA. Detto D il diametro, s la spessezza della lastra, p il peso per m.² uniformemente distribuito sulla lastra, K il massimo valore ammissibile della tensione o compressione nella lastra. la spessezza da adottarsi è data da:

$$s = 0,552 D \sqrt{\frac{p}{K}},$$

se la lastra è semplicemente appoggiata al suo contorno,

$$s = 0,434 D \sqrt{\frac{p}{K}},$$

se la lastra è incastrata nel suo contorno.

Le spessezze date da queste formole non risultano economiche perchè troppo grandi; perciò le lastre piane non converrà impiegarle senza rinforzarle con travi o nervature, se non allora che la loro superficie sia piccola, come nel caso dei cilindri delle macchine a vapore.

C) Chiodature.

Per le chiodature fatte a caldo avviene che i chiodi nel raffreddarsi esercitano una pressione sulle lamiere. Dall'esperienza si conosce che questa pressione è tale da dar luogo ad una resistenza d'attrito da 8 a 16 kg. per mm.² della sezione dei chiodi.

La distanza dell'asse dei chiodi dai bordi delle lamiere ordinariamente si fa eguale ad una volta e mezzo il diametro dei chiodi.

a) CHIODATURE CON UNA SOLA FILA DI CHIODI. Bisogna calcolare la spessezza delle lamiere prendendo per coefficiente K di resistenza il valore che risulta dalla formola:

$$K = 3,925 \frac{d^2}{\delta s} \quad (\alpha)$$

nella quale d è il diametro del gambo dei chiodi, δ la distanza fra due assi consecutivi, s la spessezza delle lamiere.

Per queste chiodature si suole fare il diametro dei chiodi fra una volta e mezzo e tre volte la spessezza delle lamiere. e la loro distanza da due a quattro diametri.

b) CHIODATURE CON DUE FILE DI CHIODI. Se questa chiodatura è fatta per sovrapposizione o con coprigiunto semplice, bisogna calcolare la spessorezza delle lamiera prendendo (doppia della precedente)

$$K = 7,85 \frac{d^2}{\delta s} . \quad (\beta)$$

Questa formola vale anche per le chiodature a coprigiunto doppio con una sola fila di chiodi da ciascuna parte del giunto.

Nelle tre disposizioni di chiodi qui considerate si prende la distanza da asse ad asse fra tre volte e sei volte il diametro, e questo si fa tra una volta e mezzo e tre volte la spessorezza delle lamiera.

c) CHIODATURA A COPRIGIUNTO DOPPIO CON DOPPIA FILA DI CHIODI. Il valore di K è dato da (doppia della precedente):

$$K = 15,7 \frac{d^2}{\delta s} , \quad (\gamma)$$

purchè K non risulti maggiore di 6. Se K risulterà maggiore di 6, si varierà il valore del rapporto $\frac{d}{s}$ in modo che la precedente formola dia $K < 6$.

d) CHIODATURE NELLE CALDAIE A VAPORE. Si usano le formole del Lemaitre:

per le chiodature ad una sola fila di chiodi ;

$$d = 4^{\text{mm}} + 1,5 s , \quad \delta = 10^{\text{mm}} + 2 d , \quad \delta_1 = 1,5 d ,$$

nell'ultima delle quali δ_1 è la distanza dell'asse dei chiodi dai bordi delle lamiera.

per le chiodature a due file di chiodi :

$$d = 4^{\text{mm}} + 1,5 s , \quad \delta = 20^{\text{mm}} + d ; \quad \delta_1 = 1,5 d .$$

Il Manuale del Colombo dà anche (dimensioni in mm.):
chiodatura semplice:

$$d = 6 \sqrt{s} , \quad \delta_1 = 1,5 d ,$$

$$\delta = \left\{ \begin{array}{ll} d + 28 & \text{per lamiera di ferro} \\ d + 21 & \text{,, ,, ,, d'acciaio} \end{array} \right\} .$$

chiodatura doppia

$$d = 6 \sqrt{s} , \quad \delta_1 = 1,5 d ,$$

$$\delta = \left\{ \begin{array}{l} d + 56 \\ d + 42 \end{array} \right\} , \quad \gamma = \left\{ \begin{array}{ll} d + 28 & \text{per lamiera di ferro} \\ d + 21 & \text{,, ,, ,, d'acciaio.} \end{array} \right\}$$

essendo γ la distanza in diagonale fra due chiodi contigui delle due file.

3. — Archi e vòlte a botte circolari.

Chiamiamo:

A) ARCHI SU RULLI quelli incastrati per ambedue le estremità in due pezzi, che si considerano come rigidi, e che possono scorrere liberamente sopra un piano orizzontale. In questi archi bisogna assicurarsi che le superfici inferiori dei pezzi, che devono posare sui rulli, posino effettivamente su tutti i rulli.

B) ARCHI INCASTRATI, quelli incastrati in ambedue le loro estremità, oppure quelli appoggiati in ambedue le loro estremità, non più sopra rulli che permettono loro di scorrere liberamente, ma appoggiati — in modo tale che le sezioni d'appoggio siano premute in tutti i loro punti — sopra piani che presentano un attrito abbastanza grande da impedire affatto gli scorrimenti.

C) ARCHI INCASTRATI IN UN'ESTREMITÀ SU RULLI NELL'ALTRA, quelli che hanno un'estremità incastrata oppure appoggiata nel modo definito in B) e l'altra estremità su rulli nel modo definito in A), e nei quali inoltre la reazione verticale dell'appoggio, dalla parte dei rulli, passa per l'estremità dell'asse dell'arco posta dalla stessa parte.

D) ARCHI APPOGGIATI, quelli terminati in ciascuna estremità per un breve tronco di forma tale che l'arco si appoggi per un solo punto o per una sola retta, in ciascuna delle due estremità, e che i punti o le rette d'appoggio siano fissi. In questi archi l'asse passa pei punti o per le rette d'appoggio, le quali sono normali al piano dell'asse. L'arco ad imposte cilindriche è un arco appoggiato.

Diconsi archi circolari quelli il cui asse è un arco di circolo.

Qui si considerano soltanto gli archi aventi le estremità allo stesso livello.

Asse di un arco è il luogo geometrico dei baricentri di tutte le sezioni fatte nell'arco normalmente all'asse.

METODO DI CALCOLO. I calcoli di stabilità degli archi si possono fare con metodo affatto analogo a quelli delle travi rettilinee, cioè si può sostituire dapprima la sezione variabile dell'arco con una sezione costante: allora, dopo aver determinato gli sforzi a cui è soggetto l'arco in questa ipotesi, si potrà riprendere i calcoli supponendo che l'arco abbia la sezione variabile dovuta ai primi sforzi trovati, e ottenere nuovamente gli sforzi cui è soggetto in questa seconda supposizione, per dare quindi al medesimo una sezione variabile in modo da resistere a questi secondi sforzi; talchè, replicando più volte il calcolo, si può ottenere l'approssimazione che si vuole. Nel seguente N.º 5 verrà esposto un *metodo generale* per calcolare gli sforzi che hanno luogo negli archi a *sezione variabile*: in questo N.º e nel seguente N.º 4, si danno le formole per determinare gli sforzi negli archi a *sezione costante*; però quando, essendo costante la base della sezione dell'arco, l'altezza della

sezione in chiave differisce abbastanza poco dall'altezza della sezione d'imposta, le formole di questo N.º e del N.º 4 sono ancora applicabili per approssimazione. Molte volte, per un primo calcolo, si potranno trascurare, nelle formole di questo N.º e del N.º 4, i termini contenenti $\frac{I}{\Omega^2}$; così si potrà in base a questo primo calcolo assegnare all'arco una determinata sezione: e dopo di ciò si potrà far uso delle formole con tutti i loro termini per determinare più esattamente gli sforzi cui l'arco è sottoposto.

Le formole di stabilità poi, mediante le quali si assegnano le dimensioni della sezione degli archi, sono sempre le seguenti:

$$\mathfrak{M} \pm \mathfrak{M} \frac{v}{I} = K, \quad (I)$$

$$K = \frac{5}{4} \frac{G \mathfrak{Z}}{\lambda I}, \quad (II)$$

essendo \mathfrak{M} , \mathfrak{M} , \mathfrak{Z} , il momento inflettente, la pressione normale e lo sforzo di taglio, in una sezione qualunque; Ω , I , v , l'area, il momento d'inerzia della sezione e la distanza della fibra di questa sezione più lontana del suo asse neutro; K è il carico di sicurezza della sostanza di cui l'arco è formato; G e λ , per una sezione qualunque, sono definiti al N.º 1 del Cap. IV. Le condizioni (I) e (II) devono essere soddisfatte per tutte le sezioni dell'arco.

Quando gli archi sono in muratura o formati di altro materiale, che mal resista agli sforzi di tensione, non basta, per la stabilità degli archi soddisfare alle (I) e (II): in tal caso bisognerà anche far in modo che in nessuna sezione dell'arco si verifichino sforzi di tensione. Per gli archi, la cui sezione è un rettangolo, affinchè in nessuna sezione dell'arco si verificano sforzi di tensione, bisogna che sia, per ogni sezione, soddisfatta l'ineguaglianza [cioè come per i muri c. f. r. pag. 347, (II) e (V)]:

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} < \frac{s}{6} \quad (III)$$

essendo s l'altezza della sezione in cui hanno luogo il momento inflettente \mathfrak{M} e la pressione normale \mathfrak{R} .

Per poter applicare le formole (I), (II), (III) occorre di conoscere le incognite che possono entrare nelle espressioni di \mathfrak{M} , \mathfrak{R} , \mathfrak{Z} , pel che servono le formole seguenti, ed il metodo indicato al N.º 5.

Avvertenza.

Tanto pel caso degli archi su rulli, come per quello degli archi incastrati, le formole che diamo per determinare le incognite dovute al carico dei **rinfianchi** sono stabilite calcolando un rinfianco della *larghezza di un m.* misurata nel senso delle generatrici rettilinee dell'arco, e di più si è supposto per semplicità, che il *peso di un*

m .³ di materiale di rinfianco sia eguale all'unità. Perciò nel far uso delle formole relative al carico dei rinfianchi, si dovranno moltiplicare i risultati, che, con esse si ottengono nel determinare le incognite, per il peso Π di un m .³ di materiale di rinfianco, ed inoltre, quando si istituisca il calcolo per una larghezza di rinfianco diversa dall'unitaria, si devono moltiplicare i risultati stessi anche per la larghezza di rinfianco considerata.

A) Archi su rulli.

CARICO UNIFORME RISPETTO ALL'ARCO. Sia:

$A D B$ l'asse circolare dell'arco,

ρ il raggio di quest'asse,

R il raggio dell'estradosso dell'arco supposto di sezione costante;

e sia distribuito sull'arco un carico, che può anche essere, o comprendere il peso proprio dell'arco, nella ragione di q unità di peso per unità di lunghezza d'asse;

m_0 il momento inflettente in chiave,

m il momento inflettente in una sezione $L T$ qualunque normale all'asse,

α l'angolo della sezione $L T$ colla verticale,

2β l'angolo al centro dell'arco dato.

Per determinare l'incognita m_0 si ha l'equazione:

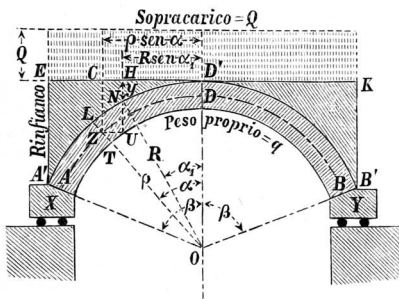


Fig. 244.

$$m_0 = -q \rho^2 \left(\frac{2 \operatorname{sen} \beta}{\beta} - 1 - \cos \beta \right), \quad (*)$$

e quindi il momento inflettente m sarà dato da:

$$m = m_0 + q \rho^2 (\alpha \operatorname{sen} \alpha - 1 + \cos \alpha).$$

(*) β ed α sono sempre archi di raggio eguale all'unità.

La pressione normale \mathbf{n} e lo sforzo di taglio \mathbf{t} , in una sezione qualunque saranno:

$$\mathbf{n} = q \rho \alpha \operatorname{sen} \alpha, \quad \mathbf{t} = q \rho \alpha \operatorname{cos} \alpha.$$

CARICO DOVUTO AI RINFIANCHI. Detti:

M_o il momento inflettente in chiave,

M il momento inflettente in una sezione qualunque $L T$,

N , T la pressione normale e lo sforzo di taglio nella sezione medesima: si ha:

$$M_o = \frac{R^2}{\beta} \left[\rho \left(\frac{\beta \cdot \operatorname{cos} \beta \operatorname{sen} \beta}{2} - \frac{\operatorname{sen}^3 \beta}{6} - \frac{\operatorname{sen} \beta - \beta \operatorname{cos} \beta}{2} \right) + \right. \\ \left. + R \left(\frac{\operatorname{cos} \beta \operatorname{sen} \beta}{4} + \frac{\beta}{12} - \frac{2 \beta \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos}^2 \beta}{9} \right) \right],$$

$$M = M_o + R^2 \left[\rho \left(\operatorname{sen}^2 \alpha - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{cos} \alpha + \alpha \operatorname{sen} \alpha}{2} \right) - \right. \\ \left. - R \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{2} + \frac{\operatorname{cos}^3 \alpha - 1}{3} \right) \right],$$

$$N = R^2 \left(\operatorname{sen}^2 \alpha - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{cos} \alpha + \alpha \operatorname{sen} \alpha}{2} \right),$$

$$T = R^2 \left(\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha - \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos}^2 \alpha + \alpha \operatorname{cos} \alpha}{2} \right).$$

CARICO UNIFORME RISPETTO ALLA CORDA. Sia Q il carico per unità corrente di corda, M_o' il momento inflettente in chiave, M' , N' , T' , il momento inflettente, la pressione normale e lo sforzo di taglio in una sezione qualunque $L T$ (la quale fa sempre l'angolo α colla verticale), sarà:

$$M_o' = - \frac{Q \rho^2}{4} \frac{\beta - \operatorname{cos} \beta \operatorname{sen} \beta}{\beta},$$

$$M' = M_o' + \frac{Q}{2} \rho^2 \operatorname{sen}^2 \alpha,$$

$$N' = Q \rho \operatorname{sen}^2 \alpha,$$

$$T' = Q \rho \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha.$$

Osservazione. Per trovare il momento inflettente o la pressione normale dovuti all'azione di più carichi simultanei, basta applicare il principio della sovrapposizione degli effetti. Perciò, chiamando \mathfrak{M} , \mathfrak{N} , \mathfrak{T} , il momento inflettente, la pressione normale e lo sforzo di taglio totali, dovuti a tutti i carichi che operano sull'arco, e ricordando che \mathfrak{H} è il peso di un m.³ di materiale di rinfianco, si avrà:

$$\mathfrak{M} = \mathbf{m} + \mathfrak{H} M + M'; \quad \mathfrak{N} = \mathbf{n} + \mathfrak{H} N + N'; \quad \mathfrak{T} = \mathbf{t} + \mathfrak{H} T + T'.$$

Colla formola (I) si determinano le sezioni da darsi all'arco, quando è caricato con una combinazione qualunque dei tre carichi sopra considerati

Bisognerà poi verificare se, colle sezioni determinate a mezzo della formola (I), la (II) è anch'essa soddisfatta, e nel caso che per qualche sezione non lo sia, si aumenterà convenientemente la detta sezione.

Infine, se si tratta d'archi in muratura, si dovrà anche soddisfare la condizione (III), la quale esprime che la curva delle pressioni dev'essere tutta contenuta nel *terzo medio* della altezza delle sezioni.

B) Archi incastrati.

Si hanno due incognite da determinare: il momento inflettente e la spinta o pressione normale nella sezione in chiave dell'arco.

CARICO UNIFORME RISPETTO ALL'ARCO. Detti:

m_0 il momento inflettente e

n_0 la pressione normale, in chiave,

q il peso proprio dell'arco, od anche le unità di peso, per unità di lunghezza d'asse, distribuite sull'arco.

Ω l'area ed I il momento d'inerzia della sezione dell'arco normale all'asse;

per determinare le incognite m_0 , n_0 , si deve risolvere il seguente sistema di due equazioni di primo grado:

$$m_0 \beta - n_0 \rho (\beta \operatorname{sen} \beta) + q \rho' [2 \operatorname{sen} \beta - \beta (1 + \cos \beta)] = 0 ,$$

$$m_0 \operatorname{sen} \beta - n_0 \rho \left[\operatorname{sen} \beta \frac{\operatorname{sen} \beta \cos \beta + \beta \left(1 - \frac{I}{\Omega \rho^2}\right)}{2} \right. \\ \left. + q \rho^2 \left[\frac{\beta \operatorname{sen}^2 \beta}{2} + \frac{\beta - 3 \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{4} - \operatorname{sen} \beta + \frac{I}{2 \Omega \rho^2} \left(\beta \operatorname{sen}^2 \beta - \frac{\beta - \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{2} \right) \right] \right] = 0 ;$$

ed il momento inflettente, la pressione normale e lo sforzo di taglio in una sezione qualunque LT sono dati da:

$$m = m_0 - n_0 \rho (1 - \cos \alpha) + q \rho^2 (\alpha \operatorname{sen} \alpha - 1 + \cos \alpha) ,$$

$$n = n_0 \cos \alpha + q \rho \alpha \operatorname{sen} \alpha ,$$

$$t = n_0 \operatorname{sen} \alpha - q \rho \alpha \cos \alpha .$$

CARICO DOVUTO AI RINFIANCHI. Detti M_0 II, N_0 II il momento inflettente e la spinta in chiave, e ritenute le solite notazioni, si ha per determinare le incognite M_0 e N_0 il seguente sistema di equazioni di primo grado:

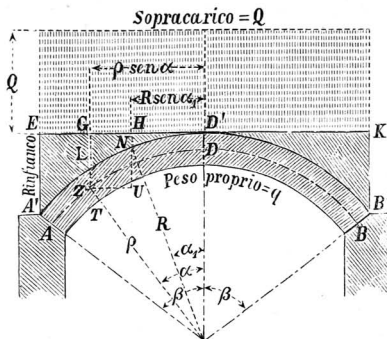


Fig. 245.

$$\begin{aligned}
 & M_0 \beta - N_0 \rho (\beta - \text{sen } \beta) + \\
 & + R^2 \left[\rho \left(\frac{\beta - \text{sen } \beta \cos \beta}{2} - \frac{\text{sen}^3 \beta}{6} - \frac{\text{sen } \beta - \beta \cos \beta}{2} \right) + \right. \\
 & \left. + R \left(\frac{\text{sen } \beta \cos \beta}{4} + \frac{\beta}{12} - \frac{2 \text{sen } \beta + \text{sen } \beta \cos^2 \beta}{9} \right) \right] = 0, \\
 & M_0 \text{sen } \beta - N_0 \rho \left[\text{sen } \beta - \frac{\text{sen } \beta \cos \beta + \beta}{2} \left(1 + \frac{I}{\Omega \rho^2} \right) \right] - \\
 & - R^2 \left[R \left(\frac{\text{sen}^3 \beta}{6} + \frac{\text{sen } \beta \cos^3 \beta}{12} + \frac{\text{sen } \beta \cos \beta + \beta}{8} - \frac{\text{sen } \beta}{3} \right) - \right. \\
 & \left. - \rho \left(\frac{\text{sen}^3 \beta}{3} + \frac{\beta - \text{sen } \beta \cos \beta}{16} - \frac{\text{sen}^3 \beta \cos \beta}{8} - \frac{\beta \text{sen}^2 \beta}{4} \right) \cdot \right. \\
 & \left. \cdot \left(1 + \frac{I}{\Omega \rho^2} \right) \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Noti M_0 e N_0 si determina il momento inflettente M_{II} , la pressione normale N_{II} e lo sforzo di taglio T_{II} in una sezione qualunque LT a mezzo delle formole:

$$\begin{aligned}
 & M = M_0 - N_0 \rho (1 - \cos \alpha) + \\
 & + R^2 \left[\rho \left(\text{sen}^2 \alpha - \frac{\text{sen}^2 \alpha \cos \alpha + \alpha \text{sen } \alpha}{2} \right) - R \left(\frac{\text{sen}^2 \alpha}{2} + \frac{\cos^3 \alpha - 1}{3} \right) \right],
 \end{aligned}$$

$$N = N_o \cos \alpha + R^2 \left(\operatorname{sen}^2 \alpha - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha + \alpha \operatorname{sen} \alpha}{2} \right),$$

$$T = N_o \operatorname{sen} \alpha - R^2 \left(\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha + \alpha \cos \alpha}{2} \right)$$

Quando si siano ottenuti i valori di M_o e di N_o dati dal soprascritto sistema di due equazioni, se si vogliono i valori del momento inflettente e della pressione normale in chiave, si devono moltiplicare i risultati ottenuti pel peso Π di un m.³ del materiale di rinfianco (sempre considerando un rinfianco di larghezza unitaria; in caso diverso bisogna moltiplicare i risultati anche per la larghezza del rinfianco). Ma i valori di M_o e di N_o , ottenuti dal detto sistema di due equazioni, bisogna introdurli tali quali, senza moltiplicarli per Π , nelle tre ultime espressioni che danno i valori di M , di N e di T e solo dopo calcolato con queste espressioni i valori di M , di N e di T , si moltiplicheranno i valori così ottenuti di M , di N e di T per Π e si otterranno il momento inflettente, la pressione normale e lo sforzo di taglio per una sezione qualunque.

CARICO UNIFORME RISPETTO ALLA CORDA. Detti M_o' , N_o' il momento inflettente e la spinta o pressione normale in chiave, per determinare M_o' e N_o' si ha il seguente sistema di due equazioni di primo grado:

$$M_o' \beta - N_o' \rho (\beta - \operatorname{sen} \beta) + \frac{Q \rho^2}{2} \frac{\beta - \cos \beta \operatorname{sen} \beta}{2} = 0,$$

$$M_o' \operatorname{sen} \beta - N_o' \rho \left[\operatorname{sen} \beta - \frac{\beta + \cos \beta \operatorname{sen} \beta}{2} \left(1 + \frac{I}{\Omega \rho^2} \right) \right] + \frac{1}{3} Q \rho^2 \operatorname{sen}^3 \beta \left(\frac{1}{2} + \frac{I}{\Omega \rho^2} \right) = 0,$$

nelle quali Q è il peso per m. corr. di corda (*).

I valori poi del momento inflettente M' , della pressione normale N' e dello sforzo di taglio T' in una sezione qualunque, sono dati da:

$$M' = M_o' + \frac{Q \rho^2}{2} \operatorname{sen}^2 \alpha - N_o' \rho (1 - \cos \alpha),$$

(*) Nell'ultima sono trascurati i termini

$$N_o' \frac{\beta - \cos \beta \operatorname{sen} \beta}{2} \frac{I A}{\Omega \rho}, \quad \frac{1}{3} Q \operatorname{sen}^3 \beta \frac{I A}{\Omega}$$

relativi al lavoro di deformazione degli sforzi di taglio [C. f. r. CASTIGLIANO — *Théorie* — pag. 280 formola (23)].

$$N' = Q \rho \operatorname{sen}^2 \alpha + N_o' \cos \alpha$$

$$T' = -N_o' \operatorname{sen} \alpha + Q \rho \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha .$$

Osservazione. Per calcolare il momento inflettente \mathfrak{M} , la pressione normale \mathfrak{N} e lo sforzo di taglio \mathfrak{T} dovuti all'azione simultanea di una combinazione qualunque dei tre carichi considerati si hanno ancora le formole:

$$\mathfrak{M} = \mathbf{m} + \Pi M + M' , \quad \mathfrak{N} = \mathbf{n} + \Pi N + N' , \quad \mathfrak{T} = \mathbf{t} + \Pi T + T' ,$$

e, colle formole:

$$\frac{\mathfrak{N}}{\Omega} \pm \mathfrak{M} \frac{\nu}{I} = K , \quad K \cong \frac{5}{4} \frac{G \mathfrak{T}}{\lambda \Omega} ,$$

e se occorre, anche colla formola:

$$3 = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} > \frac{s}{6} ,$$

si calcoleranno le sezioni dell'arco.

C) Archi incastrati in un'estremità, su rulli nell'altra. (*)

Si hanno due incognite da determinare; il momento inflettente nella sezione d'imposta su rulli, e la reazione che ha luogo all'imposta medesima.

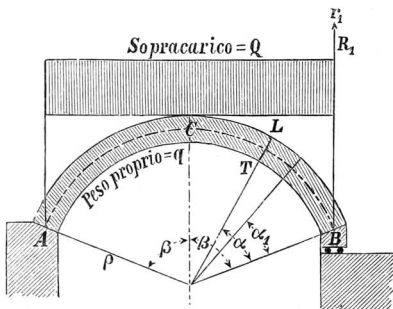


Fig 246.

(*) Si avverta che, acciòchè le formole del presente caso siano abbastanza approssimate, si richiede che la superficie d'appoggio sui rulli posi effettivamente su tutti i rulli, e che inoltre la reazione verticale dell'appoggio passi per l'estremità B dell'asse dell'arco, oppure passi vicinissimo a questa estremità.

CARICO UNIFORME RISPETTO ALL'ARCO. Detti m_1 il momento inflettente ed r_1 la reazione verticale dell'appoggio dalla parte dei rulli, e ritenute del resto le solite notazioni, i valori delle incognite m_1 , r_1 si otterranno risolvendo il seguente sistema di due equazioni di primo grado :

$$\begin{aligned} m_1 \beta - r_1 \rho \beta \operatorname{sen} \beta + 2 \rho^2 (\operatorname{sen} \beta - \beta \cos \beta) q &= 0, \\ m_1 \beta \operatorname{sen} \beta - r_1 \rho \left[\beta \operatorname{sen}^2 \beta + \frac{\beta \cos \beta \operatorname{sen} \beta}{2} \left(1 + \frac{I}{\Omega \rho^2} \right) \right] + \\ + \rho^2 \left[2 (\operatorname{sen} \beta - \beta \cos \beta) + \beta \frac{\beta - \cos \beta \operatorname{sen} \beta}{2} \frac{I}{\Omega \rho^2} \right] q &= 0. \end{aligned}$$

I valori del momento inflettente m , della pressione normale n e dello sforzo di taglio t in una sezione qualunque $L T$, sono :

$$\begin{aligned} m &= m_1 + \rho \left\{ \rho q [\cos (\beta - \alpha) - \cos \beta - \alpha \operatorname{sen} (\beta - \alpha)] - \right. \\ &\quad \left. - r_1 [\operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} (\beta - \alpha)] \right\}, \\ n &= (q \rho \alpha - r_1) \operatorname{sen} (\beta - \alpha), \\ t &= (q \rho \alpha - r_1) \cos (\beta - \alpha). \end{aligned}$$

CARICO UNIFORME RISPETTO ALLA CORDA. Detti M_1' , R_1' , il momento inflettente e la reazione all'imposta su rulli, e ritenute le solite notazioni, le incognite M_1' , R_1' , si troveranno risolvendo il seguente sistema di due equazioni di primo grado :

$$\begin{aligned} M_1' \beta - R_1' \rho \beta \operatorname{sen} \beta + Q \rho^2 \left(\frac{\beta \operatorname{sen}^2 \beta}{2} + \frac{\beta - \cos \beta \operatorname{sen} \beta}{4} \right) &= 0, \\ M_1' \beta \operatorname{sen} \beta - R_1' \rho \left[\beta \operatorname{sen}^2 \beta + \frac{\beta \cos \beta \operatorname{sen} \beta}{2} \left(1 + \frac{I}{\Omega \rho^2} \right) \right] + \\ + Q \rho^2 \left[\frac{\beta \operatorname{sen}^2 \beta}{2} - \frac{3}{4} (\cos \beta \operatorname{sen}^2 \beta - \beta \operatorname{sen} \beta) + \right. \\ \left. + \frac{\beta \operatorname{sen} \beta - \cos \beta \operatorname{sen}^2 \beta}{4} \frac{I}{\Omega \rho^2} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Il momento inflettente M' , la pressione normale N' , e lo sforzo di taglio T' in una sezione qualunque sono dati da :

$$\begin{aligned} M' &= M_1' - R_1' \rho (\operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \alpha) + \frac{Q \rho^2}{2} (\operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \alpha), \\ N' &= -R_1' \operatorname{sen} \alpha + Q \rho \operatorname{sen} \alpha (\operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \alpha), \\ T' &= -R_1' \cos \alpha + Q \rho \cos \alpha (\operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \alpha). \end{aligned}$$

Osservazione. Per determinare gli sforzi, quando l'arco è sottoposto ad ambedue i carichi sopra considerati, si applica il principio della sovrapposizione degli effetti, e si procede come nei casi precedenti.

D) Archi appoggiati.

La reazione verticale degli appoggi può essere determinata a priori. Essa è, per il carico uniformemente ripartito rispetto all'arco:

$$r_1 = q \rho \beta ;$$

e per il carico uniformemente ripartito rispetto alla corda, è:

$$R_1 = Q \rho \sin \beta .$$

Per determinare la spinta orizzontale si hanno le seguenti formule.

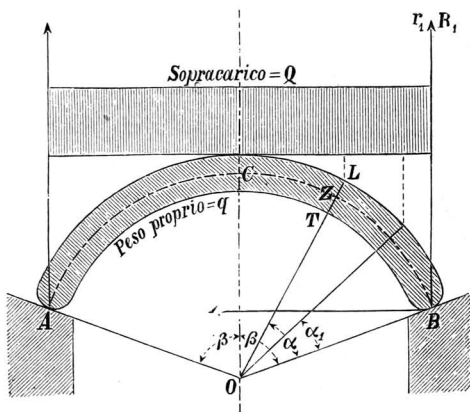


Fig. 247

CARICO UNIFORMEMENTE RIPARTITO RISPETTO ALL'ARCO. Si denoti con n_1 la spinta orizzontale, ritenendo del resto le solite notazioni. Sarà:

$$n_1 = \frac{r_1 \left(\frac{\sin^2 \beta}{2} + \cos \beta - \beta \sin \beta \cos \beta - \cos^2 \beta + \frac{I \sin^2 \beta}{\Omega \rho^2} \right)}{\frac{\beta}{2} + \beta \cos^2 \beta - \frac{3}{2} \sin \beta \cos \beta + \frac{I}{\Omega \rho^2} \frac{\beta + \sin \beta \cos \beta}{2}} - \frac{q \rho \left(\frac{\beta}{2} + \beta \cos \beta + \beta \cos^2 \beta - \frac{9}{4} \sin \beta \cos \beta + \frac{I}{\Omega \rho^2} \frac{\beta - \sin \beta \cos \beta}{4} \right)}{\frac{\beta}{2} + \beta \cos^2 \beta - \frac{3}{2} \sin \beta \cos \beta + \frac{I}{\Omega \rho^2} \frac{\beta + \sin \beta \cos \beta}{2}}$$

Il momento inflettente in una sezione qualunque \overline{LT} dell'arco sarà :

$$m = n_1 \rho [\cos (\beta - \alpha) - \cos \beta] - r_1 \rho [\operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} (\beta - \alpha)] + \\ + q \rho^2 [\cos (\beta - \alpha) - \cos \beta - \alpha \operatorname{sen} (\beta - \alpha)] ,$$

e la pressione normale e lo sforzo di taglio nella sezione medesima saranno :

$$n = n_1 \cos (\beta - \alpha) + (q \rho \alpha - r_1) \operatorname{sen} (\beta - \alpha) , \\ t = n_1 \operatorname{sen} (\beta - \alpha) + (q \rho \alpha - r_1) \cos (\beta - \alpha) .$$

CARICO UNIFORME RISPETTO ALLA CORDA. Detta N_1 la spinta orizzontale e ritenute le solite notazioni, si ha :

$$N_1 \left[\frac{\rho^2}{I} \left(\frac{\beta - 3 \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{2} + \beta \cos^2 \beta \right) + \frac{1}{\Omega} \frac{\beta + \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{2} \right] = \\ = Q \rho \left[\frac{\rho^2}{2I} \left(\frac{2}{3} \operatorname{sen}^3 \beta - \beta \operatorname{sen}^2 \beta \cos \beta + \cos \beta \frac{\beta - \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{3 \Omega} \operatorname{sen}^3 \beta \right] , (*)$$

dalla quale si ricava

$$N_1 = Q \rho \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \operatorname{sen}^3 \beta - \beta \operatorname{sen}^2 \beta \cos \beta + \cos \beta \frac{\beta - \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{2} \right) - \frac{I \operatorname{sen}^3 \beta}{\Omega \rho^2}}{\frac{\beta - 3 \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{2} + \beta \cos^2 \beta + \frac{I}{\Omega \rho^2} \frac{\beta + \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{2}}$$

Il momento inflettente, la pressione normale, e lo sforzo di taglio in una sezione qualunque \overline{LT} sono dati da :

$$M = N_1 \rho [\cos (\beta - \alpha) - \cos \beta] - R_1 \rho [\operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} (\beta - \alpha)] + \\ + Q \rho^2 \frac{[\operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} (\beta - \alpha)]^2}{2} = \\ = N_1 \rho [\cos (\beta - \alpha) - \cos \beta] - \frac{1}{2} Q \rho^2 [\operatorname{sen}^2 \beta - \operatorname{sen}^2 (\beta - \alpha)] , \\ N = N_1 \cos (\beta - \alpha) - R_1 \operatorname{sen} (\beta - \alpha) + \\ + Q \rho [\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} (\beta - \alpha) - \operatorname{sen}^2 (\beta - \alpha)] = \\ = N_1 \cos (\beta - \alpha) - Q \rho \operatorname{sen}^2 (\beta - \alpha) ,$$

(*) Anche qui sono trascurati i termini relativi al lavoro di deformazione dovuto agli sforzi di taglio [C. f. r. CASTIGLIANO — *Théorie* pagina 273 formola (13)].

$$\begin{aligned}
 T &= N_1 \operatorname{sen}(\beta - \alpha) - R_1 \cos(\beta - \alpha) + \\
 &+ Q \rho [\operatorname{sen} \beta \cos(\beta - \alpha) - \operatorname{sen}(\beta - \alpha) \cos(\beta - \alpha)] = \\
 &= N_1 \operatorname{sen}(\beta - \alpha) - Q \rho \operatorname{sen}(\beta - \alpha) \cos(\beta - \alpha) .
 \end{aligned}$$

Le formole di stabilità sono sempre le solite, date nei casi precedenti.

E) Archi su rulli soggetti a carico parziale (*).

a) Carico parziale uniforme rispetto all'arco. Si chiamino :

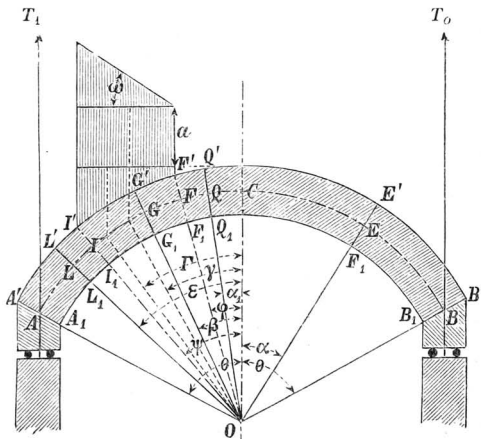


Fig. 248.

h) l'altezza, misurata normalmente all'asse, del carico distribuito sul tronco qualunque $I F$ dell'asse,

Π_h il peso dell'unità cubica del materiale che costituisce questo carico parziale,

T_0 la reazione verticale dell'appoggio di destra,

T_1 la reazione verticale dell'appoggio di sinistra.

(*) Tutte le formole per gli archi su rulli soggetti a carico parziale furono stabilite assumendo che il materiale di carico abbia larghezza unitaria misurata secondo le generatrici rettilinee dell'arco. Se il carico ha una larghezza λ diversa dall'unità, bisogna moltiplicare per λ tutti i risultati dati dalle formole.

Queste reazioni dovranno, affinchè le nostre formole siano esatte, passare per le estremità B ed A dell'asse, o vicinissimo ad esse;

M_0 il momento di flessione nella sezione $B' B_1$ dell'arco,

θ l'arco, di raggio eguale all'unità, di ampiezza eguale alla metà dell'arco ACB dato.

φ l'arco, di raggio eguale all'unità, compreso dall'angolo

$F \hat{O} C$.

ψ l'arco, di raggio eguale all'unità compreso dall'angolo

$I \hat{O} C$.

ρ il raggio \overline{OA} dell'asse dell'arco,

R il raggio $\overline{OA'}$ dell'estradosso dell'arco.

Le reazioni verticali degli appoggi sono date da:

$$T_0 = \frac{\Pi_b \delta \rho (\psi - \varphi) \left(\text{sen } \theta - \text{sen } \frac{\varphi + \psi}{2} \right)}{2 \text{sen } \theta},$$

$$T_1 = \frac{\Pi_b \delta \rho (\psi - \varphi) \left(\text{sen } \theta + \text{sen } \frac{\varphi + \psi}{2} \right)}{2 \text{sen } \theta}.$$

Il momento inflettente nella sezione $B' B_1$ è dato da:

$$M_0 = \frac{\Pi_b \delta \rho^2}{2 \theta} (2 \text{sen } \psi - 2 \text{sen } \varphi + 2 \varphi \cos \varphi - \psi \cos \theta + \theta \cos \psi - \theta \cos \varphi - \psi \cos \psi).$$

Detti M_α , M_{α_1} , M_{β} , M_{ε} , rispettivamente i momenti inflettenti in una sezione qualunque del semiarco BC , del tronco CF , del tronco FI , e del tronco IA , si ha:

$$M_\alpha = M_0 - T_0 \rho (\text{sen } \theta - \text{sen } \alpha),$$

$$M_{\alpha_1} = M_0 - T_0 \rho (\text{sen } \theta + \text{sen } \alpha_1),$$

$$M_{\beta} = M_0 - T_0 \rho (\text{sen } \theta + \text{sen } \beta) + \Pi_b \delta \rho^2 [(\beta - \varphi) \text{sen } \beta + \cos \beta - \cos \varphi]$$

$$M_{\varepsilon} = M_0 - T_0 \rho (\text{sen } \theta + \text{sen } \varepsilon) + \Pi_b \delta \rho^2 [(\psi - \varphi) \text{sen } \varepsilon + \cos \psi - \cos \varphi].$$

Le pressioni normali e gli sforzi di taglio in una sezione qualunque dei tronchi medesimi saranno date da:

$$N_\alpha = - T_0 \text{sen } \alpha,$$

$$N_{\alpha_1} = - T_0 \text{sen } \alpha_1;$$

$$N_{\beta} = - T_0 \text{sen } \beta + \Pi_b \delta \rho (\beta - \varphi) \text{sen } \beta,$$

$$\begin{aligned}
 N_{\varepsilon} &= -T_0 \operatorname{sen} \varepsilon + \Pi_{\theta} \theta \rho (\psi - \varphi) \operatorname{sen} \varepsilon ; \\
 T_{\alpha} &= -T_0 \cos \alpha , \quad T_{\alpha_1} = -T_0 \cos \alpha_1 , \\
 T_{\beta} &= [-T_0 + \Pi_{\theta} \theta \rho (\beta - \varphi)] \cos \beta , \\
 T_{\varepsilon} &= [-T_0 + \Pi_{\theta} \theta \rho (\psi - \varphi)] \cos \varepsilon .
 \end{aligned}$$

b) Carico parziale uniforme rispetto alla corda. Si denotino con:
 a l'altezza del carico uniforme rispetto alla corda,
 Π_a il peso dell'unità cubica che costituisce questo carico parziale;
 le reazioni verticali degli appoggi sono date da:

$$\begin{aligned}
 T_0' &= \frac{\Pi_a a \rho (\operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \varphi) (\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \gamma)}{2 \operatorname{sen} \theta} , \\
 T_1' &= \frac{\Pi_a a \rho (\operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \varphi) (\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \gamma)}{2 \operatorname{sen} \theta} ,
 \end{aligned}$$

essendo γ l'angolo formato dalla verticale col raggio dell'asse che incontra sull'asse la verticale passante pel centro di gravità del carico parziale.

Il momento inflettente nella sezione $B'B_1$ è dato da:

$$\begin{aligned}
 M_0' &= -\frac{\Pi_a R a}{2 \theta} \left[\left(\rho - \frac{R}{2} \right) \frac{\psi - \varphi - \operatorname{sen} \psi \cos \psi + \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{2} - \right. \\
 &\quad \left. - \rho \operatorname{sen} \varphi (\cos \varphi - \cos \psi) + (\psi - \varphi) \frac{R}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi + \right. \\
 &\quad \left. + \rho (\operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \varphi) (\cos \psi - \cos \theta) - (\theta - \psi) \frac{R}{2} (\operatorname{sen}^2 \psi - \operatorname{sen}^2 \varphi) \right] .
 \end{aligned}$$

I momenti inflettenti, le pressioni normali, e gli sforzi di taglio in una sezione qualunque saranno date da:

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha}' &= M_0' - T_0' \rho (\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \alpha) , \\
 M_{\alpha_1}' &= M_0' - T_0' \rho (\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \alpha_1) , \\
 M_{\beta}' &= M_0' - T_0' \rho (\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \beta) + \\
 &\quad + \Pi_a R a \left[\left(\rho - \frac{R}{2} \right) \operatorname{sen}^2 \beta - \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \beta + \frac{R}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi \right] , \\
 M_{\varepsilon}' &= M_0' - T_0' \rho (\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \varepsilon) + \\
 &\quad + \Pi_a R a \left[\rho (\operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} \varepsilon - \frac{R}{2} (\operatorname{sen}^2 \psi - \operatorname{sen}^2 \varphi) \right] ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{\alpha}' &= -T_0' \operatorname{sen} \alpha, & N_{\alpha_1}' &= -T_0' \operatorname{sen} \alpha_1, \\
 N_{\beta}' &= -T_0' \operatorname{sen} \beta + \Pi_{\alpha} a \rho (\operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} \beta, \\
 N_{\varepsilon}' &= -T_0' \operatorname{sen} \varepsilon + \Pi_{\alpha} a \rho (\operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} \varepsilon; \\
 T_{\alpha}' &= -T_0' \cos \alpha, & T_{\alpha_1}' &= -T_0' \cos \alpha_1, \\
 T_{\beta}' &= [-T_0' + \Pi_{\alpha} a \rho (\operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \varphi)] \cos \beta, \\
 T_{\varepsilon}' &= [-T_0' + \Pi_{\alpha} a \rho (\operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \varphi)] \operatorname{sen} \varepsilon.
 \end{aligned}$$

c) Carico parziale di rinfianco. Si denotino con:

Π il peso di un m.³ del materiale di rinfianco,

V il volume del carico parziale di rinfianco di larghezza eguale all'unità,

Γ l'angolo formato dalla verticale col raggio dell'asse, che incontra sull'asse la verticale passante pel centro di gravità del carico parziale;

le reazioni verticali degli appoggi saranno:

$$\begin{aligned}
 T_0'' &= \frac{V \Pi (\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \Gamma)}{2 \operatorname{sen} \theta}, \\
 T_1'' &= \frac{V \Pi (\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \Gamma)}{2 \operatorname{sen} \theta}.
 \end{aligned}$$

Il momento inflettente della sezione $B'B_1$ sarà dato da:

$$\begin{aligned}
 M_0 &= -\frac{\Pi R}{2 \theta} \left\{ R \rho \left[\frac{\psi - \operatorname{sen} \psi \cos \psi - \varphi + \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{2} + \right. \right. \\
 &+ \operatorname{sen} \varphi (\cos \psi - \cos \varphi) + (\operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \varphi) (\cos \psi - \cos \theta) \left. \right] + \\
 &+ \frac{R \rho}{2} \left[\operatorname{sen} \varphi + \psi \cos \psi - \operatorname{sen} \psi - \varphi \cos \varphi + \frac{\operatorname{sen}^3 \varphi - \operatorname{sen}^3 \psi}{3} - \right. \\
 &- (\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi - \varphi) (\cos \psi - \cos \varphi) + \\
 &+ (\operatorname{sen} \psi \cos \psi + \psi - \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi - \varphi) (\cos \theta - \cos \psi) \left. \right] - \\
 &- \frac{R^2}{2} \left[\frac{\psi - \operatorname{sen} \psi \cos \psi}{2} - \frac{\varphi - \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{2} - \psi \operatorname{sen}^2 \varphi + \right. \\
 &+ \varphi \operatorname{sen}^2 \psi + (\operatorname{sen}^2 \psi - \operatorname{sen}^2 \varphi) (\cos \theta - \cos \psi) \left. \right] - \\
 &- \frac{R^2}{3} \left[\frac{2}{3} (\operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \varphi) + \frac{1}{3} (\operatorname{sen} \psi \cos^2 \psi - \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi) - \right. \\
 &- \psi \cos^3 \varphi + \varphi \cos^3 \psi + (\cos^3 \psi - \cos^3 \varphi) (\theta - \psi) \left. \right] \left. \right\};
 \end{aligned}$$

e si avrà:

$$M_{\alpha}'' = M_0'' - T_0'' \rho (\text{sen } \theta - \text{sen } \alpha) ,$$

$$M_{\alpha_1}'' = M_0'' - T_0'' \rho (\text{sen } \theta + \text{sen } \alpha_1) ,$$

$$M_{\beta}'' = M_0'' - T_0'' \rho (\text{sen } \theta + \text{sen } \beta) + \Pi R^2 \left[\rho \text{sen } \beta (\text{sen } \beta - \text{sen } \varphi) - \right. \\ \left. - \rho \text{sen } \beta \left(\frac{\text{sen } \beta \cos \beta + \beta}{2} - \frac{\text{sen } \varphi \cos \varphi + \varphi}{2} \right) \right. \\ \left. - R \left(\frac{\text{sen}^2 \beta - \text{sen}^2 \varphi}{2} \right) - R \left(\frac{\cos^3 \beta - \cos^3 \varphi}{3} \right) \right] ,$$

$$M_{\varepsilon}'' = M_0'' - T_0'' \rho (\text{sen } \theta + \text{sen } \varepsilon) + \Pi R^2 \left[\rho \text{sen } \varepsilon (\text{sen } \psi - \text{sen } \varphi) - \right. \\ \left. - \rho \text{sen } \varepsilon \left(\frac{\text{sen } \psi \cos \psi + \psi}{2} - \frac{\text{sen } \varphi \cos \varphi + \varphi}{2} \right) - \right. \\ \left. - R \left(\frac{\text{sen}^2 \psi - \text{sen}^2 \varphi}{2} \right) - R \left(\frac{\cos^3 \psi - \cos^3 \varphi}{2} \right) \right] ;$$

$$N_{\alpha}'' = -T_0'' \text{sen } \alpha , \quad N_{\alpha_1}'' = -T_0'' \text{sen } \alpha_1 ,$$

$$N_{\beta}'' = T_0'' \text{sen } \beta + V \Pi \text{sen } \beta , \quad N_{\varepsilon}'' = -T_0'' \cos \varepsilon + V \Pi \text{sen } \varepsilon ;$$

$$T_{\alpha}'' = T_0'' \cos \alpha , \quad T_{\alpha_1}'' = -T_0'' \cos \alpha_1 ,$$

$$T_{\beta}'' = -T_0'' \cos \beta + V \Pi \cos \beta , \quad T_{\varepsilon}'' = -T_0'' \cos \varepsilon + V \Pi \cos \varepsilon .$$

d) Carico parziale triangolare rispetto alla corda. Il carico triangolare è decrescente, come è indicato nella fig. 248, verso la chiave.

Si denotino con:

ω l'angolo formato dall'ipotenusa del triangolo colla orizzontale.

Γ l'angolo formato dalla verticale col raggio dell'asse che incontra sull'asse la verticale passante pel centro di gravità del carico parziale triangolare di larghezza eguale all'unità,

V il volume di questo carico,

Π_c il peso per m.³ del materiale che costituisce il carico medesimo;

le reazioni verticali degli appoggi saranno:

$$T_0''' = \frac{V \Pi_c (\text{sen } \theta - \text{sen } \Gamma)}{2 \text{sen } \theta} , \quad T_1''' = \frac{V \Pi_c (\text{sen } \theta + \text{sen } \Gamma)}{2 \text{sen } \theta} ,$$

ed il momento inflettente nella sezione $B'B_1$ sarà dato da:

$$\begin{aligned}
M_0''' = & \frac{-\Pi_c R^2 \operatorname{tang} \omega}{2\theta} \left\{ \left(\frac{\rho}{2} - \frac{R}{3} \right) \left[\frac{2}{3} (\cos \varphi \cos \psi) + \right. \right. \\
& + \frac{1}{3} (\cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi - \cos \psi \operatorname{sen}^2 \psi) \left. \right] + \\
& + \left(\frac{R}{2} - \rho \right) \operatorname{sen} \varphi \frac{\psi - \varphi - \operatorname{sen} \psi \cos \psi + \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{2} + \\
& + \frac{\rho}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi (\cos \varphi - \cos \psi) - (\psi - \varphi) \frac{R}{6} \operatorname{sen}^3 \varphi + \\
& + \rho \left[\frac{\operatorname{sen}^2 \psi - \operatorname{sen}^2 \varphi}{2} - \operatorname{sen} \varphi (\operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \varphi) \right] (\cos \psi - \cos \theta) + \\
& + (\theta - \psi) R \left[\frac{\operatorname{sen} \varphi}{2} (\operatorname{sen}^2 \psi - \operatorname{sen}^2 \varphi) - \frac{\operatorname{sen}^3 \psi - \operatorname{sen}^3 \varphi}{3} \right] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

I momenti inflettenti M_{β}''' , M_{ε}''' son dati da:

$$\begin{aligned}
M_{\beta}''' = & M_0''' - T_0''' \rho (\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \beta) + \Pi_c R^2 \operatorname{tang} \omega \left[\left(\frac{\rho}{2} - \frac{R}{3} \right) \operatorname{sen}^3 \beta + \right. \\
& + \left. \left(\frac{R}{2} - \rho \right) \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen}^2 \beta + \frac{\rho}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \beta - \frac{R}{6} \operatorname{sen}^3 \varphi \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{\varepsilon}''' = & M_0''' - T_0''' \rho (\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \varepsilon) + \Pi_c R^2 \operatorname{tang} \omega \left\{ \rho \frac{\operatorname{sen}^2 \psi - \operatorname{sen}^2 \varphi}{2} \right. \\
& - \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varepsilon (\operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \varphi) + \\
& + R \left[\frac{\operatorname{sen} \varphi}{2} (\operatorname{sen}^2 \psi - \operatorname{sen}^2 \varphi) - \frac{\operatorname{sen}^3 \psi - \operatorname{sen}^3 \varphi}{3} \right] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

I momenti M_{α}''' , M_{α_1}''' , le pressioni normali e gli sforzi di taglio in una sezione qualunque sono dati dalle stesse formole scritte in c) pel carico parziale di rinfianco, avvertendo però di porre in quelle formole M_0''' , T_0''' , V , Π_c , quali risultano pel carico triangolare, rispettivamente in luogo di M_0'' , T_0'' , V , Π , quali sono in c) scritti pel carico di rinfianco.

Osservazione. Conoscendo gli sforzi che hanno luogo nell'arco su rulli soggetto ai carichi parziali, rispetto alla corda uniforme e triangolare decrescente verso la chiave, si potranno trovare applicando il principio della sovrapposizione degli effetti, anche gli sforzi dovuti ad un carico parziale triangolare crescente verso la chiave.

F) Archi incastrati soggetti a carico triangolare completo su tutto l'arco e simmetrico rispetto alla chiave.

Si considera una larghezza unitaria di carico avente, per m.³, il peso Π_c .

Sia ω l'angolo formato dall'ipotenusa del triangolo che rappresenta la legge di carico, colla orizzontale; il momento inflettente M_0

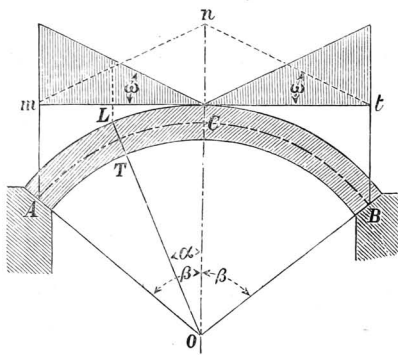


Fig. 249.

e la pressione normale N_0 nella sezione in chiave si otterranno risolvendo il seguente sistema di due equazioni di primo grado:

$$M_0 \beta - N_0 \rho (\beta - \operatorname{sen} \beta) - \frac{\rho^3 \Pi_c \operatorname{tang} \omega}{18} (2 - 2 \cos \beta - \operatorname{sen}^2 \beta \cos \beta) = 0$$

$$M_0 \operatorname{sen} \beta - N_0 \rho \left[\operatorname{sen} \beta - \frac{\operatorname{sen} \beta \cos \beta + \beta}{2} \left(1 + \frac{I}{\Omega \rho^2} \right) \right] + \frac{\rho^3 \Pi_c \operatorname{tang} \omega}{8} \operatorname{sen}^4 \beta \left(\frac{1}{3} + \frac{I}{\Omega \rho^2} \right) = 0 ;$$

ed il momento inflettente, la pressione normale, e lo sforzo di taglio in una sezione qualunque LT saranno:

$$M = M_0 - N_0 \rho (1 - \cos \alpha) + \frac{\rho^3 \Pi_c \operatorname{tang} \omega}{6} \operatorname{sen}^3 \alpha ,$$

$$N = N_0 \cos \alpha + \frac{\rho^2 \Pi_c}{2} \operatorname{tang} \omega \operatorname{sen}^3 \alpha ,$$

$$T = - N_0 \operatorname{sen} \alpha + \frac{\rho^2 \Pi_c}{2} \operatorname{tang} \omega \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha .$$

Se il carico triangolare completo, simmetrico rispetto alla chiave

è crescente verso la chiave, come è indicato in *mnt*, il momento inflettente e la pressione normale in chiave si ottengono risolvendo il seguente sistema di due equazioni di primo grado:

$$M_0'' \beta - N_0'' \rho (\beta - \text{sen } \beta) + \\ + \rho^3 \Pi_c \left[\frac{\beta \text{sen } \beta - \text{sen}^2 \beta \cos \beta}{4} - \frac{\text{tang } \omega}{18} (2 - 2\cos\beta - \text{sen}^2\beta \cos\beta) \right] = 0 , \\ M_0'' \text{sen } \beta - N_0'' \rho \left[\text{sen } \beta - \frac{\text{sen } \beta \cos \beta}{2} + \beta \left(1 + \frac{I}{\Omega \rho^2} \right) \right] + \\ + \frac{\rho^3 \Pi_c \text{tang } \omega}{8} \text{sen}^4 \beta \left(1 - \frac{5}{3} \frac{I}{\Omega \rho^2} \right) = 0 ;$$

essendo sempre ω l'angolo formato dall'ipotenusa del triangolo, che rappresenta la legge di carico, coll'orizzontale.

Il momento inflettente, la pressione normale, e lo sforzo di taglio in una sezione qualunque *LT* saranno:

$$M'' = M_0'' - N_0'' \rho (1 - \cos \alpha) + \frac{\rho^3 \Pi_c \text{tang } \omega}{2} \text{sen}^2 \alpha \left(\text{sen } \beta - \frac{\text{sen } \alpha}{3} \right) ,$$

$$N'' = N_0'' \cos \alpha + \rho^2 \text{tang } \omega \text{sen}^2 \alpha \left(\text{sen } \beta - \frac{\text{sen } \alpha}{2} \right) ,$$

$$T'' = - N_0'' \text{sen } \alpha + \rho^2 \text{tang } \omega \text{sen } \alpha \cos \alpha \left(\text{sen } \beta - \frac{\text{sen } \alpha}{2} \right) .$$

G) Es. Abbiasi un arco di 180° , a sezione costante: il raggio dell'asse di questo arco sia di m. 24,908, ed il carico uniformemente distribuito rispetto all'asse dell'arco sia di kg. 882.

Per un primo calcolo d'approssimazione possiamo servirci delle equazioni in B), per $2\beta = 180^\circ$, relative agli archi incastrati soggetti a carico uniforme rispetto all'arco, trascurando i termini in $\frac{I}{\Omega \rho^2}$, col che avremo le seguenti due equazioni per determinare il momento inflettente m_0 e la pressione normale n_0 in chiave dell'arco dato:

$$1,571 m_0 - 0,571 \cdot 24,908 n_0 + 0,429 \cdot \overline{24,908^2} \cdot 882 = 0 ,$$

$$m_0 - 0,215 \cdot 24,908 n_0 + 0,178 \cdot \overline{24,908^2} \cdot 882 = 0 ,$$

le quali risolte, danno:

$$n_0 = 14070 \text{ kg. circa,}$$

$$m_0 = - 22020 \text{ kg. circa.}$$

L'arco qui considerato è nelle stesse condizioni dell'arco per una tettoia in ferro senza tiranti, studiato dal Castigliano nelle sue applicazioni della *Théorie de l'équilibre* (pag. 335), pel quale egli col metodo di calcolo del seguente N. 7, ha trovato:

$$n_0 = 15606 ,$$

$$m_0 = -14742 .$$

Si vede così, che anche trascurando, come noi abbiamo fatto qui, i termini in $\frac{I}{\Omega \rho^2}$ dovuti alle pressioni. la differenza dei risultati che si ottengono in questo caso, in confronto di quelli ottenuti dal Castigliano, tenendo conto dei termini da noi qui trascurati, non è molto grande. Perciò si potrà servirsi dei risultati del primo calcolo d'approssimazione per stabilire la sezione da darsi all'arco, dopo di che si potrà riprendere il calcolo, applicando le nostre formole con tutti i loro termini, e determinare più esattamente gli sforzi cui l'arco andrà soggetto.

4. — Archi su rulli ed archi incastrati soggetti a carichi concentrati simmetrici rispetto alla chiave.

A) Archi su rulli.

Siano P, P due carichi uguali concentrati posti a distanza orizzontale eguale dalla mezzeria dell'arco, e chiamiamo M_0 il momento

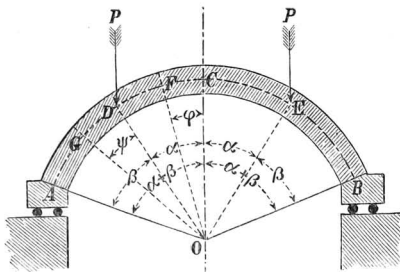


Fig. 250.

inflexione incognito nella sezione in C in chiave dell'arco.

Sarà:

$$M_0 = \frac{P \rho}{\alpha + \beta} [\cos(\alpha + \beta) - \cos \alpha + \beta \sin \alpha] ,$$

essendo $2(\alpha + \beta)$ l'angolo al centro dell'arco.

Per il tronco DC il momento inflettente M_φ , la pressione normale N_φ , e lo sforzo di taglio T_φ , in una sezione qualunque in F , sono dati da:

$$M_\varphi = M_0, \quad N_\varphi = 0, \quad T_\varphi = 0,$$

e pel tronco AD , il momento inflettente M_ψ , la pressione normale N_ψ , lo sforzo di taglio T_ψ , in una sezione qualunque in G , sono dati da:

$$M_\psi = M_0 + P\rho [\text{sen}(\alpha + \psi) - \text{sen}\alpha],$$

$$N_\psi = P \text{sen}(\alpha + \psi), \quad T_\psi = P \cos(\alpha + \psi).$$

Se $\alpha = 0$ il carico $2P$ è concentrato in chiave ed allora, posto $Q = 2P$, si ha:

$$M_0 = -\frac{Q\rho}{2\beta}(1 - \cos\beta).$$

B) Archi incastrati.

Siano ancora due carichi concentrati disposti come nel caso precedente, ma essendo l'arco incastrato. Rappresentiamo l'angolo $(\alpha + \beta)$ con θ , e chiamiamo N_0 , M_0 la pressione normale ed il

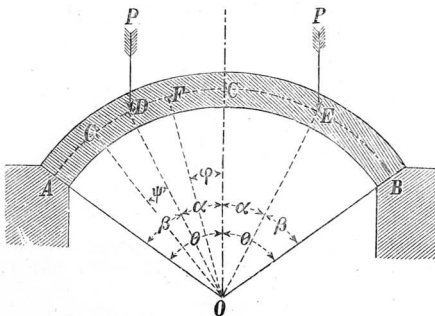


Fig. 251.

momento inflettente incogniti nella sezione in C in chiave dell'arco. Per determinare N_0 ed M_0 si ha il seguente sistema di due equazioni di primo grado:

$$(B) \left\{ \begin{aligned} M_0 \theta + N_0 \rho (\theta - \text{sen } \theta) + P \rho (\cos \alpha - \cos \theta - \beta \text{sen } \alpha) &= 0, \\ M_0 (\theta - \text{sen } \theta) + N_0 \rho \left(\frac{\text{sen } \theta \cos \theta + 3 \theta}{2} - 2 \text{sen } \theta + \right. \\ \left. + \frac{I}{\Omega \rho} \frac{\text{sen } \theta \cos \theta + \theta}{2} \right) + P \rho \left(\cos \alpha - \cos \theta - \frac{\text{sen}^2 \alpha}{2} - \frac{\text{sen}^2 \theta}{2} - \right. \\ \left. - \beta \text{sen } \alpha + \text{sen } \alpha \text{sen } \theta + \frac{I}{\Omega \rho} \frac{\text{sen}^2 \theta - \text{sen}^2 \alpha}{2} \right) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Per il tronco DC il momento inflettente, la pressione normale e lo sforzo di taglio in una sezione qualunque in F sono dati da:

$$M_\varphi = M_0 + N_0 \rho (1 - \cos \varphi);$$

$$N_\varphi = N_0 \cos \varphi; \quad T_\varphi = N_0 \text{sen } \varphi;$$

e pel tronco AD sono dati da:

$$M_\psi = M_0 + N_0 \rho [1 - \cos (\alpha + \psi)] + P \rho [\text{sen} (\alpha + \psi) - \text{sen } \alpha];$$

$$N_\psi = N_0 \cos (\alpha + \psi) + P \text{sen} (\alpha + \psi);$$

$$T_\psi = N_0 \text{sen} (\alpha + \psi) + P \cos (\alpha + \psi).$$

Osservazione. Tanto nel caso dell'arco su rulli, quanto in quello

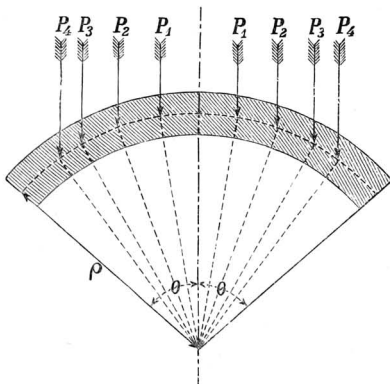


Fig. 252.

dell'arco incastrato, se, invece di due soli pesi eguali P, P posti simmetricamente da una parte e dall'altra della chiave, si hanno più coppie di pesi eguali $P_1, P_1; P_2, P_2;$ ecc. simmetricamente

disposti rispetto alla chiave, si può facilmente trovare il momento inflettente e la spinta o pressione normale in chiave dovuti a tutti i pesi, cercando prima i momenti inflettenti e le spinte in chiave dovuti a ciascuna coppia di pesi, e quindi applicando il principio della sovrapposizione degli effetti, cioè sommandone i risultati.

5. — Anelli. Rulli.

A) Anelli.

Sia $A C B C'$ un anello formato da due archi uniti nel modo indicato nella Fig. 253. Sia quest'anello appoggiato sopra un piano $m n$, e compresso da un carico Q concentrato in C .

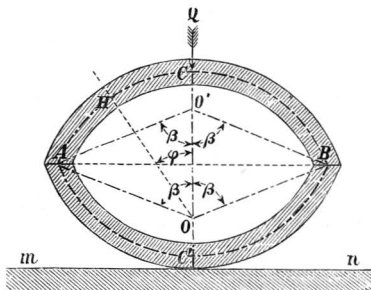


Fig. 253.

Il momento inflettente, la pressione normale e lo sforzo di taglio in una sezione qualunque in H saranno:

$$M = \frac{Q\rho}{2} \left[\operatorname{sen} \varphi - \frac{1 - \cos \beta}{\beta} \right],$$

$$N = \frac{Q}{2} \operatorname{sen} \varphi, \quad T = \frac{Q}{2} \cos \varphi.$$

Quando l'anello è intero, ossia ha per asse una intera circonferenza, il momento inflettente in una sezione qualunque in H è:

$$M = Q\rho \left(\frac{\operatorname{sen} \varphi}{2} - \frac{1}{\pi} \right).$$

Se l'anello invece di essere compresso, è teso, come avviene per gli anelli delle catene, detto Q la forza tendente, si applicheranno le formole date per l'anello compresso, ponendo, se si vuole, in esse $-Q$ in luogo Q .

Se l'anello è ellittico e la forza tendente diretta nel senso del-

l'asse maggiore dell'ellisse, chiamando A il semiasse maggiore dell'asse geometrico ellittico dell'anello ed a il semiasse minore del medesimo, il massimo momento inflettente ha luogo all'estremità del

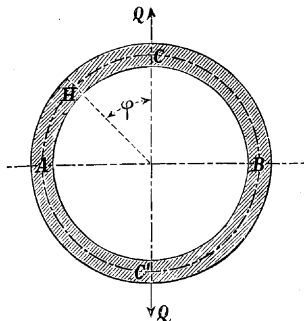


Fig. 254.

l'asse minore $2a$, e, purchè a ed A siano poco differenti fra loro, è dato con sufficiente approssimazione da:

$$M' = \frac{Q}{2} \left[a - (a + A) \frac{1}{\pi} \right].$$

B) Rulli.

Detto D il diametro di un rullo, L la sua lunghezza, K il carico di sicurezza del materiale ond'è formato il rullo, per la stabilità deve avere:

$$Q = 0,323616 D K L ;$$

per cui, se n è il numero dei rulli, sarà:

$$Q = 0,323616 n D K L \quad (I)$$

il peso massimo di cui i rulli potranno essere caricati.

Però non basta che la (I) sia soddisfatta perchè i rulli siano in buone condizioni di stabilità, perchè occorre anche che i rulli non subiscano uno schiacciamento u_1 (fig. 256) e le piastre non subiscano una penetrazione v_1 , maggiori di quelli corrispondenti ai carichi K_u e K_v di sicurezza dei materiali dei rulli e delle piastre. Perciò il peso di cui si potranno caricare i rulli, per soddisfare alle buone condizioni di stabilità, dovrà essere tale da soddisfare alla (I) ed inoltre dovrà essere tale da soddisfare alle due ineguaglianze seguenti:

$$Q < \frac{4}{3} L N D \sqrt{\left(\frac{s}{D} \frac{E_u}{E_v} + 1\right) \frac{K_u^3}{E_u}} \quad (\text{II}),$$

$$Q < \frac{4}{3} L D N \sqrt{\left(\frac{s}{D} \frac{E_u}{E_v} + 1\right) \frac{K_v^3}{E_u}} \quad (\text{III}),$$

essendo E_u ed E_v i moduli di elasticità del materiale dei rulli e delle piastre.

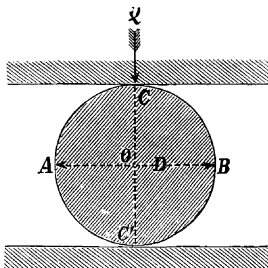


Fig. 255.

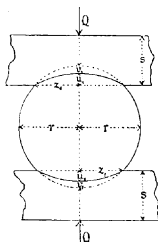


Fig. 256.

Quando le due piastre sono di differente materiale le formole (II) e (III) dovranno applicarsi introducendo prima i valori di E_v e K_v dovuti ad una piastra e poi i valori di E_v e K_v dovuti all'altra piastra.

Il valore definitivo da adottarsi per Q sarà il più piccolo dei valori calcolati colle formole (I), (II), (III).

Lo schiacciamento u_1 , la penetrazione v_1 e la larghezza di penetrazione o di schiacciamento $2z_1$ sono dati da

$$u_1 = \sqrt[3]{\frac{9 Q^2}{16 L^2 \frac{E_u^2}{D} \left(\frac{s}{D} \frac{E_u}{E_v} + 1\right)}} \quad (\text{IV}),$$

$$v_1 = \frac{s}{D} \frac{E_u}{E_v} u_1 \quad (\text{V}),$$

$$2z_1 = 2D \sqrt[3]{\left(\frac{s}{D} \frac{E_u}{E_v} + 1\right)^2 \frac{9 D Q^2}{16 L^2 E_u^2}} \quad (\text{VI}),$$

nelle quali Q ha il più piccolo valore, cioè ha il valore adottato.

Il valore di u corrispondente all'ascissa z (fig. 257) è dato da:

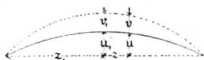


Fig. 257.

$$u = \sqrt[3]{\frac{9 Q^2}{16 L^2 \frac{E_u^2}{D} \left(\frac{s}{D} \frac{E_u}{E_v} + 1 \right)}} - \frac{z^2}{D \left(\frac{s}{D} \frac{E_u}{E_v} + 1 \right)} \quad (\text{VII}),$$

ed il valore di v corrispondente all'ascissa z è dato da:

$$v = \frac{s}{D} \frac{E_u}{E_v} u \quad (\text{VIII}).$$

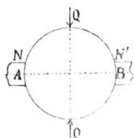


Fig. 258.

Se ai rulli fosse in qualsiasi modo impedita la dilatazione nel piano diametrale AB , per es. trattendoli fra due pezzi rigidi N, N' (fig. 258), in luogo della $\{I\}$ si avrebbe:

$$Q < 0,533333 n D K L \quad (\text{I}).$$

6. — Archi molto ribassati (*).

Supponiamo che l'arco di circonferenza abbia sezione costante e sia soggetto ad un carico uniformemente distribuito rispetto alla corda orizzontale; in questo carico si può comprendere con sufficiente approssimazione anche il peso proprio dell'arco, non che quello dei piccoli rin fianchi, essendo la freccia dell'arco assai piccola rispetto alla corda.

I casi che consideriamo sono due:

1.° *L'arco è incastrato nelle imposte* ossia l'arco posa sui piani d'imposta con tutta l'ampiezza delle due sezioni estreme, ed è saldamente legato alle spalle in modo che dette sezioni non possano in nessun modo staccarsene;

2.° *L'arco è ad imposte cilindriche*, cioè è semplicemente appoggiato nelle imposte (disposizione generalmente da adottarsi in pratica quando le spalle dell'arco siano in muratura, o per mezzo di un perno interposto fra le spalle e l'arco, o perchè l'arco termina con due superficie leggermente curve in modo che il contatto fra le estremità dell'arco e le spalle ha luogo soltanto in prossimità al centro delle sezioni estreme, e che la risultante delle pressioni passa pel centro medesimo.

Denotiamo con:

2 a la corda dell'asse dell'arco,

(*) C. f. r. CASTIGLIANO — Manuale III pag. 85.

h la freccia dell'asse dell'arco,
 Ω ed I l'area ed il momento d'inerzia della sezione dell'arco,

q il carico per m. corr. di corda,

N_0 la spinta orizzontale o pressione normale in chiave,

M_0 il momento inflettente in chiave,

M_1, N_1, T_1 il momento inflettente, la pressione normale e lo sforzo di taglio nelle sezioni d'imposta,

Δt la differenza fra la temperatura a cui l'arco è stato posto in opera, e la massima o minima temperatura che può verificarsi nella località,

$\frac{1}{\delta}$ il coefficiente di dilatazione lineare della sostanza con cui l'arco è formato (*).

a) Arco incastrato. Si ha:

$$M_0 = -\frac{q a^2}{6} \frac{\frac{I}{\Omega}}{\frac{4}{45} h^2 + \frac{I}{\Omega}}, \quad N_0 = \frac{q a^2}{2 h} + \frac{3 M_0}{h};$$

$$M_1 = -2 M_0, \quad N_1 = N_0 + 2 q h, \quad T_1 = -\frac{6 M_0}{a}.$$

L'abbassamento del vertice (punto più alto) dell'arco è dato da

$$\eta = \frac{h}{E \Omega} (N_0 + q h) - \left(\frac{a^2 h}{12 E I} + \frac{A h}{E_t \Omega} \right) \left(N_0 + \frac{q a^2}{2 h} \right).$$

Se l'arco invece d'esser caricato su tutta la sua lunghezza, fosse soltanto caricato sopra una metà, i valori della pressione normale e del momento di flessione alla chiave, come pure l'abbassamento del vertice dell'arco, sarebbero esattamente uguali alla metà del valore che quelle quantità hanno nel caso del carico completo. Di più avrebbe luogo uno sforzo di taglio:

$$T_0 = \frac{3}{16} q a \left(1 + \frac{5}{2} \frac{A I}{a^2 \Omega} \right).$$

Se poi l'arco fosse caricato su tutta la sua lunghezza col carico: permanente — uniformemente distribuito — e sopra una metà soltanto con un sopracarico, si otterrebbero facilmente i valori del momento di flessione, della pressione normale e dello sforzo di taglio alla chiave, considerando separatamente i due carichi, e sommando i risultati.

Se l'arco è metallico, si produrranno sforzi dovuti alle variazioni di temperatura che non si possono trascurare: questi sforzi indipendenti dai carichi si sommeranno coi precedenti. Per determi-

(*) Pel ferro, esprimendo Δt in gradi centigr., si può prendere

$$\delta = 82500.$$

nare gli sforzi dovuti alle sole variazioni di temperatura basta conoscere il valore del momento inflettente M_0' e della pressione normale N_0' in chiave, dovuti a queste sole variazioni, i quali sono dati da:

$$N_0' = \frac{E I \Delta t}{\left(\frac{4}{15} h^2 + \frac{I}{\Omega}\right) \delta}, \quad M_0' = \frac{N_0' h}{3}.$$

Lo sforzo di taglio è nullo.

b) Arco appoggiato. Si ha:

$$N_0 = \frac{q a^2}{2h} \left(1 - \frac{\frac{I}{\Omega}}{\frac{8}{15} h^2 + \frac{I}{\Omega}}\right),$$

$$M_1 = 0, \quad R_1 = q a,$$

essendo R_1 la reazione verticale alle imposte (punti d'appoggio sulle spalle).

Essendo note queste quantità, riesce facile determinare il momento inflettente, la pressione normale e lo sforzo di taglio in una sezione qualunque; e perciò anche i massimi sforzi per m.².

La freccia d'inflessione nel vertice dell'arco è:

$$\eta = \frac{h}{E \Omega} (N_0 + q h) - \left(\frac{5 h a^2}{12 E I} + \frac{A h}{E_t \Omega}\right) \left(N_0 - \frac{q a^2}{2 h}\right).$$

Se il peso q per ogni m. ha luogo non su tutto l'arco, bensì soltanto sopra una metà, la spinta orizzontale all'imposta è uguale alla metà della analoga spinta che si ha nel caso in cui l'arco, è completamente caricato; di più la reazione verticale all'imposta dalla parte della metà carica è uguale ai $\frac{3}{4}$ del carico, ed all'imposta è uguale ad $\frac{1}{4}$.

La freccia d'inflessione nel vertice dell'arco è la metà di quella a carico completo.

Se poi l'arco è carico su tutta la sua lunghezza con un peso uniformemente distribuito, e porta sopra una metà anche un sopracarico uniformemente distribuito, si otterrà facilmente la spinta orizzontale e la reazione verticale di ciascun appoggio considerando separatamente i due carichi e sommando i risultati.

La parte di spinta orizzontale dovuta alla sola variazione di temperatura è:

$$N_0' = \frac{E I \Delta t}{\left(\frac{8}{15} h^2 + \frac{I}{\Omega}\right) \delta};$$

e conosciuta questa spinta, si può facilmente trovare la pressione normale e lo sforzo di taglio, nonchè il momento inflettente, in una sezione qualunque dovuti alla sola variazione di temperatura. Applicando quindi il principio della sovrapposizione degli effetti, e le solite formole di stabilità, si potrà verificare se l'arco proposto è in buone condizioni di resistenza, come pure si potranno determinare le dimensioni da darsi alle sezioni dell'arco, a ciò che egli soddisfi alle migliori condizioni di economia e di stabilità.

7. — Archi di forma qualunque.

Se l'arco circolare si vuol calcolare con precisione maggiore di quella data dal metodo del N.º 2, o se l'arco da calcolare, anziché circolare, ha l'asse della forma di una curva qualunque, si procederà per calcolarne gli sforzi con metodo affatto analogo a quello dato al N.º 5 del Cap. XI. Si considererà cioè la metà dell'arco dato, che si suppone simmetrico rispetto alla sezione in chiave, e si cercherà l'espressione del lavoro di deformazione di questo semiarco, immaginandolo diviso in un numero *pari* di tronchi eguali sufficientemente piccoli. L'espressione del lavoro di deformazione del semiarco si troverà applicando le formole date al Cap. II. Egualgiando quindi a zero le derivate del lavoro di deformazione:

1.º Rispetto al momento inflettente incognito in chiave se l'arco è posto su rulli in ambedue le sue estremità,

2.º Rispetto al momento inflettente e rispetto alla pressione normale in chiave se l'arco è incastrato in ambedue le estremità,

3.º Rispetto alla spinta orizzontale se l'arco è appoggiato in ambedue le estremità;

si determineranno le incognite che occorre di conoscere, per poter stabilire, in termini di quantità tutte note, le espressioni del momento di flessione, della pressione normale e dello sforzo di taglio di una sezione qualunque. Quando queste quantità siano note, colle solite formole di stabilità (il segno (+) è per l'intradosso ed il segno (—) per l'estradosso):

$$\frac{N}{\Omega} \pm M \frac{v}{I} = K,$$

$$K = \frac{5}{4} \frac{G T}{\lambda I},$$

si verificherà se l'arco è in buone condizioni di stabilità, o si assegneranno le dimensioni delle sezioni del medesimo ond'esso soddisfi alle migliori condizioni di stabilità e di economia.

Se l'arco è in muratura, o formato d'altro materiale che mal resista agli sforzi di tensione, bisognerà anche fare in modo che ogni

sezione sia compressa, cioè, per un arco a sezione rettangolare, di altezza s , si dovrà avere :

$$\frac{M}{N} < \frac{s}{6},$$

ossia bisognerà che la curva delle pressioni cada tutta nel **terzo medio** delle sezioni.

Ciò posto, per indicare il procedimento che si può tenere per verificare la stabilità di un arco di forma qualunque, daremo il seguente es. numerico relativo ad un arco di forma circolare.

Si comprenderà facilmente che il metodo, tenuto in questo es. è applicabile qualunque sia la forma dell'arco e la legge di carico cui esso è sottoposto.

Es. Sia proposto di **verificare la stabilità della vólta** di un ponte ad arco in muratura, per strada ferrata, avente le dimensioni qui sotto riportate (Ponte sull'Oglio presso Chiari — Ferrovia Milano-Venezia) (*).

Luce netta fra le spalle o corda dell'arco	m.	42,00
Freccia	»	11,90
Angolo al centro dell'arco (intradosso) 118° 5' 42''		
Raggio intradosso	»	24,479
Larghezza della vólta nel senso delle generatrici rettilinee	»	7,50
Spessezza dell'arco in chiave	»	1,40
» » alle imposte	»	2,38

L'estradosso della vólta presenta diversi risalti.

Carichi. Nei calcoli seguenti sostituiremo al vero estradosso, fatto a risalti, una superficie cilindrica continua avente per direttrice una curva composta d'archi di circolo, di cui ciascuno passa a piedi di tre risalti consecutivi. Non si dovrà quindi dimenticare che la vólta a cui si applicheranno rigorosamente i risultati dei calcoli, che seguono, è la volta teorica avente per estradosso la suddetta superficie cilindrica. Del resto questi risultati si applicheranno con sufficiente approssimazione alla vólta reale.

Considereremo una larghezza di vólta di 1 m. .

Il peso di 1 m.³ della vólta, dei rin fianchi e della cappa è di kg. 2000; e quello di 1 m.³ della ghiaia è di kg. 1600; ed il più grande sopracarico che il ponte deve poter sopportare è di kg. 8000 per m. corr. di ponte, cioè di kg. $\frac{8000}{7,50} = \text{kg. } 1067$ per m.² di superficie.

(*) C. f. r. CASTIGLIANO - *Théorie*, pag. 416 - Manuale IV, pag. 64.

Calcoli di stabilità. Per assicurarsi della stabilità del ponte, occorre di verificare se la volta è stabile allora che si tolgono le centine, cioè sotto l'azione del solo peso proprio, ed inoltre se essa è stabile quando è soggetta a tutti i carichi.

Solo peso proprio. Il carico essendo simmetrico rispetto alla chiave, lo sforzo di taglio in chiave sarà nullo, e per conseguenza potremo prendere per incognità del problema il momento inflettente M e la pressione normale N , in chiave; in funzione di queste incognite esprimeremo il momento inflettente, la pressione normale e lo sforzo di taglio in una qualunque delle 6 sezioni in cui fu diviso il semiarco dell'arco, supponendo la volta tagliata in chiave, e considerando quindi solo una metà della volta.

Il momento inflettente, la pressione normale, e lo sforzo di taglio in una sezione qualunque, per es. nella sezione 4, si otterranno, considerando il momento inflettente e la pressione normale in chiave i carichi ed i momenti dei carichi, e si avrà:

$$M_4 = M - 1,28 N + 56,28 ,$$

$$N_4 = 0,943 N + 13,59 \cdot 0,335 ,$$

$$T_4 = 0,335 N - 13,59 \cdot 0,943 ,$$

nelle quali (vedasi la fig. 259): 1,28 è il braccio di leva della pressione normale applicata in chiave rispetto alla sezione 4; 56,28 e 13,59 non sono altro che il momento e l'area della volta risultanti dalla colonna (2) e (3) della tabella precedente; 0,943 e 0,335 sono il coseno ed il seno dell'angolo che la sezione 4 fa colla verticale, pei quali bisogna moltiplicare la pressione normale in chiave, ed il carico del tronco 6-4, per ottenere le componenti normali della pressione in chiave ed il carico del tronco 6-4, relative alla sezione 4, che danno luogo a pressione normale ed a sforzo di taglio in questa sezione 4.

Componendo le formole analoghe alle tre suesprese per tutte le sezioni del semiarco si forma la seguente:

onde si possa con brevi operazioni da m_6 ad m_1 , da questo ad m_3 , e così di seguito. Questa regola serve tanto per la volta quanto per il carico posto su di essa.

TABELLA LXXVIII.

Sez.	Momenti di fless.	Pressioni normali	Sforzi di taglio
0	$M_0 = M - 11,96 N +$ $+ 458,49$	$N_0 = 0,517 N + 44,01$	$T_0 = 0,857 N - 26,55$
1	$M_1 = M - 8,47 N +$ $+ 339,55$	$N_1 = 0,655 N + 31,12$	$T_1 = 0,756 N - 26,97$
2	$M_2 = M - 5,45 N +$ $+ 224,96$	$N_2 = 0,775 N + 19,95$	$T_2 = 0,635 N - 24,35$
3	$M_3 = M - 2,98 N +$ $+ 127,66$	$N_3 = 0,870 N + 10,88$	$T_3 = 0,492 N - 19,24$
4	$M_4 = M - 1,28 N +$ $+ 56,28$	$N_4 = 0,943 N + 4,55$	$T_4 = 0,335 N - 12,82$
5	$M_5 = M - 0,38 N +$ $+ 14,52$	$N_5 = 0,987 N + 1,08$	$T_5 = 0,170 N - 6,26$
6	$M_6 = M$	$N_6 = 1,000 N$	$T_6 = 0$

Determinazione delle incognite M ed N .

Siano ora:

E il modulo di elasticità medio (di compressibilità) della volta,

$\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_6$ le aree delle sezioni 0, 1, 2, ..., 6,

$I_0, I_1, I_2, \dots, I_6$ i momenti d'inerzia delle sezioni stesse.

Per trovare il lavoro di deformazione L del semiarco abbiamo le formole del N. 3 lett. *d*) del Cap. II, e ponendo:

$$\sum \frac{M^2}{I} = \frac{1}{3} \left(\frac{M_0^2}{I_0} + 4 \frac{M_1^2}{I_1} + 2 \frac{M_2^2}{I_2} + 4 \frac{M_3^2}{I_3} + 2 \frac{M_4^2}{I_4} + 4 \frac{M_5^2}{I_5} + \frac{M_6^2}{I_6} \right),$$

$$\sum \frac{N^2}{\Omega} = \frac{1}{3} \left(\frac{N_0^2}{\Omega_0} + 4 \frac{N_1^2}{\Omega_1} + 2 \frac{N_2^2}{\Omega_2} + 4 \frac{N_3^2}{\Omega_3} + 2 \frac{N_4^2}{\Omega_4} + 4 \frac{N_5^2}{\Omega_5} + \frac{N_6^2}{\Omega_6} \right),$$

e trascurando il lavoro dovuto agli sforzi di taglio, perchè ha una influenza assai piccola sui risultati del calcolo, (essendo m. 4,37 la lunghezza d'asse di ciascuna dei tronchi della volta) si ha:

$$L = \frac{4,37}{2E} \left(\sum \frac{M^2}{I} + \sum \frac{N^2}{\Omega} \right).$$

Nella tabella seguente sono riuniti i valori di $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_6$, $I_0, I_1, I_2, \dots, I_6$, ed i complementi logaritmici di questi valori (*):

(*) Si opera coi logaritmi, perchè con essi il calcolo delle quantità

$$\frac{M_1^2}{I_1}, \frac{M_2^2}{I_2}, \dots, \frac{N_1^2}{\Omega_1}, \frac{N_2^2}{\Omega_2}, \dots$$

è molto spedito ed ordinato.

TABELLA LXXIX.

Sezioni	Aree Ω	Momenti d'inertzia I	Complementi logaritmici di Ω	Complementi logaritmici di I
0	2,38	1,1234	1,62342	1,94947
1	2,28	0,9877	1,64207	0,00537
2	2,18	0,8633	1,66154	0,06384
3	2,08	0,7499	1,68194	0,12500
4	1,82	0,5024	1,73993	0,29895
5	1,50	0,2812	1,82391	0,55098
6	1,40	0,2287	1,85387	0,64073

Dividendo il valore di L per la costante $\frac{4,37}{2E}$, ciò che non cambia affatto le equazioni che si otterranno uguagliando a zero le derivate di quest'equazione rispetto ad M ed N , e quindi non resteranno alterati i risultati che si otterranno per le incognite; e sostituendo nella espressione di L ad M_0, M_1, M_2, \dots ed N_0, N_1, N_2, \dots le loro espressioni date dalla penultima tabella, e ad $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \dots$ I_0, I_1, I_2, \dots i loro valori dati dall'ultima tabella, si ha:

$$\frac{2E}{4,37} L = \sum \frac{M^2}{I} + \sum \frac{N^2}{\Omega} =$$

$$= 11,72 M^2 - 27,90 \cdot 2 M N + 183,18 N^2 + 1138,68 \cdot 2 M - 7225,08 \cdot 2 N ,$$

trascurando nelle espressioni di $\sum \frac{M^2}{I}$ e di $\sum \frac{N^2}{\Omega}$ i termini indipendenti dalle incognite, perchè senza influenza sui risultati, poichè essi svaniscono prendendo le derivate.

Prendendo le derivate di

$$\sum \frac{M^2}{I} + \sum \frac{N^2}{\Omega} .$$

rispetto ad M e rispetto ad N , ed eguagliando a zero, si ottiene rispettivamente:

$$11,72 M - 27,90 N = 1138,68 ,$$

$$- 27,90 M + 183,18 N = 7225,98 ,$$

dalle quali si ricava

$$M = - 5,096 , \quad N = 38,671 .$$

Il valore negativo di M indica che il centro di pressione alla chiave si trova al di sopra del centro della sezione.

Pressioni per m.² nelle diverse sezioni.

Sostituendo nella penultima tabella questi valori di M e di N si ottengono i momenti di flessione, le pressioni normali e gli sforzi di taglio nelle sezioni 0, 1, 2, ..., 6. Dividendo i momenti inflettenti per le pressioni normali si ottengono le distanze fra i centri di pressione e i centri delle sezioni, ciò che serve a tracciare la **curva delle pressioni** [il segno (—) indica ordinata sopra l'asse dell'arco, il segno (+) sotto l'asse].

In fine applicando la formola :

$$\frac{N}{\Omega} \pm M \frac{v}{I}$$

nella quale: N , M rappresentano la pressione normale ed il momento inflettente in una sezione qualunque, Ω , I , v l'area, il momento d'inerzia e la semialtezza di questa stessa sezione; si ottiene la pressione per m.² all'intradosso (col segno superiore +) ed all'estradosso (col segno inferiore —) e si forma così la seguente:

TABELLA LXXX.

Sezioni (1)	Momenti di flessione (2)	Press. normali (3)	Sforzi di taglio (4)	Curva dei centri delle pressioni (5)	Pressione in kg. per m. ²	
					all' intradosso (6)	all' estradosso (7)
0	9,11	64,00	+ 6,59	— 0,142	34504	73040
1	+ 6,91	56,45	+ 2,37	+ 0,122	65478	33558
2	+ 9,11	49,92	+ 0,21	+ 0,182	69858	21738
3	+ 7,32	44,52	0,21	+ 0,164	63110	22506
4	+ 1,69	41,02	+ 0,13	+ 0,041	51200	38956
5	— 5,27	39,25	+ 0,31	0,135	24822	79846
6	— 5,10	38,67	0	— 0,132	24022	86462

[Nella colonna (5), il segno (—) indica che il centro di pressione è sopra l'asse dell'arco, il segno (+) sotto].

Si avverte che i risultati delle colonne (6) e (7) sono espressi in kg.; e che quindi per ottenerli, applicando la formola:

$$\frac{N}{\Omega} \pm M \frac{v}{I}$$

bisogna moltiplicare M e N [cioè i valori dati dalle colonne (2) e (3)] per 2000 (peso di un m.³ di volta). Parimenti se si vuole conoscere il valore dello sforzo di taglio delle sezioni 0, 1, 2, ..., espri-

mendolo in kg. si devono moltiplicare i risultati esposti nella colonna (4) per kg. 2000.

Vedesi che in tutte le sezioni la distanza del centro di pressione dal centro di figura è notevolmente minore di $\frac{1}{6}$ delle sezioni, cioè in tutte le sezioni il centro di pressione cade entro il terzo medio, onde esse sono premute per tutta la loro ampiezza.

L'abbassamento della vòlta alla chiave è dato dalla formola seguente:

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{4,37}{E} \frac{1}{3} \left(\frac{M_0 x_0}{I_0} + 4 \frac{M_1 x_1}{I_1} + 2 \frac{M_2 x_2}{I_2} + 4 \frac{M_3 x_3}{I_3} + 2 \frac{M_4 x_4}{I_4} + \right. \\ \left. + 4 \frac{M_5 x_5}{I_5} \right) + \frac{4,37}{E} \frac{1}{3} \left(\frac{N_0 \text{ sen } \varphi_0}{\Omega_0} + 4 \frac{N_1 \text{ sen } \varphi_1}{\Omega_1} + 2 \frac{N_2 \text{ sen } \varphi_2}{\Omega_2} + \right. \\ \left. + 4 \frac{N_3 \text{ sen } \varphi_3}{\Omega_3} + 2 \frac{N_4 \text{ sen } \varphi_4}{\Omega_4} + 4 \frac{N_5 \text{ sen } \varphi_5}{\Omega_5} \right), \end{aligned}$$

nella quale $M_0, M_1, M_2, \dots, N_0, N_1, N_2, \dots$ hanno i valori riportati nelle colonne (2) e (3) dell'ultima tabella; $I_0, I_1, \dots, \Omega_0, \Omega_1, \dots$ sono i momenti d'inerzia e le aree delle sezioni; x_0, x_1, \dots le distanze fra i centri di queste sezioni stesse ed il piano verticale che passa in chiave; e $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ sono gli angoli delle sezioni colla verticale (si osservi che

$$x_6 = 0, \quad \text{sen } \varphi_6 = 0).$$

Esprimendo in numeri sarà:

$$\gamma = \frac{3280000}{E}.$$

Se si conoscesse E si avrebbe l'abbassamento γ ; ma in pratica è γ che si conosce; così per un ponte, come quello di cui qui si studia la stabilità, l'abbassamento alla chiave durante il togliimento delle centine fu di m. 0,045; quindi risulta che per la muratura della vòlta di questo ponte:

$$E = 72889000.$$

Peso proprio e carico totale. Se si vuol verificare la stabilità della vòlta, tenendo conto del peso proprio di tutto il carico permanente, e del sopraccarico accidentale, si formerà analogamente al caso precedente la tabella dei momenti inflettenti, delle pressioni normali, e degli sforzi di taglio, espressi in funzione di M e di N , e quindi colla formola del N.º 3, d) del Cap. II si calcolerà, come si è fatto pel caso del peso proprio, il lavoro di deformazione del semiarco, considerato di larghezza m. 1,00; si prenderanno in seguito le derivate rispetto ad M ed a N , e si eguaglieranno a zero, col che si otterranno le due equazioni seguenti:

$$11,72 M - 27,90 N + 2320,33 = 0 ,$$

$$- 27,90 M + 183,18 N - 15174,54 = 0 ,$$

d'onde :

$$M = - 1,220 , \quad N = 82,653 ,$$

e quindi operando nello stesso modo come si è fatto pel peso proprio, si formerà la seguente :

TABELLA LXXXI.

Sezioni	Momenti di flessione	Press. normali	Sforzi di taglio	Curva dei centri di pressione	Press. in kg. per m. ²	
					all' intradosso	all' estradosso
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0	+ 24,93	167,87	- 4,66	+ 0,152	183880	* 88048
1	+ 16,68	135,27	- 7,80	+ 0,121	157162	80154
2	+ 1,13	109,14	- 4,57	+ 0,010	102980	97272
3	- 1,24	94,99	+ 0,23	- 0,013	87898	94778
4	- 1,94	86,89	+ 2,50	- 0,022	88180	103108
5	- 4,99	83,60	+ 2,34	- 0,060	84850	138086
6	- 1,22	82,65	0	- 0,015	110602	125538

Anche qui si vede che tutte le sezioni sono compresse per tutta la loro ampiezza.

La massima pressione ha luogo all'intradosso nelle sezioni d'imposta, ed è di kg. 183880 per m.², ossia di kg. 18,388 per cm.²: essa può ammettersi con tutta sicurezza tenuto conto che la volta è stata eseguita con grandissima cura impiegando mattoni scelti e malta eccellente (*).

Per determinare l'abbassamento in chiave si farà uso della formola data pel caso del solo peso proprio, ponendo però in essa per $M_0, M_1, \dots, N_0, N_1, \dots$ i valori dati dalle colonne (2) e (3) dell'ultima tabella, e si otterrà :

$$\eta = \frac{5380000}{E}$$

ossia ponendo per E il valore precedentemente trovato :

$$\eta = \frac{5380000}{72889000} = \text{m. } 0,074 .$$

(*) Composta con calce idraulica di Palazzolo.

essendo f il coefficiente d'attrito fra le murature, il quale si suole prendere non maggiore di 0,75 (C. f. r. pag. 351).

Riguardo alle condizioni che le sezioni orizzontali del piedritto debbano essere premute in ogni punto, è noto che, onde ciò avvenga, si esige che il centro di pressione in ogni sezione disti, *dall'una o dall'altra parte dell'asse di flessione*, non più di un sesto della larghezza della sezione, cioè cada entro il **terzo medio** della sezione. E siccome il massimo pericolo riguardo alla rotazione ha luogo per la base GH sopra la risega di fondazione, ritenuto che la parte $TLMV$ in calcestruzzo, trovandosi nel terreno resistente, costituisca una base immobile, così basterà verificare che il centro di pressione cada nel terzo medio della base GH .

Indicando con:

i il centro della sezione GH ,

\mathfrak{z} la distanza orizzontale del centro di pressione da

tale centro i ,

$\mathfrak{S} = GH$ la larghezza della base del piedritto;

si dovrà dunque avere

$$\mathfrak{z} < \frac{1}{3} \frac{\mathfrak{S}}{2} .$$

Siano:

q il peso del masso di muratura $CDEBHGAFC$;

g la proiezione del centro di gravità di questo masso sulla base GH ,

δ la distanza \overline{gi} ,

p il peso della mezza volta col suo carico,

\mathfrak{b}_1 la distanza del centro della sezione EB della volta, dalla verticale vu (passante pel punto d'applicazione di p),

$\mathfrak{b} = iu = GH$ proiezione orizzontale di $\frac{BE}{2} + \mathfrak{b}_1$

la distanza del centro i dalla verticale vu ,

$d = \frac{M_o}{N_o}$ la distanza del punto O_1 , cui trovasi applicata la spinta N_o nella sezione in chiave, dal centro O di questa sezione (M_o e N_o si troveranno a mezzo delle formole che abbiamo dato in questo capitolo).

$D - O_1 N = NO + d$ la distanza del punto O_1 d'applicazione di N_o dalla orizzontale iN :
si avrà:

$$\mathfrak{z} = \frac{q \delta + p \mathfrak{b} - N_o D}{p + q} ,$$

e quindi affinché vi sia pressione in ogni punto della base dovrà essere:

$$\frac{q \delta + p \mathfrak{b} - N_o D}{p + q} < \frac{\mathfrak{S}}{6} .$$

Inoltre per la stabilità si dovrà verificare ancora la (l è la lunghezza della base in GH del piedritto):

$$\frac{l(q+p)}{l \varpi} + l(q \delta + p \delta - N_0 D) \frac{2}{12 l \varpi^3} < K$$

ossia:

$$\frac{q+p}{\varpi} + \frac{6(q \delta + p \delta - N_0 D)}{\varpi^3} < K$$

essendo K il coefficiente di resistenza del materiale di cui è costituita la spalla.

PILE. Una pila deve sopportare il peso proprio e quello delle due mezzearcate che si appoggiano su di essa, ed inoltre deve resistere alla differenza di spinta delle due arcate medesime. Se queste sono eguali la differenza delle spinte non può provenire che dal supporre il sopraccarico sopra una sola arcata; se invece esse sono diseguali la differenza di spinta si ottiene dal supporre sovraccarica soltanto l'arcata, che, anche senza sopraccarico, dà già una spinta maggiore dell'altra.

Le condizioni di stabilità delle pile si trovano collo stesso metodo, come quelle delle spalle; cioè si esige che il rapporto fra la differenza di spinta, ed il peso, che sta sopra il piano orizzontale d'imposta, sia minore del coefficiente d'attrito; e che mentre per le spalle è conveniente che la pressione sulla base di fondazione, sopra la risega, abbia il suo centro dalla parte della volta anziché da quella del terrapieno, o tutt'al più coincida col centro della sezione GH — per le pile basta che il detto centro di pressione cada entro il terzo medio della sezione di base di fondazione.

9. — Pile metalliche.

A) Classificazione e sollecitazioni esterne.

Relativamente alla loro struttura si possono classificare nei seguenti tre sistemi tipici:

- | | | | | |
|---|---|---|---|--|
| 1. ^o sist. lineare: pile | } | tubolari — sempre incastrate al piede —
e
a colonne isolate | } | — incastrate al piede
(fissate con ancore o
con pali a vite)
e
a pendolo od oscillanti
(a cerniera ai loro
estremi). |
| 2. ^o sist. superficiale: pile piane o palate
semplici | | | | |
| 3. ^o sist. solido: pile a torre o a graticcio | | {
e
} | } | sempre
incastrate
al piede. |

Devono resistere :

1.^o al peso permanente e a quello mobile delle due mezze travate che sostengono ;

2.^o al peso proprio ;

3.^o all'azione del vento, agente, tanto su esse, quanto sulle travate del ponte e sul treno che vi passa sopra ;

4.^o alla forza centrifuga che si sviluppa durante il transito dei treni, se il ponte è in curva ;

5.^o alle forze dovute all'attrito fra le ruote motrici delle locomotive in moto e le rotaie, oppure all'attrito sviluppato dalle ruote frenate.

Riguardo alle sollecitazioni 1.^o, 3.^o, 4.^o e 5.^o si è già detto al Cap. V di questo Manuale.

B) Peso proprio delle pile (*).

Indicando con

h l'altezza della pila,

λ " costante di ciascun piano o pannello della pila,

l la portata delle travi sovrapposte,

Π il peso in kg. per m. corr. d'altezza di pila,

P " " d'un campo della pila ;

si può valutare P con la

$$P = \Pi \lambda$$

dove, *in media*, per pile in ghisa e ferro, o completamente in ferro, nei ponti ferroviari :

I) ad un solo binario :

$$\Pi = \text{kg. } 2200 \div 1100 ,$$

II) a due binari (circa $\frac{1}{3}$ di più) :

$$\Pi = \text{kg. } 3300 \div 1700 .$$

Con maggior approssimazione :

$$\Pi_c = a h + b l$$

dove per le pile a torre, si ha approssimativamente :

a) con montanti in ghisa e le pareti del traliccio in ferro,

per m. corr. $\left\{ \begin{array}{l} \text{peso della ghisa} = c \Pi \\ \text{" del ferro} = (1 - c) \Pi \end{array} \right\}$ dove $c = 0,64 \div 0,58$,
in media $c = 0,61$

se il ponte è :

$$\text{I) ad un solo binario: } \left\{ \begin{array}{l} a = 16,33 \\ b = 32,82 \end{array} \right.$$

$$\text{II) a due binari: } \left\{ \begin{array}{l} a = 27,27 \\ b = 54,80 \end{array} \right.$$

(*) C. f. r. Enciclopedia dell'ing. Vol. II — Parte III, traduz. Prof. Ing. JORINI pag. 434 e pag. 532.

b) tutte in ferro:

$$I) \text{ ad un solo binario: } \begin{cases} a = 17,17 \\ b = 50,44 \end{cases}$$

$$II) \text{ a due binari: } \begin{cases} a = 23,44 \\ b = 69,45 \end{cases}$$

C) **Nozioni fondamentali per il calcolo delle pile metalliche.**

Una pila piana quando le diagonali dei diversi campi siano ferri piatti (e quindi resistano soltanto a tensione) e prescindendo dalla rigidità dei nodi — ossia supponendo che tutte le aste siano collegate fra loro alle estremità a cerniera senza attrito — costituisce una travatura reticolare *staticamente determinata*. Se invece le diagonali sono costituite da ferri sagomati, la travatura è *staticamente indeterminata*; per togliere tale indeterminazione si imagina fatta la scomposizione in reticolati semplici come nelle travi reticolate (Cap. X).

Anche una pila a torre, se le diagonali sono ferri piatti, costituisce una travatura reticolare nello spazio *staticamente determinata* (prescindendo dalla rigidità dei nodi), poichè in ogni pannello sarà effettivamente in azione una sola diagonale (quella tesa). Se invece, come si preferisce generalmente in pratica per ottenere una maggiore rigidità, le due diagonali di ciascun pannello sono ferri sagomati, in guisa da poter sopportare anche sforzi di compressione, la travatura diviene *staticamente indeterminata*; e anche qui si applicherà il principio della scomposizione in travature aventi un solo sistema di diagonali.

Determinati gli sforzi nelle aste di queste travature più semplici, si otterranno poi per via di somma algebrica gli sforzi nelle aste della travatura data.

La determinazione rigorosa degli sforzi nelle singole aste, secondo la teoria dell'elasticità, risulta in generale troppo laboriosa (*); perciò ci limiteremo a riportare le formole, date dalla statica (con che si ottiene una soluzione approssimata rispondente ai bisogni della pratica), e soltanto quelle per le pile piane, rimandando il Lettore all' *Enciclopedia dell'ingegnere* (Vol. II Parte III pag. 452) per quelle relative alle pile a torre.

Riguardo alle pile a colonne, incastrate al piede od oscillanti,

(*) Il calcolo delle pile a graticcio, sviluppato sulle basi della teoria dell'elasticità venne dato da NÖRDLING negli *Ann. des ponts et chaussées* (1864), facendo l'ipotesi semplificativa di una pila prismatica in luogo d'una piramidale (Vedi anche la sua *Mémoire sur les piles en charpente métallique des grands viaducs* Paris 1864). Più recente (1832) è la notevole trattazione generale dell'Ing. L. ALLIEVI " *Equilibrio interno delle pile metalliche secondo le leggi della deformazione elastica* ", di cui un riassunto fu pubblicato negli *Atti dell'Acc. dei Lincei* — Anno CCLXXIX — 1881-82 Serie III — TRANSUNTI Vol. VI.

osserviamo soltanto che devono essere calcolate come solidi caricati di punta (vedi Cap. III N.º 3 e Cap. IV N.º 2 Fig. 74).

a) PILE PIANE.

α) Palate fisse.

1.º Forma e carichi. La palata consta di due montanti $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ inclinati dell'angolo α con la verticale (Fig. 261), di orizzontali di compressione, e diagonali incrociate (Croce di S. Andrea).

Siano (Fig. 262):

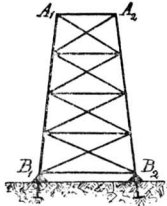


Fig. 261.

P il peso medio proprio di un campo o piano della palata,

\wp_1 la pressione orizzontale che il vento vi esercita, ritenendola costante per tutti i piani,

P_1, P_2 i carichi mobili agenti contemporaneamente sull'architrave della palata,

P'_1, P'_2 le pressioni verticali agenti sulle teste dei montanti, dovute a P_1, P_2 ,

\wp' la pressione orizzontale (sul ponte) del vento agente ad un'altezza h' al di sopra del detto architrave,

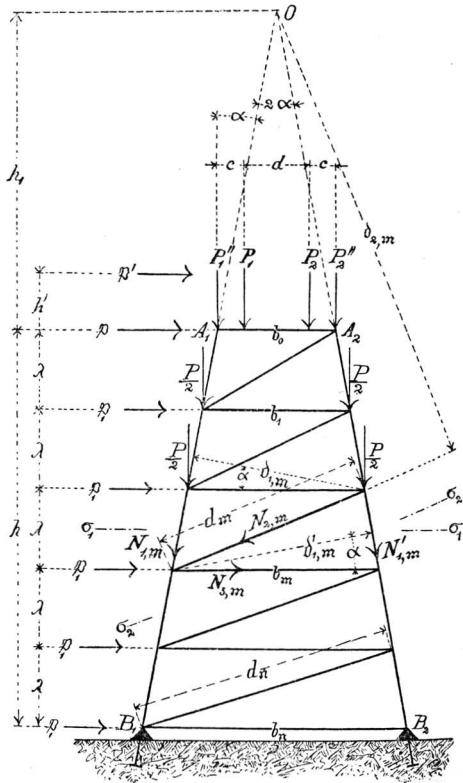


Fig. 262.

M_m il momento di \mathfrak{P}' rispetto ad un punto qualunque posto alla distanza verticale $m \lambda$ sotto all'architrave.

Si avrà :

$$P_1' = \frac{P_1(d+c) + P_2c}{d+2c}, \quad P_2' = \frac{P_2(d+c) + P_1c}{d+2c}; \quad (I)$$

$$M_m = \mathfrak{P}'(m \lambda + h') = \mathfrak{P}' \cdot m \lambda + \mathfrak{P}' \cdot h'. \quad (II)$$

Si imaginino (Fig. 263) due forze ideali $-F$ e $+F$ applicate rispettivamente alle teste dei montanti, dirette verticalmente, e tali che il momento della coppia

$$F(d+2c)$$

sia eguale in valore e verso a $\mathfrak{P}' h'$; onde :

$$F = \mathfrak{P}' \frac{h'}{d+2c}. \quad (III)$$

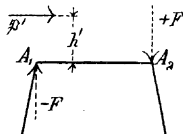


Fig. 263.

Si vede, allora, che M_m si può considerare risultante dal momento $M_m^{(a)}$, dato da :

$$M_m^{(a)} = \mathfrak{P}' \cdot m \lambda,$$

e prodotto dalla forza \mathfrak{P}' trasportata parallelamente a se stessa nel piano di coronamento $A_1 A_2$ della palata, e dal momento della coppia $(-F, +F)$. Quindi all'azione \mathfrak{P}' del vento sul ponte si può sostituire (Fig. 264) una forza orizzontale uguale a \mathfrak{P}' , agente nel piano dell'architrave, assieme alle due forze verticali $-F$ e $+F$ applicate alle teste dei montanti.

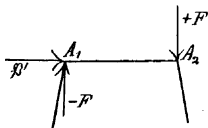


Fig. 264.

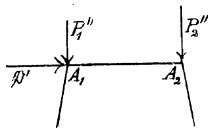


Fig. 265.

Dunque il carico totale agente sull'architrave è costituito (Fig. 265) da una forza orizzontale uguale a \mathfrak{P}' , agente nel piano $A_1 A_2$ dello stesso, e da due forze verticali, applicate alle teste dei montanti, e eguali rispettivamente a

$$P_1'' = P_1' - F, \quad P_2'' = P_2' + F.$$

2.º Calcoli di resistenza.

Sia \mathfrak{P} la risultante della \mathfrak{P}' , agente nel piano $A_1 A_2$, e della pressione orizzontale che il vento esercita direttamente sull'architrave della pila.

Indichiamo con:

- $N'_{1,m}$, $N'_{1,m}$ gli sforzi interni nella porzione, posta nell' m^{esimo} campo, rispettivamente dei montanti di sinistra e destra,
 $N_{2,m}$ la tensione della diagonale posta nell' m^{esimo} campo,
 $N'_{3,m}$ lo sforzo della m^{esima} orizzontale.

Si ha:

$$N'_{1,m} = \frac{1}{\delta'_{1,m}} \left[(m-1)P \cdot \frac{b_m}{2} + P_1'' \cdot \frac{b_m - b_0}{2} + P_2'' \cdot \frac{b_m + b_0}{2} + \mathfrak{F}_1 \cdot m \lambda + \mathfrak{F}_1 \cdot \frac{m(m-1)}{2} \lambda \right], \quad (\text{V})$$

$$\delta'_{1,m} = b_m \cos \alpha :$$

$$N_{1,m} = \frac{1}{\delta_{1,m}} \left[-(m-1)P \cdot \frac{b_m - 1}{2} - P_1'' \cdot \frac{b_m - 1}{2} \frac{b_0}{2} - P_2'' \cdot \frac{b_m}{2} \frac{1 + b_0}{2} + \mathfrak{F}_1 \cdot (m-1) \lambda + \mathfrak{F}_1 \cdot \frac{(m-1)(m-2)}{2} \lambda \right], \quad (\text{VI})$$

$$\delta_{1,m} = b_m - 1 \cos \alpha ;$$

$$N_{2,m} = \pm \frac{1}{\delta_{2,m}} \left[P_1'' \cdot \frac{b_0}{2} - P_2'' \cdot \frac{b_0}{2} + \mathfrak{F}_1 \cdot h_1 + (m-1) \mathfrak{F}_1 \left(h_1 + \frac{m}{2} \lambda \right) \right], \quad (\text{VII})$$

[(+) se la diagonale sale a destra (come nella Fig. 262), (-) se sale a sinistra]

$$\delta_{2,m} = \frac{b_m}{d_m} \left[h_1 + (m-1) \lambda \right],$$

$$N_{3,m} = - \frac{1}{h_1 + m \lambda} \left[P_1'' \cdot \frac{b_0}{2} - P_2'' \cdot \frac{b_0}{2} + \frac{P}{2} \cdot \frac{b_m}{2} + \mathfrak{F}_1 \cdot h_1 + m \mathfrak{F}_1 \left(h_1 + \frac{m+1}{2} \lambda \right) \right]. \quad (\text{VIII})$$

Il montante a destra subisce la massima pressione $N'_{1,m}$ (mass.) allorchè la pila è caricata in testa del massimo peso, ed il vento soffia, con la massima intensità, da sinistra a destra della palata.

Tale pressione $N'_{1,m}$ va aumentando con la distanza $m \lambda$, cioè con m .

Il *montante di sinistra* subisce la minima pressione $N_{1,m}^{(\text{min.})}$ quando la palata è sovracaricata del minimo peso, ed il vento soffia, con la massima intensità, da sinistra a destra.

A seconda che

$$\begin{aligned} (m-1)P \cdot b_{m-1} + P_1''(b_m - b_0) + P_2''(b_{m-1} + b_0) &\stackrel{<}{>} \\ &> \left[\mathfrak{P}_2 \cdot 2(m-1) + \mathfrak{P}_1(m-1)(m-2) \right] \lambda, \end{aligned} \quad (\text{IX})$$

questo montante di sinistra sopporta, una *pressione* oppure una *tensione*. In quell'ultimo caso si rende necessario un sistema di ancoramento con lo *zoccolo* e con le opere di fondazione.

Anche nelle sezioni di questo montante cresce il grado di sollecitazione $N_{1,m}$, alla compressione od alla tensione coll'aumentare della loro distanza $m \lambda$ dalla testa della palata.

Le *diagonali ascendenti* verso destra (Fig. 262) sopportano la massima tensione $N_{2,m}$, quando si hanno i maggiori sovracarichi sul montante di sinistra ed i minori su quello di destra, e quando si ha la massima pressione del vento diretto da sinistra a destra.

Se $P_1'' = P_2''$ le diagonali non sono sollecitate che dall'azione del vento; quindi sono compresse o tese alternativamente ciascuna, se *rigide*, oppure una di esse è tesa e l'altra scarica, se *fatta in modo da non poter resistere agli sforzi di compressione*.

Le *fascie orizzontali* subiscono la massima pressione $N_{3,m}^{(\text{mass.})}$ allorchè si ha il massimo sovracarico sul montante di sinistra, il minimo su quello di destra, e la massima pressione del vento da sinistra a destra.

Se si fa astrazione dal tenue valore del peso $\frac{P}{2}$ di un mezzo piano di palata, e si suppone $P_1'' = P_2''$, allora anche le orizzontali non sono sollecitate che dall'azione del vento.

Quando le diagonali ascendono a destra (Fig. 262), ed il vento soffi da sinistra colla massima velocità, le orizzontali sopportano la massima compressione $N_{3,m}^{(\text{mass.})}$, in base alla quale vengono determinate le loro sezioni.

Per i ponti in curva si deve tener conto della forza centrifuga (pag. 125), e allora \mathfrak{P}' rappresenterà la risultante di tale forza centrifuga (orizzontale) e della pressione orizzontale del vento sul ponte.

3.^o Osservazioni sul calcolo di resistenza delle palate.

Se i campi, ond'è divisa la palata, non sono di uguali altezze, le formole (V) e (VIII) restano ancor valide, purchè:

1^o in luogo del peso $(m-1)P$ degli $(m-1)$ campi di peso medio costante, si ponga la somma $\sum_{\nu=1}^{m-1} P_\nu$ dei diversi pesi effettivi degli $(m-1)$ campi;

II⁰) in luogo dei bracci di leva $m\lambda$ e $(m-1)\lambda$, riferiti alla retta d'azione di $N_{3,m}$, si sostituiscono i bracci effettivi b_m e b_{m-1} ;

III) si considerino per ogni nodo le pressioni del vento, e si calcoli la somma dei loro momenti effettivi:

$$\sum_{v=0}^{v=m} \mathfrak{P}_v b_v ;$$

IV⁰) in pratica, conviene determinare separatamente gli sforzi indotti:

- (p) dal peso proprio della palata,
- (u) " " permanente ed accidentale del ponte,
- (v) dalla pressione del vento,

quindi dedurre da tali risultati, facendone la somma algebrica, le massime sollecitazioni:

$$N'_{1,m} = N'_{1,m}(p) + N'_{1,m}(u) + N'_{1,m}(v) , \quad N_{1,m} = N_{1,m}(p) + N_{1,m}(u) + N_{1,m}(v) ;$$

$$N_{2,m} = N_{2,m}(p) + N_{2,m}(u) + N_{2,m}(v) ; \quad N_{3,m} = N_{3,m}(p) + N_{3,m}(u) + N_{3,m}(v) .$$

V⁰) Consideriamo una pila piana, costituita come la precedente, coll'aggiunta di un montante verticale centrale $A_3 B_3$ (Fig. 266),

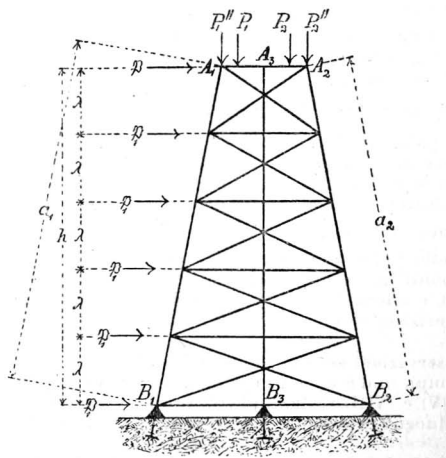


Fig. 266.

con lo scopo di scaricare su esso parte del peso transitante per i due binari, e ciò senza alterare la posizione delle diagonali, perchè quella adottata è conveniente dal punto di vista costruttivo, e razionale per il loro ufficio statico.

Il calcolo si modifica soltanto per i montanti: quello centrale A_3B_3 riceve la frazione $\frac{P_1}{a_1} + \frac{P_2}{a_2}$ delle pressioni trasmesse dagli appoggi intermedi della soprastruttura; mentre i montanti estremi portano oltre il carico immediato, quello dovuto alle componenti delle P_1, P_2 . e cioè

$$P_1 \frac{a_1 - 1}{a_1} \quad \text{e} \quad P_2 \frac{a_2 - 1}{a_2} .$$

L'azione del vento non si fa sentire sul montante centrale A_3B_3 che per la diversa ripartizione dei carichi applicati in testa della palata, venendo ad aggravare la pressione su A_3B_3 .

Ciò pone i tre montanti in condizioni di massime pressioni pressochè uguali, epperò si può dar loro sezioni circa uguali.

Consideriamo ancora la palata con due montanti verticali A_1B_3, A_2B_4 (Fig. 267), riuniti da orizzontali e diagonali, e rinforzati da due saettoni obliqui A_1B_1, A_2B_2 .

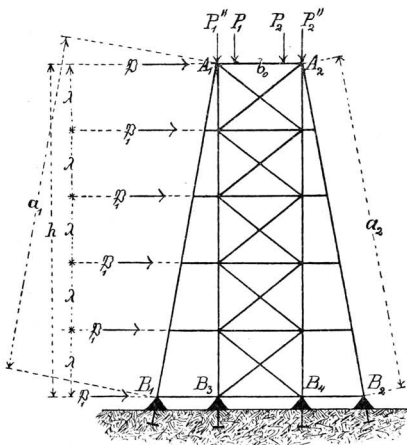


Fig. 267.

I due tratti dei montanti A_1B_3, A_2B_4 , posti nell' m^{esimo} campo
 SANDRINELLI. 29

a partire dall'alto, subiranno rispettivamente le pressioni:

$$P_1'' + \frac{m}{2} \cdot P \quad \text{e} \quad P_2'' + \frac{m}{2} \cdot P .$$

I saettoni $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ saranno sollecitati dalle componenti dell'azione del vento \mathfrak{P} , ottenute nel seguente modo:

la forza \mathfrak{P} , per mezzo dell'architrave di coronamento, si può immaginare scomposta in due uguali a $\frac{\mathfrak{P}}{2}$ ed applicate alle teste dei montanti; ciascuna di esse si scompone in due, l'una F' secondo il saettone, l'altra F'' secondo il montante verticale. Queste componenti F_1' , F_1'' per il saettone e montante di sinistra, F_2' , F_2'' per i corrispondenti di destra, si possono ottenere graficamente coi parallelogrammi; oppure analiticamente con le:

$$F_1' = \frac{\mathfrak{P}}{2} \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 - h^2}} , \quad F_2' = \frac{\mathfrak{P}}{2} \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 - h^2}} , \quad (\text{X})$$

$$F_1'' = \frac{\mathfrak{P}}{2} \frac{h}{\sqrt{a_1^2 - h^2}} , \quad F_2'' = \frac{\mathfrak{P}}{2} \frac{h}{\sqrt{a_2^2 - h^2}} . \quad (\text{XI})$$

Quando adunque il vento soffia da sinistra (Fig. 267) risultano compressi il montante di sinistra $A_1 B_3$ ed il saettone di destra $A_2 B_2$. Con l'invertirsi della direzione del vento i due saettoni vengono ad essere successivamente tesi, epperò è necessario per entrambi l'ancoramento. Si dovrà ancorare anche i montanti, se la compressione dovuta alle azioni verticali non avesse a superare la tensione dovuta al vento.

La pressione del vento \mathfrak{P}_1 , costante per tutti i piani, produrrà: nell' m^{esima} diagonale la tensione:

$$N_{2,m}^{(p)} = (m - 1) \frac{\sqrt{b_0^2 + \lambda^2}}{b_0} \mathfrak{P}_1 : \quad (\text{XII})$$

nell' m^{esima} orizzontale la compressione:

$$N_{3,m}^{(p)} = \mathfrak{P}_m = - m \mathfrak{P}_1 : \quad (\text{XIII})$$

nell' m^{esimo} campo del montante $A_2 B_1$ di destra la compressione:

$$N_{1,m}^{(p)} = - \frac{m(m-1)}{2} \frac{\lambda}{b_0} \mathfrak{P}_1 : \quad (\text{XIV})$$

e nella parte corrispondente del montante $A_1 B_3$ di sinistra la tensione

$$N_{1,m}^{(p)} = \frac{m-1}{2} \frac{(m-2)}{2} \frac{\lambda}{b_0} \mathfrak{P}_1 . \quad (\text{XV})$$

Complessivamente gli m^{esimi} campi dei due montanti A_1B_3 , A_2B_4 sopporteranno gli sforzi:

quello di sinistra:

$$N_{1,m} = -P_1'' - \frac{m}{2} \cdot P \quad \mathfrak{F} \cdot \frac{h}{2\sqrt{a_1^2 - h^2}} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} \frac{\lambda}{b_0} \mathfrak{F}_1 \quad (\text{XVI})$$

e quello di destra:

$$N'_{1,m} = -P_2'' - \frac{m}{2} \cdot P + \mathfrak{F} \cdot \frac{h}{2\sqrt{a_2^2 - h^2}} - \frac{m(m-1)}{2} \frac{\lambda}{b_0} \mathfrak{F}_1 \quad (\text{XVII})$$

Nel caso che $a_1 = a_2 = a$, sottraendo i due precedenti valori si ha:

$$N_{1,m} - N'_{1,m} = P_2'' - P_1'' \quad \mathfrak{F} \frac{h}{\sqrt{a^2 - h^2}} + (m-1)^2 \frac{\lambda}{b_0} \mathfrak{F}_1 \quad (\text{XVIII});$$

onde, per assegnare ai due montanti la conveniente sezione si dovrà calcolare prendendo per base lo sforzo $N_{1,m}$ oppure $N'_{1,m}$ secondochè si verificherà essere:

$$P_2'' + (m-1)^2 \frac{\lambda}{b_0} \mathfrak{F}_1 \quad \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \quad P_1'' + \mathfrak{F} \frac{h}{\sqrt{a^2 - h^2}} \quad (\text{XIX}).$$

Trattandosi di palate d'una certa altezza converrà assicurare i due saettoni A_1B_1 , A_2B_2 contro la possibilità d'inflattersi lateralmente sotto l'azione di punta, ciò che si ottiene semplicemente prolungando tutte le fascie orizzontali in modo da collegarli coi saettoni (Fig. 267).

VI^o) Se una delle pile ora considerate, con incastro al piede, sotto l'azione d'una forza orizzontale agente nel verso longitudinale della trave sovrapposta (come sarebbe per es. quella dovuta ad una variazione di temperatura), fosse spostata superiormente d'una certa quantità, nascerebbero nei montanti dei nuovi sforzi dovuti alla flessione. La pressione da questa prodotta verrebbe ad accrescere quella già calcolata; in ogni caso la pressione complessiva non dovrà sorpassare il limite di carico prescritto.

β) Palate articolate, oscillanti od a pendolo.

Differiscono da quelle incastrate (Fig. 261) per la discontinuità negli appoggi e per la disposizione che permette loro una libera rotazione negli appoggi stessi.

Per effetto dei sopracarichi sulle travi del ponte e dei cambiamenti di temperatura il piano della palata assume un'inclinazione i rispetto al piano verticale, per cui nascono nelle membrature della palata speciali sollecitazioni.

Per impedire che i montanti, a cagione del loro particolare sistema d'appoggio, abbiano a sollevarsi ed a staccarsi da questo, è

necessario che siano sempre assoggettati ad uno sforzo di compressione: e la condizione necessaria affinchè ciò si verifichi è espressa dalla disuguaglianza (IX): dalla quale consegue che la stabilità della palata, relativamente al rovesciamento, è tanto più grande quanto maggiore si scelgono $b_m - 1$ e b_m , epperò in ogni caso si può premunirsi contro il pericolo di rovesciamento assegnando alla palata una sufficiente larghezza.

Quando la palata siasi inclinata dell'angolo i rispetto alla verticale, le forze interne si calcoleranno con le (V) : (VIII) sostituendo al posto di:

$$P_1'' \quad , \quad P_2'' \quad , \quad P$$

le quantità:

$$\frac{P_1''}{\cos i} \quad , \quad \frac{P_2''}{\cos i} \quad , \quad \frac{P}{\cos i} \quad ;$$

mentre gli sforzi generati dal vento non sono influenzati dall'inclinazione i .

10. — Formole empiriche per calcolare gli spessori delle vòlte a botte in muratura, dei piedritti e delle pile (*).

A) Spessore della vòlta in chiave.

Indicheremo sempre con:

- s_0 lo spessore (in m.) della vòlta in chiave.
 c la corda (in m.) dell'arco d'intradosso,
 h la freccia (in m.) " " "
 r_0 il raggio (in m.) di curvatura della curva d'intradosso in chiave.

Notiamo che

$$r_0 = r = \frac{c^2}{8h} + \frac{h}{2} \quad \text{se l'intradosso è un arco di circonferenza,}$$

$$r_0 = r = \frac{c}{2} \quad , \quad \quad \quad \text{è una semi-circonferenza.}$$

(*) L'uso di queste formole empiriche, dedotte dall'osservazione delle costruzioni esistenti, è tutt'ora una necessità pratica.

Come abbiamo già detto in *Nota* a pag. 313 sarebbe molto utile che fossero fatte tabelle per i diversi casi di archi circolari in muratura a sezione costante con le formole esposte precedentemente, dedotte dalla razionale teoria del Castigliano allora scomparirebbe la predetta necessità con grande vantaggio della pratica.

Tali tabelle, per riuscire veramente utili, dovrebbero contenere gli angoli 2β al centro dell'arco procedenti di grado in grado, ed i coefficienti numerici almeno a 7 decimali per angoli β grandi e più del doppio per angoli β piccoli.

$r_0 = \frac{c^2}{4h}$ se l'intradosso è una semi-ellisse,

la quale, approssimativamente, dà pure r_0 per la semi-ovale a più centri, avente gli stessi assi maggiore e minore.

Ecco dunque le formole empiriche proposte da diversi Autori per lo spessore s_0 in chiave delle vòlte.

1.^o) Perronet :

$$s_0 = 0,0694 r + 0,325 \quad \text{ribassate,}$$

$$s_0 = 0,0347 c + 0,325 \quad \text{a pieno centro ;}$$

che però per vòlte alquanto ribassate e di luce assai grande, dà spessori esagerati e non giustificati dalla pratica.

2.^o) Léveillé originale :

$$s_0 = \frac{1,00 + 0,10 c}{3} \quad \text{a pien centro e a sesto scemo.}$$

3.^o) Dupuit originale :

$$s_0 = 0,20 \sqrt{c} \quad \text{a pien centro,}$$

$$s_0 = 0,15 \sqrt{c} \quad \text{circolari ribassate, o semi-ellittiche od ovali.}$$

Osservazione. Tanto le formole di Léveillé che di Dupuit danno s_0 dipendente soltanto da c e indipendente da h ; e di più le ultime presentano la singolarità di assegnare ad s_0 valori minori per le vòlte a sesto scemo, che quelle a pien centro.

Ora ciò, quantunque possa sembrare giustificato dalle dimensioni dei ponti esaminati dal Sig. Dupuit, non cessa di essere irrazionale: infatti, è noto che, nelle vòlte a pien centro, la parte presso le imposte di ampiezza circa 30° (Fig. 268) si può costruire senza bisogno di armature, onde tal parte, insieme al rinfiango che vi sta posteriormente, costituisce in sostanza una continuazione del piedritto; cosicchè la vera vòlta comincia soltanto ai due giunti distanti circa 30° dalle imposte ed occupa circa 120° d'ampiezza; è noto inoltre che allorchè una vòlta a pien centro si rompe, la rottura avviene alla chiave e in due giunti distanti circa 60° dalla stessa, ossia precisamente al punto dove per la costruzione comincia la necessità di armature. Dunque logicamente, una vòlta a pien centro dovrebbe essere considerata come una vòlta circolare ribassata di ampiezza $2\beta = 120^\circ$, e quindi di corda $c_1 = c \sin 60^\circ = 0,866 c$, e di freccia

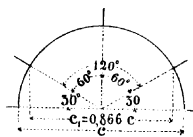


Fig. 268.

$$h_1 = \frac{c}{2} (1 - \cos 60^\circ) = \frac{c}{4} \quad \text{onde} \quad \frac{h_1}{c_1} = \frac{1}{3,464} .$$

Epperò nelle suddette formole di Lèveillé e Dupuit bisognerebbe sostituire c_1 al posto di c per ottenere s_0 per le vòlte a pien centro. La formola di Lèveillé così trasformata dà s_0 convenienti in pratica, e si potrà impiegare con sicurezza; invece tanto quella di Dupuit originale, quanto quella trasformata, danno per s_0 valori troppo piccoli, e tanto più quanto maggiore è c , epperò converrà in pratica aumentarli: per i casi ordinari si hanno risultati molto soddisfacenti aumentando di m. 0,10 il risultato dato dalla prima di Dupuit (vedi in seguito 5^o Dupuit modificata) qualunque sia la curva d'intradosso. La formola Dupuit così modificata è la più conveniente fra le precedenti.

4.^o) *Lèveillé trasformata*:

$$s_0 = \frac{1,00 + 0,0866 c}{3} \quad \text{a pien centro.}$$

5.^o) *Dupuit modificata*:

$$s_0 = 0,20 \sqrt{c + 0,10} \quad \text{qualunque sia la curva d'intradosso.}$$

6.^o) *Perronet modificata* (adottata nel tronco Udine-Venzone - Strada ferrata Udine-Pontebba):

$$s_0 = \frac{1,00 + 0,20 r}{3} .$$

7.^o) *Manuale Colombo*:

a) Per luci $c \leq m. 12$:

Vòlte in pietra di media resistenza (resistenza rottura almeno kg. 3 per mm.²), per un'altezza h di terrapieno (sovracarico) $< m. 1,50$ (o per un sovracarico $< kg. 2200$ per m.² di proiezione orizzontale della vòlta)

$$s_0 = 0,25 + c \left(0,025 + 0,00333 \frac{c}{h} \right) :$$

per $h > m. 1,50$ (o per sopracarichi $> kg. 2200$ per m.², in ragione di m. 1 d'altezza ogni kg. 1500 di sopracarico per m.²) l'espressione precedente di s_0 va moltiplicata per $\sqrt{1 + 0,20 \frac{c}{h}}$.

Vòlte in mattoni od in pietra poco resistente (resistenza rottura almeno kg. 1 per mm.²),

i valori che si ottengono con le regole precedenti vanno moltiplicati per 1,5.

Lo spessore alle imposte si fa $1,2 s_0 \div 1,3 s_0$

b) per luci $c > m. 12$:

$$s_0 = a + b \sqrt{2 r} , \quad a = \begin{cases} m. 0,15 & \text{per strade ordinarie} \\ m. 0,20 & \text{per " " ferrate,} \end{cases}$$

$$\left(\text{per archi non circolari si valuterà } 2 r = h + \frac{c^2}{4 h} \right) .$$

Lo spessore s_{60} a 60° dalla chiave (oppure all'imposta per archi di apertura $2\beta < 120^\circ$) si farà $s_{60} = \alpha s_0$

TABELLA LXXXII.

Valori di b e α .

monta $\frac{h}{c}$	b per strade		α per ambi i casi
	ordinarie	ferrate	
$\frac{1}{2}$	0,15	0,17	2
$\frac{1}{4}$	0,15	0,17	1,8
$\frac{1}{6}$	0,14	0,16	1,4
$\frac{1}{8}$	0,13	0,15	1,25
$\frac{1}{10}$	0,12	0,14	1,15
$\frac{1}{12}$	0,11	0,12	1,10

8.^o) Hurst:

$$s_0 = \alpha \sqrt{r}$$

TABELLA LXXXIII.

Valori di α .

Materiale della vòlta	Per un arco unico	Per una serie d'archi
	α	
Pietra da taglio molto resistente	0,175	0,19
Mattoni qualità eccellente	0,22	0,25
Pietra da taglio tenera ,	0,25	0,275

Questa formola è di puro equilibrio e se ne dovranno moltiplicare i risultati per $1,2 \div 1,5$.

9.^o Formola adottata per i ponti sul Malone e sull'Orco (ferrovia Torino-Milano) ed in quelli sulla ferrovia Voghera-Pavia-Brescia per $c \leq m. 20$ e per archi circolari:

$$s_0 = 0,20 + 0,025 c + \frac{c}{h} (0,020 + 0,001 c).$$

B) Spessore delle vòlte alle imposte.

Una delle regole più antiche e più seguite è quella di far crescere lo spessore della vòlta in modo che i giunti abbiano la proiezione verticale costante ed eguale ad s_0 ; detto φ l'angolo d'un giunto qualunque col piano verticale, s lo spessore della vòlta in un giunto qualunque, sarà:

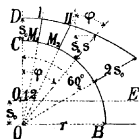


Fig. 269.

$$s = \frac{s_0}{\cos \varphi} .$$

Per	$\varphi =$	30^0	45^0	60^0	90^0
si ha	$s =$	$1,1547 s_0$	$1,414 s_0$	$2 s_0$	∞

onde per una vòlta la cui ampiezza $2\beta < 2 \cdot 60^0 = 120^0$, lo spessore all'imposta è $< 2 \cdot s_0$. Però allorchè $2\beta > 120^0$, lo spessore alle imposte va rapidamente crescendo, e per una vòlta a pien centro, o ad arco semiellittico, o semi-ovale, lo spessore all'imposta sarebbe infinito. Epperò la precedente formola non si dovrà applicare che dalla chiave a $\varphi = 60^0$, e la restante parte di vòlta — come si è notato nell' " Osservazione „ alla lett. A) precedente — sarà riguardata come formante parte del piedritto: con questa avvertenza la regola esposta da risultati assai buoni.

Una costruzione grafica assai semplice di questa regola è la seguente: (Fig. 269) preso $OO_1 = CD = s_0$ si conduca $OE \parallel OB$; si porti sui raggi OM_1, OM_2, \dots i seguenti $\overline{I I} = \overline{2 II} = \dots = \overline{O_1 D} = \overline{OC} = r$: si ottengono così i punti I, II, ... dell'estradosso.

L'Ing. Tavernier, per i ponti ad arco di circolo, consiglia di fare lo spessore all'imposta uguale a $1,40 \cdot s_0$.

Per archi circolari taluni usano prendere per curva d'estradosso un arco di circonferenza di raggio

$$R = 1,125 (r + s_0) \div 1,25 (r + s_0) .$$

C) Spessore dei piedritti delle vòlte.

Mantenendo per s_0, c, h, r_0, η i significati alla lett. A) di questo N.º 10, denoteremo ancora con:

\mathfrak{H} l'altezza in m. della spalla, ossia, l'altezza del piano d'imposta dell'arcata sul piano di fondazione delle spalle,

\mathfrak{S} lo spessore in m. delle spalle.

1.º) *Léveillé* [si pone per brevità $H = \mathfrak{H} + h + s_0 + h'$ dove h' è la spessezza del sovracarico ridotta in spessezza di muratura (in media si assume $h' =$ m. 0,60 quando non si hanno ricarichi di terra)]:

se l'intradosso è:

un arco di circonferenza:

$$\mathfrak{S} = (0,33 + 0,212 c) \sqrt{\frac{\mathfrak{H}}{H} \frac{c}{h + s_0}} ,$$

una semicirconferenza :

$$\varepsilon = (0,60 + 0,162 c) \sqrt{\frac{\delta + 0,25 c}{H} \frac{0,86 c}{0,25 c + s_0}}$$

una semi-ellisse od ovale :

$$\varepsilon = (0,43 + 0,154 c) \sqrt{\frac{\delta + 0,54 h}{H} \frac{0,84 c}{0,465 h + s_0}}$$

Osservazione. Queste formole danno risultati ottimi. Tuttavia, e specialmente la prima, non corrispondono completamente alle vere condizioni della stabilità delle spalle dei ponti: infatti, si sa, che per ciascuna volta vi è un'altezza δ dei piedritti, per cui le equazioni dello scorrimento e del rovesciamento danno lo stesso valore per ε ; facendo diminuire δ a partire da tale valore limite, bisognerà prendere per ε il valore risultante dall'equazione dello scorrimento, e questo valore andrà continuamente crescendo, perchè deve restar costante il peso totale, come resta costante la spinta N_0 alla chiave (vedi N.º 8): invece nella formola di Léveillé al diminuire di δ , diminuisce bensì H , ma $\frac{\delta}{H}$ diminuisce pur esso, epperò diminuisce ε , mentre — come si è detto — dovrebbe crescere.

Per $h = 0$ la prima di Léveillé dà $\varepsilon = 0$, valore assurdo.

Le formole di Léveillé concordano colla teoria nel seguente fatto notevole: se δ cresce indefinitamente, $\frac{\delta}{H}$ tende verso l'unità, ed ε , secondo le formole di Léveillé, non cresce indefinitamente, ma tende verso un limite finito: questo risultato è in pieno accordo con la teoria, quando si fa parte dell'equazione del rovesciamento, come si deve appunto fare quando δ è molto grande.

2.º) *Formole adottate per le spalle dei ponti delle ferrovie:*

a) linea da Udine a Pontebba:

nel tronco da Venzone a Pontebba:

$$\varepsilon = \left[0,60 + 0,10 \left(\frac{c}{h} - 2 \right) + 0,04 \delta \right] \sqrt{c} ;$$

e nel tronco da Udine a Venzone:

$$\varepsilon = 0,20 + 0,30 (r + 2 s_0) + 0,10 \delta .$$

b) linea Voghera-Pavia-Brescia e linea Torino-Milano per i ponti sul Malone e sull'Orco :

$$\varepsilon = 0,05 \delta + 0,20 c + \frac{c}{h} (0,100 + 0,005 c) .$$

3.^o) *Manuale Colombo*:
per $h \leq m. 1.50$:

$$\varepsilon = \left(0,55 + 0,20 \frac{c}{2h + s_o} + 0,04 \delta \right) \sqrt{a} ;$$

per $h > m. 1.50$:

si aumenti ε di: $0,0185 (\delta + h + s_o) \sqrt{h}$.

4.^o) *Hurst* (Il peso in kg. di 1 m. corr. dell'arco):

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{5} r^2 + 0,183 \sqrt{r^3} + 0,00004 \left(\frac{\Pi}{\delta} \right)^2} \quad 0,002 \frac{\Pi}{\delta} .$$

Anche questa formola è di puro equilibrio e se ne dovranno aumentare i risultati d'una certa quantità.

5.^o) *Formola empirica molto in uso*:

$$\varepsilon = \left(0,55 + 0,04 \delta + 0,10 \frac{c}{h} \right) \sqrt{c} .$$

D) Spessore delle pile.

1.^o) *Regola spesso usata*: $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \varepsilon$.

2.^o) *Perronet*: valore minimo $\varepsilon_1 = 2 s_o$
e generalmente $\varepsilon_1 = 2,5 s_o \div 2,7 s_o$.

3.^o) *Manuale Colombo*: il maggiore dei due valori:

$$\varepsilon_1 = 0,2 \delta + 0,5 . \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{3} c \div \frac{1}{5} c .$$

Avvertenza. Dopo d'aver progettata una volta assegnandole gli spessori dati dalle formole empiriche, si deve verificare se abbia il voluto grado di stabilità e ciò anche per le spalle e le pile come venne esposto ai N. 7 e 8 di questo capitolo.

FONTI PRINCIPALI

E ABBREVIAZIONI CON CUI SONO RICHIAMATE NEL MANUALE.

- ALLIEVI Ing. L. — Equilibrio interno delle pile metalliche secondo le leggi della deformazione elastica.
- AMSLER Prof. LAFFON. — Nota sul Schweizerische Bauzeitung. (Settembre 1899).
- BARONI Ing. M. Sulla ricerca di norme che determinano la stabilità delle costruzioni in calcestruzzo armato. (Atti del Collegio degli Ingg. di Milano, 1902 I-II fascicolo).
- BOUSSINESQ. — Memorie negli Annales des Ponts et Chaussées e nell'Académie des Sciences.
- CASTIGLIANO Ing. A. — Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications = Castigliano — Théorie — Manuale pratico per gli ingegneri. Parte terza = Castigliano. III. — Parte quarta = Castigliano — IV. Intorno alla resistenza dei tubi alle pressioni continue ed ai colpi d'Ariete. — Memoria Acc. delle Scienze di Torino. Gennaio 1874. — Applicazioni pratiche della teoria sui sistemi elastici.
- CAVALIERE Ing. FRANCESCO. — Freccia teorica nelle prove statiche delle Travate. — Memoria sul giornale del Genio Civile (1892).
- CENTRALBLATT der Bauverwaltung.
- COLOMBO Ing. Prof. G. — Manuale dell'ingegnere civile ed industriale — 20 ediz. 1904 = Manuale Colombo.
- CROTTI Ing. F. — La teoria dell'elasticità nei suoi principi fondamentali e nelle sue applicazioni pratiche alle Costruzioni. = Crotti.
- CURIONI Ing. Prof. G. — Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni.
- DEUTSCHES Normalprofilbuch für Walzeisen — 5. Aufl.; Aachen 1897 Ios. La Ruelle.
- DUPUY et CUÉNOT Ingg. — Barèmes destines, a faciliter le calcul des Ponts Métalliques (1895).
- FERRIA Ing. Prof. G. G. — Una buona massima di alcuni pratici nel costruire i muri di sostegno. — Memoria sull'ingegneria Civile e le Arti Industriali. Vol. XXIV. — Sulle Costruzioni in ferro e cemento. — Memoria presentata alla Società degli Ingg. in Torino. (1899). — Théorie de l'équilibre des systèmes en fer et ciment tirée du principe du

- moindre travail. — Memoria presentata alla Société des ingénieurs civils de France (Bulletin juin 1898).
- FLAMANT. Ing. Prof. — Stabilité des constructions et résistance des matériaux — 2. éd. (1897).
- FÖPPL Ing. Prof. A. Résistance des matériaux, et éléments de la théorie mathématique de l'élasticité. Trad. de l'allemand par Hahn Ing. E. 1901.
- GALLIZIA PIETRO. — Memorie pubblicate nel " Politecnico ", nel " Giornale del Genio Civile ", nella " Rivista d'Artiglieria e Genio ", e suoi Manoscritti inediti.
- GUIDI Ing. Prof. C. — Lezioni sulla Scienza delle costruzioni. Parte II 3 ediz. = Guidi II. Parte IV, 2 ediz. = Guidi-Ponti.
- HÜTTE Des Ingenieurs Taschenbuch — 18. neu bearbeitete Auflage (1902) = Hütte — 18 — I o II.
- JORINI Ing. Prof. A. F. — La costruzione dei ponti = Jorini — Ponti. — Memoria sul Politecnico (Giugno 1901). — Enciclopedia dell'Ingegneria di D. Th. Schäffer e Ed. Sonne. tradotto dal tedesco vol. II. — P. III.
- KOECHLIN Ing. Prof. M. — Applications de la Statique graphique.
- LAÜESTEIN prof. R. — Nota sul Deutsche Bauzeitung (N. 68).
- MARCOLONGO Prof. R. Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici (1904) — Marcolongo.
- MÜLLER-BRESLAU Ing. Prof. H. F. B. — Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und Statik der Baukonstruktion, ausgehend von dem Gesetze der virtuellen Verschiebungen und den Lehrsätzen über die Formänderungsarbeit. 2. vermehrte und verbesserte Auflage — 1893.
- NÖRDLING Ing. — Memorie sui " Ann. des Ponts et Chaussées ", oppure " Mémoire sur les piles en charpente métallique des grands viaducs ", (1864).
- RÉSAL Prof. J. — Poussée des terres. Stabilité des murs de soutènement (1903).
- RITTER Prof. Ing. A. — Eiserne Dach- u. Brücken — Konstruktionen 5. Aufl. (1894).
- RITTER Prof. W. — Anwendungen der graphischen Statik. Nach C. Culmann bearb.
- SAVIOTTI Ing. Prof. C. — La statica grafica.
- SCHENCK Ing. Prof. E. — Momenti e pesi di travi metalliche composte 1893.
- SCIOLETTE Ing. G. B. — Equilibrio interno dei sistemi elastici lineari nel piano e nello spazio; esposizione dei metodi delle derivate e degli spostamenti (1896).
- SOCIETÀ ITALIANA dei cementi e delle calci idrauliche — Bergamo — Monografia 1903.
- Weyrauch Ing. Prof. I. I. — Die Festigkeitseigenschaften und Methoden der Dimensionenberechnung von Eisen - und Stahlconstruktionen — 2. Auflage (1888).
- WINKLER Prof. D.^r E. — Vorträge über Brückenbau.
-

INDICE ALFABETICO

I numeri indicano la pagina in cui l'argomento è *definito* o *accennato* o *trattato*.

Le *lettere* entro parentesi semplici designano i simboli di rappresentazione — salvo in quei posti dove è dichiarato diversamente.

A [Vedi Coefficiente —]

Abbassamenti [— degli appoggi, Vedi Appoggi]

Acciai [Carico di sicurezza (*R*) per gli —, 68, 128]

Acciaierie [— di Terni, 184÷187]

Accidentali [Vedi, Carichi —]

Acque [Muri di sostegno delle —, 382÷389]

Albero [— motore o di trasmissione, 108]

Allievi [Ing. L. — Stabilità delle pile metalliche, 443]

Anelli, 423

Ancoramento [— dei montanti delle pile, 447]

Andrea [Croce di S. —, 444]

Angolo [Ferri ad —, 163÷169] [— di natural declivio od — d'attrito delle terre, 352, 355]

Appoggi [Cedimenti degli —, 126, 197, 232, 233]

Appoggiati [Vedi Archi —]

Arcarecci, 112, 163

Archi, 401 [— su rulli, 403, 412, 420] [— incastrati, 405, 417, 421, 427] [— incastrati in un estremità, su rulli nell'altra, 408] [— appoggiati, 410, 428] [— molto ribassati, 426] [— di forma qualunque, 429]

Ariete [Colpi d' —, 393]

Armate [Vedi Travi —]

Articolate [Pièe —, od oscillanti, od a pendolo, 441, 451] [Vedi Reticolate]

Articolato [Sistema —, 315]

Asse [— di flessione, 80, 99] [— geometrico, 61, 95] [— neutro, 94, 99] [distanza dall' —, 97, 100] [distanza dell' — dal baricentro, 99].

Assi [Vedi Tavole] [— d'inerzia 34÷38]

Asta [— obliqua, 108] [— verticale, 91÷94, 106]

Attacchi [Vedi Chiodature]

Attrito 330, 347, 351, 352, 355 [Coefficienti d' — nel frenamento, 124] [— sugli appoggi, 126]

- Base** [— dei logaritmi naturali (e), 30]
Baricentri [— o centri di gravità, 33÷59]
Botte [Vólte a —, Vedi Archi]
Bresse [Formola del —, 127 325]
Buon [Vedi, Rapporto di impiego]
Briglie, 317
Boussinesq, [Teoria di — sulla spinta delle terre, 356]
- C** [Ferri a —, 176÷179, 186]
Calcestruzzo, 72÷74
Calci, 75÷76
Caldaie [— a vapore, 395]
Canali [Ponti- —, 130]
Capriate [Vedi, Incavallature]
Carichi [— accidentali, 111, 116] [— al limite d'elasticità, 66, 68, 70]
 [— concentrati (P)] — fissi, 138, 145, 147, 148, 151, 155, 188, 190, 192, 193, 198, 233, 241, 254, 273, 282, 287, 289, 317, 335, 338, 340, 342, 344]
 [— mobili, 114, 140] [— che possono sopportare le travi orizzontali a sezione rettangolare, 195] [— di punta, 61, 107] [— di rottura, 71, 72, 75÷76, 128] [— di sicurezza (R o K), 66, 68, 70, 128, 348, 350, 351] [— che possono sopportare i terreni, 381] [— distribuiti con legge] — lineare, 202÷206, 210÷215, 217÷221, 224÷230, 234÷237] — quadratica, 206, 215, 221, 231] [— permanenti, 317]
 [— dei solai, 111] [— delle copertute, 112] [— dei ponti 126]
 [— uniformemente ripartiti (q kg. per m. corr. o per m.²), 114, 119÷123, 138, 146, 147, 149, 153, 155, 157, 169, 191, 192, 194, 199, 202, 209, 223, 234, 239, 254, 276, 283, 288, 291, 294, 298, 304, 307, 343, 362] [— virtuali uniformi (q kg. per m. corr.), 114, 119÷123]
Carico [— distribuito comunque, 201, 208, 216, 219, 231, 237] [— più sfavorevole, Vedi Sfavorevole]
Carreggiabili [Strade —, 116, 126]
Carreggiata, 116
Carri [— a cavalli, 116] [— merci, 117, 118]
Castigliano [Teoremi del —, 77]
Categorie [— delle linee ferroviarie, 118]
Cavalcavia [Carico di sicurezza nei — per strade ferrate. 130].
Cavalletti [Vedi, Incavallature]
Cavalli [Carri a —, 116]
Cedimenti [Vedi, Appoggi]
Cementi, 75÷76
Centri [— di gravità o bari —, 33÷59]
Centrifuga [Forza —, 125]
Centro [— di pressione, 346, 436, 438, 440]
Chiodature, 330, 339
Cilindri [— dei torchi idraulici, 393]
Circolari [Funzioni — o trigonometriche, 22, 32]
Coefficiente [— A , 80÷82, 95, 98] [— d'attrito (f), 347, 351, 352, 355]
 [— nel frenamento, 124] [— di contrazione trasversale ($\frac{1}{m} = \frac{1}{4}$)],

- 64] [— di dilatazione $\left(\frac{1}{\delta}\right)$, 281] [— di resistenza (R o K). Vedi Carichi di sicurezza] [— di snervamento, 66, 68, 70]
- Coesione** [— delle terre, 352]
- Colpi** [— d'ariete, 393]
- Compressione**, 87, [lavoro dovuto alla —, 77, 80] [Vedi, Carichi di sicurezza] [Vedi, Pressione]
- Compressori** [Rulli —, 116]
- Concentrati** [Vedi, Carichi —]
- Condutture** [Tubi per —, 174, 392]
- Congresso** [— internazionale (Londra 1896), 127]
- Continua** [Trave —, 196, 232, 253]
- Contraforti** [Muri con —, 349, 380]
- Contrazione** [Coefficiente di — trasversale $\left(\frac{1}{m} = \frac{1}{4}\right)$, 64]
- Contradiagonali**, 317, 323, 325, 444
- Controvento** [Carico di sicurezza nelle membrature di —, 130]
- Convogli** [Movimenti laterali dei —, 124]
- Coperture** [Peso proprio delle —, 112] [Carico di sicurezza nelle —, 130]
- Coprigiunti** [Chiodatura dei —, 330, 400]
- Corpi** [— isotropi, ad un asse e a tre assi d'elasticità 64÷65]
- Correnti**, 112
- Correntini**, 110
- Corrimano** [Ferri per —, 175]
- Costruzioni** [Stabilità delle — in terra ed in muratura, 345]
- Cotichette**, 110
- Creusot** [Ferri del —, 157]
- Croce** [— di S. Andrea, 444]
- Curva** [— delle pressioni, 436, 438] [Ponti in —, 125]
- Declivio** [Natural — delle terre, 352 {Angolo di —, 352, 355}]
- Deformazione**, 61 [Lavoro di — (L), 77, 80, 82]
- Derivata** [— del momento di flessione, 103]
- Derivate** [Teoremi del Castigliano delle —, 77]
- Diagonali**, 317, 322, 325, 444
- Diagramma** [— della resistenza, 102] [— dei momenti di flessione, 141, 200] [— degli sforzi di taglio, 200]
- Differenziale** [Equazione — della linea elastica, 105]
- Dilatazione** [Coefficiente di — $\left(\frac{1}{\delta}\right)$, 261]
- Dinamiche** [Sollecitazioni —, 128]
- Eccentrica** [Pressione —, 106]
- Elastica** [Linea —, 104, 105, 143 : 252, 336÷344]
- Elastiche** [Forze —, 62, 96]
- Elasticità** 61, [— alla flessione, alla tensione, al taglio, alla torsione, 62] [Carichi al limite d' —, 66, 68, 70] [Limite d' —, 64, 68, 70] [Modulo d' — longitudinale (E , e), trasversale (E_t), 64÷66, 68, 70]

- Ellisse** [— d'inerzia, 38]
Ellissoide [— d'inerzia, 36]
Empiriche [Vedi, Formole —]
Equazione [— dei momenti statici, 314] [— o teorema dei tre momenti, 196, 232, 250, 253] [— della linea elastica, 104, 143÷352, 336÷344] [— differenziale della linea elastica, 105] [— di stabilità, 347]
Equilibrio [— stabile, indifferente, instabile; naturale, 63] [— statico, 314, 322]
Esponenziale [Funzione (e^x), 30]
Ferrate [Ponti per strade —, 117÷130 {peso proprio nei —, 126}]
Ferri [— a C, 176÷179, 186.] [— ad angolo, 163÷169] [— a I, 157, 180÷185] [— a Ω , 172, 186] [— a quadrante, 174] [— a T, 170] [— a Z, 173, 187] [Carico di sicurezza per i —, 128] [— del Creusot, 157] [— delle Accieierie di Terni, 184 : 187] [— per corrimano, 175] [— quadri 147, 155.] [— rotondi, 148, 156] [Tipi normali dei — germanici, 161÷183] [— Zorès a Ω , 172, 186]
Ferro [— fuso e saldato, 162]
Ferrovie [Categorie delle linee —, 118]
Fili [Resistenza dei — metallici, 90]
Fissi [Vedi, Carichi concentrati —]
Flessione, 62 [Asse di —, 80, 99] [Carico di sicurezza alla —, 129, 130] [— e torsione, 108] [Vedi, Freccie di — (f)] [Lavoro dovuto alla —, 77, 80] [Momento di —, (M_f o M), 62, 114, 143÷252, 275÷313, 335÷344, 345÷350, 385 : 389, 402÷440] [Derivata del —, 103] {Diagramma dei —, 141, 200} [—, tensione e taglio, 95]
Fondazione [Muri di —, 381]
Fondo [— delle caldaie e dei serbatoi, 398] [Distribuzione delle pressioni trasmesse ad un — compressibile, 90]
Formola [— del Bresse, 127, 325] [— del Lamè per lo spessore dei tubi, 392]
Formole [— empiriche per gli spessori {— dei muri, 387} {— delle pile, 458} {— delle spalle, 456} {— delle vòlte, 452}]
Forza [— centrifuga, 125]
Forze [— elastiche, 62, 96] [— laterali, 124]
Freccie [— di flessione, 143÷252, 336÷344]
Frenamento, 124
Funicolare [Poligono —, 141, 200]
Funzione [— esponenziale (e^x), 30]
Funzioni [— circolari o linee trigonometriche, (sen, cos, tang, cotg, sec, cosec), 22, Tab. II, 32] [— iperboliche (senh, cosh, tangh,....). 32]
Fuso [Elasticità di metalli —, 68÷70] [Ferro —, 162]
Geometrico [Asse —, 61, 95]
Germanici [Tipi normali dei ferri —, 161÷183]
Giunti [Copri-, 330, 400]
Gravità [Centri di — o baricentri, 33÷59]

- Hooke** [legge di —, 64]
- Idrauliche** [Calci —, 75, 76]
- Impiego** [Rapporto di buon —, 162÷181]
- Incastramento**, 105
- Incastrati** [Vedi Archi, Travi —]
- Incavallature** 273, [— semplice, 298] [— Polonceau } — semplice, 304] } — a puntoni retti o curvi con un numero qualunque di tiranti, 307, 313, 315]
- Indifferente** [Equilibrio —, 63]
- Inerzia** [Assi d' —, Ellisse d' —, Ellissoide d' —, Momenti d' — (I) } Vedi anche, Momenti, Raggi d' —, 34÷60]
- Inflessione** [Vedi, Freccia d' —]
- Inflettenti** [Momenti —, Vedi Flessione]
- Instabile** [Equilibrio —, 63]
- Iperboliche** [Vedi Funzioni]
- Iperbolici** [Vedi, Logaritmi —]
- Isolati** [Muri —, 367]
- Isotropi** [corpi —, 64]
- Lamè** [Formola di — per lo spessore dei tubi, 392]
- Lamiera** [— ondulata, 187]
- Laterali** [Forze —, Movimenti — dei convogli, 124]
- Lavoro** [— di deformazione (L), 77, 80, 82] [— di forze molecolari (L), 63] [Limite di —, Vedi Carichi di sicurezza] [Teorema del Castigliano del minimo —, 77]
- Legge** [— di Hooke, 64]
- Legno** 27÷28, 69, 110 [Travi in — rovere, 145, 146, 151, 153]
- Lemaitre** [Formole del — per le chiodature delle caldaie a vapore 400]
- Limite** [— di lavoro, Vedi Carichi di sicurezza] [Vedi, Carichi al — d'elasticità]
- Linea** [— elastica, 104, 105, 143÷252. 336÷344]
- Lineare** [Vedi, Carichi distribuiti con legge —]
- Linee** [Categorie delle — ferroviarie, 118]
- Listelli**, 110
- Locomotiva** 117, 118, 140
- Logaritmi** [— decimali, o volgari, o di Brigg ($\log w$), 1÷21, 30] [— naturali o neperiani, o iperbolici ($\log h w$), 3^o, 31 Tab. IV]
- Longitudinale** [Modulo di elasticità — (E o e), 64÷66, 68, 70]
- Lungoni**, 100, 101
- Maestre** [Travi —, 111, 126]
- Magazzini** [Sopracarico nei solai di —, 111]
- Maglie** [— del traliccio, 101]
- Malte**, 72÷77
- Marciapiedi**, 116
- Massime** [— sollecitazioni specifiche o unitarie (R o K) Vedi Carichi di sicurezza]

- Massimo** [— ammissibile d'uno sforzo, 275]
Materiali [Peso dei — di coperta, 114]
Medio [Terzo —, 346, 437, 440]
Meta liche [Pile —, 124, 441]
Metallici [Ponti —, 114, 314, 330] [Resistenza dei fili —, 90]
Merci [Carri —, 117, 118]
Metodo [— del Ritter, Vedi Ritter]
Minimo [Teorema del Castigliano del — lavoro, 77]
Mobili [Carichi —, 114, 140]
Modulo [— dei logaritmi decimali, 31] [— di elasticità |— longitudinale (E od e), 64, 68, 70] |— trasversale o di torsione (E_t), 65÷66, 68, 70]
Molecolari [Forze —, 62, 96]
Momenti [— di flessione (M_f oppure M) 62, 114, 143÷252, 275÷÷313, 335÷344, 345÷350, 385÷389, 402÷440,] Derivata del —, 103 | Diagramma dei —, 141, 200 | Vedi Equazione dei tre — | — massimo, 141, 2 6÷272 |] [— d'inerzia o di 2° grado (I), 34÷60, 157, 162÷181] [— di 1.° grado o statici (G), 34÷60] Metodo dei —, 314, 330, 443 |] [— di torsione (M_θ), 62, 85] [Poligono dei —, 141, 200]
 [— resistente (vero) ($R \frac{I}{y} = R W$), 105, 160, 162 ÷ 187] [Segno dei —, 105]
Mohniè [Travi —, 321]
Montanti [— d'un traliccio, 103, 317, 323, 444]
Motore [Albero —, 108]
Movimenti [— laterali dei Convogli, 121]
Muratura [Stabilità delle costruzioni in —, 345] [Pile in —, 441, 458] [Spalle in —, 439, 456] Vedi, Archi, e Formole empiriche. [Carichi di sicurezza per le —, 351]
Muri, 345÷391, [— con speroni, 349, 380] [— di sostegno |— delle terre, 352÷382 | |— delle acque, 382÷389 |] [— a strapiombo, 372, 375] [— di fondazione, 381] [Spessori dei —, Vedi Formole empiriche]
Naturale [— declivio delle terre, Vedi, Declivio] [Equilibrio —, 63]
Naturali }
 o } [Vedi, Logaritmi]
 Neperiani }
Nervature, 317
Neutro [Vedi, Asse —]
Neve [Pressione verticale dovuta alla —, 112]
Nodi [— d'una trave reticolata, 314]
Normale [Vedi, Tensione o Pressione — (N o n o \mathfrak{N})]
Normali [Tipi — dei ferri germanici, 161 ÷ 183]
Obliqua [Asta —, 108]
Oglio [Ponte sull' — presso Chiari, 430]
Ondulata [Lamiera —, 187]

- Opere** [— sovrastanti alle Strade Ferrate, 124]
Opifici [Sopracarico dei solai negli — con macchine, 111]
Orditura [Peso dell' — } — dei solai, 111] } — del piano stradale, 126 }
- Palate** [— articolate o a pendolo, 441, 451] [— fisse, 444] [— semplici o pile piane, 441, 444]
Paraboliche [Vedi, Travi —]
Passerelle, 115
Pavimenti, 111
Pendolo [Palate a —, 441, 451]
Pericolosa [Sezione —, 138]
Permanenti, [Vedi Carichi —]
Pesi [— specifici (II *kg.* per *m.*³), 26 (Tav. III), 162, 355]
Peso [— concentrato (*P*) Vedi Carichi] [— della neve, 112] [— del materiale di coperta, 114] [— proprio } — delle coperture, 112] }
 [— delle pile, 442] } — dei solai, 111 } — dei ponti 114, 126 }
 [— dei ferri laminati, Vedi, Ferri] [— uniformemente ripartito, Vedi Carichi]
- Piano** [— di sollecitazione, 99]
Piedritti, 439, 456
Pietre 28, 29 [Carico di rottura alla pressione delle —, 72 ÷ 74]
Pile, 441, 458 [— metalliche, 441] {Peso proprio delle —, 442} } — piane, 441, 444 }
 [Pressione del vento sulle —, 124] }
Poligono [— dei momenti, 141, 200]
Polo [— dei momenti statici, 314]
Poloceau [Incavallatura — } — a puntoni curvi con sette tiranti, 307, 313, 315] } — semplice, 304 }
- Ponte** [— sull'Oglio presso Chiari, 430]
Ponti [Carichi accidentali nei —, 116] [Carichi di sicurezza nei — metallici (*R*), 129] [— in curva, 125] [— metallici, 114, 314, 330] }
 [Peso proprio e sopracarico dei —, 114 ÷ 127]
- Posizione** [— più sfavorevole } — del sopracarico, 255, 256] } — di un sistema di carichi mobili, 140 }
- Pressione**, 87 [Vedi Carichi di sicurezza (*R* o *K*) alla —] [Centro di —, Vedi Centro] [— dell'acqua sulle pareti, 382] [— del vento (*p* unitario, \mathfrak{P} totale), 112, 124] [— eccentrica, 106] [— e taglio, 103] [Lavoro di deformazione dovuto alla —, 77, 80] [— normale (*N*, \mathfrak{N} , *n*), 62] } — elastica unitaria (ϵ), 62, 96, 98, 99 } } — massima, 96, 100 } } — nulla, 100 } } [— verticale dovuto alla neve, al vento, 112]
- Pressioni** [Curva delle —, 436]
Principio [— dei momenti statici, Vedi, Ritter] [— della sovrapposizione degli effetti, 131] [— di Hobke, 64]
Prisma [Teoria del — di massima spinta, 352]
Profili [— dei ferri laminati, Vedi, Ferri]
Punta [Solidi caricati in —, 91, 107]
Puntone [— inclinato appoggiato, 304]
- Quadrante** [Ferri a —, 174]
Quadratica [Vedi, Carichi distribuiti con legge —]
Quercia, 28, 66

- Radice** [— ammissibile, 258]
Raggio [— d'inerzia o di girazione, 34, 37]
Rapporto [— di buon impiego, 162÷181] [— fra lo sforzo di taglio e la pressione normale, 347]
Reazioni [— molecolari, 62, 96]
Regolamento, 117, 118, 128, 129
Resistente [Momento — ($R \frac{I}{y} = R W$)], 105, 160, 162 : 187]
Resistenza [Coefficienti di (R o K), Vedi Carichi di sicurezza] [— composta, 95] [— d'attrito, 330] [— dei fili metallici, 90] [— dei muri, 345] [Diagramma della —, 102] [Sezioni da adottarsi per ottenere la massima — alla flessione, 160] [Solido di ugual — alla pressione, 87, 89, 276]
Reticolate (Vedi, Travi —)
Rettangolari [Travi —, 195]
Rettilinee [Vedi, Travi —]
Ribassati [Archi molto —, 426]
Rigidezza [— d'un sistema di molecole, 63]
Ripartizione [— delle travate, 253]
Ripartiti [Vedi, Carichi uniformemente —]
Ritmiche [Sollecitazioni —, 128]
Ritter [Metodo del — o dei momenti statici, 314, 330, 443]
Rondelet [Formole empiriche di — per gli spessori dei muri, 367]
Rotaia, 52 [Sopraelevazione della — esterna, 125]
Rottura [Carichi di —, 71, 72, 75÷76, 128]
Rovere [Travi in legno —, 145, 146, 151, 153]
Rulli, 424 [Vedi Archi su —] [— compressori, 116]
Ruotabile, 116, 140
Saette [— d'inflessione, Vedi, Freccie]
Saldato [Ferro —, 162]
Sale [— di riunione e da ballo, 111]
Sbarre [— della nervatura, 317] [— dei traliccio, 100, 102]
Scartamento [— normale, 119, 125] [— ridotto, 125]
Schiacciamento [Altezze teoriche al limite di rottura per —, 87]
Scorrimento [Modulo d'elasticità allo — (E_t), 66, 68]
Scosse, 128
Segno [— dei momenti, 105]
Serbatoi, 388÷389 [Fondo dei —, 398]
Serpeggiamenti, 124
Sezione [— pericolosa in una trave su due appoggi, 13b]
Sezioni [— da adottarsi per ottenere la massima resistenza alla flessione, 160] [— di ferri laminati, Vedi Ferri]
Sfavorevole [Posizione più — {— d'un sistema di carichi mobili, 140} {— del sopracarico, 255}]
Sforzo [— dinamico e statico, 128] [— in punta, Vedi Punta] [Massimo ammissibile d'uno —, 275] [— massimo e minimo, 128] [— normale (N , \mathfrak{R} , \mathfrak{n}), 62] [— tagliante (T , \mathfrak{t} , \mathfrak{z}), Vedi, Taglio e Diagramma degli — di taglio]

- Sicurezza** [Vedi Carichi di — (*R* o *K*)]
- Sistema** [— articolato, 315] [— fisso di carichi isolati, 138] [— staticamente determinato ed indeterminato, 62, 443]
- Snervamento** [Coefficiente di —, 66, 68, 70]
- Soffitti**, 111
- Solai** [Sopracarico dei —, 111]
- Sollecitazione** [Piano di —, 99] [— specifica massima (*R* o *K*), Vedi Carichi di sicurezza] [— statica e dinamica, 128]
- Sollecitazioni** [— esterne nei solai, nelle coperture, nei ponti, nelle tettoie, 111÷127]
- Somma** [— degli effetti, 132]
- Sopracarichi** [— uniformi, Vedi, Carichi uniformemente ripartiti]
- Sopracarico** [— dei ponti 114, 117÷126] [— dei solai, 111] [— delle coperture, 112] [— più sfavorevole, 225]
- Sopraelevazione** [— della rotaia esterna, 125]
- Sovrapposizione** [— degli effetti, 131]
- Soprapposte** [Travi —, Vedi Travi a carico comune]
- Sostegno** [Vedi Muri di —]
- Spalle**, 439, 456
- Specifici** [Pesi — (11 kg. per m.³), 26, 162, 355]
- Speroni** [Muri con —, 349, 380]
- Spessori** [— dei muri, 367÷391] Vedi Tubi, Caldaie, Formole empiriche.
- Spianatrici**, 116
- Spinta** [— delle terre, Vedi Terre]
- Spostamenti**, 78
- Stabile** [Equilibrio —, 63]
- Stabilità** [Equazione di —, 347] [— dei piedritti, 439] [— della volta d'un ponte, 430] [— delle Costruzioni in terra ed in muratura, 345]
- Statica** [Sollecitazione —, 128]
- Staticamente** [Sistemi — determinati ed indeterminati, 62, 443]
- Statici** [Metodo dei momenti — o del Ritter, 314, 330, 443] [Momenti — (*G*), 34÷60]
- Statico** [Equilibrio —, 314, 322]
- Strade** [Ponti per — } — carreggiabili, 116, 126 | } — ferrate, 117÷130, 126 |]
- Strapiombo** [Muri a — di sostegno delle terre, 372, 375]
- T** [Ferri a —, 170] [Ferri a doppio —, 157, 180÷185]
- Taglio**, 62, [Vedi Diagramma degli sforzi di —,] [Flessione, tensione e —, 85] [Lavoro dovuto al —, 77, 80] [Sforzo di — (*T*, *t*, *τ*), 62, 104, 115, 143÷252, 237, 255÷272] [Tensione e —, 103]
- Tavole**, 157 [Assi o —, 110]
- Tedeschi** [Tipi normali dei ferri —, 161÷183]
- Temperatura** [Vedi Variazioni di —]
- Tender**, 117, 118
- Tensione**, 62, 87, [Vedi Carichi di sicurezza (*R*) alla —] [— eccentrica, 105] [— e taglio, 103] [Flessione, — e taglio, 95] [Lavoro dovuto alla —, 77, 80] [— normale (*N*, *σ*, *n*), 62, } — nulla 100 |]

- Tensioni** [— interne relative o unitarie {— normale (ϵ). — tangenziali (τ), 62, 96, 98, 99} {— massima, 96, 100}]
- Teorema** [— dei tre momenti, Vedi Equazione]
- Teoremi** [— del Castigliano delle derivate e del minimo lavoro di deformazione, 77]
- Teoria** [— del prisma di massima spinta, 352] [— di Boussinesq sulla spinta delle terre, 356] [Altra nuova — sulla spinta delle terre, 352]
- Terni** [Ferri delle Acciaierie di —, 184÷187]
- Terre** [Natural declivio delle —, 342 {Angolo di —, 355}] [Pesi specifici delle —, 355] [Spinta delle —, 352, 356, 362] [Stabilità delle costruzioni in — ed in muratura, 345]
- Torreni** [Carichi che possono sopportare i —, 381]
- Tettoia** [Arco per una — in ferro, 420] [Carico di sicurezza per le —, 130]
- Terzere**, 112
- Terzo** [— medio, 346, 437, 440]
- Tipi** [— normali dei ferri germanici, Vedi, Ferri]
- Torchi** [Cilindri dei — idraulici, 393]
- Torre** [Pile a — od a graticcio, 441]
- Torsione**, 62, 85, [Flessione e —, 108] [Lavoro dovuto alla —, 77, 79] [Modulo di elasticità alla — (E_t), 66, 98] [Momento di — (M_t), 62, 85]
- Traliccio** [Travi a —, 315, 319, 321, 322, 325, 331] Vedi Pile metalliche
- Trasmissione** [Albero di —, 108]
- Trasversale** [Modulo di elasticità — (E_t), 65÷66, 68, 70] [Coefficiente di contrazione — ($\frac{1}{m} = \frac{1}{4}$), 64]
- Travate** [Vedi, Ripartizione delle —]
- Trave** [— orizzontale {— appoggiata in ambedue le estremità, 148, 195, 208, 294, 296, 338, 344} {— a sezione rettangolare, 195} {— continua, 196, 232, 253} {— incastrata ad un'estremità libera all'altra, 143, 195, 201, 273, 335} {— incastrata ad un'estremità, appoggiata all'altra, 188, 196, 216, 282, 287, 340} {— incastrata in ambedue le estremità, 190, 196, 219, 289, 342} {— incastrata per un'estremità ed appoggiata in un suo punto intermedio, 192} {— su due appoggi equidistanti dalle sue estremità, 193}] [— parabolica, 239, 316, 317÷321, 324, 325÷326]
- Travi** [— armate, 291÷298, 315] [— a carico comune, 335] [— a traliccio, 100, 144, 149, 150, 188÷190, 198, 314, 324, 325, 326] [Peso delle —, 127}] [— in legno, 145] [travicelli, listelli, correntini o coticette, 110, 111}] [— maestre, 111, 126] [— Mohniè, 321] [— reticolate, Vedi, — a traliccio] [— rettangolari, 195] [— rettilinee, 316, 321, 324, 326] [— e orizzontali 143}] [— sostenute da saette o da tiranti, 273÷291]
- Travicelli** [— di ferro, 111]
- Tre** [Vedi Equazione dei — momenti]
- Treno** [— tipo, 117] [Pressione del vento sul —, 125]
- Tubi**, 174, 392.

- Uniforme** [Carico virtuale — (q kg. per m. corr.), 114, 119÷123]
Uniformemente [Vedi Carichi -- ripartiti (q kg. per m.² o per m. corr.)]
Unitarie [Massime sollecitazioni —, Vedi Carichi di sicurezza]
Urti, 128
- Valore** [— massimo ammissibile d'uno sforzo, 275]
Vapore [Caldaie a —, 395]
Variazioni [— di temperatura, 124, 134, 273, 280, 286, 289, 293, 298, 300, 305]
Velocità [— del vento, 112]
Vento [Pressione del —, 112, 124] [Membratura di contro —, 130]
Verticale [Asta —, 91÷94, 106]
Vertice [— d'un arco, 427]
Viadotti, 129
Vibrazioni, 128
Virtuali [Carichi uniformi —, (q kg. per m. corr.), 114, 119÷123]
Vólte, Vedi, Archi [— di quarto, 111]
- Yankówsky** [Formole di — per i carichi di sicurezza che possono sopportare i terreni, 382]
- Zorès** [Ferri —, 172, 186]

ERRATA-CORRIGE

d. b. *significa a partire dal basso.*

Pag.	Riga	Errata	Corrige
38	15	dico nei	diconsi
	3 d. b.	$\Omega/4$	$\Omega/4$
	2 d. b.	$\Omega/2$	$\Omega/2$
	1 d. b.	$\Omega/2$	$\Omega/2$
39	2	$\Omega/4^2$	$\Omega/4^2$
		$\Omega/2^2$	$\Omega/2^2$
		$\Omega/2'^2$	$\Omega/2'^2$
57	22	$0,013638797) r^4 =$	$- 0,013638797) r^4 =$
64	12	<i>limite di stabilità</i>	<i>limite di elasticità</i>
	18	Se la variazione di lunghezza	Se la variazione relativa di lunghezza
86	3	al denominatore } $\mathfrak{R} - r^4$	$\mathfrak{R}^4 - r^4$
		seconda formola }	
	15	al numeratore $\mathfrak{R}_1^2 + a_1^3$	$\mathfrak{R}_1^3 + a_1^3$
		$-\frac{\pi}{R} x$	$-\frac{\pi}{R} x$
88	7 d. b.	$\Omega = \Omega_1 s$	$\Omega = \Omega_1 e$
92	5	$- S_4 \sqrt{\frac{EI}{N_1}} \text{sen} \left(x \sqrt{\frac{N_1}{EI}} \right),$	$- T_4 \sqrt{\frac{EI}{N_1}} \text{sen} \left(x \sqrt{\frac{N_1}{EI}} \right),$
128	3 d. b.	Di	Die
156	3 d. b.	d^2	d^2
	1 d. b.	d	d
200	3	tra	trave
209	1 d. b.	$a^2 + l^2$	$a^2 + l^2$
	1 d. b.	$l^2 - a^2$	$l^2 - a^2$
211	5	$l^2 x^2$	$l^2 x^2$
	1 d. b.	X^2	X^2
223	2 d. b.	l^2	l^2
333	1 d. b.	$\frac{\pi d^2}{4} K =$	$\frac{\pi d^2}{4} K =$

800 MANUALI HOEPLI

Publicati a tutto Ottobre 1904.



Ministero dell'Istruzione
Gabinetto
del Sottosegretario di Stato

Roma, 3 nov. 1900.

Ill.mo Signore
Comm. Ulrico Hoepli
Editore
MILANO.

La collezione dei Manuali Hoepli, ricca ormai di quasi 700 volumi, forma la più vasta enciclopedia di scienze, lettere ed arti finora apparsa in Italia. Meritano lode certamente e gli autori, che in forma lucida e breve hanno preparato così valido ausilio alla gioventù studiosa, e l'editore che ha saputo scegliere, tra le varie discipline, quelle che meglio valgono a formare un complesso di cognizioni indispensabili alla cultura moderna.

firmato:

ENRICO PANZACCHI.

Sotto Segretario di Stato
Ministero della Pubbl. Istruzione.



Il Ministro
per l'Agricoltura, l'Industria
e il Commercio

Roma, 25 ott. 1900.

Ill. sig. Comm. U. Hoepli,
Milano.



La larga accoglienza fatta alla collezione dei manuali, editi dalla Sua benemerita Casa, deve certo formare la migliore e più ambita ricompensa per la S. V. Ill.ma, che con intelligente cura ne dirige la pubblicazione.

Questo Ministero ha avuto più volte occasione di fermare la sua attenzione sui lavori che più direttamente riguardano l'agricoltura, la zootecnia e le industrie ad esse attinenti, trovandoli rispondenti allo scopo, che la S. V. Ill.ma si propone di conseguire.

Mi torna quindi gradito di esprimerne a Lei il mio sincero compiacimento, mentre Le auguro che sempre maggior favore abbia ad incontrare codesta Sua utile raccolta

firmato: CARCANO

Min. dell'Agr., Ind. e Comm.

 Leggere l'avvertenza a tergo. 

AVVERTENZA

Tutti i MANUALI HOEPLI sono elegantemente legati in tela e si spediscono *franco di porto* nel Regno. — Chi desidera ricevere i volumi raccomandati, onde evitare lo smarrimento, è pregato di aggiungere la sopratassa di raccomandazione.

☞ I libri, non raccomandati, viaggiano a rischio e pericolo del committente ☜

Manuali Hoepli

Divisione sistematica.

Nella presente divisione sono radunate in pochi gruppi e disposte in ordine alfabetico tutte le voci più salienti delle materie trattate nei Manuali Hoepli e prego gli Studiosi di consultarla sempre nelle loro ricerche.

Agraria.

Abitazioni d. animali	Cooperative rurali	Mezzeria
Adulteraz. vino, aceto	Distillazione vinacce	Molini
Agricoltore (il lib. dell')	Economia fabb. rurali	Mosti e vini (densità d.)
Agricoltore (pront. d.)	Enologia	Olivo e Olio
e d. ingegnere rurale	Id. domestica	Olii vegetali, ecc.
Agronomia	Estimo rurale	Orticoltura
Id. e agricoltura	Id. dei terreni	Panificazione
Agrumi	Floricoltura	Patate
Alimentaz. bestiame	Fosfati, perfosfati	Piante e fiori
Analisi vino	Frumento e mais	Piante industriali
Animali da cortile	Frutta minori	Piante tessili
Id. parassiti	Frutticoltura	Pollicoltura
Apicoltura	Funghi mangerecci	Pomologia
Araldica Zootecnica	Garofano	Prato
Assicur. aziende rurali	Gelsicoltura	Prodotti agr. d. Tropico
Bacchi da seta	Humus	Razze bovine, equine
Bestiame e agricolt.	Igiene rurale	Rose
Campicello scolastico	Id. veterinaria	Selvicoltura
Cane	Immunità a. malattie	Sofisticaz. vino e a
Cantiniere	Insetti nocivi	Tabacco
Caseificio	Id. utili	Tartufi e funghi
Catasto	Latte, burro o cacio	Terreno agrario
Cavallo	Legislaz. rurale	Triangolaz. Top. e Ca
Chimica agraria	Macchine agricole	Uve da Tavola
Cognac	Mais	Vini bianchi
Colombi domestici	Majale	Vino
Computisteria agraria	Malattie crittogam.	Viticoltura
Concimi	Malattie dei vini	Zoonosi
Coniglicoltura	Meccanica agraria	Zootecnica

Prodotti alimentari.

Adulteraz. alimenti	Conservazione sostan-	Majale
Adulterazioni d. vino	ze alimentari	Mosti e vini
e dell'aceto	Enologia	Olivo e olio
Agrumi	Enologia domestica	Olii vegetali
Alimentazione	Fecola	Orticoltura
Animali da cortile	Frumento	Ostricoltura
Apicoltura	Frutta minori	Panificazione
Aromatici e nervini	Frutticoltura	Piscicoltura
Caseificio	Funghi mangerecci	Pollicoltura
Cantiniere	Gastronomia	Tartufi e funghi
Cognac	Latte, cacio e burro	Uve da tavola
Colombi domestici	Liquorista	Vini bianchi
Coniglicoltura	Mais	Vino

Industrie diverse.

Abiti per signora	Fotografia :	Operaio
Acetilene	Dizionario fotogr.	Orologeria
Acido solforico	Fotocromatografia	Ostricoltura
Alcool industriale	Fotog. industriale	Panificazione
Apicoltura	Fotog. ortocromat.	Parrucchiere
Arti grafiche	Fotog. p. dilettanti	Piante industriali
Asfalto	Fotogrammetria	Id. tessili
Bachi da seta	Fotosmaltografia	Piccole industrie
Biancheria	Processi fotomecc.	Pietre preziose
Carta (Industria d.)	Proiezioni fotogr.	Pirotecnica
Cognac	Ricettario fotogr.	Piscicoltura
Colori e vernici	Spettrofotometria	Pomologia artificiale
Commerc. (Man. del)	Gaz illuminante	Ricettario domestico
Commercio (Storia d.)	Gioielleria, oreficeria	Id. industriale
Concia pelli	Imitazioni e succedanei	Saggiatore
Distillazione del legno	Incandescenza a gaz	Saponi (Industria dei)
Id. delle vinacce	Industria frigorifera	Seta (Industria d.)
Elettricità e appl. vedi al gruppo <i>Elettricità</i>	Industria tintoria	Specchi (Fabbric.)
Fabbro ferraio	Litografia	Stearica (Industria)
Falegname ebanista	Macchine per cucire	Tessuti di lana e cot.
Fecola	Marmista	Tipografia
Filatura del cotone	Meccanica	Tintore
Filatura e tessitura	Meccanico	Tintura della seta
Fiori artificiali	Metalli preziosi	Tornitore meccanico
Fonditore di metalli	Metallurgia dell'oro	Trine a fuselli
Fotografia :	Modellatore meccan.	Vernici, lacche, inch.
Carte fotografiche	Naturalista preparat.	Vetro
Chimica fotografica		Zucchero

Fisica e Chimica.

Acetilene	Venimi	Gravitazione
Acido solforico	Conservaz. sost. alim.	Igroscopi, igrom.
Adulterazione alim.	Dinamica	Latte, burro, cacao
Adulteraz. vino, aceto	Disinfezione	Liquorista
Alcool	Distillazione del legno	Luce e colori
Analisi chimica qual.	Id. delle vinacce	Id. e suono
Analisi vino	Elettrochimica	Meteorologia
Id. volumetrica	Energia fisica	Microscopio
Calore	Esplosivi	Olii veget. miner.
Chimica	Farmacista	Ottica
Id. agraria	Farmacoterapia	Profumiere
Id. analitica	Fisica	Sieroterapia
Id. appl. a. igiene	Fisica cristallografica	Soda caustica, cloro.
Id. clinica	Fotografia (v. al gruppo <i>Industria</i>)	Spettroscopio
id. fotografica	Fulmini e parafulmini	Termodinamica
Id. legale	Galvanoplastica	Terreno agrario
Chimico industriale	Galvanizzazione	Tintore
Climatologia	Galvanostegia	Tintura di seta
Cognac		

Storia Naturale.

Acque miner. e term.	Fisiologia	Orticoltura
Anatom. e fisiol. comp.	Id. vegetale	Ostricoltura e mitil.
Anatomia microscop.	Frutticoltura	Paleoetnologia
Anatomia vegetale	Frutta minori	Paleontologia
Animali parass. uomo	Funghi mangerecci	Piante e fiori
Antropologia	Furetto	Pietre preziose
Batteriologia	Geologia	Piscicoltura
Biologia animale	Imenotteri ecc.	Pollicoltura
Botanica	Insetti nocivi	Pomologia
Cane	Id. utili	Protistologia
Cavallo	Ittiologia	Selvicoltura
Coleotteri	Lepidotteri	Sismologia
Colombi domestici	Majale	Tabacco
Coniglicoltura	Malattie crittog.	Tartufi e funghi
Cristallografia	Metalli preziosi	Tecnica protistol.
Ditteri	Mineralogia gener.	Uccelli canori
Embriol. e morfol. gen.	Id. descritt.	Vulcanismo
Fiori artificiali	Naturalista preparat.	Zoologia
Floricoltura	Naturalista viaggiat.	
Fisica cristallografica	Ornitologia	

Medicina, Chirurgia, Igiene.

Acque miner. e term.	Fisiologia	Microscopio
Analisi chimica qual.	Fototerapia	Morte vera e app.
Anatomia e fis. comp.	Idroterapia	Nevrastenia
Anatomia microscop.	Igiene della bocca	Nutrizione bamb.
Anatomia topograf.	Id. del lavoro	Organoterapia
Animali parass. uomo	Id. vita pubblica	Ortofrenia
Antropometria	Id. della pelle	Ostetricia
Aromatici	Id. privata	Pellagra
Assistenza infermi	Id. rurale	Protistologia
Id. pazzi	Id. scolastica	Psichiatria
Batteriologia	Id. veterinaria	Psicologia fisiol.
Biologia animale	Id. della vista	Psicoterapia
Bromatologia	Immunità malattie	Rachitide
Chimica appl. a. igiene	Impiego ipodermico	Radioterapia
Chimica clinica	Infortuni d. montagna	Röntgen (Raggi)
Chimica legale (toss.)	Legislazione sanitaria	Semejotica
Chirurg. operativa	Luce e salute	Sieroterapia
Climatologia	Malatt. dei paesi caldi	Soccorsi d'urgenza
Disinfesz. (Pratica d.)	Malattie del sangue	Spettrofotometria
Elettricità medica	Massaggio	Terapia infanzia
Embriologia	Materia medica	Tisici e sanatori
Epilessia	Medicatura antisett.	Ufficiale sanitario
Farmacista	Medico pratico	Veleni
Farmacoterapia	Microbiologia	Zoonosi

Elettricità.

Cavi telegrafici	Fulmini e parafulmini	Operaio elettrotecnico
Correnti elettr. altern.	Galvanizzazione	Röntgen (Raggi di)
Distillazione del legno	Galvanoplastica	Telefono
Elettricità	Galvanostegia	Telegrafia
Id. medica	Illuminazione elettric.	Telegrafia senza fili
Elettrotecnica	Magnetis. e elettricità	Unità assolute
Elettrochimica	Metallocromia	

Tecnologia, Ingegneria, Costruzioni, ecc.

Abitazioni anim. dom.	Fabbro ferraio	Meccanico
Abitazioni popolari	Falegname-ebanista	Meccanismi (500)
Architettura	Fognatura cittadina	Miniere
Aritmetica e Geom. op.	Id. domestica	Modellatore meccanic.
Asfalto	Fonditore in metalli	Molini
Atlante di macchine	Fotogrammetria	Momenti resistenti
Automobilista	Gaz illuminante	Montatore d. macchine
Calcestruzzo	Gnomonica	Motociclista
Calci e cementi	Idraulica	Operaio
Calderaio	Imitazioni e succed.	Orologeria
Casa dell'avvenire	Incandescenza a gaz	Peso metalli
Ciclista	Industrie (Piccole)	Prontuario d. agricoltore e d. ingegnere rurale
Coltivazione miniere	Infortunati sul lavoro (Mezzi p. prevenirli)	Prospettiva
Conti e calcoli fatti	Ingegnere civile	Regolo calcolatore
Cubatura legnami	Ingegneria legale	Resistenza d. materiali
Curve circolari	Lavori marittimi	Scaldamento e ventil.
Decoraz. e indust. art.	Lavori in terra	Siderurgia
Dinamica	Leggi lavori pubblici	Stereometria
Disegnatore meccan.	Leghe metalliche	Strumenti metrici
Disegno assonometr.	Macchine a vapore-	Tavole d'alligazione
Id. geometrico	Id. agricole	Tempera e cementaz.
Id. industriale	Id. per cucire	Termodinamica
Id. di proiez. ort.	Macchinista e fuochist.	Tornitore
Id. (Gramm. del)	Marmista	Zolfo
Dizionario tecnico	Meccanica	
Fabbricati civili		

Matematiche.

Algebra elementare	Disegno geometrico	Gravitazione
Id. compl. I anal.	Id. industriale	Interesse e sconto
Id. Id. II equaz.	Id. di proiezioni	Logaritmi
Id. (Esercizi di)	Id. topografico	Logica matematica
Aritmetica pratica	Economia matematica	Logismografia
Id. razionale	Equilibrio corpi elast.	Matematica (compl. di)
Id. (Eserc. di)	Eserciz. d. geom. elem.	Matematiche superiori
Id. e geom. d. op.	Id. di Trigonom.	Metrologia
Astronomia	Euclide (L') emendato	Peso metalli
Id. nautica	Formulario di matem.	Problemi di geometr.
Id. n. antico test.	Fotogrammetria	Prospettiva
Calcolo infin. I calc. diff	Funzioni analitiche	Ragioneria
Id. II integrale	Id. ellittiche	Id. d. cooper.
Id. III d. variaz.	Geometr. anal. d. piano	Id. industrial.
Id. (Esercizi di)	Id. Id. d. spazio	Ragioniere (pront. d.)
Celerimensura	Id. descrittiva	Regolo calcolatore
Compensazione errori	Id. metr. e trig.	Repertor. di matemat.
Computisteria	Id. pratica	Stereometria
Conti e calcoli fatti	Id. proj. d. piano	Strumenti metrici
Cubatura legnami	Id. Id. d. spazio	Telemetria
Curve circolari	Id. pura	Teoria dei numeri
Determinanti	Id. e trig. d. sfera	Id. d. ombre
Disegno assonometr.	Gnomonica	Termodinamica
	Gruppi di trasformaz.	Triangolazioni topog.

Amministrazione pubblica Diritto e Giurisprudenza.

Assicurazione	Diritto commerciale	Legge s. sanità e sicu-
Id. stima danni	Id. costituzionale	rezza pubblica
Avarie e sinistri mar.	Id. Ecclesiastico	Legge sulle tasse di re-
Beneficenza	Id. Intern. pubbl.	gistro e bollo
Bonifiche	Id. Id. privato	Legislazione sanitaria
Camera di consiglio	Id. penale	Legislazione rurale
Catasto	Id. Id. romano	Logismografia
Chimica applicata	Id. romano	Mandato commerciale
Codice del bollo	Economia politica	Notaio
Id. doganale	Esattore comunale	Ordinam. Stati d'Eur.
Id. civile	Estimo dei terreni	Id. Id. f. d'Eur.
Id. proced. civile	Id. rurale	Paga giornaliera
Id. commercio	Fognatura cittadina	Posta
Id. dell'ingegnere	Giurato (Man. del)	Produz. e commer. vino
Id. pen. e proc. pen.	Giustizia amministr.	Prontuario d. agricol.
Id. di marina	Guida p. Sindaci, Se-	Id. d. ragion.
Id. pen. p. l'eserc.	gretari, ecc.	Proprietario di case
Id. del teatro	Igiene scolastica	Ragioneria
Id. d. perito misur.	Id. veterinaria	Ragioneria d. Cooper.
Cod. e leggi us. d'Italia	Imposte dirette	Id. industriale
Computisteria	Infortunati sul lavoro	Ricchezza mobile
Conciliatore	Interesse e sconto	Scienza d. finanze
Contabilità comunale	Ipoteche	Scrittura d'affari
Id. dello Stato	Lavoro donne e fanc.	Socialismo
Cooperative rurali	Legge comunale	Società di mut. soccor.
Cooperazione	Id. elett. politica	Id. industriali
Curatore dei fallimen.	Id. sui lav. pubbl.	Sociologia generale
Debito pubblico	Id. s. ordin. giud.	Statistica
Digesto	Id. infort. s. lavoro	Testamenti
Diritti e dov. d. cittad.	Id. s. propr. letter.	Trasporti e tariffe
Diritto amministrativ.	Id. s. diritti d'aut.	Valori pubblici
Id. civile	Id. s. priv. industr.	

Archeologia, Belle Arti.

Amatore oggett. d'arte	Decoraz. e ind. artist.	Numismatica
Anatomia pittorica	Disegno	Ornatista
Antichità priv. d. rom.	Id. (Gramm. del)	Paleografia
Id. pubbl. rom.	Fiori artificiali	Paleoetnologia
Armi antiche	Fotosmaltografia	Pittura italiana
Araldica	Gioielleria, orficeria	Id. ad olio
Archeol. d. arte greca	Guida numismatica	Prospettiva
Id. d. arte etr. rom.	Litografia	Ristauratore dipinti
Architettura	Luce e colori	Scoltura
Armi antiche	Majoliche e porcellane	Storia dell'arte
Arti grafiche fotomec.	Marmista	Teoria d. ombre
Atene	Mitologia	Topografia di Roma
Calligrafia	Monete greche	Vocabolario numis.
Colori e pittura	Id. romane	Vocabolario araldico
	Monogrammi	

Storia e Geografia.

Acque minerali	Dizionario dei comuni d'Italia	Paleoetnologia
Alpi	Dizionario biografico	Prealpi bergamasche
Argentina	Esercizi geografici	Prontuario di geografia
Astronomia (L') n. antico testamento	Etnografia	Rivoluzione francese
Atlantest. geog. d'Ital.	Geografia	Shakespeare
Id. geog. univers.	Id. classica	Sismologia
Cartografia	Id. fisica	Statistica
Climatologia	Id. commercial.	Storia antica
Commercio (Storia d.)	Geologia	Id. d. arte militare
Cosmografia	Islamismo	Id. del commercio
Cristoforo Colombo	Leggende popolari	Id. d'Italia
Cronologia	Manzoni A.	Id. di Francia
Id. scop. geog.	Mare	Id. d'Inghilterra
Dizionario alpino	Mitologia	Id. e cronologia
Id. geografico	Omero	Topografia di Roma
		Vulcanismo

Erudizione, Bibliografia, ecc.

Amatore oggetti d'art.	Dizionario bibliograf.	Leggende popolari
Id. di maioliche	Id. biografico	Litografia
Armi antiche	Id. stenograf.	Paleoetnologia
Atene	Id. abbreviat.	Paleografia
Autografi	Enciclopedia Hoepli	Raccoglitori
Bibliografia	Epigrafia latina	Stenografia
Bibliotecario	Errori e pregiudizi	Stenografo
Classificaz. d. scienze	Evoluzione (storia d.)	Tipografia
Crittografia	Grafologia	

Filosofia, Pedagogia, Religione.

Bibbia	Filosofia morale	Psicologia
Buddismo	Giardino infantile	Id. fisiologica
Didattica	Grafologia	Id. musicale
Diritto ecclesiastico	Igiene scolastica	Protezione animali
Estetica	Imitazione Cristo	Ortofrenia
Etica	Logica	Religioni dell'India
Evoluzione	Mitologia	Sordomuto

Arte militare, Nautica.

Amatore oggetti d'art.	Duellante	Meccanica dei macchi-
Armi antiche	Esplosiventi	nista di bordo
Attrezzatura navale	Filonauta	Nautica stimata
Avarie e sinistri mar.	Flotte moderne	Pirotecnia
Canottaggio	Ingegnere navale	Scherma
Codice cavalleresco	Lavori marittimi	Storia arte militare
Costruttore navale	Macchinista navale	Telemetria
Disegno e costruz. navi	Marine da guerra	Ufficiale
Doveri macchin. naval.	Marino	

Letteratura, Linguistica, Filologia.

Arabo parlato	Grammat. dan.-norv.	Letteratura norveg.
Arte del dire	Id. ebraica	Id. persiana
Conversaz. Ital.-Ted.	Id. Francese	Id. provenz.
Id. Ital.-Fran.	Id. Galla (Orom.)	Id. romana
Corrisp. comm. italian.	Id. Greca	Id. spagnuol.
Id. Id. spagn.	Id. Greca-mod.	Id. tedesca
Id. Id. franc.	Id. Inglese	Id. ungheres.
Crittografia	Id. Italiana	Id. slava
Dantologia	Id. Latina	Lingua gotica
Dialecti italici	Id. Olandese	Lingue d'Africa
Id. greci	Id. Portoghese-	Id. neo-latine
Dizion. abbrev. latine	Brasiliana	Id. straniere
Id. bibliografico	Grammat. Rumena	Metrica d. greci e rom.
Id. Eritreo	Id. Russa	Morfologia greca
Id. Milanese	Id. Slovena	Id. italiana
Id. Olandese	Id. Spagnuola	Omero
Id. Tedesco	Id. Svedese	Paleografia
Id. univ. in 4 ling.	Id. Tedesca	Relig. e ling. di India
Dottrina pop. in 4 ling.	Id. Turca osm.	Rettorica
Enciclopedia Hoepli	Leggende popolari	Bitmica italiana
Esercizi greci	Letteratura albanese	Sanscrito
Id. latini	Id. american.	Shakespeare
Id. di traduzione	Id. araba	Sintassi francese
della gramm. franc.	Id. assira	Sintassi latina
Esercizi di traduzione	Id. catalana	Stilistica
della gramm. tedesc.	Id. dramm.	Stilistica latina
Filologia classica	Id. ebraica	Tavole divina comm.
Florilegio poet. greco	Id. egiziana	Tigre
Fonologia italiana	Id. francese	Traduttore tedesco
Id. latina	Id. greca	Verbi greci
Fraseologia francese	Id. indiana	Id. latini
Glottologia	Id. inglese	Vocabol. lingua Russa
Grammatica albanese	Id. italiana	Volapuk

Musica, Sport.

Acrobatica e atletica	Ciclista	Lawn-Tennis
Alpinismo	Codice cavalleresco	Mandolinista
Amatore oggetti d'art.	Contrappunto	Motociclista
Armonia	Dizionario alpino	Nuotatore
Armi antiche	Id. filatetico	Pianista
Automobilista	Dizionario delle corse	Proverbi sul cavallo
Ballo	Duellante	Psicologia musicale
Biliardo	Filonauta	Raccogliatore oggetti
Cacciatore	Furetto (II)	Scacchi
Cane (Allevatore del)	Ginnastica femminile	Scherma
Canottaggio	Id. maschile	Storia della musica
Canto (II)	Id. (Storia d.)	Strumentazione
Cantante	Giuochi ginnastici	Strumenti ad arco
Cavallo	Gioco del pallone	
Chitarra	Infortuni d. montagna	

**Elenco completo dei MANUALI HOEPLI
disposti in ordine alfabetico per materia.**

	L. c.
Abitazione degli animali domestici , del Dott. U. BARPI, di pag. XVI-372, con 168 incisioni	4 —
Abitazioni — <i>vedi</i> Fabbricati civili.	
Abitazioni popolari (Le) Case operaie dell'Ing. E. MAGRINI di pag. XVI-312 con 151 incisioni	3 50
Abiti per signora (Confezione di) e l'arte del taglio, com- pilato da EMILIA COVA, di pag. VIII-91, con 40 tavole	3 —
Abbreviature — <i>vedi</i> Dizion. abbreviature — Diz. stenografico.	
Acetilene (L') di L. CASTELLANI 2. ^a ediz. di p. XVI-164	2 —
Aceto — <i>vedi</i> Adulterazione	
Acido solforico, Acido nitrico, Solfato sodico, Acido mu- riatico (Fabbricazione dell'), del Dott. V. VENDER, di pag. VIII-312, con 107 incisioni e molte tabelle.	3 50
Acque (Le) minerali e termali del Regno d'Italia , di LUIGI TIOLI. Topografia - Analisi - Elenchi - Denominazione delle acque - Malattie - Comuni in cui scaturiscono - Stabilimenti e loro proprietari - Acque e fanghi in commercio - Nego- zianti, di pag. XXII-552	5 50
Acrobatica e atletica di A. ZUCCA, di pag. xxx-267, con 100 tavole e 42 incisioni nel testo	6 50
Acustica — <i>vedi</i> Luce e suono.	
Adulterazioni e falsificazioni (Dizionario delle) degli ali- menti , del Dott. Prof. L. GABBA (è in lavoro la 2. ^a ediz.).	
Adulterazioni (Le) del vino e dell'aceto e mezzi come scoprirle, di A. ALOI, di pag. XII-227, con 10 incisioni, delle quali 4 colorate	2 50
Agricoltore (Prontuario dell') e dell'ingegnere rurale, del- l'Ing. V. NICCOLI, 3. ^a edizione riveduta ed ampliata, di pa- gine XL-500, con 30 incisioni	5 50
— (Il libro dell') Agronomia, agricoltura, industrie agricole del Dott. A. BRUTTINI, di pag. xx-446 con 303 figure	3 50
Agronomia , del Prof. CAREGA DI MURICCE, 3. ^a ediz. rive- duta ed ampliata dall'autore, di pag. XII-210.	1 50
Agronomia e agricoltura moderna , di G. SOLDANI, 2. ^a ed. di pag. VIII-416 con 134 incisioni e 2 tav. cromolit.	3 50
Agrumi (Coltivazione, malattie e commercio degli), di A. ALOI, con 22 incisioni e 5 tavole cromolit., pag. XII-238	3 50
Alcool (Fabbricazione e materie prime), di F. CANTAMESSA di pag. XII-307, con 24 incisioni	3 —
Alcool industriale , di G. CIAPETTI. Produzione dell'al- cole industriale dal punto di vista dell'agricoltura italiana, applicazione dell'alcole denaturato alla fabbricazione del- l'aceto e delle vinacce, alla produzione della forza motrice, al riscaldamento e illuminaz., con 105 ill., di pag. XII-262	3 —
Algebra complementare , del Prof. S. PINCHERLE: Parte I. <i>Analisi Algebrica</i> , di pag. VIII-174	1 50
Parte II. <i>Teoria delle equazioni</i> , pag. IV-169 con 4 inc.	1 50

- L. c.
- Algebra elementare**, del Prof. S. PINCHERLE, 8ª ediz. di pag. VIII-210 e 2 incisioni 1 50
- (**Esercizi di**), del Prof. S. PINCHERLE, di pag. VIII-185, con 2 incisioni. 1 50
- Alighieri (Dante)** — *vedi* Dantologia.
- Alimentazione**, di G. STRAFFORELLO, di pag. VIII-122 . 2 —
— *vedi* Bromatologia — Gastronomo.
- Alimentazione del bestiame**, dei Proff. MENOZZI E NICCOLI, di pag. XVI-400 con molte tabelle 4 —
- Allattamento** — *vedi* Nutrizione del bambino.
- Alligazione per l'oro e per l'argento** — *vedi* Leghe - Tavole.
- Alluminio (L')**, di C. FORMENTI, di pag. XXVIII-324 . . . 3 50
- Alcò** — *vedi* Prodotti agricoli.
- Alpi (Le)**, di J. BALL, trad. di I. CREMONA, pag. VI-120 . 1 50
- Alpinismo**, di G. BROCHEREL, di pag. VIII-312 3 —
- Amalgame** — *vedi* Leghe metalliche.
- Amatore (L') di oggetti d'arte e di curiosità**, di L. DE MAURI, di 600 pag. adorno di numerose incis. e marche. Contiene le materie seguenti: Pittura - Incisione - Scultura in avorio - Piccola scultura - Vetri - Mobili - Smalti - Ventagli - Tabacchiere - Orologi - Vasellame di stagno - Armi ed armature - Dizionario complementare di altri infiniti oggetti d'arte e di curiosità (è in lavoro la 2ª edizione).
- Amianto** — *vedi* Imitazioni.
- Amido** — *vedi* Fecola.
- Amministrazione comunale** — *vedi* Guida pei Sindaci, Segretari comunali, ecc.
- Anagrammi.** — *vedi* Enimmistica.
- Analisi chimica qualitativa** di sostanze minerali e organiche e ricerche tossicologiche, ad uso dei laboratori di chimica in genere e in particolare delle Scuole di Farmacia, del Prof. P. E. ALESSANDRI. 2ª ediz. intieramente rifatta, di pag. XII-384, con 14 inc. numerose tabelle e 5 tav. cromolitografiche 5 —
- Analisi di sostanze alimentari.** — *vedi* Chimica applicata all'Igiene.
- Analisi delle Urine.** — *vedi* Chimica clinica.
- Analisi del vino**, ad uso dei chimici e dei legali, del Dott. M. BARTH, traduzione del Prof. E. COMBONI, 2ª edizione riveduta ed ampliata, di p. XVI-140, con 8 inc. nel testo 2 —
- Analisi volumetrica** applicata ai prodotti commerciali e industriali, del Prof. P. E. ALESSANDRI, pag. X-342, con inc. 4 50
- Ananas.** — *vedi* Prodotti agricoli
- Anatomia e fisiologia comparate**, del Prof. R. BESTA, di pag. VII-218 con 34 incisioni 1 50
- Anatomia microscopica** (Tecnica di), del Prof. D. CARAZZI, di pag. XI-211, con 5 incisioni 1 50
- Anatomia pittorica**, del Prof. A. LOMBARDINI, 2ª ediz. riveduta e ampliata, di pag. VIII-168, con 53 inc. 2 —

	L. c.
Anatomia topografica , del Dott. Prof. C. FALCONE, di pag. XV-395, con 30 incisioni	3 —
Anatomia vegetale , del Dottor A. TOGNINI, di pagine XVI-274 con 41 incisioni	3 —
Animali da cortile , del Prof. P. BONIZZII, di pag. XIV-238 con 39 incisioni. (La 2 ^a ediz. è in preparazione).	
Animali (Gli) parassiti dell'uomo , del Prof. F. MERCANTI, di pag. IV-179, con 33 incisioni	1 50
Antichità private dei romani , del Prof. N. MORESCHI. 3 ^a edizione interamente rifatta del Manuale di W. KOPP, di pag. XVI-181 con 7 incisioni	1 50
Antichità pubbliche romane di J. G. HUBERT, rifacimento delle antichità romane pubbliche, sacre e militari di W. KOPP, traduz. di A. WITTGENS, di pag. XIV-324	3 —
Antisettici — <i>vedi</i> Medicatura antisettica.	
Antologia stenografica , di E. MOLINA. (sistema Gabelsberger-Noe), contenente brani da S. A. R. Luigi Amedeo di Savoia, <i>La Stella Polare</i> , Gaetano Negri, Fucini, Villari, e altri. Di pag. XI-199	2 —
Antropologia , del Prof. G. CANESTRINI, 3 ^a ediz., di pag. VI-239 con 21 incisioni.	1 50
Antropometria , di R. LIVI, di pag. VIII-237 con 32 incis.	2 50
Apicoltura , del Prof. G. CANESTRINI, 3 ^a ediz. riveduta di pag. IV-215 con 43 incisioni	2 —
Arabo parlato (L') in Egitto, grammatica, frasi, dialoghi e raccolta di oltre 6000 vocaboli del Prof. A. NALLINO, di pag. XXVIII-386	4 —
Araldica (Grammatica), ad uso degli italiani, compilata da F. TRIBOLATI, 4 ^a edizione con introduzione ed aggiunte di G. DI CROLLALANZA, di pag. XI-187, con 274 inc.	2 50
— <i>vedi</i> Vocabolario araldico.	
Araldica Zootecnica di E. CANEVAZZI, I libri geologici degli animali domestici, Stud - Herd - Flock - Books. 1904, di pag. XIX-322, con 43 incisioni	3 50
Aranci — <i>vedi</i> Agrumi.	
Archeologia. Arte Greca , del Prof. I. GENTILE. 3 ^a ediz. rifatta del Prof. S. RICCI di pag. XLVIII-270 con 215 tav. aggiunte e inserite nel testo	12 50
Atlante di 249 tavole	2 —
Archeologia e Storia dell'arte italiana, etrusca e romana. Un vol. di testo di p. XXXIV-346 con 96 tav. e un vol. Atlante di 79 tav. a cura del Prof. S. RICCI	7 50
Architettura (Manuale di) italiana , antica e moderna, di A. MELANI. 4 ^a edizione completata ed arricchita, con 136 tav. e 67 incis. intercalate nel testo di pag. XXV-559	7 50
Argentina (La Repubblica) nelle sue fasi storiche e nelle sue attuali condizioni geografiche, statistiche ed economiche di EZIO COLOMBO, di pag. XII-330 con 1 tav. e 1 carta	3 50

	L.
Argentatura — <i>vedi</i> Galvanizzazione — Galvanoplastica — Galvanostegia — Metallocromia — Metalli preziosi — Piccole industr.	
Argento — <i>vedi</i> Metalli preziosi.	
Aritmetica pratica , del Prof. Dott. F. PANIZZA, 2ª edizione riveduta, di pag. VIII-188	1 50
Aritmetica razionale , del Prof. Dott. F. PANIZZA, 4ª edizione riveduta di pag. XII-210	1 50
— (Esercizi di), del Prof. Dott. F. PANIZZA, di p. VIII-150	1 50
Aritmetica (L') e Geometria dell'operaio , di EZIO GIORLI, di pag. XII-183, con 74 figure	2 —
Armi antiche (Guida del raccoglitore e dell'amatore di) di J. GELLI, di pag. VIII-388, con 9 tavole fuori testo, 432 incisioni nel testo e 14 tavole di marche	6 50
Armonia del Prof. G. BERNARDI, con prefazione di E. ROSSI di pag. XX-338.	8 50
Aromatici e Nervini nell'alimentazione . I condimenti, l'alcool (Vino, Birra, Liquori, Rosolii, ecc.). Caffè, Thè Matè, Guarana, Noce di Kola, ecc. — Appendice sull'uso del Tabacco da fumo e da naso; del Dott. A. VALENTI	3 —
Arte del dire (L') , di D. FERRARI, Manuale di retorica per lo studente delle Scuole secondarie. 5ª ediz. corr., (10, 11 e 12 migliaia), pag. XVI-350 e quadri sinottici	1 50
Arte della memoria (L') , sua storia e teoria (parte scientifica). Mnemotecnica Triforme (parte pratica) del Generale B. PLEBANI, di pag. XXXII-224 con 13 illustr.	2 50
Arte mineraria . — <i>vedi</i> Miniere (Coltivazione delle).	
Arti (Le) grafiche fotomeccaniche , ossia la Eliografia nelle diverse applicaz. (Fotozincotipia, fotozincografia, fotocromolitografia, otolitografia, fotocollografia, fotosilografia, tricromia, fotocolorcromia, ecc. secondo i metodi più recenti, con un Dizionario tecnico e un cenno storico sulle arti grafiche; 3ª ediz. corr. e illustr. di pagine XVI-238	2 —
Asfalto (L') , fabbricazione, applicazione, dell'Ing. E. RIGHETTI, con 22 incisioni, di pag. VIII-152.	2 —
Assicurazione in generale , di U. GOBBI, di pag. XII-308.	3 —
Assicurazione sulla vita , di C. PAGANI, di pag. VI-161..	1 50
Assicurazioni (Le) e la stima dei danni nelle aziende rurali, con appendice sui mezzi contro la grandine, del Dr. A. CAPILUPI, di pag. VIII-284, 17 incisioni	2 50
Assistenza degl'infermi nell'ospedale ed in famiglia , del Dott. C. Calliano, 2ª ediz., pag. XXIV-448, 7 tav.	4 50
Assistenza dei pazzi nel manicomio e nella famiglia , del Dr. A. PIERACCINI, e prefaz. del prof. E. MORSELLI, pag. 250	2 50
Astronomia , di J. N. LOCKYER, nuova versione libera con note ed aggiunte del Prof. G. CELORIA, 5ª ediz. di pagine XVI-255 con 54 incisioni	1 50

	L. c.
Astronomia (L') nell'antico testamento. di G. V. SCHIAPARELLI, di pag. 204	1 50
Astronomia nautica , del prof. G. NACCARI, di pag. XVI-320, con 45 incis. e tav. numeriche	3 —
Atene . Brevi cenni sulla città antica e moderna, seguiti da un saggio di Bibliografia descrittiva e da una Appendice Numismatica, di S. AMBROSOLI, con un panorama e una pianta d'Atene, 22 tav. e varie incisioni nel testo . . .	3 50
Atlante geografico-storico d'Italia , del Dott. G. GAROLLO, 24 tav. con pag. VIII-67 di testo e un'appendice . . .	2 —
Atlante geografico universale , di R. KIEPERT, 26 carte con testo. <i>Gli Stati della terra</i> del Dott. G. GAROLLO. 10ª ediz. aumentata e corretta (dalla 91.000ª alla 100.000ª copia) pag. VIII-88	2 —
Atletica — <i>vedi</i> Acrobatica.	
Atmosfera — <i>vedi</i> Igroscopi e igrometri.	
Attrezzatura, manovra navale, segnalazioni marittime e Dizionariette di Marina , di F. IMPERATO, 3ª edizione ampliata, di pag. XXIV-648, con 330 incis. e 28 tav. in cromolit. riproducenti le bandiere maritt. di tutte le naz.	6 50
Autografi (L'amatore d'), del conte E. BUDAN con 361 facsimili di pag. XIV-426	4 50
Autografi (Raccolte e raccogliti. di) in Italia di C. VANBIANCHI, di pag. XVI-376, 102 tav. di facsimili d'aut. e rit. . .	6 50
Automobilista (Manuale dell') e guida del meccanico conduttore d'automobili . Trattato sulla costruzione dei veicoli semoventi, di G. PEDRETTI, di pag. XXIV-480, con 181 incisioni	5 50
— <i>Vedi</i> Ciclista — Motociclista,	
Avarie e sinistri marittimi (Manuale del regolatore e liquidatore di) del Rag. V. ROSSETTO. Appendice: Breve dizionario di terminologia tecnico navale e commerciale marittimo inglese-italiano. Ragguaglio dei pesi e misure inglesi con le italiane. Di pag. xv-496, con 25 fig. in 6 tav.	5 50
Avicoltura — <i>vedi</i> Animali da ortile — Colombi — Pollicoltura.	
Avvelenamenti — <i>vedi</i> Veleni.	
Bachi da seta , del Prof. F. NENCI. 3ª ediz. con note ed aggiunte, di pag. XII-300, con 47 incis. e 2 tav. . . .	2 50
Ballistica — <i>vedi</i> Armi antiche — Esplosivi — Pirotecnia — Storia dell'arte militare.	
Ballo (Manuale del) di F. GAVINA, di pag. VIII-249, con 92 figure. Contiene: Storia della danza - Balli girati - Cotillon - Danze locali - Feste di ballo - Igiene del ballo.	2 50
Bambini — <i>vedi</i> Nutrizione dei — Ortofrenia — Terapia.	
Barbabietola da zucchero — <i>vedi</i> Zucchero.	

L. c.

- Batteriologia**, dei Professori G. e N. CANESTRINI, 2^a ediz. in gran parte rifatta, di pag. X-274 con 37 incis. 1 50
- Beneficenza** (Manuale della), del Dott. L. CASTIGLIONI, con appendice sulle contabilità delle istituzioni di pubblica beneficenza, del Rag. G. ROTA, di pag. XVI-340. 3 50
- Bestiame (Il) e l'agricoltura in Italia**, del Prof. E. ALBERTI. 2^a ediz. rifatta dal prof. BARPI (in lavoro).
— Vedi Abitazioni di animali — Alimentazione d. bestiame — Araldica zootecnica — Cavallo — Coniggicoltura — Igiene veterinaria — Majale - Pollicoltura - Razze bovine - Zoonosi - Zootecnica.
- Biancheria** (Disegno, taglio e confezione di), Manuale teorico pratico ad uso delle scuole normali e professionali femminili e delle famiglie, di E. BONETTI, 3^a edizione riveduta, coll'aggiunta di 10 nuove tavole e di 6 prospetti per l'ingrandimento e l'impicciolimento dei modelli, di pag. xx-234, 60 tavole e 6 prospetti 4 —
- Bjbbia** (Man. della), di G. M. ZAMPINI, di pag. XII-308 2 50
- Bibliografia**, di G. OTTINO, 2^a edizione riveduta, di pag. IV-166, con 17 incisioni 2 —
- Bibliotecario** (Manuale del), di G. PETZOLDT, tradotto sulla 3^a edizione tedesca, per cura di G. BIAGI e G. FUMAGALLI di pagine xx-364-CCXIII 7 50
- Billardo** (Il giuoco del), di J. GELLI, di pag. XV-179, con 79 illustrazioni 2 50
- Biografia** — vedi Cristoforo Colombo — Dantologia — Dizionario biografico — Manzoni — Napoleone I — Omero — Shakespeare.
- Biologia animale** (Zoologia generale e speciale) per Naturalisti, Medici e Veterinari del Dott. G. COLLAMARINI, di pag. X-426 con 23 tavole 3 —
- Bollo** — vedi Codice del bollo — Leggi registro e bollo.
- Bonificazioni** (Manuale amministrativo delle) di C. MEZZANOTTI, di pag. XII-294. 3 —
- Borsa** (Operaz. di) — vedi Debito pubblico — Valori pubblici.
- Boschi** — vedi Selvicoltura.
- Botanica**, del Prof. I. D. HOOKER, traduzione del Prof. N. PEDICINO, 4^a ediz., di pag. VIII-134, con 68 incisioni 1 50
- Botti** — vedi Enologia.
- Bromatologia**. Dei cibi dell'uomo secondo le leggi dell'igiene del D.r S. BELLOTTI, di pag. xv-251, con 12 tav. color. 3 50
- Bronzatura** — vedi Metallocromia — Galvanostegia.
- Bronzo** — vedi Fonditore — Leghe metalliche — Operaio.
- Buddismo**, di E. PAVOLINI, di pag. XVI-164 1 50
- Burro** — vedi Latte — Caseificio.
- Cacciatore** (Manuale del), di G. FRANCESCHI, 2^a edizione rifatta, di pag. XIII-315, con 41 incisioni 2 50
- Cielo** — vedi Bestiame — Caseificio — Latte, ecc.
- Carrè** — vedi Prodotti agricoli.

- Calcestruzzo** (Costruzioni in) ed in cemento armato, di G. VACHELLI, 2^a edizione, di pag. XVI-351 con 230 figure 4 —
- Calci e Cementi** (Impiego delle), per l'Ing. L. MAZZOCCHI In preparazione la nuova edizione.
- Calcolazioni mercantili e bancarie** — *vedi* Conti e Calcoli fatti — Interesse e sconto — Prontuario del ragioniere — Monete ingl.
- Calcolo infinitesimale**, del Prof. E. PASCAL:
- I. *Calcolo differenziale*, 2^a ediz. rived., pag. XII-311, 10 inc. 3 —
- II. *Calcolo integrale*, 2^a ediz. rifattadi pag. VIII-329. . . 3 —
- III. *Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite*, di pag. XII-300 3 —
- **Esercizi di calcolo infinitesimale** (Calcolo differenziale e integrale), del Prof. E. PASCAL, di pag. XX-372 . . . 3 —
- Caldaia pratico e costruttore di caldaie a vapore**, e di altri apparecchi industriali, di G. BELLUOMINI, di pag. XII-248, con 220 incisioni. 3 —
- Calligrafia** (Manuale di) di R. PERCOSSI. Nuova edizione in corso di stampa.
- Calore** (Il), del Dott. E. JONES, trad. di U. FORNARI, di pag. VIII-296, con 98 incisioni 3 —
- Camera di Consiglio Civile** di A. FORMENTANO. I. Norme generali sul procedimento in Camera di Consiglio. II. Giurisdizione volontaria. III. Affari di giurisdizione contenziosa da trattarsi senza contraddittore. IV. Materie da trattarsi in Camera di Consiglio per speciale disposizione di legge, di pag. XXXII-574 4 50
- Campicello** (Il) **scolastico**. Impianto e coltivazione. Manuale di agricoltura pratica per i Maestri, dei Dottori E. AZIMONTI e C. CAMPI, di pag. XI-175, con 126 incisioni 1 50
- Canarino** — *vedi* Uccelli canori.
- Cancelliere** — *vedi* Conciliatore.
- Candeggio** — *vedi* Industria tintoria.
- Candele** — *vedi* Industria stearica.
- Cane** (Il) Razze mondiali, allevamento, ammaestramento, malattie con una appendice: I cani della spedizione polare di S. A. R. il Duca degli Abruzzi, di A. VECCHIO, 2^a edizione rifatta, di pag. XVI-442, con 152 inc. e 63 tavole delle quali 12 a colori da disegni originali dell'autore . 7 50
- Canottaggio** (Manuale di), del Cap. G. CROPPI, di pagine XXIV-456, con 387 incis. e 91 tav. cromolit. 7 50
- Cantante** (Man. del.) di L. MASTRIGLI, di pag. XII-132 . 2 —
- Cantiniere** (Il). Manuale di vinificazione per uso dei cantinieri, di A. STRUCCHI, 3^a edizione riveduta ed aumentata, con 52 incisioni unite al testo, e una tabella completa per la riduzione del peso degli spiriti, di pag. XVI-256 . . . 2 —
- Canto** (Il) **nel suo meccanismo**, di P. GUETTA, di p. VIII-253, con 24 incisioni 2 50
- Carburo di calcio** — *vedi* Acetilene.

	L. c.
Carta (Industria della), dell'Ing. L. SARTORI, di pag. VII-326, con 106 incisioni e 1 tavola	5 50
Carte fotografiche , Preparazione e trattamento, di L. SASSI, di pag. XII-353	3 50
Carte geografiche — <i>vedi</i> Atlante.	
Cartografia (Manuale teorico-pratico della), coa un sunto della storia della Cartografia, del Prof. E. GELCICH, di pag. VI-257, con 37 illustrazioni	2 --
Casa (La) dell'avvenire , dell'Ing. PEDRINI. Vade mecum dei costruttori, dei proprietari di case e degli inquilini. Raccolta ordinata di principi d'ingegneria sanitaria, domestica ed urbana, per la costruzione di case igieniche, civili, operaie e rustiche e per la loro manutenzione, di pag. XV-468, con 213 incisioni	4 50
Casa coloniche — <i>vedi</i> Economia fabbricati rurali.	
Casa operaie — <i>vedi</i> Abitazioni popolari.	
Caseificio , di L. MANETTI, 4 ^a ediz. nuovamente ampliata dal Dr. G. SARTORI di pag. XII-280, con 49 incisioni	2 --
Catasto (Il nuovo) italiano , di E. BRUNI, di pag. VII-346	3 --
Cavallo (Il), del Colonnello C. VOLPINI, 3 ^a edizione rived. ed ampliata di pag. VI-233 con 48 tavole	5 50
Cavi telegrafici sottomarini . Costruzione, immersione, riparazione, dell'Ing. E. JONA, di pag. XVI-388, 188 fig. e 1 carta delle comunicazioni telegrafiche sottomarine	5 50
Cedri — <i>vedi</i> Agrumi.	
Celerimensura e tavole logaritmiche a quattro decimali dell'Ing. F. BORLETTI, di pag. VI-148, con 29 incisioni	3 50
Celerimensura (Manuale e tavole di), dell'Ing. G. ORLANDI, di pag. 1200, con quadro generale d'interpolazioni	18 --
Celluloide — <i>vedi</i> Imitazioni.	
Cementazione — <i>vedi</i> Tempera.	
Cementi armati — <i>vedi</i> Calcestruzzo — Calci e cementi.	
Ceralacca — <i>vedi</i> Vernici e lacche.	
Ceramiche — <i>vedi</i> Maioliche e porcellane — Fotosmaltografia.	
Chimica , del Prof. H. E. ROSCOE, 5 ^a edizione rifatta da E. RICCÌ, di pag. XII-228, con 47 incisioni.	1 50
Chimica agraria , di A. ADUCCO, 2 ^a ediz. di pag. XII-512	3 50
Chimica analitica (Elementi scientifici di), di W. OSTWALD, trad. del Dott. BOLIS, di pag. XVI-234	2 50
Chimica applicata all'igiene . Guida pratica ad uso degli Ufficiali sanit. Medici - Farmacisti - Commercianti - Laboratori d'igiene, di merciologia, ecc., di P. E. ALESSANDRI, di pag. XX-515, con 49 incisioni e 2 tav.	5 50
Chimica clinica , del Prof. R. SUPINO, di pagine XII-202.	2 --
Chimica fotografica . Prodotti chimici usati in fotografia e loro proprietà di R. NAMIAS di pag. VIII-327	2 50
Chimica legale (Tossicologia), di N. VALENTINI, p. XII-243	2 50
Chimico (Manuale del) e dell'industriale . Raccolta di tabelle, di dati fisici e chimici e di processi d'analisi tecnica,	

- ad uso dei chimici analitici e tecnici, dei direttori di fabbriche, dei fabbricanti di prodotti chimici, degli studenti di chimica, ecc., ecc., del Dottor L. GABBA, 3^a edizione ampliata, riveduta ed arricchita delle tavole analitiche di H. WILL, di pag. XIX-457, con 12 tavole 5 50
- Chiromanzia e tatuaggio**, note di varietà, ricerche storiche e scientifiche, coll'appendice di un'inchiesta con risposte di Ferrero, Lombroso, Mantegazza, Morselli ed altri di G. L. CERCHIARI, di pag. xx-323, con XXIX tav. e 82 inc. 4 50
- Chirurgia operativa** (Man. di), dei Dottori R. STECCHI e A. GARDINI, di pag. VIII-322, con 118 incisioni 3 —
- Chitarra** (Manuale pratico per lo studio della), di A. PISANI, di pag. XVI-116, con 86 figure e 25 esempi di musica. 2 —
- Ciclista**, di I. GHERSI, 2^a ediz. complet. rifatta del "Manuale del Ciclista", di A. GALANTE, di pag. 244, 147 inc. 2 50
- Classificazione delle scienze**, di C. TRIVERO, p. XVI-292 . 8 —
- Climatologia**, di L. DE MARCHI, pag. X-204 e 6 carte . . . 1 50
- Cloruro di sodio** — *vedi* Sale.
- Codice cavalleresco italiano** (Tecnica del duello), di J. GELLI, 9^a ediz. rifatta, di pag. XVI-283 2 50
- Codice del bollo** (Il). Nuovo testo unico commentato colle risoluzioni amministrative e le massime di giurisprudenza, ecc., di E. CORSI, di pag. C-564. 4 50
- Codice civile del Regno d'Italia**, accuratamente riscontrato sul testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, 2^a ediz. di pag. 232 . . . 1 50
- Codice di commercio**, accuratamente riscontrato sul testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, 2^a ediz. di pag. IV-158. 1 50
- Codice doganale italiano con commento e note**, dell'Avv. E. BRUNI, di pag. XX-1078 con 4 inc. 6 50
- Codice (Il) dell'Ingegnere** di E. NOSEDA (in lavoro).
- Codice di marina mercantile**, secondo il testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, 2^a ediz. di pag. IV-290. 1 50
- Codice metrico internazionale** — *vedi* Metrologia.
- Codice penale e di procedura penale**, secondo il testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, 2^a ediz. di pag. IV-230. 1 50
- Codice penale per l'esercito e penale militare marittimo**, secondo il testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, 2^a ediz. di pag. 179 . . 1 50
- Codice del perito misuratore**. Raccolta di norme e dati pratici per la misurazione e la valutazione d'ogni lavoro edile, prontuario per preventivi, liquidazioni, collaudi, perizie, arbitramenti, degli Ingegn. L. MAZZOCCHI e E. MARZORATI, di pag. XIII-498 con 116 illustrazioni 5 50

- L. c.
- Codice di procedura civile**, accuratamente riscontrato sul testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. **Avv. L. FRANCHI**, 2^a ediz. di pag. 167 1 50
- Codice sanitario** — *vedi* Legislazione sanitaria.
- Codice del teatro** (II). Vade-mecum legale per artisti lirici e drammatici, impresari, capicomici, direttori d'orchestra, direzioni teatrali, agenti teatrali, gli avvocati e per il pubblico, dell'**Avv. TABANELLI**, di pag. XVI-328 3 —
- Codici e leggi usuali d'Italia**, riscontrati sul testo ufficiale coordinati e annotati dal Prof. **Avv. L. FRANCHI**, raccolti in cinque grossi volumi legati in pelle flessibile 36 —
- Vol. I. Codice civile - di procedura civile - di commercio - penale - procedura penale - della marina mercantile - penale per l'esercito - penale militare marittimo** (*otto codici*) 2^a edizione, di pag. VIII-1261 8 50
- Vol. II. Leggi usuali d'Italia**. Raccolta coordinata di tutte le leggi speciali più importanti e di più ricorrente ad estesa applicazione in Italia; con annessi decreti e regolam. e disposte secondo l'ordine alfabetico delle materie.
- Parte I.** Dalla voce " *Abbor di mare* ", alla voce " *Domini collettivi* ". 2^a ediz. riveduta ed aumentata, di pagine VIII-1451 a 2 colonne 12 50
- NB.** Questo II.^o volume vede ora la luce diviso in 3 parti, le parti 2.^a e 3.^a sono in corso di stampa e saranno pubblicate entro il corrente anno.
- Vol. III. Leggi e convenzioni sui diritti d'autore**, raccolta generale delle leggi italiane e straniere e di tutti i trattati e le convenzioni esistenti fra l'Italia ed altri Stati a cura della Società italiana degli autori, 2^a ediz. interamente rifatta da **L. FRANCHI**, di p. VII-617 6 50
- Vol. IV. Leggi e convenzioni sulle privative industriali**. Disegni e modelli di fabbrica. Marchi di fabbrica e di commercio. Legislazione italiana, Legislazioni straniere, Convenzioni esistenti fra l'Italia ed altri Stati, di pag. VIII-1007 8 50
- Cognac** (Fabbricazione del) e dello spirito di vino e distillazione delle fecce e delle vinacce, di **DAL PIAZ**, con note di **G. PRATO**, 2^a ed. con aggiunte e correzioni del Dr. **F. A. SANNINO**, di pag. XII-210, con 38 incisioni 2 —
- Coleotteri italiani**, del Dott. **A. GRIFFINI**, (Entomologia I) di pag. XVI-334, con 215 inc. 3 —
- Collezioni** — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte — Amatore di maioliche — Armi antiche — Autografi — Dizionario filatelico.
- Colombi domestici e colombicoltura**, del Prof. **P. BONIZZI**, 2^a edizione rifatta a cura della Società Colombifila fiorentina. di pag. x-211, con 26 figure 2 —
- Colorazione dei metalli** — *vedi* Metallocromia.

- Colori** (La scienza del) e la pittura. di L. GUAITA. Nuova edizione in lavoro.
- Colori e vernici**, di G. GORINI, 4ª ediz. totalmente rifatta, per cura di G. APPIANI 2 50
- Combustibili** — *vedi* Imitazioni.
- Commissario giudiziale** — *vedi* Curatore dei fallimenti.
- Commedia** — *vedi* Letteratura drammatica.
- Commerciante** (Manuale del) ad uso della gente di commercio e degli Istituti d'Istruzione commerciale, corredato di oltre 200 moduli, quadri, esempi, tavole dimostrative e prontuari di C. DOMPÉ, di pag. VI-629. 5 50
- Commercio**, (Storia del) di R. LARICE, di pag. XVI-336 . 3 —
- Commissario giudiziale** — *vedi* Curatore dei fallimenti.
- Compensazione degli errori con speciale applicazione ai rilievi geodetici**, di F. CROTTI, pag. IV-360 2 —
- Complementi di matematica** — (*vedi* Matematica).
- Compositore-tipografo** Manuale dell'allievo), di S. LANDI — *vedi* Tipografia, vol. II.
- Computisteria**, del Prof. V. GITTI:
- I. Computisteria commerciale, 5ª ediz., di pag. IV-184 . 1 50
- II. Computist. finanziaria, 4ª ediz., pag. VIII-156 1 50
- Computisteria agraria**, del Prof. L. PETRI, seconda edizione rifatta, di pag. VIII-210 1 50
- Comuni del Regno d'Italia** — *vedi* Dizionario.
- Concia delle pelli ed arti affini**, di G. GORINI, 3ª edizione interamente rifatta dal Dott. G. B. FRANCESCHI e G. VENTUROLI, di pag. IX-210 2 —
- Conciliatore** (Manuale del), dell'Avv. G. PATACCINI. Guida teorico-pratica con formulario completo per Conciliatore, Cancelliere e Patrocinatore di cause. 4ª edizione ampliata dall'autore e messa in armonia con l'ultima legge 28 luglio 1895, di pag. XII-461 3 —
- Concimi**, del Prof. A. FUNARO, 2ª ediz., di pag. XII-266 . . 2 —
- Concimi fosfatici** — *vedi* Fosfati — Chimica agraria.
- Concordato preventivo** — *vedi* Curatore di fallimenti.
- Confezione d'abiti** — *vedi* Abiti.
- Coniglicoltura pratica**, di G. LICCIARDELLI, 2ª ediz., di pag. VIII-248, con 53 incisioni e 12 tavole in triceromia . 2 50
- Conservazione delle sostanze alimentari**, di G. GORINI, 3ª edizione interamente rifatta dal Dott. G. B. FRANCESCHI e G. VENTUROLI, di pag. VIII-256 2 —
- Consigli pratici** — *vedi* Ricettario domestico — Industriale — Soccorsi d'urgenza.
- Contabilità comunale**, secondo le nuove disposizioni legislative e regolamentari (Testo unico 10 febbraio 1889 e R. Decr. 6 luglio 1890), del Prof. A. DE BRUN. Nuova edizione in lavoro.
- *vedi* Guida pei Sindaci, Segretari comunali, ecc.

- L. c.
- Contabilità domestica**, Nozioni amministrativo-contabili ad uso delle famiglie e delle scuole femminili, del Rag. O. BERGAMASCHI, di pag. XVI-186 1 50
- Contabilità generale dello Stato**, dell'Avv. E. BRUNI, 2ª edizione rifatta, pag. XVI-420. 3 —
- Contabilità delle Istituzioni di p. beneficenza** — *vedi* Beneficenza.
- Conti e calcoli fatti**, dell'Ing. I. GHERSI, 93 tabelle e istruzioni pratiche sul modo di usarle. (Misure, Pesi, Monete, Termometro, Gas e Vapori, Areometri, Alcoolometri, Soluzioni zuccherine, Pesi specifici, Legnami, Carboni, Metalli, Divisioni del tempo, Paga giornaliera, Interessi e Annualità, Rendita, Potenze e Radici, Poligoni e Poliedri regolari, Sfera, Circolo, Divisione della circonferenza, Pendenza, pag. 204. . . 2 50
- Contrappunto**, di G. G. BERNARDI di pag. XVI-238 . . . 3 50
- Contratti agrari** — *vedi* Mezzeria.
- Conversazione italiana e tedesca** (Manuale di), ossia guida completa per chiunque voglia esprimersi con proprietà e speditezza in ambe le lingue, e per servire di *vade mecum* ai viaggiatori, di A. FIORI, 8ª edizione rifatta da G. CATTANEO, pag. XIV-400 3 50
- Conversazione italiana-francese** — *Vedi Dottrina popolare* — *Frasesologia*.
- Cooperative rurali**, di credito, di lavoro, di produzione, di assicurazione, di mutuo soccorso, di consumo, di acquisto di materie prime, di vendita di prodotti agrari. Scopo, costituzione, norme giuridiche, tecniche, amministrative, computistiche, di V. NICCOLI, pag. VIII-362 3 50
- Cooperazione nella sociologia e nella legislazione**, di F. VIRGILII, pag. XII-228. 1 50
- Correnti elettriche** alternate semplici, bifasi e trifasi. Manuale pratico per lo studio, costruzione ed esercizio degli impianti elettrici, dell'Ing. A. MARRO, di pag. XIV-615-LXIV, con 218 incisioni e 46 tabelle 6 50
- Corrispondenza commerciale poliglotta**, di G. FRISONI, compilata su di un piano speciale nelle lingue italiana, francese, tedesca, inglese e spagnuola.
- L. — **PARTE ITALIANA: Manuale di Corrispondenza Commerciale Italiana** corredato di facsimili dei vari documenti di pratica giornaliera, seguito da un GLOSSARIO delle principali voci ed espressioni attinenti al Commercio, agli Affari marittimi, alle Operazioni bancarie ed alla Borsa, ad uso delle Scuole, dei Banchieri, Negozianti ed Industriali di qualunque nazione, che desiderano abilitarsi alla moderna terminologia e nella corretta fraseologia mercantile Italiana, 2ª ediz. di pag. xx-478 . . . 4 —
- II. — **PARTE SPAGNUOLA: Manual de Correspondencia Comercial Espanola**, p. xx-440 4 —

	L. c.	
III. — PARTE FRANCESE: Manuel de Correspondance commerciale française , di pag. VXI-446	4 —	
IV. — PARTE INGLESE: A Manual of english Commercial correspondence , p. XVI-448	4 —	
V. — PARTE TEDESCA: Handbuch der deutschen Handelskorrespondenz , di pag. XV-460	4 —	
N.B. Sono 5 Manuali di corrispondenza, ognuno dei quali è la traduzione di uno qualunque degli altri quattro, per cui si fanno reciprocamente l'ufficio di chiave		
Corse (Le) , con un Dizionario delle voci più in uso, di G. FRANCESCHI, di pag. XII-305	2 50	
— <i>vedi anche</i> Cavallo — Proverbi — Razze bovine, equine, ecc.		
Cosmografia. Uno sguardo all'Universo , di B. M. LA LETTA, pag. XII-197, con 11 incisioni e 3 tavole	1 50	
Costituzione degli Stati — <i>vedi</i> Diritti e doveri — Ordinam.		
Costruttore navale (Manuale del) , di G. ROSSI, pag. XVI-517, con 231 fig. intercalate nel testo e 65 tabelle.	6 —	
Costruzioni — <i>vedi</i> Abitazioni — Architettura — Calcestruzzo — Case dell'avvenire — Case operaie — Fabbricati civili — Fognatura — Ingegnere civile — Lavori marittimi — Peso metalli — Resistenza dei materiali — Resistenza e pesi di travi metalliche.		
Cotoni — <i>vedi</i> Prodotti agricoli.		
Cremore di tartaro — <i>vedi</i> Distillazione.		
Cristallo — <i>vedi</i> Specchi.		
Cristallografia geometrica, fisica e chimica , applicata ai minerali, di E. SANSONI, p. XVI-367, 284 inc. nel testo		3 —
Cristo — <i>vedi</i> Imitazione di Cristo.		
Cristoforo Colombo , di V. BELLIO, pag. IV-136 e 10 incis.	1 50	
Crittogame — <i>vedi</i> Funghi — Malattie crittogamiche — Tartufi.		
Crittografia (La) diplomatica, militare e commerciale, ossia l'arte di cifrare e decifrare le corrispondenze segrete. Saggio del conte L. GIOPPI, pag. 177	3 50	
Cronologia delle Scoperte e delle esplorazioni geografiche dall'anno 1492 a tutto il secolo XX del Prof. L. HUGUES, di pag. VIII-487	4 50	
Cronologia — <i>vedi</i> Storia e cronologia.		
Cubatura dei legnami (Prontuario per la) , di G. BELLUOMINI, 5ª ediz. corretta ed accresciuta, pag. 220.	2 50	
Cuoio — <i>vedi</i> Concia delle pelli — Imitazioni.		
Curatore dei fallimenti (Manuale teorico-pratico del) e del Commissario giudiziale nel concordato preventivo e procedura di piccoli fallimenti, dell'Avv. L. MOLINA, di p. XL-910		8 50
Curiosità — <i>vedi</i> Amatore di oggetti d'arte — Maioliche e porcellane — Armi antiche — Autografi. — Raccoglitore oggetti minuti e curiosi.		

- Curve circolari e raccordi.** Manuale pratico per il tracciamento delle curve in qualunque sistema e in qualsiasi caso particolare nelle ferrovie, strade e canali e per il computo generali dei raccordi circolari con speciali applicazioni al tracciamento dei raddoppi del Binario delle derivazioni e degli scambi ferroviari (In sostituzione del manuale del KRÖNHKE), di C. FERRARIO, pag. XI-264, con 94 incis. . . **§ 50**
- Dantologia**, del Dott. G. A. SCARTAZZINI, 3ª edizione. Vita e Opere di Dante Alighieri, a cura del prof. A. FIAMMAZZO (in lavoro).
- Danze** — *vedi* Ballo.
- Datteri** — *vedi* Prodotti agricoli.
- Debito (Il) pubblico italiano.** Regole e modi per le operazioni sui titoli che lo rappresentano, di F. AZZONI, pag. VIII-376 **§ —**
- Decorazione dei metalli** — *vedi* Metallocromia.
- Decorazioni del vetro** — *vedi* Specchi — Fotosmaltologia.
- Decorazioni e industrie artistiche**, dell'Architetto A. MELANI, 2 volumi, pag. XX-460, con 118 incisioni. . . . **§ —**
- Denti** — *vedi* Igiene della bocca.
- Destrina** — *vedi* Fecola.
- Determinanti e applicazioni**, di E. PASCAL, pag. VII-330 . **§ —**
- Diagnostica** — *vedi* Semeiotica.
- Dialetti italici.** Grammatica, iscrizione, versione e lessico, di O. NAZARI, pagine XVI-364 **§, —**
- Dialetti letterari greci** (epico, neo-ionico, dorico, eolico), del Prof. G. BONINO, pag. XXXII-214 **1 50**
- Didattica** per gli alunni delle Scuole normali e pei maestri elementari, del Prof. G. SOLI, pag. VIII-314 **1 50**
- Digesto (Il)**, del Prof. G. FERRINI, pag. IV-134 **1 50**
- Dilettanti di pittura** — *vedi* Pittura ad olio.
- Dinamica elementare**, di G. CATTANEO, p. VIII-146, 25 fig. **1 50**
- Dinamite** — *vedi* Esplosivi.
- Diritti e doveri dei cittadini**, secondo le Istituzioni dello Stato, per uso delle pubbliche Scuole, del Prof. D. MAFFIOLI, 10ª edizione, (dal 26 al 30º migliaio) con una appendice sul Codice penale, pag. XVI-229 **1 50**
- Diritti d'Autore** — *vedi* Leggi sul.
- Diritto amministrativo**, giusta i programmi governativi ad uso d. Istituti tecnici, di G. LORIS, 5ª ed. pag. XX-474 **§ —**
- Diritto civile** (Compendio di), del Prof. G. LORIS, giusta i programmi governativi ad uso degli Istituti tecnici, 2ª ediz. riveduta, corretta ed ampliata, pag. XVI-385. **§ —**
- Diritto civile italiano**, di C. ALBICINI, p. VIII-128 **1 50**
- Diritto commerciale italiano**, del Prof. E. VIDARI, 2ª edizione diligentemente riveduta, pag. X-448 **§ —**
- Diritto comunale e provinciale** — *vedi* Contabilità comunale — Diritto amministrativo — Legge comunale.
- Diritto costituzionale**, di F. P. CONTUZZI, 3ª ed. (in lavoro).
- Diritto ecclesiastico**, vigente in Italia. 2ª ediz. riveduta ed ampliata di G. OLMO, pag. XVI-483 **§ —**

	L. c.
Diritto internazionale privato , dell'Avv. Prof. F. P. CON- TUZZI, pagine XVI-322	3 —
Diritto internazionale pubblico , dell'Avv. Prof. F. P. CON- TUZZI, pagine XII-320	3 —
Diritto penale , dell'Avv. A. STOPPATO, 2ª ediz., (in lavoro)	
Diritto penale romano , di C. FERRINI, pag. VIII-360.	3 —
Diritto romano , di C. FERRINI, 2ª ediz. rif., pag. XVI-178	1 50
Disegnatore meccanico e nozioni tecniche generali di Arit- metica, Geometria, Algebra, Prospettiva, Resistenza dei materiali, Apparecchi idraulici, Macchine semplici ed a va- pore, Propulsori, ecc. per V. GOFFI, 3ª ed. riv., corretta e grandemente ampliata, pag. XIV-552, con 477 figure.	6 50
Disegno . I principi del Disegno, del Prof. C. BOTTO, 4ª edi- zione, pag. IV-206, con 61 silografie.	2 —
Disegno (Grammatica del). Metodo pratico per imparare il disegno, di E. RONCHETTI, di pag. VI-190, con 34 figure, 62 schizzi intercalati nel testo e un atlante a parte con 45 lavagnette, 27 foglietti e 34 tavole. (Indivisibili)	7 50
Disegno assonometrico , del Prof. P. PAOLONI, pag. IV-122, con 21 tavole e 23 figure nel testo	2 —
Disegno geometrico , del Prof. A. ANTILLI, 2ª ed., pag. VIII- 88, con 6 figure nel testo e 27 tavole litografiche	2 —
Disegno, teoria e costruzione delle navi , ad uso dei Pro- gettisti e Costruttori di Navi - Capi tecnici, Assistenti e Di- segnatori navali - Capi operai carpentieri - Alunni d'Istituti Nautici, di E. GIORLI, pag. VIII-238, con 310 incisioni	2 50
Disegno industriale , di E. GIORLI. Corso regolare di dise- gno geometrico e delle proiezioni. Degli sviluppi delle su- perfici dei solidi. Della costruzione dei principali organi delle macchine. Macchine utensili. 3ª ediz., pag. VIII-192, con 300 problemi risolti e 348 figure	2 50
Disegno di proiezioni ortogonali , del Prof. D. LANDI, di pagine VIII-152, con 192 incisioni	2 —
Disegno topografico , del Capitano G. BERTELLI, 2ª ediz., pagine. VI-137, con 12 tavole e 10 incisioni	2 —
Disinfezione (La pratica della) pubblica e privata per i Dot- tori P. E. ALESSANDRI e L. PIZZINI, 2ª edizione, pag. VIII- 258, con 29 incisioni	2 50
Distillazione del legno (Lavorazione dei prodotti della). Ace- tone, Alcool metilico, Aldeide formica, Cloroformio, Acido acetico, Acetato di piombo, Acetato di sodio. <i>Industrie elettrochimiche</i> . Ossidi di piombo, Minio, Biacca, Soda caustica, Clorati, Cromati, dell' Ing. F. VILLANI, di pagine XIV-312	3 50
Distillazione delle Vinacce, e delle frutta fermentate. Fabbricazione razionale del Cognac. Estrazione del Cremore di Tartaro ed utilizzazione di tutti i resi-	

	L. c.
dui della distillazione , di M. DA PONTE, 2ª edizione rifatta, contenenti le leggi italiane sugli spiriti e la legge Austro-Ungarica, pag. XII-375, con 68 incisioni	8 50
Ditteri italiani , di PAOLO LIOY (<i>Entomologia III</i>), pag. VII-356, con 227 incisioni	8 --
Dizionario alpino italiano . Parte 1ª: <i>Vette e valichi italiani</i> , dell'Ing. E. BIGNAMI-SORMANI. — Parte 2ª: <i>Valli lombarde e limitrofe alla Lombardia</i> , dell'Ing. C. SCOLARI, pag. XXII-310.	8 50
Dizionario di abbreviature latine ed italiane usate nelle carte e codici specialmente del Medio Evo , riprodotte con oltre 13000 segni incisi, aggiuntovi un prontuario di <i>Sigle Epigrafiche</i> . I monogrammi, la numerizzazione romana ed araba e i segni indicanti monete, pesi, misure, ecc., per cura di ADRIANO CAPPELLI, Archivist-Paleografo presso il R. Archivio di Stato in Milano, pagine LXII-433, con elegante legatura in cromo	7 50
Dizionario bibliografico , di C. ARLIA, pag. 100	1 50
Dizionario biografico Universale , del Professor Dottor G. GAROLLO. (In lavoro).	
Dizionario dei comuni del Regno d'Italia , secondo il Censimento del 10 febbraio 1901, compilato da B. SANTI, 2ª ediz. (in lavoro).	
Dizionario Eritreo (Piccolo) Italiano-Arabo-Amarico , raccolta dei vocaboli più usuali nelle principali lingue parlate nella Colonia Eritrea, di A. ALLORI, pag. XXXIII-203	2 50
Dizionario filatelico , per il raccoglitore di francobolli con introduzione storica e bibliografica, di J. GELLI, 2ª ediz., con Appendice 1898-99, pag. LXIII-464	4 50
Dizionario fotografico per dilettanti e professionisti, con oltre 1500 voci in 4 lingue, 500 sinonimi e 600 formule di L. GIOPPI, pag. VIII-600, 95 incisioni e 10 tavole	7 50
Dizionario geografico universale , del Prof. Dott. G. GAROLLO, 4ª edizione del tutto rifatta e molto ampliata, di pagine XII-1451 a due colonne	10 --
Dizionario gotico — <i>vedi</i> Lingua gotica.	
Dizionario italiano-olandese e olandese-italiano , di A. NUYENS, in-16, di pag. XI-948.	8 --
Dizionario milanese-italiano e repertorio italiano-milanese , di CLETTO ARRIGHI, pag. 912, a 2 colonne, 2ª ediz.	8 50
Dizionario Numismatico — <i>vedi</i> Vocabolario numismatico.	
Dizionario rumeno — <i>vedi</i> Grammatica rumena.	
Dizionario stenografico . Sigle e abbreviature del sistema Gabelsberger-Noe, di A. SCHIAVENATO, pag. XVI-156	1 50
Dizionario tascabile (Nuovo) italiano-tedesco e tedesco-italiano , compilato sui migliori vocabolari moderni, coll'accentuazione per la pronuncia dell'italiano, di A. FIORI, 3ª edizione, pag. 798, rifatta dal Prof. G. CATTANEO	8 50

- Dizionario tecnico** in quattro lingue dell'Ing. E. WEBBER,
4 volumi:
- I. Italiano-Tedesco-Francese-Inglese, 2ª ediz. riveduta e aumentata di circa 2000 termini tecnici, pag. XII-553 . . . 6 —
- II. Deutsch - Italienisch - Französisch - Englisch, 2ª ediz. riveduta ed aum. di circa 2000 termini tecnici, di p. VIII-611 6 —
- III. Français-Italien-Allemand-Anglais, pag. 509 4 —
- IV. Englisch-Italian-German-French, pag. 659. 6 —
- Dizionario tecnico-navale e commerciale marittimo inglese-italiano.**
— *Vedi* Avarie e sinistri marittimi.
- Dizionario turco** — *vedi* Grammatica turca.
- Dizionario universale delle lingue italiana, tedesca inglese e francese**, disposte in unico alfabeto, 1 volume di pag. 1200 a 2 colonne 8 —
- Dogane** — *vedi* Codice doganale — Trasporti e tariffe.
- Doratura** — *vedi* Galvanizzaz. — Galvanostegia — Metallocromia.
- Dottrina popolare**, in 4 lingue, (Italiana, Francese, Inglese e Tedesca). Motti popolari, frasi commerciali e proverbi, raccolti da G. SESSA, 2ª edizione, pag. IV-112 2 —
- Doveri del macchinista navale**, e condotta della macchina a vapore marina ad uso dei macchinisti navali e degli Istituti nautici, di M. LIGNAROLO, pag. XVI-303 2 50
- Drammi** — *vedi* Letteratura drammatica.
- Duellante** (Manuale del) in appendice al *Codice cavalleresco*, di J. GELLI, 2ª edizione, pag. VIII-256, con 26 tavole. . . 2 50
- Ebanista** — *vedi* Falegname — Modellatore mecc. — Operaio.
- Educazione dei bambini** — *vedi* Ortofrenia — Sordomuti.
- Economia matematica** (Introduzione alla), dei Prof. F. VIRGILII e C. GARIBALDI, pag. XII-210, con 19 incisioni . . 1 50
- Economia politica**, del Prof. W. S. JEVONS, traduzione del Prof. L. COSSA, 5ª ediz. riveduta, pag. XV-180 1 50
- Edilizia** — *vedi* Fabbric. civili — Ingegneria civ. — Ingegn. leg.
- Elasticità dei corpi** — *vedi* Equilibrio.
- Elettricista**. — *vedi* Operaio elettricista.
- Elettricità**, del Prof. FLEEMING JENKIN, traduz. del Prof. R. FERRINI, 3ª ediz. rived., pag. XII-237, con 40 incisioni . 1 50
- Elettricità medica**, Elettroterapia, Raggi Röntgen, Radioterapia, Fototerapia, Ozono, Elettrodiagnostica di A. D. BOC-CIARDO, di pag. x-201, con 54 incisioni e 9 tavole . . 2 50
— *vedi* Luce e salute — Röntgen (Raggi).
- Elettrochimica** (Prime nozioni elementari di), del Professor A. COSSA, pagine VIII-104, con 10 incisioni 1 50
— *vedi* Distillazione del legno.
- Elettrotecnica** (Manuale di), di GRAWINKEL-STRECKER, traduzione italiana dell'Ing. F. DESSY, nuova ediz. in lavoro.
— *vedi* Operaio elettrotecnico.

- Elezioni politiche** — *vedi* Legge elettorale politicā.
- Ematologia** — *vedi* Malattie del sangue.
- Embriologia e morfologia generale**, del Prof. G. CATTANEO, pag. X-242, con 71 incisioni 1 50
- Enciclopedia del giurista** — *vedi* Codici e leggi usuali d'Italia.
- Enciclopedia Hoepli** (Piccola), in 2 grossi vol. di 3375 pag. di 2 colonne per ogni pag., con Appendice (146740 voci) 20 —
- Energia fisica**, del Prof. R. FERRINI, pag. VIII-187, con 47 incisioni. 2ª edizione interamente rifatta 1 50
- Enimmistica**. Guida per comporre e per spiegare Enimmi, Sciarade, Anagrammi, Logogrifi, Rebus, ecc., di D. TOLOSANI (Bajardo), pag. XII-516, con 29 illustr. e molti esempi 6 50
- Enologia**, precetti ad uso degli enologi italiani, del Professor O. OTTAVI, 5ª edizione interamente rifatta da A. STRUCCHI, con una Appendice sul metodo della Botte unitaria per calcoli relativi alle botti circolari, dell'Ing. agr. R. BASSI, pag. XVI-289, con 42 incisioni 2 50
- Enologia domestica**, di R. SERNAGIOTTO, pag. VIII-233 2 —
- Entomologia** di A. GRIFFINI E P. LLOY, 4 volumi (*vedi* Coleotteri — Ditteri — Lepidotteri — Imenotteri).
- Epigrafia latina**. Trattato elementare con esercizi pratici e facsimili, con 65 tav. del Prof. S. RICCI, pag. XXXII-448 6 50
— *vedi* Dizionario di abbreviature latine.
- Epilessia**, Etiologia, Patogenesi, Cura, Dr. P. PINI, p. X-277 2 50
- Equilibrio dei corpi elastici** (Teoria matematica dello), di R. MARCOLONGO, di pag. XIV-366 3 —
- Eritrea (L')** dalle sue origini a tutto l'anno 1901. Appunti cronistorici con annessi 1 carta ed 1 schizzo, un'appendice di note geografiche e statistiche e di cenni sul Benadir e sui viaggi d'esploraz. di B. MELLI, di pag. XII-164 2 —
- Eritrea** — *vedi* Arabo parlato — Dizionario eritreo, — Grammatica galla — Lingue d'Africa — Prodotti del Tropico — Tigre.
- Errori e pregiudizi volgari**, confutati colla scorta della scienza e del raziocinio da G. STRAFFORELLO, 2ª edizione accresciuta, pag. XII-196 1 50
- Esame degli infermi** — *vedi* Semeiotica.
- Esattore comunale** (Manuale dell'), ad uso anche dei Ricevitori provinciali, Messi esattoriali, Agenti imposte, ecc., del Rag. R. MAINARDI, 2ª ediz. rived. e ampl., pag. XVI-480 5 50
- Esercizi geografici e quesiti, sull'Atlante geografico universale di R. Kiepert**, di L. HUGUES, 3ª ediz. rifatta di pagine VIII-208 1 50
- Esercizi sulla geometria elementare**, del Prof. S. PINCHERLE, pag. VIII-130, con 50 incisioni 1 50
- Esercizi sintattici francesi**, con oltre cento tracce di componimento, numerosi temi di ricapitolazione e un indice alfabetico delle parole e delle regole, di D. RODARI, di pag. XII-403 3 —

- Esercizi greci**, per la 4^a classe ginnasiale in correlazione alle *Nozioni elemen. di lingua greca*, del Prof. V. INAMA: del Prof. A. V. BISCONTI, 2^a ediz. rifatta, di p. XXVI-284 . 3 —
- Esercizi latini con regole** (Morfologia generale), del Prof. P. E. CERETI, pag. XII-332. 1 50
- Esercizi di stenografia** — *vedi* Stenografia.
- Esercizi di traduzione a complemento della grammatica francese**, del Prof. G. PRAT, 2^a edizione, pag. VI-188 . . 1 50
- Esercizi di traduzione con vocabolario a complemento della Grammatica** di G. ADLER, 3^a ed., p. VIII-244 1 50
- Esercizi ed applicazione di trigonometria piana**, con 400 esercizi e problemi proposti dal Prof. C. ALASIA, pag. XVI-292, con 50 incisioni 1 50
- Esplosiventi e modo di fabbricarli**, di R. MOLINA, p. XX-300 2 50
- Espropriazione** — *vedi* Ingegneria legale.
- Espropriazioni per causa di pubblica utilità**, di ERNESTO SARDI, di pag. VII-212-83 con 5 incis. e 2 tavole col. 3 —
- Essenze** — *vedi* Profumiere — Liquorista — Ricettario ind.
- Estetica**, del prof. M. PILO. Nuova edizione in lavoro.
- Estimo dei terreni**. Garanzia dei prestiti ipotecari e della equa ripartizione dei terreni, dell'Ing. P. FILIPPINI, pag. XVI-328, con 3 incisioni. 3 —
- Estimo rurale**, del Prof. CAREGA DI MURICCE, pag. VI-164. 2 —
- Etica**, (Elementi di) del Prof. G. VIDARI, di pag. XVI-334. 3 —
- Etnografia**, di B. MALFATTI, 2^a ediz. inter. rifusa, p. VI-200. 1 50
- Euclide** (L') emendato del P. G. SACCHERI, traduzione e note di G. BOCCARDINI di pag. XXIV-126 con 55 inc. . 1 50
- Evoluzione** (Storia dell'), del Prof. CARLO FENIZIA, con breve saggio di Bibliografia evolucionistica, pag. XIV-389 . . 3 —
- Fabbricati civili di abitazione**, dell'Ing. C. LEVI, 2^a ediz. rifatta, con 207 incis., e i Capitolati d'onori approvati dalle principali città d'Italia, pag. XVI-412 4 50
- Fabbricati rurali** (Costruzione ed economia dei), di V. NICCOLI, di pag. XVI-335, con 125 figure 3 50
- Fabbro** — v. Aritmetica dell'operaio — Fonditore — Meccanico — Operaio — Tornitore.
- Fabbro-ferraio** (Manuale pratico del), di G. BELLUOMINI, opera necessaria ed indispensabile ai fabbri fucinatori, agli aggiustatori meccanici, armajuoli, carrozzieri, carradori, calderai, ed a tutti quelli che si occupano di lavori in ferro ed in acciaio, di pag. VIII-242, con 224 incisioni . 2 50
- Falegname ed ebanista**. Natura dei legnami, maniera di conservarli, prepararli, colorirli e verniciarli, loro cubatura, di G. BELLUOMINI, 3^a ed. di pag. X-223, con 104 incisioni . 2 —
- Fallimenti** (*Vedi* Curatore di).

- Fanciulli** — (idioti, imbecilli, tardivi, ecc.) v. Ortofrenia.
- Farfalle** — *vedi* Lepidotteri.
- Farmacista** (Manuale del), del Prof. P. E. ALESSANDRI, 3ª edizione interamente rifatta e aumentata, corredata di tutti i nuovi medicamenti in uso nella terapeutica, loro proprietà, caratteri, usi, dosi, ecc., (in lavoro).
- Farmacoterapia e formulario**, del Dott. P. PICCININI, di pag. VIII-382 3 50
- Fecola** (La), sua fabbricazione e sua trasformazione in Destrina, Glucosio, Sagou, e Tapioca artificiali. Amido di Maïs, di Riso e di Grano. Nozioni generali sulla sua fabbricazione. Appendice: Sulla coltura del Lupino, di N. ADUCCI, di pag. XVI-285, con 41 inc. intercalate nel testo 3 50
- Ferrovie** — *vedi* Macchin. e Fuochista. — Trasporti e tariffe.
- Filatella** — *vedi* Dizionario filatelico.
- Filatura** (La) del cotone. Manuale teorico-pratico di G. BELTRAMI, di pag. XV-558, con 196 inc. e 24 tabelle . 6 50
- Filologia classica, greca e latina**, del Prof. V. INAMA, di pag. XII-195 1 50
- Filonauta**. Quadro generale di navigazione da diporto e consigli ai principianti, con un Vocabolario tecnico più in uso nel panfilamento, del Cap. G. OLIVARI, pag. XVI-286 . . 2 50
- Filosofia morale**, del Prof. L. FRISO, 2ª edizione riveduta ed aumentata, di pag. XVI-350 3 —
- Fillossera** e le principali malattie crittogamiche della vite con speciale riguardo ai mezzi di difesa, del Dott. V. PEGLION, pag. VIII-302, con 39 incisioni 3 —
- Fiori** — *vedi* Floricoltura. Garofano, Orticoltura, Piante e fiori. Rose.
- Fiori artificiali**, Manuale del fiorista, di O. BALLERINI, pag. XVI-278, con 144 incisioni, e 1 tav. a 36 colori . . . 3 50
— *vedi anche* Pomologia artificiale.
- Fisica**, del Prof. O. MURANI, 7ª edizione, accresciuta e riveduta dall'autore di pag. XVI-584 con 340 incisioni . . . 3 —
- Fisica cristallografica**. Le proprietà fisiche fondamentali dei cristalli, di W. VOIGT, trad. A. SELLA, di p. VIII-392, con 52 incisioni 3 —
- Fisiologia**, di FOSTER, traduzione del Prof. G. ALBINI, 4ª edizione, pag. VII-223, con 35 incisioni e 2 tavole . . . 1 50
- Fisiologia comparata** — *vedi* Anatomia.
- Fisiologia vegetale**, del Dott. LUIGI MONTEMARTINI, pag. XVI-230, con 68 incisioni 1 50
- Floricoltura** (Manuale di), di C. M. Fratelli RODA, 3ª ed. riveduta ed ampliata da G. RODA, pag. VIII-262, con 98 inc. 2 50
- Flotte moderne** (Le) 1896-1900, di E. BUCCI DI SANTAFLORA. Complem. del Man. del Marino, di C. DE AMEZAGA, p. IV-204 5 —

	L. c.
Fognatura cittadina , dell'Ing. D. SPATARO, pag. X-684, con 220 figure e 1 tavola in litografia	7 —
Fognatura domestica , dell'Ing. A. CERUTTI, pag. VIII-421, con 200 incisioni	4 —
Fonditore in tutti i metalli (Manuale del), di G. BELLUOMINI, 2ª edizione, pag. VIII-150, con 41 incisioni	2 —
Fonologia italiana , di L. STOPPATO, pag. VIII-102.	1 50
Fonologia latina , del Prof. S. CONSOLI, pag. 208	1 50
Foreste — <i>vedi</i> Ingegneria legale — Selvicoltura.	
Formaglie — <i>vedi</i> Caseificio — Latte, burro e cacao.	
Formole e tavole per il calcolo delle risvolte ad arco circolare , adattate alla divisione centesimale ad uso degli ingegneri, di F. BORLETTI, di p. XII-69, legato	2 50
Formulario scolastico di matematica elementare (aritmetica, algebra, geometria, trigonometria), di M. A. ROSSOTTI, di pag. XVI-192	1 50
Fosfati, perfosfati e concimi fosfatici . Fabbricazione ed analisi del Prof. A. MINOZZI, di pag. XII-301 con 48 inc.	3 50
Fotocalchi — <i>vedi</i> Arti grafiche — Chimica fotografica — Fotografia industriale — Processi fotomeccanici.	
Fotocolografia — <i>vedi</i> Processi fotomeccanici.	
Fotocromatografia (La), del Dott. L. SASSI, pag. XXI-138, con 19 incisioni	2 —
Fotografia industriale (La), fotocalchi economici per la riproduzione di disegni, piani, carte, musica, negative fotografiche, ecc., del Dott. LUIGI GIOPPI, pag. VIII-208, con 12 incisioni e 5 tavole fuori testo.	2 50
Fotografia ortocromatica , del Dott. C. BONACINI, pagine XVI-277, con incisioni e 5 tavole	3 50
Fotografia pei dilettanti . (Come dipinge il sole), di G. MUFFONE, 6ª edizione rifatta ed ampliata, in lavoro.	
Fotogrammetria , Fototopografia praticata in Italia e applicazione della fotogrammetria all'idrografia, dell'Ing. P. PAGANINI, pag. XVI-288, con 56 figure e 4 tavole.	3 50
Fotolitografia — <i>vedi</i> Arti grafiche — Processi fotomecc.	
Fotosmaltografia (La), applicata alla decorazione industriale delle ceramiche e dei vetri, di A. MONTAGNA, pag. VIII-200, con 16 incisioni nel testo	2 —
Fototerapia e radioterapia — <i>vedi</i> Luce e salute.	
Fototipografia — <i>vedi</i> Arti grafiche — Processi fotomecc.	
Fragole <i>vedi</i> Frutta minori.	
Francia — <i>vedi</i> Storia della Francia.	
Francobolli — <i>vedi</i> Dizionario filatelico.	
Fraseologia francese-italiana , di E. BAROSCHI SORESINI, pag. VIII-262	2 50
Fraseologia italiana-tedesca — <i>vedi</i> Conversazione — Dottrina popolare.	
Frenastenia — <i>vedi</i> Ortofrenia.	

	L. c.
Frumento (II) , (come si coltiva o si dovrebbe coltivare in Italia) di E. AZIMONTI, 2 ^a edizione di pagine XVI-276	2 50
Frutta minori . Fragole, poponi, ribes, uva spina e lamponi, del Prof. A. PUCCI, pag. VIII-193, con 96 incisioni	2 50
Frutta fermentate — <i>vedi</i> Distillazione	
Frutticoltura , del Prof. Dott. D. TAMARO, 4 ^a edizione, riveduta ed ampliata di pag. XVIII-233, con 113 incisioni intercalate nel testo e 7 tavole sinottiche	2 50
Frutti artificiali — <i>vedi</i> Pomologia artificiale.	
Fulmini e parafulmini , del Dott. Prof. CANESTRINI, pag. VIII-166, con 6 incisioni	2 —
Funghi mangerecci e funghi velenosi , del Dott. F. CAVARA, di pag. XVI-192, con 43 tavole e 11 incisioni	4 50
Funzioni analitiche (Teoria delle), di G. VIVANTI, pagine VIII-432 (volume doppio)	3 —
Funzioni ellittiche , del Prof. E. PASCAL, pag. 240	1 50
Fuochista — <i>vedi</i> Macchinista e fuochista.	
Fuochi artificiali — <i>vedi</i> — Esplosivi — Pirotecnia.	
Furetto (II) . Allevamento razionale, Ammaestramento, Utilizzazione per la caccia, Malattie, di G. LICCIARDELLI, di pag. XII-172, con 39 incisioni	2 —
Gallinacci — <i>vedi</i> Animali da cortile — Colombi — Pollicoltura.	
Galvanizzazione, pulitura e verniciatura dei metalli e galvanoplastica in generale . Manuale pratico per l'industriale e l'operaio riguardante la nichelatura, ramatura, doratura, argentatura, stagnatura, acciaiatura, galvanoplastica in rame, argento, oro, ecc., in tutte le varie applicaz. pratiche, di F. WERTH, di p. XVI-324, con 153 inc.	3 50
Galvanoplastica ed altre applicazioni dell'elettrolisi. Galvanostegia, Elettrometallurgia, Affinatura dei metalli, Preparazione dell'alluminio, Sbianchimento della carta e delle stoffe, Risanamento delle acque, Concia elettrica delle pelli, ecc., del Prof. R. FERRINI, 3 ^a edizione, completamente rifatta, pag. XII-417, con 45 incisioni	4 —
Galvanostegia , dell'Ing. I. GHERSI. Nichelatura, argentatura, doratura, ramatura, metallizzazione, ecc. pag. XII-324, con 4 incisioni	3 50
Garofano (II) , (Dianthus) nelle sue varietà, coltura e propagazione di G. GIRARDI, con appendice di A. NORIM, di pagine VI-179, con 98 inc. e 2 tavole colorate	2 50
Gastronomo (II) moderno , di E. BORGARELLO. Vademecum ad uso degli albergatori, cuochi, segretari e personale d'albergo corredato da 250 Menus originali e moderni e da un dizionario di cucina contenente oltre 4000 termini fra i più in uso nel gergo di cucina francese, di pag. VI-411.	3 50
Gaz illuminante (Industria del), di V. CALZAVARA, pag. XXXII-672, con 375 incisioni e 216 tabelle	7 50
— <i>vedi</i> Incandescenza a gaz.	

	L. c.
Gelsicoltura , del Prof. D. TAMARO, pag. XVI-175 e 22 inc.	2 —
Geografia , di G. GROVE, traduzione del Prof. G. GALLETTI, 2 ^a edizione riveduta, pag. XII-160, con 26 incisioni . . .	1 50
Geografia classica , di H. F. TOZER, traduzione e note del Prof. I. GENTILE, 5 ^a edizione, pag. IV-168	1 50
Geografia commerciale economica. Europa, Asia, Oceania, Africa, America , di P. LANZONI, 2 ^a edizione, di pag. VII-370	3 —
Geografia fisica , di A. GEIKIE, traduzione di A. STOPPANI, 3 ^a edizione, pag. IV-132, con 20 incisioni	1 50
Geologia , di A. GEIKIE, traduzione di A. STOPPANI, quarta edizione, riveduta sull'ultima edizione inglese da G. MERCALLI, pag. XII-176, con 47 incisioni	1 50
Geometria analitica dello spazio , del Prof. F. ASCHIERI, pag. VI-196, con 11 incisioni.	1 50
Geometria analitica del piano , del Prof. F. ASCHIERI, di pag. VI-194, con 12 incisioni	1 50
Geometria descrittiva , del Prof. ASCHIERI, pag. VI-222, con 103 incisioni, 2 ^a edizione rifatta.	1 50
Geometria elementare, (Complementi di) del Prof. A. ALASIA, di pag. xv-244 con 117 figure	1 50
Geometria e trigonometria della sfera , del Prof. C. ALASIA, pag. VIII-208, con 34 incisioni	1 50
Geometria metrica e trigonometria , del Prof. S. PINCHERLE, 6 ^a edizione, pag. IV-158, con 47 incisioni. . .	1 50
— <i>vedi anche</i> Esercizi di Trigonometria.	
Geometria pratica , dell'Ing. Prof. G. EREDE, 3 ^a edizione riveduta ed aumentata, pag. XII-258, con 134 incis. . . .	2 —
Geometria proiettiva del piano e della stella , del Prof. F. ASCHIERI, 2 ^a edizione, pag. VI-223, con 86 incisioni. . .	1 50
Geometria proiettiva dello spazio , del Prof. F. ASCHIERI, 2 ^a edizione rifatta, pag. VI-264, con 16 incisioni	1 50
Geometria pura elementare , del Prof. S. PINCHERLE, 6 ^a edizione, con l'aggiunta delle figure sferiche, pag. VIII-176, con 121 incisioni	1 50
— <i>vedi</i> Esercizi di Geometria — Problemi di Geometria	
Ghiaccio — <i>vedi</i> Industria frigorifera.	
Giardino (II) infantile , di P. CONTI, pag. IV-213, 27 tav.	3 —
Ginnastica (Storia della), di F. VALLETTI, pag. VIII-181 . .	1 50
Ginnastica femminile , di F. VALLETTI, pag. VI-112, 67 ill.	2 —
Ginnastica maschile (Manuale di), per cura di J. GELLI, pag. VIII-108, con 216 incisioni	2 —
— <i>vedi anche</i> Ginocchi ginnastici.	
Gioielleria, orficeria, oro, argento e platino , di E. BSELLI, pag. 336, con 125 incisioni. (Esaurito, è in preparazione la 2 ^a ediz.).	
— <i>vedi anche</i> Metallurgia dell'oro — Metalli preziosi — Pietre preziose.	

	L. e
Giuochi ginnastici per la gioventù delle Scuole e del polo , di F. GABRIELLI, pag. XX-218, con 24 tavole . . .	2 50
Gioco (II) del pallone e gli altri affini. Giuoco del calcio (Foot-Ball), della palla a corda (Lawn-Tennis), della palla al muro (Pelota), della palla a maglio e dello sfratto, di G. FRANCESCHI, di pag. VIII-214, con 34 incisioni . . .	2 50
Giurato , (Manuale per il) del D. ^r A. SETTI. 2 ^a edizione rifatta, di pag. XIV-246 . . .	2 50
Giustizia amministrativa. Principi fondamentali, Competenze dei Tribunali ordinari, Competenza della IV Sezione del Consiglio di Stato e delle Giunte provinciali amministrative e relativa procedura, di C. VITTA, p. XII-427 . . .	4 —
Glottologia , del Prof. G. DE GREGORIO, pag. XXXII-318 . . .	8 —
Glucosio — <i>vedi</i> Fecola - Zucchero.	
Gnomonica ossia l'arte di costruire orologi solari , lezioni popolari di B. M. LA LETTA, pag. VIII-160, con 19 figure. . .	2 —
Gomma elastica — <i>vedi</i> Imitazioni.	
Grafologia , di C. LOMBROSO, pag. v-245 e 470 fac-simili. . .	3 50
Grammatica albanese con le poesie rare di Variboba , del Prof. V. LIBRANDI, pag. XVI-200 . . .	3 —
Grammatica araba — <i>vedi</i> Arabo parlato.	
Grammatica araldica — <i>vedi</i> Araldica — Vocabolario araldico.	
Grammatica ed esercizi pratici della lingua danese-norvegiana con un supplemento contenente le principali espressioni tecnico-nautiche ad uso degli ufficiali di marina di G. FRISONI, pag. XX-488 . . .	4 50
Grammatica ed esercizi pratici della lingua ebraica , del Prof. I. LEVI fu ISACCO, pag. 192 . . .	1 50
Grammatica francese , del Prof. G. PRAT, seconda edizione riveduta, pag. XII-299 . . .	1 50
Grammatica e dizionario della lingua dei Galla (onomica) , del Prof. E. VITERBO: Vol. I. Galla-Italiano, pag. VIII-152 . . .	2 50
Vol. II. Italiano-Galla, pag. LXIV-106 . . .	2 50
Grammatica gotica — <i>vedi</i> Lingua gotica.	
Grammatica greca. (Nozioni elementari di lingua greca), del Prof. INAMA. 2 ^a edizione, pag. XVI-208 . . .	1 50
Grammatica della lingua greca moderna , del Prof. R. LOVERA, pag. VI-154 . . .	1 50
Grammatica inglese , del Prof. L. PAVIA, seconda edizione, di pag. XII-262 . . .	1 50
Grammatica italiana , del Prof. T. CONCARI, 2 ^a edizione riveduta, pag. XVI-230 . . .	1 50
Grammatica latina , L. VALMAGGI, 2 ^a ediz., pag. VIII-256 . . .	1 50
Grammatica della lingua olandese , M. MORGANA, p. VIII-124 . . .	3 —
Grammatica ed esercizi pratici della lingua portoghese-brasiliana , del Prof. G. FRISONI, pag. XII-267 . . .	3 —

	L. c.
Grammatica e vocabolario della lingua rumena , del Prof. R. LOVERA, pag. VIII-200.	1 50
Grammatica russa , del Prof. VOINOVICH, pag. X-272.	3 —
Grammatica sanscrita — <i>vedi</i> Sanscrito.	
Grammatica della lingua slovena . Esercizi e vocabolario del Prof. BRUNO GUYON, pag. XVI-314.	3 —
Grammatica spagnuola , del Prof. PAVIA, 2ª edizione riveduta dall'autore, di pag. XII-194.	1 50
Grammatica della lingua svedese , di E. PAROLI, p. XV-293	3 —
Grammatica tedesca , del Prof. PAVIA, 2ª ed., di p. XVIII-272	1 50
Grammatica del Tigrè — <i>vedi</i> Tigrè italiano.	
Grammatica turca osmanli , con paradigmi, crestomazia, e glossario, di L. BONELLI, pag. VIII-200 e 5 tavole	3 —
Grandine — <i>vedi</i> Assicurazioni.	
Granturco — <i>vedi</i> Frumento e mais — Industria dei molini.	
Gravitazione . Spiegazione elementare delle principali perturbazioni nel sistema solare, di Sir G. B. AIRY, traduzione di F. PORRO, con 50 incisioni, pag. XXII-176	1 50
Greca antica — <i>vedi</i> Archeologia (Arte greca) — Mitologia greca — Monete greche — Storia antica.	
Gruppi continui di trasformazioni (Parte generale della teoria), di E. PASCAL, di pag. XI-378	3 —
Guida numismatica universale , contenente 6278 indirizzi e cenni storico-statistici di collezioni pubbliche e private, di numismatici, di società e riviste numismatiche, di incisioni, di monete e medaglie e di negozianti di monete e libri di numismatica, di F. GNECCHI. Quarta ediz., di pag. XV-612	3 —
Guida teorico-pratica pei Sindaci, Segretari comunali e provinciale e delle opere pie, del Dott. E. MARIANI (In lavoro).	
Guttaperca — <i>vedi</i> Imitazioni.	
Humus (L') , la fertilità e l'igiene dei terreni culturali, del Prof. A. CASALI, pag. XVI-210	2 —
Idraulica , T. PERDONI, pag. XXVIII-392 con 301 fig. e 3 tav.	6 50
Idrografia — <i>vedi</i> Fotogrammetria.	
Idroterapia , di G. GIBELLI, pag. IV-238, con 30 incis.	2 —
— <i>vedi anche</i> Acque minerali e termali del Regno d'Italia.	
Igiene dell'alimentazione — <i>vedi</i> Bromatologia.	
Igiene della Bocca e dei Denti , nozioni elementari di Odontologia, di L. COULLIAUX, di pag. XVI-330, e 23 inc.	2 50
Igiene del lavoro , di TRAMBUSTI A. e SANARELLI, pagine VIII-262, con 70 incisioni.	2 50
Igiene della pelle , di A. BELLINI, pag. XVI-240, 7 incis.	2 —
Igiene privata e medicina popolare ad uso delle famiglie, di C. BOCK, 2ª edizione italiana curata dal Dott. GIOV. GALLI, pag. XVI-272	2 50
Igiene rurale , di A. CARRAROLI, pagine X-470	3 —
Igiene scolastica , di A. REPOSSI 2ª ediz., pag. IV-246.	2 —
Igiene veterinaria , del Dott. U. BARPI, pag. VIII-228	2 —

	L. c.
Igiene della vista sotto il rispetto scolastico , del Dott. A. LOMONACO pag. XII-272.	2 50
Igiene della vita pubblica e privata , G. FARALLI, p. XII-250	2 50
Igroscofi, igrometri, umidità atmosferica , del Prof. P. CANTONI, pag. XII-142, con 24 incisioni e 7 tabelle . . .	1 50
Illuminazione — <i>vedi</i> Acetilene — Gaz. illum. — Incandescenza.	
Illuminazione elettrica (Impianti di), Manuale pratico dell'Ing. E. PIAZZOLI, 5ª ediz. interamente rifatta, (9-11 migliaio) seguita da un'appendice contenente la legislazione Italiana relativa agli impianti elettrici, di pag. 606, con 264 incisioni, 90 tabelle e 2 tavole	1 50
Imbalsamatore — <i>vedi</i> Naturalista preparatore — Naturalista viaggiatore — Zoologia.	
Imbianchimento — <i>vedi</i> Industria tintoria.	
Imenotteri, Neurotteri, Pseudoneurotteri, Ortotteri e Rincoti italiani , del Dott. E. GRIFFINI (Entomologia IV), pag. XVI-687, con 243 incisioni	4 50
Imitazione di Cristo (Della), Libri quattro di GIO. GERSENIO, volgarizzamento di CESARE GUASTI, con proemio e note di G. M. ZAMPINI, pag. LVI-396	3 50
Imitazioni e succedanei nei grandi e piccoli prodotti industriali . Pietre e materiali da costruzione, Materiali refrattarii, Carborundum, Amianto, Pietre e metalli preziosi, Galvanoplastica. Cuoio, Linoleum, Seta e fibre tessili diverse, Paste da carta, Materie plastiche, Colle e gomme, Gomma elastica e Guttaperca, Avorio, Corno, Ambra, Madreperla, Celluloide, Viscoso, Cere e grassi, Materie concianti, Legno, Agglomerati di carbone, di segatura, di sughero, Polvere pirica, Caffè, Profumi, Vetriere, ecc., dell'Ing. I. GHERSI, di pag. XVI-591, con 90 incisioni	6 50
Immunità e resistenza alle malattie , di A. GALLI VALERIO, pag. VIII-218.	1 50
Impalcature — <i>vedi</i> Costruzioni.	
Impiego ipodermico e la dosatura dei rimedi , Manuale di terapeutica del Dott. G. MALACRIDA, pag. 305	3 —
Imposte dirette (Riscoss. delle), E. BRUNI, pag. VIII-158.	1 50
Incandescenza a gaz , (Fabbricazione delle reticelle) di L. CASTELLANI, pag. X-140, con 33 incisioni.	2 —
Inchiestri — <i>vedi</i> Ricettario industriale — Vernici ecc.	
Incisioni — <i>vedi</i> Amatore d'oggetti d'arte - Raccogl. ogg. minuti.	
Indovinelli — <i>vedi</i> Enigmistica.	
Industria (L') frigorifera di P. ULIVI. Nozioni fondamentali, macchine frigorifere, raffreddamento dell'aria, ghiaccio artificiale e naturale, dati e calcoli numerici, nozioni di fisica e cenni sulla liquefazione dell'aria e dei gaz, di pagine XII-168, con 36 figure e 16 tabelle	2 —
Industria tintoria , di M. PRATO. I. — Imbianchimento e Tintura della Paglia; II. - Sgrassatura e imbianchimento della Lana; III. — Tintura e stampa del Cotone in Indaco;	

	L. c.
IV. - Tintura e Stampa del Cotone in colori azoici. 1904, di pag. XXI-292, con 7 incisioni	3 —
Industrie elettrochimiche — <i>vedi</i> Distillazione del legno.	
Industrie (Piccole). Scuole e musei industriali - Industrie agricole e rurali - Industrie manifatturiere ed artistiche, di I. GHERSI, di pag. XII-372	3 50
Infanzia — <i>vedi</i> Terapia delle malattie dell' — Giardino infantile — Nutrizione — Ortofrenia — Sordomuto.	
Infezione — <i>vedi</i> Disinfezione — Medicatura antisettica.	
Infortunii sul lavoro — <i>vedi</i> Legge sugli.	
Infortunii della montagna (Gli). Manuale pratico degli Alpinisti, delle guide e dei portatori, del Dott. O. BERNHARD, traduzione con aggiunte del Dott. R. CURTI, di pag. XVIII-60, con 65 tav. e 175 figure dimostrative	3 50
Infortuni sul lavoro , (Mezzi tecnici per prevenirli) di E. MAGRINI, di pag. XXXII-252, con 257 incisioni	3 —
— <i>vedi anche</i> Leggi per gli.	
Ingegnere agronomo — <i>vedi</i> Agronomia — Prontuario dell'agric.	
Ingegnere civile . Manuale dell'ingegnere civile e industriale, di G. COLOMBO, 20 ^a ediz. modificata e aumentata, (52 ^o al 54 ^o migliaio), con 227 fig. e una tavola, pag. XIV-486	5 50
Il medesimo tradotto in francese da P. MARCILLAC	5 50
Ingegnere navale . Prontuario di A. CIGNONI, pag. XXXII-292, con 36 figure. Legato in pelle	5 50
Ingegnere rurale (Prontuario dell') — <i>Vedi</i> Agricoltore.	
Ingegneria legale — <i>vedi</i> Codice dell'ingegnere.	
Inghilterra — <i>vedi</i> Storia d'Inghilterra.	
Insegnamento (L') dell'italiano nelle Scuole Secondarie. Esposizione teorico-pratica con esempi, del Prof. C. TRABALZA, di pag. XVI-254	1 50
Insetti nocivi , del Prof. F. FRANCESCHINI, pag. VIII-264, con 96 incisioni	2 —
Insetti utili , del Prof. F. FRANCESCHINI, di pag. XII-160, con 43 incisioni e 1 tavola	2 —
Interesse e sconto , del Prof. E. GAGLIARDI, 2 ^a edizione rifatta e aumentata, pagine VIII-198	2 —
Inumazioni — <i>vedi</i> Morte vera.	
Ipnotismo — <i>vedi</i> Magnetismo — Spiritismo — Telepatia.	
Ipoteche (Man. per le), di A. RABBENO, pag. XVI-247	1 50
Islamismo (L') del Prof. I. PIZZI, di pag. VIII-494.	3 —
Ittologia italiana , del Dott. A. GRIFFINI, con 244 incis. Descriz. dei pesci di mare e d'acqua dolce, di p. XVIII-469	4 50
— <i>vedi anche</i> Piscicoltura — Ostricoltura.	
Lacche — <i>vedi</i> Vernici ecc.	
Latte, burro e cacio . Chimica analitica applicata al caseificio, del Prof. SARTORI, pag. X-162, con 24 incisioni	2 —
Lavori femminili — <i>vedi</i> Abiti per signora — Biancheria — Macchine da cucire — Monogrammi — Trine a fuselli.	
Lavori marittimi ed impianti portuali , di F. BASTIANI, di pag. XXIII-424, con 209 figure	6 50
Lavori pubblici — <i>vedi</i> Leggi sui lavori pubblici.	

	L. c.
Lavori in terra (Manuale di), dell'Ing. B. LEONI, pag. XI-305, con 38 incisioni	3 —
Lavoro (II) delle donne e dei fanciulli . Nuova legge e regolamento 19 giugno 1902 — 28 febbraio 1903. Testo atti parlamentari e commento, per cura dell'Avv. E. NOSEDA di pag. XV-174	1 50
Lawn-Tennis , di V. BADDELEY, prima traduzione italiana con note e aggiunte del trad., pag. XXX-206, con 13 illustr.	2 50
Legge (La nuova) comunale e provinciale , annotata da E. MAZZOCCOLO, 5 ^a edizione, interamente rifatta (in lavoro). — <i>vedi</i> Guida pei Sindaci, Segretari comunali, ecc.	
Legge (La) elettorale politica nelle sue fonti e nella sua giurisprudenza di C. MONTALCINI, di pag. XVI-496, . . .	5 50
Legge sui lavori pubblici e regolamenti , di L. FRANCHI, pag. IV-110-CXLVIII	1 50
Legge lavoro donne e fanciulli — <i>vedi</i> lavoro.	
Legge sull'ordinamento giudiziario , dell'Avv. L. FRANCHI, pag. IV-92-CXXVI	1 50
Leggende popolari di E. MUSATTI. 3 ^a ediz. di p. VIII-181	1 50
Leggi e convenzioni sul diritti d'autore — <i>vedi</i> Codici e leggi usuali d'Italia, vol. III.	
Leggi per gl'Infortunii sul lavoro , dell'Avv. A. SALVATORE, pag. 312	3 —
Leggi e convenzioni sulle privative industriali . Vedi Codici e Leggi usuali d'Italia vol. III.	
Leggi sulla sanità e sicurezza pubblica , di L. FRANCHI, pag. IV-108-XCII	1 50
Leggi sulle tasse di Registro e Bollo , con appendice, del Prof. L. FRANCHI, pag. IV-124-CII	1 50
Leggi usuali d'Italia . Vedi Codici e Leggi.	
Leghe metalliche ed amalgame , alluminio, nichelio, metalli preziosi e imitazione, bronzo, ottone, monete e medaglie, saldature, dell'Ing. I. GHERSI, p. XVI-431, con 15 inc.	4 —
Legislazione sulle acque di D. CAVALLERI, di pag. xv-274	2 50
Legislazione Mortuaria — <i>vedi</i> Morte.	
Legislazione sanitaria italiana , (La nuova) di E. NOSEDA. di pag. VIII-570	5 —
Legislazione rurale , secondo il programma governativo per gli Istituti Tecnici, dell'Avv. E. BRUNI, pag. XI-423 . . .	3 —
Legnami — <i>vedi</i> Cubatura dei legnami — Falegname.	
Legno artificiale — <i>vedi</i> Imitazioni.	
Legno (Lavorazione dei prodotti di distillazione del) — <i>vedi</i> Distillazione.	
Lepidotteri italiani , del Dott. A. GRIFFINI (Entomol. II), pag. XIII-248, con 149 incisioni	1 50
Letteratura albanese (Manuale di), del Prof. A. STRATICÒ, pag. XXIV-280	3 —

	L. c.
Letteratura americana , di G. STRAFFORELLO, pag. 158	1 50
Letteratura araba , del Prof. I. PIZZI di pag. XII-388	3 —
<i>— vedi anche</i> Islamismo.	
Letteratura assira , del Dott. B. TELONI di pag. xv-266 e tre tavole fuori testo	3 —
Letteratura catalana , del Prof. RESTORI. (In lavoro).	
Letteratura danese — <i>vedi</i> Letteratura norvegiana	
Letteratura drammatica , di C. LEVI, pag. XII-339.	3 —
Letteratura ebraica , di A. REVEL, 2 vol., pag. 364	3 —
Letteratura egiziana , di L. BRIGIUTI. (In lavoro).	
Letteratura francese , del Prof. E. MARCILLAC, traduz. di A. PAGANINI, 3 ^a edizione, pag. VIII-198	1 50
Letteratura greca , di V. INAMA, 14 ^a ediz. riveduta (dal 56° al 61° migliaio) pag. VIII-236 e una tavola.	1 50
Letteratura indiana , A. DE GUBERNATIS, pag. VIII-159	1 50
Letteratura inglese , di E. SOLAZZI, 2 ^a edizione, di pagine VIII-194	1 50
Letteratura italiana , del Prof. C. FENINI, dalle origini al 1748, 5 ^a edizione completamente rifatta dal Prof. V. FERRARI, pag. XVI-291	1 50
Letteratura italiana moderna , (1748-1870). Aggiunti 2 quadri sinottici della letteratura contemporanea (1870-1901) del Prof. V. FERRARI, pag. 290	1 50
Letteratura italiana moderna e contemporanea 1748-1903 , del Prof. V. FERRARI, seconda edizione rifatta e aumentata, di pag. VIII-429	3 —
Letteratura latina — <i>vedi</i> Letteratura romana	
Letteratura norvegiana , di S. CONSOLI, pag. XVI-272.	1 50
Letteratura persiana , del Prof. I. PIZZI, pag. X-208	1 50
Letteratura provenzale , di A. RESTORI, pag. X-220	1 50
Letteratura romana , del Prof. F. RAMORINO, 6 ^a edizione corretta (dal 23° al 27° migliaio), di pag. VIII-349	1 50
Letteratura spagnuola e portoghese , del Prof. L. CAPPELLETTI, 2 ^a edizione rif. da B. SANVISENTI (In lavoro).	
Letteratura tedesca , del Prof. O. LANGE, 3 ^a edizione rifatta dal Prof. MINUTTI, pag. XVI-188	1 50
Letteratura ungherese , di ZIGANY ARPÁD, pag. XII-295.	1 50
Letterature slave , del Prof. D. CIAMPOLI, 2 volumi:	
I. Bulgari, Serbo-Croati, Yugo-Russi, pag. IV-144.	1 50
II. Russi, Polacchi, Boemi, pag. IV-142	1 50
Lexicon Abbreviatarum quae in lapidibus, codicibus et chartis praesertim Medii-Aevi occurrunt — <i>vedi</i> Dizionario di abbreviat.	
Levatrice — <i>vedi</i> Ostetricia.	
Limoni <i>vedi</i> Agrumi.	
Lingua araba — <i>vedi</i> Arabo parlato — Dizionario eritreo — Grammatica Galla — Lingue dell'Africa — Tigrè.	
Lingua gotica , grammatica, esercizi, testi, vocabolario comparato con ispecial riguardo al tedesco, inglese, latino e greco, del Prof. S. FRIEDMANN, pag. XVI-333	3 —

	L. c.
Lingua greca — <i>vedi</i> Esercizi — Filologia — Florilegio — Grammatica — Letteratura — Morfologia — Dialetti — Verbi.	
Lingue dell'Africa , di R. CUST, versione italiana del Prof. A. DE GUBERNATIS, di pag. IV-110	1 50
Lingua latina <i>vedi</i> Dizionario di abbreviature latine — Epigraffa — Esercizi — Filologia classica — Fonologia — Grammatica — Letteratura romana — Metrica — Verbi.	
Lingue germaniche — <i>vedi</i> Grammatica danese-norvegiana inglese, olandese, tedesca, svedese.	
Lingua turca osmanli — <i>vedi</i> Grammatica.	
Lingue neo-latine , del Dott. E. GORRA, pag. 147.	1 50
Lingue straniere (Studio delle), di C. MARCEL, ossia l'arte di pensare in una lingua straniera, traduzione del Prof. DAMIANI, di pag. XVI-186	1 50
Linoileum — <i>vedi</i> Imitazioni.	
Liquidatore di sinistri marittimi — <i>vedi</i> Avarie e sinistri marittimi.	
Liquorista , (Manuale del) di A. ROSSI, con 1450 ricette pratiche. 2ª ediz. con modificazioni ed aggiunte a cura del Dr. A. CASTOLDI, di pag. XVI-682 con figure nel testo	6 50
Litografia , di C. DOYEN, di pag. VIII-261, con 8 tavole e 40 figure di attrezzi, ecc., occorrenti al litografo	4 —
Liuto — <i>vedi</i> Chitarra — Mandolinista — Strum. ad arco.	
Logaritmi (Tavole di), con 6 decimali, di O. MÜLLER, 6ª ediz., aumentata delle tavole dei logaritmi d'addizione e sottrazione per cura di M. RAINA, di pagine XXXVI-191. (11, 12, 13º migliaio)	1 50
Logica , di W. STANLEY JEVONS, traduz. del Prof. C. CANTONI, 5ª ediz. di pag. VIII-166, con 15 incisioni.	1 50
Logica matematica , del Prof. C. BURALI-FORTI, p. VI-158.	1 50
Logismografia , di C. CHIESA, 3ª ediz., pag. XIV-172	1 50
Logogrifi — <i>vedi</i> Enimmistica.	
Lotta — <i>vedi</i> Pugilato.	
Luce e colori , del Prof. G. BELLOTTI, pag. X-157, con 24 incisioni e 1 tavola	1 50
Luce e suono , di E. JONES, traduzione di U. FORNARI, di pag. VIII-336, con 121 incisioni.	8 —
Luce e salute. Fototerapia e radioterapia del Dott. A. BELLINI, di pag. XII-362, con 65 figure	3 50
Macchine (Atlante di) e di Caldaie, con testo e note di Tecnologia, di pag. xv-80, con 112 tavole e 170 figure in iscala ridotta	8 —
Macchine a vapore , (Manuale del costruttore di), di H. HAEDER. Nuova edizione italiana con notevoli aggiunte dell'Ing. E. WEBBER, (in lavoro).	
Macchine agricole . del Conte A. CENCELLI-PERTI, di pag. VIII-216. con 68 incisioni.	2 —

	L. c.
Macchine per cucire e ricamare , dell'Ing. ALFREDO GALASSINI, pag. VII-230, con 100 incisioni	2 50
Macchinista e fuochista , del Prof. G. GAUTERO, riveduto e ampliato dall'Ing. Prof. LORIA, 9ª ediz. con Appendice sulle Locomobili e le Locomotive e col Regolamento sulle caldaie a vapore, pag. XX-194, con 34 incisioni	2 —
Macchinista navale (Manuale del), di M. LIGNAROLO, 2ª ed. rifatta, pag. XXIV-602, con 344 incisioni	7 50
Macinazione — vedi Industrie dei molini — Panificazione.	
Magnetismo ed elettricità . Principi e applicazioni esposti elementarmente, del Prof. F. GRASSI. 3ª ediz. completamente rifatta del manuale di POLONI e GRASSI, di pagine XVI-508, con 280 figure 6 tavole fuori testo	5 50
Magnetismo ed ipnotismo , del Dottor G. BELFIORE, 2ª ed. rifatta pag. VIII-396	3 50
Maiale (II). Razze, metodi di riproduzione, di allevamento, ingrassamento, commercio, salumeria, patologia suina e terapeutica, tecnica operatoria, tossicologia, dizionario suino-tecnico, del Prof. E. MARCHI, 2ª ediz., pag. XX-736, con 190 incisioni e una Carta	6 50
Maioliche e porcellane (L'amatore di), di L. DE MAURI, illustrato da splendide <i>incisione in nero</i> , da <i>12 superbe tavole a colori</i> e da <i>3000 marche</i> . - Contiene: Tecnica della fabbricazione - Sguardo generale sulla storia delle Ceramiche - Cenni storici ed artistici - Raccolte di 3000 marche corredate ognuna di notizie relative, e coordinate ai Cenni Storici - Dizionario di termini Artistici - Prezzi correnti - Bibliografia ceramica, pag. XII-650	12 50
Mais (II) o granoturco, o formentone, o granone, o melgone, o melica, o melicotto, o carlone, o polenta, ecc. Norme per una buona coltivazione, di E. AZIMONTI, 2ª edizione rifatta dal Manuale "Frumento e Mais", di E. CANTONI, di pag. XII-196 con 61 incisioni nel testo	2 50
Malattie dei paesi caldi , loro profilassi ed igiene con una appendice "La vita nel Brasile", — Regolamenti di sanità pubblica contro le infezioni esotiche, del Dott. C. MUZIO, pag. XII-562, con 154 incisioni e 11 tavole	7 50
Malattie crittogamiche delle piante erbacee coltivate , del Dott. R. WOLF, traduzione con note ed aggiunte del Dott. P. BACCARINI, pag. X-268, con 50 incisioni	2 —
Malattie ed alterazione dei vini , del Prof. S. CETTOLINI, di pag. XI-138, con 13 incisioni.	2 —
Malattie della vite — vedi Fillossera — Malattie crittogamiche.	
Mammiferi — vedi Zoologia.	
Mandarini — vedi Agrumi.	
Malattie del sangue . Manuale d'Ematologia del Dott. E. REBUSCHINI, pag. VIII-432	3 50
Mandato commerciale , di E. VIDARI, pag. VI-160.	1 50

- L. c.
- Mandolinista** (Manuale del), di A. PISANI, pag. XX-140, con 13 figure, 3 tavole e 39 esempi. 2 —
- Manicomio** — vedi Assistenza pazzi — Psichiatria.
- Manzoni Alessandro**. Cenni biografici, di L. BELTRAMI, di pag. 109, con 9 autografi e 68 incisioni. 1 50
- Marche di Fabbria** — vedi Amatore oggetti d'arte — Leggi sulle proprietà — Majoliche.
- Mare** (Il). V. BELLIO, pag. IV-140, con 6 tav. lit. a colori. 1 50
- Marine** (Le) **da guerra del mondo al 1897**, di L. D'ADDA, pag. XVI-320, con 77 illustrazioni. 4 50
- Marino** (Manuale del) **militare e mercantile**, del Contr'ammiraglio DE AMEZAGA, con 18 xilografie, 2ª edizione, con appendice di BUCCI DI SANTAFIORA. 5 —
- Marmista** (Manuale del), di A. RICCI, 2ª edizione, pag. XII-154, con 47 incisioni. 2 —
- Marmo** — vedi Imitazioni.
- Massaggio**, del Dott. R. MAJNONI, p. XII-179, con 51 inc. . 2 —
- Mastici** — vedi Ricettario industriale — Vernici, ecc.
- Matematica** (Complementi di) ad uso dei chimici e dei naturalisti, di G. VIVANTI, di pag. X-381. 3 —
- Matematiche superiori** (Repertorio di). Definizioni, formole, teoremi, cenni bibliografici, del Prof. E. PASCAL.
Vol. I. *Analisi*, pag. XVI-642. 6 —
Vol. II. *Geometria*, e indice gen. per i 2 vol. pag. 950 9 50
- Materia medica moderna** (Man. di), G. MALACRIDA, p. XI-761 7 50
- Meccanica**, del Prof. R. STAWELL BALL traduzione del Prof. J. BENETTI, 4ª edizione, pag. XVI-214, con 89 inc. 1 50
- Meccanica agraria**, di V. NICCOLI (In lavoro).
- Meccanica** (La) **del macchinista di bordo**, per gli Ufficiali macchinisti della R. Marina, i macchinisti delle Compagnie di navigazione, i Costruttori e i Periti meccanici, gli Allievi degli Istituti Tecnici e Nautici e delle Scuole Industriali e Professionali, di E. GIORLI, con 92 figure. . . . 2 50
- Meccanica razionale** di R. MARCOLONGO
I. Cinematica e Statica }
II. Dinamica e Idromeccanica } in lavoro.
- Meccanico** (Il), ad uso dei capi tecnici, macchinisti, elettricisti, disegnatori, assistenti, capi operai, conduttori di caldaie a vapore, alunni di Scuole industriali, di E. GIORLI, 4ª edizione ampliata, pag. XV-423, con 204 incisioni. . . 3 —
- Meccanismi** (500), scelti fra i più importanti e recenti riferentisi alla dinamica, idraulica, idrostatica, pneumatica, macchine a vapore, molini, torchi, orologerie, ecc., di H. T. BROWN, trad. d. Ing. F. CERRUTI, 4ª edizione italiana, pag. VIII-176, con 500 incisioni. 2 50
- Medaglie** — vedi Leghe metalliche — Monete greche — Monete romane — Numismatica — Vocabolario dei numismatici.
- Medicatura antisettica**, del Dott. A. ZAMBLER, con prefazione del Prof. E. TRIGONI, pag. XVI-124, con 6 incis. . 1 50

- Medicina operativa** — *vedi* Chirurgia.
- Medico pratico**, (II) di C. MUZIO. 3^a edizione del Nuovo memoriale pei medici pratici, di pag. XVI-492 5 —
- Memoria** (L'arte della) — *vedi* Arte.
- Mercedi** — *vedi* Paga giornaliera.
- Mercologia**, ad uso delle scuole e degli agenti di commercio, di O. LUXARDO, pag. XII-452. 4 —
- Meridiane** — *vedi* Gnomonica.
- Metalli preziosi** dell'Ing. A. LINONE. Dell'argento: Metallurgia dell'argento - Argento puro - Leghe d'argento - Saggi dell'argento. Dell'oro: Giacimento dell'oro - Affinamento dell'oro - Leghe d'oro - Saggi dell'oro. — Platino: estrazione e leghe di platino - Applicazioni dell'oro e dell'argento - Decorazione dei metalli preziosi, 1904, di pag. XI-315 . . . 3 —
Questo Manuale sostituisce quello del GORINI, *Metalli preziosi*, esaurito da tempo e che non verrà più ristampato.
- Metallizzazione** — v. Galvanizz. — Galvanoplastica — Galvanostegia.
- Metallocromia**. Colorazione e decorazione chimica ed elettrica dei metalli, bronzatura, ossidazione, preservazione e pulitura, dell'Ing. I. GHERSI, pag. VIII-192 2 50
- Metallurgia dell'oro**, dell'Ing. E. CORTESE. di pag. xv-262 con 35 incisioni 3 —
- Metallurgia** — *vedi* Coltivazione delle miniere — Fonditore — Leghe metalliche — Siderurgia — Tempera e cementazione.
- Metorologia generale**, del Dott. L. DE MARCHI, pag. VI-156, con 8 tavole colorate. 1 50
vedi anche — Climatologia — Igroscopi.
- Metrica dei greci e dei romani**, di L. MÜLLER, 2^a edizione italiana confrontata colla 2^a tedesca ed annotata dal Dott. GIUSEPPE CLERICO, pag. XVI-186. 1 50
- Metrica italiana** — *vedi* Ritmica e metrica italiana.
- Metrologia Universale ed il Codice Metrico Internazionale**, coll'indice alfabetico di tutti i pesi misure, monete, ecc., dell'Ing. A. TACCHINI, pag. XX-482 6 50
- Mezzeria** (Mannale pratico della) e dei vari sistemi della colonia parziaria in Italia, d. Prof. A. RABBENO, p. VIII-196 1 50
- Micologia** *vedi* Funghi mangerecci — Malattie crittogamiche — Tarti e funghi.
- Microbiologia**. Perché e come dobbiamo difenderci dai microbi. Malattie infettive, Disinfezioni, Profilassi, del Dott. L. PIZZINI, pag. VIII-142. 2 —
- Microscopia** — *vedi* Anatomia microscopica — Animali parassiti — Bacologia — Batteriologia — Protistologia — Tecnica protistologica.
- Microscopio** (II), Guida elementare alle osservazioni di Microscopia, del Prof. CAMILLO ACQUA, p. XII-226, 81 inc. 1 50
- Mineralogia generale**, di L. BOMBICCI, 2^a ediz. (Esaurito).

	L. c	
Mineralogia descrittiva , del Prof. L. BOMBICCI, 2ª edizione, di pag. IV-300, con 119 incisioni.	3 —	
Miniere (Coltivazione delle), di S. BERTOLIO, 2ª ediz. rifatta del Man. " <i>Arte Min.</i> " di ZOPPETTI, p. VIII-284	2 50	
niere di zolfo — <i>vedi</i> Zolfo.		
Misurazione delle botti — <i>vedi</i> Enologia.		
Misure — <i>vedi</i> Avarie e sinistri marittimi — Codice del Perito Misuratore — Metrologia — Monete — Strumenti metrici.		
Mitilcoltura — <i>vedi</i> Ostricoltura — Piscicoltura.		
Mitologia (Dizionario di), di F. RAMORINO. (In lavoro).		
Mitologia greca , di A. FORESTI: I. <i>Divinità</i> , di p. VIII-264	1 50	
II. <i>Eroi</i> , di pag. 188	1 50	
Mitologie orientali , di D. BASSI:		
Vol. I. <i>Mitologia babilonese-assira</i> , pag. XVI-219	1 50	
Vol. II. <i>Mitologia egiziana e fenicia</i> . (In lavoro).		
Mnemotecnica — <i>vedi</i> Arte della memoria.		
Mobili artistici — <i>vedi</i> Amatore d'oggetti d'arte.		
Moda — <i>vedi</i> Abiti — Biancheria — Fiori artificiali — Trine.		
Modellatore meccanico, falegname ed ebanista , del Prof. G. MINA, pag. XVII-428, con 293 incisioni e 1 tavola		5 50
Moini (L' <i>Industria dei</i>) e la macinazione del frumento , di C. SIBER-MILLOT, di pag. XX-259, con 103 incisioni nel testo e 3 tavole		5 —
Monete greche , di S. AMBROSOLI, di pag. XIV-286, con 200 fotoincisioni e 2 carte geografiche.		8 —
Monete (Prontuario delle), pesi e misure inglesi , ragguagliate a quelle del sistema decimale, dell'Ing. GHERSI, di pag. XII-196, con 47 tabelle di conti fatti e 40 facsimili delle monete in corso		8 50
Monete romane . Manuale elementare compil. da F. GNECCHI, 2ª edizione, riveduta corretta ed ampliata, di pag. XXVII-370, con 25 tavole e 90 figure nel testo		8 —
Monogrammi , del Prof. A. SEVERI, 73 tavole divise in tre serie. di due e di tre cifre		8 50
Montatore (Il) di macchine . Opera arricchita da oltre 250 esempi pratici e problemi risolti, di S. DINARO, di pagine XII-, 68		4 —
Morfologia generale — <i>vedi</i> Embriologia.		
Morfologia greca , del Prof. V. BETTEI, pag. XX-376		8 —
Morfologia italiana , del Prof. E. GORRA, pag. VI-142		1 50
Morte (La) vera e la morte apparente, con appendice " <i>La legislazione mortuaria</i> " di F. DELL'ACQUA, p. VIII-136		2 —
Mosti (Densità dei), dei vini e degli spiriti ed i problemi che ne dipendono, ad uso degli enochimici, degli enotecnici e dei distillatori, di E. CILLIS, di pag. XVI-230, con 11 figure e 46 tavole.		2 —
Musei — <i>vedi</i> Amatore oggetti d'arte e curiosità — Amatore maioliche e porcellane - Armi antiche -- Pittura -- Raccoglitore — Scoltura.		

	L.	C.
Motociclista (Manuale del) di P. BORRINO. Guida pratica per i dilettanti di motocicleta. 1904, di p. XI-124, con 38 inc. — — Vedi Automobilista — Ciclista.	2	—
Mutuo soccorso — vedi Società mutuo soccorso.		
Napoleone I^o , di L. CAPPELLETTI, 23 fotoinc., p. XX-272.	2	50
Naturalista preparatore (II), del Dott. R. GESTRO, 3 ^a edizione riveduta ed aumentata del <i>Manuale dell'Imbalsamatore</i> , di pag. XVI-168, con 42 incisioni.	2	—
Naturalista viaggiatore , del Prof. A. ISSEL e R. GESTRO (Zoologia), di pag. VIII-144, con 38 incisioni.	2	—
Nautica stimata o Navigazione piana di F. TAMI, di pag. XXXII-179, con 47 incisioni.	2	—
Neurotteri — vedi Imenotteri.		
Nevrastenia del Dott. L. CAPPELLETTI di pag. xx-490	4	—
Nichelatura — vedi Galvanostegia.		
Notaio (Manuale del), aggiunte le Tasse di registro, di bollo ed ipotecarie, norme e moduli pel Debito pubblico, di A. GARETTI, 5 ^a ediz. riveduta e ampliata, (in lavoro).		
Numeri — vedi Teoria dei numeri.		
Numismatica (Manuale di), del Dott. S. AMBROSOLI, 3. ^a edizione riveduta, di pag. XVI-250, con 250 fotoincisioni nel testo e 4 tavole	1	50
Numismatica — vedi Guida numismatica.		
Nuotatore (Manuale del), del Prof. P. ABBO, di pag. XII-148, con 97 incisioni	2	50
Nutrizione del bambino . Allattam. naturale ed artificiale, del Dott. L. COLOMBO, pag. XX-228, con 12 incisioni.	2	50
Occultismo — vedi Chiromanzia - Magnet. e ipnotismo - Spiritismo — Telepatia.		
Oculistica — vedi Igiene della vista — Ottica.		
Odontologia — vedi Igiene della bocca.		
Olii vegetali, animali e minerali , loro applicazioni di G. GORINI, 2 ^a edizione completamente rifatta dal Dott. G. FABRIS, di pag. VIII-214, con 7 incisioni	2	—
Ollivo ed olio . Coltivazione dell'olivo, estrazione, purificazione e conservazione dell'olio, del Prof. A. ALOI, 5 ^a edizione accresciuta e rinnovata, di p. XVI-365, con 65 inc.	3	—
Omero , di W. GLADSTONE, traduzione di R. PALUMBO e C. FIORILLI, di pag. XII-196	1	50
Onde Hertziane — vedi Telegrafo senza fili.		
Operaio (Manuale dell'). Raccolta di cognizioni utili ed indispensabili agli operai tornitori, fabbri, calderai, fonditori di metalli, bronzisti, aggiustatori e meccanici di G. BELLUOMINI, 5 ^a ediz. aumentata, di pag. XVI-262	2	—
Operaio elettrotecnico , (Manuale pratico per l') di G. MAR-CHI, di pag. XII-338, con 189 incisioni.	2	50
Operazioni doganali — vedi Codice doganale — Trasporti e tariffe.		
Opere pie — vedi Guida pei Sindaci, Segretari comunali, ecc.		
Oratoria — vedi Arte del dire — Rettorica — Stilistica		
Orchidee di A. PUCCI (in lavoro).		

	L. c.
Ordinamento degli Stati liberi d'Europa , del Dott. F. RACIOPPI, 2 ^a edizione, di pag. XII-316	8 —
Ordinamento degli Stati liberi fuori d'Europa , del Dott. F. RACIOPPI, di pag. VIII-376	8 —
Ordinamento giudiziario — <i>vedi</i> Leggi sull'.	
Oreficeria — <i>vedi</i> Gioielleria — Leghe metalliche — Metalli preziosi — Saggiatore.	
Organoterapia , di E. REBUSCHINI, pag. VIII-432	8 50
Oriente antico — <i>vedi</i> Storia antica.	
Ornatista (Manuale dell'), dell'Arch. A. MELANI. Raccolta di iniziali miniate e incise, d'inquadrature di pagina, di fregi e finalini, esistenti in opere antiche di biblioteche, musei e collezioni private. XXIV tavole in colori per miniatori, calligrafi, pittori di insegne, ricamatori, incisori, disegnatori di caratteri, ecc., 1 ^a serie, in-8	4 50
Ornitologia Italiana (Manuale di) di E. ARRIGONI d. ODDI. Elenco descrittivo degli uccelli stazionari o di passaggio finora osservati in Italia. 1904, di pag. 907, con 36 tavole e 401 inc. nel testo da disegni originali	15 —
Oro — <i>vedi</i> Metalli preziosi — Metallurgia dell'oro.	
Orologeria moderna , dell'Ing. GARUFFA, di pag. VIII-302, con 276 incisioni	5 —
— <i>vedi anche</i> Gnomonica.	
Orologi artistici — <i>vedi</i> Amatore di oggetti d'arte.	
Orologi solari — <i>vedi</i> Gnomonica.	
Orticultura del Prof. D. TAMARO, 2 ^a edizione rifatta, di pagine XVI-576, con 110 incisioni	4 50
Ortocomatismo — <i>vedi</i> Fotografia.	
Ortofrenia (Manuale di), per l'educazione dei fanciulli frenastenici o deficienti (idioti, imbecilli, tardivi, ecc.), del Prof. P. PARISE, di pag. XII-231	2 —
Ortotteri — <i>vedi</i> Imenotteri ecc.	
Ossidazione — <i>vedi</i> Metallocromia.	
Ostetricia (Manuale di) <i>Ginecologia minore</i> , per le levatrici di L. M. BOSSI, di pag. XV-493, con 113 incisioni	4 50
Ostricoltura e mitilicoltura , del Dott. D. CARAZZI, con 13 fototipie, di pag. VIII-202	2 50
Ottica , di E. GELCICH, pag. XVI-576, con 216 incis. e 1 tav.	6 —
Ottone — <i>vedi</i> Leghe metalliche.	
Paga giornaliera (Prontuario della), da cinquanta centesimi a lire cinque, di C. NEGRIN, di pag. 222.	2 50
Paleoetnologia , del Prof. J. REGAZZONI, di pag. XI-252, con 10 incisioni	1 50
Paleografia , di E. M. THOMPSON, traduzione dall'inglese, con aggiunte e note del Prof. G. FUMAGALLI, 2 ^a edizione rifatta, di pag. XII-178, con 30 inc. e 6 tav.	2 —
— <i>Paleografia musicale</i> — <i>vedi</i> Semiografia.	
Paleontologia (Compendio di), del Prof. P. VINASSA DE REGNY, di pag. XVI-512, con 356 figure intercalate	5 50

- L. c.
- Pallone** (Giuoco del) — *vedi* Giuoco.
- Panificazione razionale**, di POMPILIO, pag. IV-126 . . . 2 —
- Parafulmini** — *vedi* Elettricità — Fulmini.
- Parrucchiere** (Manuale del) di A. LIBERATI. 1904, di pagine XII-219, con 88 inc. 2 50
- Patate (Le) di gran reddito**. Loro coltura, loro importanza nell'alimentazione del bestiame, nell'economia domestica e negli usi industriali, di N. ADUCCI, di pag. XXIV-221, con 20 incisioni 2 50
- Pazzia** — *vedi* Assistenza pazzi — Psichiatria — Grafologia.
- Pediatria** — *vedi* Nutrizione del bambino — Ortopedia — Terapia malattie infanzia.
- Pellagra (La)**, Storia, eziologia, patogenesi, profilassi. di G. ANTONINI, di pag. VIII-166 con 2 tav. 2 —
- Pelle** — *vedi* Igiene della.
- Pelli** — *vedi* Concia delle pelli.
- Pensioni** — *vedi* Società di mutuo soccorso.
- Pepe** — Prodotti agricoli.
- Perfosfati** — *vedi* Fosfati — Concimi — Chimica agraria.
- Perito** — *vedi* Codice nel perito misuratore
- Pesci** — *vedi* Ittiologia — Ostricoltura — Piscicoltura.
- Pesi e misure** — *vedi* Avarie e sinistri marittimi — Metrologia — Misure e pesi inglesi — Monete — Strumenti metrici — Tecnologia monetaria.
- Peso dei metalli, ferri quadrati, rettangolari, cilindrioli, a squadra, a U, a Y, a Z, a T e a doppio T, e delle lamiere e tubi di tutti i metalli**, di G. BELLUOMINI, 2^a edizione, di pag. XXIV-248 3 50
- Pianista** (Manuale del), di L. MASTRIGLI, pag. XVI-112 . 2 —
- Piante e fiori sulle finestre, sulle terrazze e nei cortili**. Coltura e descrizione delle principali specie di varietà, di A. PUCCI, 2^a edizione, pag. VIII-214, con 117 incisioni . 2 50
- Piante industriali**. Delle piante zuccherine in generale. — Piante saccarifiche. — Piante alcooliche. - Piante narcotiche. - Piante aromatiche e profumate. - Piante tintorie - Piante da concia. - Piante tessili. - Piante da carta - Piante da cardare - Piante da spazzole e scope. - Piante da legare o intrecciare. - Piante da soda. - Piante medicinali. - Piante da diversi impieghi. 3^a ed. completamente rifatta da A. ALOI del manuale " Piante industriali „ del GORINI, di p. XI-274, con 64 inc. 2 50
- Piante tessili** (Coltivazione ed industrie delle), propriamente dette e di quelle che danno materia per legacci, lavori d'intreccio, sparteria, spazzole, scope, carta, ecc., coll'aggiunta di un dizionario delle piante ed industrie tessili, di oltre 3000 voci, del Prof. M. A. SAVORGNAN D'OSOPPO, di pag. XII-476, con 72 incisioni. 5 —
- Pietre artificiali** — *vedi* Imitazioni.
- Pietre preziose**, classificazione, valore, arte del gioielliere, di G. GORINI, (esaurito, è in lavoro la 3^a edizione).

- L. c.
- Pirotecnica moderna**, di F. DI MAIO, 2ª edizione riveduta ed ampliata, di pag. XV-183 con 21 incisioni. 2 50
- Piscicoltura** (d'acqua dolce), del Dott. E. BETTONI, di pagine VIII-318, con 85 incisioni. 3 —
- Pittura ad olio, acquarello e miniatura** (Manuale per dilettante di), paesaggio, figura e fiori, di G. RONCHETTI, pag. XVI-280, 29 incis. e 24 Tav. in zincot. e cromolit. . 3 50
- Pittura italiana antica e moderna**, dell'Arch. A. MELANI, 2ª edizione completamente rifatta, di pag. XXX-480 con 28 incisioni intercalate e 187 tavole. 7 50
- Plastica** — *vedi* Imitazioni.
- Pollicoltura**, del March. G. TREVISANI, 5ª edizione rifatta, di pagine XVI-230, con 90 incisioni. 2 50
- Polveri pliche** — *vedi* Espedenti — Pirotecnica.
- Pomologia**, descrizione delle migliori varietà di Albicocchi, Ciliegi, Meli, Peri, Peschi, del Dott. G. MOLON, con 86 incisioni e 12 tavole colorate, di pag. XXXII-717 . . . 8 50
- Pomologia artificiale**, secondo il sistema Garnier-Valletti, del Prof. M. DEL LUPO, pag. VI-132, e 34 incisioni . . . 2 —
- Poponi** — *vedi* Frutta minori.
- Porcellane** — *vedi* Maioliche — Ricettario domestico.
- Porco** (Allevamento del) — *vedi* Maiale.
- Porti di mare** — *vedi* Lavori marittimi.
- Posologia** — *vedi* Impiego ipodermico.
- Posta**. Manuale Postale di A. PALOMBI. Notizie storiche sulle Poste d'Italia, organizzazione, legislazione, posta militare, unione postale universale, con una appendice relativa ad alcuni servizi accessori, di pag. xxx-309 . . . 3 —
- Prato** (Il), del Prof. G. CANTONI, di pag. 146, con 13 inc. 2 —
- Prealpi bergamasche** (Guida-itinerario alle), compresa la Valsassina ed i Passi alla Valtellina ed alla Valcamonica, colla prefazione di A. STOPPANI, e cenni geologici di A. TARAMELLI, 3ª edizione rifatta per cura della Sezione di Bergamo del C. A. I., con 15 tavole, due carte topografiche, ed una carta e profilo geologico. Un volume di pag. 290 e un vol. colle carte topografiche in busta . . 6 50
- Pregiudizi** — *vedi* Errori e pregiudizi. Leggende popolari.
- Previdenza** — *vedi* Assicuraz. — Cooperaz. — Società di M. S.
- Privative industriali** — *vedi* Codice e Leggi usuali d'Italia Vol. IV.
- Problemi di Geometria elementare**, dell'Ing. I. GHERSI, (Metodi facili per risolverli), con circa 200 problemi risolti, e 119 incisioni, di pag. XII-160 1 50
- Procedura civile e procedura penale** — *vedi* Codice.
- Procedura privilegiata fiscale** per la riscossione delle imposte dirette — *vedi* Esattore.
- Procedura dei piccoli fallimenti** — *vedi* Curatore dei fallimenti.
- Processi fotomeccanici** (I moderni). Fotocollografia, fototipografia, fotocalcografia, fotomodellatura, tricromia, del Prof. R. NAMIAS, p. VIII-316, 53 fig., 41 illustr. e 9 tav. 3 50

- Prodotti agricoli del Tropico** (Manuale pratico del piantatore), del Cav. A. GASLINI. (Il caffè, la canna da zucchero, il pepe, il tabacco, il cacao, il tè, il dattero, il cotone, il cocco, la coca, il baniano, l'aloè, l'indaco, il tamarindo, l'ananas, l'albero del chinino, la juta, p. XVI-270) 2 —
- Produzione e commercio del vino in Italia**, di S. MONDINI, di pag. VII-303 2 50
- Profumiere** (Manuale del), di A. ROSSI, con 700 ricette pratiche, di pag. IV-476 e 58 incisioni 5 —
— *vedi anche* Ricettario domest. — Ricettario industr. — Saponi.
- Proiezioni** (Le). Materiali, Accessori, Vedute a movimento, Positive sul vetro, Proiezioni speciali policrome, stereoscopiche, panoramiche, didattiche, ecc., del Dott. L. SASSI di pag. XVI-447, con 141 incisioni. 5 —
- Proiezioni ortogonali** — *vedi* Disegno.
- Prontuario di geografia e statistica** del Prof. G. GAROLLO, pag. 62 1 —
- Prontuario per le paghe** — *vedi* Paghe — Conti fatti.
- Proprietà** letteraria, artistica e industriale — *vedi* Leggi.
- Proprietario di case e di opifici**. Imposta sui fabbricati, dell'Avv. G. GIORDANI, di pag. XX-264. 1 50
- Prosodia** — *vedi* Metrica dei greci e dei romani — Ritmica.
- Prospettiva** (Manuale di), dell'ing. L. CLAUDI, 2^a edizione riveduta di pagine XI-61 con 28 tavole 2 —
- Protezione degli animali** (La), di NIGRO LICÒ, p. VIII-200 2 —
- Protistologia**, di L. MAGGI, 2^a ed., p. XVI-278, 93 incis. 3 —
- Proverbi in 4 lingue — *vedi* Dottrina popolare.
- Proverbi (516) sul cavallo**, raccolti ed annotati dal Colonello VOLPINI, di pag. XIX-172 2 50
- Psichiatra**. Confini, cause e fenomeni della pazzia. Concetto, classificazione, forme cliniche o diagnosi delle malattie mentali. Il manicomio, di J. FINZI, pag. VIII-225 2 50
- Psicologia**, del Prof. C. CANTONI, pag. VIII-168, 2^a ediz. 1 50
- Psicologia fisiologica**, del Dott. G. MANTOVANI, pag. VIII-165, con 16 incisioni 1 50
- Psicologia musicale**. Appunti, pensieri e discussioni, di M. PILO di pag. x-259. 2 50
- Psicoterapia** di G. PORTIGLIOTTI, di pag. XII-318, 22 inc. 3 —
- Pugilato e lotta per la difesa personale, Box inglese e francese**, di A. COUGNET, pag. XXIV-198, 104 incis. 2 50
- Raccoglitore** (Il) di oggetti minuti e curiosi. Almanacchi, Anelli, Armi, Bastoni, Biglietti d'ingresso, d'invito, di visita, Calzature, Chiavi, Cartelloni, Giarrettiere, Orologi, Pettini, ecc., di J. GELLI, di pag. x-344, con 310 incisioni 5 50
- Rachitide** (La) e le deformità da essa prodotte, del Dott. P. MANCINI, di pag. XXVIII-300, con 116 figure intercalate nel testo 4 —
- Radiografia** — *vedi* Raggi Röntgen.
- Radioterapia** — *vedi* Luce e salute.

	L. c.
Ragioneria , del Prof. V. GITTI, 4ª edizione riveduta, di pag. VIII-141, con 2 tavole	1 50
Ragioneria delle cooperative di consumo (Manuale di), del Rag. G. ROTA, di pag. XV-408	3 —
Ragioneria industriale , (Aziende Rurali) del Prof. Rag. ORESTE BERGAMASCHI, 2ª edizione aumentata, di pag. XII-392, con numerose tabelle	4 —
Ragioniere (Prontuario del). (Manuale di calcoli mercantili e bancarie), di E. GAGLIARDI, pag. XII-608	6 50
Ramatura — vedi Galvanostegia.	
Razze bovine, equine, suine, ovine e caprine di F. FAELLI, di pag. XX-372, con 75 illustrazioni delle quali 16 colorate	5 50
Rebus — vedi Enigmistica.	
Reclami ferroviarii — vedi Trasporti e tariffe.	
Registro e Bollo — vedi Leggi sulle tasse di.	
Regolo calcolatore e sue applicazioni nelle operazioni topografiche , dell'Ing. G. POZZI, di pag. XV-238, con 182 incisioni e 1 tavola	2 50
Religioni e lingue dell'India inglese , di R. CUST, tradotto dal Prof. A. DE GUBERNATIS, di pag. IV-124	1 50
Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni , di P. GALLIZIA, 2ª ediz. rifatta dall'Ing. G. SANDRINELLI di pag. XXIV-476, con 269 incisioni	5 50
Resistenza (Momenti di) e pesi di travi metalliche composte. Prontuario ad uso degli Ingegneri, Architetti e costruttori, con 10 figure ed una tabella per la chiodatura, dell'Ing. E. SCHENCK, di pag. XI-188	3 50
Responsabilità — vedi Ingegneria legale.	
Rettilli — vedi Zoologia.	
Rettorica , ad uso delle Scuole, di F. CAPELLO, p. VI-122.	1 50
Ribes — vedi Frutta minori.	
Ricami — vedi Biancheria — Macchine da cucire — Monogrammi — Piccole industrie — Ricettario domestico — Trine.	
Ricchezza mobile , dell'Avv. E. BRUNI, pag. VIII-218	1 50
Ricettario domestico , dell'Ing. I. GHERSI. Adornamento della casa. Arti del disegno. Giardinaggio. Conservazione di animali, frutti, ortaggi, piante. Animali domestici e nocivi. Bevande. Sostanze alimentari. Combustibili e illuminazione. Detersione e lavatura. Smacchiatura. Vestiario. Profumeria e toeletta. Igiene e medicina. Mastici e plastica. Colle e gomme. Vernici ed encaustici. Metalli. Vetrerie, di pag. 550 con 2340 consigli pratici e ricette accuratamente scelte.	5 50
Ricettario industriale , dell'Ing. I. GHERSI. Procedimenti utili nelle arti, industrie e mestieri, caratteri; saggio e conservazione delle sostanze naturali ed artificiali d'uso comune; colori, vernici, mastici, colle, inchiostri, gomma elastica, materie tessili, carta, legno, fiammiferi, fuochi d'artificio, vetro; metalli, bronzatura, nichelatura, argentatura, doratura, galvanoplastica, incisione, tempera, leghe; filtra-	

	L. c.
zione; materiali impermeabili, incombustibili, artificiali; ca- scami, olii, saponi, profumeria, tintoria, smacchiatura, im- bianchimento; agricoltura, elettricità; 3 ^a edizione rifatta e aumentata, di pag. VII-704, con 27 inc. e 2886 ricette . . .	6 50
Ricettario fotografico. Terza edizione riveduta e ampliata del Dott. L. SASSI, di pag. XXIV-229.	2 —
Rilievi — <i>vedi</i> Cartografia — Compens. errori — Telemetria.	
Risorgimento italiano (Storia del) 1814-1870 , con l'ag- giunta di un sommario degli eventi posteriori, del Prof. F. BERTOLINI, 2 ^a ediz., di pag. VIII-208	1 50
Ristauratore dei dipinti , del Conte G. SECCO-SUARDO, 2 volumi, di pag. XVI-269, e XII-362, con 47 incisioni . . .	6 —
Ritmica e metrica razionale italiana , del Prof. ROCCO MURARI, di pag. XVI-216.	1 50
Rivoluzione francese (La) (1789-1799), del Prof. Dott. GIAN PAOLO SOLERIO, di pag. IV-176.	1 50
Roma antica — <i>vedi</i> Mitologia — Monete — Topografia.	
Röntgen (I raggi di) e le loro pratiche applicazioni, di ITALO TONTA, pag. VIII-160, con 65 incis. e 14 tavole . . .	2 50
— <i>vedi anche</i> — Elettricità medica — Fototerapia e radioterapia.	
Rose (Le). Storia, coltivazione, varietà, di G. GIRARDI, di pag. XVIII-284, con 96 illustrazioni e 8 tavole cromoli- tografiche	3 50
Rhum — <i>vedi</i> Liquorista.	
Saggiatore (Manuale del), di F. BUTTARI, di pag. VIII-245, con 28 incisioni	2 50
Sagou — <i>vedi</i> Fecola.	
Sale (Il) e le Saline , di A. DE GASPARIS. (Processi indu- striali, usi del sale, prodotti chimici, industria manifat- turiera, industria agraria, il sale nell'economia pubblica e nella legislazione), di pag. VIII-358, con 24 incisioni . . .	3 50
Salumiere — <i>vedi</i> Majale.	
Sanatori — <i>vedi</i> Tisici e sanatori.	
Sanità e sicurezza pubblica — <i>vedi</i> Leggi sulla.	
Sanscrito (Avviamento allo studio del), del Prof. F. G. FUMI, 3 ^a edizione rinnovata, di pag. XVI-343	4 —
Saponi (L'industria saponiera), con alcuni cenni sull'indu- stria della soda e della potassa. Guida pratica dell'Ing. E. MARAZZA. (esaurito, è in lavoro la 2 ^a edizione).	
Sarta da donna — <i>vedi</i> Abiti — Biancheria.	
Scacchi (Manuale del giuochi degli), di A. SEGHERI, 3 ^a ediz. ampliata da E. ORSINI, con una appendice alla se- zione delle partite giuocate e una nuova raccolta di 52 problemi di autori ital., (In corso di stampa).	
Scaldamento e ventilazione degli ambienti abitati, di R. FERRARI, 2 ^a ediz., di pag. VIII-300, con 98 incisioni.	3 —
Scenografia (La). Cenni storici dall'èvo classico ai nostri giorni, di G. FERRARI, di pag. XXIV-327, con 16 inci- sioni nel testo, 160 tavole e 5 tricromie	12 —

- L. c
- Scherma italiana** di J. GELLI, 2ª ediz., di pagine VI-251, con 108 figure 2 50
- Sofarade** — *vedi* Enimmistica.
- Scienza delle finanze**, di T. CARNEVALI, pag. IV-140 . . . 1 50
- Scritture d'affari** (Precetti ed esempi di), per uso delle Scuole tecniche, popolari e commerciali, del Prof. D. MAFFIOLI, 3ª ediz. ampliata e corretta, di pag. VIII-221 . . . 1 50
- Sconti** — *vedi* Interesse e sconto.
- Scoperte geografiche** — *vedi* Cronologia.
- Scultura italiana antica e moderna** (Manuale di), dell'Arch. A. MELANI, 2ª edizione rifatta con 24 incisioni nel testo e 100 tavole, di pag. XVII-248 5 —
- Scuole industriali** — *vedi* Industrie (Piccole).
- Segretario comunale** — *vedi* Esattore. — Guida dei Sindaci, Segretari. ecc.
- Selvicoltura**, di A. SANTILLI, di pag. VIII-220, e 46 inc. . 2 —
- Semelotica**. Breve compendio dei metodi fisici di esame degli infermi, di U. GABBI, di pag. XVI-216, con 11 inc. 2 50
- Semiografia musicale** di G. GASPERINI (in lavoro).
- Sericoltura** — *vedi* Bachi da seta — Filatura — Gelsicoltura — Industria della seta — Tintura della seta.
- Shakespeare**, di DOWDEN, trad. di A. BALZANI, p. XII-242 1 50
- Seta** (Industria della), del Prof. L. GABBA, 2ª ed., p. IV-208 2 —
- Seta artificiale** — *vedi* Imitazioni.
- Siurezza pubblica** — *vedi* Leggi di sanità.
- Siderurgia** (Manuale di), dell'Ing. V. ZOPPETTI, pubblicato e completato per cura dell'Ing. E. GARUFFA, di pag. IV-368, con 220 incisioni 5 50
- Sieroterapia**, del Dott. E. REBUSCHINI, di pag. VIII-424 . 3 —
- Sigle epigrafiche** — *vedi* Dizionario di abbreviature.
- Sinistri marittimi** — *vedi* Avarie.
- Sintassi francese**, razionale pratica, arricchita della parte storico-etimologica, della metrica, della fraseologia commerciale, ecc., del Prof. D. RODARI, di pag. XVI-206 . 1 50
- Sintassi francese** — *vedi* Esercizi sintattici.
- Sintassi greca**, di V. QUARANTA, di pag. XVIII-175 . . . 1 50
- Sintassi latina**, di T. G. PERASSI, di pag. VII-168 . . . 1 50
- Sismologia**, del Capitano L. GATTA, di pag. VIII-175, con 16 incisioni e 1 carta 1 50
- Smalti** — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte — Fotosmaltografia — Ricettario industr.
- Soccorsi d'urgenza**, del Dott. C. CALLIANO, 4ª edizione riveduta ed ampliata, di pag. XLVI-352, con 6 tav. litogr. 3 —
- Socialismo**, di G. BIRAGHI, di pag. XV-285. 3 —
- Società di mutuo soccorso**. Norme per l'assicurazione delle pensioni e dei sussidi per malattia e per morte, del Dott. G. GARDENGLI, di pag. VI-152. 1 50
- Società industriali italiane per azioni**, del Dott. F. PICCINELLI, di pag. XXXVI-584. 5 50

	L. c
Sociologia generale (Elementi di), del Dott. EMILIO MORSELLI, di pag. XII-172.	1 50
Soda caustica, cloro e clorati alcalini per elettrolisi. Fabbricazione e sorveglianza chimica, di P. VILLANI, di pagine VIII-314, con una tavola	3 50
Sordomuto (Il) e la sua istruzione. Manuale per gli allievi e le allieve delle R. Scuole normali, maestri e genitori, del Prof. F. FORNARI, di pag. VIII-232, coe 11 inc. — <i>vedi anche</i> Ortofrenia.	2 —
Stanze alimentari. — <i>vedi</i> Conservazione delle.	
Specchi (La fabbricazione degli) e la decorazione del vetro e cristallo , del Professor R. NAMIAS, di pagine XII-156, con 14 incisioni	2 —
Spettrofotometria (La) applicata alla Chimica fisiologica, alla Clinica e alla Medicina legale, di G. GALLERANI, di pag. XIX-395, con 92 incisioni e tre tavole	3 50
Spettroscopio (Lo) e le sue applicazioni , di R. A. PROCTOR, traduzione con note ed aggiunte di F. PORRO, di pag. VI-179, con 71 incis. e una carta di spettri	1 50
Spiritismo , di A. PAPPALARDO, Seconda edizione, con 9 tavole, di pag. XVI-216	2 —
— <i>vedi anche</i> Magnetismo — Telepatia.	
Spirito di vino — <i>vedi</i> Alcool — Cognac — Distillaz. — Liquorista.	
Stagno (Vasellame di) — <i>vedi</i> Amatore di oggetti d'arte e di curiosità — Leghe metalliche.	
Stampa dei tessuti — <i>vedi</i> Industria tintoria.	
Stabilità delle costruzioni — <i>vedi</i> Resistenza dei materiali — Resistenza e pesi di travi metalliche.	
Statica — <i>vedi</i> Metrologia — Strumenti metrici.	
Statistica , del Pr. F. VIRGILII, 3ª ed., rifatta pag. XIX-225	1 50
Stearineria (L'industria stearica). Manuale pratico dell'Ing. E. MARAZZA, di pagine XI-284, con 70 incisioni	5 —
Stelle — <i>vedi</i> Astronomia — Cosmografia — Gravitazione — Spettroscopio.	
Stemmi — <i>vedi</i> Araldica — Numismatica — Vocabol. araldico.	
Stenografia , di G. GIORGETTI, (secondo il sistema Gabelsberger-Noe), 3ª ediz. rifatta di pag. XV-239	3 —
Stenografia (Guida per lo studio della) sistema Gabelsberger-Noe, compilata in 35 lezioni da A. NICOLETTI, 4ª ed. riveduta e corretta, di pag. XV-160.	1 50
Stenografia. Esercizi graduali di lettura e di scrittura stenografica (sistema Gabelsberger-Noe), con 3 novelle del Prof. A. NICOLETTI, 2ª ediz., di pag. VIII-160	1 50
— <i>vedi anche</i> Antologia stenografica — Dizionario stenografico.	
Stenografo pratico (Lo) di L. CRISTOFOLI, di pag. XII-131	1 50
Stereometria applicata allo sviluppo dei solidi e alla loro costruzione in carta , del Prof. A. RIVELLI, di pag. 90, con 92 incisioni e 41 tavole.	2 —

	L. c.
Stilistica , del Prof. F. CAPELLO, di pag. XII-164.	1 50
Stilistica latina , di A. BARTOLI, di pag. XII-110	1 50
Stimatore d'arte — <i>vedi</i> Amatore di oggetti d'arte e di curiosità — Amatore di maioliche e porcellane — Armi antiche.	
Storia antica . Vol. I. <i>L'Oriente Antico</i> , del Prof. I. GENTILE, di pag. XII-232	1 50
Vol. II. <i>La Grecia</i> , di G. TONIAZZO, pag. IV-216	1 50
Storia dell'Arte , del Dott. G. CAROTTI. (In lavoro).	
Storia dell'arte militare antica e moderna , del Cap. V. ROSSETTO, con 17 tav. illustr., di pag. VIII-504.	5 50
— <i>vedi anche</i> Armi antiche.	
Storia e cronologia medioevale e moderna , in CC tavole sinottiche, del Prof. V. CASAGRANDE, 3 ^a edizione, con nuove correzioni ed aggiunte, di pag. VIII-254	1 50
Storia della ginnastica . — <i>Vedi Ginnastica</i> .	
Storia d'Italia (Breve), di P. ORSI, 2 ^a ed. rived., p. XII-276	1 50
Storia di Francia , dai tempi più remoti ai giorni nostri, di G. BRAGAGNOLO, di pag. XVI-424, con tabelle cronologiche e genealogiche.	3 —
Storia ital. (Man. di), di C. CANTÙ, pag. IV-160 (esaunita).	
Storia d'Inghilterra dai tempi più remoti ai giorni nostri, del Prof. G. BRAGAGNOLO, di pag. XVI-367	3 —
Storia della musica , del Dott. UNTERSTEINER, 2 ^a edizione ampliata, di pag. XII-330	3 —
Strumentazione , per E. PROUT versione italiana con note di V. RICCI, 2 ^a ediz. rived., di p. XVI-214, 95 incis.	2 50
Strumenti ad arco (Gli) e la musica da camera, del Duca di CAFFARELLI, di pag. X-235.	2 50
Strumenti metrici (Principi di statica e loro applicazione alla teoria e costruzione degli), dell'Ing. E. BAGNOLI, di pag. VIII-252, con 192 incisioni	3 50
Stufe — <i>vedi</i> Scaldamento.	
Suono — <i>vedi</i> Luce e suono.	
Succedanei — <i>vedi</i> Ricettario industriale — Imitazioni.	
Sughero — <i>vedi</i> Imitazioni e succedanei.	
Surrogati — <i>vedi</i> Ricettario industriale — Imitazioni.	
Sussidi — <i>vedi</i> Società di mutuo soccorso.	
Tabacco , del Prof. G. CANTONI, di pag. IV-176, con 6 inc.	2 —
Tabacchiere — <i>vedi</i> Amatore di oggetti d'arte — Raccoglitore di oggetti.	
Tacheometria — <i>vedi</i> Celerimensura — Telemetria — Topografia — Triangolazioni.	
Tamarindo — <i>vedi</i> Prodotti agricoli.	
Tapioca — <i>vedi</i> Fecola.	
Tappezzerie — <i>vedi</i> Amatore di oggetti d'arte e di curiosità.	
Tariffe ferroviarie — <i>vedi</i> Codice doganale — Trasporti e tariffe.	

- Tartufi (I) ed i funghi**, loro natura, storia, coltura, conservazione e cucinatura, di FOLCO BRUNI, di pag. VIII-184 2 —
- Tasse di registro, bollo, ecc.** — *vedi* Codice di bollo — Esattore — Imposte — Leggi Tasse Reg. e Bollo — Notaio — Ricch. mob.
- Tassidermista** — *vedi* Imbalsamatore — Naturalista viaggiatore.
- Tatuaggio** — *vedi* Chiromanzia e tatuaggio.
- Tè** — *vedi* Prodotti agricoli.
- Teatro** — *vedi* Letteratura drammatica — Codice del teatro.
- Tecnica microscopica** — *vedi* Anatomia microscopica.
- Tavole d'alligazione per l'oro e per l'argento** con numerosi es. pratici per il loro uso, F. BUTTARI, p. XII-220. 2 50
- Tavole logaritmiche** — *vedi* Logaritmi.
- Tavole schematiche della Divina Commedia di Dante Alighieri**, di L. POLACCO, seguite da sei tavole topogr. in cromolit. disegn. dal Maestro G. AGNELLI, pag. X-152 . 3 —
- Tecnica protistologica**, del Prof. L. MAGGI, pag. XVI-318 3 —
- Tecnologia** — *vedi* Dizionario tecnico.
- Tecnologia meccanica** — *vedi* Modellatore meccanico.
- Tecnologia e terminologia monetaria**, di G. SACCHETTI, di pag. XVI-191 2 —
- Telefono (II)** di G. MOTTA. (Sostituisce il manuale " Il telefono " di D. V. PICCOLI), di p. 327, con 149 inc. e 1 tav. 3 50
- Telegrafia**, del Prof. R. FERRINI, 2ª edizione corretta ed accresciuta, di pag. VIII-315, con 104 incisioni 2 —
- Telegrafo senza fili e Onde Hertziane** di O. MURANI, di pag. xv-341, con 172 incisioni 3 50
- Telemetria, misura delle distanze in guerra**, del Cap. G. BERTELLI, di pag. XIII-145, con 12 zincotipie 2 —
- Telepatia** (Trasmissione del pensiero), di A. PAPPALARDO, 2ª ediz. di pag. XVI-279 2 50
— *vedi anche* Magnetismo e Ipnatismo — Spiritismo.
- Tempera e cementazione**, dell'Ingegnere FADDA, di pagine VIII-108, con 20 incisioni. 2 —
- Teoria dei numeri** (Primi elementi della), per il Prof. U. SCARPIS, di pag. VIII-152 1 50
- Teoria delle ombre**, con un cenno sul chiaroscuro e sul colore dei corpi, del Prof. E. BONCI, di pag. VIII-164, con 36 tavole e 62 figure 2 —
- Terapia delle malattie dell'infanzia**, del Dott. G. CATTANEO, di pag. XII-506 4 —
- Termodinamica**, Prof. G. CATTANEO, pag. X-196, 4 fig. . 1 50
- Terremoti** — *vedi* Sismologia — Vulcanismo.
- Terreni** — *vedi* Chimica agraria — Concimi — Humus.
- Terreno agrario**. Manuale di Chimica del terreno, di A. FUNARO, di pag. VIII-200 2 —
- Tessitore** (Manuale del), del Prof. P. PINCHETTI, 2ª ediz. riveduta, di pag. XVI-312, con illustrazioni 3 50

- L. c.
- Tessuti di lana e di cotone** (Analisi e fabbricazione dei). Manuale pratico razionale di O. GIUDICI, di pag. XII-864 con 1098 incisioni colorate 16 50
- Testamenti** (Manuale dei), per cura del Dott. G. SERINA, 2ª ediz. riveduta ed aumentata di pag. xv-312 3 —
- Tigrè-italiano** (Manuale), con due dizionarietti italiano-tigrè e tigrè-italiano ed una cartina dimostrativa degli idiomi parlati in Eritrea, del Cap. M. CAMPERIO, di pag. 180 2 50
- Tintore** (Manuale del), di R. LEPETIT, 4ª edizione, di pagine XVI-440, con 14 incisioni 4 50
- Tintoria** — *vedi* Industria tintoria.
- Tintura della seta**, studio chimico tecnico, di T. PASCAL, di pag. XVI-432 5 —
- Tipografia** (Vol. I). Guida per chi stampa e fa stampare. — Compositori, Correttori, Revisori, Autori ed Editori, di S. LANDI, di pag. 280 2 50
- Tipografia** (Vol. II). Lezioni di composizione ad uso degli allievi e di quanti fanno stampare, di S. LANDI, di p. VIII-271, corredato di figure e di modelli. 2 50
— *vedi anche* Vocabolario tipografico.
- Tisici e i Sanatorii** (La cura razionale dei), del Dott. A. ZUBIANI, prefaz. del Prof. B. SILVA, p. XLI-240, 4 incis. 2 —
- Titoli di rendita** — *vedi* Debito pubblico — Valori pubblici.
- Topografia e rilievi** — *vedi* Cartografia — Catasto — Celerim实施 — Compensazione errori — Curve — Disegno topografico — Estimo terreni — Estimo rurale — Fotogrammetria — Geometria pratica — Prospettiva — Regolo calcolatore — Telemetria — Triangolazioni.
- Topografia di Roma antica**, di L. BORSARI, di pag. VIII-436, con 7 tavole 4 50
- Tornitore meccanico** (Guida pratica del), ovvero sistema unico per calcoli in generale sulla costruzione di viti e ruote dentate, arricchita di oltre 100 problemi risolti, di S. DINARO, 3ª edizione, di pag. x-147 2 —
- Traduttore tedesco** (II), compendio delle principali difficoltà grammaticali della Lingua Tedesca. del Prof. R. MINUTTI, di pag. XVI-224. 1 50
- Trasporti, tariffe, reclami ferroviari ed operazioni doganali**. Manuale pratico ad uso dei commercianti e privati, colle norme per l'interpretazione delle tariffe vigenti, di A. BIANCHI 2ª edizione rifatta. di pagine XVI-208. 2 —
- Travi metallici composti** — *Vedi Resistenza.*
- Triangolazioni topografiche e triangolazioni catastali**, dell'ing. O. JACOANGELI. Modo di fondarle sulla rete geodetica, di rilevarle e calcolarle, di pag. XIV-340, con 32

- L. e.
- incisioni, 4 quadri degli elementi geodetici, 32 modelli
pei calcoli trigonometrici e tavole ausiliarie 7 50
- Trigonometria** — *vedi* Celerimensura — Esercizi Geometria me-
trica — Geometria metrica — Logaritmi.
- Trigonometria della sfera** — *vedi* Geometria e trigonom. della.
- Trine (Le) a fuselli in Italia.** Loro origine discussione,
confronti, cenni bibliografici, analisi, divisione, istruzioni
tecnico-pratiche con 200 illustrazioni intercalate nel testo
di GIACINTA ROMANELLI-MARONE, di pag. VIII-331 . . . 4 50
- Tubercolosi** — *vedi* Tisici.
- Uccelli** — *vedi* Ornitologia.
- Uccelli canori** (I nostri migliori); loro caratteri e costumi.
Modo di abituarli e conservarli in schiavitù. Cura delle
loro infermità. Maniera per ottenere la produzione del
Canarino, di L. UNTERSTEINER, di pag. XII-175 2 —
- Ufficiale** (Manuale per l') del Regio Esercito italiano, di U.
MORINI, di pag. XX-388 3 50
- Ufficiale sanitario** (Manuale dell') di C. TONZIG e G.
RUATA (In lavoro).
- Unità assolute.** Definizione, Dimensioni, Rappresentazione.
Problemi dell'Ing. G. BERTOLINI, pag. X-124. 2 50
- Usciere** — *vedi* Conciliatore.
- Uva spina** — *vedi* Frutta minori.
- Uve da tavola.** Varietà, coltivazione e commercio, del Dott.
D. TAMARO, 3^a edizione, di pag. XVI-278, con tavole co-
lorate, 7 fototipie e 57 incisioni 4 —
- Valli lombarde** — *vedi* Dizionario alpino — Prealpi Bergamasche.
- Valori pubblici** (Manuale per l'apprezzamento dei), e per le
operazioni di Borsa, del D. F. PICCINELLI, 2^a edizione
rifatta e accresciuta, di pag. XXIV-902 7 50
- Valutazioni** — *vedi* Prontuario del ragioniere.
- Vasellame antico** — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e curiosità.
- Veleni ed avvelenamenti**, del Dott. C. FERRARIS, di pag.
XVI-208, con 20 incisioni 2 50
- Velocipedi** — *vedi* Ciclista.
- Ventagli artistici** — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità
- Ventilazione** — *vedi* Scaldamento.
- Verbi greci anomali** (I), del Prof. P. SPAGNOTTI, secondo
le Grammatiche di CURTIUS e INAMA, pag. XXIV-107 . . . 1 50
- Verbi latini di forma particolare nel perfetto e nel su-
pino**, di A. F. PAVANELLO, con indice alfabetico di dette
forme, di pag. VI-215 1 50
- Vermouth** — *vedi* Liquorista.
- Vernici** (Fabbricazione delle), e prodotti affini, lacche,
mastici, inchiostri da stampa, ceralacche, dell'Ing. UGO
FORNARI, 2^a ediz. riveduta e ampliata di pag. XII-244 . . . 2 —
- Vetri artistici** — *vedi* Amatore oggetti d'arte — Specchi — Foto-
smaltografia.

	L. c.
Vetro (Il). Fabbricazione, lavorazione meccanica, applicazioni alle costruzioni, alle arti ed alle industrie, dell'ing. G. D'ANGELO, di pag. XIX-527, con 325 figure intercalate, delle quali 25 in tricoloria	9 50
Vini bianchi da pasto e Vini mezzo colore (Guida pratica per la fabbricazione, l'affinamento e la conservazione dei), di G. A. PRATO, di pag. XII-276, con 40 inc.	2 —
Vino (Il), di G. GRASSI-SONCINI, di pag. XVI-152.	2 —
Vino aromatizzato — <i>vedi</i> Adulterazione — Cognac — Liquorista.	
Viticultura . Precetti ad uso dei Viticoltori italiani, del Prof. O. OTTAVI, 5ª ed. riveduta ed ampliata da A. STRUCCHI, di pag. XVI-227, con 30 incisioni	2 —
Vocabolario dei numismatici (in 7 lingue), del Dott. S. AMBROSOLI, di pag. VIII-134	1 50
Vocabolario araldico ad uso degli italiani , del Conte G. GUELFU, di pag. VIII-294, con 356 incisioni	3 50
Vocabolario compendioso della lingua russa , del Prof. VOINOVICH, di pag. XVI-238	3 —
Vocabolario tipografico , di S. LANDI. (In lavoro).	
Volapük (Dizionario italiano-volapük), preceduto dalle Nozioni compendiose di grammatica della lingua, del Prof. C. MATTEI, secondo i principii dell'inventore M. SCHLEYER, ed a norma del <i>Dizionario Volapük</i> ad uso dei francesi, del Prof. KERCKHOFFS, di pag. XXX-198	2 50
Volapük (Dizion. volapük-ital.), Prof. C. MATTEI, p. XX-204.	2 50
Volapük , Manuale di conversazione e raccolta di vocaboli e dialoghi italiani-volapük, per cura di M. ROSA, TOMMASI e A. ZAMBELLI, di pag. 152.	2 50
Vulcanismo , del Cap. L. GATTA, di pag. VIII-268 e 28 inc.	1 50
Zecche — <i>vedi</i> Terminologia monetaria.	
Zolfo (Le miniere di) di G. CAGNI, di pag. XII-275, con 34 incisioni e 10 tabelle	3 50
Zoologia , dei Prof. E. H. GIGLIOLI e G. CAVANNA:	
I. Invertebrati, di pag. 200, con 45 figure	1 50
II. Vertebrati, Parte I, Generalità, Ittiopsidi (Pesci ed Anfibi), di pag. XVI-156, con 33 incisioni	1 50
III. Vertebrati, Parte II, Sauropsidi, Teriopsidi (Rettili, Uccelli e Mammiferi), di pag. XVI-200, con 22 incis.	1 50
Zoonosi , del Dott. B. GALLI VALERIO, di pag. XV-227.	1 50
Zootecnia , del Prof. G. TAMPELINI, p. VIII-207, 52 incis.	2 50
— <i>vedi</i> Araldica Zootecnica.	
Zucchero (Industria dello):	
I. <i>Coltivazione della barbabietola da zucchero</i> , dell'Ing. B. R. DEBARBIERI, di pag. XVI-220, con 12 inc.	2 50
II. <i>Commercio, importanza economica e legislazione doganale</i> , di L. FONTANA-RUSSO, di pag. XII-244	2 50
III. <i>Fabbricazione dello zucchero di barbabietola</i> dell'Ing. A. TACCANI, di pag. XII-228, con 71 incis.	3 50

INDICE ALFABETICO PER AUTORI

Abbo P. Nuotatore	44	Belfiore G. Magnet. ed ipnot.	40
Acqua C. Microscopio	42	Bellini A. Igiene della pelle.	34
Adler G. Eserc. di lingua tedesca	28	— Luce e salute.	39
Aducci N. Le patate	46	— Mare (II)	41
— La fecola	29	— Cristoforo Colombo	22
Aducco A. Chimica agraria.	17	Bellotti G. Luce e colori	39
Agnelli G. Tav. Div. Commedia	54	Bellotti S. Bromatologia	15
Airy G. B. Gravitazione.	34	Belluomini G. Calderaio prat.	16
Alasia C. Eserc. Trigon. piana	28	— Cubatura dei legnami	22
— Geomet. elem. (Complem. di)	32	— Fabbro ferraio	28
— Geometria della sfera	32	— Falegname ed ebanista	28
Alberti F. Il bestiame e l'agricol.	15	— Fonditore.	30
Albicini G. Diritto civile	23	— Operaio (Manuale dell')	44
Albini G. Fisiologia.	29	— Peso dei metalli	46
Alessandri P. E. Analisi chimica	11	Beitrami G. Filatura d. cotone	28
— Analisi volumetrica.	11	Beltrami L. Aless. Manzoni	41
— Chimica applic. all'Igiene	17	Benetti J. Meccanica	41
— Disinfezione	24	Bergamaschi O. Contabilità dom.	21
— Farmacista (Manuale del).	29	— Ragioneria industriale	49
— Sostanze alimentari.	5	Bernardi G. Armonia	13
Alfiori A. Dizionario Eritreo	25	— Contrappunto	21
Alói A. Olivo ed olio	44	Bernhard. Infortunii di mont.	36
— Agrumi	10	Bertelli G. Disegno topografico	24
— Adulterazione del vino	10	— Telemetria	54
— Piante industriali	46	Bertolini F. Risorg. italiano	50
Ambrosoli S. Atene	14	Bertolini G. Unità assolute.	56
— Monete greche	43	Bertolio S. Coltiv. delle min.	43
— Numismatica	44	Besta R. Anat. e fisiol. compar.	11
— Vocabolari 'tto pei numism.	57	Bettel V. Morfologia greca.	43
Antilli A. Disegno geometrico.	24	Settoni E. Piscicoltura.	47
Antonini E. Pellagra	46	Biagi G. Bibliotec. (Man. del).	15
Applani G. Colori e vernici	20	Bianchi A. G. Trasporti e tariffe	55
Arlia C. Dizionario bibliogr.	25	Bignamì-Sermani E. Diz. alpino	26
Arrighi C. Dizionario milanese	25	Biraghi G. Socialismo	51
Arti grafiche, ecc.	13	Bisconti A. Esercizi greci	28
Aschieri F. Geom. anal. d. spazio	32	Boccardini G. L. Euclide emendato	28
— Geometria anal. del piano	32	Bocciardo A. D. Elettr. medica	26
— Geometria descrittiva	32	Bock C. Igiene privata	34
— Geom. proiettiva del piano	32	Boito C. Disegno (Princ. del)	24
— Geom. proiett. dello spazio	32	Bombicci G. Mineral. generale	42
Azimonti E. Frumento	31	— Mineralogia descrittiva.	43
— Campicello scolastico	16	Bonacini C. Fotografia ortocr.	30
— Mais	40	Bonci E. Teoria delle ombre	54
Azzoni F. Debito pubb. italiano	23	Bonelli L. Grammatica turca	34
Baccarini P. Malatt. crittogam.	40	Bonetti E. Biancheria.	15
Baddeley V. Law-Tennis	37	Bonino G. B. Dialetti greci.	23
Bagnoli E. Statica	53	Bonizzi P. Animali da cortile.	12
Ball J. Alpi (Le).	11	— Colombi domestici	19
Ball R. Stawell. Meccanica	41	Borgarello E. Gastronomia	31
Ballerini O. Fiori artificiali	29	Borletti F. Celerimensura.	17
Balzani A. Shakespeare	51	— Form. per il calc. d. risvolte	30
Baroschi E. Fraseologia franc.	30	Borrino F. Motociclista.	44
Barpi U. Igiene veterinaria	34	Borsari L. Topog. di Roma ant.	55
— Abitaz. degli anim. domest.	10	Boselli E. Gioielleria e orific.	32
Barth M. Analisi del vino	11	Bossi L. M. Ostetricia	45
Bartoli A. Stilistica latina	53	Bragagnolo G. Storia di Francia	53
Bassi D. Mitologie orientali.	43	Bragagnolo G. Storia d'Inghilt.	53
Bastiani F. Lavori marittimi	36	Brigiuti L. Letterat. egiziana.	38

Brocherel G. Alpinismo 11	Cavalleri D. Legis. delle acque 37
Brown H. T. Meccanismi (500) 41	Cavanna G. Zoologia 57
Bruni F. Tartufi e funghi . . . 54	Cavara F. Funghi mangerecci. 31
Bruni E. Catasto italiano. . . . 17	Celoria G. Astronomia. 14
— Codice doganale italiano. . . 18	Cencelli-Perti A. Macch. agric. 39
— Contabilità dello Stato. . . . 21	Cerchiarì G. L. Chir. e tatuaggio 18
— Imposte dirette. 35	Cereti P. E. Esercizi latini. . . 28
— Legislazione rurale 37	Cerruti F. Meccanismi (500) . . 41
— Ricchezza mobile 49	Cerutti A. Fognat. domestica . 30
Bruttini A. Il libro dell'agricol. 40	Cettolini S. Malattie dei vini. 40
Buoci di Santafiora. Marino . . 41	Clapetti G. L'alcool industriale 10
— Flotte moderne (Le). 29	Chiesa C. Logismografia 39
Budan E. Autografi (Amat. di). 14	Ciampoli D. Letterature slave. 38
Burali-Forti C. Logica matem. 39	Cignoni A. Ingegnere navale . 36
Buttari F. Saggiatore (Man. d.) 50	Ciardi C. Prospettiva 48
— Tav. per l'allig. oro e arg. 54	Cierico G. vedi Müller, Metrica 42
Caffarelli F. Strumenti ad arco 53	Collamarini G. Biologia 15
Cagni G. Le miniere di zolfo . . 57	Colombo E. Re Rep. Argeotina 12
Calliano C. Soccorsi d'urgenza 51	Colombo G. Ingegnere civile. . 36
— Assistenza degli infermi. . . 13	Colombo L. Nutriz. del Bamb. 44
Calzavara V. Industria del gas 31	Comboni E. Analisi del vino. . 11
Camperio M. Tigre-italiano . . 55	Concari T. Gramm. italiana . . 33
Campi C. Campicello scolastico 16	Consoli S. Fonologia latina . . 30
Canestrini E. Fulmini e paraf. 31	— Letteratura norvegiana . . . 38
Canestrini G. Apicoltura. . . . 12	Conti P. Giardino infantile . . 32
— Antropologia 12	Contuzzi F. P. Diritto costituz. 23
Canestrini C. e R. Batteriologia 15	— Diritto internaz. privato. . . 24
Canevazzi E. Araldica zootec. . 12	— Diritto internaz. pubblico. . 24
Cantamessa F. Alcool. 10	Corsi E. Codice del bollo. . . . 18
Cantoni C. Logica. 39	Cortese E. Metallurgia dell'oro 42
Cantoni C. Psicologia. 48	Cossa A. Elettrochimica 26
Cantoni G. Prato (Il). 47	Cossa L. Economia politica . . 26
— Tabacco (Il). 53	Cougnet. Pugilato antico e mod. 48
Cantoni P. Igroscoopi, igrom. . 35	Goulliaux L. Igiene della bocca. 34
Capello F. Rettorica. 49	Cova E. Confez. abiti signora. 10
— Stilistica 53	Cremona I. Alpi (Le) 11
Capilupi A. Assicuraz. e stima 13	Cristofoli L. Stenografo pratico 52
Capelletti L. Napoleone I. . . . 44	Crollanza G. Araldica (Gr.). . 12
— Letterat. spagn. e portogh. 38	Croppi G. Canottaggio. 16
Cappelletti L. Nevrastenia . . . 44	Crotti F. Compens. degli errori 20
Cappelli A. Diz. di abbreviat. . 25	Curti R. Infortuni della mont. 36
Carazzi D. Ostricoltura. 45	Cust R. Relig. e lingue d. India 49
— Anat. microsc. (Tecn. di) . . 11	— Lingue d'Africa 39
Carega di Muricco. Agronomia 10	D'Adda L. Marine da guerra . 41
— Estimo rurale. 28	Dal Piaz. Cognac 19
Carnevali T. Scienza finanze . 51	Damiani Lingue straniere . . . 39
Carotti S. Storia dell'arte . . . 53	D'Angelo S. Vetro. 57
Carraroli A. Igiene rurale. . . . 34	Da Ponte M. Distillazione . . . 24
Casagrandi V. Storia e cronol. 53	De Amezaga. Marino militare . 41
Casali A. Humus (L'). 34	De Barbieri R. Zucchero (Ind. d.) 57
Castellani L. Acetilene (L'). . . 10	De Brun A. Contab. comunale. 20
— Incandescenza 35	De Cillis E. Mosti (Densità dei) 43
Castiglioni L. Beneficenza . . . 15	De Gasparis A. Sale e Saline . 50
Castoldi A. Liquorista 39	De Gregorio G. Glottologia . . 33
Cattaneo C. Dinamica element. 23	De Gubernatis A. Lett. indiana 38
— Termodinamica 54	— Lingue d'Afr. 39
Cattaneo C. Terapia infanzia . 54	— Relig. e lingue dell'India. . 49
Cattaneo G. Embriolog. e morf. 27	Dell'Acqua F. Morte vera e appar. 43

- Del Lupo M.** Pomol. artificiale. 47
De Marchi L. Meteorologia. . . 42
 — Climatologia. 18
De Mauri L. Maioliche (Amatore) 40
 — Amatore d'oggetti d'arte . 11
Deasy. Elettrotecnica 27
Di Maio F. Pirotecnica. 47
Dinaro S. Tornitore meccanico 56
 — Montatore di macchine . . 43
 — Atlante di macchine 39
Dizionario universale in 4 lingue 26
Dompè C. Man. del Commerciante 20
Dowden. Shakespeare 51
Doyen C. Litografia. 39
Enciclopedia Hoepli. 27
Erede G. Geometria pratica. . 32
Fabris G. Olii vegetali. 44
Fadda. Tempera e cementaz. . 54
Faelli F. Razze equine 49
Falcone C. Anat. topografica 12
Faralli G. Ig. della vita pub. e pr. 34
Fenini C. Letteratura italiana 38
Fenzia C. Evoluzione. 28
Ferrari D. Arte (L') del dire . . 13
Ferrari G. Scenografia (La) . . 50
Ferrari V. Lett. moderna ital. 38
 — Letter. moderna e contemp. 38
Ferrario C. Curve circolari. . . 23
Ferraris C. Veleni ed avvelen. 56
Ferrini C. Digesto (II) 23
 — Diritto penale romano. . . . 24
 — Diritto romano. 24
Ferrini R. Eletticità 26
 — Energia fisica. 27
 — Galvanoplastica. 31
 — Scaldamento e ventilaz. . . 50
 — Telegrafia 54
Filippini P. Estimo dei terreni 28
Finzi J. Psichiatria. 48
Florilli C. Omero 44
Flori A. Dizionario tedesco . . 25
 — Conversazione tedesca . . . 21
Fontana-Russo. Zucch. (Comm.) 57
Foresti A. Mitologia greca . . 43
Formentano A. Camera di cons. 16
Formenti C. Alluminio. 11
Fornari P. Sordomuto (II) . . . 52
Fornari U. Vernici e lacche . . 56
 — Luce e suono 39
 — Calore (II) 16
Foster M. Fisiologia 29
Franceschi G. Cacciatore . . . 15
 — Corse 22
Franceschi G. Giuoco del Pallone 38
Franceschi G. B. Concia pelli . 20
 — Conserve alimentari. 20
Franceschini F. Insetti utili . . 36
 — Insetti nocivi 36
Franchi L. Codici 18-19
 — Leggi sui lavori pubblici . 37
 — Legge s. tasse di reg. e bollo 37
 — Legge sull'Ordin. giudiz. . 37
 — Legge sanità e sicur. pubbl. 37
 — Leggi sulle priv. industr. 19-37
 — Leggi diritti d'autore 18-19-37
Friedmann S. Lingua gotica . . 38
Friso L. Filosofia morale. . . . 29
Frisoni G. Gramm. port.-bras. 33
 — Corrispondenza italiana . . 21
 — „ spagnuola 22
 — „ francese 22
 — Gramm. Danese-Norveg. . . 33
Fumagalli G. Bibliotecario . . 15
 — Paleografia. 45
Fumi F. G. Sanscrito. 50
Funaro A. Concimi (I) 20
 — Terreno agrario 54
Gabba L. Chimico (Man. del). 17
 — Seta (Industria della). . . . 51
 — Adult. e falsific. degli alim. 10
Gabbi U. Semeiotica 51
Gabelsberger-Noè. Stenografia. 52
Gabrielli F. Giuochi ginnastici 33
Gagliardi E. Interesse e sconto 36
 — Ragioniere Pront. del. . . . 49
Galassini A. Maec. cuc. e ricam. 40
Gallerani G. Spettrofotometria 52
Galletti E. Geografia. 32
Galli G. Igiene privata 34
Galli Valerio B. Zoonosi 57
 — Immunità e resist. alle mal. 35
Gallizia P. Resistenza dei mater. 49
Gardenghi G. Soc. di mutuo soc. . 51
Garetti A. Notaio (Man. del). . 44
Gardini A. Chirurgia operat. . . 18
Garibaldi C. Econ. matematica 26
Garnier-Valletti Pomologia . . 47
Garollo G. Atl. geog.-st. d'Ital. 14
 — Dizionario biograf. univ. . 25
 — Dizionario geograf. univ. . 25
 — Prontuario di geografia . . 48
Garuffa E. Orologeria 45
 — Siderurgia 51
Gaslini A. Prodotti del Tropico 48
Gasperini G. Semiogr. music. . . 51
Gatta L. Sismologia 51
 — Vulcanismo 57
Gautero G. Macch. e fuochista . 40
Gavina F. Ballo (Manuale del). 14
Geikle A. Geografia fisica. . . 32
 — Geologia 32
Geleich E. Cartografia. 17
 — Ottica 45
Geil J. Armi antiche 13
 — Biliardo 15
 — Codice cavalleresco 18

- Gelli J.** Dizionario filatelico. . . 25
 — Duellante. 26
 — Ginnastica maschile. 32
 — Scherma 51
 — Il raccoglitore 48
Gentile I. Archeologia dell'arte 12
 — Geografia classica 27
 — Storia antica (Oriente). . . 53
Gernesio G. Imitaz. di Cristo . 35
Gestro R. Natural. viaggiat. . . 44
 — Naturalista preparatore . . 44
Gherzi I. Ciclista 18
 — Conti fatti 21
 — Galvanostegia. 31
 — Imitazioni e succedanei . . 35
 — Industrie (Piccole). 36
 — Leghe metalliche. 37
 — Metallocromia. 42
 — Monete, pesi e mis. ingl. . 43
 — Problemi di geometria. . . . 47
 — Ricettario domestico. . . . 49
 — Ricettario industriale. . . . 49
Gibelli G. Idroterapia 34
Giglioli E. H. Zoologia. 57
Gioppi L. Crittografia 22
 — Dizionario fotografico . . . 25
 — Fotografa industriale . . . 30
Giordani G. Proprietario di case 48
Giorgetti S. Stenografia. . . . 52
Glori E. Disegno industriale . 24
 — Disegno e costruz. Nave. . 24
 — Aritmetica e Geometria . . 13
 — Meccanico (II). 41
 — Macchinista di bordo . . . 41
Girardi G. Le rose 50
 — Il Garofano 31
Glitt V. Computisteria. 20
 — Ragioneria 49
Giudici O. Tessuti di lana e cot. 55
Gladstone W. E. Omero 44
Gnacchi F. Monete romane. . . 43
 — Guida numismatica 34
Bobbi U. Assicuraz. generale . 13
Goffi V. Disegnat. meccanico . 24
Gorini G. Colori e vernici . . . 20
 — Concia delle pelli 20
 — Conserve alimentari. 20
 — Olii. 44
 — Piante industriali 45
 — Pietre preziose 45
Gorra E. Lingue neo-latine . . 39
 — Morfologia italiana 43
Grawinkel, Elettrotecnica. . . 26
Grassi F. Magnetismo e elett. 40
Grazzi-Soncini G. Vino (II) . . 57
Griffini A. Coleotteri italiani. . 19
 — Ittiologia italiana 36
 — Lepidotteri italiani 37
Griffini A. Imenotteri italiani. 35
Grove G. Geografia. 32
Guaita L. Colori e la pittura . 20
Guasti C. Imitazione di Cristo 35
Guelfi G. Vocabolario araldico 57
Guetta P. Il Canto 16
Guyon B. Grammatica Slovena 34
Haeder H. Costr. macc. a vap. . 39
Hoepli U. Enciclopedia 27
Hooker J. Botanica 15
Hubert J. C. Antich. pubbl. rom. 12
Hugues L. Esercizi geografici. . 27
 — Cronologia scop. geogr. . . 22
 Imitazione di Cristo. 35
Imperato F. Attrezz. delle navi 14
Inama V. Antichità greche. . . 12
 — Letteratura greca 38
 — Grammatica greca. 33
 — Filologia classica 29
 — Esercizi greci. 28
Issel A. Naturalista viaggiat. . 41
Jacoangeli O. Triangol. topog. . 55
Jenkin F. Elettricità 26
Jevons W. Stanley. Econ. polit. 26
 — Logica. 39
Jona E. Cavi telegr. sottomar. 17
Jones E. Calore (II). 16
 — Luce e suono 39
Kiepert R. Atl. geogr. univers. 14
 — Esercizi geografici. 27
Kopp W. Antich. priv. dei Rom. 12
La Leta B. M. Cosmografia. . . 22
 — Gnomonica. 33
Landi D. Dis. di proiez. ortog. 24
Landi S. Tipografia (I^o) Guida 55
 — (II^o) Compositore-tipogr. . . 55
 — Vocabolario tipografico . . 57
Lange O. Letteratura tedesca. 38
Lanzoni P. Geogr. comm. econ. 32
Larice R. Storia del commercio 20
Leoni B. Lavori in terra 37
Lepetit R. Tintore 55
Levi C. Fabbricati civ. di abitaz. 28
Levi C. Letterat. drammatica . 38
Levi I. Gramm. lingua ebraica . 33
Liberati A. Parmaucchiere . . . 46
Librandi V. Gramm. albanese . 33
Licciardelli G. Conigliicoltura . 20
 — Il furetto 31
Licò N. Protez. degli animali. 48
Lignarolo M. Doveri dei macch. 28
 — Macchinista navale 40
Linone A. Metalli preziosi . . . 42
Lloy P. Ditteri italiani 25
Livi L. Antropometria 12
Lockyer I. N. Astronomia. . . . 13
Lombardini A. Anat. pittorica . 11
Lombroso C. Grafologia. 33

- Lomonaco A.** Igiene della vista 35
Loria L. Macchinista e fuochis. 40
Loris. Diritto amministrativo. 23
 — Diritto civile 23
Lovera R. Gramm. greca mod. . 83
 — Grammatica rumena 34
Luxardo O. Merceologia. 42
Maffioli D. Diritti e dov. dei citt. 23
 — Scritture d'affari. 51
Maggi L. Protistologia 48
 — Tecnica protistologica 54
Magrini E. Infortuni sul lavoro 36
 — Abitazioni popolari 10
Mainardi G. Esattore. 27
Majnoni R. Massaggio 41
Malacrida G. Materia medica . 41
 — Impiego ipodermico 35
Malfatti B. Etnografia 28
Mancini P. La rachitide. 48
Manetti L. Caseificio 17
Mantovani G. Psicolog. fisiolog. 48
Marazza E. Stearineria 52
 — Saponi (Industria dei) 50
Marcel C. Lingue straniere 39
Marchi E. Maiale (II). 40
Marcellac F. Letterat. francese 38
Marcolongo R. Equil. corpi elast. 27
 — Meccanica razionale 41
Marro A. Corr. elettr. alternate 21
Marzorati E. Codice perito mis. 18
Mastriqli L. Cantante 16
 — Pianista. 46
Mattei C. Volapük (Dizion.) . . 57
Mazzocchi L. Calci e cementi . 16
 — Cod. d. perito misuratore. 18
Mazzocolo E. Legge comunale 37
Melani A. Architett. italiana . . 12
 — Decoraz. e industrie artist. 23
 — Ornatista 45
 — Pittura italiana. 46
 — Scultura italiana. 51
Melli B. L' Eritrea 27
Menozzi. Alimentaz. bestiame 11
Mercanti F. Animali parassiti . 12
Mezzanotti C. Bonifiche. 15
Mina G. Modellat. meccanico . 43
Minozzi A. Fosfati 30
Minutti R. Letterat. tedesca . . 38
 — Traduttore tedesco 55
Molina E. Antologia stenografica 12
Molina. Curatore dei fallimenti 22
Molina R. Esplorenti. 28
Molon G. Pomologia 47
Mondini. Produzione dei vini . 48
Montagna A. Fotosmaltografia 30
Montalcini C. L. elett. politica . 37
Montemartini L. Fisiol. veget. . 29
Moreschi N. Antichità private 12
Morgana G. Gramm. olandese. 33
Morini U. Uffic. (Man. per l') . 56
Morselli E. Sociologia generale 52
Motta G. Telefono 54
Muffone G. Fotografia 30
Müller L. Metrica Greci e Rom. 42
Müller O. Logaritmi 39
Murari O. Fisica. 29
 — Telegrafia senza fili. 54
Murari R. Ritmica. 50
Musatti E. Leggende popolari. 37
Muzio C. Medico pratico 41
 — Malattie dei paesi caldi . . 40
Naccari G. Astronomia nautica 14
Nallino A. Arabo parlato 12
Namias R. Fabbr. degli specchi 52
 — Processi fotomeccanici . . . 47
 — Chimica fotografica. 17
Nazari O. Dialetti italici 23
Negrin C. Paga giornaliera . . . 45
Nenci T. Bachi da seta 14
Niccoli V. Alimentaz. bestiame 11
 — Cooperative rurali. 21
 — Costruzioni rurali 28
 — Prontuario dell'agricoltore. 10
 — Meccanica agraria. 41
Nicoletti A. Stenogaafia 52
 — Esercizi di stenografia . . . 52
Nonin A. Il Garofano 31
Noseda E. Legislaz. sanitaria 37
 — Lavoro delle donne e fanc. 37
Nuyens A. Diz. italiano-oland. 25
Olivari G. Filonauta 29
Olmo C. Diritto ecclesiastico. . 23
Orlandi G. Celerimensura 17
Orsi P. Storia d'Italia. 53
Orsini E. Scacchi 50
Ostwald-Bolis. Chimica analitica 17
Ottavi O. Enologia 27
 — Viticoltura 57
Ottino G. Bibliografia. 15
Pagani C. Assicuraz. sulla vita 13
Paganini A. Letterat. francese 38
Paganini P. Fotogrammetria. . 30
Palombi A. Manuale postale . . 47
Palumbo R. Omero 44
Panizza F. Aritmetica razion. 13
 — Aritmetica pratica. 13
 — Esercizi di Aritmetica raz. 13
Paoloni P. Disegno assonom. . 24
Pappalardo A. Spiritismo. 52
 — Telepatia. 45
Parise P. Ortofrenia. 54
Paroli E. Grammatica svedese 34
Pascal T. Tintura della seta . 55
Pascal E. Calcolo differenziale 16
 — Calcolo integrale. 16
 — Calcolo delle variazioni . . 16

Pascal E. Determinanti. 23	Pucci A. Frutta minori. 31
— Esercizi di calcolo 16	Pucci A. Piante e fiori. 46
— Funzioni ellittiche 31	Rabbeno A. Mezzeria. 42
— Gruppi di trasformazioni . . . 34	— Ipoteche (Manuale per le) . . . 36
— Matematiche superiori 41	Racioppi F. Ordinamento degli
Pattacini G. Conciliatore 20	Stati liberi d'Europa. 45
Pavanello F. A. Verbi latini 56	— Idem, fuori d'Europa 45
Pavia L. Grammatica tedesca. 34	Raina M. Logaritmi 39
— Grammatica inglese 33	Ramorino F. Letterat. romana. 38
— Grammatica spagnuola 34	— Mitologia (Dizionario di) . . . 43
Pavolini E. Buddismo 15	Rebuschini E. Mal. del sangue. 40
Pedicino N. A. Botanica 15	— Organoterapia 45
Pedretti G. Automobilista (L'). 14	— Sieroterapia 51
Pedrinl. Casa dell' avvenire 17	Regazzoni J. Paleoetnologia . . 45
Pegillon V. Filossera 29	Repossi A. Igiene scolastica. . 34
Perassi T. G. Sintassi latina. . . . 51	Restori A. Letterat. provenzale 38
Percossi R. Calligrafia. 16	— Letteratura catalana 37
Perdoni T. Idraulica 34	Revel A. Letteratura ebraica . . 38
Petri L. Computisteria agraria 20	Ricci A. Marmista 41
Petzholdt. Bibliotecario 15	Ricci E. Chimica 17
Piazzoli E. Illuminaz. elettrica 35	Ricci S. Epigrafia latina. 27
Piccinelli F. Società Ind. p. az. 51	— Archeologia. Arte greca . . . 12
— Valori pubblici 56	— Arte etr. e rom. 12
Piccinini P. Farmacoterapia 29	Ricci V. Strumentazione 53
Piccoli D. V. Telefono 54	Righetti E. Asfalto 13
Pieraccini A. Assist. dei pazzi 13	Rivelli A. Stereometria 52
Pilo M. Estetica. 28	Roda F.lli. Floricoltura 29
— Psicologia musicale 48	Rodari D. Sintassi francese. . . . 51
Pincherle S. Algebra element. 11	— Esercizi sintattici 27
— Algebra complementare 10	Romanelli-M. G. Trine al fusello 56
— Esercizi di algebra elem. 11	Ronchetti G. Pittura per dilet. 47
— Esercizi di geometria 27	— Grammatica d. disegno 24
— Geometr. metr. e trigonom. . . . 32	Roscoe H. E. Chimica 17
— Geometria pura 32	Rossetto V. Arte militare. 53
Pinchetti P. Tessitore 54	— Avarie e sinistri marittimi 14
Pini P. Epilessia 27	Rossi A. Liquorista. 39
Pisani A. Mandolinista 41	— Profumiere 48
— Chitarra 18	Rossi G. Costruttore navale . . . 22
Pizzini L. Disinfezione 24	Rossotti M. A. Formul. di matem. 30
— Microbiologia 42	Rota G. Ragioneria cooperat. 49
Pizzi I. Letteratura persiana . . . 38	— Contabilità (v. Beneficenza) 15
— Islamismo 36	Ruata G. Ufficiale sanitario . . . 56
— Letteratura araba 38	Saccheri P. G. L'Euclide emendato 28
Piebanl B. Arte della memoria 13	Sacchetti G. Tecnologia monet. 54
Polacco L. Tav. Div. Comm. 54	Salvatore A. Infort. sul lavoro 37
Poloni G. Magnet. ed elettricità 40	Sanarelli. Igiene del lavoro . . . 34
Pompilio. Panificazione 46	Sandrlnelli G. Resisten. mater. 49
Porro F. Spettroscopio 52	Sannino F. A. Cognac 19
— Gravitazione 34	Sansoni F. Cristallografia. 22
Portigliotti G. Psicoterapia 48	Santi B. Diz. dei Comuni ital. 25
Pozzi G. Regolo calcolatore 49	Santilli. Selvicoltura 51
Prat G. Grammatica francese. 33	Sanvisenti B. Letteratura spag. 38
— Esercizi di traduzione 28	Sardi E. Espropriazioni. 28
Prato G. Cognac. 19	Sartori G. Latte, burro e cacao 36
— Vini bianchi 57	— Caseificio 17
Prato M. Industria tintoria 35	Sartori L. Carta (Industr. della) 17
Proctor R. A. Spettroscopio 52	Sassi L. Carte fotografiche . . . 17
Prout E. Strumentazione 53	— Ricettario fotografico 50

- Sassi L.** Proiezioni (Le) 48
 — Fotocromatografia 30
Sávornan. Coltiv. d. piante tess. 46
Scarpis U. Teoria dei numeri. 54
Scartazzini G. A. Dantologia. . 23
Schenck E. Resist. travi metal. 49
Schiaparelli G. V. L'astronomia
 n. antico testamento. 14
Schiavenato A. Diz. stenogr. . 25
Scolari C. Dizionario alpino. . 25
Secco-Suardo. Ristau. dipinti . 50
Seghieri A. Scacchi. 50
Seila A. Fisica cristallografica 29
Serina L. Testamenti 55
Sernagiotto R. Enol. domestica 27
Sessa G. Dottrina popolare . . 26
Setti A. Man. del Giurato . . . 33
Severi A. Monogrammi. 43
Siber-Millot C. Molini (Ind. dei) 43
Solazzi E. Letteratura inglese. 38
Soldani G. Agronom. moderna 10
Solerio G. P. Rivoluz. francese 50
Soli G. Didattica 23
Spagnotti P. Verbi greci . . . 56
Spataro D. Fognat. cittadina . 30
Stecchi R. Chirurgia operat. . 18
Stoppani A. Geografia fisica. . 32
 — Geologia 32
 — Prealpi bergamasche . . . 47
Stoppato A. Diritto penale . . 24
Stoppato L. Fonologia italiana 30
Strafforello G. Alimentazione . 11
 — Errori e pregiudizi 27
 — Letteratura americana . . . 38
Straticò A. Letterat. albanese. 37
Streker. Elettrotecnica 27
Strucchi A. Cantiniere. 16
 — Enologia 27
 — Viticoltura 57
Supino R. Chimica clinica . . . 17
Tabanelli N. Codice del teatro 19
Taccani A. Zuccherò (Fabbr. d.) 57
Tacchini A. Metrologia 42
Tamaro D. Frutticoltura 31
 — Gelsicoltura 32
 — Orticoltura. 45
 — Uve da tavola. 56
Tami F. Nautica stimata. . . . 44
Tampelini G. Zootecnia 57
Taramelli A. Prealpi bergamas. 47
Teloni B. Letteratura assira . . 38
Thompson E. M. Paleografia . . 45
Tioli L. Acque minerali e cure 10
Tognini A. Anatomia vegetale. 12
Tolesani D. Enimistica 27
Tommasi M. R. Convers. volapük 57
Tonizzo G. St. ant. (La Grecia) 53
Tonta I. Raggi Röntgen 50
Tonzig C. Ufficiale sanitario. . 56
Tozer H. F. Geografia classica. 32
Trabalza C. Insegn. dell'italiano 36
Trambusti A. Igiene del lavoro 47
Trasporti e tariffe ferroviarie . . 55
Trevisani G. Pollicoltura 47
Tribolati F. Araldica (Gramm.) 12
Triconi E. Medicat. antisettica 41
Trivero C. Classific. d. scienze 18
Ulivi P. Industria frigorifera 35
Untersteiner A. Storia musica. 53
Untersteiner L. Uccelli canori. 56
Vacchelli G. Calcestruzzo 16
Valenti A. Aromatici e nervini 13
Valentini N. Chimica legale . . 17
Valletti F. Ginnast. femminile. 32
 — Ginnastica (Storia della). . 32
Valmaggi L. Gramm. latina. . . 33
Vanbianchi C. Autografi. 14
Vecchio A. Cane (Il) 16
Vender V. Acido solforico, ecc. 10
Venturoli G. Concia pelli 20
 — Conserve alimentari 20
Vidari E. Diritto commerciale. 23
 — Mandato commerciale . . . 40
Vidari G. Etica. 28
Villani F. Distillaz. del legno. 24
 — Soda caustica 52
Vinassa P. Paleontologia. . . . 45
Virgili F. Cooperazione 21
 — Economia matematica . . . 25
 — Statistica. 52
Viterbo E. Grammatica Galla 33
Vitta C. Giustizia amministr. . 33
Vivanti G. Funzioni analitiche 31
 — Comp. matematica 41
Voigt W. Fisica cristallograf. . 29
Voinovich. Grammatica russa . 34
 — Vocabolario russo 57
Volpini C. Cavallo. 17
 — Proverbi sul cavallo 48
Webber E. Macchine a vapore 39
 — Dizionario tecnico italiano-
 tedesco-francese-inglese. . . . 28
Werth F. Galvanizzazione . . . 31
Will. Tav. analit. (v. Chimico) 17
Wittgens A. Antic. pubbl. rom. 12
W/h R. Malattie crittogam. . . 40
Zambelli A. Manuale di con-
 versaz. italiano-volapük . . . 57
Zambler A. Medicat. antisett. . 41
Zampini G. Bibbia (Man. della) 15
 — Imitazione di cristo. 35
Zigány-Arpád. Lett. ungherese. 38
Zoppetti V. Arte mineraria. 13-42
 — Siderurgia 51
Zubiani A. Tisici e sanatorii . 55
Zucca A. Acrobatica e atletica 10





620.1 Q406 c.1

Resistenza dei materiali e stabilit



087 143 669

UNIVERSITY OF CHICAGO

