Южный федеральный университет
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Учебный центр «Знание»

Международная конференция Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — III

Конференция посвящена памяти доктора физико-математических наук, профессора Игоря Борисовича Симоненко (1935–2008) — блестящего ученого и замечательного человека.

Тезисы докладов

02–06 июня 2013 года
г. Ростов-на-Дону

УДК 330.4+504+37 1Л4
Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — III» в г. Ростове-на-Дону. Конференция посвящена памяти доктора физико-математических наук, профессора Игоря Борисовича Симоненко (1935–2008) — блестящего ученого и замечательного человека. Тезисы докладов. Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, Ростов н/Д, 2013. — 119 с. ISBN 978-5-87872-709-9

Программный комитет: А. Н. Карапетянц, д.ф.-м.н., доцент — председатель; С. Г. Самко, д.ф.-м.н., профессор — сопредседатель (Россия, Португалия); О. Г. Авсянкин, д.ф.-м.н., доцент; В. А. Бабешко, д.ф.-м.н., академик РАН; В. И. Буренков, д.ф.-м.н., профессор (Великобритания, Казахстан); М. Л. Гольдман, д.ф.-м.н., профессор; Б. И. Голубов, д.ф.-м.н., профессор; Я. М. Ерусалимский, д.ф.-м.н., профессор; М. И. Карякин, к.ф.-м.н., доцент; И. Р. Лифлянд, к.ф.-м.н., профессор (Израиль); А. Б. Нерсесян, д.ф.-м.н., академик НАН Армении (Армения); В. С. Пилиди, д.ф.-м.н., профессор; В. С. Рабинович, д.ф.-м.н., профессор (Мексика); А. П. Солдатов, д.ф.-м.н., профессор; М. А. Сумбатян, д.ф.-м.н., профессор; Р. М. Тригуб, д.ф.-м.н., профессор (Украина); З. Б. Цалюк, д.ф.-м.н., профессор; А. А. Шкаликов, д.ф.-м.н., профессор; Б. Я. Штейнберг, д.ф.-м.н., ст. научн. сотр.

Оргкомитет: А. Н. Карапетянц, д.ф.-м.н., доцент — председатель; О. Г. Авсянкин, д.ф.-м.н., доцент — сопредседатель; Б. Г. Вакулов, к.ф.-м.н., доцент; А. В. Гиль, к.ф.-м.н., доцент; В. Б. Дыбин, к.ф.-м.н., доцент.

Секретарь оргкомитета: Л. В. Новикова, к.ф.-м.н., доцент.

Помошник председателя программного и организационного комитета: М. А. Карапетянц.

Тематика конференции связана с различными областями математики: гармоническим анализом, функциональным анализом, теорией операторов, дифференциальными уравнениями и дробным анализом, интенсивно развивающимися в последнее время. Актуальность тематики связана с исследованием сложных объектов, требующих, в частности, привлечения операторов с переменными параметрами и функциональных пространств с дробными и переменными размерностями.

Конференция проходит при поддержке РФФИ, проект № 13-07-06023-г
и факультета математики, механики и компьютерных наук ЮФУ

Я. М. Ерусалимский, В. С. Рабинович

ИГОРЬ БОРИСОВИЧ СИМОНЕНКО УЧЕНЫЙ, УЧИТЕЛЬ, ЧЕЛОВЕК

Прошло пять лет со дня смерти видного российского математика, Заслуженного деятеля науки Российской федерации, доктора физико-математических наук, профессора, Соросовского профессора, заведующего кафедрой алгебры и дискретной математики Ростовского государственного университета (ныне — Южный федеральный университет) Игоря Борисовича Симоненко (1935–2008).

Детство Игоря Симоненко было прервано войной. Трудный дороги эвакуации привели его с мамой из Киева в Сальские степи, где их догнали фашисты. Так он узнал страшное слово оккупация, а затем и светлое слово освобождение. Ясно, что никаких регулярных школьных занятий от начала войны и до 1943 года, когда они с мамой вернулись в Луганск, у Игоря не было. В 1947 г. после окончания семилетки поступил учиться в Луганский машиностроительный техникум, который окончил в 1953 г. В том же году начал работать мастером тендерно-механического цеха машиностроительного завода им. Октябрьской революции и поступил на 1 курс заочного отделения физико-математического факультета Ростовского государственного университета. После успешного окончания первого курса его переводят на дневное отделение физмата. Среди преподавателей И. Б. особо выделял Е. Л. Литвера, М. Г. Хапланова, С. Я. Альпера. Факультетская жизнь тех времен была отмечена двумя важными событиями — приездом в Ростов молодых, талантливых механиков И. И. Воровича, Н. Н. Моисеева (оба впоследствии — академики РАН) и Л. А. Толоконникова, организовавших семинар по функциональному анализу, и переездом из Казани профессора Ф. Д. Гахова, ставшего научным руководителем Игоря Борисовича. На формирование молодого ученого существенное влияние оказали его молодые коллеги по кафедре дифференциальных и интегральных уравнений: Г. С. Литвинчук, В. Черский, Э. И. Зверович, Н. В. Говоров, С. Г. Самко, Н. К. Карапетянц, а также молодые математики и механики, учившиеся с ним или работавшие на факультете: В. И. Юдович, В. П. Захарюта, Ю. П. Красовский, А. Л. Фуксман, Ю. А. Устинов, В. Т. Фоменко.

Игорь Борисович уже студентом вошел под руководством Ф. Д. Гахова в большую математику. Его дипломная работа была удостоена медали М. В. Ломоносова на всесоюзном конкурсе студенческих работ. Свою кандидатскую диссертацию «Исследования по теории сингулярных интегральных уравнений» (1961 г.) он посвятил ряду классических вопросов теории краевой задачи Римана, что соответствовало канонам школы Ф. Д. Гахова. В своей докторской диссертации «Операторы локального типа и некоторые другие вопросы теории линейных операторов» (1967 г.) И. Б. Симоненко заявил о себе как о самостоятельном, оригинальном ученом. Результаты диссертации давно стали классическими и называются «Локальный принцип И. Б. Симоненко».

Уже этого достаточно для того, чтобы говорить о нем как о выдающемся математике, но мощь его научного интеллекта и широта кругозора позволяли ему работать в разных областях и добиваться глубоких результатов. Назовем некоторые из них: работы (совместно с В. П. Захарютой и В. И. Юдовичем) по задачам электростатики в областях сложной природы; обоснование метода осреднения и его применение к задачам гидродинамики; математические задачи гидроакустики в стратифицированных средах; цикл работ по гомотопической классификации и вычислению индекса семейства сингулярных интегральных операторов; оценки для квазиполиномов и эффективное решение эллиптических задач в областях с углами.

Особую роль в жизни самого И. Б., его учеников, последователей и соратников играл научный семинар И. Б. Симоненко, известный не только у нас в стране, но и далеко за её пределами. Назовем некоторых докладчиков: С. Г. Михлин, И. Ц. Гохберг, Н. Я Крупник, Б. А. Пламеневский, П. Е. Соболевский, А. И. Вольперт, А. С. Маркус, Л. Р. Волевич, Б. В. Федосов, М. А. Шубин, А. П. Солдатов, Р. В. Дудучава, А. С. Дынин, Б. Зильберман, А. Бётчер, М. В. Федорюк, Г. С. Литвинчук, И. М. Спитковский, Н. Л. Василевский, А. Б. Антоневич, Ю. И. Карлович, Н. В. Врагов, С. Г. Самко, Н. К. Карапетянц.

Назовем также некоторых из математиков, докторские диссертации которых оппонировал Игорь Борисович: Б. А. Пламеневский, Р. В. Дудучава, И. М. Спитковский, Н. Л. Василевский, Н. К. Карапетянц, Ю. И. Карлович.

Научная школа И. Б. Симоненко мощна и многочислена. Среди его учеников 30 кандидатов наук и 7 докторов наук. Блестящим детищем профессора И. Б. Симоненко яляется и созданная им в 1972 г. кафедра алгебры и дискретной математики, которой он заведовал до своей смерти в 2008 г. На кафедре И. Б. поставил все основные курсы: математический анализ, алгебру, алгебру и геометрию, математическую логику, дискретную математику. Любимым курсом самого И. Б. всегда был математический анализ. Студенты высоко ценили и уважали Игоря Борисовича, чувствуя в нем не только наставника, но и старшего товарища и коллегу. Особенно доброжелателен к студентам был И. Б. на экзаменах, считая главным понимание предмета, а не его «вызубривание».

В списке научных работ И. Б. Симоненко свыше 200 наименований, среди них есть не только научные статьи, монографии, но и учебные пособия, а также научно популярные работы, которые он написал, будучи Соросовским профессором.

К семидесятилетию Игоря Борисовича вышел специальный том журнала «Operator Theory: Advances and Applications» (vol. 170 «Modern Operator Theory and Applications») в котором имеется подробная биография Игоря Борисовича, списки его работ и его учеников. К сожалению, до своего семидесятипятилетия он не дожил, и эти списки остаются последними из опубликованных. Подробно о жизни и творчестве этого замечательного человека, ученого и педагога см. http://mmcs.sfedu.ru/~simonenko/index.php.

Б. Я. Штейнберг

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ И. Б. СИМОНЕНКО.

Кафедра Алгебры и дискретной математики 5 лет существует без ее основателя Игоря Борисовича Симоненко, но потенциал, заложенный основателем, сказывается на ее развитии. Суть этого потенциала в подборе кадров, в созданных традициях и в том примере выполнения миссии преподавателя вуза, который являл собой Игорь Борисович, и который остался в памяти его последователей.

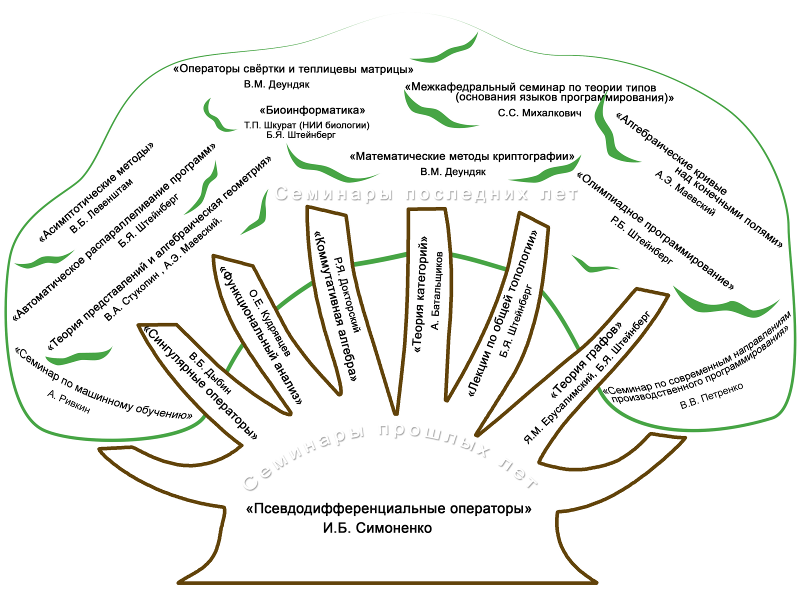
Игорь Борисович рано получил успех в исследовании сингулярных операторов и мог бы этот успех развивать, написав множество статей в престижных научных журналах. Но любовь к математике во всех ее проявлениях, истинная любознательность ученого, смелость обращения к новым задачам и пренебрежение к утверждению своей личности толкали Игоря Борисовича к исследованиям в новых для него областях: в электростатике, гидроакустике, дискретной математике и пр. Например, исследования в оценках погрешностей численных методов были опубликованы только как методические пособия для студентов. И такое отношение к исследованиям и к учебному процессу передалось многим ученикам его и сказалось на развитии кафедры.

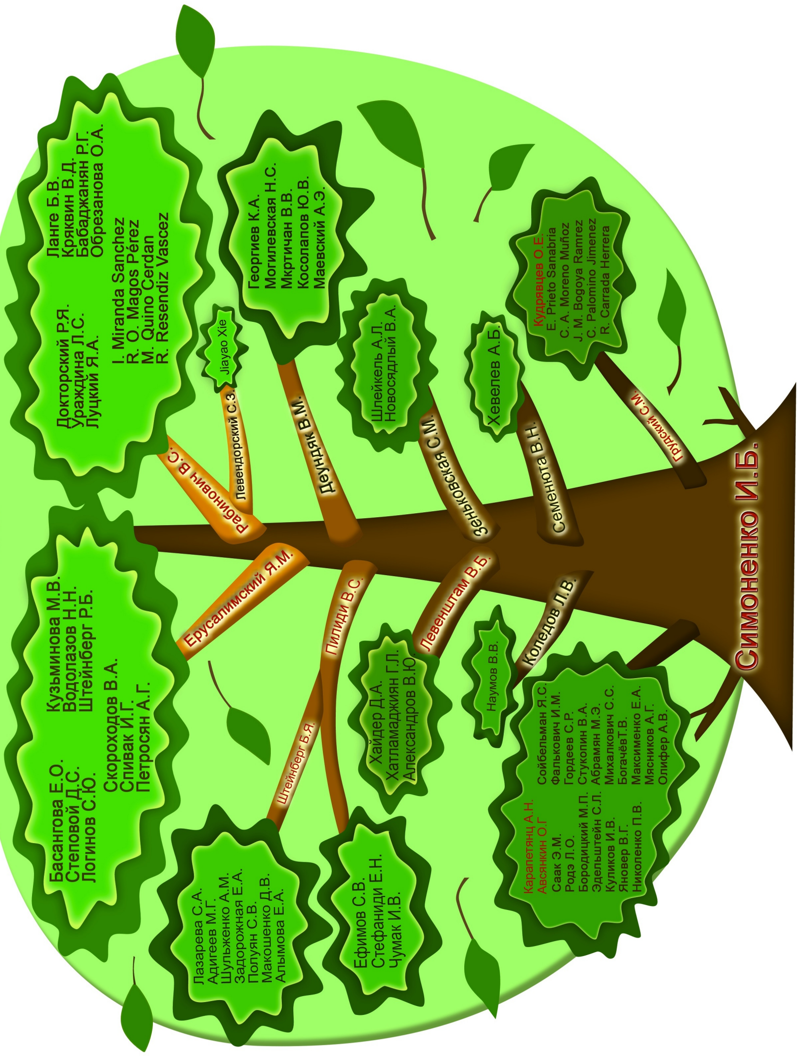
Научный семинар Игоря Борисовича «Псевдодифференциальные операторы» ученые других городов оценивали как один из лучших научных семинаров в СССР. Иногда Игорь Борисович проводил и факультативные семинары для студентов (по теории групп, по метрическим пространствам). На кафедре АДМ на сегодняшний день работает 9 факультативных семинаров! В большинстве из них участвуют одновременно и студенты, и аспиранты и преподаватели.

За 5 прошедших лет под влиянием И. Б. Симоненко защищено 4 докторские диссертации: двумя сотрудниками кафедры и еще двумя доцентами, у которых Игорь Борисович был научным консультантом. Кандидатских диссертаций за прошедшие 5 лет защищено 11. Написано монографий — 15, учебников и учебно-методических пособий — 32. На кафедре под руководством ведущих преподавателей действуют 3 магистерские программы: по чистой математике, по алгебраическим методам в криптографии и по высокопроизводительным вычислениям. Кафедра принимает активное участие в работе факультетских научно-образовательных центров по математике и по Информационным технологиям (руководители — профессора кафедры). Эти научно-образовательные центры — победители конкурсов грантов Минобрнауки. На кафедре АДМ развиваются возникшие еще при Игоре Борисовиче и занимающие лидирующие позиции в РФ программные проекты: «Веб-среда программирования PascalABC.NET», «Электронный задачник по программированию Ptaskbook», «Оптимизирующая распараллеливающая система». Ведутся работы по грантам и хоздоговорные работы, открыта учебно-научно-производственная лаборатория «Ангстрем-ЮФУ».

Среди многочисленных достижений студентов и аспирантов следует отметить следующие: Победитель открытого конкурса Минобрнауки на лучшую научную студенческую работу по математике, Диплом «Исключительный» на Всероссийской конференции Майкрософт, 4 участника Летней Международной Школы программирования Интел, 2 участницы Международной школы по биоинформатике, 2 стипендии Президента РФ, более 10 именных стипендий фонда Потанина и примерно столько же стипендий банка Центр-Инвест.

Известные экономические проблемы последних десятилетий привели к старению преподавательского корпуса в стране. Это рождает тревогу о преемственности научных знаний и сохранении научных школ и традиций. На кафедре много молодых (моложе 35 лет) перспективных сотрудников. Среди них победители конкурса «Лучший молодой преподаватель ЮФУ», 1-е место на конкурсе молодых ученых Всероссийской школы программирования НИУ ИТМО, 1-е место на Всероссийском конкурсе «Интернет-математика», 3 участника грантов Минобрнауки мобильности молодых ученых НИУ ИТМО. Многие проходят стажировки по международным программам, все участвуют в грантах. Из 8 молодых сотрудников кафедры 7 кандидатов наук и еще один диссертацию дописывает. Все эти 8 молодых сотрудников занимают всего лишь 5 ставок — есть еще большой резерв для развития кафедры и факультета. Кроме того, на кафедре учатся около 20 аспирантов по очень разным специальностям, что соответствует широте научных интересов И. Б. Симоненко. У кафедры И. Б. Симоненко есть будущее!





Дерево учеников И. Б. Симоненко, у которых хотя бы на одной из диссертаций есть его фамилия, как научного руководителя или консультанта. Рисунки выполнены Анной Штейнберг.

Секция I
Функциональный анализ и теория операторов

О. Г. Авсянкин (Ростов-на-Дону)
avsyanki@math.rsu.su

МНОГОМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С КВАЗИОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ

Пусть $\mathbb{B}_n$ — единичный шар в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{B}_n} q(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{B}_n,$$

предполагая, что функция $q(x,y)$ определена на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и при этом:

1° ν-однородна (квазиоднородна) степени α ($\nu > 0$, $\nu \neq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$), т. е.
$$q(\mu x, \mu^\nu y) = \mu^\alpha q(x,y), \quad \forall\ \mu > 0;$$

2° инвариантна относительно группы вращений $SO(n)$, т. е.
$$q(\omega(x), \omega(y)) = q(x,y), \quad \forall\ \omega \in SO(n);$$

3° $q(e_1, y)|y|^{-\beta} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, где $\beta = (\alpha + \nu n)/(\nu - 1)$.

Оператор K рассматривается в пространстве

$$L_p^{\beta-n/p}(\mathbb{B}_n) = \Big\{\psi(x)\colon |x|^{\beta-n/p}\psi(x) \in L_p(\mathbb{B}_n)\Big\}, \quad 1 < p < \infty.$$

Выясняются условия нетеровости оператора $\lambda I - K$, где $\lambda \in \mathbb{C}$. Показано, что условие $\lambda \neq 0$ является необходимым и достаточным условием нетеровости оператора $\lambda I - K$ в пространстве $L_p^{\beta-n/p}(\mathbb{B}_n)$.

Кроме того, рассмотрены операторы более общего вида:

$$(A\varphi)(x) = \lambda\varphi(x) - \int\limits_{\mathbb{B}_n} k(x,y)\varphi(y)\,dy - \int\limits_{\mathbb{B}_n} q(x,y)\varphi(y)\,dy,$$

где функция $k(x,y)$ однородна степени $(-n)$, т. е.

$$k(\mu x, \mu y) = \mu^{-n} k(x,y), \quad \forall\ \mu > 0,$$

и удовлетворяет условиям 2° и 3°. Для оператора A получены необходимые и достаточные условия нетеровости и формула для вычисления индекса.

А. Б. Антоневич (Минск / Белосток),
Е. Ю. Леонова (Минск)
antonevich@bsu.by

РАСШИРЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА

При анализе ряда задач встречаются выражения, заданные той же формулой, что и классическое преобразование Лежандра, но в действительности имеющие несколько иную природу и являющиеся расширениями преобразования Лежандра. В работе проведен анализ некоторых таких расширений.

Примером может служит утверждение, известное как вариационный принцип для спектрального радиуса $R(B)$ операторов взвешенного сдвига $Bu(x) = a(x)u(\alpha(x)$, порожденных отображением $\alpha : X \to X$ компактного пространства. Согласно этому принципу (при определенных условиях) имеет место равенство $\ln R(B) = \lambda(\varphi)$, где

$$\lambda(\varphi) = \max_{\nu \in M_\alpha(X)} \Big\{ \int_X \varphi d\nu - \tau_\alpha(\nu) \Big\}, \tag{1}$$

$\varphi(x) = \ln|a(x)|$, $M_\alpha(X)$ есть множество регулярных вероятностных борелевских мер на пространстве X, инвариантных относительно отображения α, $\tau_\alpha(\nu)$ – некоторый выпуклый функционал на $M_\alpha(X)$, называемый $T-$энтропией.

Функционал $\lambda(\varphi)$ в (1) задан той же формулой, что и преобразование Лежандра функционала $\tau_\alpha(\nu)$. Но при классическом определении такого преобразования двойственный функционал рассматривается на исходном пространстве $C(X)$, а для для функций a, которые принимают значение нуль, функция $\varphi(x) = \ln a(x)$ не принадлежит пространству $C(X)$. Тем самым в вариационный принцип (1) входит *расширенное преобразование Лежандра* — преобразование, ставящее в соответствие функционалу $\tau_\alpha(\nu)$ функционал $\lambda(\varphi)$, определенный на более широком пространстве, чем исходное пространство $C(X)$.

Один из вопросов, который обсуждается в работе, связан со следующим наблюдением, показывающим существенное отличие свойств. Как известно, преобразование Лежандра является полунепрерывным снизу функционалом, а спектральный радиус является разрывным снизу и при этом полунепрерывным сверху. При рассмотрении расширенного преобразования Лежандра эти свойства оказываются совместимыми.

Р. Я. Арсанукаев (Грозный)

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПСЕВДОВОГНУТЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В работе рассматриваются операторные нелинейные уравнения вида

$$Au = u, \tag{1}$$

где A принадлежит классу псевдовогнутых операторов $\Lambda_{\beta}^{\alpha}, 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$ и действует в полуупорядоченном с помощью конуса K векторном пространстве.

Теорема 1. *Пусть компонента $K_q \in K_+$ является полным метрическим пространством на метрике Биркгофа*

$$\rho(u, v) = \ln d(u, v) \tag{2}$$

Пусть оператор $A \in \Lambda_{\beta}^{\alpha}, \alpha \leqslant \beta$ и оставляет инвариантным компоненту K_q.

Тогда уравнение (1) *имеет в K_q единственное решение $u^*(x)$, которое можно найти методом последовательных приближений*

$$u_n = Au_{n-1}, \quad n = 1, 2, ...,$$

начиная с любого элемента $u_0 = K_q$

Р. А. Бандалиев (Баку)
bandalievr@rambler.ru

Связь некоторой системы нелинейных дифференциальных уравнений с неравенством Харди в пространстве Лебега со смешанной нормой и с переменными показателями суммируемости

Пусть R^2-Евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2)$ и $R_{++}^2 = (0, \infty) \times (0, \infty)$. Предположим, что $\mathbf{p}(x) = (p_1(x_1, x_2), p_2(x_2))$-вектор-функция определенная в R_{++}^2 и с измеримыми по Лебегу компонентами удовлетворяющими неравенствам $1 \leq p_1(x) < \infty,\ 1 \leq p_2(x_2) < \infty$ и $p_i' = \frac{p_i}{p_i - 1}$.

Определение 1. *Пространство $L_{\mathbf{p}(x)}\left(R_{++}^2\right)$ определяется как пространство измеримых на R_{++}^2 функций f таких, что $\|f\|_{L_{\mathbf{p}(x)}\left(R_{++}^2\right)}$ $= \left\| \|f\|_{p_1, x_1} \right\|_{p_2, x_2} < \infty.$*

Теорема 1. *Пусть* $1 < p_1 \le q_1(x) \le \overline{q}_1 < \infty$ *и* $1 < p_2 \le q_2(x_2) \le \overline{q}_2 < \infty$. *Предположим, что* v_i *и* ω_i*-весовые функции определенные на* $(0,\infty)$ *и для всех* $t \in (0,\infty)$ *существует производная* $\omega_i'(t)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

a) существует положительное решение следующей системы с локально абсолютно непрерывным производным первого порядка уравнения

$$\begin{cases} \left\| v_1\, y_1^{1/p_1'} \right\|_{L_{q_1(\cdot,x_2)}(x_1>t)} - \lambda_1 \omega_1(t) \left(y_1'(t)\right)^{1/p_1'} = 0, \\ \left\| v_2\, y_2^{1/p_2'} \right\|_{L_{q_2(x_2)}(x_2>t)} - \lambda_2 \omega_2(t) \left(y_2'(t)\right)^{1/p_2'} = 0; \end{cases}$$

$$y_i(t) > 0,\ \ y_i'(t) > 0,\ \ y_i \in AC(0,\infty),$$

где $\lambda_i > 0$;

b) имеет место весовая оценка

$$\left\| \|u\|_{q_1, v_1, x_1} \right\|_{q_2, v_2\, x_2} \le C_0 \left\| \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right\|_{p_1,\omega_1} \right\|_{p_2,\omega_2},$$

где $u \in AC\left(R^2_{++}\right)$, $\begin{cases} u\,(0,x_2) = \lim\limits_{x_1\to+0} u\,(x_1,x_2) = 0, \\ u\,(x_1,0) = \lim\limits_{x_2\to+0} u\,(x_1,x_2) = 0; \end{cases}$ *и* $C_0 > 0$ *постоянная не зависящая от* u.

Л. Е. Бритвина (Великий Новгород)
Lyubov.Britvina@novsu.ru

СВЕРТОЧНЫЕ КОНСТРУКЦИИ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Данное исследование посвящено изучению сверточных конструкций, содержащих дифференциальные операторы. В частности, рассматриваются обобщенные свертки с весом $\alpha(x)$, порождаемые интегральным преобразованием Ханкеля

$$F_\nu(x) = \mathrm{H}_\nu[f](x) = \int\limits_0^\infty f(t) t J_\nu(xt)\, dt\,, \quad x \in \mathbf{R}_+ \qquad (1)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития НовГУ.

и обладающие факторизационным свойством

$$\mathrm{H}_\nu[h](x) = \alpha(x)\mathrm{H}_\mu[f](x)\mathrm{H}_\lambda[k](x). \tag{2}$$

Преобразование Ханкеля и его свертки имеют многочисленные приложения к решению самых различных задач: вычисление интегралов, решение дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, решение задач математической физики с аксиальной симметрией и т.д.

Если одну из функций в обобщенной свертке, например $k(t)$, зафиксировать, то данную конструкцию можно рассматривать как интегральное (интегро-дифференциальное) уравнение сверточного типа

$$\mathrm{A} : f \to \left(f_\mu \overset{\alpha}{*} k_\lambda\right)_\nu . \tag{3}$$

Функция $k(t)$ в этом случае будет ядром уравнения A.

В данной работе изучается вопрос существования решения ряда сверточных уравнений, формулируются условия, при которых можно найти явный вид решения, приводятся многочисленные примеры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Britvina L. E.* Integral operators related to generalized convolutions for Hankel transform // Integral Transforms and Special Functions, Volume 20, Issue 10. 2009. P. 785–796.

2. *Britvina L. E.* Generalized convolutions for the Hankel transform and related integral operators // Math. Nach. 280, No 9-10. 2007. P. 962–970.

А. В. Гиль, В. А. Ногин (Ростов-на-Дону)
gil@sfedu.ru

КОМПЛЕКСНЫЕ СТЕПЕНИ ОБОБЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ГЕЛЬМГОЛЬЦА В L_P–ПРОСТРАНСТВАХ [1]

Пусть

$$G_{\overline{\lambda}} = m^2 I + \Delta - \sum_{k=1}^{l} i\lambda_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad m > 0 \tag{1}$$

обобщенный оператор Гельмгольца в $\mathbb{R}^n$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа, $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, $0 < \lambda_k < 1$, $1 \le l \le n$. Комплексные степени оператора $G_{\overline{\lambda}}$ с отрицательными вещественными частями на функциях

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009-2013 годы, Номер госконтракта: 14.A18.21.0356.

$\varphi(x) \in \Phi$ определяются как мультипликаторные операторы, действие которых в образах Фурье сводится к умножению на соответствующую степень символа рассматриваемого оператора:

$$(\widehat{G_{\overline{\lambda}}^{-\alpha/2}\varphi})(\xi) = \left(m^2 - |\xi|^2 + i\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\xi_k^2\right)^{-\alpha/2}\widehat{\varphi}(x), \qquad (2)$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$.

Получены интегральные представления комплексных степеней (2) в виде интегралов типа потенциала $(B_{\overline{\lambda}}^{\alpha}\varphi)(x)$ с нестандартной метрикой.

На функциях $\varphi(x) \in L_p$ отрицательные степени оператора $G_{\overline{\lambda}}$ понимаются как потенциалы $(B_{\overline{\lambda}}^{\alpha}\varphi)(x)$.

Показана ограниченность оператора $B_{\overline{\lambda}}^{\alpha}$ из L_p в $L_p + L_s$ при $1 \le p < \frac{2n-l}{n+\mathrm{Re}\ \alpha-l-1}$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, $\frac{2n-l}{n-\mathrm{Re}\ \alpha+1} < q < \infty$ в случае $l < n$ и из L_p в L_p при $1 \le p \le \infty$ в случае $l = n$.

В рамках метода АОО построено обращение потенциалов $B_{\overline{\lambda}}\varphi$, $\varphi \in L_p$, и дано описание образа $B_{\overline{\lambda}}(L_p)$ в терминах обращающих конструкций.

С. В. Горин (Ростов-на-Дону)
sg@aaanet.ru

ФРЕДГОЛЬМОВОСТЬ ОПЕРАТОРОВ ТИПА СИНГУЛЯРНЫХ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В работе рассматривается пространство функций, бесконечно дифференцируемых на единичной окружности Γ в комплексной плоскости.

Основным результатом является построение алгебры $\mathfrak{B}$ операторов, порожденной

- всеми операторами умножения на бесконечно дифференцируемые на Γ функциями,

- оператором сингулярного интегрирования,

- всеми операторами вида $(R_{t_0}\varphi)(t) = \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}, t_0 \in \Gamma$.

Алгебра $\mathfrak{B}$ содержит в себе все сингулярные интегральные операторы с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Для операторов из $\mathfrak{B}$ определяется символ и доказывается, что

1) фредгольмовость оператора из $\mathfrak{B}$ эквивалентна обратимости его символа;

2) регуляризаторы фредгольмовых операторов из $\mathfrak{B}$ также принадлежат $\mathfrak{B}$.

Рассмотрены обобщения этих утверждений на случай пространств функций, принимающих значения в произвольном гильбертовом пространстве.

А. П. Гринько (Брест)
agrinko_1999@yahoo.com

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ЛОКАЛЬНОГО ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ФОРМУЛЕ ТИПА ТЕЙЛОРА

В работе в качестве оператора локального дробного дифференцирования предлагается использовать оператор типа Маршо:

$$\left(\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon} f\right)(x) = \frac{f^{[\alpha]}(x) - f^{[\alpha]}(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\{\alpha\})\,\varepsilon^{\alpha}} +$$

$$+\frac{\{\alpha\}}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \lim_{\substack{\delta\to 0 \\ H}} \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} \int\limits_{x-\varepsilon}^{x-\delta} \frac{f(x) - f(\tau)}{(x-\tau)^{1+\{\alpha\}}} d\tau.$$

$$0 < \alpha, 0 < \delta < \varepsilon, -\infty < a \le x \le b < \infty, \qquad (1)$$

где предельный переход определяется функциональным пространством H, в котором рассматриваем оператор.

Операторы (1) обладают свойствами аналогичными свойствам обычных производных, например, $\left(\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon} f\right)(x) = \left(\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}(f + const)\right)(x)$. Рассмотрим пространства Гёльдера $H^{\lambda}(a;b)$, см. [1]. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $0 < \{\alpha\} < \sigma < 1, 0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon, f(x) \in H^{\lambda}(a;b), \lambda = [\alpha] + \sigma$, *тогда справедлив следующий аналог формулы Тейлора:*

$$f(x+\varepsilon_1) = f(x) + \sum_{n=1}^{[\alpha]} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\varepsilon_1^n + \frac{\mathcal{D}^{\{\alpha\},-\varepsilon} f^{([\alpha])}(x)}{\Gamma(\alpha+1)}\varepsilon_1^{\alpha} + R(x,\varepsilon,\varepsilon_1), \quad (2)$$

если $\lim\limits_{\varepsilon_1\to 0} \mathcal{D}^{\{\alpha\},-\varepsilon_1} f^{([\alpha])}(x+\varepsilon_1) = \mathcal{D}^{\{\alpha\},-\varepsilon} f^{([\alpha])}(x)$, то $R(x,\varepsilon,\varepsilon_1) = o(\varepsilon_1^{\alpha})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения // Мн., (1987).

В. М. Деундяк (Ростов-на-Дону)
vl.deundyak@gmail.com

НЕКОТОРЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ ЛОКАЛЬНОГО ТИПА[1]

Различными вопросами топологии Игорь Борисович Симоненко начал интересоваться с 60-годов прошлого века. Им совместно с В. И. Юдовичем и В. А. Какичевым был организован первый семинар по топологии на мехмате РГУ. Большое значение имел первый семинар по K-теории (1968 г.), затем, начиная с 1969 года были семинары по топологической и алгебраической теории узлов, по теории гомотопий и гомологий, по геометрической и операторной K-теории. Игорь Борисович впервые на факультете прочел учебный курс по основам общей и алгебраической топологии [1]. Список его научных работ содержит 230 наименований (см. [2]), топологическим задачам посвящено 27 работ, начиная с [3] и заканчивая [4]. Наибольший интерес Игоря Борисовича в этой области связан с теорией индекса фредгольмовых операторов и K-теорией. Его интересовали как общие вопросы теории индекса, так и вычисление индекса и индекса семейств конкретных классов операторов локального типа.

В настоящем докладе содержится небольшой обзор результатов И. Б. Симоненко в этой области, и приведены полученные недавно результаты об индексе операторов в гильбертовых модулях.

Общеизвестна широта научных интересов Игоря Борисовича. Отмечу, что последняя задачу, которую он поставил и обсуждал, была следующая: применить методы K-теории и результаты об индексе семейств, полученные ранее в теории многомерных операторов билокального типа, для нахождения новых эффективных условий применимости проекционных методов для многомерных сверток.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Симоненко И. Б.* Введение в топологию. Ростов-на-Дону: РГУ, 1988, 100 с.

2. mmcs.sfedu.ru/∼simonenko/

3. *Семенюта В. Н., Симоненко И. Б.* Об индексе многомерных дискретных сверток // Математические исследования. 1969. Т. 4, № 2. (Кишинев: Штиинца) С. 88–94.

4 *Deundyak V. M., Simonenko I. B.* On Homotopy Properties and Indices of Families of Singular and Bisingular Operators with Piecewise-Continuous Coefficients//Jornal of Mathematical Sciences. 2005. V. 125, № 6. P. 1593–1599.

[1]. Работа поддержана Минобрнауки РФ, соглашение 14.A18.21.0356.

В. Б. Дыбин, Е. В. Бурцева (Ростов-на-Дону)
vladimir-dybin@yandex.ru, evg-burceva@yandex.ru

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ НА КОНТУРЕ, СОСТОЯЩЕМ ИЗ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ОКРУЖНОСТЕЙ

На комплексной плоскости рассматриваются n непересекающихся ориентированных окружностей различных радиусов. Их объединение образует составной контур Γ , на котором в пространстве $L_p(\Gamma)$ изучается СИО $R_\Gamma(a)$, порождаемый краевой задачей Римана.

Контур Γ называется «допустимой конфигурацией окружностей», если он разбивает комплексную плоскость C на две области D^+ и D^- , где область D^- , расположенная справа от Γ , содержит ∞ , а область $D^+ = C \setminus D^-$ расположена слева от Γ . При малых смещениях окружностей относительно друг друга в одной конфигурации основные формулы и характеристики изучаемого оператора (вид S_Γ и проекторов $P_\Gamma^\pm$, символ оператора, вид обратных к $R_\Gamma(a)$ операторов, дефектные числа) сохраняются. В классе «одинаковых» конфигураций выделяется и изучается некоторый архетип этого класса, а множество всех различных архетипов допустимых конфигураций из n окружностей обозначается ДК (n) . Для каждого архетипа оператор Коши S_Γ является инволюцией, что позволяет строить конструктивную теорию обратимости оператора $R_\Gamma(a)$.

Будем говорить, что контур $\Gamma \in$ ДК (n) имеет сложность, равную m, и записывать $com\Gamma = m$, если найдётся такая точка плоскости z, не лежащая на Γ , что любой путь из z в ∞ требует не менее m пересечений с Γ. Ясно, что $1 \leq com\Gamma \leq n$. Самым простым контуром в ДК (n) является контур, порождающий «n дыр на плоскости». У такого контура $com\Gamma = 1$. Самым сложным контуром в ДК (n) является контур, состоящий из n концентрических окружностей . В этом случае $com\Gamma = n$. Этот случай изучен полностью. Самый простой случай изучен при $n = 2$. Обсуждаются проблемы: 1) изометрического подобия СИО на конфигурациях различных архетипов; 2) появления «странных» инволюций и «странных» СИО; 3) отличия проблем обращения СИО на различных архетипах контура; 4) исследования СИО на конфигурациях, ориентированных произвольным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дыбин В. Б., Бурцева Е. В.* Оператор краевой задачи Римана на кольце и его приложение к одному классу систем уравнений в дискретных свёртках. // Труды научной школы И.Б. Симоненко. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ. 2010. С. 79–92.

2. *Дыбин В. Б., Бурцева Е. В.* Оператор краевой задачи Римана на системе концентрических окружностей и его приложения к одному классу систем уравнений в дискретных свёртках // Вестник ВГУ. Серия: Физика.

Математика. 2012. № 2. С. 109–117.

С. А. Золотых, В. А. Стукопин (Ростов-на-Дону)
stukopin@mail.ru

ОБ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА КОМПОНЕНТ СВЯЗНОСТИ ПРЕДЕЛЬНОГО СПЕКТРА ЛЕНТОЧНЫХ ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ [1]

Важной для приложений является задача описания предельного спектра тёплицевых матриц (см. [1]). Несмотря на значительный прогресс в этой области многие вопросы геометрии предельного спектра являются в настоящее время нерешенными. В работе [3] показано, что предельный спектр содержится в полуалгебраическом множестве X, которое в свою очередь содержится во множестве нулей вещественного многочлена, являющегося результантом семейства многочленов нескольких переменных (см. [2]):

$$A(u, \lambda, x, y) = Res(ReQ(\lambda, x, y), ImQ(\lambda, x, y); u - x^2 - y^2).$$

Обозначим через N степень многочлена $A(u, \lambda, x, y)$. Она оценивается сверху числом $N \leq n_1 \cdot n_2$, где $n_1 = deg(ReQ(\lambda, x, y))$, $n_2 = deg(ImQ(\lambda, x, y))$. Пусть также $n = deg(Q(\lambda, x, y)) = max\{n_1, n_2\}$. Обозначим через r — число компонент связности предельного спектра ленточных тёплицевых матриц. Пусть g — род римановой поверхности совпадающей с алгебраической кривой определяемой результантом. Основной результат заметки — следующая

Теорема. *Имеют место следующие двусторонние оценки:*

$$[\tfrac{n+2}{4}] \leq r \leq \tfrac{(2N-2)(2N-3)}{2}$$

или

$$[\tfrac{n+2}{4}] \leq r \leq \tfrac{(2n_1 \cdot n_2-2)(2n_1 \cdot n_2-3)}{2}, \text{ где}$$

$$n = deg(Q(\lambda, x, y)), n_1 = deg(ReQ(\lambda, x, y)), n_2 = deg(ImQ(\lambda, x, y)).$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Bottcher A. C, Grudsky S. M.* Spectral properties of banded Toeplitz matrices. SIAM, 2005, 411.

2. *Bikker P., Uteshev A.* On the Bezout Construction of the Resultant. — J. Symbolic Computation. 28 (1999), 45–88.

3. *Золотых С. А., Стукопин В. А.* Об описании предельного спектра ленточных тёплицевых матриц. — Вестник ДГТУ. — 2012. — Т. 13, № 8. — С. 5–11.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.A18.21.0356 "Теория функциональных пространств, операторов и уравнений в них".

А. И. Иноземцев (Липецк)
inozemcev.a.i@gmail.com

О ДЕЙСТВИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

В работе содержатся достаточные условия действия оператора с частными интегралами $(Kx)(t) = k_1(t)x(t) + \sum\limits_{i=2}^{2^n} \int\limits_{D_i} k_i(t, S_i)x(s_i)\, dS_i$ в $C(D)$ и в банаховых идеальных пространствах (БИП), где $k_i \colon D \times D_i \to R$ — измеримые функции, интегралы понимаются в смысле Лебега ($n \geqslant 2$), $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in R^n$, $T_1, T_2, \ldots, T_{2^n}$ — подмножества множества $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$, где $T_1 = \varnothing$, $T_2 = \{\tau_1\}, \ldots, T_{2^n} = \tau$. S_i и dS_i — набор переменных τ_j и их дифференциалов $d\tau_j$ соответственно из T_i. Вектор s_i получается заменой компонент вектора t соответствующими элементами T_i. D_i — декартово произведение множеств, на которых определены $\tau_j \in T_i$.

В случае $n = 2$ условия действия оператора K содержатся в работах [1,2].

Теорема 1. *Если D — компакт и оператор K действует в $C\,(D)$, то он непрерывен.*

Измеримые функции $k_i(t, S_i)$ принадлежат $C(L^1(D_i))$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из $\|t - t^0\| < \delta$ следует $\int\limits_{D_i} |k_i(t, S_i) - k_i(t^0, S_i)|\, dS_i < \varepsilon$, и $\sup\limits_D \int\limits_{D_i} |k_i(t, S_i)|\, dS_i = L_i < \infty$.

Теорема 2. *Пусть D — компакт, функция $k_1(t)$ непрерывна на D, а $k_i(t, S_i) \in C(L^1(D_i))$ при $i = 2, 3, \ldots, 2^n$. Тогда K является непрерывным линейным оператором на $C(D)$.*

Теорема 3. *Если X и Y — БИП с носителем D и оператор K с многомерными частными интегралами действует из БИП X в БИП Y, то он непрерывен.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro—Differential Equations. — New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. 560 p.

2. *Калитвин А. С.* Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. 252 с.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.4407.2011).

М. В. Кабанко (Курск)
math@kursksu.ru

ОБ АЛГЕБРЕ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С ОПЕРАТОРАМИ В ГИЛЬБЕРТОВОЙ ПАРЕ[1]

Самый известный пример мультипликаторов матриц – это оператор треугольного усечения. Этот оператор представляет собой произведение матрицы оператора на характеристическую функцию индексов $\chi_\Delta(i,j)$, где $\Delta = \{(i,j) \in \mathbb{N} | j \le i\}$. В.И. Мацаевым была получена оценка для нормы этого оператора $\frac{1}{c}\ln(1+n) \le \|\chi_{\Delta_n}\| \le c\ln(1+n)$ при $\Delta_n = \{(i,j) \in \mathbb{N} | j \le i \le n\}$ (см.[1]).

Пусть $\overline{H} = \{H_0, H_1\}$ – гильбертова пара, где $H_0 = l_2(2^{-n}G_n)$, $H_1 = l_2(2^n G_n)$ и $G_n = \mathbb{C}$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Обозначим $B(\overline{H})$ алгебру ограниченных операторов, действующих в паре $\overline{H}$. Естественным будет рассмотрение представления алгебры $B(\overline{H})$ в интерполяционных пространствах между H_0 и H_1, например в $l_2(G_n)$, обозначаемое $(l_2(G_n), \varphi)$ (см. [2],[3]). При этом образ $\varphi(B(\overline{H}))$ является подалгеброй в $B(l_2(G_n))$.

Пусть $M = (m_{ij})_{i,j=-\infty}^{\infty}$ некоторая матрица, тогда будем обозначать $M \circ A$ – произведение Адамара-Шура, имеющее матрицу $(m_{ij}a_{ij})_{i,j=-\infty}^{\infty}$ относительно оператора A.

Теорема. *Если $A \in \varphi(B(\overline{H}))$, то оператор $\chi_\Delta(i,j) \circ A$ является ограниченным оператором в пространстве $l_2(G_n)$.*

Это означает, что оператор $\chi_\Delta(i,j) : \varphi(B(\overline{H})) \longrightarrow l_2(G_n)$ является мультипликатором Шура. Таким образом, в алгебре $B(l_2(G_n))$ возникает естественная подалгебра $\varphi(B(\overline{H}))$, для которой мультипликаторами Шура являются все элементы алгебры $l_\infty[\mathbb{Z}^2]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Davidson K.* Nest algebras. Tringular forms for operator algebras on Hilbert space // Pitman Res. Notes Math. Ser. 1988. T. 191, Longman Sci. and Tech., Harlow, P. 643.

2. *Кабанко М. В.* Алгебра операторов, действующих в гильбертовой паре // Труды математического факультета ВГУ. Воронеж, 2001. Т. 6, С. 54–61.

3. *Кабанко М. В., Овчинников В. И.* О некоторых представлениях алгебры операторов в гильбертовой паре // Труды математического факультета ВГУ. Воронеж, 2001. Т. 5, С. 32–40.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00456).

В. М. Каплицкий (Ростов-на-Дону)
kaplitsky@donpac.ru

ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕГУЛЯРИЗАТОРА НЕОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Понятие регуляризатора ограниченного линейного оператора в банаховом пространстве играет важную роль в различных вопросах теории операторов. С помощью построения регуляризатров доказы- вается нётеровость операторов из различных классов, исследуются вопросы об односторонней обратимости оператора и свойствах его образа и некоторые другие важные вопросы [1]. В современной теории псевдодифференциальных операторов аналогичную роль играет поня- тие параметрикса (см.[2]). В работе [3] введены общие понятия одно- стороннего(двусторонего) регуляризатора и одностороннего (двусто- роннего) канонического регуляризатора неограниченного замкнутого оператора в банаховом пространстве и рассмотрены их применения получению условий дискретности спектра, полноты системы корневых векторов и другим вопросам спектральной теории линейных операто- ров. Через $N^+(r;T)$ и $\widetilde{N}^+(r;T)$ обозначаются функция распреде- ления собственных чисел оператора T, лежащих в секторе $\Omega^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : -\varepsilon_0 < \arg\lambda < \varepsilon_0\}$ и функция распределения характеристических чисел оператора T, лежащих в этом секторе(см.[3]).

Теорема 1. *Пусть замкнутый неограниченный оператор T в гильбертовом пространстве H обладает каноническим самосопря- женным регуляризатором R, принадлежащим операторному идеалу $\mathfrak{S}_p(1 \leqslant p < +\infty)$. Пусть*

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\ \varepsilon\to+0}} \frac{\widetilde{N}^+((1+\varepsilon)r;R)}{\widetilde{N}^+(r;R)} = 1$$

Тогда $N^+(r;T) \sim \widetilde{N}^+(r;R)$ при $r \to \infty$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Прёсдорф З.* Некоторые классы сингулярных интегральных уравнений. М., Мир, 1973, 494 с.

2. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, т. 3. Псевдодифференциальные операторы. М., Мир, 1987, 694 с.

3. *Каплицкий В. М.* О регуляризаторах неограниченных линейных операторов в банаховых пространствах // Записки научных семинаров ПОМИ, 401(2012), 93–102.

А. Н. Карапетянц (Ростов-на-Дону), Ф. Д. Кодзоева (Магас)
karapetyants@gmail.com

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ В ТЕРМИНАХ $P-$ СУММИРУЕМОЙ СРЕДНЕЙ ОСЦИЛЛЯЦИИ

Пространства функций, определяемые условиями на среднюю осцилляцию, представляют важный объект исследования с точки зрения внутренних задач теории функций (задача описания гладкостных свойств функций в терминах средней осцилляции, исследование интегральных операторов в гармоническом анализе в пространствах типа BMO, и пр.) Классы функций, определяемые условиями на среднюю осцилляцию, изучались, например, в работах S.Janson, R.De Vore, R.Sharpley [1-2] и других авторов. В работах Р.Рзаева (см. например [4]) исследовались многомерные сингулярные операторы в более общих пространствах, определяемых с помощью условий на модуль гладкости k - го порядка, а также вопросы аппроксимации функций из этих пространств.

Мы продолжаем исследование классов функций, определяемых условиями на среднюю осцилляцию. Именно, вводятся классы функций на оси, полуоси и отрезке с $p-$ суммируемой с весом $1/\omega^p$ средней осцилляцией. Так, например, пространство $BMO_{p,\omega}(R)$, $1 \leqslant p < \infty$, состоит из функций, локально интегрируемых на R, для которых следующая полунорма конечна: $\|f\|_{\#,BMO_{p,\omega}(R)} = \left(\int\limits_0^\infty \left[\frac{m_f(t)}{\omega(t)}\right]^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$, где $m_f(t) = \sup\{\frac{1}{|I|}\int\limits_I |f(x) - \frac{1}{|I|}\int\limits_I f(y)dy|dx \; : \; |I| < t, I \subset R\}$. Здесь непрерывная неотрицательная функция ω такова, что $\omega(t)t^{-1-\frac{1}{p}}$ почти убывает при $t \in (0,\infty)$ (подробнее см. в работе [4]). Аналогично вводятся пространства $BMO_{p,\omega}(R_\pm)$, $BMO_{p,\omega}(a,b)$.

Рассматриваются вопросы продолжения и склеивания функций из пространств $BMO_{p,\omega}(R_\pm)$, приводятся необходимые условия принадлежности функций этим пространствам, и пр. В том числе вводится и используется при характеризации пространств аналог интегрального скачка Д.Сарасона ($\varepsilon > 0$, $\tau \in R$): $\Theta_{\tau,\varepsilon}(f) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\tau^{\tau+\varepsilon} f(t)dt - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau} f(t)dt$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Janson S.* On function with conditions on the mean oscillation // Ark. Math. 1976. T. 14, C. 1189–1196.

2. *De Vore R. A., Sharpley R. C.* Maximal functions measuring smoothness. Memoirs AMS, 1984. T. 47, № 293. 115 c.

3. *Рзаев Р. М.* Интегральные операторы в пространствах, определяемых условиями на среднюю осцилляцию функций и некоторые приложения: Диссертация … доктора физ.-матем. наук. Баку. 1993.

4. *Карапетянц А. Н., Кодзоева Ф. Д.* Некоторые пространства функций, определенные в терминах p-суммируемости средней осцилляции // Известия вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. 2012. № 4, С. 5–8.

А. Н. Карапетянц, И. Ю. Смирнова (Ростов-на-Дону)
karapetyants@gmail.com

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ОПЕРАТОРОВ ТЕПЛИЦА С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ СИМВОЛАМИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ БЕРГМАНА СО СМЕАННОЙ НОРМОЙ

Рассматриваются операторы Теплица с некоторыми специальными символами (вопросы ограниченности, и, если применимо, компактности) в весовых пространства типа Бергмана на единичном диске $A^{2,p}_\lambda(D)$ и верхней полуплоскости $A^{2,p}_\lambda(\Pi)$ со смешанной нормой ($\lambda > -1$). Например, в случае единичного диска смешанная норма определяется так: $\|f\|^2_{L^{2,p}_\lambda(D)} = \int_T \left| \int_0^1 |f(rt)|^p (\lambda+1)(1-r^2)^\lambda r dr \right|^{\frac{2}{p}} \frac{1}{\pi} \frac{dt}{it}$. В случае полуплоскости смешанная норма связана либо с декартовыми либо с полярными координатами. Используются характеризация самих весовых пространств Бергмана со смешанной нормой, исследование структуры этих пространств, проведенное в работах [1-2], позволяющее получить удобные представления для изучения соответствующих теплицевых операторов. Например, в случае оператора $T^{(\lambda)}_a$ с радиальным символом $a = a(r)$, действующего в весовом $A^{2,p}_\lambda(D)$, ключевым моментом является тот факт, что данный оператор унитарно эквивалентен оператору умножения на последовательность, действующему в l^2_+. Последовательность задается равенством $\gamma_{a,\lambda}(n) = \frac{1}{\mathrm{B}(\frac{np+2}{2}, \lambda+1)} \int_0^1 a(\sqrt{r}\,)(1-r)^\lambda r^{\frac{np}{2}} dr$, $n \in Z_+$. где $\mathrm{B}(a,b)$ - Бета функция. Аналогично, в случае операторов Теплица с символами зависящими от $y = imz$ и $\theta = \arg z$, действующих в весовых пространствах $A^{2,p}_\lambda(\Pi)$, соответствующий оператор Теплица унитарно эквивалентен оператору умножения на некоторую функцию действующему в $L^2(R_+)$ и $L^2(R)$ соответственно. В настоящем исследовании используется техника и методы, предложенные Н. Л. Василевским, развитые также в работах Н. Л. Василевского, С. М. Грудского и А. Н. Карапетянца (см., напр., [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнова И. Ю.* Об одном классе весовых пространств Бергмана со смешанной нормой на единичном диске // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2009. № 3, С. 22–27.

2. *Смирнова И. Ю.* Некоторые классы весовых пространств Бергмана со смешанной нормой на верхней полуплоскости // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2009. № 4, С. 17–22.

3. *Vasilevski N. L.* Operators on the Bergman Spaces: Inside-the-Domain Effects // Contemporary Mathematics. 2001. T. 289, C. 79–146.

А. В. Лукин (Ростов-на-Дону)
alexanderlukin9@gmail.com

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЁННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С АНИЗОТРОПНО ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ[1]

Проекционные методы решения операторных уравнений рассматривались М. А. Красносельским, И. Ц. Гохбергом, И. А. Фельдманом и другими математиками. И. Ц. Гохбергом и И. А. Фельдманом [1] обосновано применение проекционных методов для одномерных уравнений в свёртках. А. В. Козак [2] на основании модификации локального метода И. Б. Симоненко [3] получил обоснование проекционного метода для многомерных матричных уравнений этого типа. На основе этих результатов в докладе представлено обоснование версии проекционного метода решения уравнения типа свёртки с компактными коэффициентами на группе $\mathbb{R}^n$ и обоснование приближённого метода решения многомерных уравнений с однородными и анизотропно однородными ядрами компактного типа.

Банаховы алгебры многомерных операторов с однородными и анизотропно однородными ядрами компактного типа исследованы в работе [4]. Полученное обоснование приближённого метода решения таких уравнений основано на применении пространственного изоморфизма подобия из этих работ.

Работа выполнена под руководством В. М. Деундяка.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свёртках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971. 352 с.

2. *Козак А. В.* Локальный принцип в теории проекционных методов // Интегральные и дифференциальные уравнения и их приложения. Элиста. 1983. с. 58–73.

3. *Симоненко И. Б.* Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих. Ростов н/Д: Изд-во ЦВВР, 2007. 120 с.

4. *Деундяк В. М., Мирошникова Е. И.* Об ограниченности и фредгольмовости интегральных операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа и переменными коэффициентами // Изв. вузов. 2012. № 7. с. 1–15.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.A18.21.0356 «Теория функциональных пространств, операторов и уравнений в них».

С. Н. Мелихов (Ростов-на-Дону, Владикавказ)
melih@math.rsu.ru

ОБ ОПЕРАТОРЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ НА ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ [1]

Пусть Q – выпуклое множество в $\mathbb{C}$; $H(Q)$ – пространство всех функций, голоморфных на Q, т.е. голоморфных в некоторой открытой окрестности Q. $H(Q)$ наделяется естественной индуктивной или проективной топологией. Для выпуклого компакта K в $\mathbb{C}$ зафиксируем аналитический функционал μ с носителем в K. Оператор свертки

$$T_\mu(f)(z) := \mu_t(f(t+z)),\ f \in H(Q+K),$$

линейно и непрерывно отображает $H(Q+K)$ в $H(Q)$. Если $K = \{0\}$, то T_μ является дифференциальным оператором бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, т. е. $T_\mu(f) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f^{(n)}$, где $\hat{\mu}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – преобразование Лапласа функционала μ.

В докладе идет речь о проблеме существования линейного непрерывного правого обратного (коротко: правого обратного) к сюръективному оператору $T_\mu : H(Q+K) \to H(Q)$. Приводится обзор соответствующих результатов, полученных к настоящему времени для следующих случаев: 1) Q – открытое множество; 2) Q – компакт; и более общих: 3) Q локально замкнуто (т.е. Q обладает счетной фундаментальной системой компактных подмножеств); 4) Q обладает счетной фундаментальной системой окрестностей из выпуклых областей.

Е. И. Мирошникова (Ростов-на-Дону)
elenmiroshnikova@gmail.com

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С АНИЗОТРОПНО ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ[1]

Изучение многомерных интегральных операторов с однородными ядрами было начато Л. Г. Михайловым. Дальнейшее развитие теория таких операторов получила в работах Н. К. Карапетянца, С. Г. Самко, О. Г. Авсянкина, В. М. Деундяка и др.

В представленной работе исследуются интегральные операторы с более общими анизотропно однородными ядрами. Получены достаточные

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.A18.21.0356 «Теория функциональных пространств, операторов и уравнений в них»

[1]Работа выполнена при при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.A18.21.0356 «Теория функциональных пространств, операторов и уравнений в них».

условия ограниченности таких операторов в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$. Для элементов алгебры, порожденной операторами с анизотропно однородными ядрами и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами, в терминах символа приводится критерий обратимости и фредгольмовости, получена формула топологического индекса. Выше указанные результаты распространяются и на случай L_p–пространств с полумультипликативными весами. В заключительной части построены псевдодифференциальные аналоги операторов с анизотропно однородными ядрами, действующие в шкале пространств соболевского типа.

Основные результаты представленной работы опубликованы в [1]–[3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мирошникова Е.И.,* Ограниченность и обратимость интегральных операторов с однородными ядрами компактного типа в некоторых весовых L_p-пространствах // Известия вузов. Сев.-Кав. регион. Естественные науки. 2012. №2 С. 22–26.

2. *Деундяк В.М., Мирошникова Е.И.,* Об ограниченности и фредгольмовости интегральных операторов с анизотропно однородными ядрами компактного типа и переменными коэффициентами // Известия вузов. Математика. 2012. № 7. С. 3–17.

3. *Deundyak V.M., Miroshnikova E.I.,* On Fredholm property and index of integral operators with anisotropically homogeneous kernels of compact type // Proceedings of the 6-th International Conference "Analytical Methods of Analysis and Differential Equations". Minsk. 2012. C. 64–68.

А. Э. Пасенчук (Ростов-на-Дону)
pasenchuk@mail.ru

ДВУМЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТЕПЛИЦА С РАЗРЫВНЫМИ СИМВОЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Будем пользоваться следующими обозначениями: Z — группа целых чисел, $Z_+ = \{k \in Z : k \geq 0\}$, C — комплексная плоскость, $\Gamma = \{\xi \in C : |\xi| = 1\}$, $\Gamma^2 = \Gamma \times \Gamma$. Пусть $C_\infty\left(\Gamma^2\right)$ — счетно-нормированное пространство гладких на торе Γ^2 функций, $C_\infty^{++}\left(\Gamma^2\right)$ — подпространство $C_\infty\left(\Gamma^2\right)$, состоящее из функций, аналитически продолжимых в область $\{|\xi| < 1, \ \ |\eta < 1|\} \subset C^2$, а P^{++} — оператор проектирования $C_\infty\left(\Gamma^2\right)$ на $C_\infty^{++}\left(\Gamma^2\right)$:
$P^{++}\left(\sum_{(k,j)\in Z^2} \phi_{kj}\xi^k\eta^j\right) = \sum_{(k,j)\in Z_+^2} \phi_{kj}\xi^k\eta^j$.

В пространстве $C_\infty^{++}\left(\Gamma^2\right)$ рассматривается оператор Теплица $T_a = P^{++}a\left(\xi,\eta\right)P^{++}$, символ которого $a\left(\xi,\eta\right)$ является разрывной функцией, допускающей следующее представление

$$a\left(\xi,\eta\right) = a^{--}\left(\xi,\eta\right)a^{+-}\left(\xi,\eta\right)\left(1-\alpha^{+}\left(\eta\right)\xi^{-1}\right)^{-1}a^{++}\left(\xi,\eta\right), \qquad (1)$$

где $a^{\pm\mp}\left(\xi^{\pm1},\eta^{\mp1}\right) \in C_\infty^{++}\left(\Gamma^2\right)$, а $\alpha^{+}\left(\eta\right) \in C_\infty^{+}\left(\Gamma\right)$ и $\left|\alpha^{+}\left(\eta\right)\right| \leq 1, \ \ \eta \in \Gamma$.

Теорема 1. *Оператор T_a с символом (1) ограничен в пространстве $C^{++}_{\infty}\left(\Gamma^2\right)$.*

Теорема 2 *Пусть функции в представлении (1) $a^{\pm\mp}\left(\xi,\eta\right)$ удовлетворяют условиям*

1. $a^{\pm+}\left(\xi^{\pm1},\eta\right)\in GC^{++}_{\infty}\left(\Gamma^2\right)$,
2. $a^{--}\left(\xi,\eta\right)$*: оператор* $T_{a^{--}}:C^{++}_{\infty}\left(\Gamma^2\right)\to C^{++}_{\infty}\left(\Gamma^2\right)$ *обратим.*

Тогда оператор T_a с символом 1 обратим в пространстве $C^{++}_{\infty}\left(\Gamma^2\right)$.

Теорема 2 является аналогом одного результата Л. И. Сазонова [1], полученного им в пространстве суммируемых с квадратом на торе Γ^2 функций. Условия обратимости операторов $T_{a^{--}}$, $a^{--}\left(\xi,\eta\right):a^{--}\left(\xi^{-1},\eta^{-1}\right)\in C^{++}_{\infty}\left(\Gamma^2\right)$ описаны М. Б. Городецким [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Сазонов Л. И.* О решении задачи линейного сопряжения функций двух комплексных переменных // Докл. АН СССР, 1973. Т. 209, № 4, с. 1288–1291

2. *Городецкий М. Б.* Об одном теплицевом операторе в пространстве бесконечно дифференцируемых функций двух переменных // Изв. СКНЦ ВШ, Ростов-на-Дону, 1979, № 3, с. 3–5.

N. Samko (Sweden, Norway)

nsamko@gmail.com

COMMUTATORS OF WEIGHTED HARDY OPERATORS IN GENERALIZED LOCAL MORREY SPACES AND THEIR APPLICATIONS

This talk is based on the joint research with L. E. Persson (Sweden), D. Lukkassen (Norway) and A. Meidell (Norway).

We study Commutators for the weighted Hardy operators with coefficients from BMO, in the generalized local Morrey spaces. The obtained results will be applied to study of the regularity properties of the solutions of PDE. Such weighted estimates for the commutators in Morrey spaces were not studied.

S. Samko (Portugal, Russia)

stefan@ssamko.com

MORREY FUNCTION SPACES AND STUMMEL CLASSES

We prove a new property of Morrey function spaces: local Morrey type behaviour of functions is very close to weighted behaviour. More precisely, generalized local Morrey spaces are embedded between weighted Lebesgue spaces with weights differing only by a logarithmic factor. This leads to the statement that the generalized global Morrey spaces are embedded between two generalized Stummel classes whose characteristics similarly differ by a logarithmic factor. We give examples proving that these embeddings are strict. For the generalized Stummel spaces we also give a new equivalent norm.

Н. И. Трусова (Липецк)
trusova.nat@gmail.com

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОПЕРАТОРОВ УРЫСОНА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ $C^{(1),n}(D)$

Пусть $B = (B_{ij})\ \ (i,j = 1,...,n)$, где

$$(B_{ij}y)(t,s) = \int\limits_T l_{ij}(t,s,\tau,y(\tau,s))d\tau + \int\limits_S m_{ij}(t,s,\sigma,y(t,\sigma))d\sigma +$$

$$\iint\limits_D n_{ij}(t,s,\tau,\sigma,y(\tau,\sigma))d\tau d\sigma, \quad i,j = 1,...,n,$$

— операторы Урысона с частными интегралами, $T = [a,b]$, $S = [c,d]$, $t,\tau \in T$, $s,\sigma \in S$, $D = T \times S$, $u \in R = (-\infty;+\infty)$, $l_{ij}(t,s,\tau,u)$, $m_{ij}(t,s,\sigma,u)$ и $n_{ij}(t,s,\tau,\sigma,u)$ — вещественные функции.

Через $C^{(1)}(D)$ обозначим пространство функций со значениями в R, частные производные которых по t и s непрерывны, а через $C^{(1),n}(D)$ — пространство вектор-функций $x(t,s) = (x_1(t,s),...,x_n(t,s))$, у которых $x_1,...,x_n \in C^{(1)}(D)$.

Теорема 1. *Пусть функции l_{ij}, m_{ij}, n_{ij}, их частные производные первого порядка и смешанные производные второго и третьего порядков по t,s,u непрерывны на $D\times[a,b]\times R$, $D\times[c,d]\times R$, $D\times D\times R$ соответственно. Тогда оператор B дифференцируем по Фреше в любой точке $x \in C^{(1),n}(D)$ и $B'(x) = (B'_{ij}(x_j))$, где*

$$(B'_{ij}(x_j)h_j)(t,s) = \int\limits_T l'_{ij_u}(t,s,\tau,x_j(\tau,s))h_j(\tau,s)d\tau +$$

$$\int\limits_S m'_{ij_u}(t,s,\sigma,x_j(t,\sigma))h_j(t,\sigma)d\sigma + \iint\limits_D n'_{ij_u}(t,s,\tau,\sigma,x_j(\tau,\sigma))h_j(\tau,\sigma)d\tau d\sigma.$$

Отметим,что дифференцируемость операторов Урысона с частными интегралами в различных классах функциональных пространств исследовалась в [1,2,3].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Калитвин А. С.* Нелинейные операторы с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2002. – 208 с.

2. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2006. – 177 с.

3. *Рудометкина И. П.* Дифференцирование операторов Урысона с частными интегралами в пространстве $C^{(1)}(D)$. — Липецк: 2004. — С. 63–72

С. М. Умархаджиев (Грозный)
umsalaudin@gmail.com

ПОТЕНЦИАЛ РИССА В ГРАНД-ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Пусть $1 < p < \infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ и w – вес на Ω. Обобщённым гранд-пространством Лебега $L_a^{p)}(\Omega, w)$ называют пространство, определяемое нормой

$$\|f\|_{L_a^{p)}(\Omega,w)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L^{p-\varepsilon}(\Omega, wa^{\varepsilon})},$$

где $a \in L^p(\Omega, w)$.

Говорят, что пара весов (u, v) принадлежит классу $A^{\alpha}_{p,q}$, $0 < \alpha < n$, $1 < p, q < \infty$, если

$$\sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} |Q|^{\alpha/n+1/q-1/p} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)dx\right)^{1/q} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)^{1-p'}dx\right)^{1/p'} < \infty.$$

Будем говорить, что вес u удовлетворяет условию удвоения, если существует $C > 0$ такое, что $u(2Q) \le Cu(Q)$ для всех кубов $Q \subset \mathbb{R}^n$ с ребрами, параллельными координатным осям.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha < n$ *и* $1 < p < q < \infty$. *Пусть*

1) $(u, v) \in A^{\alpha}_{p,q}$,

2) v *и* $u^{1-p'}$ *удовлетворяют условию удвоения,*

3) для некоторых чисел $r > 1$ *и* $0 < \varepsilon_0 < q - 1$ *выполняется условие*

$$\sup_Q |Q|^{\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{q-\varepsilon_0}-\frac{1}{p_0}} \left(\int_Q v(x)^r dx\right)^{\frac{1}{(q-\varepsilon_0)r}} \left(\int_Q u(x)^{(1-p_0')r}dx\right)^{\frac{1}{p_0' r}} < \infty,$$

$p_0 \le q - \varepsilon_0$,

4) неотрицательные функции a *и* b *таковы, что существует число* $\delta > \varepsilon_0$ *такое, что*

$$\sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q b(x)^{\delta}dx\right)^{1/(q-\varepsilon_0)} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q a(x)^{-\delta/(p-1)}dx\right)^{1/p'} < \infty.$$

Тогда оператор Рисса I^{α} *ограничен из обобщенного гранд-пространства Лебега* $L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n, u)$ *в обобщенное гранд-пространство Лебега* $L_b^{q),\theta q/p}(\mathbb{R}^n, v)$, $\theta > 0$.

M. Yakshiboev
yahshiboev@rambler.ru

ONE SIDED BALL POTENTIAL GENERALIZED LEBESGUS SPACES WITH VARIABLE EXPONENT

In the given work it is considered one-sided spherical potentials in spaces of Lebesgue $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ with variable indicators $p(x)$. We refer to [1],[2] for details on the spaces $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, but give the basic definitions.

Unilaterals ball potentials of an order $\alpha > 0$ we will define equalities:

$$B_{+}^{\alpha}\varphi = \frac{2}{\Gamma(\alpha)\omega_{n-1}} \int\limits_{|y|<|x|} \frac{\left(|x|^2 - |y|^2\right)^{\alpha}}{|x-y|^n} \varphi(y)dz,$$

$$B_{-}^{\alpha}\varphi = \frac{2}{\Gamma(\alpha)\omega_{n-1}} \int\limits_{|y|>|x|} \frac{\left(|y|^2 - |x|^2\right)^{\alpha}}{|x-y|^n} \varphi(y)dz.$$

Theorema 1. *Let $x \in B(x,r) \subset R^n$, $r > 0$, $f \in L^{\,1}_{\,1oc}(R^n)$, and $\alpha(x)$ satisfy conditions $\alpha_0 = \inf\limits_{x\in\Omega} \alpha(x) > 0$ and $\sup\limits_{x\in\Omega} \alpha(x)p(x) < n$. Then*

$$\int\limits_{|y|<|x|} \frac{\left(|x|^2 - |y|^2\right)^{\alpha(x)}}{|x-y|^n} |f(x)|dy \le C\, r^{\alpha(x)} |x|^{\alpha(x)} Mf(x).$$

Theorema 2. *Let Ω be a bounded domain in R^n, let $p \in P(\Omega)$, $x \in R^n \backslash B(x,r)$, $r > 0$, $1 < p_0 \le p(x) \le P < \infty$, $\alpha \sup\limits_{x\in\Omega} p(x) < \frac{n}{2}$, $0 < \alpha < n$, $f \in L^{\,p(\cdot)}\left(R^n \backslash B(x,r)\right)$ with $\|f\|_{L^{p(\cdot)}} \le 1$. Then*

$$I_2 = \int_{|y|>|x|} \frac{\left(|y|^2 - |x|^2\right)^{\alpha}}{|x-y|^n} |f(x)|dy \le C(\alpha) r^{\alpha - \frac{n}{p}} (r + |x|)^{\alpha},$$

where $\frac{1}{q(x)} \equiv \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha}{n}$, $q(x) > 1$.

References

1. O.Kovácik and J. Rákosnik. On spaces $L^{p(E)}$ and $W^{k,p(x)}$. Czechoslovak Math. J., 41 (116): 592–618, 1991.

2. S. Samko. Convolution type operators in $L^{p(E)}$. Integr. Trans. And Special Funct., 7 (1–2): 123–144, 1998.

Секция II
Теория функций

Г. Г. Брайчев (Москва)
braichev@mail.ru

ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ РОСТ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ [1]

Для любой выпуклой на $\mathbb{R}_+$ функции $f(x)$ с условием $x = o(f(x))$, $x \to +\infty$, найдется возрастающая строго выпуклая дважды дифференцируемая на $\mathbb{R}_+$ функция $g(x)$ со свойством $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \dfrac{g(x)g''(x)}{(g'(x))^2} \le 1$ такая, что $T := \overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \dfrac{f(x)}{g(x)} \ne 0,\ \infty$ (см. [1]). Аналогичный результат справедлив и в отношении величины $t := \underline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (см. [2]).
При этом выполняются точные оценки

$$a_1\, T \le \underline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \le t, \quad T \le \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \le a_2\, T,$$

где a_1, a_2 — корни уравнения $\varphi_g(a) = t/T$ $\ (\, 0 \le a_1 \le 1 \le a_2\,)$ и

$$\varphi_g(a) := \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{g(t_x) + g'(t_x)(x - t_x)}{g(x)},\ \text{а } t_x \text{ таково, что } g'(t_x) = a\, g'(x).$$

Конкретный вид функции $\varphi_g(a)$ дает следующая

Теорема [2]. *Пусть существует предел* $G = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)g''(x)}{(g'(x))^2}$. *Тогда справедливы утверждения.*

Если $G = 0$, *то* $\qquad \varphi_g(a) = a, \quad a \in [0,\, 1]$.

Если $G \in (0,\, 1)$, *то* $\varphi_g(a) = \dfrac{a - G\, a^{1/G}}{1 - G}, \quad a \in [0,\, G^{\,G/(G-1)}]$.

Если $G = 1$, *и* $g(x)$ *логарифмически выпукла, то*

$$\varphi_g(a) = a\, \ln \frac{e}{a}, \quad a \in [0,\, e].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Осколков В. А.* Свойства функций, заданных значениями их линейных функционалов. Дисс. ... д.ф.-м.н. М.: МГУ, 1994.

2. *Брайчев Г. Г.* Об асимптотическом поведении выпуклых функций и их производных. Исследования по соврем. анализу и матем. моделированию. Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2008, С. 21–29.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00281).

**Х. Х. Бурчаев (Грозный), В. Г. Рябых (Ростов-на-Дону),
Г. Ю. Рябых (Ростов-на-Дону)
bekhan.burchaev@gspetroleum.com
ryabich@aaanet.ru**

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СУММИРУЕМЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ [1]

Определение 1. *Пространством Бергмана (Харди) назовем множество функций $a(z)$, аналитических в $D : \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, с конечными нормами* $\|x\|_{A_p} = \left(\frac{1}{\pi} \iint\limits_D |x(z)|^p d\sigma(z) \right)^{1/p}$
$\left(\|x\|_{H_p} = \left(\lim\limits_{r \to 1} \int\limits_0^{2\pi} |x(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}\right)$*,* $1 \le p < \infty$.

Определение 2. *Функцию $f \in A_p(H_p)$ назовем экстремальной, если $\|f\| = 1$ и $l(f) = \|l\|$, $l \in A_p^*(H_p^*)$.*

Свойства экстремальных функций пространства $A_p(H_p)$ были подробно исследованы в работах [1] и [2].

В [3] было установлено, что для экстремальной функции f функционала $l(x) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_D x(z)\bar{\omega}(z) d\sigma(z) \in A_p^*, 1 < p < \infty$, из $\omega(z) \in H_q$ следует $f \in H_p$ $(1/p + 1/q = 1)$.

В [4] доказано: из $\omega \in C^1(T)$ следует $f \in H_1$ $(T : \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\})$.

Ferguson в [5] показал, что, если ω_k (тейлоровы коэффициенты ω) достаточно малы, то экстремальная функция функционала $l(x) \in A_q^*, 1 < q < \infty$ принадлежит H_∞.

Авторами доказано, что при $\omega(z)$, аналитичных в $D_R, R > 1$, экстремальная функция обладает аналогичными свойствами в A_p и H_p при $1 \le p \le 2$.

В последнее время удалось установить, что, как в A_p, так и в $H_p, 1 \le p < \infty$, справедливо утверждение: если ω — многочлен, то экстремальная функция f аналитична в $\mathbb{C}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Carleson L., Jacobs S.* Best approximation by analytic functions // Arciv Math. 1972. N 10. P. 219–229.

2. *Рябых В. Г.* Приближение аналитических функций неаналитическими // СМЖ. 2006. Т. 197, N 2. С. 86–94.

3. *Рябых В. Г.* Экстремальные задачи для суммируемых аналитических функций // СМЖ. 1986. Т. XXVII, N 3. С. 212–217.

4. *Пожарский Д. А., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Интегральные операторы в пространствах аналитических функций и близких к ним. Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2011. 183 с.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00065).

5. *Ferguson T.* Continuity of extremal elements in uniformly convex spaces // Proc Amer Math Soc.. 2009. V 137. N 8. P. 2645–2653.

С. С. Волосивец (Саратов), Б. И. Голубов(Долгопрудный)
volosivetsss@mail.ru, golubov@mail.mipt.ru

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ-ХААРА[1]

Ортонормированная на отрезке $[0,1]$ система Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (см., например, [1], С. 77) была построена в 1909 г. Для функции $f \in L_p[0,1]$, $1 \le p < \infty$, определим ее модуль непрерывности

$$\omega(\delta, f)_p = \sup_{0 \le h \le \delta} \left(\int_0^{1-h} |f(t+h) - f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \quad (0 \le \delta \le 1)$$

и коэффициенты Фурье-Хаара $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)\chi_n(x)\,dx$ $(n \in \mathbb{N})$.

П. Л. Ульянов [2] ввел класс $\bar{A}$ положительных последовательностей $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющих неравенствам $\max\limits_{2^n < k \le 2^{n+1}} \gamma_k \le C \min\limits_{2^{n-1} < k \le 2^n} \gamma_k$ при некоторой постоянной $C > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Для $n = 0$ предполагается, что $\gamma_2 \le C\gamma_1$. Л. Д. Гоголадзе и Р. Месхиа [3] ввели более общие классы $A(\alpha)$, $\alpha \ge 1$, положительных последовательностей $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющих при некоторых постоянных $C = C(\alpha) > 0$ неравенствам

$$\left(\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \gamma_k^{\alpha} \right)^{1/\alpha} \le C 2^{n(1-\alpha)/\alpha} \Gamma_n, \text{ где } \Gamma_n = \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \gamma_k, \ n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

При $n = 0$ в правой части (1) полагаем $\Gamma_0 = \gamma_1$. Отметим, что $\bar{A} \subset A(\alpha)$, $\alpha \ge 1$, и $A(\alpha_1) \subset A(\alpha_2)$ при $\alpha_1 > \alpha_2 \ge 1$. Определим класс положительных последовательностей $A(\infty)$. Будем считать, что $\gamma \in A(\infty)$, если $\max\limits_{2^n < k \le 2^{n+1}} \gamma_k \le C 2^{-n} \Gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$. Это определение получается, как предельный случай, если в неравенствах (1) параметр α устремить к $+\infty$. Можно показать, что $A(\infty) \subset A(\alpha)$, $\alpha \ge 1$.

Теорема 1. *Пусть $\beta > 0$, $p = \max(1, \beta)$, $\gamma \in A(p/(p-\beta))$, $f \in L_p[0,1]$ и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left[k^{-1/2} E_k(f)_p \right]^{\beta} < \infty, \quad (2)$$

где $E_k(f)_p$ — наилучшее приближение функции f полиномами по системе $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ порядка k в $L_p[0,1]$. Тогда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n |\hat{f}(n)|^{\beta}$.

---

[1]Работа первого автора поддержана РФФИ (проект 13-0100238). Работа второго автора поддержана РФФИ (проект 11-01-00321) и НИР "Современные проблемы анализа и математической физики".

Из теоремы 1 на основании неравенства П. Л. Ульянова [4] $E_n(f)_p \le 2^{1+1/p}\omega(n^{-1}, f)_p$, $1 \le p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, вытекает

Теорема 2. *Утверждение теоремы 1 остается справедливым, если условие (2) заменить условием* $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left[k^{-1/2}\omega(k^{-1}, f)_p\right]^{\beta} < \infty$.

В случае $p = 1$ теорема 2 обобщает результат З. Чисельского и Ю. Муселяка [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.

2. *Ульянов П. Л.* О рядах по системе Хаара с монотонными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28, № 4. С. 925–950.

3. *Gogoladze L., Meskhia R.* On the absolute convergence of trigonometric Fourier series // Proc. Razmadze Math. Inst. 2006. V. 141. P. 29–40.

4. *Ульянов П. Л.* О рядах по системе Хаара // Мат. сборник. 1964. Т. 63, № 3. С. 356–391.

5. *Ciesielski Z., Musielak J.* On absolute convergence of Haar series // Colloq. Math. 1959. V. 7, № 1. P. 61–65.

А. М. Джрбашян (Армения, Колумбия)
armen_jerbashian@yahoo.com

О НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОТЕНЦИАЛОВ ГРИНА

Доклад посвящен результатам, относящимся к некоторому банаховому пространству потенциалов Грина в единичном круге комплексной плоскости, которые связаны с продолжением недавних результатов автора по произвольно широким гильбертовым пространствам A^2_ω и универсальному ортогональному разложению функций субгармонических в $|z| < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джрбашян М. М.* О проблеме представимости аналитических функций // Сообщ. инст. матем. и мех. Акад Наук Арм. ССР, 1948. Т. 2, С. 3–40.

2. *Jerbashian A. M.* Orthogonal Decomposition of Functions Subharmonic in the Unit Disc, in: Operator Theory: Advances and Applications, **190**, The Mark Krein Centenary Conference, vol. **1**: Operator Theory and Related Topics, P. 335–340, Birkhäuser, 2009.

3. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала, Наука, Москва, 1966.

Э. И. Зверович (Минск)
Zverovich@bsu.by

ОБРАЩЕНИЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА ПО РАЗОМКНУТОМУ КОНТУРУ

Пусть $L \subset \mathbb{C}$ — гладкая разомкнутая ориентированная кривая, a — ее начальная точка, b — концевая. Предположим, что функция $\varphi : L \longrightarrow \mathbb{C}$ H-непрерывна на $L^\circ := L \diagdown \{a, b\}$ и имеет следующие представления:

$$\varphi(t) = \frac{a_{-n}}{(t-a)^n} + \ldots + \frac{a_{-1}}{t-a} + \varphi_a(t)\,, \quad t \to a,\, t \in L\,,$$
$$\varphi(t) = \frac{b_{-m}}{(t-b)^m} + \ldots + \frac{b_{-1}}{t-b} + \varphi_b(t)\,, \quad t \to b,\, t \in L\,,$$

где функции $\varphi_a(t)$ и $\varphi_b(t)$ H-непрерывны на L. Ставится задача обращения «гиперсингулярного» интегрального оператора $\mathbf{pf}\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \psi(t)\,, \quad t \in L\,$, где $\psi(t)$ — заданная H-непрерывная функция, а $\mathbf{pf}$ означает, что интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару. Чтобы сделать задачу более определенной, потребуем, чтобы неизвестная функция $\varphi(t)$ была кратной дивизору $(a)^{-n}(b)^{-m}$. Аппаратом для решения поставленной задачи служит гиперсингулярный интеграл типа Коши $\Phi(z) = \mathbf{pf}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$. Для него справдливы формулы Сохоцкого $\Phi^{\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}\varphi(t) + \mathbf{pf}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau$ и асимптотики $\Phi(z) = O((z-a)^{-n})$, $z \to a$; $\Phi(z) = O((z-b)^{-m})$, $z \to b$; $\Phi(z) = O(z^{-1})$, $z \to \infty$. С помощью формул Сохоцкого исходное уравнение сводится к задаче Римана $\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \psi(t)$, $t \in L$, в классе кусочно-аналитических функций, кратных дивизору $(a)^{-n}(b)^{-m}(\infty)$. Коэффициент задачи Римана факторизуется с помощью однозначной на $\mathbb{C}\diagdown L$ ветви $\sqrt{(z-a)(z-b)} \sim z$ при $z \to \infty$. В результате возникает задача «о скачке»

$$\left(\frac{\Phi(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}\right)^+ - \left(\frac{\Phi(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}\right)^- = \frac{\psi(t)}{\left(\sqrt{(t-a)(t-b)}\right)^+}\,,$$

где $t \in L^\circ$. Решение этой задачи находится как гиперсингулярный интеграл типа Коши, плотностью которого является правая часть. Таким образом, *задача обращения гиперсингулярного оператора допускает решение в замкнутой форме.*

С. М. Ситник (Воронеж, Россия)
mathsms@yandex.ru

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ В ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Методы теории операторов преобразования давно оформились в самостоятельный раздел математики и широко применяются в различных теоретических и прикладных вопросах [1–2]. Перечислим некоторые задачи, которые активно рассматриваются в последнее время и при решении которых существенно используются операторы преобразования различных типов [3–4].

1. Теория операторов преобразования Бушмана–Эрдейи. Эти операторы имеют многочисленные приложения в теории уравнений с частными производными, при изучении преобразования Радона и других вопросов.

2. Теория операторных свёрток и коммутирующих операторов. При помощи операторов преобразования можно строить соответствующие коммутанты, при этом в пространствах аналитических функций коммутанты производных в основном полностью описываются в рамках созданной И. Димовски теории операторных свёрток, намного более сложные рассмотрения требуются в пространствах типа C^k, тут результаты получены только в последнее время.

3. Операторы преобразования Сонина–Димовски и Пуассона–Димовски в рамках теории гипербесселевых функций и уравнений.

4. Операторы преобразования типа Сонина и Пуассона для дифференциально–разностных операторов Дункла.

5. Теория дробного интегродифференцирования и метод интегральных преобразований со специальными функциями в ядрах, в том числе композиционный метод построения операторов преобразования.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Carroll R. W.* Transmutation, Scattering Theory and Special Functions. North Holland, 1982. 457 p.

2. *Carroll R. W.* Transmutation Theory and Applications. North Holland, 1986. 351 p.

3. *Sitnik S. M.* Transmutations and Applications: a survey // arXiv: 1012.3741. 2012. 141 p.

4. *Ситник С. М.* Операторы преобразования и их приложения // Исследования по современному анализу и математическому моделированию. Отв. ред. Коробейник Ю. Ф., Кусраев А. Г. Владикавказский научный центр РАН и РСО–А. 2008. С. 226–293.

Р. М. Тригуб (Донецк)
roald.trigub@gmail.com

СРАВНЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ

Исследуются методом мультипликаторов разные задачи классического анализа и анализа Фурье.

Javanshir J. Hasanov (Baku)
hasanovjavanshir@yahoo.com.tr

Boundedness of the maximal and potential operators in the generalized variable exponent Morrey type spaces $\mathcal{M}^{p(\cdot),\theta(\cdot),\omega(\cdot)}(\Omega)$

joint work with Vagif S. Guliyev and Stefan G. Samko

We consider generalized Morrey type spaces $\mathcal{M}^{p(\cdot),\theta(\cdot),\omega(\cdot)}(\Omega)$ with variable exponents $p(x)$, $\theta(r)$ and a general function $\omega(x,r)$ defining the Morrey-type norm. In case of bounded sets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ we prove the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator, in such spaces. We also prove a Sobolev-Adams type $\mathcal{M}^{p(\cdot),\theta_1(\cdot),\omega_1(\cdot)}(\Omega) \to \mathcal{M}^{q(\cdot),\theta_2(\cdot),\omega_2(\cdot)}(\Omega)$-theorem for the potential operator $I^{\alpha(\cdot)}$, also of variable order.

Consider the Hardy-Littlewood maximal operator

$$Mf(x) = \sup_{r>0} |B(x,r)|^{-1} \int_{\widetilde{B}(x,r)} |f(y)|dy,$$

and potential type operators

$$I^{\alpha(x)}f(x) = \int_\Omega |x-y|^{\alpha(x)-n} f(y)dy, \quad 0 < \alpha(x) < n,$$

of variable order $\alpha(x)$.

Let $p(\cdot)$ be a measurable function on Ω with values in $[1,\infty)$. We suppose that

$$1 < p_- \le p(x) \le p_+ < \infty, \tag{1}$$

where $p_- := \text{ess inf}_{x\in\Omega} p(x)$, $\quad p_+ := \text{ess sup}_{x\in\Omega} p(x) < \infty$.

By $\mathcal{P}^{\log} = \mathcal{P}^{\log}(\Omega)$ we denote the class of functions defined on Ω satisfying the log-condition

$$|p(x)-p(y)| \le \frac{A}{-\ln|x-y|}, \;\; |x-y| \le \frac{1}{2}, \quad x,y \in \Omega, \tag{2}$$

where $A = A(p) > 0$ does not depend on x, y. In the case $\Omega = (0,\ell)$ we denote by $\mathcal{P}_0(0,\ell)$ the set of bounded measurable functions θ on $(0,\ell)$ with values in $[1,\infty)$ such that there exists $\theta(0) = \lim_{t\to 0}\theta(t)$ and $|\theta(t)-\theta(0)| \le \frac{A}{\ln\frac{1}{t}}$, $\quad 0 < t \le \frac{1}{2}$. We also write $\theta \in \mathcal{M}_0(0,\ell)$, if there exist a constant $c \in \mathbb{R}^1$ such that $c + \theta(t) \in \mathcal{P}_0(0,\ell)$.

М. М. Цвиль (Ростов-на-Дону)
tsvilmm@mail.ru

О СУММИРОВАНИИ КРАТНЫХ ОБОБЩЕННЫХ РЯДОВ ФАБЕРА

Через C^n обозначим n-мерное комплексное пространство, его точки $z = (z, z_2, \dots, z_n)$. Пусть D_k^+ — конечная односвязная область в плоскости C^1, ограниченная спрямляемой жордановой кривой L_k; D_k^- — ее дополнение до всей плоскости; функция $z_k = \psi_k(w_k)$ конформно и однолистно отображает внешность единичного круга $\{|w_k| > 1\}$ на область D_k^- при условиях $\psi_k(\infty) = \infty$, $\psi_k'(\infty) > 0$; функция $w_k = \varphi_k(z_k)$ — обратная к $\psi_k(w_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $D^+ = D_1^+ \times D_2^+ \times \ldots \times D_n^+$, $D^- = D_1^- \times D_2^- \times \ldots \times D_n^-$ — полицилиндрические области в $\mathbb{C}^n$ с остовом $\sigma = L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_n$; T^n — единичный тор; $\Pi^n = \{\theta \in \mathbb{R}^n \colon -\pi \leqslant \theta_k \leqslant \pi,\ k = 1, 2, \dots, n\}$ — n-мерный куб; $\Pi_+^n = \{\theta \in \mathbb{R}^n \colon 0 \leqslant \theta_k \leqslant \pi\}$; Z^n — множество векторов $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ с целочисленными координатами; Z_+^n — множество векторов $\ell \in Z^n$ с неотрицательными координатами.

С помощью весовой функции n комплексных переменных $g(z)$, аналитической в области D^-, отличной от нуля в $\overline{D}^-$ и $g(\infty) > 0$, образуем производящую функцию для системы полиномов $\Phi_\ell(z, g)$ n переменных:

$$\mathcal{G}(z, w) = \frac{(\Psi^* g)(w)\Psi'(w)}{(\Psi(w) - z)^I} = \sum_{\ell \in Z_+^n} \frac{\Phi_\ell(z, g)}{w^{\ell + I}}, \tag{1}$$

где вектор $(1, 1, \dots, 1)$ обозначим через I и будем писать $w^{\ell+I}$ вместо $w_1^{\ell_1+1} \cdot w_2^{\ell_2+1} \cdot \ldots \cdot w_n^{\ell_n+1}$, $(\Psi^* g)(w) = g(\psi_1(w_1), \psi_2(w_2), \dots, \psi_n(w_n))$, $\Psi'(w) = (\psi_1'(w_1), \psi_2'(w_2), \dots, \psi_n'(w_n))$.

Полиномы $\{\Phi_\ell(z, g)\}$ назовем обобщенными полиномами Фабера n переменных.

Пусть функция $f(z)$ n комплексных переменных представима интегралом типа Коши с плотностью $\tau(\zeta)$, $z \in D^+$. Рассмотрим зависящий от параметров θ и z интеграл вида

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_\sigma \frac{\tau(\zeta\langle\theta\rangle) g(\zeta)\, d\zeta}{g(\zeta\langle\theta\rangle)(\zeta - z)^I}, \tag{2}$$

где $d\zeta = d\zeta_1 \dots d\zeta_n$; $\zeta\langle\theta\rangle = (\zeta_1\langle\theta_1\rangle, \dots, \zeta_n\langle\theta_n\rangle)$,
$\zeta_k\langle\theta_k\rangle \equiv \psi_k(\varphi_k(\zeta_k) e^{i\theta_k})$, $\zeta_k \in L_k$ — обобщенный поворот кривой L_k на угол θ_k.

Предположим, что на торе имеет место равномерно и абсолютно сходящееся разложение:

$$\frac{(\Psi^* \tau)(w)}{(\Psi^* g)(w)} = \sum_{\ell \in Z^n} a_\ell w^\ell. \tag{3}$$

Используя формулы (1) и разложение (3) для интеграла (2), находим равенство

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n}\frac{(\Psi^*\tau)(we^{-i\theta})}{(\Psi^*g)(we^{-i\theta})}\mathcal{G}(z,w)\,dw=\sum_{\ell\in Z_+^n}a_\ell\Phi_\ell(z)e^{-i|\ell\cdot\theta|},\quad z\in D^+.$$

где $we^{-i\theta}=\left\{w_1e^{-i\theta_1},\ldots,w_ne^{-i\theta_n}\right\}$; $|\ell\theta|=\ell_1\theta_1+\ell_2\theta_2+\ldots+\ell_n\theta_n$.

Возьмем произвольный тригонометрический полином $S_\Omega(\theta)=\sum\limits_{\ell\in\Omega}\lambda_\ell e^{i|\ell\theta|}$, где Ω — некоторое конечное подмножество решетки Z^N и построим аналог формулы В. К. Дзядыка в случае обобщенных полиномов Фабера n переменных:

$$P_{\Omega_+}(z)=\frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Pi_+^n}S_\Omega(\theta)d\theta\int\limits_T\frac{\tau[\psi(te^{-i\theta})]}{g[\psi(te^{-i\theta})]}\mathcal{G}(z,t)\,dt=$$

$$=\sum_{\ell\in\Omega_+}\lambda_\ell a_\ell\Phi_\ell(z,g),\quad z\in D^+,\ \Omega_+=\Omega\cap Z_+^n.\qquad(4)$$

Эта формула преобразует тригонометрический полином в алгебраический $P_{\Omega_+}(z)$, который получается из кратного ряда Фабера функции $f(z)$ с помощью коэффициентов суммирования $\{\lambda_\ell\}$. В случае n переменных, когда возможно больше многообразие определений частичной суммы кратного ряда Фурье, после применения формулы (4) возможно появление разнообразных алгебраических полиномов. Можно показать, что при некоторых условиях прямоугольные суммы (4) будут сходиться равномерно внутри D^+ к интегралу типа Коши.

А. Ф. Чувенков (Ростов-на-Дону)
chuvenkovaf@mail.ru

О ВЕСОВЫХ ГРАНД-ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА, ПОРОЖДЕННЫХ КВАЗИСТЕПЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Рассматривается весовое пространство функций $f(x)$ Орлича $L_M(\Omega,\omega)$ на $\Omega\subset R^n$ с положитльным весом $\omega(x)$, порожденное квазистепенной N-фунцией $M(u)$ в смысле статьи [4], с нормой Люксембурга [1]:

$$\parallel f\parallel_{(M,\omega)}=inf\{k>0:\int\limits_\Omega M\left(\frac{|\,f(x)\,|}{k}\right)\omega(x)dx\le 1\}.$$

В русле идей статей [2], [3], [5] мы расширяем весовое пространство Орлича. Через $L_{M)}(\Omega,\omega)$ обозначаем весовое гранд-пространство Орлича функций

$$\left\{f:\sup_{0<\delta<1-\frac{1}{p}}\left[\left(p\delta\right)^{\frac{1}{p}}\int\limits_\Omega M^{1-\delta}\big(|\,f(x)\,|\big)M^\delta\big(a(x)\big)\omega(x)dx\right]<\infty\right\},$$

где $a(x)-$ весовая функция, p играет роль показателя убывания в нуле или (и) роста на бесконечности $N-$ функции M в зависимости от меры множества Ω. В соответствующей норме пространство банахово.

Дается критерий выбора веса a, при котором введенное таким образом весовое гранд-пространство Орлича является расширением весового пространства Орлича.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958. С. 271.

2. *Iwaniec T., Sbordone C.* On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses. // Arch. Rational Mech. Anal., 1992. № 119. C. 129–143.

3. *Samko S. G., Umarkhadzhiev S. M.* On Iwanies-Sbordone spaces on sets which may have infinite measure.// Azerb. Journal of Math., 2011. V.1, № 1. C. 67–84.

4. *Симоненко И. Б.* Интерполяция и экстраполяция линейных операторов в пространствах Орлича. Матем. сб., 1964. № 63(105), 4. С. 536–553.

5. *Умархаджиев С. М.* Обобщение понятия гранд-пространства Лебега. Известия вузов. Математика, 2012, № 201, С. 1–11.

Секция III Дифференциальные уравнения и математическая физика

М. С. Агранович, А. М. Селицкий (Москва)
magran@orc.ru, selitsky@mail.ru

ДРОБНЫЕ СТЕПЕНИ ОПЕРАТОРОВ, ОТВЕЧАЮЩИХ ГРАНИЧНЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ЛИПШИЦЕВЫХ ОБЛАСТЯХ [1]

Пусть Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$, и пусть в ней задан матричный сильно эллиптический оператор в частных производных 2-го порядка, записанный в дивергентной форме. Обширная литература посвящена изучению дробных степеней такого оператора с однородными условиями Дирихле, Неймана и смешанными граничными условиями. Исследования были направлены на решение «проблемы Като». Рассматривались также системы высших порядков.

Мы предлагаем новый абстрактный подход к этой проблематике, позволяющий существенно проще получить основные результаты и охватить новые операторы — классические граничные операторы на липшицевой границе Γ области Ω или ее части Γ_1, а также дифференциально-разностные операторы.

А. О. Бабаян, А. А. Закарян(Ереван)
barmenak@gmail.com

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В единичном круге D комплексной плоскости рассматривается неправильно эллиптическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial \bar z} - \mu_1 \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar z} - \mu_2 \frac{\partial}{\partial z}\right) u(x,y) = 0, \tag{1}$$

где $|\mu_1| < 1$, $|\mu_2| < 1$, $\mu_1 \neq \mu_1$. Решение из класса $C^4(D) \bigcap C^{(1,\alpha)}(\overline{D})$ на границе Γ удовлетворяет условиям Дирихле

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right|_\Gamma = F(x,y),\ \ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_\Gamma = G(x,y),\ \ (x,y) \in \Gamma;\ \ u(1,0) = u_0. \tag{2}$$

Здесь F, G заданные функции, u_0 заданная постоянная. Задача (1), (2) для другого класса неправильно эллиптического уравнения четвертого порядка была рассмотрена в [1]. Для точной формулировки результатов обозначим $r = \min(|\mu_1|, |\mu_2|)$, $z = \mu_2 \mu_1^{-1}$. Пусть $B^{(1,\alpha)}(r)$ множество функций, аналитических в кольце $S = \{z : r < |z| < 1\}$ и удовлетворяющих условию Гельдера в замыкании $\bar S$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00277, 12-01-00524-а, 13-01-00923).

Теорема 1. *Однородная задача (1), (2): 1). при условиях*

$$P_{k-2}(z) \equiv \sum_{j=0}^{k-2}(k-1-j)z^j \neq 0, \quad k = 3, 4, \dots, \tag{3}$$

не имеет нетривиальных решений, 2). если эти условия не выполняются, то $P_{k_0-2}(z) = 0$ *только при одном значении* $k_0 > 2$. *При этом, однородная задача (1), (2) имеет одно линейно независимое решение, которое является многочленом порядка* $k_0 + 1$.

Теорема 2. *Пусть граничные функции* F *и* G *принадлежат* $B^{(1,\alpha)}(r)$. *Тогда, если выполняются условия (3), то неоднородная задача (1), (2) имеет решение. При нарушении условий (3) для разрешимости задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы граничные функции* F *и* G *удовлетворяли одному линейно независимому условию.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Бабаян А. О.* О задаче Дирихле для неправильно эллиптического уравнения четвертого порядка. // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск. 2007, С. 56–69.

В. А. Бабешко, Е. В. Кириллова, О. В. Евдокимова, О. М. Бабешко (Краснодар)

babeshko@kubsu.ru

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛ С ТРЕСНУВШИМИ ПОКРЫТИЯМИ [1]

При топологическом исследовании блочной структуры, состоящей из двумерных и трехмерных блоков — многообразий с краем, возможны два подхода. Первый включает первоочередное топологическое исследование в отдельности каждой блочной структуры, двумерной и трехмерной, факторизационным методом, с учетом наличия всех неоднородностей, трещин и разломов. Затем осуществляется операция, которая называется построением фактор — топологии, состоящая в отождествлении двумерной границы трехмерного блочного элемента со срединной поверхностью двумерного покрытия. Таким путем строятся псевдодифференциальные уравнения и интегральное уравнение для построения всех граничных значений рассматриваемой граничной задачи.

[1]Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке Соглашения №14.B37.21.0869 от 06.09.2012 с Министерством образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

Второй подход состоит в предварительном построении фактор-топологии двух блочных элементов — трехмерного и двумерного, с последующим исследованием нового топологического объекта, содержащего разноразмерные составляющие и такие же разноразмерные границы.

Исследование вторым путем требует правильного учета всех особенностей такого топологического объекта и особенно при построении касательного расслоения границы, введения локальных систем координат, карт и атласа многообразия.

В качестве примера рассмотрена граничная задача для пластины, как простейшей модели, дающей разноразмерную блочную структуру в контакте с трехмерной подложкой. Пластина рассматривается состоящей из разнотипных горизонтально контактирующих фрагментов, которые могут быть также треснувшими, находящейся на деформируемом полупространстве. Рассматривается скалярный случай.

Построены псевдодифференциальные уравнения рассматриваемой граничной задачи, которые имеют вид

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r)\Bigg\langle \int\limits_{\partial\Omega_{br}} \Bigg\{ & D^{-1}M_r - D^{-1}Q_r - (\alpha_{21-}^3 + \nu\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2^r} + \\
& + i\alpha_{21-}\left[\alpha_{21-}^2 + (2-\nu)\right] u_{3r} \Bigg\} e^{i\alpha_1^r x_1^r} dx_1^r + \\
& + \int\limits_{\partial\Omega_b \setminus \partial\Omega_{br}} \omega_b + \mathbf{F}_2(g_{3b} + b_{3b}) \Bigg\rangle = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_{21-}, \quad \xi_1^r \in \partial\Omega_{br},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r)\Bigg\langle \int\limits_{\partial\Omega_{br}} \Bigg\{ & D^{-1}M_r - D^{-1}Q_r - (\alpha_{22-}^3 + \nu\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2^r} + \\
& + i\alpha_{22-}\left[\alpha_{22-}^2 + (2-\nu)\right] u_{3r} \Bigg\} e^{i\alpha_1^r x_1^r} dx_1^r + \\
& + \int\limits_{\partial\Omega_b \setminus \partial\Omega_{br}} \omega_b + \mathbf{F}_2(g_{3b} + b_{3b}) \Bigg\rangle = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_{22-}, \quad \xi_1^r \in \partial\Omega_{br}.
\end{aligned}
$$

Обсуждаются различные варианты исследования получаемых из псевдодфференциальных уравнений интегральных уравнений для различных типов граничных задач.

И. В. Барышева, А. С. Калитвин(Липецк)
barysheva_iv@mail.ru, kalitvinas@mail.ru

ОБ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ БАРБАШИНА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) с частными интегралами

$$\begin{gathered}\frac{\partial x(\varphi,t,s)}{\partial\varphi} = f(\varphi,t,s) + c(\varphi,t,s)x(\varphi,t,s)+\\ +\int\limits_0^t l(\varphi,t,s,\tau)x(\varphi,\tau,s)d\tau + \int\limits_0^s m(\varphi,t,s,\sigma)x(\varphi,t,\sigma)d\sigma+\\ +\int\limits_0^t\int\limits_0^1 n(\varphi,t,s,\tau,\sigma)x(\varphi,\tau,\sigma)d\sigma d\tau \equiv (Kx)(\varphi,t,s) + f(\varphi,t,s)\end{gathered} \tag{1}$$

с начальным условием $x(\varphi_0,t,s) = x_0(t,s)$, где $(\varphi,t,s)\in D = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$, $0\le\tau\le t$, $0\le\sigma\le s$, $l(\varphi,t,s,\tau)$, $m(\varphi,t,s,\sigma)$ и $n(\varphi,t,s,\tau,\sigma)$ – заданные функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега. С ИДУ (1) связаны уравнения Колмогорова-Феллера и другие ИДУ, моделирующие различные прикладные задачи [1].

Через U обозначим множество функций $x(\varphi,t,s)$, непрерывных на D вместе с частной производной по переменной φ. U — банахово пространство относительно нормы $\|x\|_U = \sup\limits_{\varphi,s,t}\big(|x(\varphi,t,s)|+|x'_\varphi(\varphi,t,s)|\big)$. Пусть $BC(L^1(\Omega))$, где $\Omega\in\{[0,1];[0,1]^2;D\}$, — множество ограниченных измеримых функций $y(\varphi,t,s,\omega)$, непрерывных по $(\varphi,t,s)\in D$ как функции со значениями в $L^1(\Omega)$. $BC(L^1(\Omega))$ — банахово пространство относительно нормы $\|y\| = \sup\limits_D\int\limits_\Omega|y(\varphi,t,s,\omega)|d\omega$. Интегрируя (1) по отрезку $[\varphi_0,\varphi]\subset[0,1]$ и учитывая заданное начальное условие, получим уравнение Вольтерра с частными интегралами, которое будет равносильно (1), если под решением этих уравнений понимается функция $x(\varphi,t,s)$ из пространства U. ИДУ (1), оператор K и соответствующее уравнение Вольтерра с частными интегралами в различных функциональных пространствах исследовались в [1].

Теорема. *Если* $c,l,m,c'_\varphi,l'_\varphi,m'_\varphi\in BC(L^1(\Omega))$, *а* $n,n'_\varphi\in BC(L^1(D))$, *то при любой функции* $f\in U$ *уравнение* (1) *с заданным начальным условием* $x_0\in C([0,1]\times[0,1])$ *имеет в* U *единственное решение.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. — New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

А. О. Ватульян Л. С. Гукасян (Ростов-на-Дону)
vatulyan@math.rsu.ru

О ЗАДАЧАХ КОШИ В ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ [1]

Настоящая работа посвящена исследованию коэффициентных обратных задач для эллиптических уравнений и систем второго порядка в первой постановке [1], когда известными являются компоненты физических полей в рассматриваемой области. Отмечено, что подобная трактовка приводит к исследованию задач Коши для уравнений и систем для уравнений в частных производных первого порядка. Исследован вопрос о единственности решения задачи в классе гладких функций для уравнений теории упругости, сформулированы ограничения на граничные условия, которые приводят к определенной задаче Коши и когда данные Коши недоопределены.

Представлен способ решения обратной задачи для упругой среды о реконструкции переменных коэффициентов Ляме на основе численного решения задачи Коши для системы 1 порядка, базирующегося на разностной аппроксимации задачи. Конкретная реализация осуществлена для прямоугольной области, где проведено исследование особенностей построения решений в зависимости от вида граничных условий. Проведен ряд вычислительных экспериментов по решению прямой задачи, на основе которой была получена информация о поле смещений внутри области в некотором частотном диапазоне в наборе точек. На основе дополнительных данных решена коэффициентная обратная задача по реконструкции переменных коэффициентов Ляме. Представлены результаты вычислительных экспериментов по решению обратной задачи с точными данными и с аддитивным зашумлением; при этом использована регуляризующая процедура выбора шага аппроксимации в разностной схеме в зависимости от степени зашумления и методы сплайн-аппроксимаций для регуляризованного вычисления частных производных первого и второго порядков.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ватульян А. О.* К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела // Прикладная математика и механика 2010. № 6. С. 911–918

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (код проекта 13-01-00196)

С. С. Волков, С. М. Айзикович, А. С. Васильев
(Ростов-на-Дону)
saizikovich@gmail.com

ДВУХСТОРОННЕ-АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ, ЛЕЖАЩЕГО НА ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ ПРИ СУЩЕСТВЕННОМ СКАЧКЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ В ЗОНЕ СЛОЙ/ОСНОВАНИЕ[1]

В работе рассматриваются задачи о кручении и о вдавливании штампа с плоской подошвой в упругое полупространство, упругие модули которого в приповерхностном слое изменяются по произвольному закону. При этом упругие характеристики подложки резко отличаются от упругих характеристик слоя (в 10 и более раз).

С помощью техники интегральных преобразований поставленные задачи сводятся к решению интегральных уравнений [1,2]. Получены численные результаты для контактных напряжений и смещений. Изучено влияние жесткости основания и неоднородности слоя на механические характеристики контактного взаимодействия.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Vasiliev A., Sevostianov I., Aizikovich S., Jeng Y.-R.* Torsion of a punch attached to transversely-isotropic half-space with functionally graded coating //Intern. J. Engng. Sci. 2012. Т. 61. С. 24–35.

2. *Айзикович С. М., Александров В. М.* Осесимметричная задача о вдавливании круглого штампа в упругое, неоднородное по глубине полупространство // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. Т. 39, № 2. С. 73–77.

Л. Х. Гадзова (Нальчик)
macaneeva@mail.ru

ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial_{0x}^{\alpha_i} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[, \tag{1}$$

где $\alpha_i \in]1,2[$, $\lambda, \lambda_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 > \alpha_i, (i = \overline{2,m})$, $\partial_{0x}^{\beta} u(x)$ – регуляризованная дробная производная (производная Капуто) [1, с. 11].

[1]Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашение № 14.132.21.1693), а также РФФИ (проект 13-07-00954-а).

Задача Штурма-Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в группе младших членов исследовавлась в работе [2]. Относительно изложения результатов и библиографии работ, связанных с линейными дифференциальными уравнениями дробного порядка, укажем работы [3] и [4] .

Регулярным решением уравнения (1) называем функцию $u = u(x)$, имеющую абсолютно непрерывную производную первого порядка на отрезке [0,1] и удовлетворяющая уравнению (1).

Задача: *Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$au(0) + bu'(0) = 0, \quad cu(1) + du'(1) = 0, \tag{2}$$

где $a, b, c, d-$ *заданные постоянные,* $a^2 + b^2 \neq 0, \quad c^2 + d^2 \neq 0.$

В работе построено представление решения краевой задачи для уравнения (1) и найден критерий однозначной разрешимости.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

2. *Нахушев А. М.* Задача Штурма-Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // ДАН СССР. 1977. Т. 234, №2. С. 308–311.

3. *Псху А. В.* Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. сборник. 2011. Т. 200, №4. С. 111–122.

4. *Kilbas A. A., Srivastava H. M. Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Math. Stud., Elsevier, Amsterdam. 2006. T. 204.

А. М. Гачаев, А. У. Дашмашаев (Грозный)
gachaev_chr@mail.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ФРАКТАЛЬНОГО ОСЦИЛЛЯЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим задачу Дирихле для дробного осцилляционного уравнения

$$\frac{1}{\tilde{A}(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{u'(t)}{(x-t)^\alpha} \, dt - (q(\lambda) + x)u = 0, \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{2}$$

Доказана **Теорема.** *Система собственных функций задачи (1), (2) полна в* $L_2(0;1)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.

2. *Лидский В. Б.* Условия полноты системы корневых подпространств у несамосопряженных операторов с дискретным спектром // Тр. Моск. МО. М.: ГИФМЛ, 1959. Т. 8. С. 83–120.

3. *Алероев Т. С.* О собственных значениях одного класса несамосопряженных операторов // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 1. С. 169–171.

4. *Алероев Т. С.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка // Сибирские электронные математические известия. 2013. Т. 10. С. 41–55.

Ю. Е. Гликлих (Воронеж)
yeg@math.vsu.ru

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВКЛЮЧЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ В СРЕДНЕМ [1]

Понятие проиводной в среднем было введено Э. Нельсоном в 60-х годах XX века для нужд так называемой стохастической механики (вариант квантовой механики). Позже было найдено много других приложений уравнений и включений с производными в среднем в других разделах математической физики и в других науках. Включения с производными в среднем возникают в задачах с управлением или в случае движения в сложных средах.

Классические производные в среднем по Нельсону (справа, слева, симметрические и т.д.) дают информацию о сносе стохастического процесса. Позже, на основании некоторой модификации одной из идей Нельсона, нами была введена новая производная в среднем, названная квадратичной, которая отвечает за коэффициент диффузии процесса. После этого стало в принципе возможно найти процесс по заданным производным в среднем (например, по производной справа и квадратичной производной).

Отметим, что естественным аналогом физической скорости детерминированного процесса является так называемая текущая скорость (симметрическая производная в среднем). Также следует отметить, что в математической физике задействованы различные варианты вторых производных в среднем.

В докладе дается краткое введение в теорию уравнений и включений с производными в среднем и их приложения. Именно:

• Механические системы со случайными возмущениями и с управлением.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00183).

• Описание движения неслучайной вязкой жидкости посредством уравнений с производными в среднем на группах диффеоморфизмов.

• Описание движения квантовой частицы в классическом калибровочном поле на языке стохастической механики.

• Существование решений уравнений и включений с текущими скоростями.

• Описание измерения динамически искаженных сигналов с помехами.

А. А. Гончаренко, О. А. Прозоров (г. Ростов-на-Дону)
aagonacharenko.91@gmail.com, oaprozorov@gmail.com

НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЖИМЫ В ЗАДАЧЕ ВИБРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ МАРАНГОНИ [1]

Рассматривается задача о возникновении конвекции в плоском горизонтальном слое вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей, коэффициент поверхностного натяжения границы зависит линейно от температуры. Слой как целое совершает высокочастотные гармонические колебания частотой ω, амплитудой a вдоль вектора $\mathbf{s} = (cos\varphi, sin\varphi)$, угол φ отсчитывается от оси z. В работе [1] проведено осреднение задачи, в результате получается система для плавных компонент, в уравнениях движения возникает виброгенная сила, в докладе рассмотрен случай, когда виброгенные напряжения в краевых условиях не учитываются.

Управляющим параметром является безразмерная скорость вибрации, остальные параметры задачи, в том числе градиент температуры, фиксированы. Исследуется устойчивость равновесия осредненной системы по линейному приближению. Расчеты показывают, что, если пренебречь гравитацией, то потеря устойчивости монотонная; вибрация оказывает только стабилизирующее воздействие. Эти выводы подтверждаются как численно, так и асимптотически. Результаты расчета линейной задачи сравниваются с [2], где данная задача рассматривалась при другом выборе управляющего параметра. Получены вторичные режимы осредненной задачи методом многомасштабных разложений, результаты сравниваются с расчетом решения нелинейной задачи по методу конечных элементов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Зеньковская С. М., Шлейкель А. Л.* Влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции Марангони в горизонтальном слое жидкости// ПММ. 2002. т. 66. с. 573–583.

2. *Зеньковская С. М., Прозоров О. А.* Возникновение конвекции в горизонтальном слое со свободной поверхностью// Известия ВУЗов, Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спецвыпуск «Актуальные проблемы математической гидродинамики». 2009. С. 87–91.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00582-а).

Р. З. Гумбаталиев, Ф. А. Кулиева (Баку)
rovshangumbataliev@rambler.ru

О РАЗРЕШИМОСТИ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим в сеперабельном гильбертовом пространстве H операторно-дифференциальное уравнение

$$P\left(d/dt\right)u(t) \equiv -\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 A^2 u + A_0 \frac{d^2u}{dt^2} + A_1 \frac{du}{dt} + A_2 u = f(t), \qquad (1)$$

где $t \in R = (-\infty, \infty)$, $A = A^\star \geq \mu_0 E$ $(\mu_0 > 0)$, а A_j $(j = \overline{0,2})$ линейные операторы в H, $f(t)$ и $u(t)$ — векторнозначные функции со значениями из H, $\omega^2 > 0$. Пусть $\gamma = (-\infty, \infty)$. Обозначим через $L_{2,\gamma}\left(R; H_\alpha\right) = \left\{f(t) : f(t)e^{-\gamma t} \in L_2\left(R; H_\alpha\right)\right\}$ и определим норму следующим образом: $\|f\|_{L_{2,\gamma}(R;H_\alpha)} = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|_\alpha^2 e^{-2\gamma t} dt\right)^{1/2}$. Далее, определим пространство $W_{2,\gamma}^2\left(R; H_\alpha\right) = \left\{u : u^{(2)} \in L_2\left(R; H\right),\ u \in L_2\left(R; H_\alpha\right)\right\}$, а норму определим таким образом: $\|f\|_{W_{2,\gamma}^2(R;H_\alpha)} = \left(\left\|u^{(2)}\right\|_{L_2(R;H)} + \|u\|_{L_2(R;H_\alpha)}\right)^{1/2}$.

Определение 1. *Если при $f(t) \in L_2\left(R; H\right)$ существует вектор-функция $u(t) \in W_{2,\gamma}^2\left(R; H\right)$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в R, то будем называть регулярным решением уравнения (1). И если имеет место оценка $\|u\|_{W_{2,\gamma}^2(R;H)} \leq const\, \|f\|_{L_2(R;H)}$, то уравнение (1) будем называть регулярно разрешимым.*

Теорема 1. *Пусть $A = A^\star \geq \mu_0 E$ $(\mu_0 > 0)$ и число $|\gamma| < \omega\mu_0$, $\omega > 0$. Если имеет место неравенство $K\left(\omega\gamma; \mu_0\right) \leq C_2\left(\omega\gamma; \mu_0\right)\|B_0\| + C_1\left(\omega\gamma; \mu_0\right)\|B_1\| + C_0\left(\omega\gamma; \mu_0\right)\|B_2\| < 1$, то уравнение (1) регулярно разрешимо. Здесь* $C_0\left(\omega\gamma; \mu_0\right) = \dfrac{\omega^2\mu_0^2}{\omega^2\mu_0^2 - \gamma^2}$, $C_1\left(\omega\gamma; \mu_0\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\omega^2\mu_0^2 + \gamma^2}{\omega^2\mu_0^2 - \gamma^2}$, $C_2\left(\omega\gamma; \mu_0\right) = \dfrac{\omega^2\mu_0^2}{\omega^2\mu_0^2 - \gamma^2}$.

Д. А. Жуков (Ростов-на-Дону)
fossil.new@yandex.ru

MG-ДЕФОРМАЦИИ ОДНОСВЯЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ЗАДАНИИ ВАРИАЦИИ СФЕРИЧЕСКОЙ КРИВИЗНЫ ВДОЛЬ КРАЯ

Пусть $S-$ поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, заданная радиус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(u, v) \in D_{3,p}, p > 2, (u, v) \in \Omega$, где $\Omega-$ плоская односвязная область. Край поверхности ∂S класса C^1_α, $0 < \alpha \leqslant 1$, гауссова кривизна $K \geqslant k_0 > 0$, $k_0 = const$. Зададим на S поле направлений R, обозначим вычет поверхности S относительно поля R через $V_R(S)$.

Рассмотрены бесконечно малые MG-деформации поверхности S (бесконечно малые деформации, при которых сохраняется поточечно гауссов образ поверхности, а вариация гауссовой кривизны равна функции σ класса $D_{1,p}$, $p > 2$, заданной на S). Отметим на S точку M и потребуем, чтобы M при деформации смещалась на заданный бесконечно малый вектор $\vec{C}$. Данное требование будем называть точечной связью. Доказана

Теорема. *Пусть сферическая кривизна поверхности S вдоль края ∂S в направлении R имеет заданную вариацию ψ ($\psi-$ функция класса C_ν, $0 < \nu < 1$) при бесконечно малой MG-деформации с точечной связью. Тогда:*

1) если $V_R(S) > -2$, то

- при $\sigma \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$ существует и единственна бесконечно малая MG-деформация поверхности S;

- при $\sigma \not\equiv 0$ или $\psi \not\equiv 0$ бесконечно малая MG-деформация поверхности S существует и единственна тогда и только тогда, когда функции σ и ψ удовлетворяют $(2V_R(S) + 3)$ условиям разрешимости;

2) если $V_R(S) \leqslant -2$, то

- при $\sigma \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$ существует $(-2V_R(S) - 3)$ линейно независимых бесконечно малых MG-деформаций поверхности S;

- при $\sigma \not\equiv 0$ или $\psi \not\equiv 0$ бесконечно малые MG-деформации поверхности S существуют и зависят от $(-2V_R(S) - 3)$ произвольных вещественных постоянных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фоменко В. Т.* Об изгибании и однозначной определенности поверхности положительной кривизны с краем. Таганрог: Изд-во ТГПИ, 2011. 74 с.

А. Изаксон (Веер Шева, Израиль)
avigdor@post.bgu.ac.il

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ В ЗАДАЧЕ КОНВЕКЦИИ В СЛОЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Для слоя жидкости с фиксированной границей доказано, что в предсказанных линейным приближением условиях возникает новое решение в нелинейной системе уравнений. Дополнительная трудность задачи со свободной границей состоит в том, что с возникновением нового решения меняется и область, в которой оно рассматривается. При линеаризации нелинейные краевые условия сносятся на невозмущенную свободную границу. В случае учета на свободной поверхности поверхностного натяжения и полная, и линеаризованная задачи могут быть сведены к уравнениям с вполне непрерывными операторами относительно формы свободной границы. К этим уравнениям применима теория возникновения новых решений в нелинейных интегральных уравнениях.

С. В. Исраилов (Грозный)
segitov@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ОДУ В ОСОБЫХ СЛУЧАЯХ

Для бесконечной системы

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \dots), \quad i = 1, 2, \dots \tag{1}$$

с условиями

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} y_i(x_{ij}) = \int\limits_a^b F_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots)\, dx \tag{2}$$

$$y_i(x_i) + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} y_j(a) = \int\limits_a^b F_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots)\, dx \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_a^b y_j(x)\, dh_{ij}(x) = \int\limits_a^b F_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots)\, dx, \tag{4}$$

где f_i, F_i, $i = 1, 2, \dots$ непрерывны в замкнутой области $D\colon \{|y_i| \leqslant d_i,\ x \in [a, b],\ i = 1, 2\}$, α_{ij} — данные числа, $h_{ij}(x)$ функции с ограничениями вариациями на $[a, b]$, $h_{ij}(b) - h_{ij}(a) = a_{ij} + \sigma_{ij}$, $i, j = 1,\ 2, \dots, \sigma_{ij}$ — символ Кронекера и $\det(a_{ij} + \sigma_{ij})_{ij=1} \neq 0$, методом применения теорий Пуанкаре и Коха [1] доказаны теоремы существования и единственности решения.

Может случиться, что указанный выше определитель и бесконечный определитель из чисел α_{ij} могут равняться нулю и наступают особые случаи, когда специальным образом построенные системы алгебраических уравнений нельзя разрешить по Пуанкаре и Коху и краевые задачи не могут быть заменены равносильными системами интегральных уравнений как в [1].

Здесь для таких случаев задачи (1), (2), (1), (3), (1), (4) сводятся к нагруженным бесконечным системам интегральных уравнений для применений принципов сжатых отображений и Красносельского М. А. и доказываются соответствующие теоремы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Исраилов С. В., Юшаев С. С.* Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Нальчик: Издательский центр «Эль-Фа», 2004. 445 с.

С. В. Исраилов, А. М. Гачаев (Грозный)
gachaev_chr@mail.ru

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ЛИНЕЙНЫМИ МНОГОТОЧЕЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В монографии [1] доказаны теоремы существования и единственности решения для бесконечной системы ОДУ

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

с условиями

$$y_i(x_i) + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} y_j(a), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

$$y_i(a) + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{ij} y_j(x_j), \quad i = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

путем применения теорий Пуанкаре и Коха [1] о бесконечных системах алгебраических уравнений и определителях бесконечного порядка для сведения задач (1), (2) и (1), (3) к бесконечным системам интегральных уравнений. Практическое применение полученных результатов затруднительно из-за громоздких вычислений.

Здесь задачи (1), (2) и (1), (3) заменяются равносильными нагруженными бесконечными системами интегральных уравнений

$$y_i(x) = -\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} y_j(a) + \int_{x_i}^{x} f_i(t, y_1(t), \ldots)\, dt, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

$$y_i(x) = -\sum_{j=1}^{\infty} \beta_{ij} y_j(x_j) + \int\limits_a^x f_i(t, y_1(t), \dots)\, dt, \quad i = 1, 2, \dots \tag{5}$$

и в предположении непрерывности функций $f_i(x, y_1, \dots)$, $i = 1, 2, \dots$ в замкнутой области $D\colon \{|y_i| \leqslant d_i, x \in [a, b], i = 1, 2, \dots\}$ и выполнимости условий Липщица по $y_1, y_2, \dots$, и при определенных ограничениях на число α_{ij}, β_{ij} и $x_i, x_j \in [a, b]$, $i, j = 1, 2, \dots$ с помощью принципов сжатых отображений и Красносельского М. А. доказываются несколько теорем о существовании и единственности решения поставленных задач. Практическое их нахождение осуществляется методом последовательных приближений как предельные функции $y_1(x), y_2(x), \dots$ последовательностей решений задач Коши [1].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Исраилов С. В., Юшаев С. С.* Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Нальчик: Издательский центр «Эль-Фа», 2004. 445 с.

В. В. Казак, Н. Н. Солохин (Ростов-на-Дону)
vkazak@pochta.ru

СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В работах В. Т. Фоменко изучена краевая задача со смешанным краевым условием вида

$$a\left(\bar{U}\bar{l}\right) + b\left(\bar{V}\bar{n}\right) = c, \tag{4}$$

где $\vec{U}$, $\vec{V}$ — векторные поля соответственно смещения и вращения бесконечно малого изгибания поверхности, a, b, c — действительные функции, заданные на границе ∂S поверхности S, $\vec{l}$ - некоторое векторное поле, $\bar{n}$ — нормаль к поверхности.

Такая задача сводится к краевой задаче Пуанкаре для обобщённых аналитических функций с краевым условием вида

$$\mathrm{Re}\left\{\hat{a}(z)\partial_z w + \varepsilon \hat{b}(z) w(z)\right\} = 0, \tag{5}$$

Она решена для некоторых классов поверхностей и семейств векторных полей $\vec{l}$. В нашей работе предлагается обобщение этих результатов для поверхностей положительной кривизны с краем.

Доказывается, что при $n = Ind\hat{a} \geq 0$ в семействе векторных полей $\vec{l}(\varepsilon)$, зависящем от вещественного параметра ε либо все поля собственные, либо их не более чем счётное множество. Если же поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$, то условие (2) квазикорректно с $2n + 3$ *степенями свободы для всех значений ε, $\varepsilon \in (-\infty, \infty)$, исключая, быть может дискретный ряд значений ε_k, $k = 1, 2, \dots$* $(0 < |\varepsilon_1| < |\varepsilon_2| < \dots)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фоменко В. Т.* О квазикорректности внешних связей в теории бесконечно малых изгибаний // СМЖ. — 1974. — Т. XV, № 1. — С. 152–161.

2. *Казак В. В.* Распределение собственных векторных полей поверхностей положительной кривизны // Известия СКНЦ ВШ. Сер. Естеств. науки. — 1973. — № 4. — С. 38–41.

3. *Казак В. В., Солохин Н. Н.* О квазикорректности смешанного краевого ус-ловия для одного класса поверхностей. // Современные проблемы мате-матики и механики, том VI, выпуск 2. Издательство Московского университета, 2011. — С. 212–216.

А. С. Калитвин(Липецк)
kalitvinas@mail.ru

О РЕШЕНИЯХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БАРБАШИНА (ИДУБ)

В работе изучаются ИДУБ вида

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = c(t,s)x(t,s) + \int_S k(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + f(t,s), \tag{1}$$

где $t \in J, s \in S$, J — конечный или бесконечный промежуток числовой оси, S — компактное множество в R^n, заданные функции c и f измеримы на $D = J \times S$, функция k измерима на $D \times S$, а интеграл понимается в смысле Лебега. В задаче Коши ИДУБ (1) рассматривается вместе с начальным условием $x(t_0, s) = \varphi(s)$ $(t_0 \in J,\ \varphi \in C(S))$.

ИДУБ (1) и задача Коши изучались в [1]. При этом ИДУБ (1) интерпретировалось как дифференциальное уравнение $x'(t) = A(t)x(t) + f(t)$ в банаховом пространстве X и рассматривались классические решения этого уравнения, т.е. непрерывные вместе с производной Фреше $x'(t)$ вектор-функции $x(t)$ со значениями в X.

Непрерывную на D функцию $x(t,s)$ назовем решением ИДУБ (1), если она абсолютно непрерывна по t для каждого $s \in S$ и удовлетворяет уравнению (1) для каждого $s \in S$ почти при всех $t \in J$.

Интегрируя обе части ИДУБ (1) по отрезку $[t_0, t]$, получим

$$x(t,s) = \int_{t_0}^{t} c(\tau,s)x(\tau,s)d\tau + \int_{t_0}^{t}\int_S k(\tau,s,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + g(t,s), \tag{2}$$

где $g(t,s) = \varphi(s) + \int_{t_0}^{t} f(\tau,s)d\tau$.

Функцию $x(t,s)$ назовем решением уравнения (2), если она непрерывна на D, абсолютно непрерывна по t для каждого $s \in S$ и удовлетворяет уравнению (2). Решение интегрального уравнения (2) будем называть обобщенным решением задачи Коши для ИДУБ (1).

Для ИДУБ (1) и $X = C(S)$ классическое решение задачи Коши есть решение задачи Коши, а решение задачи Коши есть обобщенное решение задачи. Обратное неверно.

В докладе приводятся условия существования и единственности решения и обобщенного решения задачи Коши для ИДУБ (1).

В. А. Калитвин(Липецк)
kalitvin@gmail.com

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

В пространстве $C(D)$ непрерывных на $D = [a, b] \times [c, d]$ функций рассматривается уравнение Вольтерра с частными интегралами

$x(t, s) = \int_a^t l(t, s, \tau)x(\tau, s)d\tau + \int_c^s m(t, s, \sigma)x(t, \sigma)d\sigma+$
$+ \int_a^t \int_c^s n(t, s, \tau, \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma + f(t, s), (t, s) \in D,$

где l, m, n, f — заданные непрерывные на $D \times T$, $D \times S$, $D \times T \times S$, D соответственно функции, $T = \{\tau : a \le \tau \le t \le b\}$, $S = \{\sigma : c \le \sigma \le s \le d\}$. С применением квадратурных и кубатурной формул оно решается численно, изучается сходимость вычислительных процессов.

Отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ разобъем на части точками $t_p = a + ph$ ($p = 0, 1, \dots, P,\ a + Ph \le b < (P + 1)h$), $s_q = c + qg$ ($q = 0, 1, \dots, Q,\ c + Qg \le d < (Q + 1)g$) соответственно. Полагая $t = t_p$, $s = s_q$ и применяя формулы
$\int_a^{t_p} l(t_p, s_q, \tau)x(\tau, s_q)d\tau = h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi} l_{pqi} x(t_i, s_q) + r^l_{pq}$,

$$\int_c^{s_q} m(t_p, s_q, \sigma)x(t_p, \sigma)d\sigma = g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq} m_{pqj} x(t_p, s_j) + r^m_{pq},$$

$$\int_a^{t_p}\int_c^{s_q} n(t_p, s_q, \tau, \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma = hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} \gamma_{pqij} n_{pqij} x(t_i, s_j) + r^n_{pq},$$

где $l_{pqi} = l(t_p, s_q, t_i)$, $m_{pqj} = m(t_p, s_q, s_j)$, $n_{pqij} = n(t_p, s_q, t_i, s_j)$, а r^l_{pq}, r^m_{pq} и r^n_{pq} — остатки квадратурных и кубатурной формул, получим после отбрасывания остатков систему уравнений для приближенных значений x_{p0}, x_{0q}, x_{pq} функции x в точках $(t_p, s_0), (t_0, s_q), (t_p, s_q)$ ($p = 1, \dots, P; q = 1, \dots, Q$). Пусть δ_{p0}, δ_{0q}, δ_{pq} — погрешности в уравнениях с x_{p0}, x_{0q}, x_{pq}. Тогда

$x_{00} = f(a, c)$,

$$x_{p0} = h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi} l_{p0i} x_{i0} + f_{p0} + \delta_{p0},\ \ x_{0q} = g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq} m_{0qj} x_{0j} + f_{0q} + \delta_{0q},$$

$x_{pq} = h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi} l_{pqi} x_{iq} + g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq} m_{pqj} x_{p_j} + hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} \gamma_{pqij} n_{pqij} x_{ij} + f_{pq} + \delta_{pq}$ ($p = 1, \dots, P;\ q = 1, \dots, Q$), где $f_{p0} = f(t_p, s_0)$, $f_{0q} = f(t_0, s_q)$, $f_{pq} = f(t_p, s_q)$.

Теорема. *Если r^l_{pq}, r^m_{pq} и r^n_{pq} стремятся к нулю равномерно относительно p,q при $h,g \to 0$; существуют такие числа A, B, C, что $|\alpha_{pi}| \le A < \infty$, $|\beta_{jq}| \le B < \infty$, $|\gamma_{pqij}| \le C < \infty$; погрешности δ_{p0}, δ_{0q}, δ_{pq} стремятся к нулю равномерно относительно p,q при $h,g \to 0$, то при всех достаточно малых h и g приближенное решение x_{pq} может быть найдено из последней системы, причем для любого заданного $\epsilon > 0$ найдутся такие h_0 и g_0, что при $h < h_0$ и $g < g_0$ будут выполняться неравенства $|x_{pq} - x(t_p, s_q)| < \epsilon$ $(p = 0, 1, \ldots, P; q = 0, 1, \ldots, Q)$, причем*

$$h\sum_{i=0}^{p}\alpha_{pi}l(t,s,t_i)x_{iq}+g\sum_{j=0}^{q}\beta_{jq}m(t,s,s_j)x_{pj}+hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}\gamma_{pqij}n(t,s,t_i,s_j)x_{ij}+f(t,s)$$

равномерно сходится на D к решению $x(t,s)$ при $h \to 0$, $g \to 0$.

А. Г. Камалян, А. Б. Нерсесян (Армения)
kamalyan_armen@yahoo.com, nerses@instmath.sci.am

О НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРАХ ТИПА ПЛАВНОГО ПЕРЕХОДА

Пусть S^0_r - множество локально суммируемых на R функций f , удовлетворяющих условию $|f(x)| \le const.(1 + |x|)^r$, $r \in R$, а $H_r(R)$ — пространство Соболева-Слободецкого обобщенных функций u, преобразование Фурье $\hat{u}$ которых принадлежат весовому пространству $L_2(R, (1 + |\xi|)^{2r})$. Исследуется разрешимость уравнения

$$A(x, D)\, u = f \tag{1}$$

где $A(x, D)$ - одномерный псевдодифференциальный оператор, действующий в $H_r(R), r \ge 0$ по формуле

$$A(x, D)\, u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,x\,\xi}\, A(x, \xi)\, u(\xi) d\xi$$

с символом вида

$$A(x, \xi) = 1 + A_0(\xi) + \sum_{k=1}^{N} \varphi(x, \lambda_k)\, A_k(\xi),$$

где $A_k \in S^0_r$, $f \in L_2(R)$ и $\varphi(x, \lambda) = \tanh \frac{\pi}{\alpha}(x - \lambda + i\frac{\alpha\,\beta}{2})$, $\alpha > 0$, $-1 \le \beta \le 1$, $\lambda_k \in R$, $k = 0, .., N$.

К уравнению (1) сводятся дифференциальные уравнения вида $\sum_{k=0}^{N} e^{kx}\, P_k(D)$, где P_k - дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Последнее уравнение содержит (с точностью до замены переменной) известное уравнению, определяющее G-функции Мейера. В случае $N = 1$, $r = 0$ к уравнению (1) сводится также интегральное уранение плавного перехода Ю. И. Черского [1]. При $r = 0$ операторы несколько более общего вида были изучены в [2].

Решения однородного уравнения (1) удается описать в терминах решений характеристической однородной системы сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши, что позволяет получить некоторые оценки для количества решений в пространстве $H_r(R)$. В случае $N = 1$ построена полная теория разрешимости уравнения (1).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Черский Ю. И.* Нормально разрешимое уравнение плавного перехода.// ДАН СССР. — 1970. Т. 190, № 1, С. 57–60.

2. *Камалян А. Г., Нерсесян А. Б.* Интегральные операторы типа плавного перехода.// Функ. анализ и его прилож. 1989, Т. 23, №2, С. 32–39.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. — New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

А. А. Катрахова (Воронеж), А. Ю. Сазонов (Тамбов)
sazonov.anatol@yandex.ru

О МЕТОДЕ ФУРЬЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

Рассматривается вопрос о разрешимости в классическом смысле смешанной задачи для параболического уравнения, содержащего оператор Бесселя по части пространственных переменных

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + \frac{k_i}{y_i} \frac{\partial u}{\partial y_i} \right] = f, \quad \text{в} \quad Q_T^+ = \Omega^+ \times (0 < t < T),$$

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad u|_{\Gamma^+ \times [0,T]} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y_i} \right|_{y_i=0} = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Здесь $\Omega^+ \subset R^{n+m}$ — произвольная ограниченная область, Γ^+ — часть границы Ω^+, расположенная в области $y_1 > 0, \ldots, y_m > 0$, $\varphi(x)$, $f(x,t)$ заданные функции.

Установлены достаточные условия на границу Γ^+, начальную функцию $\varphi(x)$ и правую часть $f(x,t)$ в весовых функциональных пространствах И.А. Киприянова, при которых ряд

$$u(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} v_p(x) \left[\varphi_p e^{-\lambda_p t} + \int\limits_0^t f_p(\tau) e^{-\lambda_p (t-\tau)} d\tau \right],$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00645).

определяет классическое решение задачи. φ_p, $f_p(\tau)$ — коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ по системе классических собственных функций $\{v_p(x)\}$. Обобщены результаты работ [2]–[4].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997.

2. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений // УМН, 1960. Т. 15, вып. 2. С. 97–154.

3. *Сазонов А. Ю.* О методе Фурье для некоторых сингулярных гиперболических уравнений // ДАН СССР, 1979. Т. 248, № 4.

4. *Сазонов А. Ю.* О классическом решении смешанной задачи для сингулярного параболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, № 8.

С. Б. Климентов (Ростов-на-Дону, ЮФУ, ЮМИ ВНЦ РАН)
sklimentov@pochta.ru

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ[1]

Рассмотрим в единичном круге $\overline{D}$ равномерно эллиптическую систему Бельтрами в комплексной записи $\partial_{\bar z} w - q(z)\partial_z w = 0$, где $w = w(z) = u(z)+iv(z)$ — искомая комплексная функция, $\partial_{\bar z} = 1/2(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$, $\partial_z = 1/2(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$,— производные в смысле Соболева, $|q(z)| \leq \mathrm{const} < 1$.

Для классов Харди $H_p(q)$ решений этой системы [1] имеет место

Теорема 1. *Если в* $q(z) \in C^k_\alpha(\overline{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, $|q(z)| \leq \mathrm{const}(1 - |\zeta(z)|)^{2\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, *и решение этого уравнения* $w(z) \in H_p(q)$, $p > 1$, *то имеет место соотношение*

$$w(z) - T\left[q(z)\partial_z w\right] = \Phi(z) \in H_p, \tag{1}$$

где

$$T\varphi(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\varphi(t)}{t-z}dxdy, \quad t = x+iy,$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{w(t)dt}{t-z}, \tag{2}$$

$w(t)$ — *некасательные предельные значения на* Γ *функции* $w(z)$.

Обратно, если задана голоморфная функция $\Phi(z) \in H_p$, $p > 1$, *соотношением (1) однозначно определяется решение уравнения Бельтрами* $w(z) \in H_p(q)$, *удовлетворяющее (2), причём отображение* $w \to w -$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации соглашение 14.A18.21.0356 «Теория функциональных пространств, операторов и уравнений в них».

$T(q\partial_z w) \equiv (I-P_1)w$ осуществляет линейный изоморфизм банаховых пространств $H_p(q)$ и H_p.

Отметим, что без дополнительных условий на коэффициент уравнения $q(z)$ представление (1) не имеет места, поскольку имеются примеры решений уравнений Бельтрами даже с постоянным коэффициентом, для которых функция $q(z)\partial_z w(z) \notin L_1(\overline{D})$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Каляниченко С. И., Климентов С. Б.* Классы Харди решений уравнения Бельтрами // Известия Вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2008, №1. С. 7–10.

В. Д. Кряквин (Ростов-на-Дону)
vadkr@math.rsu.su

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА-ЗИГМУНДА ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА[1]

В докладе рассматриваются пространства $Z^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, состоящие из распределений u, для которых конечна норма

$$\|u\|_{s(\cdot)} = \sup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \|2^{ks(\cdot)}\lambda_k(D)u\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Предполагается, что непрерывная вещественнозначная функция s удовлетворяет условиям:

1) для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$-\infty < s_- \le s(x) \le s_+ < \infty;$$

2) существует константа $B > 0$ такая, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и любого $0 < |y| < 1$

$$|s(x+y) - s(x)| \le \frac{B}{\left|\log_2 |y|\right|}.$$

Основным (но не единственным) результатом, обсуждающимся в докладе, является следующая

Теорема. *Пусть при $0 \le \delta < 1$, $m \in \mathbb{R}$ символ $a(x,\xi)$ принадлежит классу Л.Хермандера $S^m_{1,\delta}$. Тогда псевдодифференциальный оператор $a(x,D)$ является ограниченным из пространства $Z^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $Z^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n)$, и существуют положительные константы C, p и q такие, что для любого $u \in Z^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ справедлива оценка*

$$\|a(x,D)u\|_{Z^{s(\cdot)-m}(\mathbb{R}^n)} \le C|a|^m_{p,q}\|u\|_{Z^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке внутреннего гранта Южного федерального университета.

где

$$|a|^m_{p,q} := \max_{|\beta|\le p, |\alpha|\le q} \sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)|(1+|\xi|)^{|\alpha|-\delta|\beta|-m}.$$

О. Е. Кудрявцев (Ростов-на-Дону)
koe@donrta.ru

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ФУНКЦИОНАЛОВ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ

Рассматриваемая в докладе задача в первую очередь обусловлена необходимостью управления рисками на энергетических рынках. «Swing»-опционы были в введены на товарные рынки в связи с неопределенностью потребления энергии. Владелец «Swing»-опциона может, согласно условиям контракта, заданное число раз купить или продать определённый объем электроэнергии по фиксированной цене; при этом следует не превышать «время перерыва», которое разделяет каждые два исполнения опциона.

Рассмотрим процесс цены следующего вида : $S_t = e^{X_t}$, где $\{X\}_{t\ge 0}$ — процесс Леви. Пусть T — срок действия опциона типа «Swing», который даёт право многократного исполнения с *временем перерыва* $\delta > 0$. Рассмотрим n возможностей исполнить опцион на продажу (опцион put). Будем обозначать через $\mathcal{T}^n$ набор векторных моментов остановки $(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n)$ таких, что $\tau_1 \le T$ п.н.; $\tau_i - \tau_{i-1} \ge \delta$ для $\{\tau_{i-1} \le T\}$ п.н., $i = 2, .., n$.

Известно, что задача вычисления цены такого опциона «Swing» сводится к вычислению функционала следующего вида

$$\sup_{(\tau_1,\dots,\tau_n)\in\mathcal{T}^n} \sum_{i=1}^{n} M[e^{-r\tau_i}\phi(X_{\tau_i})], \qquad (1)$$

где $\phi(x)$ — функция выплат.

Автором был построен новый эффективный метод вычисления функционалов (1), который включает в себя динамическое программирование и решение последовательности интегро-дифференциальных уравнений методом «Быстрой факторизации Винера-Хопфа», введённым в [1]. Алгоритм применён для соответствующих деривативов в предположении, что цена на электричество представляет собой экспоненциальную модель Леви. Это позволит учитывать риск резких перепадов цен.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kudryavtsev O. E., Levendorskiĭ S. Z.*, Fast and accurate pricing of barrier options under Lévy processes// Finance and Stochastics. 2009. V. 13, №4. P. 531–562.

Н. Л. Марголина (Кострома)
nmargolina@mail.ru

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ ВЕРХНЕГО ГЕНЕРАЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Для системы
$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1}$$
где $x \in \mathrm{R^n}$ и $A(t)\colon \mathrm{R}^+ \to \mathrm{EndR^n}$ непрерывно, верхний генеральный показатель $\kappa_g(A)$ (см. [2, гл.3, §4, п. 2]) этой системы определяется как точная нижняя грань множества тех чисел ρ, для которых существуют числа D_ρ, такие, что
$$\ln \|X_A(t+s,t)\| \le D_\rho + \rho s$$
для всех $t, s \in \mathrm{R}^+$. Здесь $X_A(\vartheta, \tau)$ — оператор Коши системы (1). Точная нижняя грань пустого множества полагается равной $+\infty$.
Верхний генеральный показатель и старший показатель Ляпунова системы (1) связаны соотношением: $\lambda_1(A) \le \kappa_g(A)$ (см. [2, гл.3, §4, п. 2]).
Известно, что если $A(t)\colon \mathrm{R}^+ \to \mathrm{EndR^n}$ ограничено, то $\kappa_g(A)$ конечен (см. [2, гл.3, §4, теорема 4.3]) и совпадает с величиной
$$\inf_{t>0} \sup_{k\in \mathrm{N}} t^{-1} \ln \|X_A(kt,(k-1)t)\|.$$
(см. [1, гл.3, §8, п. 8.1]).

Теорема. *Для любого* $n \in \mathrm{N}$ *существуют системы вида (1), для которых*
$$\inf_{t>0} \sup_{k\in \mathrm{N}} t^{-1} \ln \|X_A(kt,(k-1)t)\| < \lambda_1(A) < \kappa_g(A).$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости // М.: Наука, 1966.
2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // М.: Наука, 1970.

А. П. Михайлов (Старый Оскол)
mikhailovap@mail.ru

СУЩЕСТВОВАНИЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Вопросу существования периодических решений гамильтоновых систем посвящено достаточно большое количество работ.

При рассмотрении гамильтоновой системы вида $\dot{x} = JH'(t,x)$, где $J = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, на функцию $H(t,x)$ накладываются условия, которые позволяют применять для нахождения критических точек различные вариационные методы.

Рассмотрим неавтономную гамильтонову систему

$$\ddot{x} + V'(t,x) = v'(t,x) \tag{1}$$

где $V: \ R \times R^n \to R$ - $\omega-$периодическая по $\boldsymbol{t}$ и дифференцируемая по $\boldsymbol{x}$ функция, такая, что $V'(t,x) = \frac{\partial V}{\partial x}$ непрерывна по совокупности переменных и положительно однородна степени α, $\alpha \in (0;1)$,

$v'(t,x)/|x|^{\alpha} \to 0, \ |x| \to \infty$ равномерно по t,

$v'(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x}$ - непрерывна по совокупности переменных.

Рассматривается задача о существовании $k\omega$-периодических ре- шений уравнения (1), где $\boldsymbol{\kappa}$ – целое число, $k > 1$. Такие решения, не являющиеся ω-периодическими, называются субгармоническими. Исследованию вопроса существования субгармонических решений уравнения (1) посвящены работы [1],[2].

Предположим, что выполнено следующее условие:

$$\int\limits_0^{\omega} V(t,x)dt > 0, \ x \in \ S^{n-1} \tag{2}$$

Теорема. *Пусть выполнено условие* (2). *Тогда уравнение* (1) *для каждого целого* $k > 1$ *имеет по крайней мере одно субгармоническое решение.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *C. L. Tang, X. P. Wu* Subharmonic solutions for nonautonomous sublinear second order Hamiltonian systems, J. Math. Anal. Appl. 304 (2005), P. 383–393.

2. *E. Serra, M. Tarallo* Subhamonic solutions to second order differential equations with periodic nonlinearities, Nonl. Anal. 41 (2000), P. 649–667.

И. В. Моршнева (Ростов-на-Дону)
morsh@math.sfedu.su

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С СИММЕТРИЕЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ ГИДРОДИНАМИКИ

Рассматриваются простейшие бифуркации и их пересечения в динамических системах с конечными и непрерывными группами симметрии, которые наиболее часто встречаются в задачах гидродинамики. Для исследования применяются метод Ляпунова-Шмидта, метод сведения на центральное многообразие, метод возмущений.

Проведено исследование систем уравнений разветвления и амплитудных систем на инвариантных подпространствах. Показано, что в условиях общего положения возможно возникновение периодических решений типа бегущих волн, косых бегущих волн и их нелинейных смесей, а также возникновение квазипериодических решений. Получены явные выражения для асимптотик возникающих решений и для величин, определяющих характер их ветвления и устойчивость. Приводятся применения теории к задачам гидродинамики.

П. В. Николенко (Ростов-на-Дону)
ppdominikl@mail.ru

О НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ С НЕПРЕРЫВНЫМИ ОПТИМАЛЬНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

Пусть рассматривается задача теории управления

$$J(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x,u)\,dt \to \min,$$

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = 0, \quad u \in K \subset \mathbb{R}^n,$$

а именно: среди всех управлений u, переводящих x_0 в 0 указать то, которое минимизирует значение функционала J. Пусть задача такова, что экстремали (x,u) (процессы, для которых выполнен принцип максимума Понтрягина) имеют непрерывные управления u.

Определение. *Пусть u и $\widetilde{u}$ являются экстремалями, переводят точку $\widetilde{x}$ в 0 и $J(u) = J(\widetilde{u})$. Точка $\widetilde{x}$ называется точкой неоднозначности. Множество точек неоднозначности обозначим N.*

Теорема. *Если процесс (x,u) оптимален на полуинтервале $(t_0,t_1]$, то фазовая кривая $x(t)$ не содержит точек из N.*

Указанный тип имеет следующая задача

$$J(u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (\alpha + \beta|u|^2)\,dt \to \min, \quad \dot{x} = v(x) + u,\; x(t_0) = x^0,\; x(t_1) = 0,$$

v — гладкое векторное поле в $\mathbb{R}^2$, управление u таково, что $u(t) \in \mathbb{R}^2$, $\|u(t)\| \leqslant 1$.

При $\beta = 0$ мы получим задачу быстродействия, устройство множества N изучалось в работах [1], [2] для плоскопараллельных полей.

При $\alpha = \beta = 1$, $v(0) = 0$ экстремали $(\widetilde{x}, \widetilde{u})$ определяются решениями следующей задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x) + g(|\psi|)\psi, \\ \dot{\psi} = -\psi Dv(x), \end{cases} \tag{1}$$

$x(0) = 0$, $|\psi(0)| = 2$ — финальные условия.

Здесь Dv — матрица Якоби отображения v, $g(t) = 1/2$ при $t \leqslant 2$, $g(t) = 1/t$ при $t > 2$.

Траектория $\widetilde{x}$ это первые две компоненты решения (x, ψ) системы (1), а управление $\widetilde{u} = g(|\psi|)\psi$. Через $\varphi(k, \psi(0))$ обозначим решение уравнения $\displaystyle\int_\tau^0 f_0(\widetilde{x}, \widetilde{u})\,dt = K$. Пусть N_t сдвиг на время t по траекториям системы (1), а $\widetilde{N}_t$ — это первые две компоненты указанного вектора. Если

$$\widetilde{N}_{\varphi(k,\psi_0)}(\psi(0)) = \widetilde{N}_{\varphi(k,\widetilde{\psi}(0))}(\widetilde{\psi}(0)) = x(k), \quad \widetilde{\psi}(0) \neq \psi(0), \tag{2}$$

то $x(k) \in N$.

Решение уравнения (2) можно получать методом Ньютона, пользуясь системой в вариациях, соответствующих системе (1).

Решая (2) при разных значениях k, получим аппроксимацию N.

Благодарю В. Г. Цибулина за полезные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Николенко П. В.* Множество неоднозначности и задача о наискорейших перемещениях в поле скоростей // Дифференциальные уравнения, 2013 (в печати).

2. *Николенко П. В.* О наискорейших перемещениях в поле скоростей // Дифференциальные уравнения, 2011. № 5.

С. Н. Овчинникова, О. А. Прозоров (г. Ростов-на-Дону)
ovch@math.rsu.ru, oaprozorov@gmail.com.

НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЖИМЫ В ЗАДАЧАХ ВИБРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ [1]

Рассматривается плоский горизонтальный слой вязкой несжимаемой жидкости, подогреваемый снизу. Слой как единое целое совершает гармонические колебания с амплитудой a вдоль вектора $\mathbf{s} = (cos\varphi, sin\varphi)$, угол φ отсчитывается от оси z. Предполагается, что частота колебаний ω велика, а амплитуда скорости a/ω конечна. При этих предположениях к уравнениям конвекции в приближении Обербека–Буссинеска в [1] применен метод осреднения, позволяющий судить об устойчивости периодического решения исходной задачи по решению осредненной системы для плавных компонент неизвестных.

Основное внимание уделено возникновению вторичных режимов при потери устойчивости равновесия осредненной системы, в случае, когда управляющий параметр — число Рэлея превышает критическое значение. В работе [2] исследована нелинейная задача в предположении пониженной гравитации, результаты исследования задачи в общем случае приводятся в докладе. Исследование линеаризованной системы дает значения критических чисел Рэлея, при которых линейная задача имеет нетривиальное решение. В окрестности критического числа Рэлея, при остальных фиксированных параметрах рассчитывается вторичное решение нелинейной задачи методом Ляпунова–Шмидта. Приведен алгоритм вывода амплитудных уравнений.

Приводятся результаты расчета решения полной неосредненной задачи по методу конечных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. М. Зеньковская, И. Б. Симоненко* О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966, № 5, С. 51-55.

2. *С. М. Зеньковская, С. Н. Овчинникова* Термовибрационная конвекция при невесомости или пониженной гравитации // ПМТФ. 1991. № 2. С. 84–90.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00582-а).

С. В. Пикулин (Москва)
spikulin@gmail.com

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В СЕМЕЙСТВЕ ПЕРФОРИРОВАННЫХ ОБЛАСТЕЙ[1]

Рассматривается полулинейное эллиптическое уравнение вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - a(x)\,|u|^{\sigma-1}\,u = 0$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $\sigma > 1$, $a \in L_\infty(\Omega)$, $a(x) > 0$ в Ω, $a_{ij} \equiv a_{ji} \in L_\infty(\Omega)$, при этом выполнено условие равномерной эллиптичности $\lambda^{-1}\,|\xi|^2 \leq \sum a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \leq \lambda\,|\xi|^2$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ для некоторого $\lambda \geq 1$. Решения $u \in W_2^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ понимаются в смысле распределений, условие Дирихле $u = \varphi$ на $\partial\Omega$ — в смысле $W_2^1(\Omega)$ (функция φ считается продолженной в Ω). Рассмотрим решения u_ε того же уравнения в семействе *перфорированных* областей Ω_ε, получаемых из Ω исключением конечного числа m шаров одинакового радиуса ε, подчиненные условиям Дирихле $u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$ на $\partial\Omega_\varepsilon$, где $\varphi_\varepsilon = \varphi$ на $\partial\Omega$.

Теорема. *Положим* $A(\rho) := \operatorname{mes}\{x \in \Omega : a(x) < \rho\}$ *при* $\rho > 0$. *Пусть* $\sigma > (n+s)/(n-2)$, $A(\rho) \leq A_0\,\rho^{n+s}$ *при* $\rho > 0$, *где* $s \geq 0$, $A_0 > 0$ *(достаточно* $a(x) \geq a_0\,|x|^s$*). Тогда* $\exists\,\alpha > 0$, $q \in [0,1)$ *такие, что если* $m = O\left(\varepsilon^{-\alpha}\right)$ *при* $\varepsilon \to 0$, *то* $\sup|u_\varepsilon - u| \to 0$, *где супремум берется по внешности шаров, концентрических с полостями, имеющих радиус порядка* ε^q *при* $\varepsilon \to 0$. *Скорость сходимости не зависит от значений* φ_ε *на границах полостей.*

При невыполнении условий теоремы сходимость может отсутствовать.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис* О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Мат. сборник. 1988. Т. 135(177), № 3. С. 346–360.

2. *W. Littmann, G. Stampacchia, H. F. Weinberger* Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3). 1963. V. 17. N. 1–2. P. 43–77.

2. *S. V. Pikulin* Behavior of solutions of semilinear elliptic equations in domains with complicated boundary // Russian J. Math. Physics. 2012. V. 19, N. 3. P. 401–404.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00923) и программы № 3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

В. А. Попов (Москва)
vlapopov@gmail.com

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПСЕВДОРИМАНОВОЙ МЕТРИКИ И ИЗОМЕТРИЙ

Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации

Рассмотрим локально заданную псевдориманову аналитическую метрику g_{ij} и аналитическое продолжение этой метрики на всевозможные аналитические многообразия M. Инфинитезимальные изометрии на римановом многообразии — это векторные поля $\xi^k(x)$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\xi^k - g_{kj}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} - g_{ik}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}\right) = 0.$$

Лемма. Инфинитеземальная изометрия, заданная на открытом подмножестве U псевдориманова аналитического многообразия M аналитически продолжается на всё многообразие M.

Теорема. Пусть ζ – алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на псевдоримановом многообразии M, $\eta \subset \zeta$ – стационарная подалгебра, G – односвязная группа Ли с алгеброй Ли ζ и $H \subset G$ – подгруппа с алгеброй Ли η. Тогда, если алгебра ζ не имеет центра, то подгруппа H замкнута в G. и таким образом, определено однородное псевдориманово пространство G/H.

Для метрик, алгебра Ли векторных полей которых не имеет центра. определим квазиполное продолжение, как непродолжаемое многообразие M, которое не допускает нетождественных сохраняющих векторные поля Киллинга изометрий между своими открытыми подмножествами. Такое продолжение единственно, и каждая изометрия между открытыми подмножествами продолжается до изометрии всего M.

Даная работа является естественным продолжением работы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. On analytic extensions of Riemannian manifolds // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences. Kharkov „Apostrof“, 2011.

С. В. Ревина (Ростов-на-Дону)
revina@math.rsu.ru

АСИМПТОТИКА ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Рассматривается двумерное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)$, периодического по пространственным переменным x_1, x_2 с периодами L_1 и L_2 соответственно, описываемое системой уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v} - \nu\Delta\boldsymbol{v} = -\nabla p + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t), \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0.$$

Средняя по пространству скорость считается заданной. Предполагается, что один из пространственных периодов $L_2 = 2\pi/\alpha$, волновое число $\alpha \to 0$.

Речь идет об устойчивости стационарных решений вида

$$\boldsymbol{V} = (0, V_2)(x_1, \alpha x_2),$$

обобщающих классическое течение Колмогорова с синусоидальным профилем скорости

$$\boldsymbol{V} = (0, \gamma \sin x_1).$$

Построена длинноволновая асимптотика задачи устойчивости стационарного течения. Рассмотрены линейная спектральная и линейная сопряженная задачи. Дан алгоритм нахождения и выведены рекуррентные формулы k-го члена асимптотики. Показано, что критические собственные значения линейной спектральной задачи являются нечетными функциями волнового числа, а критические значения вязкости - четными функциями. Если отклонение скорости от ее среднего по периоду значения является нечетной функцией, то собственные значения линейной спектральной задачи находятся точно.

Даны приложения полученных формул к исследованию устойчивости периодических по времени течений. Начато рассмотрение задачи устойчивости стационарных течений в случае почти периодических по пространству внешних сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ревина С. В.* Рекуррентные формулы длинноволновой асимптотики задачи устойчивости сдвиговых течений // ЖВМиМФ. 2013. Т.53. № 6. С. 223–237.

Stasys Rutkauskas (Vilnius, Lithuania)
stasys.rutkauskas@mii.vu.lt

ON THE WELL-POSEDNESS OF DIRICHLET TYPE PROBLEMS FOR THE DEGENERATE ELLIPTIC SYSTEMS

We consider two systems of equations

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)u_{x_i} + C(x)\,u = F(x)\,,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

and

$$\mathcal{L}u := \sum_{i,j=0}^{n} \mathcal{A}_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=0}^{n} \mathcal{B}_i(x)u_{x_i} + \mathcal{C}(x)\,u = \mathcal{F}(x)\,,\ x \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}. \quad (2)$$

The matrix coefficients and right-hand sides of these systems are smooth enough in corresponding closed domains. Domain Ω embrace $x = 0$ as its inner point, and the boundary of domain D is crossed at two points by the line $x' = 0$, $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

We assume that matrices A_{ij} and $\mathcal{A}_{ij}$ are diagonal, and $\lim_{x\to 0} A_{ij}(x) = 0$, $\lim_{x'\to 0} \mathcal{A}_{ij}(x) = 0$ for all i, j. Therefore, the orders of both Eq. 1 and Eq. 2 degenerate at the inner point $x = 0$ and at the line $x' = 0$, correspondingly. The degeneracy can be strong (irregular) or weak (regular) as well. Moreover, we assume that both systems are elliptic in the sense of Petrowskii in the respective domains $\Omega_0 = \Omega\backslash\{x = 0\}$ and $D_0 = D\backslash\{x' = 0\}$.

We consider three problems with Dirichlet type condition $u\,|_{\partial\Omega} = g$ and with one of the following supplementary conditions

$$|u| < \infty \text{ in } \Omega_0,$$

$$\lim_{x\to 0} \left(u(x) - h\left(x/r\right)\right) = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\Psi(x)u(x) - h\left(x/\left|x\right|\right)\right) = 0.$$

to system (1), and two analogously problems with Dirichlet type condition $u\,|_{\partial D_0} = g$ and with one of the conditions

$$|u| < \infty \ \text{ in } D_0,$$

$$\lim_{x'\to 0} \left(u(x_0, x') - h\left(x_0, x'/\left|x'\right|\right)\right) = 0$$

to system (2). Here g and h are given smooth enough vector-functions,Ψ is some weighted matrix with the vanishing entries, as $x \to 0$.

А. А. Сагитов (Грозный)
segitov@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДУ В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ

Системы дифференциальных уравнений и краевых условий записываем в векторных формах

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

$$\Phi y = \Phi^* y, \tag{2}$$

где $y = (y_i)_{i=1}^n$, $f(x, y) = (f_i(x, y))_{i=1}^n$, $x \in [a, b]$, Φ — линейный, Φ^* — нелинейный n-мерные функционалы. Задача (1), (2) исследована в [1] в предположении, что сужение Φ_0 функционала Φ на пространстве непрерывных вектор-функций $C_n(a, b)$ имеет обратный функционал Φ_0^{-1}. Здесь рассматриваются критические случаи, когда это условие нарушается.

Краевая задача (1), (2) заменяется равносильным функционально-интегральным уравнением

$$y(x) = y(a) - \Phi y + \Phi^* y + \int_a^x f(t, y(t))\, dt, \tag{3}$$

в некоторой области $D\colon \{|y| \leqslant d,\ x \in [a, b]\}$ непрерывности вектор-функции $f(x, y)$. На функционал $\widetilde{\Phi} y = y(a) - \Phi y + \Phi^* y$ и интегральный оператор в правой части (3) накладываются ограничения, связанные с Φ, Φ^* и f, и обеспечивающие возможность применения принципов сжатых отображений и Красносельского М. А., и получаются теоремы существования и единственности. Например, для краевых задач типов [1]

$$\begin{cases} y_i'(x) = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), & i = 1, \ldots, n, \\ y_i(x_i) + \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_{ij} y_j(a) = 0, & i = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

соответствует нагруженная система интегральных уравнений

$$y_i(x) = -\sum_{j=1}^{\nu} \beta_{ij} y_j(a) + \int_{x_i}^{x} f_i(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))\, dt,\ i = 1, \ldots, n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Исраилов С. В., Юшаев С. С.* Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Нальчик: Издательский центр «Эль-Фа», 2004. 445 с.

Л. И. Сазонов
(Ростов-на-Дону, ЮФУ; Владикавказ, ЮМИ)
sazonov@math.rsu.ru

ЛОКАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП И МЕТОД ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Одним из научных достижений Игоря Борисовича Симоненко является теория операторов локального типа. Локальный принцип Симоненко использовался и обобщался многими авторами для исследований различных классов операторов.

В докладе рассматриваются вопросы применимости локального принципа к обоснованию метода линеаризации в проблемах устойчивости. Исследование устойчивости стационарных решений нелинейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах сводится к вопросу об устойчивости нулевого равновесия для уравнения возмущений, которое во многих случаях имеет вид

$$\frac{du}{dt} = Au + Bu + Ku, \tag{1}$$

где A — производящий оператор аналитической полугруппы операторов $T(t)$, оператор B — в определенном смысле подчинен A, K — некоторый нелинейный оператор. Обоснование метода линеаризации для уравнений вида (1) выполнено В. И. Юдовичем [1]. В [1] установлено, что расположение спектра возмущенного оператора $A+B$ строго в левой полуплоскости комплексной плоскости спектрального параметра λ влечет экспоненциальную устойчивость нулевого равновесия. Но для системы Навье-Стокса в неограниченных областях данное спектральное условие не выполняется, так как $\lambda = 0$ является точкой непрерывного спектра. В этом, по существу, критическом случае обоснование линеаризации для полного уравнения (1) и получение необходимых степенных оценок убывания для возмущенной полугруппы $\widetilde{T}(t)$ в работах автора [2, 3] сведено к исследованию обратимости элементов некоторых банаховых алгебр, что осуществляется с помощью локального принципа Аллана–Дугласа.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Юдович В. И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов-на-Дону. 1984.

2. *Сазонов Л. И.* Оценки возмущенной полугруппы Озеена // Владикавказский математический журнал. 2009. Т. 11. №3. С. 50–61.

3. *Сазонов Л. И.* Оценки возмущенной полугруппы Озеена и их приложения к системе Навье-Стокса в $\mathbb{R}^n$ //Математические заметки. 2012. Т. 91. Вып. 6. С. 880–895.

Л. В. Сахарова (Ростов-на-Дону)
L_Sakharova@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЖЕСТКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ИЭФ

Исследована жесткая краевая задача с интегральными условиями, возникающая при моделировании изоэлектрического фокусирования (ИЭФ) в негауссовских режимах (при больших плотностях тока J). Искомые концентрации фокусируемых амфолитов $\xi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, а также концентрация ионов водорода $H(x)$ определяются формулами: $\xi_k(x) = a_k(x)\ (\delta_k + ch(\psi - \psi_k))$, $H = k_w\ \exp(\psi)$, где k_w — малый параметр; $\psi(x)$ и $c_k(x)$ — неизвестные функции, подлежащие отысканию из следующей краевой задачи:

$$\frac{da_k}{dx}\frac{1}{a_k} = \frac{\lambda J}{\sigma}\theta_k + \frac{d\psi}{dx}\theta_k, \qquad \theta_k = \frac{sh(\psi - \psi_k)}{\delta_k + ch(\psi - \psi_k)}, \tag{1}$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \mu_k a_k\ \frac{d\theta_k}{d\psi} + 2k_w\mu\ ch(\psi - \psi_0), \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\theta_k + 2k_w\ sh\psi = 0, \qquad \int_0^l\ a_k(x)\ dx = M_k, \tag{3}$$

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{\lambda J}{\sigma}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\theta_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\left(\theta_k^2 + \frac{d\theta_k}{d\psi}\right) + 2k_w\ ch\psi\right)^{-1}. \tag{4}$$

Здесь: λ — большой параметр, l, r, M_k, δ_k, ψ_k, μ_k, μ, ψ_0, – известные константы, определяемые геометрическими и электрохимическими параметрами системы ИЭФ. Асимтотическое исследование задачи (1)–(4) показало, что в окрестности изоэлектрических точек $\psi = \psi_k$ функции $a_k(x)$ выражаются посредством формул:

$$a_k(x) = a^0\ \frac{\varphi_k(\psi)}{\varphi_k(\psi_k)}E_k(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, N$$

$$E_k(x) = \exp\left(-2\alpha_{k-1}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\lambda J)^{2n}\exp\left(-\lambda J\beta_{k-1}\right)}{\sigma^{2n}(x_k)(2n)!}(x - x_k)^{2n}\theta_{k-1}^{2n}(x_k)\right),$$

$$\alpha_{k-1} = \frac{\varphi_{k-1}(\psi_k)}{\varphi_{k-1}(\psi_{k-1})}, \qquad \beta_{k-1} = \int_{x_{k-1}}^{x_k}\ \theta_{k-1}(\psi)\frac{dx}{\sigma(x)},$$

где параметры a_k^0, x_k вычисляются через l, r, M_k. Асимтотическая оценка функции $\psi(x)$ имеет вид, сходный с $E_k(x)$.

А. М. Селицкий, А. Л. Скубачевский (Москва)
selitsky@mail.ru, skub@lector.ru

О СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ[1]

Пусть Q — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Рассматривается задача

$$\frac{du}{dt} + A_R u = f, \qquad u(0) = \varphi, \tag{1}$$

где A_R — дифференциально-разностный оператор (см. [1]) с однородным вторым граничным условием, $f \in L_2(Q \times (0,T))$, $\varphi \in L_2(Q)$, $0 < T < \infty$.

Обобщенное решение u задачи (1) называется сильным, если $u \in D(A_R)$ при почти всех $t \in (0,T)$ и $u_t \in L_2(Q \times (0,T))$. Мы доказываем, что если оператор A_R сильно эллиптический, то сильное решение задачи (1) существует тогда и только тогда, когда $\varphi \in H^1(Q)$. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что $[L_2(Q), D(A_R)]_{1/2} = H^1(Q)$. Это равенство равносильно гипотезе Т. Като о корне квадратном из оператора (см. [2]). Заметим, что гладкость решений уравнения $A_R v = F$ может нарушаться внутри области Q даже в случае гладкой границы, что не позволяет непосредственно применить методы интерполяции соболевских пространств.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel: Birkhäuser, 1997.

2. *Kato T.* Fractional powers of dissipative operators // J. Math. Soc. Japan. 1961. V. 13, N. 3. P. 246–274.

Ф. А. Сейфуллаев(Баку)
kur-araz@rambler.ru

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПОПЕРЕЧНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СО СРЕДОЙ

Разработка математических моделей поведения подкрепленных оболочек, наиболее полно учитывающих работу этих оболочек при динамических нагрузках, и проведение на их основе исследований устойчивости и колебаний, а также выбора рациональных параметров конструкции, контактирующей со средой, являются актуальными задачами. Задача о нелинейном параметрическом колебании подкрепленной продольными ребра-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00524а, 13-01-00923).

ми цилиндрической оболочки, контактирующей со средой, с применением модели Пастернака. Задача о свободных колебаниях, усиленных перекрестной системой ребер и нагруженных осевыми сжимающими силами цилиндрических оболочек и заполненной средой.

Дифференциальные уравнения движения и естественные граничные условия для поперечно подкрепленной цилиндрической панели, контактирующей со средой, получим на основе вариационного принципа Остроград ского-Гамильтона. Для применения принципа Остроградского-Гамильтона предварительно запишем потенциальную и кинетическую энергии системы.

Потенциальная энергия упругой деформации цилиндрической оболочки имеет вид

$$\Pi_0 = \frac{1}{2}\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}\left\{N_x\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right)+N_y\left(\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{W}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right)+\right.$$

$$\left.N_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y}\right)-M_x\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-M_y\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-M_{xy}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right\}dxdy.$$

Расчет показывает, что применение динамической модели приводит к снижению критической силы, по сравнению с классической моделью.

Л. И. Сербина (Нальчик)
lserbina@mail.ru

О ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И СМЕШАННОГО ТИПА, МОДЕЛИРУЮЩИХ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ФИЛЬТРАЦИИ

В качестве базовых уравнений математических моделей нелинейной фильтрации выступают нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка параболического типа. Одним из необычных свойств, обусловленных нелинейностью математической модели, описывающей нелинейное движение подземных вод в почвах и почвогрунтах, является свойство конечной скорости их распространения. Многими экспириментальными и теоретическими исследованиями было установлено, что конечная скорость распространения жидкостей в нелинейных средах качественно изменяя характер протекания нестационарных процессов, приводит к возникновению критических состояний режима фильтрации. Аналитические методы исследования нелинейных особенностей фильтрации, описываемых параболическими уравнениями, существенно связаны с поиском методов редукции нелинейного дифференциального уравнения, лежащего в основе математических моделей, к нагруженным уравнениям гиперболического типа.

В настоящей работе, предметом анализа являются экстремальные свойства уравнения Буссинеска, описывающего одномерное безнапорного движения подземных вод в пористых природных средах. На основе развития и обоснованя положения о том, что в случае, когда взаимосвязь между геометрическими и динамическими характеристиками природной динамической системы имеет изменяющющийся во времени и пространстве фрактальный характер, а среднее интегральное значение уровня подземных проиходит по кривой близкой к логистической, разработан и реализован алгоритм аппроксимации нелинейного модельного уравнения нагруженными уравнениями гиперболического и смешанного типов.

Существенным моментом преложенного метода анализа режима нелинейной фильтрации является наличие критического значения временной кривоой динамики уровня подземных вод, при приближении к которому природная система теряет устойчивость и переходит в нестабильное состояние. При этом фильтрационно-емкостные характеристики системы, в зависимости от тенденции имеющей место в данное время, быстро возрастают или убывают, приводя к аномальному режиму фильтрации.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Сербина Л. И.* Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. М.: Наука. 2007. 167 с.

А. П. Солдатов (Белгород)
lgervith@gmail.com

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ НА ДВУМЕРНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ [1]

Теории эллиптических уравнений на стратифицированных множествах посвящены многочисленные исследования (см., например, [1]). Качественное исследование краевых задач на этих множествах основано на применении векторных дифференциальных операций с помощью надлежащего определения меры. В данной работе рассматриваются гармонические функции на двумерных стратифицированных множествах Ω, которые для простоты предполагаются комплексами. В ней предлагается теоретико функциональный подход к исследованию задачи Дирихле для этих функций, основанный на ее сведении к так называемой нелокальной задаче Римана[2] для аналитических функций.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ попарно непересекающиеся открытые отрезки $\Omega_j^1,\ 1 \le j \le l$, и открытые плоские выпуклые многоугольники $\Omega_j^2,\ 1 \le j \le n$. Граница каждого многоугольника составлена из попарно непересекающихся

[1] Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт №14.A18.21.0357).

сторон (открытых отрезков) и вершин. Предполагается, что эти границы попарно могут пересекаться только по сторонам или вершинам, причем семейство (Ω^1_j) составлено из различных сторон. Множество всех вершин обозначим F. Полученный двумерный комплекс $\overline{\Omega} = F \cup \Omega^1 \cup \Omega^2$, $\Omega^k = \cup_j \Omega^k_j$, называется стратифицированным компактом, а составляющие его элементы Ω^1_k и Ω^2_s – стратами соответствующих размерностей. Под стратифицированным множеством Ω здесь понимается $\Omega^2 \cup \Omega^1_{(1)}$, где $\Omega^1_{(1)}$ – обьединение некоторого числа одномерных страт. Обьединение $\Omega^1_{(0)}$ оставшихся одномерных страт будет играть роль границы этого множества. Случай, когда одно из множеств $\Omega^1_{(0)}$, $\Omega^1_{(1)}$ является пустым, не исключается. К каждому одномерному страту сходится один или несколько многоугольников Ω^2_s, в первом случае его называем стороной, во втором случае – ребром. Предполагается, что все ребра входят только в $\Omega^1_{(1)}$. На Ω естественным образом вводится понятие гармонической функции, для которой $\Omega^1_{(0)}$ будет являться носителем данных Дирихле.

Эта задача рассматривается в классе Гельдера $H(\overline{\Omega})$, а также в классе $\dot{H}(\overline{\Omega}, F)$ функций, удовлетворяющих условию Гельдера вне любой окрестности F и в точках $\tau \in F$ допускающих особенности логарифмического характера. Показано, что задача Дирихле фредгольмова в каждом из этих классов. Индекс этой задачи описан в терминах так называемого концевого символа - семейства аналитических матриц- функций $X_\tau(\zeta)$, $\tau \in F$. Здесь X_τ – матрица порядка $2m_\tau$, где m_τ – число двумерных страт, имеющих τ своей вершиной, которая зависит только от геометрической структуры множества Ω и выбора $\Omega^1_{(0)}$.

Список литературы

1. *Пенкин О. М. и др.*

2. *Солдатов А. П.* Общая краевая задача теории функций, Докл. АН СССР, 1988. Т. 299, №4, С. 825–828.

А. М. Столяр (Южный федеральный университет)
ajoiner@mail.ru

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

В работе предлагается два подхода — асимптотический и численный — к решению начально-краевых задач с подвижными и переменными границами. В случае асимптотического асимптотического интегрирования в качестве малого параметра выбирается величина, характеризующая скорость, с которой изменяется граница области определения задачи. Производится разложение неизвестной функции в ряд Тейлора на подвижной/переменной границе, что приводит решение исходной задачи к решению последовательности начально-краевых задач уже в постоянной области интегрирования. Таким образом рассмотрены начально-краевые задачи для гиперболического и параболического уравнений с граничными условиями Неймана, Дирихле и Робена и задача Дирихле для эллиптического уравнения. Кроме того, метод асимптотического интегрирования используется для решения задачи о продольных колебаниях груза на канате переменной длины. В этой задаче применяется линейное уравнение гиперболического типа. Данный метод используется также для решения задачи о продольно-поперечных колебаниях каната переменной длины. Здесь система уравнений является уже нелинейной. Эта задача рассматривается в плоской постановке, однако без каких-либо изменений её можно интегрировать описанным образом и в пространственном случае. Проводится, также, численное интегрирование поставленных задач. На примере волнового уравнения разрабатываются модификации известных численных методов для решения задач с подвижной границей: следуя идеям И. М. Бермуса, метод Рунге-Кутта мы адаптируем на случай переменной во времени области интегрирования, а также вводим подвижную сетку, позволяющую применять также и метод конечных разностей. Проводится сравнение результатов асимптотического и численного интегрирования. Делается вывод о границах применимости асимптотики и о том, что все описанные методы удобно использовать для решения научных и прикладных задач.

The asymptotic and numerical integration of initial boundary value problems with moving boundaries are held for hyperbolic, parabolic and elliptic type equations.

М. А. Сумбатян (Ростов-на-Дону)
sumbat@math.rsu.ru
К. И. Мещеряков (Ростов-на-Дону)
m.keyran@gmail.com

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В АЭРОДИНАМИКЕ ЛОПАСТИ ВЭУ

В настоящей работе представлен метод, использующий для определения характеристик лопасти интегральное уравнение из теории Белоцерковского, выведенное им для случая обтекания потоком крыла самолета. Впервые показано, что это уравнение применимо и для случая обтекания лопасти ветроэнергетической турбины. Исследуются операторные свойства данного уравнения.

Лопасть ветроэнергетической турбины моделируется закрученной пластиной шириной b и длиной l, установленной под углом $\alpha(y_0)$ к плоскости вращения. Учет вращательного движения производится путем добавления к набегающему потоку компоненты, порожденной угловой скоростью вращения ωy_0, что дает результирующую скорость $U_o(y_0)$. Неизвестная функция $g(y, z)$ связана с разностью давлений по разные стороны пластины. Показано, что такая задача сводится к решению следующего интегрального уравнения первого рода:

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^b\int\limits_0^l \frac{g(y,z)}{(y_0-y)^2}\left(1+\frac{z-z_0}{\sqrt{(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-U_o\sin\alpha, \qquad (1)$$

которое аналогично данному в [1]. Дискретизация уравнения (1) для точек, взятых на лопасти, позволяет получить систему линейных алгебраических уравнений, которая решается методом LU-разложения. Полученные решения позволяют найти разность давлений в узлах сетки. Вычисляя интеграл по поверхности лопасти от построенного решения, находим вращающий момент сил, приложенных к лопасти. Данная интегральная характеристика является наиболее важной с практической точки зрения, так как через нее вычисляется энергетическая способность ветроустановки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 256 с.

Е. В. Тюриков (Ростов-на-Дону)
etyurikov@pochta.ru

ОБ ОДНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ АНАЛОГЕ СМЕШАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК[1]

Пусть S — строго внутренняя односвязная часть замкнутой поверхности положительной гауссовой кривизны класса регуляросты $W^{3,p}$, $p>2$, с кусочно–гладким краем $L=\bigcup\limits_{j=1}^{n} L_j$, состоящим из конечного числа дуг L_j класса регулярности $C^{1,\varepsilon}$, $0<\varepsilon<1$. Рассматривается задача (задача R) об отыскании бесконечно малых (б.м.) изгибаний поверхности S, совместимых на границе L с условием следующего вида: на дугах $L_{i_1},\ldots,L_{i_m}$ $(1\leqslant i_k\leqslant n)$ выполняется условие ортогональной втулочной связи, при которой указанные дуги находятся в постоянном контакте с абсолютно жесткими поверхностями (каждая из которых есть ортогональный к S конус с направляющей L_{i_s}, $1\leqslant s\leqslant m$); на оставшихся дугах выполняется условие $\delta k_n=\sigma(s)$, где s — натуральный параметр, δk_n — вариация нормальной кривизны в направлении края, $\sigma(s)$ —наперёд заданная функция точек края. Статический аналог этой задачи приведен в [86] как задача мембранной теории оболочек, относящаяся к классу задач Синьорини. В математической постановке задача R есть задача Римана–Гильберта

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации соглашение 14.A18.21.0356 «Теория функциональных пространств, операторов и уравнений в них».

с разрывным коэффициентом граничного условия для обобщённых аналитических функций. Установленно, что картина разрешимости задачи R определяется величинами внутренних углов и направлениями дуг в угловых точках, а также конфигурацией дуг L_{i_s} на поверхности S. Полное исследование задачи о существовании б.м. изгибаний, совместимых на L только с одним из указанных условий, дано автором в работе [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.; Наука, 1982. 228 С.

2. *Тюриков Е. В.* Геометрический аналог задачи Векуа–Гольденвейзера // Доклады РАН. — 2009. — Т. 424, № 4. — С. 455–458.

А. К. Уринов, К. С. Халилов (Фергана, Узбекистан)
urinovak@mail.ru, xalilov_q@mail.ru

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть D – конечная область плоскости xOy, ограниченная прямыми $x = 0$, $y = 1$, $x = 1$, $x - y = 1$, $x + y = 0$, а $Lu = 0$ - дифференциальное уравнение параболо - гиперболического типа, где

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1 u \equiv u_{xx} - u_y - \lambda^2 u, & (x,y) \in D_1 = D \cap (y > 0), \\ L_2 u \equiv u_{xx} - u_{yy} - (2\beta/y)\ u_y, & (x,y) \in D_2 = D \cap (y < 0), \end{cases}$$

$\beta,\lambda \in R$, причем $0 < \beta < (1/2)$.

В настоящей работе исследуется существование и единственность решения следующей задачи.

Задача H_2**.** Требуется найти функцию $u\,(x,y) \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^{(2,1)}_{x,y}(D_1)$ $\cap C^2(D_2)$, удовлетворяющую уравнению $Lu = 0$ в области $D_1 \cup D_2$ и следующим условиям:

$$u\,(0,y) = \mu_1\,(y)\,, \quad u(1,y) = \int_0^1 u(x,y)dx + \mu_2(y), \quad 0 \le y \le 1;$$

$$a\,(x)\, D^{1-\beta}_{0x} u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + b\,(x)\, D^{1-\beta}_{x1} u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) +$$
$$+ c(x) \lim_{y\to -0} (-y)^{2\beta} u_y(x,y) = e(x), \qquad 0 < x < 1;$$

$$\lim_{y\to +0} u_y(x,y) = \lim_{y\to -0} (-y)^{2\beta} u_y(x,y), \qquad 0 < x < 1,$$

где $\mu_1\,(y)$, $\mu_2\,(y)$, $a\,(x)$, $b\,(x)$, $c\,(x)$, $e(x)$ - заданные функции,

$$D^{1-\beta}_{0x} q\,(x) = \frac{1}{\Gamma\,(\beta)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x (x-t)^{\beta-1} q\,(t)\, dt,$$

$$D^{1-\beta}_{x1} q\,(x) = \frac{-1}{\Gamma\,(\beta)} \frac{d}{dx} \int\limits_x^1 (t-x)^{\beta-1} q\,(t)\, dt-$$

-операторы дробного дифференцирования[1], $\Gamma\,(z)$ — гамма-функция.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

$$h_1(y), h_2(y) \in C[0,1]; \qquad a(x),\, b(x),\, c(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1);$$
$$e(x) \in C^2(0,1), \qquad [x(1-x)]^{3\beta} e(x) \in C[0,1];$$
$$a^2(x) + b^2(x) \neq 0, \;\; a(x)b(x) \geq 0, \;\; a(x)c(x) \leq 0, \;\; b(x)c(x) \leq 0, \;\; x \in [0,1].$$

Тогда, решение задачи H_2 существует и оно единственно.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. — М.: Наука, 1985. — 304 с.

Ш. Р. Фармонов (Фергана, Узбекистан)
farmonovsh@mail.ru

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

Пусть Ω - конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная отрезком $\{(x,y) : x+y=1,\, x \geq 0,\, y \geq 0\}$ и дугами $\{(x,y) :\, \sqrt{-x}+\sqrt{y}=1,\, x \leq 0,\, y \geq 0\}$, $\{(x,y) :\, \sqrt{-x}+\sqrt{-y}=1,\, x \leq 0,\, y \leq 0\}$, $\{(x,y) : \sqrt{x}+\sqrt{-y}=1,\, x \geq 0,\, y \leq 0\}$, а $\Omega_0 = \Omega \cap \{(x,y) :\, x>0,\, y>0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{(x,y) :\, x+y>0, \;\; y<0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{(x,y) :\, x+y>0,\, x<0\}$, $\Omega_3 = \Omega \cap \{(x,y) : x+y<0,\, y>0\}$, $\Omega_4 = \Omega \cap \{(x,y) :\; x+y<0,\, x>0\}$, $\Omega_5 = \Omega \cap \{(x,y) :\, x-y<0,\, y<0\}$, $\Omega_6 = \Omega \cap \{(x,y) :\, x-y>0,\, x<0\}$.

В области Ω рассмотрим эллиптико - гиперболическое уравнение

$$L\,[u] \equiv \begin{cases} xu_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_x + \alpha u_y = 0, & \bigcup\limits_{j=0}^{4} \Omega_j; \\ xu_{xx} - yu_{yy} + \alpha u_x - \alpha u_y = 0, & \Omega_5 \cup \Omega_6, \end{cases} \qquad (1)$$

причем $0 < \alpha = const < (1/2\,)$.

В настоящей работе исследуется существование и единственность решения следующей нелокальной задачи:

Задача B_1**.** Найти функцию $u\,(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, обладающую следующими свойствами: 1) в области Ω_0 есть регулярное решение уравнения (1); 2) в областях Ω_j, $j=\overline{1,6}$ есть обобщенное решение уравнения (1) из класса R_2[1]; 3) выполняются условия склеивания

$$\lim_{y\to -0} (-y)^{\alpha}\, u_y(x,y) = -sign(x) \lim_{y\to +0} y^{\alpha} u_y(x,y), \quad 0<|x|<1;$$
$$\lim_{x\to -0} (-x)^{\alpha}\, u_x(x,y) = -sign(y) \lim_{x\to +0} x^{\alpha} u_x(x,y), \quad 0<|y|<1;$$

4) удовлетворяет краевым условиям $u\,(x,y) = \varphi\,(x,y)$, $(x,y) \in \overline{AB}$; $\qquad u\,(x,0) + u\,(-x,0) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq 1;$

$$\lim_{x\to +0} x^{\alpha} u_x(x,y) + \lim_{x\to +0} x^{\alpha} u_x(x,-y) = g(y), \quad 0<y<1;$$

$$u\left[x, -\left(1-\sqrt{-x}\right)^2\right] - u\left[-\left(1-\sqrt{-x}\right)^2, x\right] = p\,(x)\,, \quad -1 \leq x \leq -\,(1/4\,)\,,$$

где $\varphi\,(x,y)$, $f(t)$, $g(t)$, $p\,(t)$ - заданные функции, $p\,(-1/4\,) = 0$.

Единственность решения задачи B_1 доказана методом интегралов энергии, а существование решения — эквивалентным сведением задачи к интегральному уравнению Фредьгольма второго рода.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Исамухамедов С. С., Орамов Ж.* О краевых задачах для уравнения смешанного типа второго рода с негладкой линией вырождения // Дифф. уравнения, Минск, 1982. Т. 18, № 2. С. 324–334.

А. И. Федотов (Казань)
fedotov@mi.ru

СПЛАЙН-МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для уравнения

$$x^{(m)}(t) + \sum_{\nu=0}^{m-1}(a_\nu(t)x^{(\nu)}(t) + \frac{b_\nu(t)}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{(\nu)}(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}d\tau) + \gamma = y(t)$$

с условием

$$\int_0^{2\pi} x(\tau)d\tau = 0,$$

где m - натуральное число, $x(t)$ – искомая 2π-периодическая комплекснозначная функция, γ – искомое комплексное число, $a_\nu(t), b_\nu(t)$, $\nu = 0, 1, ..., m-1$, и $y(t)$ - известные комплекснозначные 2π-периодические функции, а сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши-Лебегу, доказано существование и единственность решения при любых непрерывных $y(t)$ и при условии

$$\sum_{\nu=0}^{m-1}(\|a_\nu\|_{\mathrm{C}} + \|b_\nu\|_{\mathrm{C}}) < 1$$

на коэффициенты уравнения.

Кроме того, показано, что система линейных алгебраических уравнений

$$x_n^{(m)}(t_k) + \sum_{\nu=0}^{m-1}(a_\nu(t_k)x_n^{(\nu)}(t_k) + \frac{b_\nu(t_k)}{2n+1}\sum_{j=o}^{2n}\alpha_{k-j}x_n^{(\nu)}(t_j)) + \gamma_n$$

$$= y(t_k), \quad k = 0, 1, ..., 2n,$$

$$x_k = x_{2n+k+1}, \quad k = -r_m, -r_m+1, ..., s_m-1,$$

$$\sum_{k=0}^{2n} x_k = 0,$$

сплайн-метода решения этой задачи однозначно разрешима при достаточно больших n, и приближенные решения сходятся к точному.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Федотов А. И.* Корректная постановка и сплайн-метод решения одного класса сингулярных интегродифференциальных уравнений // Ж. выч. матем. и матем. физ. 2013. Т. 52, № 5. С. 859–875.

О. В. Филиппова (Тамбов)
philippova.olga@rambler.ru

ОБ УПРАВЛЯЕМЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО УПРАВЛЕНИЮ [1]

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное векторное пространство; $\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ – множество всех непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$; Ξ – метрическое пространство. Пусть отображение $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Пусть также многозначное отображение $U : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \Xi \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^m]$ обладает свойствами: при каждом $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$ отображение $U(\cdot, x, \xi)$ измеримо; при почти всех $t \in [a,b]$ отображение $U(t,\cdot,\cdot)$ непрерывно по Хаусдорфу; для каждого ограниченного множества $V \subset \mathbb{R}^n \times \Xi$ существует такая константа m_V, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $(x,\xi) \in V$ выполняется неравенство $|U(t,x,\xi)| \leqslant m_V$.

Рассмотрим математическую модель управляемых процессов с фазовым ограничением по управлению, запаздыванием и импульсными воздействиями

$$\begin{array}{ll} \dot{x}(t) = f(t, x[p(t)], u(t), \xi), & \text{если } p(t) < a, \text{то } x[p(t)] = \varphi(t), \\ u(t) \in U(t, x[g(t)], \xi), & \text{если } g(t) < a, \text{то } x[g(t)] = \psi(t), \end{array} \qquad (1)$$

$$\Delta(x(t_k)) = I'_k(x(t_k), \xi), \ k = 1, 2, \ldots, p, \qquad (2)$$

$$x(a) = x_0, \qquad (3)$$

где $t \in [a,b]$, $\xi \in \Xi$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, измеримые по Борелю функции $\varphi : (-\infty, a) \to \mathbb{R}^n$, $\psi : (-\infty, a) \to \mathbb{R}^n$ ограничены, а измеримые по Лебегу функции $p : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ для любого $t \in [a,b]$ удовлетворяют неравенствам $p(t) \leqslant t$, $g(t) \leqslant t$. Отображения $I'_k : \mathbb{R}^n \times \Xi \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., p$, непрерывны, $\Delta(x(t_k)) = x(t_k + 0) - x(t_k)$, $k = 1, 2, ..., p$.

При исследовании данной математической модели была установлена разрешимость задачи (1) – (3) и исследованы некоторые качественные свойства множества решений управляемой системы, зависящей от параметра, с запаздыванием и импульсными воздействиями.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00645), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России (проект № 14.132.21.1348).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Чугунов П. И.* Свойства решений дифференциальных включений и управляемые сиситемы. Прикл. математика и пакеты прикл. программ, Иркутск: Изд-во СЭИСО АН СССР, 1980. С. 155–179.

К. Е. Ширяев (Кострома)
nmargolina@mail.ru

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ

Рассмотрим линейную однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x' = A(t)x, \tag{1}$$

где $x(\cdot)$ — вектор-функция размерности n; $A(\cdot)$ — матрица с непрерывными (кусочно-непрерывными) и, вообще говоря, неограниченными коэффициентами.

Старшим показателем Ляпунова [1] системы (1) называется величина

$$\Lambda = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln \|X(t,0)\|}{t}$$

(в [1] показатель Λ обозначен H, а оператор Коши системы (1) $X(t,0)$ обозначается как $U(t)$). Центральным показателем [2] называется величина

$$\Omega = \inf_{H>0} \overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{1}{sH} \sum_{k=1}^{s} \ln \|X(kH,(k-1)H)\|.$$

Здесь и далее $X(\beta,\alpha)$ — оператор Коши системы (1).

В [2] доказано, что в случае ограниченности коэффициентов матрицы $A(t)$ системы (1) справедливо неравенство $\Lambda \le \Omega$, причем возможны как строгое неравенство, так и равенство.

Утверждение. *Существуют неограниченные системы любой размерности, для которых* $\Omega < \Lambda$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // М.: Наука, 1970. 536 с.

2. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости // М.: Наука, 1966. 576 с.

Секция IV
Фундаментальные проблемы ИКТ

Е. В. Алымова (Ростов-на-Дону)
langnbsp@gmail.com
А. В. Питинов (Ростов-на-Дону)
alexvitpit@rambler.ru

ГЕНЕРАЦИЯ ПОЗИТИВНЫХ И НЕГАТИВНЫХ ТЕСТОВ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОГРАММ В ОПТИМИЗИРУЮЩЕЙ РАСПАРАЛЛЕЛИВАЮЩЕЙ СИСТЕМЕ

Преобразование программы определяется правилами трансформации (например, в виде множества пар заменяемого и заменяющего фрагментов), а также условиями на допустимые информационные зависимости преобразуемого фрагмента с остальной программой [2].

Позитивный тест для преобразования – это синтаксически и семантически корректная программа, содержащая фрагмент кода, который удовлетворяет условиям применимости преобразования. Негативный тест может быть получен из позитивного путем нарушения одного или нескольких условий применимости тестируемого преобразования.

В работе исследуются условия применимости преобразований «Подстановка вперед», «Вынос общих подвыражений», «Гнездование цикла» [3]. Для каждого преобразования определены условия применимости и предложены комбинации нарушений этих условий в негативных тестах.

Для каждого преобразования получены наборы позитивных и негативных тестов с помощью генератора [1].

Функциональные возможности генератора тестов расширены за счет реализации поддержки скалярных переменных и реализации алгоритма генерации общих подвыражений в правых частях операторов присваивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алымова Е. В.* Автоматическая генерация тестов на основе конфигурационных файлов для оптимизирующих преобразований компилятора // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2010. № 6. С. 5–8.

2. *Касьянов В. Н.* Оптимизирующие преобразования программ. М.: Наука, 1988. 336 с.

3. *Штейнберг Б. Я.* Математические методы распараллеливания рекуррентных циклов для суперкомпьютеров с параллельной памятью. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 2004. 192 с.

Е. Н. Кравченко (Ростов-на-Дону)
e.kravchenko.rnd@gmail.com

РЕАЛИЗАЦИЯ БИБЛИОТЕКИ МЕЖПРОЦЕССОРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ СПЕЦИФИЧНЫХ АРХИТЕКТУР ТИПА MIMD

В работе рассматривается вопрос разработки библиотеки межпроцессорного взаимодействия для специфичных абстрактных мультипроцессорных архитектур, поддерживающих парадигму MIMD.

Рассматриваемая мультипроцессорная архитектура характеризуется следующей моделью:

- Архитектура представляет собой неориентированный граф. Вершинами этого графа являются процессорные элементы (ПЭ). Две вершины соединены дугой, если возможен двусторонний обмен данными между соответствующими ПЭ.
- Каждый ПЭ может выполнять только один поток инструкций.
- Каждый ПЭ имеет крайне небольшой объем памяти: как памяти команд, так и памяти инструкций.

В связи с однопоточностью ПЭ и небольшим объемом ресурсов, текущие стандарты библиотек межпроцессорного взаимодействия, такие как MPI[1] и ShMem[2], в чистом виде не подходят для реализации в рамках данной модели. Ограничения модели выдвигают следующие требования к библиотеке межпроцессорного взаимодействия для рассматриваемой архитектуры: небольшой объем библиотеки; поддержка виртуальной нумерации ПЭ; поддержка операций удаленного чтения/записи; поддержка барьерной синхронизации.

С учетом описанных выше требований, в рамках системы ДВОР[3] был разработан интерфейс библиотеки межпроцессорного взаимодействия и выполнена его реализация для конкретной архитектуры, представляющей описанную модель.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Message Passing Interface (MPI) Forum Home Page.* - URL: http://www.mpi-forum.org/. Дата обращения: 31.03.2013

2. *SGI - HPC, Servers, Storage, Data Center Solutions, Cloud Computing.* - URL: http://www.shmem.org/. Дата обращения: 31.03.2013

3. *Steinberg B., et al.*, «Dialogue-based Optimizing Parallelizing Tool and C2HDL Converter», Proceedings of the IEEE EAST-WEST DESIGN AND TEST INTERNATIONAL SYMPOSIUM (EWDTS'09), Moscow, Russia on 18–21 September 2009.

Г. Ю. Кравченко (Ростов-на-Дону)
g.y.kravchenko@gmail.com

РАЗБИЕНИЕ ЦИКЛОВ НА КАДРЫ ПО ПРОСТРАНСТВУ ИТЕРАЦИЙ

В работе рассмотрено разбиение программы на части, а также разбиение циклов по прострвнству итераций. Представлен алгоритм разбиения и реализация данного алгоритма.

Разбиение на кадры – это разбиение программы на части, удовлетворяющие определению кадра.

Кадр — это такая часть программы, которая может быть эффективно отображена на архитектуру компьютера. Все операции внутри кадра выполняются параллельно, а кадры выполняются последовательно.

В работе представлен анализ программных циклов на возможность разбиения их на кадры по пространству итераций.

Для эффективного построения разбиения необходимо учитывать не только структуру программы, но и архитектуру компьютера.

Решетка — это множество вычислительных узлов суперкомпьютера, соединенных между собой ребрами — каналами пересылки данных [1].

Разбиение на кадры и оптимальная укладка кадра на архитектуру компьютера позволяют не только эффективно отображать программу на вычислительную систему, но и выполнять в ней параллельные вычисления.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Адигеев М.Ġ.* Укладка графа вычислений в двумерную решетку. http://ops.rsu.ru/download/works/Calc2mesh.pdf Дата обращения 31 марта 2013 г.

Секция V
Математика в естествознании, интеллектуальные системы и компьютерные науки

М. Э. Абрамян (Ростов-на-Дону)
mabr@math.sfedu.su

КОНСТРУКТОР УЧЕБНЫХ ЗАДАНИЙ С ПОДДЕРЖКОЙ ЯЗЫКОВ PASCAL, C++, C# ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНОГО ЗАДАЧНИКА ПО ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Задачник по программированию Programming Taskbook [1] реализован для языков Pascal, Visual Basic, C++, C#, VB.NET, Python, Java и включает 1100 учебных заданий по основным темам базового курса программирования — от скалярных типов и управляющих операторов до сложных типов данных (массивы, строки, файлы), рекурсивных алгоритмов и динамических структур (линейных и иерархических). Благодаря входящему в его состав конструктору учебных заданий PT4TaskMaker, задачник может служить платформой для создания специализированных учебных программных комплексов, связанных с программированием, разработкой алгоритмов, изучением различных языков и стандартных библиотек.

Описываемая в докладе версия конструктора PT4TaskMaker реализована для языков Pascal, C++, C# и позволяет разрабатывать новые группы учебных заданий в средах Delphi, Lazarus, PascalABC.NET (язык Pascal) и Visual Studio .NET (языки C++ и C#). Созданные группы представляют собой динамические библиотеки, в том числе управляемые библиотеки .NET, которые могут подключаться к базовому варианту задачника Programming Taskbook.

Наличие вариантов конструктора для различных языков программирования упрощает разработку учебных комплексов, связанных с технологиями и библиотеками для этих языков. Примером такого комплекса является задачник PT for LINQ, посвященный технологии LINQ платформы .NET и реализованный с применением конструктора для языка C#. В то же время, любой вариант конструктора позволяет создавать учебные комплексы, доступные для различных языков и сред, поддерживаемых задачником Programming Taskbook. В качестве примеров подобных комплексов можно привести задачник по параллельному программированию PT for MPI и задачник по строковым алгоритмам биоинформатики PT for Bio.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Абрамян М. Э.* Реализация универсального электронного задачника по программированию // Информатика и образование, 2009, №6. С. 118–120.

Е. А. Аршава (Харьков, Украина)
elarshava@mail.ru

О РОЛИ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И МУЛЬТИМЕДИЙНЫХ ПРОГРАММ В ПРЕПОДАВАНИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУК

Автор делает попытку проанализировать новые средства, используемые в учебном процессе, и сравнить эффективности различных методов использования новых технологий в преподавании точных наук. К таким средствам, прежде всего, необходимо отнести компьютерные обучающие системы, которые можно разделить на следующие классы:

- системы типа ЛЕКТОР, имитирующие лекции и имеющие жесткий план подачи изучаемого материала. Такие системы дополняются жестким контролем знаний, определяющим возможность перехода к следующему разделу или лекции;
- системы типа АССИСТЕНТ, имитирующие семинар, лабораторные занятия или практикум. Создается среда, в которой учебный материал подается в виде сообщений, подсказок и пояснений. Тестирование осуществляется в основном через самоконтроль. Данный тип программ предназначен для развития практических навыков путем самообразования;
- системы типа РЕПЕТИТОР, адаптирующиеся к студенту выбором темпа изложения материала, проверки начального уровня знания и учета психологических особенностей обучаемого. Допускается выборочное изучение отдельных тем курса. Большое внимание уделяется практической деятельности обучаемого под постоянным контролем системы;
- системы типа КОНСУЛЬТАНТ, представляющие собой справочную базу данных по изучаемому и смежным предметам с удобным доступом;
- системы типа КОНТРОЛЕР, предназначенные для тестирования и оценки уровня знаний.

Успешное освоение научного аппарата невозможно, если студент не научится строить математические модели многообразных природных и технических систем и квалифицированно использовать алгоритмы их аналитического и численного исследования, которыми так богаты точные науки.

В. Н. Беркович (Ростов-на-Дону)
bvn119@rambler.ru

О ПРИНЦИПЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КЛИНОВИДНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В теории упругих колебаний хорошо известен физический принцип предельной амплитуды, например [1,2]: при t стремящемся к бесконечности нестационарный колебательный процесс должен стремиться к стационарному в некотором предельном смысле.

Однако физическая формулировка принципа не конкретизирует, в каком именно смысле и в каких пространствах следует понимать этот предел. В предлагаемом ниже докладе утверждается, что указанный предел может существовать с точки зрения тех функциональных пространств, в которых анализируется разрешимость рассматриваемой задачи. На примере анализа смешанных задач динамической теории упругости о возбуждении упругих волн источниками колебаний в областях клиновидного типа в данном докладе дается математическое подтверждение корректности применения этого принципа [3 и др.] в рассматриваемых случаях. Рассмотрены задачи о распространении волн в клиновидной среде, содержащей источники как детерминированных, так и стохастических колебаний. При этом анализ условий разрешимости указанных задач приводит к функциональным пространствам Соболева, в которых, согласно принципу предельной амплитуды и следует понимать указанный выше предел решений соответствующих нестационарных задач динамической теории упругости.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Бабич В. М., Капилевич М. Б. и др.* Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964. 368 с.

2. *Shaw R. P.* Boundary integral equations applied to transient wave scattering in an inhomogeneous medium // J. Appl. Mech. 1975. №4. C. 147–152.

3. *Беркович В. Н.* Нестационарная смешанная задача динамики неоднородно упругой клиновидной среды. // Экол. вестник научн. центров ЧЭС. Краснодар. 2005. №3. С. 14–20.

Н. В. Боев, А. В. Колосова (Ростов-на-Дону)
boyev@math.rsu.ru

ЯВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ В ПЕРЕОТРАЖЕННЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ ОТ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРЕПЯТСТВИЙ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

В лучевом приближении получены явные выражения давления в переотраженных произвольное конечное число раз волнах от граничных поверхностей препятствий канонической формы, траектория которых лежит в одной плоскости. В бесконечной акустической среде из точки, находящейся на продолжении одной из сторон правильного 2N-угольника, вписанного в окружность, от точечного источника давления на вогнутую часть граничного контура акустически твердого отражателя в виде полуокружности падает по прямой, на которой находится выделенная сторона многоугольника высокочастотная монохроматическая волна. На полуокружности находятся N вершин многоугольника, которые в геометрической теории дифракции являются точками зеркального отражения волны. При такой траектории многократно отраженного луча, луч, приходящий в точку приема из последней точки зеркального отражения будет параллелен исходному падающему лучу. Рассматривается случай, когда расстояние от источника до первой точки зеркального отражения и расстояние от последней точки отражения до приемника равны между собой. Исследование проблемы осуществляется в рамках двумерной задачи многократного отражения волны от вогнутой части полуокружности и пространственной задачи при той же плоской траектории луча в сечении перпендикулярном образующей кругового цилиндра и в диаметральном сечении сферического отражателя. Проведен аналитический и численный анализ полученных выражений в зависимости от расстояний источника и приемника волны от поверхностей отражателей. Обсуждается проблема замены неплоских отражателей плоскими в прикладных задачах акустики. В нашем случае рассматривается набор плоских отражателей, расположенных в касательных плоскостях к граничным поверхностям отражателей в точках зеркального отражения. При таком расположении плоских отражателей траектория переотраженного луча не изменяется и исследуется только влияние формы граничных поверхностей в точках зеркального отражения на величину давления в переотраженной волне в точке приема.

А. М. Валуев (Москва)
valuev.online@gmail.com

КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ СОБЫТИЙНО-ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ СИСТЕМЫ, ЕЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

В работе автора [1] введен класс гибридных систем (ГС) с переключениями на многообразиях, приводящими к изменению качественного состояния d — уравнений движения, а возможно, и размерности фазового вектора x,— и скачкам его компонент. Для них установлены условия управляемости и аналог принципа максимума. Предлагаемое обобщение класса моделей [1] выражает условия функционирования управляемых систем в неоднородной пространственно-временной среде и может быть использовано как для динамических, так и для некоторых типов статических систем. В общем случае, событийно-переключаемая система представляет собой набор взаимосвязанных подсистем, каждая из которых описывается зависящей от собственного времени $t^{(r)}$ траекторией, причем область определения $t^{(r)}$ разбивается на сегменты моментами $T^{(r)}(k^{(r)})$ событий достижения фазовым вектором $x^{(r)}(t^{(r)}, k^{(r)})$ группы многообразий, а на каждом сегменте подсистема описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Результаты [1] распространяются на событийно-переключаемые системы (СПП) для ряда рассмотренных видов ограничений на управление и взаимосвязей между подсистемами. В форме СПП представляются модели переключаемых производственных процессов, в т.ч. распределения ресурсов в сетевом планировании, модель управления катастрофами В.В. Величенко, разнообразные модели дискретных потоков транспортных средств, модели проектирования природно-технологических объектов (карьеров, транспортных развязок, дамб).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Valuev A.M.* Control problem for event-switched processes // Acta Universitatis Apulensis. 2005. №10. P. 7–18.

Т. А. Виноградова
grapes1@yandex.ru

ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В НЕПРЕРЫВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ

При описании многих вероятностных законов применяются различные специальные функции [1-2]. Приведем некоторые из них [3].

1. Хи-квадрат распределение с n степенями свободы случайной величины $Y = \sum\limits_{i=1}^{4} X_i^2$, где $X_i, i = \overline{1,n}$ – независимые гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и равными дисперсиями. Плотность вероятности задается с помощью гамма-функции.

2. Распределение Рэлея случайной величины $Z = \sqrt{Y}$, где Y взята из п.1. Плотность вероятности имеет вид $p(z) = \frac{z^{n-1}}{2^{\frac{n-2}{2}}\sigma^n\Gamma(\frac{1}{2}n)} e^{-\frac{z^2}{2}\sigma^2}$.

3. Распределение Райса. Рассмотрим заданную в п.2 случайную величину $Z = \sqrt{Y}$, с той лишь разницей, что теперь случайные величины $X_i, i = \overline{1,n}$ в общем случае имеют различные математические ожидания. Плотность вероятности в этом случае определяется при помощи модифицированой функции Бесселя порядка $\frac{n}{2} - 1$.

4. Распределение Стьюдента с n степенями свободы случайной величины $t = \frac{X_0}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}$, где $X_i, i = \overline{0,n}$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Плотность вероятности и моменты четного порядка задаются с помощью гамма-функции.

5. Распределение Вейбулла случайной величины X задано в том случае, если существуют такие значения параметров $c > 0, \alpha > 0$ и ξ_0 , что случайная величина $Y = (\frac{X-\xi_0}{\alpha})^c$ имеет стандартное экспоненциальное распределение. При $\xi_0 = 0$ и $c > 0, \alpha = 1$ получим плотность стандартного распределения Вейбулла $p_X(x) = cx^{c-1}e^{-x^c}$, где $x > 0, c > 0$. В этом случае моменты порядка r задаются формулой $M[X^r] = \Gamma(\frac{r}{c} + 1)$, откуда получим выражения для моментов.

ЛИТЕРАТУРА

1.*Абрамовиц М.,Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.

2. *Andrews G. E.,Askey R,Roy R.* Special functions. Cambridge University Press, 1999.

3. *Джонсон Н. Л., Коц С., Балакришнан Н.* Одномерные непрерывные распределения:в 2 ч. М.: БИНОМ, 2012.

Л. Р. Гервич (Ростов-на-Дону)
lgervith@gmail.com

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка построен параллельный алгоритм, использующий нестандартное размещение данных в распределенной памяти. Такое размещение данных позволяет существенно увеличить производительность программы по сравнению со стандартным размещением.

Суть метода размещения данных в распределенной памяти с перекрытиями состоит в том, чтобы за счет некоторого увеличения объема хранимых данных в каждом процессоре и количества выполняемых операций сократить количество межпроцессорных пересылок.

Для сетки размерности 500^3 и для количества итераций, равного двум тысячам, проведены численные эксперименты на восьми узлах высокопроизводительного кластера INFINI ЮГИНФО. Результаты экспериментов показали ускорение по сравнению со стандартным алгоритмом в 1.8 раза. Данный алгоритм является обобщением полученных результатов для задачи Дирихле для оператора Лапласа на случай произвольного эллиптического уравнения второго порядка.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Гервич Л. Р., Штейнберг Б. Я.* Параллельное итерационное умножение матрицы на вектор // Труды научной школы И.Б. Симоненко. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2010. С. 58–66.

2. *Гервич Л. Р., Штейнберг Б. Я.* Размещение массивов с перекрытиями в параллельных итерационных алгоритмах // Тезисы докладов международного семинара «Современные проблемы и методы теории операторов и гармонического анализа и их приложения», приуроченного к 70-летию проф. С. Г. Самко. Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет, 24–28 апреля 2011 г. С. 61.

Д. В. Дубров, А. С. Рошаль (Ростов-на-Дону)
dubrov@sfedu.ru, teacplusplus@gmail.com

БИБЛИОТЕКА АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ ДЛЯ КОНВЕРТЕРА С ЯЗЫКА C В HDL

В последнее время многие производители средств проектирования электронных устройств начали выпускать автоматические конвертеры из языка C в языки описания оборудования. Причиной является высокая трудоёмкость разработки на языках VHDL и Verilog. Часто ранний выход на рынок является основным конкурентным преимуществом, ради чего производители устройств готовы идти на некоторое снижение оптимальности конечного продукта. Однако выпускаемые средства описания схем на языке С пока далеки от возможности их практического использования: их отличает узкий класс входных программ, небольшой набор средств оптимизации, высокая стоимость.

В рамках проекта «Оптимизирующая распараллеливающая система» на мехмате ЮФУ ведётся разработка конвертера из языка С в VHDL. Работа конвертера заключается в построении для каждого конвейеризуемого цикла исходной программы графа вычислений и построении по нему HDL-описания конвейерного устройства, реализующего вычисления тела цикла.

Целью настоящей работы является разработка преобразования компилятора, заменяющего в конечном HDL-коде числовые операции их реализациями на логических элементах, учитывающими требуемую разрядность вычислений, а также другие характеристики (приоритет скорости, экономии занимаемой площади кристалла и т. д.) Таким образом, разрабатываемая библиотека позволит генерировать VHDL-код, характеризуемый лучшим значением производительности и/или меньшим значением площади на кристалле, занимаемым конечным устройством.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубров Д. В., Штейнберг Р. Б.* Экспериментальный конвертер с языка С в HDL на основе диалогового высокоуровневого оптимизирующего распараллеливателя // Труды V Международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления». М.: 26–28 октября 2010 г., ИПУ РАН, С. 865–878.

2. Dialogue-based Optimizing Parallelizing Tool and C2HDL Converter / *B. Steinberg, A. Abramov, E. Alymova et al.* // Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'09). Moscow, Russia, September 18–21. — P. 216–218.

Я. М. Ерусалимский (Ростов-на-Дону)
dnjme@math.sfedu.ru

ВСПЛЕСКИ ДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКОВ В СЕТЯХ

Классическая теория потоков в сетях, в основном, посвящена стационарным потокам – функциям, определенным на множестве дуг сети и принимающим значения не превосходящие пропускных способностей дуг. Стационарный поток в каждой промежуточной вершине должен удовлетворять условию неразрывности – сумма потоков по всем входящим в вершину дугам равна сумме потоков по всем выходящим из неё дуг. Основным результатом этой теории является теорема Форда–Фалкерсона о том, что пропускная способность сети (максимальная величина потока, приходящего в сток) равна пропускной способности минимального разреза.

Для динамических потоков (время дискретно, а условие неразрывности заменяется условием – суммарный поток, приходящий в вершину в каждый момент времени, должен быть равен величине потока, выходящего из вершины в следующий момент времени), в сети могут наблюдаться «всплески», когда величина потока, приходящего в сток в некоторый момент времени, превышает величину максимального стационарного потока. Ясно, что величина всплеска не может превосходить пропускную способность ближайшего к стоку разреза, т. е. сумму пропускных способностей дуг, приходящих в сток. Предложены конструкции, позволяющие строить сети, в которых величина максимального всплеска больше величины максимального стационарного потока (пропускной способности сети) на любую наперед заданную величину. «Причиной» возникновения всплесков является наличие в сети путей различной длины, ведущих из источника в сток. Построены примеры сетей, в которых возникновение всплесков невозможно.

Автором совместно с Н. Н. Водолазовым доказан аналог теоремы Форда-Фалкерсона для динамических потоков – предел среднего значения величины динамического потока по неограниченно возрастающему временному промежутку не превосходит максимальной величины стационарного потока.

Ясно, что в динамическом случае характеристикой сети является не только пропускная способность минимального разреза, но и величина максимального всплеска. Нахождение последней не является тривиальной задачей.

Л. Ф. Зверович, И. М. Борковская, О. Н. Пыжкова (Минск)
olga.pyshkova@gmail.ru , and1325@yandex.ru

УРОВНЕВАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ПРЕПОДАВАНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Одним из важнейших факторов повышения качества подготовки специалистов в высших учебных заведениях является внедрение в учебный процесс новых образовательных технологий, которые ориентированы на активные методы овладения знаниями, развитие творческих способностей студентов, переход от поточного к личностно-ориентированноому обучению с учетом образовательных стандартов поколения. Поиски эффективных форм учебного процесса с учетом специфики личности обучаемого, предпринимаемые кафедрой высшей математики Белорусского государственного технологического университета в течение многих лет, привели к разработке уровневой образовательной технологии преподавания математических дисциплин.

Весь изучаемый программный материал разбивается по темам на блоки, которые классифицируются по трем уровням: А, Б, С. Материал первого уровня А (базовый) — обязательное поле знаний по предмету —

программа-минимум — уровень знаний, необходимый для успешного продолжения обучения. Второй уровень Б содержит задания, расширяющие представление студента об изучаемых темах, устанавливает связи между понятиями и методами различных разделов, дает их строгое математическое обоснование, а также примеры применения математических методов при решении прикладных задач. Уровень С содержит материал повышенной трудности, расширяющий и углубляющий классическое математическое образование инженера.

Лекции, практические и лабораторные занятия, управляемая самостоятельная работа студентов, экзамены (в том числе в виде тестов) организуются на основе уровневой технологии.

Уровневый подход к методике преподавания способствует созданию ситуаций успеха в учебно-познавательной деятельности и в целом направляет процесс обучения не только на усвоение информации, но и на раскрытие личностного потенциала студентов, на повышение их внутренней мотивации, а также на формирование творческого отношения к делу и стремления к самообразованию, что в дальнейшем определяет способность специалиста реализовать современные требования на самом высоком уровне.

А. В. Наседкин (Ростов-на-Дону)
nasedkin@math.sfedu.ru

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ ПЬЕЗОМАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОМПОЗИТОВ[1]

В последнее время наблюдается повышенный интерес к исследованиям многофазных композитных материалов сложной структуры, обнаруживающих весьма эффективные свойства для многих практических применений. Двухфазные пьезомагнитоэлектрические (магнитоэлектрические) композиты, состоящие из пьезомагнитной и пьезоэлектрической фаз, демонстрируют способность к взаимному преобразованию магнитных и электрических полей, притом, что каждая отдельная фаза такого свойства не имеет. Современные пьезомагнитоэлектрические композиты обладают высокой эффективностью магнитоэлектрического преобразования, относительно большими температурами фазовых переходов и значительным технологическим ресурсом. Математические и компьютерные исследования таких материалов позволяют промоделировать некоторые их важные характеристики и дать прогнозы по эффективности различных соотношений и связностей структур составляющих фаз.

В работе развивается подход, основанный на методах эффективных модулей механики композитов, компьютерном моделировании представи-

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00943).

тельных объемов с учетом их микроструктуры и на применении конечно-элементных технологий для решения связанных краевых задач магнито-электроупругости для представительных объемов композитов при специальных граничных условиях. Были рассмотрены различные варианты граничных условий, обеспечивающие для случая однородных сред, однородные постоянные распределения градиентов полевых характеристик.

Данные задачи решались численно с использованием специально разработанных конечно-элементных программ связанного физико-механического анализа. В результате с использованием процедур осреднения и методов компьютерного моделирования были определены эффективные модули пьезомагнитоэлектрических композитных материалов при различных пропорциях пьезомагнитной и пьезоэлектрической фаз.

Н. С. Орлова (Владикавказ)
norlova.umi.vnc@gmail.com

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВИБРОКИПЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Были проведены экспериментальные исследования процесса виброкипения сыпучего материала из монодисперсных частиц доломита, средний диаметр которых равен 1,75 мм. На основе полученных экспериментальных данных проведено сравнение результатов расчетов степени расширения виброкипящего слоя (отношения максимальной высоты виброкипящего слоя к высоте засыпки), полученных с использованием гидродинамической модели гранулярного газа [1,2] и упрощенной модели гранулярного газа (модели "газа крупных частиц") [3], с соответствующими экспериментальными данными. Подробное описание экспериментальной установки и методики обработки экспериментальных данных представлено в работе [4].

Эксперименты были проведены для слоев с толщиной засыпки 20 мм и 30 мм при амплитуде колебаний полки 2,5 мм и при разных значениях частоты колебаний (15–37 Гц). Получено, что с увеличением частоты колебаний полки расчет степень расширения виброкипящего слоя. Численные расчеты, полученные по двум моделям, хорошо совпадают с экспериментальными данными. При этом расчеты по гидродинамической модели гранулярного газа лучше описывают изменение степени расширения виброкипящего слоя в зависимости от частоты колебаний полки.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Орлова Н. С., Ахунжанов Р.К.* Сравнение применения двухжидкостной модели и модели гранулярного газа для описания процесса виброожижения // Нелинейный мир. 2012. №11. С. 875–878.

2. *Haitao Xu* Collisional granular flows with and without gas interactions in microgravity // A Dissertation Presented to the Faculty of the Graduate

School of Cornell University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy. 2003. 284 p.

3. *Свердлик Г. И., Рево А. А., Каменецкий Е. С., Орлова Н. С.* Сравнение результатов экспериментов и математического моделирования виброожиженного слоя // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2011. №1. С. 24–27.

4. *Свердлик Г. И., Рево А. А., Каменецкий Е. С.* Особенности соскальзывания сыпучего материала с наклонной вибрирующей полки // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2008. №4. С. 151–152.

И. В. Павлов, И. В. Цветкова (Ростов-на-Дону), В. В. Шамраева (Москва)
pavloviv2005@mail.ru, pilipenkoiv@mail.ru, shamraeva@mail.ru

СВЕДЕНИЕ ХЕДЖИРОВАНИЯ НА НЕПОЛНЫХ РЫНКАХ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ К ХЕДЖИРОВАНИЮ НА ПОЛНЫХ РЫНКАХ С БЕСКОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ[1]

Рассматривается одношаговый безарбитражный дисконтированный финансовый (B, S)-рынок с бесконечным числом состояний, на котором торгуются акции одного типа. Задача преобразования таких рынков в полные была впервые рассмотрена в [1] (последней работой в этом направлении является статья [2]).

Для перехода от неполных рынков к полным используются, в частности, мартингальные меры (м.м.), удовлетворяющие ОСУХЕ (ослабленному свойству универсальной хааровской единственности). В [2] для предложенной модели финансового рынка найдены достаточные условия того, что рынок обладает м.м., удовлетворяющими ОСУХЕ, а также условия того, что на данном рынке рассматриваемая м.м. P удовлетворяет ОСУХЕ. Там же приведен пример рынка и м.м. на нем с удобными для вычислений значениями параметров.

Пусть покупатель и продавец платежного обязательства договорились исчислять цену этого обязательства усреднением платежного обязательства (п.о.) по мере, удовлетворяющей ОСУХЕ. В настоящем докладе будет описана процедура хеджирования п.о., использующая интерполяцию неполного безарбитражного рынка полным рынком (метод хааровских интерполяций). Будут определены эволюции капиталов некоторых финансовых обязательств для упомянутого примера из [2] и рассчитаны компоненты соответствующих реплицирующих самофинансируемых портфелей.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00637а).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Данекянц А. Г., Павлов И. В.* Об ослабленном свойстве универсальной хааровской единственности// ОППМ. М.: Москва, ТВП, 2004. Т. 11. Вып. 3. С. 506–508.

2. *Павлов И. В., Цветкова И. В., Шамраева В. В.* Некоторые результаты о мартингальных мерах одношаговых моделей финансовых рынков, связанные с условием несовпадения барицентров// Вестник РГУПС. 2012, №3. С. 177–181.

Пилиди В. С., Полюшкина К. И. (Ростов-на-Дону)
pilidi@sfedu.ru, fenetre@inbox.ru

ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ, СУММИРУЕМЫХ С ПЕРЕМЕННОЙ СТЕПЕНЬЮ В ЗАДАЧАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Для решения задачи восстановления изображений предложены многочисленные методы, одним из которых является вариационный метод [1]. Требуется по искаженному изображению f восстановить исходное изображение u. В непрерывной постановке задача сводится к нахождению минимума функционала

$$E(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \, d\omega + \lambda \int_\Omega (u-f)^2 \, d\omega,$$

где Ω область определения данной функции f и искомой функции u $1 \leq p \leq 2$.

Доказана сходимость данной вариационной задачи в некоторых функциональных пространствах. На практике используется дискретизация указанной задачи. При подборе параметра p возникает конфликт между решением двух задач: восстановлением изображения в областях достаточной гладкости и сохранением границ на изображении. Для устранения этого конфликта предложено использовать переменный показатель p [2].

Нами был проведён численный анализ метода восстановления зашумлённого изображения с помощью функционалов со следующими функциями переменного показателя:

1) функция $p(x)$, предложенная в [2]: $p(x) = 1 + g(x)$, где

$$g(x) = 1/(1 + k|\nabla(G_\sigma * f(x))|), G_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp(|x|^2/(2\sigma^2));$$

2) предлагаемый нами показатель $g(x) = 1/(1 + kD[u(x)])$, где $D[u(x)]$ — дисперсия величины u.

Проведен анализ эффективности восстановления. Согласно численным результатам, предложенный нами показатель во многих случаях даёт лучшие результаты по сравнению с показателем из [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Aubert, P. Kornprobst* Mathematical Problems in Image Processing. Partial Differential Equations and the Calculus of Variations. Springer, 2006.

2. *F. Li, Z. Li, and L. Pi, Ling* Variable exponent functionals in image restoration // Appl. Math. Comput. **216** (2010), no. 3, 870–882.

В. А. Родин, А. В. Мельников (Воронеж)
rodin_v@mail.ru

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЭКСПЕРТИЗА, КОСВЕННО СВИДЕТЕЛЬСТВУЮЩАЯ О ВОЗМОЖНЫХ ФИНАНСОВЫХ НАРУШЕНИЯХ

После обоснования в работах $[1, 2]$ гипотезы о логнормальном распределении легальных доходов граждан Российской Федерации стало возможным моделирование эффектов от введения прогрессивного подоходного налога. Для определения границ изменения суммы сбора налога, в зависимости от параметра определяющего разброс воспользуемся правилом «трех сигм» для нормально распределенной случайной логарифмической функции. Получаем неравенство, которое свидетельствует о том, что отклонения, превышающие в $exp(4, 5) \approx 90$ средний заработок, маловероятны.

Вывод. Для легальных доходов, распределенных по логнормальному закону сумма дохода должна не превосходить среднюю величину дохода в 90 раз. Вернее вероятность такого события почти равна единицы. Так как согласно работам $[1, 2]$ именно логнормальное распределения характеризует легальные доходы населения в настоящее время в районах РФ, то превышение этой границы можно считать косвенным указанием на возможные нетрудовые доходы рассматриваемого физического лица.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скрыль С. В., Тростянский С. Н.* Безопасность социоинформационных процессов. Теория синтеза прогностических моделей. — Воронеж: Воронежский институт МВД России, 2008. — С. 155.

2. *Колмаков И. Б.* Прогнозирование показателей дифференциации денежных доходов населения // Проблемы прогнозирования. — 2006. — №1. — С. 136–162.

В. И. Субботин (Новочеркасск)
geometry@mail.ru

ОЦЕНКА ЧИСЛА ГРАНЕЙ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ С ИЗОЛИРОВАННЫМИ СИММЕТРИЧНЫМИ ГРАНЯМИ

Замкнутый выпуклый многогранник в трёхмерном евклидовом пространстве называется симметричным, если он имеет хотя бы одну нетривиальную ось симметрии. Будем говорить, что ось симметрии замкнутого выпуклого многогранника в трёхмерном евклидовом пространстве *проходит через грань* многогранника, если она перпендикулярна этой грани и пересекает относительную внутренность этой грани. Грань, через которую проходит ось симметрии многогранника будем называть симметричной; в противном случае — несимметричной. Симметричную грань F многогранника будем называть *изолированной*, если все грани, входящие в звезду F, т. е. соседние с F по ребру, несимметричны. Если в многограннике каждая симметричная грань изолирована, то будем говорить, что замкнутый выпуклый многогранник в трёхмерном евклидовом пространстве является *многогранником с изолированными симметричными гранями* Ранее [1] автором были даны точные оценки числа граней многогранника с изолированными несимметричными гранями. В настоящей работе доказано, что при максимальном возможном числе изолированных симметричных граней наименьшее возможное число граней многогранника с изолированными симметричными гранями равно 362. Если считать, что каждая несимметричная грань входит в звезду только одной симметричной грани, то это число равно 422. Заметим, что многогранники с изолированными симметричными ганями не являются метрически двойственными к многогранникам с изолированными несимметричными гранями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Субботин В. И.* Симметричные многогранники с изолированными несимметричными гранями. // Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. — Абрау-Дюрсо, 9–15 сент. 2008 г. — Ростов-на-Дону, 2008. С. 74–75.

М. М. Шварцман (Ростов-на-Дону)
black_drive@smtp.ru

ИНТУИЦИЯ vs ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

В работе предлагается трактовка творческого озарения, именуемого 'Интуиция'; рассматриваются этапы развития искусственного интеллекта (ИИ); делается вывод о невозможности моделирования с помощью ИИ процесса 'Интуиция'.

Интуиция — уникальная способность homo sapiens, вне логических рассуждений, совершать открытие в области естествознания. В трактовке автора, не homo sapiens совершает открытие, а «созревающий» в научно-техническом тренде образ 'Открытие' ждёт homo sapiens, который своей мыслью «узреет» его. Т.е. наличие потенциального образа 'Открытие' — условие необходимое, а мыслительная способность homo sapiens — условие достаточное.

ИИ — аппаратно-программное устройство, имитирующее человеческое мышление. В генезисе ИИ повторяет этапы эволюции мышления, образно говоря, от инфузории до homo, который изредка — sapiens. Выделим следующие этапы эволюции мышления: работа по жесткому алгоритму; работа по алгоритму при наличии базы данных; работа по адаптационному алгоритму на основе базы знаний и моделированию логических и эвристических рассуждений.

Несмотря на значимый прогресс в области ИИ, трудно представить, что интеллектуальная система сможет «узреть» образ «Открытие» в научно-техническом тренде. Поэтому 'Интуиция' останется прерогативой homo sapiens.

Содержание

Ерусалимский Я. М., Рабинович В. С. ИГОРЬ БОРИСОВИЧ СИМОНЕНКО — Ученый, учитель, человек **3**

Штейнберг Б. Я. Кафедра алгебры и дискретной математики И. Б. Симоненко. **5**

Секция I Функциональный анализ и теория операторов 9

Авсянкин О. Г. Многомерные интегральные операторы с квазиоднородными ядрами **11**

Антоневич А. Б., Леонова Е. Ю. Расширенное преобразование Лежандра **11**

Арсанукаев Р. Я. Нелинейные уравнения с псевдовогнутыми операторами **13**

Бандалиев Р. А. Связь некоторой системы нелинейных дифференциальных уравнений с неравенством Харди в пространстве Лебега со смешанной нормой и с переменными показателями **13**

Бритвина Л. Е. Сверточные конструкции с дифференциальными операторами и их приложения к решению интегральных и интегро-дифференциальных уравнений **14**

Гиль А. В., Ногин В. А. Комплексные степени обобщенного оператора Гельмгольца в L_p–пространстве **15**

Горин С. В. Фредгольмовость операторов типа сингулярных в пространствах бесконечно дифференцируемых функций **16**

Гринько А. П. Применение операторов локального дробного дифференцирования в формуле типа Тейлора **16**

Деундяк В. М. Некоторые топологические задачи в теории операторов локального типа **18**

Дыбин В. Б., Бурцева Е. В. Несколько замечаний о сингулярных интегральных операторах на контуре, состоящем из конечного числа окружностей **19**

Золотых С. А., Стукопин В. А. Об оценке числа компонент связности предельного спектра ленточных тёплицевых матриц **20**

Иноземцев А. И. О действии линейных операторов с многомерными частными интегралами в различных функциональных пространствах **20**

Кабанко М. В. Об алгебре мультипликаторов, связанных с операторами в гильбертовой паре **22**

Каплицкий В. М. Общее понятие регуляризатора неограниченного оператора и его применения в спектральной теории **23**

Карапетянц А. Н., Кодзоева Ф. Д. Характеризация функций из пространств, определенных в терминах p-суммируемости средней осцилляции. **24**

Карапетянц А. Н., Смирнова И. Ю. Некоторые классы операторов Теплица с неограниченными символами в весовых пространствах Бергмана со смешанной нормой **25**

Лукин А. В. Об одном приближённом методе решения многомерных интегральных уравнений с анизотропно однородными ядрами. **26**

Мелихов С. Н. Об уравнениях свертки на выпуклых множествах **26**

Мирошникова Е. И. О некоторых вопросах теории многомерных интегральных операторов с анизотропно однородными ядрами **27**

Пасенчук А. Э. Двумерные операторы Теплица с разрывными символами в пространстве гладких функций **28**

Samko N. Commutators of weighted Hardy operators in generalized local Morrey spaces and their applications **29**

Samko S. Morrey function spaces and Stummel classes **29**

Трусова Н. И. Дифференцирование операторов Урысона с частными интегралами в пространстве $C^{(1),n}(D)$ **29**

Умарходжиев С. М. Потенциал Рисса в гранд-пространствах Лебега **31**

Yakshiboev M. One Sided Ball Potential Generalized Lebesgus Spaces With Variable Exponent **32**

Секция II Теория функций 33

Брайчев Г. Г. Относительный рост выпуклых функций и их производных **35**

Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю. Экстремальные задачи для суммируемых аналитических функций **35**

Волосивец С. С., Голубов Б. И. Абсолютная сходимость рядов Фурье-Хаара **37**

Джрбашян А. М. О некоторых пространствах потенциалов Грина **38**

Зверович Э. И. Обращение гиперсингулярного интеграла по разомкнутому контуру **39**

Ситник С. М. О некоторых задачах в теории операторов преобразования **40**

Тригуб Р. М. Сравнение линейных операторов и приближение периодических функций полиномами **41**

Hasanov Javanshir J., Boundedness of the maximal and potential operators in the generalized variable exponent Morrey type spaces $\mathcal{M}^{p(\cdot),\theta(\cdot),\omega(\cdot)}(\Omega)$ **41**

Цвиль М. М. О суммировании кратных обобщенных рядов Фабера **41**

Чувенков А. Ф. О весовых гранд-пространствах Орлича, порожденных квазистепенными функциями **43**

Секция III Дифференциальные уравнения и математическая физика 45

Агранович М. С., Селицкий А. М. Дробные степени операторов, отвечающих граничным задачам для сильно эллиптических систем в липшицевых областях 47

Бабаян А. О., Закарян А. А. О задаче Дирихле для неправильно эллиптического уравнения 47

Бабешко В. А., Кириллова Е. В., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. Граничные задачи для тел с треснувшими покрытиями 48

Барышева И. В., Калитвин А. С. Об уравнениях Вольтерра с частными интегралами 50

Ватульян А. О. Гукасян Л. С. О задачах Коши в теории обратных задач 51

Волков С. С., Айзикович С. М., Васильев А. С. Двухсторонне-асимптотические решения осесимметричных контактных задач для упругого слоя, лежащего на деформируемом основании при существенном скачке упругих свойств в зоне слой/основание 52

Гадзова Л. Х. Задача Штурма-Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка 52

Гачаев А. М., Дашмашаев А. У. Об одной задаче Дирихле для фрактального осцилляционного уравнения 53

Гликлих Ю. Е. Стохастические дифференциальные уравнения и включения с пироизводными в среднем 54

Гончаренко А. А., Прозоров О. А. Нелинейные режимы в задаче вибрационной конвекции Марангони 55

Гумбаталиев Р. З., Кулиева Ф. А. О разрешимости операторно-дифференциальных уравнений 55

Жуков Д. А. MG-деформации односвязной поверхности при задании вариации сферической кривизны вдоль края 57

Изаксон А. Линеаризация в задаче конвекции в слое со свободной границей 58

Исраилов С. В. Исследование краевых задач для бесконечной системы ОДУ в особых случаях 58

Исраилов С. В., Гачаев А. М. Об одном методе исследования краевых задач с линейными многоточечными условиями для бесконечной системы дифференциальных уравнений 59

Казак В. В., Солохин Н. Н. Смешанная краевая задача в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей 60

Калитвин А. С. О решениях интегро-дифференциальных уравнений Барбашина (ИДУБ) 61

Калитвин В. А. О численном решении уравнений Вольтерра с частными интегралами 62

Камалян А. Г., Нерсесян А. Б. О некоторых операторах типа плавного перехода 63

Катрахова А. А., Сазонов А. Ю. О методе Фурье для сингулярного параболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами 64

Климентов С. Б. Представления второго рода для решений уравнения Бельтрами 65

Кряквин В. Д. Псевдодифференциальные операторы в пространствах Гельдера-Зигмунда переменного порядка 66

Кудрявцев О. Е. Эффективный метод вычисления специального вида функционалов, возникающих в финансовой математике 67

Марголина Н. Л. Об одной формуле генерального показателя линейной системы с неограниченной правой частью 67

Михайлов А. П. Существование субгармонических решений неавтономных гамильтоновых систем 69

Моршнева И. В. Бифуркации в динамических системах с симметрией применительно к задачам гидродинамики 70

Николенко П. В. О необходимом условии оптимальности в задачах с непрерывными оптимальными управлениями 70

Овчинникова С. Н., Прозоров О. А. Нелинейные режимы в задачах вибрационной конвекции 72

Пикулин С. В. О сходимости решений полулинейных эллиптических уравнений в семействе перфорированных областей 73

Попов В. А. Аналитическое продолжение псевдоримановой метрики и изометрий 74

Ревина С. В. Асимптотика задачи устойчивости стационарных решений уравнений Навье-Стокса 75

Rutkauskas S. On the well-posedness of Dirichlet type problems for the degenerate elliptic systems 76

Сагитов А. А. Исследование краевых задач для ОДУ в критических случаях 76

Сазонов Л. И. Локальный принцип и метод линеаризации 78

Сахарова Л. В. Асимптотическое исследование интегро-дифференцальной задачи изоэлектрического фокусирования методом перевала 79

Селицкий А. М., Скубачевский А. Л. О сильных решениях второй краевой задачи для параболического дифференциально-разностного уравнения 79

Сейфуллаев Ф. А. Геометрически нелинейные параметрические колебания поперечно подкрепленной цилиндрической панели. 80

Сербина Л. И. О линейных уравнениях гиперболического и смешанного типа, моделирующих нелинейные эффекты фильтрации 81

Солдатов А. П. О разрешимости задачи Дирихле на двумерных стратифицированных множествах 82

Столяр А. М. Решение начально-краевых задач с подвижными границами 83

Сумбатян М. А., Мещеряков К. И. Интегральное уравнение в аэродинамике лопасти ВЭУ 84

Тюриков Е. В. Об одном геометрическом аналоге смешанной граничной задачи мембранной теории выпуклых оболочек. 85

Уринов А. К., Халилов К. С. Об одной нелокальной задача для параболо-гиперболического уравнения 86

Фармонов Ш. Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа второго рода 87

Федотов А. И. Сплайн-метод решения одного класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений 88

Филиппова О. В. Об управляемых импульсных системах с фазовыми ограничениями по управлению 89

Ширяев К. Е. Об одном свойстве центрального показателя 90

Секция IV Фундаментальные проблемы ИКТ 91

Алымова Е. В., Питинов А. В. Генерация позитивных и негативных тестов для преобразований программ в оптимизирующей распараллеливающей системе 92

Кравченко Е. Н. Реализация библиотеки межпроцессорного взаимодействия для специфичных архитектур типа MIMD 93

Кравченко Г. Ю. Разбиение циклов на кадры по пространству итераций 94

Секция V Математика в естествознании, интеллектуальные системы и компьютерные науки 95

Абрамян М. Э. Конструктор учебных заданий с поддержкой языков Pascal, C++, C# для универсального задачника по программированию 96

Аршава Е. А. О роли информационных технологий и мультимедийных программ в преподавании фундаментальных наук 97

Беркович В. Н. О принципе предельной амплитуды в задачах динамической теории упругости для клиновидных областей 98

Боев Н. В., Колосова А. В. Явные выражения давления в переотраженных акустических волнах от поверхностей препятствий канонической формы 99

Валуев А. М. Концептуальная модель событийно-переключаемой системы, ее интерпретации и приложения 100

Виноградова Т. А. Примеры использования специальных функций в непрерывных распределениях 101

Гервич Л. Р. Параллельный итерационный алгоритм решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка 102

Дубров Д. В., Рошаль А. С. Библиотека арифметических операций для конвертера с языка C в HDL 102

Ерусалимский Я. М. Всплески динамических потоков в сетях 103

Зверович Л. Ф., Борковская И. М., Пыжкова О. Н. Уровневая технология преподавания высшей математики 104

Наседкин А. В. Некоторые подходы к моделированию эффективных свойств пьезомагнитоэлектрических композитов 105

Орлова Н. С. Исследование процесса виброкипения с использованием математических моделей 106

Павлов И. В., Шамраева В. В., Цветкова И. В. Сведение хеджирования на неполных рынках с бесконечным числом состояний к хеджированию на полных рынках с бесконечным горизонтом 107

Пилиди В. С., Полюшкина К. И. Пространства функций, суммируемых с переменной степенью в задачах восстановления изображений 108

Родин В. А., Мельников А. В. Статистическая экспертиза, косвенно свидетельствующая о возможных финансовых нарушениях 109

Субботин В. И. Оценка числа граней выпуклых многогранников с изолированными симметричными гранями 110

Шварцман М. М. Интуиция vs искуственнный интеллект 111