DZIAŁ PIERWSZY.

MATEMATYKA.

I. TABLICE.

(Uwagi do tablic niniejszych znajdują się na str. 41—42).

A. Tablice potęg, pierwiastków, logarytmów zwyczajnych, wartości odwrotnych, obwodów i powierzchni koła.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1	1	1	1,0000	1,0000	0,00000	1000,000	3,142	0,7854	1
2	4	8	1,4142	1,2599	0,30103	500,000	6,283	3,1416	2
3	9	27	1,7321	1,4422	0,47712	333,333	9,425	7,0686	3
4	16	64	2,0000	1,5874	0,60206	250,000	12,566	12,5664	4
5	25	125	2,2361	1,7100	0,69897	200,000	15,708	19,6350	5
6	36	216	2,4495	1,8171	0,77815	166,667	18,850	28,2743	6
7	49	343	2,6458	1,9129	0,84510	142,857	21,991	38,4845	7
8	64	512	2,8284	2,0000	0,90309	125,000	25,133	50,2655	8
9	81	729	3,0000	2,0801	0,95424	111,111	28,274	63,6173	9
10	100	1000	3,1623	2,1544	1,00000	100,000	31,416	78,5398	10
11	121	1331	3,3166	2,2240	1,04139	90,9091	34,558	95,0332	11
12	144	1728	3,4641	2,2894	1,07918	83,3333	37,699	113,097	12
13	169	2197	3,6056	2,3513	1,11394	76,9231	40,841	132,732	13
14	196	2744	3,7417	2,4101	1,14613	71,4286	43,982	153,938	14
15	225	3375	3,8730	2,4662	1,17609	66,6667	47,124	176,715	15
16	256	4096	4,0000	2,5198	1,20412	62,5000	50,265	201,062	16
17	289	4913	4,1231	2,5713	1,23045	58,8235	53,407	226,980	17
18	324	5832	4,2426	2,6207	1,25527	55,5556	56,549	254,469	18
19	361	6859	4,3589	2,6684	1,27875	52,6316	59,690	283,529	19
20	400	8000	4,4721	2,7144	1,30103	50,0000	62,832	314,159	20
21	441	9261	4,5826	2,7589	1,32222	47,6190	65,973	346,361	21
22	484	10648	4,6904	2,8020	1,34242	45,4545	69,115	380,133	22
23	529	12167	4,7958	2,8439	1,36173	43,4783	72,257	415,476	23
24	576	13824	4,8990	2,8845	1,38021	41,6667	75,398	452,389	24
25	625	15625	5,0000	2,9240	1,39794	40,0000	78,540	490,874	25
26	676	17576	5,0990	2,9625	1,41497	38,4615	81,681	530,929	26
27	729	19683	5,1962	3,0000	1,43136	37,0370	84,823	572,555	27
28	784	21952	5,2915	3,0366	1,44716	35,7143	87,965	615,752	28
29	841	24389	5,3852	3,0723	1,46240	34,4828	91,106	660,520	29
30	900	27000	5,4772	3,1072	1,47712	33,3333	94,248	706,858	30
31	961	29791	5,5678	3,1414	1,49136	32,2581	97,389	754,768	31
32	1024	32768	5,6569	3,1748	1,50515	31,2500	100,531	804,248	32
33	1089	35937	5,7446	3,2075	1,51851	30,3030	103,673	855,299	33
34	1156	39304	5,8310	3,2396	1,53148	29,4118	106,814	907,920	34
35	1225	42875	5,9161	3,2711	1,54407	28,5714	109,956	962,113	35
36	1296	46656	6,0000	3,3019	1,55630	27,7778	113,097	1017,88	36
37	1369	50653	6,0828	3,3322	1,56820	27,0270	116,239	1075,21	37
38	1444	54872	6,1644	3,3620	1,57978	26,3158	119,381	1134,11	38
39	1521	59319	6,2450	3,3912	1,59106	25,6410	122,522	1194,59	39
40	1600	64000	6,3246	3,4200	1,60206	25,0000	125,66	1256,64	40
41	1681	68921	6,4031	3,4482	1,61278	24,3902	128,81	1320,25	41
42	1764	74088	6,4807	3,4760	1,62325	23,8095	131,95	1385,44	42
43	1849	79507	6,5574	3,5034	1,63347	23,2558	135,09	1452,20	43
44	1936	85184	6,6332	3,5303	1,64345	22,7273	138,23	1520,53	44
45	2025	91125	6,7082	3,5569	1,65321	22,2222	141,37	1590,43	45
46	2116	97336	6,7823	3,5830	1,66276	21,7391	144,51	1661,90	46
47	2209	103823	6,8557	3,6088	1,67210	21,2766	147,65	1734,94	47
48	2304	110592	6,9282	3,6342	1,68124	20,8333	150,80	1809,56	48
49	2401	117649	7,0000	3,6593	1,69020	20,4082	153,94	1885,74	49
50	2500	125000	7,0711	3,6840	1,69897	20,0000	157,08	1963,50	50

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
50	2500	125000	7,0711	3,6840	1,69897	20,0000	157,08	1963,50	50
51	2601	132651	7,1414	3,7084	1,70757	19,6078	160,22	2042,82	51
52	2704	140608	7,2111	3,7325	1,71600	19,2308	163,36	2123,72	52
53	2809	148877	7,2801	3,7563	1,72428	18,8679	166,50	2206,18	53
54	2916	157464	7,3485	3,7798	1,73239	18,5185	169,65	2290,22	54
55	3025	166375	7,4162	3,8030	1,74036	18,1818	172,79	2375,83	55
56	3136	175616	7,4833	3,8259	1,74819	17,8571	175,93	2463,01	56
57	3249	185193	7,5498	3,8485	1,75587	17,5439	179,07	2551,76	57
58	3364	195112	7,6158	3,8709	1,76343	17,2414	182,21	2642,08	58
59	3481	205379	7,6811	3,8930	1,77085	16,9492	185,35	2733,97	59
60	3600	216000	7,7460	3,9149	1,77815	16,6667	188,50	2827,43	60
61	3721	226981	7,8102	3,9365	1,78533	16,3934	191,64	2922,47	61
62	3844	238328	7,8740	3,9579	1,79239	16,1290	194,78	3019,07	62
63	3969	250047	7,9373	3,9791	1,79934	15,8730	197,92	3117,25	63
64	4096	262144	8,0000	4,0000	1,80618	15,6250	201,06	3216,99	64
65	4225	274625	8,0623	4,0207	1,81291	15,3846	204,20	3318,31	65
66	4356	287496	8,1240	4,0412	1,81954	15,1515	207,35	3421,19	66
67	4489	300763	8,1854	4,0615	1,82607	14,9254	210,49	3525,65	67
68	4624	314432	8,2462	4,0817	1,83251	14,7059	213,63	3631,68	68
69	4761	328509	8,3066	4,1016	1,83885	14,4928	216,77	3739,28	69
70	4900	343000	8,3666	4,1213	1,84510	14,2857	219,91	3848,45	70
71	5041	357911	8,4261	4,1408	1,85126	14,0845	223,05	3959,19	71
72	5184	373248	8,4853	4,1602	1,85733	13,8889	226,19	4071,50	72
73	5329	389017	8,5440	4,1793	1,86332	13,6986	229,34	4185,39	73
74	5476	405224	8,6023	4,1983	1,86923	13,5135	232,48	4300,84	74
75	5625	421875	8,6603	4,2172	1,87506	13,3333	235,62	4417,86	75
76	5776	438976	8,7178	4,2358	1,88081	13,1579	238,76	4536,46	76
77	5929	456533	8,7750	4,2543	1,88649	12,9870	241,90	4656,63	77
78	6084	474552	8,8318	4,2727	1,89209	12,8205	245,04	4778,36	78
79	6241	493039	8,8882	4,2908	1,89763	12,6582	248,19	4901,67	79
80	6400	512000	8,9443	4,3089	1,90309	12,5000	251,33	5026,55	80
81	6561	531441	9,0000	4,3267	1,90849	12,3457	254,47	5153,00	81
82	6724	551368	9,0554	4,3445	1,91381	12,1951	257,61	5281,02	82
83	6889	571787	9,1104	4,3621	1,91908	12,0482	260,75	5410,61	83
84	7056	592704	9,1652	4,3795	1,92428	11,9048	263,89	5541,77	84
85	7225	614125	9,2195	4,3968	1,92942	11,7647	267,04	5674,50	85
86	7396	636056	9,2736	4,4140	1,93450	11,6279	270,18	5808,80	86
87	7569	658503	9,3274	4,4310	1,93952	11,4943	273,32	5944,68	87
88	7744	681472	9,3808	4,4480	1,94448	11,3636	276,46	6082,12	88
89	7921	704969	9,4340	4,4647	1,94939	11,2360	279,60	6221,14	89
90	8100	729000	9,4868	4,4814	1,95424	11,1111	282,74	6361,73	90
91	8281	753571	9,5394	4,4979	1,95904	10,9890	285,88	6503,88	91
92	8464	778688	9,5917	4,5144	1,96379	10,8696	289,03	6647,61	92
93	8649	804357	9,6437	4,5307	1,96848	10,7527	292,17	6792,91	93
94	8836	830584	9,6954	4,5468	1,97313	10,6383	295,31	6939,78	94
95	9025	857375	9,7468	4,5629	1,97772	10,5263	298,45	7088,22	95
96	9216	884736	9,7980	4,5789	1,98227	10,4167	301,59	7238,23	96
97	9409	912673	9,8489	4,5947	1,98677	10,3093	304,73	7389,81	97
98	9604	941192	9,8995	4,6104	1,99123	10,2041	307,88	7542,96	98
99	9801	970299	9,9499	4,6261	1,99564	10,1010	311,02	7697,69	99
100	10000	1000000	10,0000	4,6416	2,00000	10,0000	314,16	7853,98	100

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
100	10000	1000000	10,0000	4,6416	2,00000	10,0000	314,16	7853,98	100
101	10201	1030301	10,0499	4,6570	2,00432	9,90099	317,30	8011,85	101
102	10404	1061208	10,0995	4,6723	2,00860	9,80392	320,44	8171,28	102
103	10609	1092727	10,1489	4,6875	2,01284	9,70874	323,58	8332,29	103
104	10816	1124864	10,1980	4,7027	2,01703	9,61538	326,73	8494,87	104
105	11025	1157625	10,2470	4,7177	2,02119	9,52381	329,87	8659,01	105
106	11236	1191016	10,2956	4,7326	2,02531	9,43396	333,01	8824,73	106
107	11449	1225043	10,3441	4,7475	2,02938	9,34579	336,15	8992,02	107
108	11664	1259712	10,3923	4,7622	2,03342	9,25926	339,29	9160,88	108
109	11881	1295029	10,4403	4,7769	2,03743	9,17431	342,43	9331,32	109
110	12100	1331000	10,4881	4,7914	2,04139	9,09091	345,58	9503,32	110
111	12321	1367631	10,5357	4,8059	2,04532	9,00901	348,72	9676,89	111
112	12544	1404928	10,5830	4,8203	2,04922	8,92857	351,86	9852,03	112
113	12769	1442897	10,6301	4,8346	2,05308	8,84956	355,00	10028,7	113
114	12996	1481544	10,6771	4,8488	2,05690	8,77193	358,14	10207,0	114
115	13225	1520875	10,7238	4,8629	2,06070	8,69565	361,28	10386,9	115
116	13456	1560896	10,7703	4,8770	2,06446	8,62069	364,42	10568,3	116
117	13689	1601613	10,8167	4,8910	2,06819	8,54701	367,57	10751,3	117
118	13924	1643032	10,8628	4,9049	2,07188	8,47458	370,71	10935,9	118
119	14161	1685159	10,9087	4,9187	2,07555	8,40336	373,85	11122,0	119
120	14400	1728000	10,9545	4,9324	2,07918	8,33333	376,99	11309,7	120
121	14641	1771561	11,0000	4,9461	2,08279	8,26446	380,13	11499,0	121
122	14884	1815848	11,0454	4,9597	2,08636	8,19672	383,27	11689,9	122
123	15129	1860867	11,0905	4,9732	2,08991	8,13008	386,42	11882,3	123
124	15376	1906624	11,1355	4,9866	2,09342	8,06452	389,56	12076,3	124
125	15625	1953125	11,1803	5,0000	2,09691	8,00000	392,70	12271,8	125
126	15876	2000376	11,2250	5,0133	2,10037	7,93651	395,84	12469,0	126
127	16129	2048383	11,2694	5,0265	2,10380	7,87402	398,98	12667,7	127
128	16384	2097152	11,3137	5,0397	2,10721	7,81250	402,12	12868,0	128
129	16641	2146689	11,3578	5,0528	2,11059	7,75194	405,27	13069,8	129
130	16900	2197000	11,4018	5,0658	2,11394	7,69231	408,41	13273,2	130
131	17161	2248091	11,4455	5,0788	2,11727	7,63359	411,55	13478,2	131
132	17424	2299968	11,4891	5,0916	2,12057	7,57576	414,69	13684,8	132
133	17689	2352637	11,5326	5,1045	2,12385	7,51880	417,83	13892,9	133
134	17956	2406104	11,5758	5,1172	2,12710	7,46269	420,97	14102,6	134
135	18225	2460375	11,6190	5,1299	2,13033	7,40741	424,12	14313,9	135
136	18496	2515456	11,6619	5,1426	2,13354	7,35294	427,26	14526,7	136
137	18769	2571353	11,7047	5,1551	2,13672	7,29927	430,40	14741,1	137
138	19044	2628072	11,7473	5,1676	2,13988	7,24638	433,54	14957,1	138
139	19321	2685619	11,7898	5,1801	2,14301	7,19424	436,68	15174,7	139
140	19600	2744000	11,8322	5,1925	2,14613	7,14286	439,82	15393,8	140
141	19881	2803221	11,8743	5,2048	2,14922	7,09220	442,96	15614,5	141
142	20164	2863288	11,9164	5,2171	2,15229	7,04225	446,11	15836,8	142
143	20449	2924207	11,9583	5,2293	2,15534	6,99301	449,25	16060,6	143
144	20736	2985984	12,0000	5,2415	2,15836	6,94444	452,39	16286,0	144
145	21025	3048625	12,0416	5,2536	2,16137	6,89655	455,53	16513,0	145
146	21316	3112136	12,0830	5,2656	2,16435	6,84932	458,67	16741,5	146
147	21609	3176523	12,1244	5,2776	2,16732	6,80272	461,81	16971,7	147
148	21904	3241792	12,1655	5,2896	2,17026	6,75676	464,96	17203,4	148
149	22201	3307949	12,2066	5,3015	2,17319	6,71141	468,10	17436,6	149
150	22500	3375000	12,2474	5,3133	2,17609	6,66667	471,24	17671,5	150

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
150	22500	3375000	12,2474	5,3133	2,17609	6,66667	471,24	17671,5	150
151	22801	3442951	12,2882	5,3251	2,17898	6,62252	474,38	17907,9	151
152	23104	3511808	12,3288	5,3368	2,18184	6,57895	477,52	18145,8	152
153	23409	3581577	12,3693	5,3485	2,18469	6,53595	480,66	18385,4	153
154	23716	3652264	12,4097	5,3601	2,18752	6,49351	483,81	18626,5	154
155	24025	3723875	12,4499	5,3717	2,19033	6,45161	486,95	18869,2	155
156	24336	3796416	12,4900	5,3832	2,19312	6,41026	490,09	19113,4	156
157	24649	3869893	12,5300	5,3947	2,19590	6,36943	493,23	19359,3	157
158	24964	3944312	12,5698	5,4061	2,19866	6,32911	496,37	19606,7	158
159	25281	4019679	12,6095	5,4175	2,20140	6,28931	499,51	19855,7	159
160	25600	4096000	12,6491	5,4288	2,20412	6,25000	502,65	20106,2	160
161	25921	4173281	12,6886	5,4401	2,20683	6,21118	505,80	20358,3	161
162	26244	4251528	12,7279	5,4514	2,20952	6,17284	508,94	20612,0	162
163	26569	4330747	12,7671	5,4626	2,21219	6,13497	512,08	20867,2	163
164	26896	4410944	12,8062	5,4737	2,21484	6,09756	515,22	21124,1	164
165	27225	4492125	12,8452	5,4848	2,21748	6,06061	518,36	21382,5	165
166	27556	4574296	12,8841	5,4959	2,22011	6,02410	521,50	21642,4	166
167	27889	4657463	12,9228	5,5069	2,22272	5,98802	524,65	21904,0	167
168	28224	4741632	12,9615	5,5178	2,22531	5,95238	527,79	22167,1	168
169	28561	4826809	13,0000	5,5288	2,22789	5,91716	530,93	22431,8	169
170	28900	4913000	13,0384	5,5397	2,23045	5,88235	534,07	22698,0	170
171	29241	5000211	13,0767	5,5505	2,23300	5,84795	537,21	22965,8	171
172	29584	5088448	13,1149	5,5613	2,23553	5,81395	540,35	23235,2	172
173	29929	5177717	13,1529	5,5721	2,23805	5,78035	543,50	23506,2	173
174	30276	5268024	13,1909	5,5828	2,24055	5,74713	546,64	23778,7	174
175	30625	5359375	13,2288	5,5934	2,24304	5,71429	549,78	24052,8	175
176	30976	5451776	13,2665	5,6041	2,24551	5,68182	552,92	24328,5	176
177	31329	5545233	13,3041	5,6147	2,24797	5,64972	556,06	24605,7	177
178	31684	5639752	13,3417	5,6252	2,25042	5,61798	559,20	24884,6	178
179	32041	5735339	13,3791	5,6357	2,25285	5,58659	562,35	25164,9	179
180	32400	5832000	13,4164	5,6462	2,25527	5,55556	565,49	25446,9	180
181	32761	5929741	13,4536	5,6567	2,25768	5,52486	568,63	25730,4	181
182	33124	6028568	13,4907	5,6671	2,26007	5,49451	571,77	26015,5	182
183	33489	6128487	13,5277	5,6774	2,26245	5,46448	574,91	26302,2	183
184	33856	6229504	13,5647	5,6877	2,26482	5,43478	578,05	26590,4	184
185	34225	6331625	13,6015	5,6980	2,26717	5,40541	581,19	26880,3	185
186	34596	6434856	13,6382	5,7083	2,26951	5,37634	584,34	27171,6	186
187	34969	6539203	13,6748	5,7185	2,27184	5,34759	587,48	27464,6	187
188	35344	6644672	13,7113	5,7287	2,27416	5,31915	590,62	27759,1	188
189	35721	6751269	13,7477	5,7388	2,27646	5,29101	593,76	28055,2	189
190	36100	6859000	13,7840	5,7489	2,27875	5,26316	596,90	28352,9	190
191	36481	6967871	13,8203	5,7590	2,28103	5,23560	600,04	28652,1	191
192	36864	7077888	13,8564	5,7690	2,28330	5,20833	603,19	28952,9	192
193	37249	7189057	13,8924	5,7790	2,28556	5,18135	606,33	29255,3	193
194	37636	7301384	13,9284	5,7890	2,28780	5,15464	609,47	29559,2	194
195	38025	7414875	13,9642	5,7989	2,29003	5,12821	612,61	29864,8	195
196	38416	7529536	14,0000	5,8088	2,29226	5,10204	615,75	30171,9	196
197	38809	7645373	14,0357	5,8186	2,29447	5,07614	618,89	30480,5	197
198	39204	7762392	14,0712	5,8285	2,29667	5,05051	622,04	30790,7	198
199	39601	7880599	14,1067	5,8383	2,29885	5,02513	625,18	31102,6	199
200	40000	8000000	14,1421	5,8480	2,30103	5,00000	628,32	31415,9	200

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
200	40000	8000000	14,1421	5,8480	2,30103	5,00000	628,32	31415,9	**200**
201	40401	8120601	14,1774	5,8578	2,30320	4,97512	631,46	31730,9	201
202	40804	8242408	14,2127	5,8675	2,30535	4,95050	634,60	32047,4	202
203	41209	8365427	14,2478	5,8771	2,30750	4,92611	637,74	32365,5	203
204	41616	8489664	14,2829	5,8868	2,30963	4,90196	640,88	32685,1	204
205	42025	8615125	14,3178	5,8964	2,31175	4,87805	644,03	33006,4	205
206	42436	8741816	14,3527	5,9059	2,31387	4,85437	647,17	33329,2	206
207	42849	8869743	14,3875	5,9155	2,31597	4,83092	650,31	33653,5	207
208	43264	8998912	14,4222	5,9250	2,31806	4,80769	653,45	33979,5	208
209	43681	9129329	14,4568	5,9345	2,32015	4,78469	656,59	34307,0	209
210	44100	9261000	14,4914	5,9439	2,32222	4,76190	659,73	34636,1	**210**
211	44521	9393931	14,5258	5,9533	2,32428	4,73934	662,88	34966,7	211
212	44944	9528128	14,5602	5,9627	2,32634	4,71698	666,02	35298,9	212
213	45369	9663597	14,5945	5,9721	2,32838	4,69484	669,16	35632,7	213
214	45796	9800344	14,6287	5,9814	2,33041	4,67290	672,30	35968,1	214
215	46225	9938375	14,6629	5,9907	2,33244	4,65116	675,44	36305,0	215
216	46656	10077696	14,6969	6,0000	2,33445	4,62963	678,58	36643,5	216
217	47089	10218313	14,7309	6,0092	2,33646	4,60829	681,73	36983,6	217
218	47524	10360232	14,7648	6,0185	2,33846	4,58716	684,87	37325,3	218
219	47961	10503459	14,7986	6,0277	2,34044	4,56621	688,01	37668,5	219
220	48400	10648000	14,8324	6,0368	2,34242	4,54545	691,15	38013,3	**220**
221	48841	10793861	14,8661	6,0459	2,34439	4,52489	694,29	38359,6	221
222	49284	10941048	14,8997	6,0550	2,34635	4,50450	697,43	38707,6	222
223	49729	11089567	14,9332	6,0641	2,34830	4,48430	700,58	39057,1	223
224	50176	11239424	14,9666	6,0732	2,35025	4,46429	703,72	39408,1	224
225	50625	11390625	15,0000	6,0822	2,35218	4,44444	706,86	39760,8	225
226	51076	11543176	15,0333	6,0912	2,35411	4,42478	710,00	40115,0	226
227	51529	11697083	15,0665	6,1002	2,35603	4,40529	713,14	40470,8	227
228	51984	11852352	15,0997	6,1091	2,35793	4,38596	716,28	40828,1	228
229	52441	12008989	15,1327	6,1180	2,35984	4,36681	719,42	41187,1	229
230	52900	12167000	15,1658	6,1269	2,36173	4,34783	722,57	41547,6	**230**
231	53361	12326391	15,1987	6,1358	2,36361	4,32900	725,71	41909,6	231
232	53824	12487168	15,2315	6,1446	2,36549	4,31034	728,85	42273,3	232
233	54289	12649337	15,2643	6,1534	2,36736	4,29185	731,99	42638,5	233
234	54756	12812904	15,2971	6,1622	2,36922	4,27350	735,13	43005,3	234
235	55225	12977875	15,3297	6,1710	2,37107	4,25532	738,27	43373,6	235
236	55696	13144256	15,3623	6,1797	2,37291	4,23729	741,42	43743,5	236
237	56169	13312053	15,3948	6,1885	2,37475	4,21941	744,56	44115,0	237
238	56644	13481272	15,4272	6,1972	2,37658	4,20168	747,70	44488,1	238
239	57121	13651919	15,4596	6,2058	2,37840	4,18410	750,84	44862,7	239
240	57600	13824000	15,4919	6,2145	2,38021	4,16667	753,98	45238,9	**240**
241	58081	13997521	15,5242	6,2231	2,38202	4,14938	757,12	45616,7	241
242	58564	14172488	15,5563	6,2317	2,38382	4,13223	760,27	45996,1	242
243	59049	14348907	15,5885	6,2403	2,38561	4,11523	763,41	46377,0	243
244	59536	14526784	15,6205	6,2488	2,38739	4,09836	766,55	46759,5	244
245	60025	14706125	15,6525	6,2573	2,38917	4,08163	769,69	47143,5	245
246	60516	14886936	15,6844	6,2658	2,39094	4,06504	772,83	47529,2	246
247	61009	15069223	15,7162	6,2743	2,39270	4,04858	775,97	47916,4	247
248	61504	15252992	15,7480	6,2828	2,39445	4,03226	779,11	48305,1	248
249	62001	15438249	15,7797	6,2912	2,39620	4,01606	782,26	48695,5	249
250	62500	15625000	15,8114	6,2996	2,39794	4,00000	785,40	49087,4	**250**

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
250	62500	15625000	15,8114	0,2990	2,39794	4,00000	785,40	49087,4	250
251	63001	15813251	15,8430	6,3080	2,39967	3,98406	788,54	49480,9	251
252	63504	16003008	15,8745	6,3164	2,40140	3,96825	791,68	49875,9	252
253	64009	16194277	15,9060	6,3247	2,40312	3,95257	794,82	50272,6	253
254	64516	16387064	15,9374	6,3330	2,40483	3,93701	797,96	50670,7	254
255	65025	16581375	15,9687	6,3413	2,40654	3,92157	801,11	51070,5	255
256	65536	16777216	16,0000	6,3496	2,40824	3,90625	804,25	51471,9	256
257	66049	16974593	16,0312	6,3579	2,40993	3,89105	807,39	51874,8	257
258	66564	17173512	16,0624	6,3661	2,41162	3,87597	810,53	52279,2	258
259	67081	17373979	16,0935	6,3743	2,41330	3,86100	813,67	52685,3	259
260	67600	17576000	16,1245	6,3825	2,41497	3,84615	816,81	53092,9	260
261	68121	17779581	16,1555	6,3907	2,41664	3,83142	819,96	53502,1	261
262	68644	17984728	16,1864	6,3988	2,41830	3,81679	823,10	53912,9	262
263	69169	18191447	16,2173	6,4070	2,41996	3,80228	826,24	54325,2	263
264	69696	18399744	16,2481	6,4151	2,42160	3,78788	829,38	54739,1	264
265	70225	18609625	16,2788	6,4232	2,42325	3,77358	832,52	55154,6	265
266	70756	18821096	16,3095	6,4312	2,42488	3,75940	835,66	55571,6	266
267	71289	19034163	16,3401	6,4393	2,42651	3,74532	838,81	55990,3	267
268	71824	19248832	16,3707	6,4473	2,42813	3,73134	841,95	56410,4	268
269	72361	19465109	16,4012	6,4553	2,42975	3,71747	845,09	56832,2	269
270	72900	19683000	16,4317	6,4633	2,43136	3,70370	848,23	57255,5	270
271	73441	19902511	16,4621	6,4713	2,43297	3,69004	851,37	57680,4	271
272	73984	20123648	16,4924	6,4792	2,43457	3,67647	854,51	58106,9	272
273	74529	20346417	16,5227	6,4872	2,43616	3,66300	857,65	58534,9	273
274	75076	20570824	16,5529	6,4951	2,43775	3,64964	860,80	58964,6	274
275	75625	20796875	16,5831	6,5030	2,43933	3,63636	863,94	59395,7	275
276	76176	21024576	16,6132	6,5108	2,44091	3,62319	867,08	59828,5	276
277	76729	21253933	16,6433	6,5187	2,44248	3,61011	870,22	60262,8	277
278	77284	21484952	16,6733	6,5265	2,44404	3,59712	873,36	60698,7	278
279	77841	21717639	16,7033	6,5343	2,44560	3,58423	876,50	61136,2	279
280	78400	21952000	16,7332	6,5421	2,44716	3,57143	879,65	61575,2	280
281	78961	22188041	16,7631	6,5499	2,44871	3,55872	882,79	62015,8	281
282	79524	22425768	16,7929	6,5577	2,45025	3,54610	885,93	62458,0	282
283	80089	22665187	16,8226	6,5654	2,45179	3,53357	889,07	62901,8	283
284	80656	22906304	16,8523	6,5731	2,45332	3,52113	892,21	63347,1	284
285	81225	23149125	16,8819	6,5808	2,45484	3,50877	895,35	63794,0	285
286	81796	23393656	16,9115	6,5885	2,45637	3,49650	898,50	64242,4	286
287	82369	23639903	16,9411	6,5962	2,45788	3,48432	901,64	64692,5	287
288	82944	23887872	16,9706	6,6039	2,45939	3,47222	904,78	65144,1	288
289	83521	24137569	17,0000	6,6115	2,46090	3,46021	907,92	65597,2	289
290	84100	24389000	17,0294	6,6191	2,46240	3,44828	911,06	66052,0	290
291	84681	24642171	17,0587	6,6267	2,46389	3,43643	914,20	66508,3	291
292	85264	24897088	17,0880	6,6343	2,46538	3,42466	917,35	66966,2	292
293	85849	25153757	17,1172	6,6419	2,46687	3,41297	920,49	67425,6	293
294	86436	25412184	17,1464	6,6494	2,46835	3,40136	923,63	67886,7	294
295	87025	25672375	17,1756	6,6569	2,46982	3,38983	926,77	68349,3	295
296	87616	25934336	17,2047	6,6644	2,47129	3,37838	929,91	68813,4	296
297	88209	26198073	17,2337	6,6719	2,47276	3,36700	933,05	69279,2	297
298	88804	26463592	17,2627	6,6794	2,47422	3,35570	936,19	69746,5	298
299	89401	26730899	17,2916	6,6869	2,47567	3,34448	939,34	70215,4	299
300	90000	27000000	17,3205	6,6943	2,47712	3,33333	942,48	70685,8	300

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
300	90000	27000000	17,3205	6,6943	2,47712	3,33333	942,48	70685,8	300
301	90601	27270901	17,3494	6,7018	2,47857	3,32226	945,62	71157,9	301
302	91204	27543608	17,3781	6,7092	2,48001	3,31126	948,76	71631,5	302
303	91809	27818127	17,4069	6,7166	2,48144	3,30033	951,90	72106,6	303
304	92416	28094464	17,4356	6,7240	2,48287	3,28947	955,04	72583,4	304
305	93025	28372625	17,4642	6,7313	2,48430	3,27869	958,19	73061,7	305
306	93636	28652616	17,4929	6,7387	2,48572	3,26797	961,33	73541,5	306
307	94249	28934443	17,5214	6,7460	2,48714	3,25733	964,47	74023,0	307
308	94864	29218112	17,5499	6,7533	2,48855	3,24675	967,61	74506,0	308
309	95481	29503629	17,5784	6,7606	2,48996	3,23625	970,75	74990,6	309
310	96100	29791000	17,6068	6,7679	2,49136	3,22581	973,89	75476,8	310
311	96721	30080231	17,6352	6,7752	2,49276	3,21543	977,04	75964,5	311
312	97344	30371328	17,6635	6,7824	2,49415	3,20513	980,18	76453,8	312
313	97969	30664297	17,6918	6,7897	2,49554	3,19489	983,32	76944,7	313
314	98596	30959144	17,7200	6,7969	2,49693	3,18471	986,46	77437,1	314
315	99225	31255875	17,7482	6,8041	2,49831	3,17460	989,60	77931,1	315
316	99856	31554496	17,7764	6,8113	2,49969	3,16456	992,74	78426,7	316
317	100489	31855013	17,8045	6,8185	2,50106	3,15457	995,88	78923,9	317
318	101124	32157432	17,8326	6,8256	2,50243	3,14465	999,03	79422,6	318
319	101761	32461759	17,8606	6,8328	2,50379	3,13480	1002,2	79922,9	319
320	102400	32768000	17,8885	6,8399	2,50515	3,12500	1005,3	80424,8	320
321	103041	33076161	17,9165	6,8470	2,50651	3,11526	1008,5	80928,2	321
322	103684	33386248	17,9444	6,8541	2,50786	3,10559	1011,6	81433,2	322
323	104329	33698267	17,9722	6,8612	2,50920	3,09598	1014,7	81939,8	323
324	104976	34012224	18,0000	6,8683	2,51055	3,08642	1017,9	82448,0	324
325	105625	34328125	18,0278	6,8753	2,51188	3,07692	1021,0	82957,7	325
326	106276	34645976	18,0555	6,8824	2,51322	3,06748	1024,2	83469,0	326
327	106929	34965783	18,0831	6,8894	2,51455	3,05810	1027,3	83981,8	327
328	107584	35287552	18,1108	6,8964	2,51587	3,04878	1030,4	84496,3	328
329	108241	35611289	18,1384	6,9034	2,51720	3,03951	1033,6	85012,3	329
330	108900	35937000	18,1659	6,9104	2,51851	3,03030	1036,7	85529,9	330
331	109561	36264691	18,1934	6,9174	2,51983	3,02115	1039,9	86049,0	331
332	110224	36594368	18,2209	6,9244	2,52114	3,01205	1043,0	86569,7	332
333	110889	36926037	18,2483	6,9313	2,52244	3,00300	1046,2	87092,0	333
334	111556	37259704	18,2757	6,9382	2,52375	2,99401	1049,3	87615,9	334
335	112225	37595375	18,3030	6,9451	2,52504	2,98507	1052,4	88141,3	335
336	112896	37933056	18,3303	6,9521	2,52634	2,97619	1055,6	88668,3	336
337	113569	38272753	18,3576	6,9589	2,52763	2,96736	1058,7	89196,9	337
338	114244	38614472	18,3848	6,9658	2,52892	2,95858	1061,9	89727,0	338
339	114921	38958219	18,4120	6,9727	2,53020	2,94985	1065,0	90258,7	339
340	115600	39304000	18,4391	6,9795	2,53148	2,94118	1068,1	90792,0	340
341	116281	39651821	18,4662	6,9864	2,53275	2,93255	1071,3	91326,9	341
342	116964	40001688	18,4932	6,9932	2,53403	2,92398	1074,4	91863,3	342
343	117649	40353607	18,5203	7,0000	2,53529	2,91545	1077,6	92401,3	343
344	118336	40707584	18,5472	7,0068	2,53656	2,90698	1080,7	92940,9	344
345	119025	41063625	18,5742	7,0136	2,53782	2,89855	1083,8	93482,0	345
346	119716	41421736	18,6011	7,0203	2,53908	2,89017	1087,0	94024,7	346
347	120409	41781923	18,6279	7,0271	2,54033	2,88184	1090,1	94569,0	347
348	121104	42144192	18,6548	7,0338	2,54158	2,87356	1093,3	95114,9	348
349	121801	42508549	18,6815	7,0406	2,54283	2,86533	1096,4	95662,3	349
350	122500	42875000	18,7083	7,0473	2,54407	2,85714	1099,6	96211,3	350

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000\cdot\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
350	122500	42875000	18,7083	7,0473	2,54407	2,85714	1099,6	96211,3	350
351	123201	43243551	18,7350	7,0540	2,54531	2,84900	1102,7	96761,8	351
352	123904	43614208	18,7617	7,0607	2,54654	2,84091	1105,8	97314,0	352
353	124609	43986977	18,7883	7,0674	2,54777	2,83286	1109,0	97867,7	353
354	125316	44361864	18,8149	7,0740	2,54900	2,82486	1112,1	98423,0	354
355	126025	44738875	18,8414	7,0807	2,55023	2,81690	1115,3	98979,8	355
356	126736	45118016	18,8680	7,0873	2,55145	2,80899	1118,4	99538,2	356
357	127449	45499293	18,8944	7,0940	2,55267	2,80112	1121,5	100098	357
358	128164	45882712	18,9209	7,1006	2,55388	2,79330	1124,7	100660	358
359	128881	46268279	18,9473	7,1072	2,55509	2,78552	1127,8	101223	359
360	129600	46656000	18,9737	7,1138	2,55630	2,77778	1131,0	101788	360
361	130321	47045881	19,0000	7,1204	2,55751	2,77008	1134,1	102354	361
362	131044	47437928	19,0263	7,1269	2,55871	2,76243	1137,3	102922	362
363	131769	47832147	19,0526	7,1335	2,55991	2,75482	1140,4	103491	363
364	132496	48228544	19,0788	7,1400	2,56110	2,74725	1143,5	104062	364
365	133225	48627125	19,1050	7,1466	2,56229	2,73973	1146,7	104635	365
366	133956	49027896	19,1311	7,1531	2,56348	2,73224	1149,8	105209	366
367	134689	49430863	19,1572	7,1596	2,56467	2,72480	1153,0	105785	367
368	135424	49836032	19,1833	7,1661	2,56585	2,71739	1156,1	106362	368
369	136161	50243409	19,2094	7,1726	2,56703	2,71003	1159,2	106941	369
370	136900	50653000	19,2354	7,1791	2,56820	2,70270	1162,4	107521	370
371	137641	51064811	19,2614	7,1855	2,56937	2,69542	1165,5	108103	371
372	138384	51478848	19,2873	7,1920	2,57054	2,68817	1168,7	108687	372
373	139129	51895117	19,3132	7,1984	2,57171	2,68097	1171,8	109272	373
374	139876	52313624	19,3391	7,2048	2,57287	2,67380	1175,0	109858	374
375	140625	52734375	19,3649	7,2112	2,57403	2,66667	1178,1	110447	375
376	141376	53157376	19,3907	7,2177	2,57519	2,65957	1181,2	111036	376
377	142129	53582633	19,4165	7,2240	2,57634	2,65252	1184,4	111628	377
378	142884	54010152	19,4422	7,2304	2,57749	2,64550	1187,5	112221	378
379	143641	54439939	19,4679	7,2368	2,57864	2,63852	1190,7	112815	379
380	144400	54872000	19,4936	7,2432	2,57978	2,63158	1193,8	113411	380
381	145161	55306341	19,5192	7,2495	2,58092	2,62467	1196,9	114009	381
382	145924	55742968	19,5448	7,2558	2,58206	2,61780	1200,1	114608	382
383	146689	56181887	19,5704	7,2622	2,58320	2,61097	1203,2	115209	383
384	147456	56623104	19,5959	7,2685	2,58433	2,60417	1206,4	115812	384
385	148225	57066625	19,6214	7,2748	2,58546	2,59740	1209,5	116416	385
386	148996	57512456	19,6469	7,2811	2,58659	2,59067	1212,7	117021	386
387	149769	57960603	19,6723	7,2874	2,58771	2,58398	1215,8	117628	387
388	150544	58411072	19,6977	7,2936	2,58883	2,57732	1218,9	118237	388
389	151321	58863869	19,7231	7,2999	2,58995	2,57069	1222,1	118847	389
390	152100	59319000	19,7484	7,3061	2,59106	2,56410	1225,2	119459	390
391	152881	59776471	19,7737	7,3124	2,59218	2,55754	1228,4	120072	391
392	153664	60236288	19,7990	7,3186	2,59329	2,55102	1231,5	120687	392
393	154449	60698457	19,8242	7,3248	2,59439	2,54453	1234,6	121304	393
394	155236	61162984	19,8494	7,3310	2,59550	2,53807	1237,8	121922	394
395	156025	61629875	19,8746	7,3372	2,59660	2,53165	1240,9	122542	395
396	156816	62099136	19,8997	7,3434	2,59770	2,52525	1244,1	123163	396
397	157609	62570773	19,9249	7,3496	2,59879	2,51889	1247,2	123786	397
398	158404	63044792	19,9499	7,3558	2,59988	2,51256	1250,4	124410	398
399	159201	63521199	19,9750	7,3619	2,60097	2,50627	1253,5	125036	399
400	160000	64000000	20,0000	7,3681	2,60206	2,50000	1256,6	125664	400

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
400	160000	6;000000	20,0000	7,3681	2,60206	2,50000	1256,6	125664	400
401	160801	64481201	20,0250	7,3742	2,60314	2,49377	1259,8	126293	401
402	161604	64964808	20,0499	7,3803	2,60423	2,48756	1262,9	126923	402
403	162409	65450827	20,0749	7,3864	2,60531	2,48139	1266,1	127556	403
404	163216	65939264	20,0998	7,3925	2,60638	2,47525	1269,2	128190	404
405	164025	66430125	20,1246	7,3986	2,60746	2,46914	1272,3	128825	405
406	164836	66923416	20,1494	7,4047	2,60853	2,46305	1275,5	129462	406
407	165649	67419143	20,1742	7,4108	2,60959	2,45700	1278,6	130100	407
408	166464	67917312	20,1990	7,4169	2,61066	2,45098	1281,8	130741	408
409	167281	68417929	20,2237	7,4229	2,61172	2,44499	1284,9	131382	409
410	168100	68921000	20,2485	7,4290	2,61278	2,43902	1288,1	132025	410
411	168921	69426531	20,2731	7,4350	2,61384	2,43309	1291,2	132670	411
412	169744	69934528	20,2978	7,4410	2,61490	2,42718	1294,3	133317	412
413	170569	70444997	20,3224	7,4470	2,61595	2,42131	1297,5	133965	413
414	171396	70957944	20,3470	7,4530	2,61700	2,41546	1300,6	134614	414
415	172225	71473375	20,3715	7,4590	2,61805	2,40964	1303,8	135265	415
416	173056	71991296	20,3961	7,4650	2,61909	2,40385	1306,9	135918	416
417	173889	72511713	20,4206	7,4710	2,62014	2,39808	1310,0	136572	417
418	174724	73034632	20,4450	7,4770	2,62118	2,39234	1313,2	137228	418
419	175561	73560059	20,4695	7,4829	2,62221	2,38663	1316,3	137885	419
420	176400	74088000	20,4939	7,4889	2,62325	2,38095	1319,5	138544	420
421	177241	74618461	20,5183	7,4948	2,62428	2,37530	1322,6	139205	421
422	178084	75151448	20,5426	7,5007	2,62531	2,36967	1325,8	139867	422
423	178929	75686967	20,5670	7,5067	2,62634	2,36407	1328,9	140531	423
424	179776	76225024	20,5913	7,5126	2,62737	2,35849	1332,0	141196	424
425	180625	76765625	20,6155	7,5185	2,62839	2,35294	1335,2	141863	425
426	181476	77308776	20,6398	7,5244	2,62941	2,34742	1338,3	142531	426
427	182329	77854483	20,6640	7,5302	2,63043	2,34192	1341,5	143201	427
428	183184	78402752	20,6882	7,5361	2,63144	2,33645	1344,6	143872	428
429	184041	78953589	20,7123	7,5420	2,63246	2,33100	1347,7	144545	429
430	184900	79507000	20,7364	7,5478	2,63347	2,32558	1350,9	145220	430
431	185761	80062991	20,7605	7,5537	2,63448	2,32019	1354,0	145896	431
432	186624	80621568	20,7846	7,5595	2,63548	2,31481	1357,2	146574	432
433	187489	81182737	20,8087	7,5654	2,63649	2,30947	1360,3	147254	433
434	188356	81746504	20,8327	7,5712	2,63749	2,30415	1363,5	147934	434
435	189225	82312875	20,8567	7,5770	2,63849	2,29885	1366,6	148617	435
436	190096	82881856	20,8806	7,5828	2,63949	2,29358	1369,7	149301	436
437	190969	83453453	20,9045	7,5886	2,64048	2,28833	1372,9	149987	437
438	191844	84027672	20,9284	7,5944	2,64147	2,28311	1376,0	150674	438
439	192721	84604519	20,9523	7,6001	2,64246	2,27790	1379,2	151363	439
440	193600	85184000	20,9762	7,6059	2,64345	2,27273	1382,3	152053	440
441	194481	85766121	21,0000	7,6117	2,64444	2,26757	1385,4	152745	441
442	195364	86350888	21,0238	7,6174	2,64542	2,26244	1388,6	153439	442
443	196249	86938307	21,0476	7,6232	2,64640	2,25734	1391,7	154134	443
444	197136	87528384	21,0713	7,6289	2,64738	2,25225	1394,9	154830	444
445	198025	88121125	21,0950	7,6346	2,64836	2,24719	1398,0	155528	445
446	198916	88716536	21,1187	7,6403	2,64933	2,24215	1401,2	156228	446
447	199809	89314623	21,1424	7,6460	2,65031	2,23714	1404,3	156930	447
448	200704	89915392	21,1660	7,6517	2,65128	2,23214	1407,4	157633	448
449	201601	90518849	21,1896	7,6574	2,65225	2.22717	1410,6	158337	449
450	202500	91125000	21,2132	7,6631	2,65321	2,22222	1413,7	159043	450

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
450	202500	91125000	21,2132	7,6631	2,65321	2,22222	1413,7	159043	450
451	203401	91733851	21,2368	7,6688	2,65418	2,21729	1416,9	159751	451
452	204304	92345408	21,2603	7,6744	2,65514	2,21239	1420,0	160460	452
453	205209	92959677	21,2838	7,6801	2,65610	2,20751	1423,1	161171	453
454	206116	93576664	21,3073	7,6857	2,65706	2,20264	1426,3	161883	454
455	207025	94196375	21,3307	7,6914	2,65801	2,19780	1429,4	162597	455
456	207936	94818816	21,3542	7,6970	2,65896	2,19298	1432,6	163313	456
457	208849	95443993	21,3776	7,7026	2,65992	2,18818	1435,7	164030	457
458	209764	96071912	21,4009	7,7082	2,66087	2,18341	1438,8	164748	458
459	210681	96702579	21,4243	7,7138	2,66181	2,17865	1442,0	165468	459
460	211600	97336000	21,4476	7,7194	2,66276	2,17391	1445,1	166190	460
461	212521	97972181	21,4709	7,7250	2,66370	2,16920	1448,3	166914	461
462	213444	98611128	21,4942	7,7306	2,66464	2,16450	1451,4	167639	462
463	214369	99252847	21,5174	7,7362	2,66558	2,15983	1454,6	168365	463
464	215296	99897344	21,5407	7,7418	2,66652	2,15517	1457,7	169093	464
465	216225	100544625	21,5639	7,7473	2,66745	2,15054	1460,8	169823	465
466	217156	101194696	21,5870	7,7529	2,66839	2,14592	1464,0	170554	466
467	218089	101847563	21,6102	7,7584	2,66932	2,14133	1467,1	171287	467
468	219024	102503232	21,6333	7,7639	2,67025	2,13675	1470,3	172021	468
469	219961	103161709	21,6564	7,7695	2,67117	2,13220	1473,4	172757	469
470	220900	103823000	21,6795	7,7750	2,67210	2,12766	1476,5	173494	470
471	221841	104487111	21,7025	7,7805	2,67302	2,12314	1479,7	174234	471
472	222784	105154048	21,7256	7,7860	2,67394	2,11864	1482,8	174974	472
473	223729	105823817	21,7486	7,7915	2,67486	2,11416	1486,0	175716	473
474	224676	106496424	21,7715	7,7970	2,67578	2,10970	1489,1	176460	474
475	225625	107171875	21,7945	7,8025	2,67669	2,10526	1492,3	177205	475
476	226576	107850176	21,8174	7,8079	2,67761	2,10084	1495,4	177952	476
477	227529	108531333	21,8403	7,8134	2,67852	2,09644	1498,5	178701	477
478	228484	109215352	21,8632	7,8188	2,67943	2,09205	1501,7	179451	478
479	229441	109902239	21,8861	7,8243	2,68034	2,08768	1504,8	180203	479
480	230400	110592000	21,9089	7,8297	2,68124	2,08333	1508,0	180956	480
481	231361	111284641	21,9317	7,8352	2,68215	2,07900	1511,1	181711	481
482	232324	111980168	21,9545	7,8406	2,68305	2,07469	1514,2	182467	482
483	233289	112678587	21,9773	7,8460	2,68395	2,07039	1517,4	183225	483
484	234256	113379904	22,0000	7,8514	2,68485	2,06612	1520,5	183984	484
485	235225	114084125	22,0227	7,8568	2,68574	2,06186	1523,7	184745	485
486	236196	114791256	22,0454	7,8622	2,68664	2,05761	1526,8	185508	486
487	237169	115501303	22,0681	7,8676	2,68753	2,05339	1530,0	186272	487
488	238144	116214272	22,0907	7,8730	2,68842	2,04918	1533,1	187038	488
489	239121	116930169	22,1133	7,8784	2,68931	2,04499	1536,2	187805	489
490	240100	117649000	22,1359	7,8837	2,69020	2,04082	1539,4	188574	490
491	241081	118370771	22,1585	7,8891	2,69108	2,03666	1542,5	189345	491
492	242064	119095488	22,1811	7,8944	2,69197	2,03252	1545,7	190117	492
493	243049	119823157	22,2036	7,8998	2,69285	2,02840	1548,8	190890	493
494	244036	120553784	22,2261	7,9051	2,69373	2,02429	1551,9	191665	494
495	245025	121287375	22,2486	7,9105	2,69461	2,02020	1555,1	192442	495
496	246016	122023936	22,2711	7,9158	2,69548	2,01613	1558,2	193221	496
497	247009	122763473	22,2935	7,9211	2,69636	2,01207	1561,4	194000	497
498	248004	123505992	22,3159	7,9264	2,69723	2,00803	1564,5	194782	498
499	249001	124251499	22,3383	7,9317	2,69810	2,00401	1567,7	195565	499
500	250000	125000000	22,3607	7,9370	2,69897	2,00000	1570,8	196350	500

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
500	250000	125000000	22,3607	7,9370	2,69897	2,00000	1570,8	196350	500
501	251001	125751501	22,3830	7,9423	2,69984	1,99601	1573,9	197136	501
502	252004	126506008	22,4054	7,9476	2,70070	1,99203	1577,1	197923	502
503	253009	127263527	22,4277	7,9528	2,70157	1,98807	1580,2	198713	503
504	254016	128024064	22,4499	7,9581	2,70243	1,98413	1583,4	199504	504
505	255025	128787625	22,4722	7,9634	2,70329	1,98020	1586,5	200296	505
506	256036	129554216	22,4944	7,9686	2,70415	1,97628	1589,6	201090	506
507	257049	130323843	22,5167	7,9739	2,70501	1,97239	1592,8	201886	507
508	258064	131096512	22,5389	7,9791	2,70586	1,96850	1595,9	202683	508
509	259081	131872229	22,5610	7,9843	2,70672	1,96464	1599,1	203482	509
510	260100	132651000	22,5832	7,9896	2,70757	1,96078	1602,2	204282	510
511	261121	133432831	22,6053	7,9948	2,70842	1,95695	1605,4	205084	511
512	262144	134217728	22,6274	8,0000	2,70927	1,95312	1608,5	205887	512
513	263169	135005697	22,6495	8,0052	2,71012	1,94932	1611,6	206692	513
514	264196	135796744	22,6716	8,0104	2,71096	1,94553	1614,8	207499	514
515	265225	136590875	22,6936	8,0156	2,71181	1,94175	1617,9	208307	515
516	266256	137388096	22,7156	8,0208	2,71265	1,93798	1621,1	209117	516
517	267289	138188413	22,7376	8,0260	2,71349	1,93424	1624,2	209928	517
518	268324	138991832	22,7596	8,0311	2,71433	1,93050	1627,3	210741	518
519	269361	139798359	22,7816	8,0363	2,71517	1,92678	1630,5	211556	519
520	270400	140608000	22,8035	8,0415	2,71600	1,92308	1633,6	212372	520
521	271441	141420761	22,8254	8,0466	2,71684	1,91939	1636,8	213189	521
522	272484	142236648	22,8473	8,0517	2,71767	1,91571	1639,9	214008	522
523	273529	143055667	22,8692	8,0569	2,71850	1,91205	1643,1	214829	523
524	274576	143877824	22,8910	8,0620	2,71933	1,90840	1646,2	215651	524
525	275625	144703125	22,9129	8,0671	2,72016	1,90476	1649,3	216475	525
526	276676	145531576	22,9347	8,0723	2,72099	1,90114	1652,5	217301	526
527	277729	146363182	22,9565	8,0774	2,72181	1,89753	1655,6	218128	527
528	278784	147197952	22,9783	8,0825	2,72263	1,89394	1658,8	218956	528
529	279841	148035889	23,0000	8,0876	2,72346	1,89036	1661,9	219787	529
530	280900	148877000	23,0217	8,0927	2,72428	1,88679	1665,0	220618	530
531	281961	149721291	23,0434	8,0978	2,72509	1,88324	1668,2	221452	531
532	283024	150568768	23,0651	8,1028	2,72591	1,87970	1671,3	222287	532
533	284089	151419437	23,0868	8,1079	2,72673	1,87617	1674,5	223123	533
534	285156	152273304	23,1084	8,1130	2,72754	1,87266	1677,6	223961	534
535	286225	153130375	23,1301	8,1180	2,72835	1,86916	1680,8	224801	535
536	287296	153990656	23,1517	8,1231	2,72916	1,86567	1683,9	225642	536
537	288369	154854153	23,1733	8,1281	2,72997	1,86220	1687,0	226484	537
538	289444	155720872	23,1948	8,1332	2,73078	1,85874	1690,2	227329	538
539	290521	156590819	23,2164	8,1382	2,73159	1,85529	1693,3	228175	539
540	291600	157464000	23,2379	8,1433	2,73239	1,85185	1696,5	229022	540
541	292681	158340421	23,2594	8,1483	2,73320	1,84843	1699,6	229871	541
542	293764	159220088	23,2809	8,1533	2,73400	1,84502	1702,7	230722	542
543	294849	160103007	23,3024	8,1583	2,73480	1,84162	1705,9	231574	543
544	295936	160989184	23,3238	8,1633	2,73560	1,83824	1709,0	232428	544
545	297025	161878625	23,3452	8,1683	2,73640	1,83486	1712,2	233283	545
546	298116	162771336	23,3666	8,1733	2,73719	1,83150	1715,3	234140	546
547	299209	163667323	23,3880	8,1783	2,73799	1,82815	1718,5	234998	547
548	300304	164566592	23,4094	8,1833	2,73878	1,82482	1721,6	235858	548
549	301401	165469149	23,4307	8,1882	2,73957	1,82149	1724,7	236720	549
550	302500	166375000	23,4521	8,1932	2,74036	1,81818	1727,9	237583	550

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
550	302500	166375000	23,4521	8,1932	2,74036	1,81818	1727,9	237583	550
551	303601	167284151	23,4734	8,1982	2,74115	1,81488	1731,0	238448	551
552	304704	168196608	23,4947	8,2031	2,74194	1,81159	1734,2	239314	552
553	305809	169112377	23,5160	8,2081	2,74273	1,80832	1737,3	240182	553
554	306916	170031464	23,5372	8,2130	2,74351	1,80505	1740,4	241051	554
555	308025	170953875	23,5584	8,2180	2,74429	1,80180	1743,6	241922	555
556	309136	171879616	23,5797	8,2229	2,74507	1,79856	1746,7	242795	556
557	310249	172808693	23,6008	8,2278	2,74586	1,79533	1749,9	243669	557
558	311364	173741112	23,6220	8,2327	2,74663	1,79211	1753,0	244545	558
559	312481	174676879	23,6432	8,2377	2,74741	1,78891	1756,2	245422	559
560	313600	175616000	23,6643	8,2426	2,74819	1,78571	1759,3	246301	560
561	314721	176558481	23,6854	8,2475	2,74896	1,78253	1762,4	247181	561
562	315844	177504328	23,7065	8,2524	2,74974	1,77936	1765.6	248063	562
563	316969	178453547	23,7276	8,2573	2,75051	1,77620	1768,7	248947	563
564	318096	179406144	23,7487	8,2621	2,75128	1,77305	1771,9	249832	564
565	319225	180362125	23,7697	8,2670	2,75205	1,76991	1775,0	250719	565
566	320356	181321496	23,7908	8,2719	2,75282	1,76678	1778,1	251607	566
567	321489	182284263	23,8118	8,2768	2,75358	1,76367	1781,3	252497	567
568	322624	183250432	23,8328	8,2816	2,75435	1,76056	1784,4	253388	568
569	323761	184220009	23,8537	8,2865	2,75511	1,75747	1787,6	254281	569
570	324900	185193000	23,8747	8,2913	2,75587	1,75439	1790,7	255176	570
571	326041	186169411	23,8956	8,2962	2,75664	1,75131	1793.8	256072	571
572	327184	187149248	23,9165	8,3010	2,75740	1,74825	1797,0	256970	572
573	328329	188132517	23,9374	8,3059	2,75815	1,74520	1800,1	257869	573
574	329476	189119224	23,9583	8,3107	2,75891	1,74216	1803,3	258770	574
575	330625	190109375	23.9792	8,3155	2,75967	1,73913	1806,4	259672	575
576	331776	191102976	24,0000	8,3203	2,76042	1,73611	1809,6	260576	576
577	332929	192100033	24,0208	8,3251	2,76118	1.73310	1812,7	261482	577
578	334084	193100552	24,0416	8,3300	2,76193	1,73010	1815,8	262389	578
579	335241	194104539	24,0624	8,3348	2,76268	1,72712	1819,0	263298	579
580	336400	195112000	24,0832	8,3396	2,76343	1,72414	1822,1	264208	580
581	337561	196122941	24,1039	8,3443	2,76418	1,72117	1825,3	265120	581
582	338724	197137368	24,1247	8,3491	2,76492	1,71821	1828,4	266033	582
583	339889	198155287	24,1454	8,3539	2,76567	1,71527	1831,6	266948	583
584	341056	199176704	24,1661	8,3587	2,76641	1,71233	1834,7	267865	584
585	342225	200201625	24,1868	8.3634	2,76716	1.70940	1837,8	268783	585
586	343396	201230056	24,2074	8,3682	2,76790	1,70648	1841,0	269703	586
587	344569	202262003	24,2281	8,3730	2,76864	1,70358	1844,1	270624	587
588	345744	203297472	24,2487	8,3777	2,76938	1,70068	1847,3	271547	588
589	346921	204336469	24,2693	8,3825	2,77012	1,69779	1850,4	272471	589
590	348100	205379000	24,2899	8.3872	2,77085	1,69492	1853,5	273397	590
591	349281	206425071	24,3105	8,3919	2,77159	1.69205	1856,7	274325	591
592	350464	207474688	24,3311	8.3967	2,77232	1,68919	1859,8	275254	592
593	351649	208527857	24,3516	8,4014	2,77305	1,68634	1863,0	276184	593
594	352836	209584584	24,3721	8,4061	2,77379	1,68350	1866,1	277117	594
595	354025	210644875	24,3926	8,4108	2,77452	1,68067	1869,2	278051	595
596	355216	211708736	24,4131	8,4155	2,77525	1,67785	1872,4	278986	596
597	356409	212776173	24,4336	8.4202	2,77597	1,67504	1875,5	279923	597
598	357604	213847192	24,4540	8,4249	2,77670	1,67224	1878,8	280862	598
599	358801	214921799	24,4745	8,4296	2,77743	1,66945	1881,8	281802	599
600	360000	216000000	24,4949	8,4343	2,77815	1,66667	1885.0	282743	600

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
600	360000	216000000	24,4949	8,4343	2,77815	1,66667	1885,0	282743	600
601	361201	217081801	24,5153	8,4390	2,77887	1,66389	1888,1	283687	601
602	362404	218167208	24,5357	8,4437	2,77960	1,66113	1891,2	284631	602
603	363609	219256227	24,5561	8,4484	2,78032	1,65837	1894,4	285578	603
604	364816	220348864	24,5764	8,4530	2,78104	1,65563	1897,5	286526	604
605	366025	221445125	24,5967	8,4577	2,78176	1,65289	1900,7	287475	605
606	367236	222545016	24,6171	8,4623	2,78247	1,65017	1903,8	288426	606
607	368449	223648543	24,6374	8,4670	2,78319	1,64745	1906,9	289379	607
608	369664	224755712	24,6577	8,4716	2,78390	1,64474	1910,1	290333	608
609	370881	225866529	24,6779	8,4763	2,78462	1,64204	1913,2	291289	609
610	372100	226981000	24,6982	8,4809	2,78533	1,63934	1916,4	292247	610
611	373321	228099131	24,7184	8,4856	2,78604	1,63666	1919,5	293206	611
612	374544	229220928	24,7386	8,4902	2,78675	1,63399	1922,7	294166	612
613	375769	230346397	24,7588	8,4948	2,78746	1,63132	1925,8	295128	613
614	376996	231475544	24,7790	8,4994	2,78817	1,62866	1928,9	296092	614
615	378225	232608375	24,7992	8,5040	2,78888	1,62602	1932,1	297057	615
616	379456	233744896	24,8193	8,5086	2,78958	1,62338	1935,2	298024	616
617	380689	234885113	24,8395	8,5132	2,79029	1,62075	1938,4	298992	617
618	381924	236029032	24,8596	8,5178	2,79099	1,61812	1941,5	299962	618
619	383161	237176659	24,8797	8,5224	2,79169	1,61551	1944,6	300934	619
620	384400	238328000	24,8998	8,5270	2,79239	1,61290	1947,8	301907	620
621	385641	239483061	24,9199	8,5316	2,79309	1,61031	1950,9	302882	621
622	386884	240641848	24,9399	8,5362	2,79379	1,60772	1954,1	303858	622
623	388129	241804367	24,9600	8,5408	2,79449	1,60514	1957,2	304836	623
624	389376	242970624	24,9800	8,5453	2,79518	1,60256	1960,4	305815	624
625	390625	244140625	25,0000	8,5499	2,79588	1,60000	1963,5	306796	625
626	391876	245314376	25,0200	8,5544	2,79657	1,59744	1966,6	307779	626
627	393129	246491883	25,0400	8,5590	2,79727	1,59490	1969,8	308763	627
628	394384	247673152	25,0599	8,5635	2,79796	1,59236	1972,9	309748	628
629	395641	248858189	25,0799	8,5681	2,79865	1,58983	1976,1	310736	629
630	396900	250047000	25,0998	8,5726	2,79934	1,58730	1979,2	311725	630
631	398161	251239591	25,1197	8,5772	2,80003	1,58479	1982,3	312715	631
632	399424	252435968	25,1396	8,5817	2,80072	1,58228	1985,5	313707	632
633	400689	253636137	25,1595	8,5862	2,80140	1,57978	1988,6	314700	633
634	401956	254840104	25,1794	8,5907	2,80209	1,57729	1991,8	315696	634
635	403225	256047875	25,1992	8,5952	2,80277	1,57480	1994,9	316692	635
636	404496	257259456	25,2190	8,5997	2,80346	1,57233	1998,1	317690	636
637	405769	258474853	25,2389	8,6043	2,80414	1,56986	2001,2	318690	637
638	407044	259694072	25,2587	8,6088	2,80482	1,56740	2004,3	319692	638
639	408321	260917119	25,2784	8,6132	2,80550	1,56495	2007,5	320695	639
640	409600	262144000	25,2982	8,6177	2,80618	1,56250	2010,6	321699	640
641	410881	263374721	25,3180	8,6222	2,80686	1,56006	2013,8	322705	641
642	412164	264609288	25,3377	8,6267	2,80754	1,55763	2016,9	323713	642
643	413449	265847707	25,3574	8,6312	2,80821	1,55521	2020,0	324722	643
644	414736	267089984	25,3772	8,6357	2,80889	1,55280	2023,2	325733	644
645	416025	268336125	25,3969	8,6401	2,80956	1,55039	2026,3	326745	645
646	417316	269586136	25,4165	8,6446	2,81023	1,54799	2029,5	327759	646
647	418609	270840023	25,4362	8,6490	2,81090	1,54560	2032,6	328775	647
648	419904	272097792	25,4558	8,6535	2,81158	1,54321	2035,8	329792	648
649	421201	273359449	25,4755	8,6579	2,81224	1,54083	2038,9	330810	649
650	422500	274625000	25,4951	8,6624	2,81291	1,53846	2042,0	331831	650

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
650	422500	274625000	25,4951	8,6624	2,81291	1,53846	2042,0	331831	650
651	423801	275894451	25,5147	8,6668	2,81358	1,53610	2045,2	332853	651
652	425104	277167808	25,5343	8,6713	2,81425	1,53374	2048,3	333876	652
653	426409	278445077	25,5539	8,6757	2,81491	1,53139	2051,5	334901	653
654	427716	279726264	25,5734	8,6801	2,81558	1,52905	2054,6	335927	654
655	429025	281011375	25,5930	8,6845	2,81624	1,52672	2057,7	336955	655
656	430336	282300416	25,6125	8,6890	2,81690	1,52439	2060,9	337985	656
657	431649	283593393	25,6320	8,6934	2,81757	1,52207	2064,0	339016	657
658	432964	284890312	25,6515	8,6978	2,81823	1,51976	2067,2	340049	658
659	434281	286191179	25,6710	8,7022	2,81889	1,51745	2070,3	341084	659
660	435600	287496000	25,6905	8,7066	2,81954	1,51515	2073,5	342119	660
661	436921	288804781	25,7099	8,7110	2.82020	1,51286	2076,6	343157	661
662	438244	290117528	25.7294	8,7154	2,82086	1,51057	2079,7	344196	662
663	439569	291434247	25,7488	8.7198	2.82151	1.50830	2082,9	345237	663
664	440896	292754944	25,7682	8,7241	2,82217	1,50602	2086,0	346279	664
665	442225	294079625	25,7876	8,7285	2,82282	1,50376	2089,2	347323	665
666	443556	295408296	25,8070	8,7329	2,82347	1,50150	2092,3	348368	666
667	444889	296740963	25,8263	8,7373	2,82413	1,49925	2095,4	349415	667
668	446224	298077632	25,8457	8,7416	2,82478	1,49701	2098,6	350464	668
669	447561	299418309	25.8650	8,7460	2,82543	1,49477	2101,7	351514	669
670	448900	300763000	25,8844	8,7503	2,82607	1,49254	2104,9	352565	670
671	450241	302111711	25,9037	8,7547	2,82672	1,49031	2108,0	353618	671
672	451584	303464448	25.9230	8.7590	2,82737	1,48810	2111,2	354673	672
673	452929	304821217	25.9422	8,7634	2,82802	1,48588	2114,3	355730	673
674	454276	306182024	25,9615	8,7677	2,82866	1,48368	2117,4	356788	674
675	455625	307546875	25 9808	8,7721	2,82930	1,48148	2120,6	357847	675
676	456976	308915776	26,0000	8,7764	2,82995	1,47929	2123,7	358908	676
677	458329	310288733	26,0192	8,7807	2,83059	1,47710	2126,9	359971	677
678	459684	311665752	26.0384	8,7850	2,83123	1,47493	2130,0	361035	678
679	461041	313046839	26.0576	8,7893	2.83187	1,47275	2133,1	362101	679
680	462400	314432000	26,0768	8,7937	2,83251	1,47059	2136,3	363168	680
681	463761	315821241	26,0960	8,7980	2,83315	1,46843	2139,4	364237	681
682	465124	317214568	26,1151	8,8023	2,83378	1,46628	2142,6	365308	682
683	466489	318611987	26,1343	8,8066	2,83442	1,46413	2145,7	366380	683
684	467856	320013504	26,1534	8,8109	2,83506	1,46199	2148,8	367453	684
685	469225	321419125	26,1725	8,8152	2,83569	1,45985	2152,0	368528	685
686	470596	322828856	26,1916	8,8194	2,83632	1,45773	2155,1	369605	686
687	471969	324242703	26,2107	8,8237	2,83696	1,45560	2158,3	370684	687
688	473344	325660672	26,2298	8,8280	2,83759	1,45349	2161,4	371764	688
689	474721	327082769	26.2488	8.8323	2,83822	1,45138	2164,6	372845	689
690	476100	328509000	26,2679	8,8366	2,83885	1,44928	2167,7	373928	690
691	477481	329939371	26,2869	8,8408	2,83948	1,44718	2170,8	375013	691
692	478864	331373888	26,3059	8,8451	2,84011	1,44509	2174,0	376099	692
693	480249	332812557	26,3249	8,8493	2,84073	1,44300	2177,1	377187	693
694	481636	334255384	26,3439	8,8536	2,84136	1,44092	2180,3	378276	694
695	483025	335702375	26.3629	8,8578	2,84198	1,43885	2183,4	379367	695
696	484416	337153536	26,3818	8,8621	2,84261	1,43678	2186,5	380459	696
697	485809	338608873	26,4008	8,8663	2,84323	1,43472	2189,7	381553	697
698	487204	340068392	26,4197	8,8706	2,84386	1,43266	2192,8	382649	698
699	488601	341532099	26,4386	8,8748	2.84448	1.43062	2196,0	383746	699
700	490000	343000000	26.4575	8.8790	2.84510	1,42857	2199,1	384845	700

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
700	490000	343000000	26,4575	8,8790	2,84510	1,42857	2199,1	384845	700
701	491401	344472101	26,4764	8.8833	2,84572	1,42653	2202,3	385945	701
702	492804	345948408	26,4953	8.8875	2,84634	1,42450	2205,4	387047	702
703	494209	347428927	26,5141	8,8917	2,84696	1,42248	2208,5	388151	703
704	495616	348913664	26,5330	8,8959	2,84757	1,42045	2211,7	389256	704
705	497025	350402625	26,5518	8,9001	2,84819	1,41844	2214,8	390363	705
706	498436	351895816	26.5707	8,9043	2,84880	1,41643	2218,0	391471	706
707	499849	353393243	26,5895	8,9085	2,84942	1,41443	2221,1	392580	707
708	501264	354894912	26,6083	8,9127	2,85003	1,41243	2224,2	393692	708
709	502681	356400829	26,6271	8,9169	2,85065	1,41044	2227,4	394805	709
710	504100	357911000	26,6458	8,9211	2,85126	1,40845	2230,5	395919	710
711	505521	359425431	26,6646	8,9253	2.85187	1,40647	2233,7	397035	711
712	506944	360944128	26,6833	8,9295	2,85248	1,40449	2236,8	398153	712
713	508369	362467097	26,7021	8,9337	2,85309	1,40252	2240,0	399272	713
714	509796	363994344	26,7208	8.9378	2,85370	1,40056	2243,1	400393	714
715	511225	365525875	26,7395	8,9420	2,85431	1,39860	2246,2	401515	715
716	512656	367061696	26,7582	8,9462	2,85491	1,39665	2249,4	402639	716
717	514089	368601813	26,7769	8.9503	2,85552	1,39470	2252,5	403765	717
718	515524	370146232	26,7955	8,9545	2,85612	1.39276	2255,7	404892	718
719	516961	371694959	26.8142	8,9587	2.85673	1,39082	2258,8	406020	719
720	518400	373248000	26.8328	8,9628	2,85733	1,38889	2261,9	407150	720
721	519841	374805361	26,8514	8,9670	2,85794	1,38696	2265,1	408282	721
722	521284	376367048	26,8701	8,9711	2,85854	1,38504	2268,2	409415	722
723	522729	377933067	26,8887	8,9752	2.85914	1,38313	2271,4	410550	723
724	524176	379503424	26.9072	8,9794	2,85974	1,38122	2274,5	411687	724
725	525625	381078125	26,9258	8,9835	2.86034	1,37931	2277,7	412825	725
726	527076	382657176	26.9444	8,9876	2,86094	1,37741	2280,8	413965	726
727	528529	384240583	26,9629	8,9918	2.86153	1,37552	2283,9	415106	727
728	529984	385828352	26,9815	8,9959	2,86213	1,37363	2287,1	416248	728
729	531441	387420489	27,0000	9,0000	2.86273	1,37174	2290,2	417393	729
730	532900	389017000	27,0185	9,0041	2,86332	1,36986	2293,4	418539	730
731	534361	390617891	27,0370	9,0082	2,86392	1,36799	2296,5	419686	731
732	535824	392223168	27,0555	9.0123	2.86451	1,36612	2299,6	420835	732
733	537289	393832837	27,0740	9,0164	2,86510	1,36426	2302,8	421986	733
734	538756	395446904	27,0924	9,0205	2.86570	1,36240	2305,9	423138	734
735	540225	397065375	27,1109	9,0246	2,86629	1,36054	2309,1	424293	735
736	541696	398688256	27,1293	9,0287	2,86688	1,35870	2312,2	425447	736
737	543169	400315553	27,1477	9,0328	2,86747	1,35685	2315,4	426604	737
738	544644	401947272	27,1662	9,0369	2.86806	1,35501	2318,5	427762	738
739	546121	403583419	27,1846	9,0410	2.86864	1.35318	2321.6	428922	739
740	547600	405224000	27,2029	9,0450	2,86923	1,35135	2324,8	430084	740
741	549081	406869021	27,2213	9.0491	2,86982	1,34953	2327,9	431247	741
742	550564	408518488	27.2397	9.0532	2,87040	1,34771	2331,1	432412	742
743	552049	410172407	27,2580	9,0572	2,87099	1,34590	2334,2	433578	743
744	553536	411830784	27,2764	9,0613	2,87157	1,34409	2337,3	434746	744
745	555025	413493625	27,2947	9,0654	2,87216	1,34228	2340,5	435916	745
746	556516	415160936	27,3130	9,0694	2,87274	1,34048	2343,6	437087	746
747	558009	416832723	27,3313	9,0735	2,87332	1,33869	2346,8	438259	747
748	559504	418508992	27,3496	9,0775	2,87390	1,33690	2349,9	439433	748
749	561001	420189749	27,3679	9,0816	2,87448	1,33511	2353,1	440609	749
750	562500	421875000	27,3861	9,0856	2,87506	1,33333	2356,2	441786	750

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
750	562500	421875000	27,3861	9,0856	2,87506	1,33333	2356,2	441786	750
751	564001	423564751	27,4044	9,0896	2,87564	1,33156	2359,3	442965	751
752	565504	425259008	27,4226	9,0937	2,87622	1,32979	2362,5	444146	752
753	567009	426957777	27,4408	9,0977	2,87679	1,32802	2365,6	445328	753
754	568516	428661064	27,4591	9,1017	2,87737	1,32626	2368,8	446511	754
755	570025	430368875	27,4773	9,1057	2,87795	1,32450	2371,9	447697	755
756	571536	432081216	27,4955	9,1098	2,87852	1,32275	2375,0	448883	756
757	573049	433798093	27,5136	9,1138	2,87910	1,32100	2378,2	450072	757
758	574564	435519512	27,5318	9,1178	2,87967	1,31926	2381,3	451262	758
759	576081	437245479	27,5500	9,1218	2,88024	1,31752	2384,5	452453	759
760	577600	438976000	27,5681	9,1258	2,88081	1,31579	2387,6	453646	760
761	579121	440711081	27,5862	9,1298	2,88138	1,31406	2390,8	454841	761
762	580644	442450728	27,6043	9,1338	2,88195	1,31234	2393,9	456037	762
763	582169	444194947	27,6225	9,1378	2,88252	1,31062	2397,0	457234	763
764	583696	445943744	27,6405	9,1418	2,88309	1,30890	2400,2	458434	764
765	585225	447697125	27,6586	9,1458	2,88366	1,30719	2403,3	459635	765
766	586756	449455096	27,6767	9,1498	2,88423	1,30548	2406,5	460837	766
767	588289	451217663	27,6948	9,1537	2,88480	1,30378	2409,6	462041	767
768	589824	452984832	27,7128	9,1577	2,88536	1,30208	2412,7	463247	768
769	591361	454756609	27,7308	9,1617	2,88593	1,30039	2415,9	464454	769
770	592900	456533000	27,7489	9,1657	2,88649	1,29870	2419,0	465663	770
771	594441	458314011	27,7669	9,1696	2,88705	1,29702	2422,2	466873	771
772	595984	460099648	27,7849	9,1736	2,88762	1,29534	2425,3	468085	772
773	597529	461889917	27,8029	9,1775	2,88818	1,29366	2428,5	469298	773
774	599076	463684824	27,8209	9,1815	2,88874	1,29199	2431,6	470513	774
775	600625	465484375	27,8388	9,1855	2,88930	1,29032	2434,7	471730	775
776	602176	467288576	27,8568	9,1894	2,88986	1,28866	2437,9	472948	776
777	603729	469097433	27,8747	9,1933	2,89042	1,28700	2441,0	474168	777
778	605284	470910952	27,8927	9,1973	2,89098	1,28535	2444,2	475389	778
779	606841	472729139	27,9106	9,2012	2,89154	1,28370	2447,3	476612	779
780	608400	474552000	27,9285	9,2052	2,89209	1,28205	2450,4	477836	780
781	609961	476379541	27,9464	9,2091	2,89265	1,28041	2453,6	479062	781
782	611524	478211768	27,9643	9,2130	2,89321	1,27877	2456,7	480290	782
783	613089	480048687	27,9821	9,2170	2,89376	1,27714	2459,9	481519	783
784	614656	481890304	28,0000	9,2209	2,89432	1,27551	2463,0	482750	784
785	616225	483736625	28,0179	9,2248	2,89487	1,27389	2466,2	483982	785
786	617796	485587656	28,0357	9,2287	2,89542	1,27226	2469,3	485216	786
787	619369	487443403	28,0535	9,2326	2,89597	1,27065	2472,4	486451	787
788	620944	489303872	28,0713	9,2365	2,89653	1,26904	2475,6	487688	788
789	622521	491169069	28,0891	9,2404	2,89708	1,26743	2478,7	488927	789
790	624100	493039000	28,1069	9,2443	2,89763	1,26582	2481,9	490167	790
791	625681	494913671	28,1247	9,2482	2,89818	1,26422	2485,0	491409	791
792	627264	496793088	28,1425	9,2521	2,89873	1,26263	2488,1	492652	792
793	628849	498677257	28,1603	9,2560	2,89927	1,26103	2491,3	493897	793
794	630436	500566184	28,1780	9,2599	2,89982	1,25945	2494,4	495143	794
795	632025	502459875	28,1957	9,2638	2,90037	1,25786	2497,6	496391	795
796	633616	504358336	28,2135	9,2677	2,90091	1,25628	2500,7	497641	796
797	635209	506261573	28,2312	9,2716	2,90146	1,25471	2503,8	498892	797
798	636804	508169592	28,2489	9,2754	2,90200	1,25313	2507,0	500145	798
799	638401	510082399	28,2666	9,2793	2,90255	1,25156	2510,1	501399	799
800	640000	512000000	28,2843	9,2832	2,90309	1,25000	2513,3	502655	800

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
800	640000	512000000	28,2843	9,2832	2,90309	1,25000	2513,3	502655	800
801	641601	513922401	28,3019	9,2870	2,90363	1,24844	2516,4	503912	801
802	643204	515849608	28,3196	9,2909	2,90417	1,24688	2519,6	505171	802
803	644809	517781627	28,3373	9,2948	2,90472	1,24533	2522,7	506432	803
804	646416	519718464	28,3549	9,2986	2,90526	1,24378	2525,8	507694	804
805	648025	521660125	28,3725	9,3025	2,90580	1,24224	2529,0	508958	805
806	649636	523606616	28,3901	9,3063	2,90634	1,24069	2532,1	510223	806
807	651249	525557943	28,4077	9,3102	2,90687	1,23916	2535,3	511490	807
808	652864	527514112	28,4253	9,3140	2,90741	1,23762	2538,4	512758	808
809	654481	529475129	28,4429	9,3179	2,90795	1,23609	2541,5	514028	809
810	656100	531441000	28,4605	9,3217	2,90849	1,23457	2544,7	515300	810
811	657721	533411731	28,4781	9,3255	2,90902	1,23305	2547,8	516573	811
812	659344	535387328	28,4956	9,3294	2,90956	1,23153	2551,0	517848	812
813	660969	537367797	28,5132	9,3332	2,91009	1,23001	2554,1	519124	813
814	662596	539353144	28,5307	9,3370	2,91062	1,22850	2557,3	520402	814
815	664225	541343375	28,5482	9,3408	2,91116	1,22699	2560,4	521681	815
816	665856	543338496	28,5657	9,3447	2,91169	1,22549	2563,5	522962	816
817	667489	545338513	28,5832	9,3485	2,91222	1,22399	2566,7	524245	817
818	669124	547343432	28,6007	9,3523	2,91275	1,22249	2569,8	525529	818
819	670761	549353259	28,6182	9,3561	2,91328	1,22100	2573,0	526814	819
820	672400	551368000	28,6356	9,3599	2,91381	1,21951	2576,1	528102	820
821	674041	553387661	28,6531	9,3637	2,91434	1,21803	2579,2	529391	821
822	675684	555412248	28,6705	9,3675	2,91487	1,21655	2582,4	530681	822
823	677329	557441767	28,6880	9,3713	2,91540	1,21507	2585,5	531973	823
824	678976	559476224	28,7054	9,3751	2,91593	1,21359	2588,7	533267	824
825	680625	561515625	28,7228	9,3789	2,91645	1,21212	2591,8	534562	825
826	682276	563559976	28,7402	9,3827	2,91698	1,21065	2595,0	535858	826
827	683929	565609283	28,7576	9,3865	2,91751	1,20919	2598,1	537157	827
828	685584	567663552	28,7750	9,3902	2,91803	1,20773	2601,2	538456	828
829	687241	569722789	28,7924	0,3940	2,91855	1,20627	2604,4	539758	829
830	688900	571787000	28,8097	9,3978	2,91908	1,20482	2607,5	541061	830
831	690561	573856191	28,8271	9,4016	2,91960	1,20337	2610,7	542365	831
832	692224	575930368	28,8444	9,4053	2,92012	1,20192	2613,8	543671	832
833	693889	578009537	28,8617	9,4091	2,92065	1,20048	2616,9	544979	833
834	695556	580093704	28,8791	9,4129	2,92117	1,19904	2620,1	546288	834
835	697225	582182875	28,8964	9,4166	2,92169	1,19760	2623,2	547599	835
836	698896	584277056	28,9137	9,4204	2,92221	1,19617	2626,4	548912	836
837	700569	586376253	28,9310	9,4241	2,92273	1,19474	2629,5	550226	837
838	702244	588480472	28,9482	9,4279	2,92324	1,19332	2632,7	551541	838
839	703921	590589719	28,9655	9,4316	2,92376	1,19190	2635,8	552858	839
840	705600	592704000	28,9828	9,4354	2,92428	1,19048	2638,9	554177	840
841	707281	594823321	29,0000	9,4391	2,92480	1,18906	2642,1	555497	841
842	708964	596947688	29,0172	9,4429	2,92531	1,18765	2645,2	556819	842
843	710649	599077107	29,0345	9,4466	2,92583	1,18624	2648,4	558142	843
844	712336	601211584	29,0517	9,4503	2,92634	1,18483	2651,5	559467	844
845	714025	603351125	29,0689	9,4541	2,92686	1,18343	2654,6	560794	845
846	715716	605495736	29,0861	9,4578	2,92737	1,18203	2657,8	562122	846
847	717409	607645423	29,1033	9,4615	2,92788	1,18064	2660,9	563452	847
848	719104	609800192	29,1204	9,4652	2,92840	1,17925	2664,1	564783	848
849	720801	611960049	29,1376	9,4690	2,92891	1,17786	2667,2	566116	849
850	722500	614125000	29,1548	9,4727	2,92942	1,17647	2670,4	567450	850

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
850	722500	614125000	29,1548	9,4727	2,92942	1,17647	2670,4	567450	850
851	724201	616295051	29,1719	9,4764	2,92993	1,17509	2673,5	568786	851
852	725904	618470208	29,1890	9,4801	2,93044	1,17371	2676,6	570124	852
853	727609	620650477	29,2062	9,4838	2,93095	1,17233	2679,8	571463	853
854	729316	622835864	29,2233	9,4875	2,93146	1,17096	2682,9	572803	854
855	731025	625026375	29,2404	9,4912	2,93197	1,16959	2686,1	574146	855
856	732736	627222016	29,2575	9,4949	2,93247	1,16822	2689,2	575490	856
857	734449	629422793	29,2746	9,4986	2,93298	1,16686	2692,3	576835	857
858	736164	631628712	29,2916	9,5023	2,93349	1,16550	2695,5	578182	858
859	737881	633839779	29,3087	9,5060	2,93399	1,16414	2698,6	579530	859
860	739600	636056000	29,3258	9,5097	2,93450	1,16279	2701,8	580880	860
861	741321	638277381	29,3428	9,5134	2,93500	1,16144	2704,9	582232	861
862	743044	640503928	29,3598	9,5171	2,93551	1,16009	2708,1	583585	862
863	744769	642735647	29,3769	9,5207	2,93601	1,15875	2711,2	584940	863
864	746496	644972544	29,3939	9,5244	2,93651	1,15741	2714,3	586297	864
865	748225	647214625	29,4109	9,5281	2,93702	1,15607	2717,5	587655	865
866	749956	649461896	29,4279	9,5317	2,93752	1,15473	2720,6	589014	866
867	751689	651714363	29,4449	9,5354	2,93802	1,15340	2723,8	590375	867
868	753424	653972032	29,4618	9,5391	2,93852	1,15207	2726,9	591738	868
869	755161	656234909	29,4788	9,5427	2,93902	1,15075	2730,0	593102	869
870	756900	658503000	29,4958	9,5464	2,93952	1,14943	2733,2	594468	870
871	758641	660776311	29,5127	9,5501	2,94002	1,14811	2736,3	595835	871
872	760384	663054848	29,5296	9,5537	2,94052	1,14679	2739,5	597204	872
873	762129	665338617	29,5466	9,5574	2,94101	1,14548	2742,6	598575	873
874	763876	667627624	29,5635	9,5610	2,94151	1,14416	2745,8	599947	874
875	765625	669921875	29,5804	9,5647	2,94201	1,14286	2748,9	601320	875
876	767376	672221376	29,5973	9,5683	2,94250	1,14155	2752,0	602696	876
877	769129	674526133	29,6142	9,5719	2,94300	1,14025	2755,2	604073	877
878	770884	676836152	29,6311	9,5756	2,94349	1,13895	2758,3	605451	878
879	772641	679151439	29,6479	9,5792	2,94399	1,13766	2761,5	606831	879
880	774400	681472000	29,6648	9,5828	2,94448	1,13636	2764,6	608212	880
881	776161	683797841	29,6816	9,5865	2,94498	1,13507	2767,7	609595	881
882	777924	686128968	29,6985	9,5901	2,94547	1,13379	2770,9	610980	882
883	779689	688465387	29,7153	9,5937	2,94596	1,13250	2774,0	612366	883
884	781456	690807104	29,7321	9,5973	2,94645	1,13122	2777,2	613754	884
885	783225	693154125	29,7489	9,6010	2,94694	1,12994	2780,3	615143	885
886	784996	695506456	29,7658	9,6046	2,94743	1,12867	2783,5	616534	886
887	786769	697864103	29,7825	9,6082	2,94792	1,12740	2786,6	617927	887
888	788544	700227072	29,7993	9,6118	2,94841	1,12613	2789,7	619321	888
889	790321	702595369	29,8161	9,6154	2,94890	1,12486	2792,9	620717	889
890	792100	704969000	29,8329	9,6190	2,94939	1,12360	2796,0	622114	890
891	793881	707347971	29,8496	9,6226	2,94988	1,12233	2799,2	623513	891
892	795664	709732288	29,8664	9,6262	2,95036	1,12108	2802,3	624913	892
893	797449	712121957	29,8831	9,6298	2,95085	1,11982	2805,4	626315	893
894	799236	714516984	29,8998	9,6334	2,95134	1,11857	2808,6	627718	894
895	801025	716917375	29,9166	9,6370	2,95182	1,11732	2811,7	629124	895
896	802816	719323136	29,9333	9,6406	2,95231	1,11607	2814,9	630530	896
897	804609	721734273	29,9500	9,6442	2,95279	1,11483	2818,0	631938	897
898	806404	724150792	29,9666	9,6477	2,95328	1,11359	2821,2	633348	898
899	808201	726572699	29,9833	9,6513	2,95376	1,11235	2824,3	634760	899
900	810000	729000000	30,0000	9,6549	2,95424	1,11111	2827,4	636173	900

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$1000 \cdot \frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
900	810000	729000000	30,0000	9,6549	2,95424	1,11111	2827,4	636173	900
901	811801	731432701	30,0167	9,6585	2,95472	1,10988	2830,6	637587	901
902	813604	733870808	30,0333	9,6620	2,95521	1,10865	2833,7	639003	902
903	815409	736314327	30,0500	9,6656	2,95569	1,10742	2836,9	640421	903
904	817216	738763264	30,0666	9,6692	2,95617	1,10619	2840,0	641840	904
905	819025	741217625	30,0832	9,6727	2,95665	1,10497	2843,1	643261	905
906	820836	743677416	30,0998	9,6763	2,95713	1,10375	2846,3	644683	906
907	822649	746142643	30,1164	9,6799	2,95761	1,10254	2849,4	646107	907
908	824464	748613312	30,1330	9,6834	2,95809	1,10132	2852,6	647533	908
909	826281	751089429	30,1496	9,6870	2,95856	1,10011	2855,7	648960	909
910	828100	753571000	30,1662	9,6905	2,95904	1,09890	2858,8	650388	910
911	829921	756058031	30,1828	9,6941	2,95952	1,09769	2862,0	651818	911
912	831744	758550528	30,1993	9,6976	2,95999	1,09649	2865,1	653250	912
913	833569	761048497	30,2159	9,7012	2,96047	1,09529	2868,3	654684	913
914	835396	763551944	30,2324	9,7047	2,96095	1,09409	2871,4	656118	914
915	837225	766060875	30,2490	9,7082	2,96142	1,09290	2874,6	657555	915
916	839056	768575296	30,2655	9,7118	2,96190	1,09170	2877,7	658993	916
917	840889	771095213	30,2820	9,7153	2,96237	1,09051	2880,8	660433	917
918	842724	773620632	30,2985	9,7188	2,96284	1,08932	2884,0	661874	918
919	844561	776151559	30,3150	9,7224	2,96332	1,08814	2887,1	663317	919
920	846400	778688000	30,3315	9,7259	2,96379	1,08696	2890,3	664761	920
921	848241	781229961	30,3480	9,7294	2,96426	1,08578	2893,4	666207	921
922	850084	783777448	30,3645	9,7329	2,96473	1,08460	2896,5	667654	922
923	851929	786330467	30,3809	9,7364	2,96520	1,08342	2899,7	669103	923
924	853776	788889024	30,3974	9,7400	2,96567	1,08225	2902,8	670554	924
925	855625	791453125	30,4138	9,7435	2,96614	1,08108	2906,0	672006	925
926	857476	794022776	30,4302	9,7470	2,96661	1,07991	2909,1	673460	926
927	859329	796597983	30,4467	9,7505	2,96708	1,07875	2912,3	674915	927
928	861184	799178752	30,4631	9,7540	2,96755	1,07759	2915,4	676372	928
929	863041	801765089	30,4795	9,7575	2,96802	1,07643	2918,5	677831	929
930	864900	804357000	30,4959	9,7610	2,96848	1,07527	2921,7	679291	930
931	866761	806954491	30,5123	9,7645	2,96895	1,07411	2924,8	680752	931
932	868624	809557568	30,5287	9,7680	2,96942	1,07296	2928,0	682216	932
933	870489	812166237	30,5450	9,7715	2,96988	1,07181	2931,1	683680	933
934	872356	814780504	30,5614	9,7750	2,97035	1,07066	2934,2	685147	934
935	874225	817400375	30,5778	9,7785	2,97081	1,06952	2937,4	686615	935
936	876096	820025856	30,5941	9,7819	2,97128	1,06838	2940,5	688084	936
937	877969	822656953	30,6105	9,7854	2,97174	1,06724	2943,7	689555	937
938	879844	825293672	30,6268	9,7889	2,97220	1,06610	2946,8	691028	938
939	881721	827936019	30,6431	9,7924	2,97267	1,06496	2950,0	692502	939
940	883600	830584000	30,6594	9,7959	2,97313	1,06383	2953,1	693978	940
941	885481	833237621	30,6757	9,7993	2,97359	1,06270	2956,2	695455	941
942	887364	835896888	30,6920	9,8028	2,97405	1,06157	2959,4	696934	942
943	889249	838561807	30,7083	9,8063	2,97451	1,06045	2962,5	698415	943
944	891136	841232384	30,7246	9,8097	2,97497	1,05932	2965,7	699897	944
945	893025	843908625	30,7409	9,8132	2,97543	1,05820	2968,8	701380	945
946	894916	846590536	30,7571	9,8167	2,97589	1,05708	2971,9	702865	946
947	896809	849278123	30,7734	9,8201	2,97635	1,05597	2975,1	704352	947
948	898704	851971392	30,7896	9,8236	2,97681	1,05485	2978,2	705840	948
949	900601	854670349	30,8058	9,8270	2,97727	1,05374	2981,4	707330	949
950	902500	857375000	30,8221	9,8305	2,97772	1,05263	2984,5	708822	950

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	log n	$1000.\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
950	902500	857375000	30,8221	9,8305	2,97772	1,05263	2984,5	708822	950
951	904401	860085351	30,8383	9,8339	2,97818	1,05152	2987,7	710315	951
952	906304	862801408	30,8545	9,8374	2,97864	1,05042	2990,8	711809	952
953	908209	865523177	30,8707	9,8408	2,97909	1,04932	2993,9	713306	953
954	910116	868250664	30,8869	9,8443	2,97955	1,04822	2997,1	714803	954
955	912025	870983875	30,9031	9,8477	2,98000	1,04712	3000,2	716303	955
956	913936	873722816	30,9192	9,8511	2,98046	1,04603	3003,4	717804	956
957	915849	876467493	30,9354	9,8546	2,98091	1,04493	3006,5	719306	957
958	917764	879217912	30,9516	9,8580	2,98137	1,04384	3009,6	720810	958
959	919681	881974079	30,9677	9,8614	2,98182	1,04275	3012,8	722316	959
960	921600	884736000	30,9839	9,8648	2,98227	1,04167	3015,9	723823	960
961	923521	887503681	31,0000	9,8683	2,98272	1,04058	3019,1	725332	961
962	925444	890277128	31,0161	9,8717	2,98318	1,03950	3022,2	726842	962
963	927369	893056347	31,0322	9,8751	2,98363	1,03842	3025,4	728354	963
964	929296	895841344	31,0483	9,8785	2,98408	1,03734	3028,5	729867	964
965	931225	898632125	31,0644	9,8819	2,98453	1,03627	3031,6	731382	965
966	933156	901428696	31,0805	9,8854	2,98498	1,03520	3034,8	732899	966
967	935089	904231063	31,0966	9,8888	2,98543	1,03413	3037,9	734417	967
968	937024	907039232	31,1127	9,8922	2,98588	1,03306	3041,1	735937	968
969	938961	909853209	31,1288	9,8956	2,98632	1,03199	3044,2	737458	969
970	940900	912673000	31,1448	9,8990	2,98677	1,03093	3047,3	738981	970
971	942841	915498611	31,1609	9,9024	2,98722	1,02987	3050,5	740506	971
972	944784	918330048	31,1769	9,9058	2,98767	1,02881	3053,6	742032	972
973	946729	921167317	31,1929	9,9092	2,98811	1,02775	3056,8	743559	973
974	948676	924010424	31,2090	9,9126	2,98856	1,02669	3059,9	745088	974
975	950625	926859375	31,2250	9,9160	2,98900	1,02564	3063,1	746619	975
976	952576	929714176	31,2410	9,9194	2,98945	1,02459	3066,2	748151	976
977	954529	932574833	31,2570	9,9227	2,98989	1,02354	3069,3	749685	977
978	956484	935441352	31,2730	9,9261	2,99034	1,02249	3072,5	751221	978
979	958441	938313739	31,2890	9,9295	2,99078	1,02145	3075,6	752758	979
980	960400	941192000	31,3050	9,9329	2,99123	1,02041	3078,8	754296	980
981	962361	944076141	31,3209	9,9363	2,99167	1,01937	3081,9	755837	981
982	964324	946966168	31,3369	9,9396	2,99211	1,01833	3085,0	757378	982
983	966289	949862087	31,3528	9,9430	2,99255	1,01729	3088,2	758922	983
984	968256	952763904	31,3688	9,9464	2,99300	1,01626	3091,3	760466	984
985	970225	955671625	31,3847	9,9497	2,99344	1,01523	3094,5	762013	985
986	972196	958585256	31,4006	9,9531	2,99388	1,01420	3097,6	763561	986
987	974169	961504803	31,4166	9,9565	2,99432	1,01317	3100,8	765111	987
988	976144	964430272	31,4325	9,9598	2,99476	1,01215	3103,9	766662	988
989	978121	967361669	31,4484	9,9632	2,99520	1,01112	3107,0	768214	989
990	980100	970299000	31,4643	9,9666	2,99564	1,01010	3110,2	769769	990
991	982081	973242271	31,4802	9,9699	2,99607	1,00908	3113,3	771325	991
992	984064	976191488	31,4960	9,9733	2,99651	1,00806	3116,5	772882	992
993	986049	979146657	31,5119	9,9766	2,99695	1,00705	3119,6	774441	993
994	988036	982107784	31,5278	9,9800	2,99739	1,00604	3122,7	776002	994
995	990025	985074875	31,5436	9,9833	2,99782	1,00503	3125,9	777564	995
996	992016	988047936	31,5595	9,9866	2,99826	1,00402	3129,0	779128	996
997	994009	991026973	31,5753	9,9900	2,99870	1,00301	3132,2	780693	997
998	996004	994011992	31,5911	9,9933	2,99913	1,00200	3135,3	782260	998
999	998001	997002999	31,6070	9,9967	2,99957	1,00100	3138,5	783828	999

$^1/_8 - 49^7/_8$

B. Obwody i powierzchnie

d	1/8 πd	1/8 $\frac{1}{4}\pi d^2$	1/4 πd	1/4 $\frac{1}{4}\pi d^2$	3/8 πd	3/8 $\frac{1}{4}\pi d^2$	5/8 πd	5/8 $\frac{1}{4}\pi d^2$	3/4 πd	3/4 $\frac{1}{4}\pi d^2$	7/8 πd	7/8 $\frac{1}{4}\pi d^2$	d
0	0,393	0,0123	0,785	0,0491	1,178	0,1104	1,963	0,3068	2,356	0,4418	2,749	0,6013	0
1	3,534	0,9940	3,927	1,2272	4,320	1,4849	5,105	2,0739	5,498	2,4053	5,890	2,7612	1
2	6,676	3,5466	7,069	3,9761	7,461	4,4301	8,247	5,4119	8,639	5,9396	9,032	6,4918	2
3	9,817	7,6699	10,21	8,2958	10,60	8,9462	11,39	10,321	11,78	11,045	12,17	11,793	3
4	12,96	13,364	13,35	14,186	13,74	15,033	14,53	16,800	14,92	17,721	15,32	18,665	4
5	16,10	20,629	16,49	21,648	16,89	22,691	17,67	24,850	18,06	25,967	18,46	27,109	5
6	19,24	29,465	19,63	30,680	20,03	31,919	20,81	34,472	21,21	35,785	21,60	37,122	6
7	22,38	39,871	22,78	41,282	23,17	42,718	23,95	45,664	24,35	47,173	24,74	48,707	7
8	25,53	51,849	25,92	53,456	26,31	55,088	27,10	58,426	27,49	60,132	27,88	61,862	8
9	28,67	65,397	29,06	67,201	29,45	69,029	30,24	72,760	30,63	74,662	31,02	76,589	9
10	31,81	80,516	32,20	82,516	32,59	84,541	33,38	88,664	33,77	90,763	34,16	92,886	10
11	34,95	97,205	35,34	99,402	35,74	101,62	36,52	106,14	36,91	108,43	37,31	110,75	11
12	38,09	115,47	38,48	117,86	38,88	120,28	39,66	125,19	40,06	127,68	40,45	130,19	12
13	41,23	135,30	41,63	137,89	42,02	140,50	42,80	145,80	43,20	148,49	43,59	151,20	13
14	44,37	156,70	44,77	159,48	45,16	162,30	45,95	167,99	46,34	170,87	46,73	173,78	14
15	47,52	179,67	47,91	182,65	48,30	185,66	49,09	191,75	49,48	194,83	49,87	197,93	15
16	50,66	204,22	51,05	207,39	51,44	210,60	52,23	217,08	52,62	220,35	53,01	223,65	16
17	53,80	230,33	54,19	233,71	54,59	237,10	55,37	243,98	55,76	247,45	56,16	250,95	17
18	56,94	258,02	57,33	261,59	57,73	265,18	58,51	272,45	58,90	276,12	59,30	279,81	18
19	60,08	287,27	60,48	291,04	60,87	294,83	61,65	302,49	62,05	306,35	62,44	310,24	19
20	63,22	318,10	63,62	322,06	64,01	326,05	64,80	334,10	65,19	338,16	65,58	342,25	20
21	66,37	350,50	66,76	354,66	67,15	358,84	67,94	367,28	68,33	371,54	68,72	375,83	21
22	69,51	384,46	69,90	388,82	70,29	393,20	71,08	402,04	71,47	406,49	71,86	410,97	22
23	72,65	420,00	73,04	424,56	73,43	429,13	74,22	438,36	74,61	443,01	75,01	447,69	23
24	75,79	457,11	76,18	461,86	76,58	466,64	77,36	476,26	77,75	481,11	78,15	485,98	24
25	78,93	495,79	79,33	500,74	79,72	505,71	80,50	515,72	80,90	520,77	81,29	525,84	25
26	82,07	536,05	82,47	541,19	82,86	546,35	83,64	556,76	84,04	562,03	84,43	567,27	26
27	85,22	577,87	85,61	583,21	86,00	588,57	86,79	599,37	87,18	604,81	87,57	610,27	27
28	88,36	621,26	88,75	626,80	89,14	632,36	89,93	643,55	90,32	649,18	90,71	654,84	28
29	91,50	666,23	91,89	671,96	92,28	677,71	93,07	689,30	93,46	695,13	93,86	700,98	29
30	94,64	712,76	95,03	718,69	95,43	724,64	96,21	736,62	96,60	742,64	97,00	748,69	30
31	97,78	760,87	98,17	766,99	98,57	773,14	99,35	785,51	99,75	791,73	100,1	797,98	31
32	100,9	810,54	101,3	816,86	101,7	823,21	102,5	835,97	102,9	842,39	103,3	848,83	32
33	104,1	861,79	104,5	868,31	104,8	874,85	105,6	888,00	106,0	894,62	106,4	901,26	33
34	107,2	914,61	107,6	921,32	108,0	928,06	108,8	941,61	109,2	948,42	109,6	955,25	34
35	110,3	969,00	110,7	975,91	111,1	982,84	111,9	996,78	112,3	1003,8	112,7	1010,8	35
36	113,5	1025,0	113,9	1032,1	114,3	1039,2	115,1	1053,5	115,5	1060,7	115,8	1068,0	36
37	116,6	1082,5	117,0	1089,8	117,4	1097,1	118,2	1111,8	118,6	1119,2	119,0	1126,7	37
38	119,8	1141,6	120,2	1149,1	120,6	1156,6	121,3	1171,7	121,7	1179,3	122,1	1186,9	38
39	122,9	1202,3	123,3	1210,0	123,7	1217,7	124,5	1233,2	124,9	1241,0	125,3	1248,8	39
40	126,1	1264,5	126,4	1272,4	126,8	1280,3	127,6	1296,2	128,0	1304,2	128,4	1312,2	40
41	129,2	1328,3	129,6	1336,4	130,0	1344,5	130,8	1360,8	131,2	1369,0	131,6	1377,2	41
42	132,3	1393,7	132,7	1402,0	133,1	1410,3	133,9	1427,0	134,3	1435,4	134,7	1443,8	42
43	135,5	1460,7	135,9	1469,1	136,3	1477,6	137,1	1494,7	137,4	1503,3	137,8	1511,9	43
44	138,6	1529,2	139,0	1537,9	139,4	1546,6	140,2	1564,0	140,6	1572,8	141,0	1581,6	44
45	141,8	1599,3	142,2	1608,2	142,5	1617,0	143,3	1634,9	143,7	1643,9	144,1	1652,9	45
46	144,9	1670,9	145,3	1680,0	145,7	1689,1	146,5	1707,4	146,9	1716,5	147,3	1725,7	46
47	148,0	1744,2	148,4	1753,5	148,8	1762,7	149,6	1781,4	150,0	1790,8	150,4	1800,1	47
48	151,2	1819,0	151,6	1828,5	152,0	1837,9	152,8	1857,0	153,2	1866,5	153,5	1876,1	48
49	154,3	1895,4	154,7	1905,0	155,1	1914,7	155,9	1934,2	156,3	1943,9	156,7	1953,7	49

koła o średnicy od $^1/_8$ do $99^7/_8$. $50^1/_8 - 99^7/_8$

d	1/8 πd	1/8 ¼πd²	1/4 πd	1/4 ¼πd²	3/8 πd	3/8 ¼πd²	5/8 πd	5/8 ¼πd²	3/4 πd	3/4 ¼πd²	7/8 πd	7/8 ¼πd²	d
50	157,5	1973,3	157,9	1983,2	158,3	1993,1	159,0	2012,9	159,4	2022,8	159,8	2032,8	50
51	160,6	2052,8	161,0	2062,9	161,4	2073,0	162,2	2093,2	162,6	2103,3	163,0	2113,5	51
52	163,8	2133,9	164,1	2144,2	164,5	2154,5	165,3	2175,1	165,7	2185,4	166,1	2195,8	52
53	166,9	2216,6	167,3	2227,0	167,7	2237,5	168,5	2258,5	168,9	2269,1	169,3	2279,6	53
54	170,0	2300,8	170,4	2311,5	170,8	2322,1	171,6	2343,5	172,0	2354,3	172,4	2365,0	54
55	173,2	2386,6	173,6	2397,5	174,0	2408,3	174,8	2430,1	175,1	2441,1	175,5	2452,0	55
56	176,3	2474,0	176,7	2485,0	177,1	2496,1	177,9	2518,3	178,3	2529,4	178,7	2540,6	56
57	179,5	2563,0	179,9	2574,2	180,2	2585,4	181,0	2608,0	181,4	2619,4	181,8	2630,7	57
58	182,6	2653,5	183,0	2664,9	183,4	2676,4	184,2	2699,3	184,6	2710,9	185,0	2722,4	58
59	185,7	2745,6	186,1	2757,2	186,5	2768,8	187,3	2792,2	187,7	2803,9	188,1	2815,7	59
60	188,9	2839,2	189,3	2851,0	189,7	1862,9	190,5	2886,6	190,9	1898,6	191,2	2910,5	60
61	192,0	2934,5	192,4	2946,5	192,8	2958,5	193,6	2982,7	194,0	2994,8	194,4	3006,9	61
62	195,2	3031,3	195,6	3043,5	196,0	3055,7	196,7	3080,2	197,1	3092,6	197,5	3104,9	62
63	198,3	3129,6	198,7	3142,0	199,1	3154,5	199,9	3179,4	200,3	3191,9	200,7	3204,4	63
64	201,5	3229,6	201,8	3242,2	202,2	3254,8	203,0	3280,1	203,4	3292,8	203,8	3305,6	64
65	204,6	3331,1	205,0	3343,9	205,4	3356,7	206,2	3382,4	206,6	3395,3	207,0	3408,2	65
66	207,7	3434,2	208,1	3447,2	208,5	3460,2	209,3	3486,3	209,7	3499,4	210,1	3512,5	66
67	210,9	3538,8	211,3	3552,0	211,7	3565,2	212,5	3591,7	212,8	3605,0	213,2	3618,3	67
68	214,0	3645,0	214,4	3658,4	214,8	3671,8	215,6	3698,7	216,0	3712,2	216,4	3725,7	68
69	217,2	3752,8	217,6	3766,4	217,9	3780,0	218,7	3807,3	219,1	3821,0	219,5	3834,7	69
70	220,3	3862,2	220,7	3876,0	221,1	3889,8	221,9	3917,5	222,3	3931,4	222,7	3945,3	70
71	223,4	3973,1	223,8	3987,1	224,2	4001,1	225,0	4029,2	225,4	4043,3	225,8	4057,4	71
72	226,6	4085,7	227,0	4099,8	227,4	4114,0	228,2	4142,5	228,6	4156,8	228,9	4171,1	72
73	229,7	4199,7	230,1	4214,1	230,5	4228,5	231,3	4257,4	231,7	4271,8	232,1	4286,3	73
74	232,9	4315,4	233,3	4329,9	233,7	4344,5	234,4	4373,8	234,8	4388,5	235,2	4403,2	74
75	236,0	4432,6	236,4	4447,4	236,8	4462,2	237,6	4491,8	238,0	4506,7	238,4	4521,5	75
76	239,2	4551,4	239,5	4566,4	239,9	4581,3	240,7	4611,4	241,1	4626,4	241,5	4641,5	76
77	242,3	4671,8	242,7	4686,9	243,1	4702,1	243,9	4732,5	244,3	4747,8	244,7	4763,1	77
78	245,4	4793,7	245,8	4809,0	246,2	4824,4	247,0	4855,2	247,4	4870,7	247,8	4886,2	78
79	248,6	4917,2	249,0	4932,7	249,4	4948,3	250,1	4979,5	250,5	4995,2	250,9	5010,9	79
80	251,7	5042,3	252,1	5058,0	252,5	5073,8	253,3	5105,4	253,7	5121,2	254,1	5137,1	80
81	254,9	5168,9	255,3	5184,9	255,6	5200,8	256,4	5232,8	256,8	5248,9	257,2	5264,9	81
82	258,0	5297,1	258,4	5313,3	258,8	5329,4	259,6	5361,8	260,0	5378,1	260,4	5394,3	82
83	261,1	5426,9	261,5	5443,3	261,9	5459,6	262,7	5492,4	263,1	5508,8	263,5	5525,3	83
84	264,3	5558,3	264,7	5574,8	265,1	5591,4	265,9	5624,5	266,2	5641,2	266,6	5657,8	84
85	267,4	5691,2	267,8	5707,9	268,2	5724,7	269,0	5758,3	269,4	5775,1	269,8	5791,9	85
86	270,6	5825,7	271,0	5842,6	271,4	5859,6	272,1	5893,5	272,5	5910,6	272,9	5927,6	86
87	273,7	5961,8	274,1	5978,9	274,5	5996,0	275,3	6030,4	275,7	6047,6	276,1	6064,9	87
88	276,9	6099,4	277,2	6116,7	277,6	6134,1	278,4	6168,8	278,8	6186,2	279,2	6203,7	88
89	280,0	6238,6	280,4	6256,1	280,8	6273,7	281,6	6308,8	282,0	6326,4	282,4	6344,1	89
90	283,1	6370,4	283,5	6397,1	283,9	6414,8	284,7	6450,4	285,1	6468,2	285,5	6486,0	90
91	286,3	6521,8	286,7	6539,7	287,1	6557,6	287,8	6593,5	288,2	6611,5	288,6	6629,6	91
92	289,4	6665,7	289,8	6683,8	290,2	6701,9	291,0	6738,2	291,4	6756,4	291,8	6774,7	92
93	292,6	6811,2	293,0	6829,5	293,3	6847,8	294,1	6884,5	294,5	6902,9	294,9	6921,3	93
94	295,7	6958,2	296,1	6976,7	296,5	6995,3	297,3	7032,4	297,7	7051,0	298,1	7069,6	94
95	298,8	7106,9	299,2	7125,6	299,6	7144,3	300,4	7181,8	300,8	7200,6	301,2	7219,4	95
96	302,0	7257,1	302,4	7276,0	302,8	7294,9	303,6	7332,8	303,9	7351,8	304,3	7370,8	96
97	305,1	7408,9	305,5	7428,0	305,9	7447,1	306,7	7485,3	307,1	7504,5	307,5	7523,7	97
98	308,3	7562,2	308,7	7581,5	309,1	7600,8	309,8	7639,5	310,2	7658,9	310,6	7678,3	98
99	311,4	7717,1	311,8	7736,6	312,2	7756,1	313,0	7795,2	313,4	7814,8	313,8	7834,4	99

0—499 **C. Logarytmy**

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	— ∞	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918	1.9459	2,0794	2,1972
10	2,3026	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444
20	2,9957	3,0445	3,0910	3,1355	3,1781	3,2189	3,2581	3,2958	3,3322	3,3673
30	3,4012	3,4340	3,4657	3,4965	3,5264	3,5553	3,5835	3,6109	3,6376	3,6636
40	3,6889	3,7136	3,7377	3,7612	3,7842	3,8067	3,8286	3,8501	3,8712	3,8918
50	3,9120	3,9318	3,9512	3,9703	3,9890	4,0073	4.0254	4,0431	4,0604	4,0775
60	4,0943	4,1109	4,1271	4.1431	4.1589	4,1744	4,1879	4,2047	4,2195	4,2341
70	4,2485	4,2627	4,2767	4,2905	4,3041	4,3175	4,3307	4,3438	4,3567	4,3694
80	4,3820	4,3944	4,4067	4,4188	4,4308	4,4427	4,4543	4,4659	4,4773	4,4886
90	4,4998	4,5109	4,5218	4,5326	4,5433	4,5539	4,5643	4,5747	4,5850	4,5951
100	4,6052	4,6151	4,6250	4,6347	4,6444	4,6540	4,6634	4,6728	4,6821	4,6913
110	4,7005	4,7095	4,7185	4,7274	4,7362	4,7449	4,7536	4,7622	4,7707	4,7791
120	4,7875	4,7958	4,8040	4.8122	4,8203	4,8283	4,8363	4,8442	4,8520	4,8598
130	4,8675	4,8752	4,8828	4,8903	4,8978	4.9053	4,9127	4,9200	4,9273	4,9345
140	4,9416	4,9488	4,9558	4,9628	4,9698	4.9767	4,9836	4,9904	4,9972	5,0039
150	5,0106	5,0173	5,0239	5,0304	5,0370	5,0434	5,0499	5,0562	5,0626	5,0689
160	5,0752	5,0814	5,0876	5,0938	5,0999	5.1059	5,1120	5,1180	5,1240	5,1299
170	5,1358	5,1417	5,1475	5,1533	5,1591	5,1648	5,1705	5,1761	5,1818	5,1874
180	5,1930	5.1985	5,2040	5,2095	5,2149	5,2204	5,2257	5,2311	5,2364	5,2417
190	5,2470	5,2523	5,2575	5,2627	5,2679	5,2730	5,2781	5,2832	5,2883	5,2933
200	5,2983	5,3033	5,3083	5,3132	5,3181	5,3230	5,3279	5,3327	5,3375	5,3423
210	5,3471	5,3519	5,3566	5,3613	5,3660	5,3706	5,3753	5,3799	5,3845	5,3891
220	5,3936	5,3982	5,4027	5.4072	5,4116	5,4161	5,4205	5,4250	5,4293	5,4337
230	5,4381	5,4424	5,4467	5,4510	5,4553	5,4596	5,4638	5,4681	5,4723	5,4765
240	5,4806	5,4848	5,4889	5.4931	5,4972	5.5013	5,5053	5.5094	5,5134	5,5175
250	5,5215	5,5255	5,5294	5,5334	5,5373	5,5413	5,5452	5,5491	5,5530	5,5568
260	5,5607	5,5645	5,5683	5,5722	5,5759	5,5797	5,5835	5,5872	5,5910	5,5947
270	5,5984	5,6021	5,6058	5,6095	5,6131	5,6168	5,6204	5,6240	5,6276	5,6312
280	5,6348	5,6384	5,6419	5.6454	5,6490	5,6525	5,6560	5,6595	5,6630	5,6664
290	5,6699	5,6733	5,6768	5,6802	5,6836	5.6870	5,6904	5,6937	5,6971	5,7004
300	5,7038	5,7071	5,7104	5,7137	5,7170	5,7203	5,7236	5,7268	5,7301	5.7333
310	5,7366	5,7398	5,7430	5,7462	5,7494	5,7526	5,7557	5,7589	5,7621	5,7652
320	5.7683	5,7714	5,7746	5,7777	5,7807	5,7838	5,7869	5,7900	5,7930	5,7961
330	5,7991	5,8021	5,8051	5,8081	5.8111	5,8141	5,8171	5,8201	5,8230	5,8260
340	5,8289	5,8319	5,8348	5,8377	5,8406	5,8435	5,8464	5.8493	5,8522	5,8551
350	5,8579	5,8608	5,8636	5.8665	5,8693	5,8721	5,8749	5.8777	5,8805	5,8833
360	5,8861	5,8889	5,8916	5,8944	5,8972	5,8999	5,9026	5,9054	5,9081	5,9011
370	5,9135	5.9162	5,9189	5,9216	5,9243	5,9269	5,9296	5,9322	5,9349	5,9375
380	5,9402	5,9428	5,9454	5,9480	5,9506	5,9532	5,9558	5,9584	5,9610	5,9636
390	5,9661	5,9687	5,9713	5.9738	5,9764	5,9789	5.9814	5,9839	5,9865	5,9890
400	5,9915	5.9940	5.9965	5,9989	6.0014	6,0039	6,0064	6,0088	6,0113	6,0137
410	6,0162	6,0186	6,0210	6,0234	6,0259	6,0283	6,0307	6,0331	6,0355	6,0379
420	6,0403	6,0426	6,0450	6,0474	6.0497	6,0521	6,0544	6,0568	6,0591	6,0615
430	6,0638	6,0661	6,0684	6,0707	6,0730	6,0753	6,0776	6,0799	6,0822	6,0845
440	6,0868	6,0890	6,0913	6,0936	6,0958	6,0981	6,1003	6,1026	6,1048	6,1070
450	6,1092	6,1115	6,1137	6,1159	6,1181	6,1203	6,1225	6,1247	6,1269	6,1291
460	6.1312	6,1334	6,1356	6,1377	6,1399	6,1420	6,1442	6,1463	6,1485	6,1506
470	6,1527	6,1549	6,1570	6,1591	6,1612	6,1633	6,1654	6,1675	6,1696	6,1717
480	6,1738	6,1759	6,1779	6,1800	6,1821	6,1841	6,1862	6,1883	6,1903	6,1924
490	6.1944	6,1964	6,1985	6.2005	6.2025	6,2046	6,2066	6,2085	6.2106	6,2126

naturalne. 500—999

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	6,2146	6,2166	6,2186	6,2206	6,2226	6,2246	6,2265	6,2285	6,2305	6,2324
510	6,2344	6,2364	6,2383	6,2403	6,2422	6,2442	6,2461	6,2480	6,2500	6,2519
520	6,2538	6,2558	6,2577	6,2596	6,2615	6,2634	6,2653	6,2672	6,2691	6,2710
530	6,2729	6,2748	6,2766	6,2785	6,2804	6,2823	6,2841	6,2860	6,2879	6,2897
540	6,2916	6,2934	6,2953	6,2971	6,2989	6,3008	6,3026	6,3044	6,3063	6,3081
550	6,3099	6,3117	6,3135	6,3154	6,3172	6,3190	6,3208	6,3226	6,3244	6,3261
560	6,3279	6,3297	6,3315	6,3333	6,3351	6,3368	6,3386	6,3404	6,3421	6,3439
570	6,3456	6,3474	6,3491	6,3509	6,3526	6,3544	6,3561	6,3578	6,3596	6,3613
580	6,3630	6,3648	6,3665	6,3682	6,3699	6,3716	6,3733	6,3750	6,3767	6,3784
590	6,3801	6,3818	6,3835	6,3852	6,3869	6,3886	6,3902	6,3919	6,3936	6,3953
600	6,3969	6,3986	6,4003	6,4019	6,4036	6,4052	6,4069	6,4085	6,4102	6,4118
610	6,4135	6,4151	6,4167	6,4184	6,4200	6,4216	6,4232	6,4249	6,4265	6,4281
620	6,4297	6,4313	6,4329	6,4345	6,4362	6,4378	6,4394	6,4409	6,4425	6,4441
630	6,4457	6,4473	6,4489	6,4505	6,4520	6,4536	6,4552	6,4568	6,4583	6,4599
640	6,4615	6,4630	6,4646	6,4661	6,4677	6,4693	6,4708	6,4723	6,4739	6,4754
650	6,4770	6,4785	6,4800	6,4816	6,4831	6,4846	6,4862	6,4877	6,4892	6,4907
660	6,4922	6,4938	6,4953	6,4968	6,4983	6,4998	6,5013	6,5028	6,5043	6,5058
670	6,5073	6,5088	6,5103	6,5117	6,5132	6,5147	6,5162	6,5177	6,5191	6,5206
680	6,5221	6,5236	6,5250	6,5265	6,5280	6,5294	6,5309	6,5323	6,5338	6,5352
690	6,5367	6,5381	6,5396	6,5410	6,5425	6,5439	6,5453	6,5468	6,5482	6,5497
700	6,5511	6,5525	6,5539	6,5554	6,5568	6,5582	6,5596	6,5610	6,5624	6,5639
710	6,5653	6,5667	6,5681	6,5695	6,5709	6,5723	6,5737	6,5751	6,5765	6,5779
720	6,5793	6,5806	6,5820	6,5834	6,5848	6,5862	6,5876	6,5889	6,5903	6,5917
730	6,5930	6,5944	6,5958	6,5971	6,5985	6,5999	6,6012	6,6026	6,6039	6,6053
740	6,6067	6,6080	6,6093	6,6107	6,6120	6,6134	6,6147	6,6161	6,6174	6,6187
750	6,6201	6,6214	6,6227	6,6241	6,6254	6,6267	6,6280	6,6294	6,6307	6,6320
760	6,6333	6,6346	6,6359	6,6373	6,6386	6,6399	6,6412	6,6425	6,6438	6,6451
770	6,6464	6,6477	6,6490	6,6503	6,6516	6,6529	6,6542	6,6554	6,6567	6,6580
780	6,6593	6,6606	6,6619	6,6631	6,6644	6,6657	6,6670	6,6682	6,6695	6,6708
790	6,6720	6,6733	6,6746	6,6758	6,6771	6,6783	6,6796	6,6809	6,6821	6,6834
800	6,6846	6,6859	6,6871	6,6884	6,6896	6,6908	6,6921	6,6933	6,6946	6,6958
810	6,6970	6,6983	6,6995	6,7007	6,7020	6,7032	6,7044	6,7056	6,7069	6,7081
820	6,7093	6,7105	6,7117	6,7130	6,7142	6,7154	6,7166	6,7178	6,7190	6,7202
830	6,7214	6,7226	6,7238	6,7250	6,7262	6,7274	6,7286	6,7298	6,7310	6,7322
840	6,7334	6,7346	6,7358	6,7370	6,7382	6,7393	6,7405	6,7417	6,7429	6,7441
850	6,7452	6,7464	6,7476	6,7488	6,7499	6,7511	6,7523	6,7534	6,7546	6,7558
860	6,7569	6,7581	6,7593	6,7604	6,7616	6,7627	6,7639	6,7650	6,7662	6,7673
870	6,7685	6,7696	6,7708	6,7719	6,7731	6,7742	6,7754	6,7765	6,7776	6,7788
880	6,7799	6,7811	6,7822	6,7833	6,7845	6,7856	6,7867	6,7878	6,7890	6,7901
890	6,7912	6,7923	6,7935	6,7946	6,7957	6,7968	6,7979	6,7991	6,8002	6,8013
900	6,8024	6,8035	6,8046	6,8057	6,8068	6,8079	6,8090	6,8101	6,8112	6,8123
910	6,8134	6,8145	6,8156	6,8167	6,8178	6,8189	6,8200	6,8211	6,8222	6,8233
920	6,8244	6,8255	6,8265	6,8276	6,8287	6,8298	6,8309	6,8320	6,8330	6,8341
930	6,8352	6,8363	6,8373	6,8384	6,8395	6,8405	6,8416	6,8427	6,8437	6,8448
940	6,8459	6,8469	6,8480	6,8491	6,8501	6,8512	6,8522	6,8533	6,8544	6,8554
950	6,8565	6,8575	6,8586	6,8596	6,8607	6,8617	6,8628	6,8638	6,8648	6,8659
960	6,8669	6,8680	6,8690	6,8701	6,8711	6,8721	6,8732	6,8742	6,8752	6,8763
970	6,8773	6,8783	6,8794	6,8804	6,8814	6,8824	6,8835	6,8845	6,8855	6,8865
980	6,8876	6,8886	6,8896	6,8906	6,8916	6,8926	6,8937	6,8947	6,8957	6,8967
990	6,8977	6,8987	6,8997	6,9007	6,9017	6,9027	6,9037	6,9047	6,9057	6,9068

Stopni	Wstawa (Sinus).							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	0,07 45	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	0,03490	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	0,05234	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	0,06976	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	0,08716	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	0,10453	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	0,12187	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	0,13917	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	0,15643	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	0,17365	80
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	0,19081	79
11.	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	0,20791	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	0,22495	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	0,24192	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	0,25882	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	0,27564	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	0,29237	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	0,30902	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	0,32557	71
19	0,32557	0.32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	0.34202	70
20	0.34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	0,35837	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	0,37461	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	0,39073	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40142	0,40408	0,40674	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	0,42262	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	0,43837	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	0,45399	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	0,46947	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	0,48481	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	0,50000	60
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	0,51504	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	0,52992	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	0,54464	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	0,55919	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	0,57358	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	0,58779	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	0,60182	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	0,61566	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0.62251	0,62479	0,62706	0,62932	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	0.64279	50
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	0,65606	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	0,66913	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0.67559	0,67773	0,67987	0,68200	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	0,69466	46
44	0,69466	0.69675	0.69883	0.70091	0,70298	0,70505	0.70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Stopni
	Dostawa (Cosinus).							

Stopnie	Dostawa (Cosinus).							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	0,99985	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	0,99939	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	0,99863	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	0,99756	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	0,99619	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	0,99452	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	0,99255	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	0,99027	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	0,98769	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	0,98481	80
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	0,98163	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	0,97815	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	0,97437	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	0,97030	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	0,96593	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	0,96126	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	0,95630	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	0,95106	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	0,94552	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	0,93969	70
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	0,93358	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	0,92718	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	0,92050	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	0,91355	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	0,90631	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	0,89879	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	0,89101	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	0,88295	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	0,87462	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	0,86603	60
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	0,85717	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	0,84805	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	0,83867	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	0,82904	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	0,81915	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	0,80902	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	0,79864	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	0,78801	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	0,77715	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	0,76604	50
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	0,75471	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	0,74314	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	0,73135	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	0,71934	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	0,70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Stopnie
	Wstawa (Sinus).							

Stopni	Styczna (Tangens).							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	0,01746	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	0,03492	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	0,05241	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	0,06993	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	0,08749	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	0,10510	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	0,12278	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	0,14054	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	0,15838	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	0,17633	80
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	0,19438	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	0,21256	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	0,23087	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	0,24933	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	0,26795	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	0,28675	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	0,30573	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	0,32492	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	0,34433	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	0,36397	70
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	0,38386	69
21	0,38368	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	0,40403	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	0,42447	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	0,44523	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	0,46631	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	0,48773	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	0,50953	63
27	0,50953	0,51320	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	0,53171	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	0,55431	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	0,57735	60
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	0,60086	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	0,62487	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	0,64941	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	0,67451	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	0,70021	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	0,72654	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	0,75355	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	0,78129	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	0,80978	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	0,83910	50
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	0,86929	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	0,90040	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	0,93252	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	0,96569	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Stopni
	Dotyczna (Cotangens).							

Stopni	Dotyczna (Cotangens). 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	∞	343.77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	57,28996	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	28,63625	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	19,08114	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	14,30067	86
4	14,30067	13,72674	13.19688	12,70621	12,25051	11,82617	11,43005	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	9,51436	84
6	9,51436	9.25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	8,14435	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	7,11537	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	6,31375	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	5,67128	80
10	5,67128	5.57638	5.48451	5,39552	5,30928	5,22566	5,14455	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4.77286	4,70463	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4.38969	4,33148	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	4,01078	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	3,73205	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	3,48741	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	3,27085	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	3,07768	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98869	2,96004	2,93189	2,90421	71
19	2,90421	2.87700	2,85023	2,82391	2,79802	2.77254	2,74748	70
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	2,60509	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	2,47509	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	2,35585	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	2,24604	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	2,14451	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	2,05030	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	1,96261	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	1,88073	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	1,80405	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	1,73205	60
30	1,73205	1,72047	1,70901	1.69766	1,68643	1,67530	1,66428	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	1,60033	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	1,53987	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	1,48256	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	1,42815	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	1,37638	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	1,32704	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	1,27994	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	1,23490	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	1,19175	50
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	1,15037	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	1,11061	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1.08496	1,07864	1,07237	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	1,03553	46
44	1,03553	1.02952	1,02355	1.01761	1,01170	1.00583	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Stopni
	Styczna (Tangens).							

E. Tablice funkcyi hyperbolicznych.

Funkcya hyperboliczna sinh φ dla $\varphi = 0$ do 5,09.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0600	0701	0801	0901	101
0,1	0,1002	1102	1203	1304	1405	1506	1607	1708	1810	1911	102
0,2	0,2013	2115	2218	2320	2423	2526	2629	2733	2837	2941	104
0,3	0,3045	3150	3255	3360	3466	3572	3678	3785	3892	4000	108
0,4	0,4108	4216	4325	4434	4543	4653	4764	4875	4986	5098	113
0,5	0,5211	5324	5438	5552	5666	5782	5897	6014	6131	6248	119
0,6	0,6367	6485	6605	6725	6846	6967	7090	7213	7336	7461	125
0,7	0,7586	7712	7838	7966	8094	8223	8353	8484	8615	8748	133
0,8	0,8881	9015	9150	9286	9423	9561	9700	9840	9981	0122*	143
0,9	1,0265	0409	0554	0700	0847	0995	1144	1294	1446	1598	154
1,0	1,1752	1907	2063	2220	2379	2539	2700	2862	3025	3190	166
1,1	1,3356	3524	3693	3863	4035	4208	4382	4558	4735	4914	181
1,2	1,5095	5276	5460	5645	5831	6019	6209	6400	6593	6788	196
1,3	1,6984	7182	7381	7583	7786	7991	8198	8406	8617	8829	214
1,4	1,9043	9259	9477	9697	9919	0143*	0369*	0597*	0827*	1059*	234
1,5	2,1293	1529	1768	2008	2251	2496	2743	2993	3245	3499	257
1,6	2,3756	4015	4276	4540	4806	5075	5346	5620	5896	6175	281
1,7	2,6456	6740	7027	7317	7609	7904	8202	8503	8806	9112	310
1,8	2,9422	9734	0049*	0367*	0689*	1013*	1340*	1671*	2005*	2341*	341
1,9	3,2682	3025	3372	3722	4075	4432	4792	5156	5523	5894	375
2,0	3,6269	6647	7028	7414	7803	8196	8593	8993	9398	9806	413
2,1	4,0219	0635	1056	1480	1909	2342	2779	3221	3666	4117	454
2,2	4,4571	5030	5494	5962	6434	6912	7394	7880	8372	8868	502
2,3	4,9370	9876	0387*	0903*	1425*	1951*	2483*	3020*	3562*	4109*	553
2,4	5,4662	5221	5785	6354	6929	7510	8097	8689	9288	9892	610
2,5	6,0502	1118	1741	2369	3004	3645	4293	4946	5607	6274	673
2,6	6,6947	7628	8315	9009	9709	0417*	1132*	1854*	2583*	3319*	744
2,7	7,4063	4814	5572	6338	7112	7894	8683	9480	0285*	1098*	821
2,8	8,1919	2749	3586	4432	5287	6150	7021	7902	8791	9689	907
2,9	9,0596	1512	2437	3371	4315	5268	6231	7203	8185	9177	1002
3,0	10,0179	1191	2212	3245	4287	5340	6403	7477	8562	9658	1107
3,1	11,0765	1882	3011	4151	5303	6466	7641	8827	0026*	1236*	1223
3,2	12,2459	3694	4941	6201	7473	8758	0056*	1367*	2691*	4028*	1351
3,3	13,5379	6743	8121	9513	0919*	2338*	3772*	5221*	6684*	8161*	1493
3,4	14,965	15,116	15,268	15,422	15,577	15,734	15,893	16,053	16,214	16,378	165
3,5	16,543	16,709	16,877	17,047	17,219	17,392	17,567	17,744	17,923	18,103	182
3,6	18,285	18,470	18,655	18,843	19,033	19,224	19,418	19,613	19,811	20,010	201
3,7	20,211	20,415	20,620	20,828	21,037	21,249	21,463	21,679	21,897	22,117	222
3,8	22,339	22,564	22,791	23,020	23,252	23,486	23,722	23,961	24,202	24,445	246
3,9	24,691	24,939	25,190	25,444	25,700	25,958	26,219	26,483	26,749	27,018	272
4,0	27,290	27,564	27,842	28,122	28,404	28,690	28,979	29,270	29,564	29,862	300
4,1	30,162	30,465	30,772	31,081	31,393	31,709	32,028	32,350	32,675	33,004	332
4,2	33,336	33,671	34,009	34,351	34,697	35,046	35,398	35,754	36,113	36,476	367
4,3	36,843	37,214	37,588	37,966	38,347	38,733	39,122	39,515	39,913	40,314	405
4,4	40,719	41,129	41,542	41,960	42,382	42,808	43,238	43,673	44,112	44,555	448
4,5	45,003	45,455	45,912	46,374	46,840	47,311	47,787	48,267	48,752	49,242	495
4,6	49,737	50,237	50,742	51,252	51,767	52,288	52,813	53,344	53,880	54,422	547
4,7	54,969	55,522	56,080	56,643	57,213	57,788	58,369	58,955	59,548	60,147	604
4,8	60,751	61,362	61,979	62,601	63,231	63,866	64,508	65,157	65,812	66,473	668
4,9	67,141	67,816	68,498	69,186	69,882	70,584	71,293	72,010	72,734	73,465	738
5,0	74,203	74,949	75,702	76,463	77,232	78,008	78,792	79,584	80,384	81,192	816

Funkcya hyperboliczna cosh φ dla $\varphi = 0$ do 5,09.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	1,0000	0001	0002	0005	0008	0013	0018	0025	0032	0041	9
0,1	1,0050	0061	0072	0085	0098	0113	0128	0145	0162	0181	20
0,2	1,0201	0221	0243	0266	0289	0314	0340	0367	0395	0423	30
0,3	1,0453	0484	0516	0549	0584	0619	0655	0692	0731	0770	41
0,4	1,0811	0852	0895	0939	0984	1030	1077	1125	1174	1225	51
0,5	1,1276	1329	1383	1438	1494	1551	1609	1669	1730	1792	63
0,6	1,1855	1919	1984	2051	2119	2188	2258	2330	2402	2476	76
0,7	1,2552	2628	2706	2785	2865	2947	3030	3114	3199	3286	88
0,8	1,3374	3464	3555	3647	3740	3835	3932	4029	4128	4229	102
0,9	1,4331	4434	4539	4645	4753	4862	4973	5085	5199	5314	117
1,0	1,5431	5549	5669	5790	5913	6038	6164	6292	6421	6552	133
1,1	1,6685	6820	6956	7093	7233	7374	7517	7662	7808	7956	151
1,2	1,8107	8258	8412	8568	8725	8884	9045	9208	9373	9540	169
1,3	1,9709	9880	0053*	0228*	0404*	0583*	0764*	0947*	1132*	1320*	189
1,4	2,1509	1700	1894	2090	2288	2488	2691	2896	3103	3312	212
1,5	2,3524	3738	3955	4174	4395	4619	4845	5073	5305	5538	237
1,6	2,5775	6013	6255	6499	6746	6995	7247	7502	7760	8020	263
1,7	2,8283	8549	8818	9090	9364	9642	9922	0206*	0492*	0782*	293
1,8	3,1075	1371	1669	1972	2277	2585	2897	3212	3530	3852	325
1,9	3,4177	4506	4838	5173	5512	5855	6201	6551	6904	7261	361
2,0	3,7622	7987	8355	8727	9103	9483	9867	0255*	0647*	1043*	400
2,1	4,1443	1847	2256	2668	3085	3507	3932	4362	4797	5236	443
2,2	4,5679	6127	6580	7037	7499	7966	8437	8914	9395	9881	491
2,3	5,0372	0868	1370	1876	2388	2905	3427	3954	4487	5026	543
2,4	5,5569	6119	6674	7235	7801	8373	8951	9535	0125*	0721*	602
2,5	6,1323	1931	2545	3166	3793	4426	5066	5712	6365	7024	666
2,6	6,7690	8363	9043	9729	0423*	1123*	1831*	2546*	3268*	3998*	737
2,7	7,4735	5479	6231	6990	7758	8533	9136	0106*	0905*	1712*	815
2,8	8,2527	3351	4182	5022	5871	6728	7594	8469	9352	0244*	902
2,9	9,1146	2056	2976	3905	4844	5791	6749	7716	8693	9680	998
3,0	10,0678	1683	2700	3728	4765	5813	6872	7942	9022	0113*	1102
3,1	11,1215	2328	3453	4588	5736	6895	8065	9247	0442*	1648*	1218
3,2	12,2866	4097	5340	6596	7864	9146	0440*	1747*	3067*	4401*	1347
3,3	13,5748	7108	8482	9871	1273*	2689*	4120*	5565*	7024*	8498*	1489
3,4	14,999	15,149	15,301	15,455	15,610	15,766	15,924	16,084	16,245	16,408	165
3,5	16,573	16,739	16,907	17,077	17,248	17,421	17,596	17,772	17,951	18,131	182
3,6	18,313	18,497	18,682	18,870	19,059	19,250	19,444	19,639	19,836	20,035	201
3,7	20,236	20,439	20,644	20,852	21,061	21,272	21,486	21,702	21,919	22,139	222
3,8	22,362	22,586	22,813	23,042	23,273	23,507	23,743	23,982	24,222	24,466	245
3,9	24,711	24,959	25,210	25,463	25,719	25,977	26,238	26,502	26,768	27,037	271
4,0	27,308	27,582	27,860	28,139	28,422	28,707	28,996	29,287	29,581	29,878	300
4,1	30,178	30,482	30,788	31,097	31,409	31,725	32,044	32,365	32,691	33,019	332
4,2	33,351	33,686	34,024	34,366	34,711	35,060	35,412	35,768	36,127	36,490	367
4,3	36,857	37,227	37,601	37,979	38,360	38,746	39,135	39,528	39,925	40,326	406
4,4	40,732	41,141	41,554	41,972	42,393	42,819	43,250	43,684	44,123	44,566	448
4,5	45,014	45,466	45,923	46,385	46,851	47,321	47,797	48,277	48,762	49,252	495
4,6	49,747	50,247	50,752	51,262	51,777	52,297	52,823	53,354	53,890	54,431	547
4,7	54,978	55,531	56,089	56,652	57,221	57,796	58,377	58,964	59,556	60,155	604
4,8	60,759	61,370	61,987	62,609	63,239	63,874	64,516	65,164	65,819	66,481	668
4,9	67,149	67,823	68,505	69,193	69,889	70,591	71,300	72,017	72,741	73,472	738
5,0	74,210	74,956	75,709	76,470	77,238	78,014	78,798	79,590	80,390	81,198	816

Logarytmy zwyczajne funkcyi hyperbolicznej sinh φ dla $\varphi = 0$ do 5,09, powiększone o 10.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
0,0	— ∞	8,0000	3011	4772	6022	6992	7784	8455	9036	9548	459
0,1	9,0007	0423	0802	1152	1475	1777	2060	2325	2576	2814	225
0,2	9,3039	3254	3459	3656	3844	4025	4199	4366	4528	4685	151
0,3	9,4836	4983	5125	5264	5398	5529	5656	5781	5902	6020	116
0,4	9,6136	6249	6359	6468	6574	6678	6780	6880	6978	7074	95
0,5	9,7169	7262	7354	7444	7533	7620	7707	7791	7875	7958	81
0,6	9,8039	8119	8199	8277	8354	8431	8506	8581	8655	8728	72
0,7	9,8800	8872	8942	9012	9082	9150	9218	9286	9353	9419	66
0,8	9,9485	9550	9614	9678	9742	9805	9868	9930	9992	0053	61
0,9	10,0114	0174	0234	0294	0353	0412	0470	0529	0586	0644	57
1,0	10,0701	0758	0815	0871	0927	0982	1038	1093	1148	1203	54
1,1	10,1257	1311	1365	1419	1472	1525	1578	1631	1684	1736	52
1,2	10,1788	1840	1892	1944	1995	2046	2098	2148	2199	2250	50
1,3	10,2300	2351	2401	2451	2501	2551	2600	2650	2699	2748	49
1,4	10,2797	2846	2895	2944	2993	3041	3090	3138	3186	3234	48
1,5	10,3282	3330	3378	3426	3474	3521	3569	3616	3663	3711	47
1,6	10,3758	3805	3852	3899	3946	3992	4039	4086	4132	4179	46
1,7	10,4225	4272	4318	4364	4411	4457	4503	4549	4595	4641	46
1,8	10,4687	4733	4778	4824	4870	4915	4961	5007	5052	5098	45
1,9	10,5143	5188	5234	5279	5324	5370	5415	5460	5505	5550	45
2,0	10,5595	5640	5685	5730	5775	5820	5865	5910	5955	6000	45
2,1	10,6044	6089	6134	6178	6223	6268	6312	6357	6401	6446	45
2,2	10,6491	6535	6580	6624	6668	6713	6757	6802	6846	6890	45
2,3	10,6935	6979	7023	7067	7112	7156	7200	7244	7289	7333	44
2,4	10,7377	7421	7465	7509	7553	7597	7642	7686	7730	7774	44
2,5	10,7818	7862	7906	7950	7994	8038	8082	8126	8169	8213	44
2,6	10,8257	8301	8345	8389	8433	8477	8521	8564	8608	8652	44
2,7	10,8696	8740	8784	8827	8871	8915	8959	9003	9046	9090	44
2,8	10,9134	9178	9221	9265	9309	9353	9396	9440	9484	9527	44
2,9	10,9571	9615	9658	9702	9746	9789	9833	9877	9920	9964	44
3,0	11,0008	0051	0095	0139	0182	0226	0270	0313	0357	0400	44
3,1	11,0444	0488	0531	0575	0618	0662	0706	0749	0793	0836	44
3,2	11,0880	0923	0967	1011	1054	1098	1141	1185	1228	1272	44
3,3	11,1316	1359	1403	1446	1490	1533	1577	1620	1664	1707	44
3,4	11,1751	1794	1838	1881	1925	1968	2012	2056	2099	2143	43
3,5	11,2186	2230	2273	2317	2360	2404	2447	2491	2534	2578	43
3,6	11,2621	2665	2708	2752	2795	2839	2882	2925	2969	3012	44
3,7	11,3056	3099	3143	3186	3230	3273	3317	3360	3404	3447	44
3,8	11,3491	3534	3578	3621	3665	3708	3752	3795	3838	3882	43
3,9	11,3925	3969	4012	4056	4099	4143	4186	4230	4273	4317	43
4,0	11,4360	4403	4447	4490	4534	4577	4621	4664	4708	4751	44
4,1	11,4795	4838	4881	4925	4968	5012	5055	5099	5142	5186	43
4,2	11,5229	5273	5316	5359	5403	5446	5490	5533	5577	5620	44
4,3	11,5664	5707	5750	5794	5837	5881	5924	5968	6011	6055	43
4,4	11,6098	6141	6185	6228	6272	6315	6359	6402	6446	6489	43
4,5	11,6532	6576	6619	6663	6706	6750	6793	6836	6880	6923	44
4,6	11,6967	7010	7054	7097	7141	7184	7227	7271	7314	7358	43
4,7	11,7401	7445	7488	7531	7575	7618	7662	7705	7749	7792	44
4,8	11,7836	7879	7922	7966	8009	8053	8096	8140	8183	8226	44
4,9	11,8270	8313	8357	8400	8444	8487	8530	8574	8617	8661	43
5,0	11,8704	8748	8791	8835	8878	8921	8965	9008	9052	9095	43

Logarytmy zwyczajne funkcyi hyperbolicznej cosh φ dla $\varphi = 0$ do 5,09.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0000	0001	0002	0003	0005	0008	0011	0014	0018	4
0,1	0,0022	0026	0031	0037	0042	0049	0055	0062	0070	0078	8
0,2	0,0086	0095	0104	0114	0124	0134	0145	0156	0168	0180	13
0,3	0,0193	0205	0219	0232	0246	0261	0276	0291	0306	0322	17
0,4	0,0339	0355	0372	0390	0407	0426	0444	0463	0482	0502	20
0,5	0,0522	0542	0562	0583	0605	0626	0648	0670	0693	0716	23
0,6	0,0739	0762	0786	0810	0835	0859	0884	0910	0935	0961	26
0,7	0,0987	1013	1040	1067	1094	1122	1149	1177	1206	1234	29
0,8	0,1263	1292	1321	1350	1380	1410	1440	1470	1501	1532	31
0,9	0,1563	1594	1625	1657	1689	1721	1753	1785	1818	1851	33
1,0	0,1884	1917	1950	1984	2018	2051	2086	2120	2154	2189	34
1,1	0,2223	2258	2293	2328	2364	2399	2435	2470	2506	2542	36
1,2	0,2578	2615	2651	2688	2724	2761	2798	2835	2872	2909	38
1,3	0,2947	2984	3022	3059	3097	3135	3173	3211	3249	3288	38
1,4	0,3326	3365	3403	3442	3481	3520	3559	3598	3637	3676	39
1,5	0,3715	3754	3794	3833	3873	3913	3952	3992	4032	4072	40
1,6	0,4112	4152	4192	4232	4273	4313	4353	4394	4434	4475	40
1,7	0,4515	4556	4597	4637	4678	4719	4760	4801	4842	4883	41
1,8	0,4924	4965	5006	5048	5089	5130	5172	5213	5254	5296	41
1,9	0.5337	5379	5421	5462	5504	5545	5587	5629	5671	5713	41
2,0	0.5754	5796	5838	5880	5922	5964	6006	6048	6090	6132	43
2,1	0,6175	6217	6259	6301	6343	6386	6428	6470	6512	6555	42
2,2	0,6597	6640	6682	6724	6767	6809	6852	6894	6937	6979	43
2,3	0,7022	7064	7107	7150	7192	7235	7278	7320	7363	7406	42
2,4	0,7448	7491	7534	7577	7619	7662	7705	7748	7791	7833	43
2,5	0,7876	7919	7962	8005	8048	8091	8134	8176	8219	8262	43
2,6	0,8305	8348	8391	8434	8477	8520	8563	8606	8649	8692	43
2,7	0,8735	8778	8821	8864	8907	8951	8994	9037	9080	9123	43
2,8	0,9166	9209	9252	9295	9338	9382	9425	9468	9511	9554	43
2,9	0.9597	9641	9684	9727	9770	9813	9856	9900	9943	9986	43
3,0	1,0029	0073	0116	0159	0202	0245	0289	0332	0375	0418	44
3,1	1,0462	0505	0548	0591	0635	0678	0721	0764	0808	0851	43
3,2	1,0894	0938	0981	1024	1067	1111	1154	1197	1241	1284	43
3,3	1,1327	1371	1414	1457	1501	1544	1587	1631	1674	1717	44
3,4	1,1761	1804	1847	1891	1934	1977	2021	2064	2107	2151	43
3,5	1,2194	2237	2281	2324	2367	2411	2454	2497	2541	2584	44
3,6	1,2628	2671	2714	2758	2801	2844	2888	2931	2974	3018	43
3,7	1,3061	3105	3148	3191	3235	3278	3322	3365	3408	3452	43
3,8	1,3495	3538	3582	3625	3669	3712	3755	3799	3842	3886	43
3,9	1,3929	3972	4016	4059	4103	4146	4189	4233	4276	4320	43
4,0	1,4363	4406	4450	4493	4537	4580	4623	4667	4710	4754	43
4,1	1,4797	4840	4884	4927	4971	5014	5057	5101	5144	5188	43
4,2	1,5231	5274	5318	5361	5405	5448	5492	5535	5578	5622	43
4,3	1,5665	5709	5752	5795	5839	5882	5926	5969	6012	6056	43
4,4	1,6099	6143	6186	6230	6273	6316	6360	6403	6447	6490	43
4,5	1,6533	6577	6620	6664	6707	6751	6794	6837	6881	6924	44
4,6	1,6968	7011	7055	7098	7141	7185	7228	7272	7315	7358	44
4,7	1,7402	7445	7489	7532	7576	7619	7662	7706	7749	7793	43
4,8	1,7836	7880	7923	7966	8010	8053	8097	8140	8184	8227	43
4,9	1,8270	8314	8357	8401	8444	8487	8531	8574	8618	8661	44
5,0	1,8705	8748	8791	8835	8878	8922	8965	9009	9052	9095	43

Funkcya hyperboliczna tgh φ dla $\varphi = 0$ do 2,39.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0599	0699	0798	0898	99
0,1	0,0997	1096	1194	1293	1391	1489	1587	1684	1781	1878	96
0,2	0,1974	2070	2165	2260	2355	2449	2543	2636	2729	2821	92
0,3	0,2913	3004	3095	3185	3275	3364	3452	3540	3627	3714	86
0,4	0,3800	3885	3969	4053	4137	4219	4301	4382	4462	4542	79
0,5	0,4621	4700	4777	4854	4930	5005	5080	5154	5227	5299	71
0,6	0,5370	5441	5511	5581	5649	5717	5784	5850	5915	5980	64
0,7	0,6044	6107	6169	6231	6291	6352	6411	6469	6527	6584	56
0,8	0,6640	6696	6751	6805	6858	6911	6963	7014	7064	7114	49
0,9	0,7163	7211	7259	7306	7352	7398	7443	7487	7531	7574	42
1,0	0,7616	7658	7699	7739	7779	7818	7857	7895	7932	7969	36
1,1	0,8005	8041	8076	8110	8144	8178	8210	8243	8275	8306	31
1,2	0,8337	8367	8397	8426	8455	8483	8511	8538	8565	8591	26
1,3	0,8617	8643	8668	8693	8717	8741	8764	8787	8810	8832	22
1,4	0,8854	8875	8896	8917	8937	8957	8977	8996	9015	9033	19
1,5	0,9052	9069	9087	9104	9121	9138	9154	9170	9186	9202	15
1,6	0,9217	9232	9246	9261	9275	9289	9302	9316	9329	9342	12
1,7	0,9354	9367	9379	9391	9402	9414	9425	9436	9447	9458	10
1,8	0,9468	9478	9488	9498	9508	9518	9527	9536	9545	9554	8
1,9	0,9562	9571	9579	9587	9595	9603	9611	9619	9626	9633	7
2,0	0,9640	9647	9654	9661	9668	9674	9680	9687	9693	9699	6
2,1	0,9705	9710	9716	9722	9727	9732	9738	9743	9748	9753	5
2,2	0,9757	9762	9767	9771	9776	9780	9785	9789	9793	9797	4
2,3	0,9801	9805	9809	9812	9816	9820	9823	9827	9830	9834	3

Logarytmy zwyczajne funkcyi hyperbolicznej tgh φ dla $\varphi = 0$ do 2,39, powiększone o 10.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	$-\infty$	8,0000	3010	4770	6018	6986	7776	8444	9022	9531	455
0,1	8,9986	0396*	0771*	1115*	1433*	1729*	2004*	2263*	2506*	2736*	217
0,2	9,2953	3159	3355	3542	3720	3890	4053	4210	4360	4505	139
0,3	9,4644	4778	4907	5031	5152	5268	5381	5490	5596	5698	99
0,4	9,5797	5894	5987	6078	6166	6252	6336	6417	6496	6573	75
0,5	9,6648	6720	6792	6861	6928	6994	7058	7121	7182	7242	58
0,6	9,7300	7357	7413	7467	7520	7571	7622	7671	7720	7767	46
0,7	9,7813	7858	7902	7945	7988	8029	8069	8109	8147	8185	37
0,8	9,8222	8258	8293	8328	8362	8395	8428	8459	8491	8521	30
0,9	9,8551	8580	8609	8637	8664	8691	8717	8743	8768	8793	24
1,0	9,8817	8841	8864	8887	8909	8931	8952	8973	8994	9014	20
1,1	9,9034	9053	9072	9090	9108	9126	9144	9161	9177	9194	16
1,2	9,9210	9226	9241	9256	9271	9285	9300	9314	9327	9341	13
1,3	9,9354	9367	9379	9391	9404	9415	9427	9438	9450	9460	11
1,4	9,9471	9482	9492	9502	9512	9522	9531	9540	9550	9558	9
1,5	9,9567	9576	9584	9592	9601	9608	9616	9624	9631	9639	7
1,6	9,9646	9653	9660	9666	9673	9679	9686	9692	9698	9704	6
1,7	9,9710	9716	9721	9727	9732	9738	9743	9748	9753	9758	5
1,8	9,9763	9767	9772	9776	9781	9785	9789	9794	9798	9802	4
1,9	9,9806	9810	9813	9817	9821	9824	9828	9831	9834	9838	3
2,0	9,9841	9844	9847	9850	9853	9856	9859	9862	9864	9867	3
2,1	9,9 70	9872	9875	9877	9880	9882	9884	9887	9889	9891	2
2,2	9,9893	9895	9898	9900	9902	9904	9905	9907	9909	9911	2
2,3	9,9913	9914	9916	9918	9919	9921	9923	9924	9926	9927	2

F. Wielokąty foremne.

n	$\frac{F}{a^2}$	$\frac{F}{R^2}$	$\frac{F}{r^2}$	$\frac{R}{a}$	$\frac{R}{r}$	$\frac{a}{R}$	$\frac{a}{r}$	$\frac{r}{R}$	$\frac{r}{a}$
3	0,4330	1,2990	5,1962	0,5774	2,0000	1,7321	3,4641	0,5000	0,2887
4	1,0000	2,0000	4,0000	0,7071	1,4142	1,4142	2,0000	0,7071	0,5000
5	1,7205	2,3776	3,6327	0,8507	1,2361	1,1756	1,4531	0,8090	0,6882
6	2,5981	2,5981	3,4641	1,0000	1,1547	1,0000	1,1547	0,8660	0,8660
7	3,6339	2,7364	3,3710	1,1524	1,1099	0,8678	0,9631	0,9010	1,0383
8	4,8284	2,8284	3,3137	1,3066	1,0824	0,7654	0,8284	0,9239	1,2071
9	6,1818	2,8925	3,2757	1,4619	1,0642	0,6840	0,7279	0,9397	1,3737
10	7,6942	2,9389	3,2492	1,6180	1,0515	0,6180	0,6498	0,9511	1,5388
12	11,196	3,0000	3,2154	1,9319	1,0353	0,5176	0,5359	0,9659	1,8660
15	17,642	3,0505	3,1883	2,4049	1,0223	0,4158	0,4251	0,9781	2,3523
16	20,109	3,0615	3,1826	2,5629	1,0196	0,3902	0,3978	0,9808	2,5137
20	31,569	3,0902	3,1677	3,1962	1,0125	0,3129	0,3168	0,9877	3,1569
24	45,575	3,1058	3,1597	3,8306	1,0086	0,2611	0,2633	0,9914	3,7979
32	81,225	3,1214	3,1517	5,1011	1,0048	0,1960	0,1970	0,9952	5,0766
48	183,08	3,1326	3,1461	7,6449	1,0021	0,1308	0,1311	0,9979	7,6285
64	325,69	3,1365	3,1441	10,190	1,0012	0,0981	0,0983	0,9988	10,178

G. Spółczynniki dwumianu Newtona $(n)_1$ do $(n)_{15}$.

n	$(n)_0$	$(n)_1$	$(n)_2$	$(n)_3$	$(n)_4$	$(n)_5$	$(n)_6$	$(n)_7$	$(n)_8$	$(n)_9$	$(n)_{10}$	$(n)_{11}$	$(n)_{12}$	$(n)_{13}$	$(n)_{14}$	$(n)_{15}$
1	1	1														
2	1	2	1													
3	1	3	3	1												
4	1	4	6	4	1											
5	1	5	10	10	5	1										
6	1	6	15	20	15	6	1									
7	1	7	21	35	35	21	7	1								
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1							
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1		
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

H. Różnoczynniki (fakultety) 1! do 12!.

p	$p!$	$1:p!$	p	$p!$	$1:p!$
1	1	1,0	7	5 040	0,000 198 412 698
2	2	0,5	8	40 320	0,000 024 801 587
3	6	0,166 666 666 667	9	362 880	0,000 002 755 732
4	24	0,041 666 666 667	10	3 628 800	0,000 000 275 573
5	120	0,008 333 333 333	11	39 916 800	0,000 000 025 052
6	720	0,001 388 888 889	12	479 001 600	0,000 000 002 088

I. Długości łuków, strzałki łuków, długości cięciw

Kąt środkowy stopni	Długość łuku	Strzałka łuku	Długość cięciwy	Powierzch. odcinka kołowego	Kąt środkowy stopni	Długość łuku	Strzałka łuku	Długość cięciwy	Powierzch. odcinka kołowego
1	0,0175	0,0000	0,0175	0,00000	46	0,8029	0,0795	0,7815	0,04176
2	0,0349	0,0002	0,0349	0,00000	47	0,8203	0,0829	0,7975	0,04448
3	0,0524	0,0003	0,0524	0,00001	48	0,8378	0,0865	0,8135	0,04731
4	0,0698	0,0006	0,0698	0,00003	49	0,8552	0,0900	0,8294	0,05025
5	0,0873	0,0010	0,0872	0,00006	50	0,8727	0,0937	0,8452	0,05331
6	0,1047	0,0014	0,1047	0,00010	51	0,8901	0,0974	0,8610	0,05649
7	0,1222	0,0019	0,1221	0,00015	52	0,9076	0,1012	0,8767	0,05978
8	0,1396	0,0024	0,1395	0,00023	53	0,9250	0,1051	0,8924	0,06319
9	0,1571	0,0031	0,1569	0,00032	54	0,9425	0,1090	0,9080	0,06673
10	0,1745	0,0038	0,1743	0,00044	55	0,9599	0,1130	0,9235	0,07039
11	0,1920	0,0046	0,1917	0,00059	56	0,9774	0,1171	0,9389	0,07417
12	0,2094	0,0055	0,2091	0,00076	57	0,9948	0,1212	0,9543	0,07808
13	0,2269	0,0064	0,2264	0,00097	58	1,0123	0,1254	0,9696	0,08212
14	0,2443	0,0075	0,2437	0,00121	59	1,0297	0,1296	0,9848	0,08629
15	0,2618	0,0086	0,2611	0,00149	60	1,0472	0,1340	1,0000	0,09059
16	0,2793	0,0097	0,2783	0,00181	61	1,0647	0,1384	1,0151	0,09502
17	0,2967	0,0110	0,2956	0,00217	62	1,0821	0,1428	1,0301	0,09958
18	0,3142	0,0123	0,3129	0,00257	63	1,0996	0,1474	1,0450	0,10428
19	0,3316	0,0137	0,3301	0,00302	64	1,1170	0,1520	1,0598	0,10911
20	0,3491	0,0152	0,3473	0,00352	65	1,1345	0,1566	1,0746	0,11408
21	0,3665	0,0167	0,3645	0,00408	66	1,1519	0,1613	1,0893	0,11919
22	0,3840	0,0184	0,3816	0,00468	67	1,1694	0,1661	1,1039	0,12443
23	0,4014	0,0201	0,3987	0,00535	68	1,1868	0,1710	1,1184	0,12982
24	0,4189	0,0219	0,4158	0,00607	69	1,2043	0,1759	1,1328	0,13535
25	0,4363	0,0237	0,4329	0,00686	70	1,2217	0,1808	1,1472	0,14102
26	0,4538	0,0256	0,4499	0,00771	71	1,2392	0,1859	1,1614	0,14683
27	0,4712	0,0276	0,4669	0,00862	72	1,2566	0,1910	1,1756	0,15279
28	0,4887	0,0297	0,4838	0,00961	73	1,2741	0,1961	1,1896	0,15889
29	0,5061	0,0319	0,5008	0,01067	74	1,2915	0,2014	1,2036	0,16514
30	0,5236	0,0341	0,5176	0,01180	75	1,3090	0,2066	1,2175	0,17154
31	0,5411	0,0364	0,5345	0,01301	76	1,3265	0,2120	1,2313	0,17808
32	0,5585	0,0387	0,5512	0,01429	77	1,3439	0,2174	1,2450	0,18477
33	0,5760	0,0412	0,5680	0,01566	78	1,3614	0,2229	1,2586	0,19160
34	0,5934	0,0437	0,5847	0,01711	79	1,3788	0,2284	1,2722	0,19859
35	0,6109	0,0463	0,6014	0,01864	80	1,3963	0,2340	1,2856	0,20573
36	0,6283	0,0489	0,6180	0,02027	81	1,4137	0,2396	1,2989	0,21301
37	0,6458	0,0517	0,6346	0,02198	82	1,4312	0,2453	1,3121	0,22045
38	0,6632	0,0545	0,6511	0,02378	83	1,4486	0,2510	1,3252	0,22804
39	0,6807	0,0574	0,6676	0,02568	84	1,4661	0,2569	1,3383	0,23578
40	0,6981	0,0603	0,6840	0,02767	85	1,4835	0,2627	1,3512	0,24367
41	0,7156	0,0633	0,7004	0,02976	86	1,5010	0,2686	1,3640	0,25171
42	0,7330	0,0664	0,7167	0,03195	87	1,5184	0,2746	1,3767	0,25990
43	0,7505	0,0696	0,7330	0,03425	88	1,5359	0,2807	1,3893	0,26825
44	0,7679	0,0728	0,7492	0,03664	89	1,5533	0,2867	1,4018	0,27675
45	0,7854	0,0761	0,7654	0,03915	90	1,5708	0,2929	1,4142	0,28540

Jeżeli r jest promieniem koła i φ kątem środkowym w stopniach, to:

1) Długość cięciwy: $s = 2\,r \sin\frac{\varphi}{2}$;

2) Strzałka łuku: $h = r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4} = 2\,r \sin^2\frac{\varphi}{4}$;

3) Długość łuku: $l = \pi r \frac{\varphi}{180} = 0{,}017\,453\; r\varphi = \sqrt{s^2 + \frac{16}{3}h^2}$ (w przybliżeniu).

i powierzchnie odcinków kołowych dla promieni = 1.

Kąt środkowy stopni	Długość łuku	Strzałka łuku	Długość cięciwy	Powierzch. odcinka kołowego	Kąt środkowy stopni	Długość łuku	Strzałka łuku	Długość cięciwy	Powierzch. odcinka kołowego
91	1,5882	0,2991	1,4265	0,29420	136	2,3736	0,6254	1,8544	0,83949
92	1,6057	0,3053	1,4387	0,30316	137	2,3911	0,6335	1,8608	0,85455
93	1,6232	0,3116	1,4507	0,31226	138	2,4086	0,6416	1,8672	0,86971
94	1,6406	0,3180	1,4627	0,32152	139	2,4260	0,6498	1,8733	0,88497
95	1,6580	0,3244	1,4746	0,33093	140	2,4435	0,6580	1,8794	0,90034
96	1,6755	0,3309	1,4863	0,34050	141	2,4609	0,6662	1,8853	0,91580
97	1,6930	0,3374	1,4979	0,35021	142	2,4784	0,6744	1,8910	0,93135
98	1,7104	0,3439	1,5094	0,36008	143	2,4958	0,6827	1,8966	0,94700
99	1,7279	0,3506	1,5208	0,37009	144	2,5133	0,6910	1,9021	0,96274
100	1,7453	0,3572	1,5321	0,38026	145	2,5307	0,6993	1,9074	0,97858
101	1,7628	0,3639	1,5432	0,39058	146	2,5482	0,7076	1,9126	0,99449
102	1,7802	0,3707	1,5543	0,40104	147	2,5656	0,7160	1,9176	1,01050
103	1,7977	0,3775	1,5652	0,41166	148	2,5831	0,7244	1,9225	1,02658
104	1,8151	0,3843	1,5760	0,42242	149	2,6005	0,7328	1,9273	1,04175
105	1,8326	0,3912	1,5867	0,43333	150	2,6180	0,7412	1,9319	1,05900
106	1,8500	0,3982	1,5973	0,44439	151	2,6354	0,7496	1,9363	1,07532
107	1,8675	0,4052	1,6077	0,45560	152	2,6529	0,7581	1,9406	1,09171
108	1,8850	0,4122	1,6180	0,46695	153	2,6704	0,7666	1,9447	1,10818
109	1,9024	0,4193	1,6282	0,47844	154	2,6878	0,7750	1,9487	1,12472
110	1,9199	0,4264	1,6383	0,49008	155	2,7053	0,7836	1,9526	1,14132
111	1,9373	0,4336	1,6483	0,50187	156	2,7227	0,7921	1,9563	1,15799
112	1,9548	0,4408	1,6581	0,51379	157	2,7402	0,8006	1,9598	1,17472
113	1,9722	0,4481	1,6678	0,52586	158	2,7576	0,8092	1,9633	1,19151
114	1,9897	0,4554	1,6773	0,53807	159	2,7751	0,8178	1,9665	1,20835
115	2,0071	0,4627	1,6868	0,55041	160	2,7925	0,8264	1,9696	1,22525
116	2,0246	0,4701	1,6961	0,56289	161	2,8100	0,8350	1,9726	1,24221
117	2,0420	0,4775	1,7053	0,57551	162	2,8274	0,8436	1,9754	1,25921
118	2,0595	0,4850	1,7143	0,58827	163	2,8449	0,8522	1,9780	1,27626
119	2,0769	0,4925	1,7233	0,60116	164	2,8623	0,8608	1,9805	1,29335
120	2,0944	0,5000	1,7321	0,61418	165	2,8798	0,8695	1,9829	1,31049
121	2,1118	0,5076	1,7407	0,62734	166	2,8972	0,8781	1,9851	1,32766
122	2,1293	0,5152	1,7492	0,64063	167	2,9147	0,8868	1,9871	1,34487
123	2,1468	0,5228	1,7576	0,65404	168	2,9322	0,8955	1,9890	1,36212
124	2,1642	0,5305	1,7659	0,66759	169	2,9496	0,9042	1,9908	1,37940
125	2,1817	0,5383	1,7740	0,68125	170	2,9671	0,9128	1,9924	1,39671
126	2,1991	0,5460	1,7820	0,69505	171	2,9845	0,9215	1,9938	1,41404
127	2,2166	0,5538	1,7899	0,70897	172	3,0020	0,9302	1,9951	1,43140
128	2,2340	0,5616	1,7976	0,72301	173	3,0194	0,9390	1,9963	1,44878
129	2,2515	0,5695	1,8052	0,73716	174	3,0369	0,9477	1,9973	1,46617
130	2,2689	0,5774	1,8126	0,75144	175	3,0543	0,9564	1,9981	1,48359
131	2,2864	0,5853	1,8199	0,76584	176	3,0718	0,9651	1,9988	1,50101
132	2,3038	0,5933	1,8271	0,78034	177	3,0892	0,9738	1,9993	1,51845
133	2,3213	0,6013	1,8341	0,79497	178	3,1067	0,9825	1,9997	1,53589
134	2,3387	0,6093	1,8410	0,80970	179	3,1241	0,9913	1,9999	1,55334
135	2,3562	0,6173	1,8478	0,82454	180	3,1416	1,0000	2,0000	1,57080

4) Powierzchnia odcinka kołowego $= \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{180}\varphi - \sin\varphi\right)$;

5) Powierzchnia wycinka kołowego $= \frac{\varphi}{360}\pi r^2 = 0{,}008\,726\,65\,\varphi r^2$;

6) $l = r$ odpowiada $\varphi = 57^\circ\ 17'\ 44{,}806'' = 57{,}295\,779\,5^\circ = 206\,264{,}806''$;

7) arc $1^\circ = \pi : 180 = 0{,}017\,453\,292\,52$; log arc $1^\circ = 0{,}241\,877\,367\,6 - 2$;

8) arc $1' = \pi : 10800 = 0{,}000\,290\,888\,21$; log arc $1' = 0{,}463\,726\,117\,2 - 4$;

9) arc $1'' = \pi : 648000 = 0{,}000\,004\,848\,14$; log arc $1'' = 0{,}685\,574\,866\,8 - 6$;

K. Objętość kuli o średnicy d=1 do 200.

d	$\frac{\pi}{6}d^3$	d	$\frac{\pi}{6}d^3$	d	$\frac{\pi}{6}d^3$	d	$\frac{\pi}{6}d^3$	d	$\frac{\pi}{6}d^3$
1	0,523599	41	36086,95	81	278261,8	121	927587,2	161	2185125
2	4,188790	42	38792,39	82	288695,6	122	950775,8	162	2226094
3	14,13717	43	41629,77	83	299387,0	123	974347,7	163	2267574
4	33,51032	44	44602,24	84	310339,1	124	998305,9	164	2309565
5	65,44985	45	47712,94	85	321555,1	125	1022654	165	2352071
6	113,0973	46	50965,01	86	333038,2	126	1047394	166	2395096
7	179,5944	47	54361,60	87	344791,4	127	1072531	167	2438642
8	268,0826	48	57905,84	88	356817,9	128	1098066	168	2482713
9	381,7035	49	61600,87	89	369120,9	129	1124004	169	2527311
10	523,5988	50	65449,85	90	381703,5	130	1150347	170	2572441
11	696,9100	51	69455,91	91	394568,9	131	1177098	171	2618104
12	904,7787	52	73622,18	92	407720,1	132	1204260	172	2664305
13	1150,347	53	77951,81	93	421160,3	133	1231838	173	2711046
14	1436,755	54	82447,92	94	434892,8	134	1259833	174	2758331
15	1767,146	55	87113,75	95	448920,5	135	1288249	175	2806162
16	2144,660	56	91952,32	96	463246,7	136	1317090	176	2854543
17	2572,441	57	96966,83	97	477874,5	137	1346357	177	2903477
18	3053,628	58	102160,4	98	492807,0	138	1376055	178	2952967
19	3591,364	59	107536,2	99	508047,4	139	1406187	179	3003006
20	4188,790	60	113097,3	100	523598,8	140	1436755	180	3053628
21	4849,048	61	118847,0	101	539464,3	141	1467763	181	3104805
22	5575,280	62	124788,2	102	555647,2	142	1499214	182	3156551
23	6370,626	63	130924,3	103	572150,5	143	1531112	183	3208869
24	7238,229	64	137258,2	104	588977,4	144	1563457	184	3261761
25	8181,231	65	143793,3	105	606131,0	145	1596256	185	3315231
26	9202,772	66	150532,6	106	623614,5	146	1629511	186	3369282
27	10305,99	67	157479,1	107	641431,0	147	1663224	187	3423919
28	11494,04	68	164636,2	108	659583,7	148	1697398	188	3479142
29	12770,05	69	172006,9	109	678075,6	149	1732038	189	3534956
30	14137,17	70	179594,4	110	696910,0	150	1767146	190	3591364
31	15598,53	71	187401,8	111	716090,0	151	1802725	191	3648369
32	17157,28	72	195432,2	112	735618,6	152	1838778	192	3705973
33	18816,57	73	203688,8	113	755499,1	153	1875309	193	3764181
34	20579,53	74	212174,8	114	775734,6	154	1912321	194	3822996
35	22449,30	75	220893,2	115	796328,3	155	1949816	195	3882419
36	24429,02	76	229847,3	116	817283,2	156	1987799	196	3942456
37	26521,85	77	239040,1	117	838602,7	157	2026271	197	4003108
38	28730,91	78	248474,9	118	860289,5	158	2065237	198	4064379
39	31059,36	79	258154,6	119	882347,3	159	2104699	199	4126272
40	33510,32	80	268082,6	120	904778,7	160	2144660	200	4188790

L. Tablica czynników *) dla liczb nieparzystych od 1 do 999.

n	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
1	P	P	3·67	7·43	P	3·167	P	P	3^2·89	17·53
3	P	P	7·29	3·101	13·31	P	3^2·67	19·37	11·73	3·7·43
5	P	3·5·7	5·41	5·61	3^4·5	5·101	5·11^2	3·5·47	5·7·23	5·181
7	P	P	3^2·23	P	11·37	3·13^2	P	7·101	3·269	P
9	3^2	P	11·19	3·103	P	P	3·7·29	P	P	3^2·101
11	P	3·37	P	P	3·137	7·73	13·47	3^2·79	P	P
13	P	P	3·71	P	7·59	3^3·19	P	23·31	3·271	11·83
15	3·5	5·23	7·43	3^2·5·7	5·83	5·103	3·5·41	5·11·13	5·163	3·5·61
17	P	3^2·13	7·31	P	3·139	11·47	P	3·239	19·43	7·131
19	P	7·17	3·73	11·29	P	3·173	P	P	3^2·7·13	P
21	3·7	11^2	13·17	3·107	P	P	3^3·23	7·103	P	3·307
23	P	3·41	P	17·19	3^2·47	P	7·89	3·241	P	13·71
25	5^2	5^3	3^2·5^2	5^2·13	5^2·17	3·5^2·7	5^4	5^2·29	2·5^2·11	5^2·37
27	3^3	P	P	3·109	7·61	17·31	3·11·19	P	P	3^2·103
29	P	3·43	P	7·47	3·11·13	23^2	17·37	3^6	P	P
31	P	P	3·7·11	P	P	3^2·59	P	17·43	3·277	7^2·19
33	3·11	7·19	P	3^2·37	P	13·41	3·211	P	7^2·17	3·311
35	5·7	3^3·5	5·47	5·67	3·5·29	5·107	5·127	3·5·7^2	5·167	5·11·17
37	P	P	3·79	P	19·23	3·179	7^2·13	11·67	3^3·31	P
39	3·13	P	P	3·113	P	7^2·11	3^2·71	P	P	3·313
41	P	3·47	P	11·31	3^2·7^2	P	P	3·13·19	29^2	P
43	P	11·13	3^5	7^3	P	3·181	P	P	3·281	23·41
45	3^2·5	5·29	5·7^2	3·5·23	5·89	5·109	3·5·43	5·149	5·13^2	3^3·5·7
47	P	3·7^2	13·19	P	3·149	P	P	3^2·83	7·11^2	P
49	7^2	P	3·83	P	P	3^2·61	11·59	7·107	3·283	13·73
51	3·17	P	P	3^3·13	11·41	19·29	3·7·31	P	23·37	3·317
53	P	3^2·17	11·23	P	3·151	7·79	P	3·251	P	P
55	5·11	5·31	3·5·17	5·71	5·7·13	3·5·37	5·131	5·151	5·3^2·19	5·191
57	3·19	P	P	3·7·17	P	P	3^2·73	P	P	3·11·29
59	P	3·53	7·37	P	3^3·17	13·43	P	3·11·23	P	7·137
61	P	7·23	3^2·29	19^2	P	3·11·17	P	P	3·7·41	31^2
63	3^2·7	P	P	3·11^2	P	P	3·13·17	7·109	P	3^2·107
65	5·13	3·5·11	5·53	5·73	3·5·31	5·113	5·7·19	3^2·5·17	5·173	5·193
67	P	P	3·89	P	P	3^4·7	23·29	13·59	3·17^2	P
69	3·23	13^2	P	3^2·41	7·67	P	3·223	P	11·79	3·17·19
71	P	3^2·19	P	7·53	3·157	P	11·61	3·257	13·67	P
73	P	P	3·7·13	P	11·43	3·191	P	P	3^2·97	7·139
75	3·5^2	5^2·7	5^2·11	3·5^3	5^2·19	5^2·23	3^3·5^2	5^2·31	5^3·7	3·5^2·13
77	7·11	3·59	P	13·29	3^2·53	P	P	3·7·37	P	P
79	P	P	3^2·31	P	P	3·193	7·97	19·41	3·293	11·89
81	3^4	P	P	3·127	13·37	7·83	3·227	11·71	P	3^2·109
83	P	3·61	P	P	3·7·23	11·53	P	3^3·29	P	P
85	5·17	5·37	3·5·19	5·7·11	5·97	3^2·5·13	5·137	5·157	3·5·59	5·197
87	3·29	11·17	7·41	3^2·43	P	P	3·229	P	P	3·7·47
89	P	3^3·7	17^2	P	3·163	19·31	13·53	3·263	7·127	23·43
91	7·13	P	3·97	17·23	P	3·197	P	7·113	3^4·11	P
93	3·31	P	P	3·131	17·29	P	3^2·7·11	13·61	19·47	3·331
95	5·19	3·5·13	5·59	5·79	3^2·5·11	5·7·17	5·139	3·5·53	5·179	5·199
97	P	P	3^3·11	P	7·71	3·199	17·41	P	3·13·23	P
99	3^2·11	P	13·23	3·7·19	P	P	3·233	17·47	29·31	3^3·37
n	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900

*) Podług tablic H. Zimmermanna, str. 202; Berlin 1891, Wilh. Ernst & Sohn.

M. Ważne wartości liczbowe.

π : Liczba Ludolpha = 3,141592653589793.....,
g : Przyśpieszenie wskutek siły ciężkości przyjęto = 9,81 m/Sek.[2]
e : Podstawa logarytmów naturalnych = 2,7182818284590452353...

Wielk.	n	log n	$1:n$	log $(1:n)$
π	3,1415927	0,49715	0,3183099	0,50285—1
2π	6,2831853	0,79818	0,1591549	0,20182—1
3π	9,4247780	0,97427	0,1061033	0,02573—1
4π	12,566371	1,09921	0,0795775	0,90079—2
5π	15,707963	1,19612	0,0636620	0,80388—2
6π	18,849556	1,27530	0,0530516	0,72470—2
7π	21,991149	1,34225	0,0454728	0,65775—2
8π	25,132741	1,40024	0,0397887	0,59976—2
9π	28,274334	1,45139	0,0353678	0,54861—2
$\pi:2$	1,5707963	0,19612	0,6366198	0,80388—1
$\pi:3$	1,0471976	0,02003	0,9549297	0,97997—1
$\pi:4$	0,7853982	0,89509—1	1,2732395	0,10491
$\pi:5$	0,6283185	0,79818—1	1,5915494	0,20182
$\pi:6$	0,5235988	0,71900—1	1,9098593	0,28100
$\pi:7$	0,4487990	0,65205—1	2,2281692	0,34795
$\pi:8$	0,3926991	0,59406—1	2,5464791	0,40594
$\pi:9$	0,3490659	0,54291—1	2,8647890	0,45709
$\pi:12$	0,2617994	0,41797—1	3,8197186	0,58203
$\pi:16$	0,1963495	0,29303—1	5,0929582	0,70697
$\pi:32$	0,0981748	0,99200—2	10,185916	1,00800
$\pi:64$	0,0490874	0,69097—2	20,371833	1,30903
$\pi:108$	0,0290888	0,46373—2	34,377468	1,53627
$\pi:180$	0,0174533	0,24188—2	57,295780	1,75812
π^2	9,8696044	0,99430	0,1013212	0,00570—1
π^3	31,006277	1,49145	0,0322515	0,50855—2
π^4	97,409091	1,98860	0,0102660	0,01140—2
π^5	306,01969	2,48575	0,0032678	0,51425—3
π^6	961,38919	2,98290	0,0010402	0,01710—3
$\sqrt{\pi}$	1,7724539	0,24858	0,5641896	0,75143—1
$\sqrt[3]{\pi}$	1,4645919	0,16572	0,6827841	0,83428—1
$\sqrt[6]{\pi}$	1,2102032	0,08286	0,8263075	0,91714—1
$\pi\sqrt{\pi}$	5,5683280	0,74572	0,1795871	0,25428—1
$\pi\sqrt[3]{\pi}$	4.6011511	0,66287	0,2173352	0,33713—1
$4\pi^2$	39,478418	1,59636	0,0253303	0,40364—2
$\pi^2:4$	2,4674011	0,39224	0,4052847	0,60776—1
$\pi\sqrt{2}$	4,4428829	0,64767	0,2250791	0,35234—1
g	9,81	0,99167	0,1019368	0,00833—1
g^2	96,2361	1,98334	0,0103911	0,01666—2
$\sqrt[3]{g}$	3,1320919	0,49583	0,3192754	0,50417—1

wielkość	n	log n
$\pi:\sqrt{2}$	2,221441	0,34663
$2\sqrt{\pi}$	3,544908	0,54961
$\sqrt{2\pi}$	2,506628	0,39909
$\sqrt{\pi:2}$	1,253314	0,09806
$\sqrt{2:\pi}$	0,797885	0,90194—1
$\sqrt{3:\pi}$	0,977205	0,98998—1
$\sqrt{90:\pi}$	5,352372	0,72855
$\sqrt[3]{2\pi}$	1,845261	0,26606
$\sqrt[3]{\pi:2}$	1,162447	0,06537
$\sqrt[3]{\pi:4}$	0,922635	0,96503—1
$\sqrt[3]{2:\pi}$	0,860254	0,93463—1
$\sqrt[3]{3:\pi}$	0,984745	0,99332—1
$\sqrt[3]{6:\pi}$	1,240701	0,09367
$\sqrt[3]{\pi^2}$	2,145029	0,33144
$\pi\sqrt[3]{\pi^2}$	6,738808	0,82859
$1:2g$	0,050968	0,70730—2
$2\sqrt{g}$	6,264184	0,79686
$\sqrt{2g}$	4,429447	0,64635
$\pi\sqrt{g}$	9,839757	0,99298
$\pi\sqrt{2g}$	13,91536	1,14350
$\pi:\sqrt{g}$	1,003033	0,00132
$\pi:\sqrt{2g}$	0,709252	0,85080—1
$\pi^2:g$	1,006076	0,00263
e	2,718282	0,43429
e^2	7,389056	0,86859
e^3	20,08554	1,30288
e^4	54,59815	1,73718
$1:e$	0,367879	0,56571—1
$1:e^2$	0,135335	0,13141—1
$1:e^3$	0,049787	0,69712—2
$1:e^4$	0,018316	0,26282—2
$\sqrt{e}$	1,648721	0,21715
$\sqrt[3]{e}$	1,395611	0,14476

N. Pierwiastki kwadratowe i sześcienne niektórych ułamków.

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
$^1/_3$	0,57735	0,69336	$^1/_7$	0,37796	0,52276	$^1/_8$	0,35355	0,50000	$^4/_9$	0,66667	0,76314
$^2/_3$	0,81650	0,87358	$^2/_7$	0,53452	0,65863	$^3/_8$	0,61237	0,72112	$^5/_9$	0,74536	0,82207
$^1/_4$	0,50000	0,62996	$^3/_7$	0,65465	0,75395	$^5/_8$	0,79057	0,85499	$^7/_9$	0,88192	0,91964
$^3/_4$	0,86603	0,90856	$^4/_7$	0,75593	0,82983	$^7/_8$	0,93541	0,95647	$^1/_{12}$	0,28868	0,43679
$^1/_6$	0,40825	0,55032	$^5/_7$	0,84515	0,89390	$^1/_9$	0,33333	0,48075	$^5/_{12}$	0,64550	0,74690
$^5/_6$	0,91287	0,94104	$^6/_7$	0,92582	0,94991	$^2/_9$	0,47140	0,60571	$^7/_{12}$	0,76376	0,83555

Uwagi do tablic A do L. (Str. 1 do 39).

Uwagi do tablicy A (str. 1 do 21).

1) Szukamy logarytmu zwyczajnego liczby 0,032 252. (Por. str. 46).
   a) Podług str. 8: mantysa log 323=50 920; mantysa log 322=50 786.
   b) Różnica mantys logarytmów: 50 920—50 786=134.
   c) Mnożymy tę różnicę przez 0,52=134×0,52=69,68.
   d) Dodajemy wartości a) i c): 50 786+69,68=50 856.
   e) Przeto: mantysa log 32 252=50 856, a log 0,032 252=0,508 56—2.

2) Szukamy liczby (Numerus), której logarytm zwyczajny równa się 1,491 45.
   a) Podług str. 8: log 310=2,491 36, więc mantysie 49 136 odpowiada liczba 310.
   b) Dzielimy różnicę danej i najbliższej mniejszej mantysy (49 145—49 136=9) przez różnicę najbliższych do danej mantys: większej i mniejszej (49 276—49 136=140), a otrzymamy: 9 : 140=0,06.
   c) Dodajemy wartości a) i b): 310+0,06=310,06.
   d) Przeto: Num. log 1,491 45=31,006.

3) Do wyciągania pierwiastków kwadratowych i sześciennych danych liczb stosujemy wzory przybliżone b. 16 str. 45.

Przykład. Znaleźć $\sqrt{404\,527}$. Na str. 14 najbliższe $a^2=404\,496$, a przeto $a=636$ i $b=404\,527-404\,496=31$; $2a=1272$; $b:2a=31:1272=0{,}024$. Zatem: $\sqrt{404\,527}=$ $=a+\frac{b}{2a}=636+0{,}024=636{,}024$.

4) Wielokrotne wartości π, np. 34 573 π. Znajdujemy 34 000 π = 106 814 (str. 2) i 573 π=1800 (str. 13), przeto 34 573 π=106 814+1800=108 614.

5) Chcąc wyliczyć 180 : π, znajdujemy najbliższe (str. 3) 57 π=179,07; (180—179,07)× ×1000=930=296 π (por. str. 7), przeto 180 : π=57,296.

Rubryka $^1/_4\,\pi n^2$ oraz tablica K. (str. 38) mogą również służyć do dzielenia przez π. Np. podług str. 17 dla n=771; 46,6873 : π = $7{,}71^2$: 4=59,4441 : 4=14,861 025; następnie podług str. 38: 235 2071 : π=165^2 : 6; to (podług str. 5) = 4492 125 : 6=748 687,5.

6) Znaleźć powierzchnię koła o średnicy 1,784. Powierzchnia koła o pół tak wielkiej średnicy 0,892 (str. 19) F_1=0,624 913; przeto F=4 F_1=4×0,624 913=2,499 652.

Uwagi do tablicy B (str. 22 i 23).

1) Dla $d=65^3/_4$ mamy $U=\pi d$=206,6 i $F=^1/_4\,\pi d^2$=3395,3.

2) Dla wielokrotności liczby $^1/_2$ używamy tablicy A (str. 1 — 21); np. (str. 18): Dla $d=81^1/_2$ mamy U=256,0 i F=5216,8.

Uwagi do tablicy C (str. 24 i 25). Przykłady:

1) *ln* 30=3,4012.
2) *ln* 799=6,6834.
3) *ln* 2,738=*ln* 273,8—*ln* 100=5,6124—4,6052=1,0072.
4) *ln* 2895=*ln* 289,5+*ln* 10=5,6681+2,3026=7,9707.
5) *Num. ln* 1,0629 = [*Num. ln.* (1,0629+*ln* 100)] : 100.
   = [*Num. ln* (1,0629+4,6052)] : 100.
   = [*Num. ln* 5,6681] : 100=289,5 : 100=2,895.

Uwagi do tablic D (str. 26 do 29).

1) Szukamy wartości stycznej (tg), odpowiadającej kątowi 58° 47′ 22″,5.

Mamy: $58^\circ 47' 22'',5 = 58^\circ 47',375$.

a) Na str. 29 znajdujemy: $\operatorname{tg} 58^\circ 40' = 1{,}642\,56$; następnie:

b) $\operatorname{tg} 58^\circ 50' = 1{,}653\,37$.

Różnica 0,010 81 odpowiada kątowi 10′, przeto kątowi 7′,375 odpowiada $\frac{7{,}375}{10}$ powyższej różnicy, a zatem:

c) $\frac{0{,}010\,81 \times 7{,}375}{10} = 0{,}007\,97$.

d) Dodając wartości a) i c), otrzymamy: $\operatorname{tg} 58^\circ 47' 22'',5 = 1{,}650\,53$.

2) Znaleźć kąt, którego wstawa (sin) jest 0,636 62.

a) Na str. 26 znajdujemy: $\operatorname{arc} \sin 0{,}636\,08 = 39^\circ 30'$.

b) Mnożymy różnicę pomiędzy daną i najbliższą mniejszą wstawą $(0{,}636\,62 - 0{,}636\,08 = 0{,}000\,54)$ przez 10: $0{,}000\,54 \times 10 = 0{,}0054$.

c) Dzielimy iloczyn 0,0054 przez różnicę wstaw $(0{,}638\,32 - 0{,}636\,08 = 0{,}002\,24)$; $0{,}0054 : 0{,}002\,24 = 2{,}4107$.

d) Dodajemy wartości a) i c), skąd otrzymamy: $\operatorname{arc} \sin 0{,}636\,62 = 39^\circ 32',4107 = 39^\circ 32' 24'',64$.

Uwagi do tablic E (str. 30 do 34).

1) Przykłady: $\operatorname{Sinh} 1{,}34 = 1{,}7786$. $\operatorname{Sinh} 3{,}37 = 14{,}5221$. $\operatorname{Cosh} 0{,}65 = 1{,}2188$. $\operatorname{Cosh} 2{,}66 = 7{,}1831$. $\operatorname{Log} \operatorname{sinh} 4{,}52 = 11{,}6619 - 10 = 1{,}6619$. $\operatorname{Log} \operatorname{tgh} 0{,}17 = 9{,}2263 - 10$.

2) Dla wartości $\varphi > 5{,}09$ jest w przybliżeniu: $\operatorname{Sinh} \varphi = \operatorname{Cosh} \varphi = \frac{1}{2} e^{\varphi}$, dla $\varphi = 5{,}09$ do 6,908 z dokładnością do jednej dziesiętnej, a dla $\varphi = 6{,}908$ do 9,210 z dokładnością do jednej setnej.

3) Dla wartości $\varphi = 2{,}39$ i więcej $\operatorname{tgh} \varphi$ coraz to bardziej zbliża się do 1.

4) Dla małych wartości φ mamy w przybliżeniu:

$$\log \sinh \varphi = \log \varphi + \tfrac{1}{3} \log \cosh \varphi; \quad \log \operatorname{tgh} \varphi = \log \varphi - \tfrac{2}{3} \log \cosh \varphi.$$

5) Dla wartości $\varphi > 5{,}09$ mamy w przybliżeniu:

$$\log \sinh \varphi = \log \cosh \varphi = 0{,}43429\,\varphi + 0{,}698\,97 - 1 \text{ i}$$
$$\varphi = 2{,}302\,59\,(\log \sinh \varphi + 0{,}301\,03),$$

gdzie $\log 0{,}434\,29 = 0{,}637\,78 - 1$ i $\log 2{,}302\,59 = 0{,}362\,22$.

6) Wartości $\log \operatorname{tgh} \varphi$ i $\log \operatorname{ctgh} \varphi$ otrzymują się również (str. 32 i 33), jak następuje: $\log \operatorname{tgh} \varphi = \log \sinh \varphi - \log \cosh \varphi\ (-10)$; $\log \operatorname{ctgh} \varphi = \log \cosh \varphi - \log \sinh \varphi\ (+10)$.

7) Suma $\cosh \varphi$ i $\sinh \varphi$ dla jednego i tego samego φ daje wartość e^{φ}, różnica daje $e^{-\varphi}$, a przeto: $\cosh \varphi \pm \sinh \varphi = e^{\pm \varphi}$.

Uwagi do tablicy F (str. 35). Szczegóły patrz rozdział VII działu pierwszego. W tablicy tej oznacza: n liczbę boków, F powierzchnię wielokąta, a bok, R promień koła opisanego, r promień koła wpisanego.

Uwagi do tablicy G i H (str. 35). Szczegóły patrz str. 43 i 44.

Uwagi do tablicy J (str. 36 i 37). Mamy znaleźć:

1) Długość łuku o kącie środkowym $75^\circ 33' 16'',2$.

Mamy: $75^\circ 33' 16'',2 = 75^\circ 33',27$.

a) Na str. 36 znajdujemy: łuk kąta $75^\circ = 1{,}3090$;

b) „ „ $76^\circ = 1{,}3265$.

Różnica łuków = 0,0175.

Różnica ta odpowiada kątowi 60′.

c) Kątowi 33′,27 odpowiada przeto: $\frac{0{,}0175 \times 33{,}27}{60} = 0{,}0097$.

d) Suma wartości a) i c) daje szukaną długość łuku 1,3187.

2) Szukamy kąta środkowego łuku 2,2254.

a) Na str. 37 znajdujemy dla kąta 127° łuk 2,2166.

b) Mnożymy różnicę pomiędzy łukiem samym, a najbliższym mniejszym $(2{,}2254 - 2{,}2166 = 0{,}0088)$ przez 60; $0{,}0088 \times 60 = 0{,}528$.

c) Dzielimy otrzymany iloczyn 0,528 przez różnicę łuków 128° i 127°, to jest $(2{,}2340 - 2{,}2166 = 0{,}0174)$; $0{,}528 : 0{,}0174 = 30{,}3448$.

d) Suma wartości a) i c) daje dla łuku 2,2254: kąt środkowy: $127^\circ 30',3448 = 127^\circ 30' 20'',688$.

Uwagi do tablicy L (str. 39). Przykłady: $225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$; $987 = 3 \times 7 \times 47$. P oznacza liczbę pierwszą, tak że np. 419, 971 są liczby pierwsze. Liczby parzyste, dzieląc stosowną ilość razy przez 2, sprowadzamy w końcu do nieparzystych.

II. ARYTMETYKA.

A. Potęgi, pierwiastki, logarytmy.

a. Potęgi.

1. $(+a)^n = +a^n$.
2. $(-a)^{2n} = +a^{2n}$.
3. $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$.
4. $1^m = 1$; $a^1 = a$.
5. $a^m a^n = a^{m+n}$.
6. $a^m : a^n = a^{m-n} = 1 : a^{n-m}$.
7. $a^m b^m = (ab)^m$.
8. $a^m : b^m = (a : b)^m$.
9. $1 : a^m = (1 : a)^m = a^{-m}$.
10. $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m = (a^{-m})^{-n}$.
11. $a^0 = 1$; $0^a = 0$; 0^0 = ilości nieoznaczonej.
12. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; $a^2 = (a+b)(a-b) + b^2$.
13. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a \pm b)^2 = (a \mp b)^2 \pm 4ab$.
14. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$; $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.
15. $\dfrac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}$.
16. $\dfrac{a^{2n+1} + b^{2n+1}}{a+b} = a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots + b^{2n}$.
17. $\dfrac{a^{2n} - b^{2n}}{a+b} = a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - \ldots\ldots - b^{2n-1}$.
18. Jeżeli $a > 1$, to dla $n = \infty$ $\lim a^n = \infty$ i $\lim (1 : a)^n = 0$.

Dwumian Newtona.

Dla całkowitych dodatnych wartości n (oraz dla ułamkowych i odjemnych wartości n, jeżeli $a > b$) mamy:

19. $(a \pm b)^n = a^n \pm n a^{n-1} b + \dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2$

$$\pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \ldots$$

Spółczynniki przy potęgach noszą nazwę **spółczynników dwumianu.** Piszemy w skróceniu:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p} = (n)_p \text{ albo } \binom{n}{p},$$

gdzie n wykładnik potęgi dwumianu, p skaźnik. Mianownik $1\cdot2\cdot3\ldots p$ oznacza się przez $p!$. Mamy $0! = 1$. (Por. tablice G i H, str. 35).

Wzory na spółczynniki dwumianu.

Jeżeli n (wykładnik potęgi dwumianu) i p (skaźnik) są liczby całkowite dodatne, to:

20. $(n)_p = (n)_{n-p}$. 21. $(n)_n = (n)_0 = 1$. 22. $(n)_1 = n$; $(1)_p = 0$.

23. $(n)_{n+p} = 0$. 24. $(n)_{p+1} = (n)_p \dfrac{n-p}{p+1}$.

25. $(n+1)_{p+1} = (n)_{p+1} + (n)_p$.

26. $(n+1)_{p+1} = (n)_p + (n-1)_p + (n-2)_p + \cdots + (p)_p$.

Zastosowania dwumianu Newtona.

Dla n dowolnego, jeżeli $1 > x > -1$, mamy:

27. $(1 \pm x)^n = 1 \pm (n)_1 x + (n)_2 x^2 \pm (n)_3 x^3 + (n)_4 x^4 \pm (n)_5 x^5 + \cdots$

28. $\dfrac{1}{1 \pm x} = (1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp x^5 + x^6 \mp x^7 + \cdots$

29. $\sqrt{1 \pm x} = (1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \dfrac{1}{2} x - \dfrac{1}{2^2 \cdot 2!} x^2 \pm \dfrac{1\cdot3}{2^3\cdot3!} x^3$
$$- \frac{1\cdot3\cdot5}{2^4\cdot4!} x^4 \pm \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2^5\cdot5!} x^5 - \cdots\cdots$$

30. $\dfrac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = (1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \dfrac{1}{2} x + \dfrac{1\cdot3}{2^2\cdot2!} x^2 \mp \dfrac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!} x^3 + \cdots$

b. Pierwiastki.

1. $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$.

2. $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}$.

3. $\sqrt[m]{a:b} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b}$.

4. $\sqrt[m]{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{\sqrt[m]{a}} = a^{-\frac{1}{m}}$.

5. $a^n = (a^p)^{n:p} = \left(\sqrt[p]{a}\right)^{np}$.

6. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m:q]{a^{n:q}} = \sqrt[m:q]{\sqrt[q]{a^n}}$.

7. $\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m:n]{a}$.

8. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$.

9. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$.

10. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$.

11. $\frac{1}{b}\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\frac{a}{b^n}}$.

12. $\sqrt{a\pm b}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}}$.

13. $\sqrt{a^2}=\pm a$; $\sqrt[2n]{a}=\pm a^{\frac{1}{2n}}$. 14. $\sqrt[2n+1]{-a}=-a^{\frac{1}{2n+1}}=-\sqrt[2n+1]{a}$.

15. $\sqrt[2n]{-a}=\sqrt[n]{\sqrt{-a}}=\sqrt[n]{i\sqrt{a}}$, wielkość urojona; patrz niżej.

16. $\sqrt{a^2\pm b}=a\pm\frac{b}{2a}$, $\sqrt[3]{a^3\pm b}=a\pm\frac{b}{3a^2}$, (w przybliżeniu) jeżeli b w porównaniu z a jest bardzo małe.

17. Jeżeli $a>b$, to (w przybliżeniu) $\sqrt{a^2+b^2}=0{,}960\,a+0{,}398\,b$. Błąd jest mniejszy, niż 4% wartości dokładnej.

Dokładniej (podług Schlömilch'a):

$$\sqrt{a^2+b^2}=0{,}9938\,a+0{,}0703\,b+0{,}3567\,\frac{b^2}{a}.$$

18. Jeżeli $a>b>c$, to $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=0{,}939\,a+0{,}389\,b+0{,}297\,c$. Błąd jest mniejszy, niż 6%-wartości dokładnej.

Wielkości urojone.

19. $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $\frac{1}{i}=-i$.

20. $i^{4n+m}=i^m$, więc $i^{4n}=+1$, $i^{4n+1}=+i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$.

21. Każde wyrażenie, składające się z wielkości urojonych, może być przedstawione w postaci $a\pm bi$, gdzie a i b są wielkości rzeczywiste.

22. Jeżeli $a+bi=0$, to $a=0$, $b=0$.
Jeżeli $a+bi=\alpha+\beta i$, to $a=\alpha$, $b=\beta$.

23. $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$; $\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}=\frac{a\alpha+b\beta}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{b\alpha-a\beta}{\alpha^2+\beta^2}i$.

24. $\sqrt{a\pm bi}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$.

25. Każdą wielkość zespoloną można doprowadzić do postaci normalnej:

$$a\pm bi=r\left[\cos(\varphi+2k\pi)\pm i\sin(\varphi+2k\pi)\right];$$

gdzie: $r=+\sqrt{a^2+b^2}$ jest modułem; $\cos\varphi=\frac{a}{r}$, $\sin\varphi=\frac{b}{r}$,

$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$, k liczbą całkowitą.

26. $\left.\begin{array}{l}\cos x + i \sin x = e^{ix}, \\ \cos x - i \sin x = e^{-ix},\end{array}\right\}$ gdzie e oznacza podstawę logarytmów naturalnych (patrz niżej).

27. $(\cos x \pm i \sin x)(\cos y \pm i \sin y) = \cos(x+y) \pm i \sin(x+y)$.

28. $(\cos x \pm i \sin x) : (\cos y \pm i \sin y) = \cos(x-y) \pm i \sin(x-y)$.

29. $1 : (\cos x + i \sin x) = \cos x - i \sin x$.

30. **Wzór Moivre'a** (ważny dla wszelkiej wartości n).

$$(\cos x \pm i \sin x)^n = \cos nx \pm i \sin nx.$$

31. $\sqrt[n]{a+bi} + \sqrt[n]{a-bi} = 2\sqrt[n]{r} \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = u.$

Jeżeli $n = 3$, to $u_1 = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\varphi}{3}$, $u_2 = 2\sqrt[3]{r} \cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$,

$u_3 = 2\sqrt[3]{r} \cos\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$. r, φ i k patrz wzór 25.

32. **Pierwiastki jedności.**

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin \frac{2k\pi}{n}. \\ \sqrt[n]{-1} = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} \pm i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}.\end{array}\right| \begin{array}{l}k \text{ jest liczbą całkowitą, dodatną} \\ \text{od } 0 \text{ do } \frac{n}{2}.\end{array}$$

c. Logarytmy.

1. Jeżeli $\log^b a = c$, to $b^c = a$.

Jeżeli $b > 1$, to $\log^b 0 = -\infty$, $\log^b 1 = 0$, $\log^b b = 1$, $\log^b \infty = \infty$.

2. $\log^b (ac) = \log^b a + \log^b c$.

3. $\log^b \frac{a}{c} = \log^b a - \log^b c$.

4. $\log^b (a^n) = n \log^b a$.

5. $\log^b \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log^b a$.

6. $\log^a x = \log^a b \log^b x = (1 : \log^b a) \log^b x$.

7. Logarytmy o podstawie $e = 2{,}718\,281\,828\,459\cdots$ noszą nazwę logarytmów n a t u r a l n y c h, o podstawie 10—logarytmów z w y c z a j n y c h. Piszą zamiast $\log^e a$ w skróceniu $\ln a$ lub prościej $l\, a$, i zamiast $\log^{10} a$ w skróceniu $\log a$.

8. Mamy: $\log (10^n) = n$; $\log (10^{-n}) = -n$; $\log (a \cdot 10^n) = \log a + n$; $\log (a : 10^n) = \log a - n$. Następnie: $\ln (e^{\pm n}) = \pm n$; $\ln (a \cdot 10^n) = \ln a + \ln (10^n)$; $\ln (a : 10^n) = \ln a - \ln (10^n)$.

9. Liczba (dodatna alboodjemna) całkowitych jedności logarytmu nosi nazwę c e c h y (K), ułamek dziesiętny m a n t y s y (M) logarytmu. Jeżeli $10 > a > 1$, to $\log a$ ma cechę $K = 0$.

Przykłady dla logarytmów zwyczajnych:

$$\log 6494 = \log (6{,}494 \cdot 10^{+3}) = 0{,}812\,51 + 3 = 3{,}812\,51;$$

$$\log 0{,}000\,649\,4 = \log (6{,}494 \cdot 10^{-4}) = 0{,}812\,51 - 4 = (6{,}812\,51 - 10).$$

10. $\ln x = \ln 10 \log x = 2{,}3025850930 \log x;$
$\log x = \log e \ln x = 0{,}4342944819 \ln x$ $\Big\}$ $\ln 10 \cdot \log e = 1.$

11. $\ln(a + bi) = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$ dla $a > 0,$
$= \ln r + i[\varphi + (2k+1)\pi]$ dla $a < 0.$ $\Big\}$ r, φ i k patrz wzór 25, str. 45.

12. $\ln i = i\frac{\pi}{2}$ 13. $i^i = e^{i \ln i} = e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^\pi}} = 0{,}20788.$

B. Nauka o kombinacyach.

1. Liczba możliwych **przemian** (permutacyi) z n różnych przedmiotów (elementów) wynosi $n!$

Jeżeli w liczbie n przedmiotów znajduje się p jednakowych przedmiotów jednego rodzaju, q jednakowych przedmiotów drugiego rodzaju, r jednakowych przedmiotów trzeciego rodzaju i t. d., to liczba wszelkich możliwych przemian wynosi $\frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots}$.

2. Liczba możliwych **kombinacyi** z n przedmiotów, branych po r na raz wynosi:
   a) bez powtórzeń, t. j. jeżeli każdy przedmiot wchodzi do kombinacyi jeden raz tylko: $(n)_r$;
   b) z powtórzeniami, t. j. jeżeli każdy przedmiot wchodzi do kombinacyi r razy: $(n + r - 1)_r$.

3. Liczba możliwych **waryacyi** z n przedmiotów, branych po r na raz, wynosi:
   a) bez powtórzeń (podobnie jak w p. 2): $(n)_r r!$;
   b) z powtórzeniami: n^r.

Waryacye otrzymują się z kombinacyi przez uskutecznienie wszelkich możliwych przemian w każdej kombinacyi.

C. Wyznaczniki.

1. Wyznacznik, składający się z n wierszy i n kolumn (n^2 elementów) nosi nazwę wyznacznika stopnia n-go.

2. Typ ogólny wyznacznika stopnia n-go jest następujący:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & p_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & p_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & p_n \end{vmatrix} = \Sigma\,(\pm a_1 b_2 c_3 \cdots p_n),$$

gdzie $a_1, b_1, \cdots p_n$ oznacza n^2 elementów wyznacznika.

Wyznacznik jest sumą $n!$ wyrazów, z których pierwszy przedstawia szereg elementów, idących po przekątni $a_1, b_2, c_3 \cdots p_n$, a pozostałe tworzą się przez przemiany skaźników. Połowa tak otrzymanych wyrazów ma znak dodatny druga połowa znakodjemny. Znak oddzielnego wyrazu będzie dodatny, jeżeli liczba przemian jego skaźników jest parzysta-odjemny zaś dla nieparzystej liczby przemian.

3. Obliczenie wyznacznika stopnia n-go można uskutecznić, rozkładając go na n podwyznaczników stopnia $(n-1)$-go, np.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1).$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Podwyznacznik do elementu a_p otrzymuje się, jeżeli skreślimy kolumnę a i wiersz p w danym wyznaczniku. Podwyznacznik będzie dodatny albo odjemny zależnie od tego, czy skaźnik będzie nieparzysty albo parzysty.

4. W wyznaczniku można wiersze zmienić na kolumny, np.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

5. Przestawienie dwóch wierszy lub dwóch kolumn wyznacznika daje nam nowy wyznacznik, równy pierwszemu, lecz ze znakiem przeciwnym.

6. Jeżeli w wyznaczniku wszystkie elementy dwóch wierszy albo dwóch kolumn są odpowiednio równe albo proporcyonalne, to wyznacznik równa się zeru, np.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a_1 & na_1 & b_1 \\ a_2 & na_2 & b_2 \\ a_3 & na_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Mnożymy lub dzielimy wyznacznik przez daną liczbę, jeżeli mnożymy lub dzielimy przez nią wszystkie wyrazy jednego wiersza lub jednej kolumny.

$$p \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_1 & pb_1 & pc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_1 & b_1 & c_1 \\ pa_2 & b_2 & c_2 \\ pa_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

8. $$\begin{vmatrix} a_1 + p_1 + q_1, & b_1 & c_1 \\ a_2 + p_2 + q_2, & b_2 & c_2 \\ a_3 + p_3 + q_3, & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1 & b_1 & c_1 \\ q_2 & b_2 & c_2 \\ q_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_1 + p_1, & b_1 + q_1 \\ a_2 + p_2, & b_2 + q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 & b_1 \\ p_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & q_1 \\ a_2 & q_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}.$$

9. Wyznacznik nie zmienia swojej wartości, jeżeli dodamy do elementów wiersza lub kolumny odpowiednie elementy innego wiersza lub kolumny, pomnożone przez liczbę dowolną, np.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + pb_1, & b_1 & c_1 \\ a_2 + pb_2, & b_2 & c_2 \\ a_3 + pb_3, & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

10. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 - a, & x_2 - a, & x_3 - a \\ y_1 - b, & y_2 - b, & y_3 - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & x_1 - a, & y_1 - b \\ 1, & x_2 - a, & y_2 - b \\ 1, & x_3 - a, & y_3 - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

D. Równania.

a. Równania stopnia pierwszego.

1. Dwa równania z dwiema niewiadomemi.

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a_1x + b_1y &= c_1 \end{aligned}\right| \quad x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}; \quad y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}.$$

2. Dwa równania jednorodne z trzema niewiadomemi.

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \end{aligned}\right\}; \quad x:y:z = \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

3. Trzy równania z trzema niewiadomemi.

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \end{aligned}\right\}. \quad \text{Kładąc} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = D, \text{ otrzymamy:}$$

$$x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} : D, \quad y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{vmatrix} : D, \quad z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix} : D.$$

Znaczenie arytmetyczne wyznaczników patrz str. 47 i n.

4. n równań z n niewiadomemi.

1. **Rozwiązanie za pomocą wyznaczników** podane w p. 3. W równaniach liczbowych sposób ten jest dogodny najwyżej przy $n = 4$.

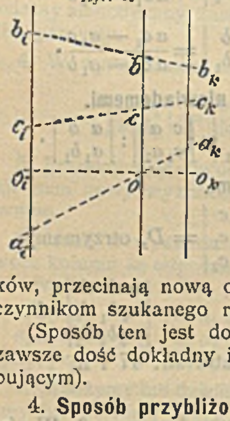
2. **Rugowanie niewiadomych.** Rugujemy jedną i tę samą niewiadomą z n danych równań, łącząc $n - 1$ razy każde dwa z pomiędzy n równań. Z otrzymanych $n - 1$ nowych równań rugujemy w podobny sposób drugą niewiadomą i t. d. postępujemy dotąd, dopóki nie otrzymamy jednego równania z jedną niewiadomą, z którego wyznaczamy wartość tej n-tej niewiadomej. Przez podstawienie znalezionej wartości do jednego z dwóch równań z dwiema niewiadomemi, otrzymamy wartość $(n - 1)$-ej niewiadomej i t. d. kolejno wyznaczamy wartości pozostałych niewiadomych.

Przykład: Czynniki.

$2x - y + 3z + 5u = 29$	3	1	2	
$5x + 2y - 2z + 3u = 15$	-5			
$3x - 4y + 7z - u = 12$		5		
$4x + 3y - 5z + 2u = 3$			-5	
$-19x - 13y + 19z = 12$	-2	-31		
$17x - 21y + 38z = 89$	1			
$-16x - 17y + 31z = 43$		19		
$55x + 5y = 65$	16			
$285x + 80y = 445$	-1			
$505x = 595;$				$x = 1.$
$5y = 65 - 55x = 65 - 55 = 10;$				$y = 2.$
$19z = 12 + 19x + 13y = 12 + 19 + 26 = 57;$				$z = 3.$
$2u = 3 - 4x - 3y + 5z = 3 - 4 - 6 + 15 = 8;$				$u = 4.$

3. **Rugowanie wykreślne.** (Sposób van-den Berg-Mehmke'go*). Przeprowadzamy w odległościach dowolnych tyle osi równoległych, ile mamy niewiadomych; na każdej z nich wybieramy dowolny punkt zerowy, jednostkę długości, oraz kierunek dodatni i odcinamy na odpowiedniej osi (podług danej skali i z zachowaniem znaków) od punktu zerowego odcinki równe spółczynnikom każdego równania; tym sposobem dla każdego równania otrzymujemy szereg punktów na prostej.

Rys. 1.



Jeżeli chcemy np. z i-go i k-go równania wyrugować niewiadomą x (spółczynnikami w tych równaniach są a_i i a_k), to wyznaczamy przecięcie prostej $a_i\, a_k$ z prostą $o_i\, o_k$, łączącą punkty zerowe (fig. 1) i przez punkt o przecięcia przeprowadzamy nową oś, równoległą do pozostałych. Linie $b_i\, b_k$, $c_i\, c_k \ldots$, odpowiadające pozostałym parom spółczynników, przecinają nową oś w punktach b i c, odpowiadających spółczynnikom szukanego równania.

(Sposób ten jest dogodny, lecz przy wielkiej liczbie równań nie zawsze dość dokładny i lepiej jest używać go w połączeniu z następującym).

4. **Sposób przybliżony Seidel-Mehmke'go** *) jest dogodnym w użyciu, gdy liczba równań i niewiadomych jest bardzo wielka. Przedewszystkiem należy dany układ n równań z n niewiadomemi:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \cdots + a_{1n} x_n + c_1 = 0,$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \cdots + a_{2n} x_n + c_2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + \cdots + a_{nn} x_n + c_n = 0$$

*) Por. L. Seidel, Abhandl. d. math.-physik. Klasse d. kgl. bayrischen Akademie d. Wissensch. 1874, tom 11, część III, str. 81; następnie R. Mehmke w zbiorze prac Towarzystwa matematycznego moskiewskiego, 1892, tom 16, str. 342 i str. 437 do 459.

połączyć w grupy po dwa, albo więcej równań. Niech grupą taka, utworzona z i-go i k-go równania, będzie:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}x_i + \cdots + a_{ik}x_k + \cdots + c_i = 0,$$
$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{ki}x_i + \cdots + a_{kk}x_k + \cdots + c_k = 0.$$

Jeżeli znamy już dość przybliżone wartości niewiadomych, to podstawiamy je we wszystkie równania (nie znając tych wartości, przyjmujemy zero, jako pierwszą przybliżoną wartość dla każdej niewiadomej). Lewe strony równań dadzą wówczas wartości w_1, w_2, $w_3 \ldots$, które nazwać można „sprzecznościami“ (Widersprüche). Poprawki ξ_i, ξ_k dla przybliżonych wartości niewiadomych x_i, x_k otrzymamy z równań:

$$a_{ii}\xi_i + a_{ik}\xi_k + w_i = 0,$$
$$a_{ki}\xi_i + a_{kk}\xi_k + w_k = 0,$$

a najlepiej przy pomocy metody wskazanej pod 3.

Po wprowadzeniu tych poprawek otrzymamy z równań danych jako wyrażenia „sprzeczności“:

$$w_1' = w_1 + a_{1i}\xi_i + a_{1k}\xi_k,$$
$$w_2' = w_2 + a_{2i}\xi_i + a_{2k}\xi_k.$$

Przechodzimy następnie do nowej grupy niewiadomych i postępujemy w ten sam sposób. Po poprawieniu wszystkich niewiadomych powtarzamy, w razie potrzeby, te same działania. Aby przy tem postępowaniu módz zbliżać się ciągle do istotnych wartości niewiadomych, wystarcza, żeby dla $l = 1, 2, 3, 4 \ldots (n-1), n$ było za każdym razem a_{ll}, bezwzględnie biorąc, równe przynajmniej sumie bezwzględnej wartości liczb:

$$a_{1l},\ a_{2l},\ \ldots\ a_{l-1,l},\ a_{l+1,l},\ \ldots\ a_{nl}.$$

b. Równania stopnia drugiego.

1. Rozwiązanie algebraiczne.

1. $x^2 + px + q = 0;\qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$

$ax^2 + bx + c = 0;\qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$

2. $x^{2n} + px^n + q = 0;\qquad x = \sqrt[n]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}.$

3. Jeżeli $x \pm y = s$ i $xy = p$, to:

$$x = \frac{s + \sqrt{s^2 \mp 4p}}{2};\qquad y = \pm\frac{s - \sqrt{s^2 \mp 4p}}{2}.$$

2. Rozwiązanie goniometryczne. (Do obliczenia za pomocą logarytmów przy liczbach wielocyfrowych).

Przypadek 1. $x^2 \pm px - q = 0$; p i q dodatne.

Wyznaczamy kąt φ pomiędzy 0^0 i 90^0, tak, żeby:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{q}}{{}^1/_2 p};$$

wówczas pierwiastki będą:

$$x_1 = \pm \sqrt{q} \operatorname{tg} {}^1/_2 \varphi, \qquad x_2 = \mp \frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tg} {}^1/_2 \varphi}.$$

Przypadek 2. $x^2 \pm px + q = 0$; p i q dodatne.

Po wyznaczeniu kąta φ, leżącego w pierwszej ćwierci koła, tak, aby było:

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{q}}{{}^1/_2 p}$$

otrzymamy pierwiastki równania z wzorów:

$$x_1 = \mp \sqrt{q} \operatorname{tg} {}^1/_2 \varphi, \qquad x_2 = \mp \frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tg} {}^1/_2 \varphi}.$$

Jeżeli $\sin \varphi > 1$, wówczas pierwiastki są urojone, mianowicie:

$$x = \sqrt{q} (\cos \psi \pm i \sin \psi),$$

gdzie: $$\cos \psi = \mp \frac{{}^1/_2 p}{\sqrt{q}}$$ (ψ pomiędzy 0^0 a 180^0).

c. Równania stopnia trzeciego.

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0.$$

Jeżeli założymy: $z = x - {}^1/_3 a$,

to otrzymamy równanie stopnia trzeciego postaci:

$$x^3 + px + q = 0.$$

1. Rozwiązanie algebraiczne. Pierwiastki równania:

$$x^3 + px + q = 0$$

otrzymamy podług wzorów Cardana:

$$x_1 = \sqrt[3]{-{}^1/_2 q + \sqrt{({}^1/_2 q)^2 + ({}^1/_3 p)^3}} + \sqrt[3]{-{}^1/_2 q - \sqrt{({}^1/_2 q)^2 + ({}^1/_3 p)^3}},$$

$$x_2 = w_1 \sqrt[3]{-{}^1/_2 q + \sqrt{({}^1/_2 q)^2 + ({}^1/_3 p)^3}} + w_2 \sqrt[3]{-{}^1/_2 q - \sqrt{({}^1/_2 q)^2 + ({}^1/_3 p)^3}},$$

$$x_3 = w_2 \sqrt[3]{-{}^1/_2 q + \sqrt{({}^1/_2 q)^2 + ({}^1/_3 p)^3}} + w_1 \sqrt[3]{-{}^1/_2 q - \sqrt{({}^1/_2 q)^2 + ({}^1/_3 p)^3}},$$

gdzie w_1 i w_2 oznaczają pierwiastki urojone stopnia trzeciego z 1, mianowicie:

$$w_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad w_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Jeżeli $(\frac{1}{2}q)^2 + (\frac{1}{3}p)^3 < 0$, to wszystkie trzy pierwiastki występują w postaci urojonej, jakkolwiek są rzeczywistymi. W przypadku tym stosuje się rozwiązanie goniometryczne (por. przypadek 3).

2. Rozwiązanie goniometryczne.

Przypadek 1. $x^3 + px \pm q = 0;$ p i q dodatne.

Wyznaczamy kąt φ, dla którego:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\frac{1}{2}q}$$

i następnie kąt ψ, dla którego:

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi};$$

wówczas otrzymamy: $x_1 = \mp 2\sqrt{\frac{1}{3}p}\operatorname{ctg}2\psi,$

$$x_2 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\operatorname{ctg}2\psi + i\frac{\sqrt{p}}{\sin 2\psi}, \quad x_3 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\operatorname{ctg}2\psi - i\frac{\sqrt{p}}{\sin 2\psi}.$$

Przypadek 2. $x^3 - px \pm q = 0;$ p i q dodatne; $(\frac{1}{3}p)^3 < (\frac{1}{2}q)^2$

Wyznaczamy kąty pomocnicze φ i ψ takie, że:

$$\sin\varphi = \frac{\frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\frac{1}{2}q}, \qquad \operatorname{tg}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi}.$$

Wówczas otrzymamy: $x_1 = \mp 2\dfrac{\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\sin 2\psi},$

$$x_2 = \pm\frac{\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\sin 2\psi} + i\sqrt{p}\operatorname{ctg}2\psi, \qquad x_3 = \pm\frac{\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\sin 2\psi} - i\sqrt{p}\operatorname{ctg}2\psi.$$

W przypadkach 1 i 2 równania rozwiązują się łatwiej za pomocą funkcyi hyperbolicznych *).

Przypadek 3. $x^3 - px \pm q = 0;$ p i q dodatne; $(\frac{1}{3}p)^3 > (\frac{1}{2}q)^2$.

Wyznaczamy kąt φ, dla którego:

$$\cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}q}{\frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}};$$

wówczas otrzymamy:

$$x_1 = \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos\tfrac{1}{3}\varphi, \quad x_2 = \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos(\tfrac{1}{3}\varphi + 120^0),$$

$$x_3 = \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cos(\tfrac{1}{3}\varphi + 240^0).$$

Przypadek 4. $x^3 - px \pm q = 0;$ p i q dodatne; $(\frac{1}{3}p)^3 = (\frac{1}{2}q)^2$.

$$x_1 = \mp 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}, \qquad x_2 = x_3 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}p}.$$

---

*) Porówn. Ligowski, Tafeln der Hyperbelfunktionen; Berlin 1890; Wilhelm Ernst & Sohn. Ligowski, Taschenbuch der Mathematik, 3 wyd., str. 100; Berlin 1893, Wilhelm Ernst & Sohn.

d. Równania stopnia czwartego.

Sposób Ferrari'ego. Niechaj będzie do rozwiązania równanie:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0; \tag{1.}$$

dla wszelkiej wartości z mamy:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + z\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + 2z\right)x^2 + (az - c)x + z^2 - d. \tag{2.}$$

Wyznaczmy z z równania stopnia trzeciego:

$$\left(\frac{a^2}{4}\right) - b + 2z\left(z^2 - d\right) = \frac{(az - c)^2}{4}$$

albo $$2z^3 - bz^2 + \left(\frac{ac - 4d}{2}\right)z - \left(\frac{a^2}{4} - b\right)d - \frac{c^2}{4} = 0, \tag{3.}$$

i podstawmy znalezioną wartość do równania (2), a strona prawa tego równania będzie przedstawiała kwadrat zupełny; po wyciągnięciu pierwiastku kwadratowego z obu stron otrzymujemy, przy uwzględnieniu znaku podwójnego, dwa równania stopnia drugiego, których pierwiastki będą czyniły zadość danemu równaniu stopnia czwartego.

e. Rozwiązanie przybliżone równań.

1. Sposób Newtona.

Niechaj będzie do rozwiązania równanie $f(x) = 0$. Oznaczmy przez $f'(x)$ pochodną pierwszą funkcyi $f(x)$ względem x (por. str. 70). Znajdujemy przedewszystkiem za pomocą podstawień próbnych wartość przybliżoną x_1 pierwiastka równania; bardziej przybliżoną wartość pierwiastka równania znajdziemy z wzoru:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)};$$

wartością przybliżoną dokładniejszą jest:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \text{ i t. d.}$$

Rachunek często upraszcza się, jeżeli do wyznaczenia wartości x_1 korzystamy ze **sposobu wykreślnego**; nadajemy wówczas wielkości x kilka wartości całkowitych, obliczamy odpowiednie znaczenie funkcyi $f(x)$ i odcinamy je jako rzędne; końce rzędnych łączymy linią krzywą i wybieramy na niej taką wartość x_1, dla której $f(x) = 0$.

Jeżeli wybierzemy na x tylko dwie wartości x_0 i x_u, blizko których znajduje się pierwiastek równania, to krzywa staje się linią prostą. Wartość przybliżona x_1 wyznacza się również za pomocą t. z. reguły fałszywego założenia, mianowicie:

$$x_1 = \frac{x_0 f(x_u) - x_u f(x_0)}{f(x_u) - f(x_0)}.$$

2. Sposób logarytmowo-wykreślny *)
(podług R. Mehmke'go).

1. Rozkładamy stronę lewą równania $f(x) = 0$ sposobem dowolnym na różnicę $[f_1(x) - f_2(x)]$ dwóch funkcyi i czynimy każdą z tych funkcyi równą y; otrzymamy wówczas dwa równania:

$$y = f_1(x), \qquad y = f_2(x).$$

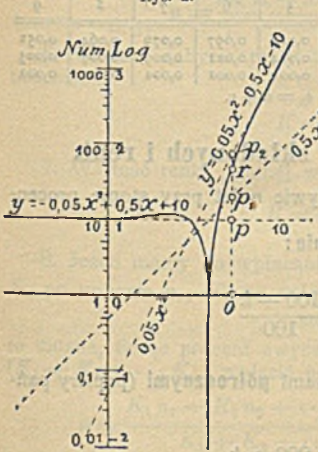
Wykreślamy krzywe, odpowiadające tym równaniom, lecz przyjmujemy przytem za rzędne punktu zmiennego nie x i y, lecz $\log x$ i $\log y$. Odcięte punktów przecięcia tych krzywych będą wyrażały logarytmy pierwiastków rzeczywistych dodatnych równania $f(x) = 0$. Pierwiastki odjemne otrzymamy, jeżeli wyznaczymy pierwiastki dodatne równania $f(-x) = 0$.

2. Jeżeli mamy równanie algebraiczne postaci:

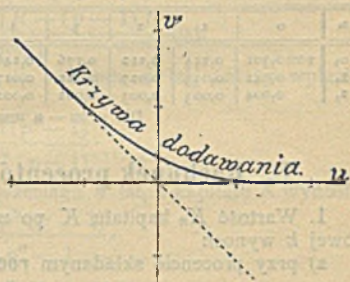
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

to rozkład równania uskutecznia się najłatwiej przez oddzielenie wyrazów dodatnych i odjemnych. Dogodnie bywa czasem podzielić przez potęgę ilości x.

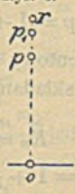
Rys. 2.



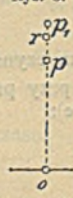
Rys. 3.



Rys. 4.



Rys. 5.



3. Równanie $y = ax^n$ przedstawia logarytmowo (ponieważ $\log y = n \log x + \log a$) linię prostą, przechodzącą przez punkt $\log a$ na osi rzędnych i mającą do osi odciętych nachylenie $n : 1$. Przytem n może mieć znaczenie dowolne.

---

*) Por. Civilingenieur, 1889, t. XXXV, str. 617.

4. Jeżeli $y = ax^n \pm a_1 x^{n_1} \pm \cdots$, to wykreślamy proste, odpowiadające oddzielnym wyrazom.

Jeżeli (fig. 2, str. 55) dowolna równoległa do osi rzędnych, przecina oś odciętych w o, a wykreślone proste w p_1, $p_2 \ldots$, to mierzymy za pomocą skali logarytmowej rzędne op, $op_1 \ldots$, tworzymy sumę algebraiczną znalezionych wartości i odcinamy ją według tej samej skali jako rzędną or, a r będzie punktem krzywej, odpowiadającej funkcyi y. Przykład, patrz fig. 2, str. 55.

5. Dodawanie i odejmowanie logarytmowe dwóch rzędnych op i op_1 można uskutecznić za pomocą **krzywej dodawania** (fig. 3), którą otrzymujemy, jeżeli dla różnych wartości t będziemy odcinali w skali logarytmowej, jako odcięte i rzędne, $u = \log t$, i $v = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)$. Szukamy dla pp_1 (fig. 4, str. 55), jako odciętej, odpowiedniej rzędnej na krzywej dodawania i czynimy jej równem $p_1 r$, wówczas:

$$or = \log(\text{num}\, op + \text{num}\, op_1).$$

Albo w przypadku odejmowania: Dla pp_1 (fig. 5), jako rzędnej, szukamy odpowiedniej odciętej na krzywej dodawania i odcinamy (z zachowaniem znaku) pr równe ilości odjemnej tej odciętej, wówczas:

$$or = \log(\text{num}\, op_1 - \text{num}\, op).$$

Tablica spółrzędnych dla krzywej dodawania.

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,	$v =$ 0,301	0,254	0,212	0,176	0,146	0,119	0,097	0,079	0,064	0,051
1,	0,041	0,033	0,027	0,021	0,017	0,014	0,011	0,009	0,007	0,005
2,	0,004	0,003	0,003	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001

Dla $u_1 = -u$ mamy $v_1 = u + v$.

E. Rachunek procentów składanych i rent.

1. Wartość K_n kapitału K po upływie n lat przy stopie procentowej k wynosi:

a) przy procencie składanym **rocznie**:

$$K_n = Kp^n,$$

gdzie
$$p = 1 + \frac{k}{100} = \frac{100 + k}{100}$$

oznacza czynnik procentowy roczny;

b) przy procencie składanym okresami **półrocznymi** (papiery państwowe):

$$K_n = Kq^{2n},$$

gdzie
$$q = 1 + \frac{k}{2 \cdot 100} = \frac{200 + k}{200}$$

oznacza półroczny czynnik procentowy.

c) przy procencie składanym **ciągłym** (gdy procenty co chwila doliczają się do kapitału):

$$K_n = K e^{\frac{kn}{100}}; \text{ (} e \text{ patrz str. 40).}$$

Dla procentów składanych r o c z n y c h służą prawidła następujące:

2. Jeżeli na początku każdego roku będziemy wkładali sumę S, to w końcu roku n-go wartość wkładów łącznie z procentami wyniesie:

$$W = \frac{p(p^n - 1)}{p - 1} S.$$

3. Jeżeli kapitał K w końcu każdego roku powiększa się albo zmniejsza o jednę i tę samą sumę R, to po upływie n lat wartość jego wyniesie:

$$K_n = Kp^n \pm \frac{R(p^n - 1)}{p - 1}.$$

4. Kapitał K w warunkach powyższych da nam kapitał K_1 po upływie:

$$n = \frac{\log[(p-1)K_1 \pm R] - \log[(p-1)K \pm R]}{\log p} \text{ lat.}$$

5. Jeżeli corocznie odejmuje się od kapitału suma R (renta) większa od procentów rocznych kapitału K, to kapitał zamortyzuje się po upływie:

$$n = \frac{\log R - \log[R - (p-1)K]}{\log p} \text{ lat.}$$

6. W celu nabycia renty R na następne n lat, należy wpłacić obecnie:

$$K = \frac{R(p^n - 1)}{p^n(p - 1)}.$$

7. Wartość renty, płatnej w przeciągu n lat, z kapitału K wynosi:

$$R = \frac{Kp^n(p - 1)}{p^n - 1}.$$

8. Jeżeli mamy do wpłacania:

K_1 po upływie n_1, K_2 po upływie n_2, ... K_m po upływie n_m jednostek czasu,

to można, licząc procent zwyczajny, bez straty lub zysku, całą sumę $(K_1 + K_2 + \cdots K_m)$ wpłacić po upływie:

$$n = \frac{K_1 n_1 + K_2 n_2 + \cdots\cdots + K_m n_m}{K_1 + K_2 + \cdots + K_m} \text{ jednostek czasu.}$$

F. Szeregi.

Dwumian Newtona patrz str. 43 i 44.

a. Szeregi arytmetyczne.

W postępie arytmetycznym $a,\ a + d,\ a + 2d, \ldots\ a + (n-1)d$ wyraz n-ty jest:

$$u = a + (n - 1)d,$$

a suma n pierwszych wyrazów:

$$S = \frac{1}{2}(a + u)\,n = [a + \frac{1}{2}(n - 1)\,d]\,n.$$

b. Szeregi arytmetyczne wyższe.

Niech będzie $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$ szereg arytmetyczny wyższy,

$\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3, \ldots \Delta a_{n-1}$ szereg różnic pierwszych,

$\Delta^2 a_1, \Delta^2 a_2, \Delta^2 a_3, \ldots \Delta^2 a_{n-2}$ szereg różnic drugich i t. d.

gdzie $\Delta a_1 = a_2 - a_1$, $\Delta a_2 = a_3 - a_2$, $\Delta^2 a_1 = \Delta a_2 - \Delta a_1$ i t. d., wówczas wyraz n-ty szeregu głównego będzie:

1. $a_n = a_1 + (n-1)\,\Delta a_1 + (n-1)_2\,\Delta^2 a_1 + (n-1)_3\,\Delta^3 a_1 + \ldots,$

a suma n pierwszych wyrazów:

2. $\Sigma a_n = n\,a_1 + (n)_2\,\Delta a_1 + (n)_3\,\Delta^2 a_1 + (n)_4\,\Delta^3 a_1 + \cdots\cdots$

(spółczynniki dwumianu Newtona patrz str. 43).

Wzór na wyraz n-ty stosuje się i do n ułamkowego i służy do interpolacyi wyrazów pomiędzy wyrazami szeregu danego.

Jeżeli mamy wyższy szereg arytmetyczny rzędu k-go, to wzór na a_n i na Σa_n kończy się na wyrazach, zawierających $\Delta^k a_1$.

Szereg zawierający n wyrazów, może być najwyżej $(n-1)$-go rzędu i wówczas przytoczone powyżej wzory kończą się na wyrazie, zawierającym $\Delta^{n-1} a_1$.

c. Szeregi geometryczne.

W szeregu geometrycznym: $a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1}$ wyraz n-ty:

$$u = aq^{n-1},$$

a suma n pierwszych wyrazów:

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{qu - a}{q - 1}.$$

Jeżeli $n = \infty$, a q jest ułamkiem właściwym dodatnym, albo odjemnym, to:

$$S = \frac{a}{1 - q}.$$

d. Niektóre szeregi szczególne.

1. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \cdots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}.$

2. $p + (p+1) + (p+2) + \cdots + (q-1) + q = \dfrac{(q+p)(q-p+1)}{2}.$

3. $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + \cdots + (2n-2) + 2n = n(n+1).$

4. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \cdots + (2n-3) + (2n-1) = n^2.$

5. $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot2\cdot3}$.

6. $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+\cdots+(n-1)^3+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

7. $1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+\cdots+(n-1)^4+n^4=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$.

8. $\left[\frac{1^m+2^m+3^m+4^m+5^m+6^m+\cdots(n-1)^m+n^m}{n^{m+1}}\right]_{n=\infty}=\frac{1}{m+1}$.

9. $e=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots n}$,
dla $n=\infty$. (Wartość e patrz str. 40).

e. Szeregi potęgowe i logarytmowe.

1. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots; \quad -\infty<x<+\infty$.

2. $a^x=1+\frac{\ln a}{1!}x+\frac{(\ln a)^2}{2!}x^2+\frac{(\ln a)^3}{3!}x^3+\cdots; \quad -\infty<x<+\infty$.

3. $\ln(1\pm x)=\pm x-\frac{x^2}{2}\pm\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\pm\frac{x^5}{5}-\cdots; \quad -1<x<+1$.

4. $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\cdots\right); \quad -1<x<+1$.

5. $\ln\frac{x+1}{x-1}=2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\cdots\right); \quad -1>x, \quad x>+1$.

6. $\ln x=2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^7+\cdots\right]$;
$0<x<\infty$.

7. $\ln(a+x)=\ln a+2\left[\frac{x}{2a+x}+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^5+\cdots\right]$;
$0<a<+\infty$ i $-a<x<+\infty$.

f. Szeregi wyrażające funkcye kołowe i odwrotne łuku.

We wzorach 1 do 4 oznacza: $x=(\pi:180)\,\varphi$, gdzie φ jest kątem środkowym w stopniach

1. $\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\cdots; \quad -\infty<x<+\infty$.

2. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\cdots; \quad -\infty<x<+\infty$.

3. $\operatorname{tg} x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2\cdot x^5}{3\cdot5}+\frac{17\cdot x^7}{3^2\cdot5\cdot7}+\frac{62\cdot x^9}{3^2\cdot5\cdot7\cdot9}+\cdots; \quad -\frac{\pi}{2}<x<+\frac{\pi}{2}$.

4. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2 \cdot 5} - \frac{2x^5}{3^3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{x^7}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} - \cdots; \quad -\pi < x < +\pi.$

5. $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots; \quad -1 \lesseqgtr x \lesseqgtr +1.$

6. $\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots; \quad -1 \lesseqgtr x \lesseqgtr +1.$

7. $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2^7} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 2^9} + \cdots$; (p. str. 40).

8. $\frac{\pi}{4} = 1 - {}^1/_3 + {}^1/_5 - {}^1/_7 + {}^1/_9 - {}^1/_{11} + {}^1/_{13} - {}^1/_{15} + \cdots - \cdots$ (Lubieniecki)

$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - {}^1/_3\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + {}^1/_5\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - {}^1/_7\left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7}\right) + \cdots$ (Euler)

$= 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots\right)$ (Machin)

$= 0{,}785\,398\,163\,397\,448 \ldots$

III. FUNKCYE KOŁOWE I HYPERBOLICZNE.

A. Funkcye kołowe.

(Tablice funkcyi kołowych patrz str. 26 — 29).

Stopni	0	90	180	270	360	30	45	60
sin =	0	+1	0	−1	0	$^1/_2$	$^1/_2\sqrt{2}$	$^1/_2\sqrt{3}$
cos =	+1	0	−1	0	+1	$^1/_2\sqrt{3}$	$^1/_2\sqrt{2}$	$^1/_2$
tg =	0	∞	0	∞	0	$^1/_3\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg =	∞	0	∞	0	∞	$\sqrt{3}$	1	$^1/_3\sqrt{3}$

Funkcye	Kąt φ leży pomiędzy				Jeżeli $\alpha < 90^0$, a kąt $\varphi =$			
	0^0 i 90^0	90^0 i 180^0	180^0 i 270^0	270^0 i 360^0	$\pm\alpha$	$90 \pm \alpha$	$180 \pm \alpha$	$270 \pm \alpha$
$\sin\varphi =$	+	+	—	—	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\varphi =$	+	—	—	+	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
$\operatorname{tg}\varphi =$	+	—	+	—	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\varphi =$	+	—	+	—	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$

$\sin(45^0 \pm \alpha) = \cos(45^0 \mp \alpha)$; $\quad \operatorname{tg}(45^0 \pm \alpha) = \operatorname{ctg}(45^0 \mp \alpha)$.

a. Związki pomiędzy funkcyami jednego i tego samego kąta.

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$ 2. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$

3. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$ 4. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1.$

5. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$ 6. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$

7. $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}}.$

8. $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}}.$

9. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$

10. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$

b. Związki pomiędzy funkcyami dwóch kątów.

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$
2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$
3. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = [\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta] : [1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta].$
4. $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = [\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1] : [\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha].$

5. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin{}^1/_2(\alpha + \beta)\cos{}^1/_2(\alpha - \beta).$
6. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos{}^1/_2(\alpha + \beta)\sin{}^1/_2(\alpha - \beta).$
7. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos{}^1/_2(\alpha + \beta)\cos{}^1/_2(\alpha - \beta).$
8. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin{}^1/_2(\alpha + \beta)\sin{}^1/_2(\alpha - \beta).$

9. $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$ 10. $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$

11. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta).$
12. $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha = \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta).$

13. $\sin\alpha\sin\beta = {}^1/_2\cos(\alpha - \beta) - {}^1/_2\cos(\alpha + \beta).$
14. $\cos\alpha\cos\beta = {}^1/_2\cos(\alpha - \beta) + {}^1/_2\cos(\alpha + \beta).$
15. $\sin\alpha\cos\beta = {}^1/_2\sin(\alpha + \beta) + {}^1/_2\sin(\alpha - \beta).$

16. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}.$

17. $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = \frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = -\frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}.$

18. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}.$

c. Wzory dla wielokrotności i części kąta.

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;\qquad \sin\alpha = 2\sin{}^1/_2\,\alpha\cos{}^1/_2\,\alpha.$
2. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$
3. $\sin n\alpha = n\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha - (n)_3\sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha + (n)_5\sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha - \cdots$
4. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$
5. $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$
6. $\cos n\alpha = \cos^n\alpha - (n)_2\sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha + (n)_4\sin^4\alpha\cos^{n-4}\alpha - \cdots$
7. $\sin{}^1/_2\,\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}} = {}^1/_2\sqrt{1+\sin\alpha} - {}^1/_2\sqrt{1-\sin\alpha}.$
8. $\cos{}^1/_2\,\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} = {}^1/_2\sqrt{1+\sin\alpha} + {}^1/_2\sqrt{1-\sin\alpha}.$
9. $\operatorname{tg}{}^1/_2\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$
10. $\operatorname{ctg}{}^1/_2\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$
11. $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha};\qquad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}{}^1/_2\,\alpha}{1-\operatorname{tg}^2{}^1/_2\,\alpha}.$
12. $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = {}^1/_2\operatorname{ctg}\alpha - {}^1/_2\operatorname{tg}\alpha;\ \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2{}^1/_2\,\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}{}^1/_2\,\alpha}.$
13. $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$ 14. $\operatorname{ctg} 3\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}.$
15. $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}{}^1/_2\,\alpha}{1+\operatorname{tg}^2{}^1/_2\,\alpha}.$ 16. $\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2{}^1/_2\,\alpha}{1+\operatorname{tg}^2{}^1/_2\,\alpha}.$
17. $\sin\alpha \pm \cos\alpha = \pm\sqrt{1\pm\sin 2\alpha} = \sqrt{2}\sin(\alpha \pm {}^1/_4\,\pi).$

d. Potęgi wstawy (Sin.) i dostawy (Cos.).

1. $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha.$ 2. $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha.$
3. $4\sin^3\alpha = -\sin 3\alpha + 3\sin\alpha.$ 4. $4\cos^3\alpha = \cos 3\alpha + 3\cos\alpha.$
5. Jeżeli n nieparzyste, to:

$$\sin^n\alpha = \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-1}\Big[\sin n\alpha - (n)_1\sin(n-2)\alpha + (n)_2\sin(n-4)\alpha - (n)_3\sin(n-6)\alpha + \cdots + (-1)^{\frac{n-3}{2}}(n)_{\frac{n-3}{2}}\sin 3\alpha + (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n)_{\frac{n-1}{2}}\sin\alpha\Big].$$

Jeżeli n parzyste, to:

$$\sin^n \alpha = \frac{1}{2^{n-1}\, i^n}\Big[\cos n\alpha - (n)_1 \cos(n-2)\alpha + (n)_2 \cos(n-4)\alpha - \ldots \ldots + (-1)^{\frac{n-4}{2}} (n)_{\frac{n-4}{2}} \cos 4\alpha + (-1)^{\frac{n-2}{2}} (n)_{\frac{n-2}{2}} \cos 2\alpha\Big] + (-1)^{\frac{n}{2}} (n)_{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2^n\, i^n}\right).$$

6. Jeżeli n nieparzyste, to:

$$\cos^n \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Big[\cos n\alpha + (n)_1 \cos(n-2)\alpha + (n)_2 \cos(n-4)\alpha + (n)_3 \cos(n-6)\alpha + \cdots + (n)_{\frac{n-3}{2}} \cos 3\alpha + (n)_{\frac{n-1}{2}} \cos\alpha\Big].$$

Jeżeli n parzyste, to:

$$\cos^n \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Big[\cos n\alpha + (n)_1 \cos(n-2)\alpha + (n)_2 \cos(n-4)\alpha + \ldots \ldots + (n)_{\frac{n-4}{2}} \cos 4\alpha + (n)_{\frac{n-2}{2}} \cos 2\alpha\Big] + (n)_{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

c. Wzory dla łuków różnych funkcyi.

1. $\operatorname{arc\,sin} u = \operatorname{arc\,cos} \sqrt{1-u^2} = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cos} u.$

2. $\operatorname{arc\,cos} u = \operatorname{arc\,sin} \sqrt{1-u^2} = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\sqrt{1-u^2}}{u} = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sin} u.$

3. $\operatorname{arc\,tg} u = \operatorname{arc\,sin} \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arc\,cos} \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arc\,ctg} \dfrac{1}{u}$

$= {}^1/_2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2u}{1-u^2} = {}^1/_2 \operatorname{arc\,sin} \dfrac{2u}{1+u^2} = {}^1/_2 \operatorname{arc\,cos} \dfrac{1-u^2}{1+u^2}.$

4. $\operatorname{arc\,sin} u \pm \operatorname{arc\,sin} v = \operatorname{arc\,sin}(u\sqrt{1-v^2} \pm v\sqrt{1-u^2})$

$= \operatorname{arc\,cos}(\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2} \mp uv).$

5. $\operatorname{arc\,cos} u \pm \operatorname{arc\,cos} v = \operatorname{arc\,sin}(v\sqrt{1-u^2} \pm u\sqrt{1-v^2})$

$= \operatorname{arc\,cos}(uv \mp \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}).$

6. $\operatorname{arc\,tg} u \pm \operatorname{arc\,tg} v = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{u \pm v}{1 \mp uv}.$ (Dalsze patrz p. b., str. 68).

f. Związki pomiędzy trzema kątami $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.

1. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos{}^1/_2\alpha\cos{}^1/_2\beta\cos{}^1/_2\gamma$.
2. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin{}^1/_2\alpha\sin{}^1/_2\beta\sin{}^1/_2\gamma + 1$.
3. $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin{}^1/_2\alpha\sin{}^1/_2\beta\cos{}^1/_2\gamma$.
4. $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 4\cos{}^1/_2\alpha\cos{}^1/_2\beta\sin{}^1/_2\gamma - 1$.
5. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 2$.
6. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$.
7. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.
8. $\operatorname{ctg}{}^1/_2\alpha + \operatorname{ctg}{}^1/_2\beta + \operatorname{ctg}{}^1/_2\gamma = \operatorname{ctg}{}^1/_2\alpha\operatorname{ctg}{}^1/_2\beta\operatorname{ctg}{}^1/_2\gamma$.
9. $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma = 1$.
10. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.
11. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$.

B. Trójkąty płaskie.

Wzory dla pól trójkątów patrz rozdział VII działu pierwszego.

Niech będzie: a, b, c boki trójkątów,
α, β, γ kąty przeciwległe tym bokom,
ϱ promień koła wpisanego,
r promień koła opisanego,
$s = {}^1/_2(a + b + c)$ połowa sumy boków.

Ponieważ $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, więc i wzory 1 do 11 stosują się także.

a. Wzory ogólne.

1. $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2r$.
2. $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$; $b = c\cos\alpha + a\cos\gamma$; $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$.
3. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$= (b + c)^2 - 4bc\cos^2{}^1/_2\alpha$
$= (b - c)^2 + 4bc\sin^2{}^1/_2\alpha$
4. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma}$.
5. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$.
6. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$.
7. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \dfrac{\varrho}{s-a}$; $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\varrho}{s-b}$.
8. $(a + b) : c = \cos{}^1/_2(\alpha - \beta) : \cos{}^1/_2(\alpha + \beta)$.
9. $(a - b) : c = \sin{}^1/_2(\alpha - \beta) : \sin{}^1/_2(\alpha + \beta)$.
10. $(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg}{}^1/_2(\alpha + \beta) : \operatorname{tg}{}^1/_2(\alpha - \beta)$.
11. $\varrho = 4r\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{abc}{4rs} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$.
12. Długość dwójsiecznej, skierowanej ku bokowi c, wynosi:

$$w = \frac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b} = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}}{a+b}.$$

13. Długość ośrodkowej, skierowanej ku bokowi c, jest:

$$m = {}^1\!/_2 \sqrt{2(a^2+b^2) - c^2}.$$

14. $c^2 = (a+b)^2\left(1 - \frac{w^2}{ab}\right) = 2(a^2 + b^2 - 2m^2).$

b. Trójkąty ukośnokątne.

Dane:	Szukane:	WZORY:
a, b, c	α	$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; albo wzór 5 (dla kątów małych), albo wzór 6 (dla kątów bliskich 90°), patrz pod a., str. 64.
a, b, α	β	$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$.
	γ	$\gamma = 180^0 - (\alpha+\beta)$.
	c	$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = b\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha}$.
		Jeżeli $a > b$, to $\beta < 90^0$ i $\beta < \alpha$. Jeżeli $b > a > b\sin\alpha$, to dla jednego z możliwych trójkątów będzie: $\alpha < \beta < 90^0$, a dla drugiego trójkąta $\beta > 90^0$. Jeżeli $b\sin\alpha > a$, to trójkąt odpowiadający elementom danym nie istnieje.
a, α, β	b, c	$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$; $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$.
a, b, γ	α, β	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma}$; $\beta = 180^0 - (\alpha+\gamma)$. Albo: ${}^1\!/_2(\alpha+\beta) = 90^0 - {}^1\!/_2\gamma$ i $\operatorname{tg}{}^1\!/_2(\alpha-\beta) = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}{}^1\!/_2\gamma$; z oznaczonych ${}^1\!/_2(\alpha+\beta)$ i ${}^1\!/_2(\alpha-\beta)$ określamy α i β.
	c	$c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma} = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a-b}{\cos\varphi}$, jeżeli $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{ab}\sin{}^1\!/_2\gamma}{a-b}$.

c. Trójkąty prostokątne.

a i b przyprostokątnie, c przeciwprostokątnia, α kąt, naprzeciw którego leży bok a.

1. $a = c\sin\alpha$. 2. $b = c\cos\alpha$. 3. $a = b\operatorname{tg}\alpha$. 4. $b = a\operatorname{ctg}\alpha$.
5. $a^2 + b^2 = c^2$.

C. Trójkąty kuliste.

Wzory na pole trójkąta kulistego patrz rozdział VII działu pierwszego.

Niech będą: a, b, c boki trójkąta,
α, β, γ kąty przeciwległe tymże bokom,
$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$,
$\sigma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$,
$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^0$ tak zwany nadmiar kulisty, to:

1. $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$.
2. $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$.
3. $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$.
4. $\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos \gamma + \sin c \cos \alpha$.
   $\operatorname{ctg} a \sin b = \sin \gamma \operatorname{ctg} \alpha + \cos \gamma \cos b$.
5. $\cos \alpha \sin \beta = \sin \gamma \cos a - \sin \alpha \cos \beta \cos c$.
   $\operatorname{ctg} \alpha \sin \beta = \sin c \operatorname{ctg} a - \cos c \cos \beta$.
6. $\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cos(\sigma - \alpha)}{\sin \beta \sin \gamma}}$; $\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma - \beta) \cos(\sigma - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}}$.
7. $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s - b) \sin(s - c)}{\sin b \sin c}}$; $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s - a)}{\sin b \sin c}}$.
8. $\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{\operatorname{ctg} \frac{1}{2} a \operatorname{ctg} \frac{1}{2} b + \cos \gamma}{\sin \gamma}$.
9. $\operatorname{tg} \frac{1}{4} \varepsilon = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} s \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s - b) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s - c)}$.

Analogie Nepera.

1. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a + b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \operatorname{tg} \frac{c}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \operatorname{tg} \frac{c}{2}$.
2. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$.

Wzory Gaussa.

1. $\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} c = \cos \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2} \gamma$.
2. $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} c = \cos \frac{1}{2}(a - b) \cos \frac{1}{2} \gamma$.
3. $\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2} c = \sin \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2} \gamma$.
4. $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2} c = \sin \frac{1}{2}(a - b) \cos \frac{1}{2} \gamma$.

Dla trójkąta kulistego **prostokątnego**, w którym c jest przeciwprostokątnią, a przeto $\gamma = 90^0$, mamy wzory następujące:

1. $\cos c = \cos a \cos b = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$;

2. $\cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}$; 3. $\cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$;

4. $\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$; 5. $\cos \alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$; 6. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$.

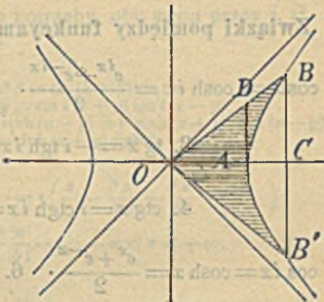
D. Funkcye hyperboliczne. *)

(Tablice funkcyi hyperbolicznych patrz str. 30 — 34).

a. Wzory zasadnicze.

1. Funkcye hyperboliczne znajdują się w takim samym związku odnośnie do hyperboli, w jakim funkcye kołowe (sin, cos, ...) do koła Niech (rys. 6) O będzie środkiem, A wierzchołkiem równobocznej hyperboli (por. rozdział VI **B. b** 2), której półoś rzeczywista OA równa się jedności; niech B będzie punktem dowolnym na krzywej; przeprowadzamy BB' prostopadle do OA i wyznaczamy punkt C przecięcia cięciwy BB' z osią rzeczywistą i punkt D przecięcia promienia OB ze styczną AD w wierzchołku hyperboli. Odcinki BC, OC i DA uważamy jako funkcye zakreskowanego pola hyperboli $OBAB'O$ i oznaczamy:

Rys. 6.



$$BC = \sinh\varphi,$$
$$OC = \cosh\varphi,$$
$$DA = \operatorname{tgh}\varphi,$$

gdzie φ = polu $OBAB'O$ = podwójnemu polu $OBAO$.

Następnie oznaczamy $\dfrac{1}{\operatorname{tgh}\varphi} = \operatorname{ctgh}\varphi$.

2. Mamy: $\sinh\varphi = \dfrac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$; $\cosh\varphi = \dfrac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$;

$\operatorname{tgh}\varphi = \dfrac{\sinh\varphi}{\cosh\varphi} = \dfrac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}$; $\operatorname{ctgh}\varphi = \dfrac{\cosh\varphi}{\sinh\varphi} = \dfrac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}$; | e patrz str. 40.

$\cosh\varphi + \sinh\varphi = e^{\varphi}$; $\cosh\varphi - \sinh\varphi = e^{-\varphi}$; $\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1$.

3. Funkcye hyperboliczne, podobnie jak kołowe, są funkcyami peryodycznemi; lecz peryod jest tu urojony i dla funkcyi sinh i cosh równa się $2i\pi$, dla funkcyi tgh i ctgh równa się $i\pi$. Dla rzeczywistej wartości zmiennej φ mamy:

$$\cosh\varphi \geqq 1, \qquad -1 \leqq \operatorname{tgh}\varphi \leqq +1, \qquad \operatorname{ctgh}^2\varphi \geqq 1,$$

podczas gdy $\sinh\varphi$ może przyjmować wszelkie wartości (dodatne lub odjemne).

4. Mamy: $\sinh(-\varphi) = -\sinh\varphi$; $\cosh(-\varphi) = +\cosh\varphi$;
$\operatorname{tgh}(-\varphi) = -\operatorname{tgh}\varphi$; $\operatorname{ctgh}(-\varphi) = -\operatorname{ctgh}\varphi$;

---

*) Zbiór szczegółowy wzorów i tablic znajduje się: Ligowski, Tafeln der Hyperbelfunktionen i t. d., Berlin 1890, Wilhelm Ernst & Sohn.

b. Jeżeli $\sinh\varphi = u$, to pisze się $\varphi = \operatorname{ar}\sinh u$, czyli, że $\operatorname{ar}\sinh u$ oznacza takie pole hyperboli, której sinh równy jest u. Odpowiednio oznacza się $\operatorname{ar}\cosh u$, $\operatorname{ar}\operatorname{tgh} u$, $\operatorname{ar}\operatorname{ctgh} u$ *).

Mamy:

$$\operatorname{ar}\sinh u = \ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right); \qquad \operatorname{ar}\operatorname{tgh} u = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u};$$

$$\operatorname{ar}\cosh u = \ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right); \qquad \operatorname{ar}\operatorname{ctgh} u = \frac{1}{2}\ln\frac{u+1}{u-1};$$

b. Związki pomiędzy funkcyami kołowemi i hyperbolicznemi.

1. $\cos x = \cosh ix = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$. 2. $\sin x = -i\sinh ix = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

3. $\operatorname{tg} x = -i\operatorname{tgh} ix = -i\,\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}$.

4. $\operatorname{ctg} x = i\operatorname{ctgh} ix = i\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}}$.

5. $\cos ix = \cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$. 6. $\sin ix = i\sinh x = i\,\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$.

7. $\operatorname{tg} ix = i\operatorname{tgh} x = i\,\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

8. $\operatorname{ctg} ix = -i\operatorname{ctgh} x = -i\,\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$.

9. $\operatorname{arc}\cos x = -i\operatorname{ar}\cosh x = -i\ln\left[x + i\sqrt{1-x^2}\right]$.

10. $\operatorname{arc}\sin x = -i\operatorname{ar}\sinh x = -i\ln\left[ix + \sqrt{1-x^2}\right]$.

11. $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = -i\operatorname{ar}\operatorname{tgh} ix = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+ix}{1-ix}$.

12. $\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x = i\operatorname{ar}\operatorname{ctgh} ix = \frac{1}{2i}\ln\frac{ix-1}{ix+1}$.

13. $\operatorname{arc}\cos ix = -i\operatorname{ar}\cosh ix = \frac{1}{2}\pi - i\ln\left[x + \sqrt{1+x^2}\right]$.

14. $\operatorname{arc}\sin ix = i\operatorname{ar}\sinh x = i\ln\left[x + \sqrt{1+x^2}\right]$.

15. $\operatorname{arc}\operatorname{tg} ix = i\operatorname{ar}\operatorname{tgh} x = \frac{i}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

16. $\operatorname{arc}\operatorname{ctg} ix = -i\operatorname{ar}\operatorname{ctgh} x = -\frac{i}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$.

Wzory 9 do 16 porównaj z wzorami pod e., str. 63.

*) Oznaczenie ar pochodzi od area = powierzchnia (pole).

c. Właściwości funkcyi hyperbolicznych.

Związki, wyprowadzone w III., A. (str. 60 i n.) dla funkcyi kołowych i ich wartości odwrotnych, stosują się w swej postaci i do funkcyi hyperbolicznych, oraz ich wartości odwrotnych, należy jednakże niekiedy zmienić znak. Stosujemy zasadę następującą: ze związku dla funkcyi kołowej otrzymuje się odpowiedni związek dla funkcyi hyperbolicznej, podstawiając w pierwszy $\alpha = ix$, $\beta = iy$ i stosując równania:

$$\cos ix = \cosh x, \quad \sin ix = i \sinh x, \quad \operatorname{tg} ix = i \operatorname{tgh} x, \quad \operatorname{ctg} ix = -i \operatorname{ctgh} x$$

po uprzedniem podzieleniu, w razie potrzeby, obu stron przez $i, i^2 \ldots.$ (Por. uwagi do tablic E., str. 42).

Przykłady.

1. Na str. 61 b. 11 mamy: $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$.
Dla $\alpha = ix$, $\beta = iy$ będzie $\sin^2 ix - \sin^2 iy = \sin i(x+y) \sin i(x-y)$,
albo $i^2 \sinh^2 x - i^2 \sinh^2 y = i \sinh(x+y)\, i \sinh(x-y) = i^2 \sinh(x+y) \sinh(x-y)$;

$$\text{przeto } \sinh^2 x - \sinh^2 y = \sinh(x+y) \sinh(x-y).$$

2. Z wzoru f. 1, str. 59 wynika:

$$\sin ix = \frac{ix}{1!} - \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} - \cdots = i\left(\frac{x}{1!} - \frac{i^2 x^3}{3!} + \frac{i^4 x^5}{5!} - \cdots\right);$$

$$\text{przeto } \sinh x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots; \; -\infty < x < +\infty.$$

IV. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY.

A. Wzory różniczkowe.

W wzorach przytoczonych poniżej $x, y, z, u \ldots.$ mogę być zmiennemi niezależnemi, jak również funkcyami jednej i tej samej zmiennej (t).

1. $d(a+x) = dx.$
2. $d(ax) = a \cdot dx.$
3. $d(x+y+z+u+\cdots) = dx + dy + dz + du + \cdots$
4. $d(xy) = x \cdot dy + y \cdot dx.$
5. $d(xyzu \cdots) = \left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{du}{u} + \cdots\right) xyzu \cdots$
6. $d\frac{x}{y} = \frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{y^2}.$ 7. $d\frac{m+nx}{p+qx} = \frac{np - mq}{(p+qx)^2} dx.$
8. $dx^m = mx^{m-1} \cdot dx.$ 9. $d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$ 10. $d\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}.$

11. $de^x = e^x \cdot dx$. 12. $da^x = a^x \ln a \cdot dx$.

13. $dx^y = x^{y-1}(x \ln x \cdot dy + y \cdot dx)$.

14. $d \ln x = \frac{dx}{x}$. 15. $d\,{}^a\!\log x = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{dx}{x}$.

16. $d \sin x = \cos x \cdot dx$. 17. $d \frac{1}{\sin x} = -\frac{\cos x \cdot dx}{\sin^2 x}$.

18. $d \cos x = -\sin x \cdot dx$. 19. $d \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x \cdot dx}{\cos^2 x}$.

20. $d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$. 21. $d \operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$.

22. $d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 23. $d \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

24. $d \operatorname{arc\,tg} x = \frac{dx}{1+x^2}$. 25. $d \operatorname{arc\,ctg} x = -\frac{dx}{1+x^2}$.

Wogóle:

26. $d F(x,y,z,u \cdots) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial u} du + \cdots$

27. $d^n F(x,y,z,u \cdots) = \frac{\partial^n F}{\partial x^n} dx^n + n \frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + \cdots$

albo (symbolicznie) $= \left(\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \cdots \right)^n$,

jeżeli, po rozwinięciu w prawej stronie nawiasu podług dwumianu Newtona, (p. str. 43) zastąpimy n-tą potęgę ∂F w liczniku n-tą pochodną cząstkową funkcyi F.

B. Szeregi Taylora i Maclaurina.

I. Szereg Maclaurina.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-2)}(0) + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n.$$

$f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ... $f^{(n-1)}(0)$ oznaczają wartości, które przybierają $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... $f^{(n-1)}(x)$ dla $x=0$. Wyraz dopełniający, czyli resztę szeregu wyraża:

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\Theta x) \text{ albo } R_n = \frac{(1-\Theta)^{n-1} x^n}{(n-1)!} f^{(n)}(\Theta x),$$

gdzie Θ oznacza dodatny ułamek właściwy.

2. Szereg Taylora.

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{h^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-2)}(x)+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+R_n.$$

Reszta szeregu wynosi:

$$R_n=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\Theta h) \text{ albo } R_n=\frac{(1-\Theta)^{n-1}h^n}{(n-1)!}f^{(n)}(x+\Theta h),$$

gdzie Θ oznacza dodatny ułamek właściwy.

3. $$f(x+h, y+k)=f(x, y)+\delta f(x, y)+\frac{1}{2!}\delta^2 f(x, y)$$
$$+\frac{1}{3!}\delta^3 f(x, y)+\frac{1}{4!}\delta^4 f(x, y)+\cdots, \text{ gdzie}$$

$$\delta f(x, y)=h\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}+k\frac{\partial f(x, y)}{\partial y},$$
$$\delta^2 f(x, y)=h^2\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2},$$
$$\delta^3 f(x, y)=h^3\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3}+3h^2k\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2\,\partial y}+3hk^2\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x\,\partial y^2}+k^3\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3}$$

i t. d.

Szeregi Maclaurina i Taylora można wtedy tylko stosować, gdy $f(x)$, oraz wszystkie pochodne, w granicach od 0 do x i od x do $x+h$ są **skończone i ciągłe**.

C. Postacie nieoznaczone.

1. $\frac{0}{0}$. Jeżeli ułamek $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ dla $x=a$ przybiera postać $\frac{0}{0}$, to otrzymamy wartość istotną, jeżeli utworzymy $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ i podstawimy $x=a$; $\varphi'(x)$ i $\psi'(x)$ są pochodnemi funkcyi $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ względem x. Jeżeli $\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$ przybiera znów postać $\frac{0}{0}$, to wartość istotna będzie $\frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}$ i t. d.

2. $\frac{\infty}{\infty}$. Postępujemy tak samo, jak w przypadku $\frac{0}{0}$.

3. $0 . \infty$. Jeżeli w $\varphi(x)\cdot\psi(x)$ dla $x=a$, będzie $\varphi(x)=0$ i $\psi(x)=\infty$, to dla otrzymania wartości istotnej należy założyć $\frac{1}{\psi(x)}=f(x)$ i postąpić, jak w przypadku 1.

4. 0^0, 1^∞, ∞^0. Jeżeli wyrażenie $\varphi(x)^{\psi(x)}$ dla $x=a$ przyjmuje jedną z postaci powyższych, to, gdy założymy $\varphi(x)^{\psi(x)}=y$, otrzymamy: $\ln y=\psi(x)\cdot\ln\varphi(x)$, przeto $y=e^{\psi(x)\cdot\ln\varphi(x)}$. Załóżmy następnie $\ln\varphi(x)=f(x)$, a otrzymamy wyrażenie $e^{\psi(x)\cdot f(x)}$, w którem wykładnik wyznacza się jak w przypadku 3.

5. $\infty-\infty$. Wyrażenie $\varphi(x)-\psi(x)=\infty-\infty$ sprowadza się do przypadku 1, mianowicie:

$$\varphi(x)-\psi(x)=\frac{\frac{1}{\psi(x)}-\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)\cdot\psi(x)}}=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty\cdot\infty}}=\frac{0}{0}.$$

D. Maxima i Minima.

(Największości i najmniejszości).

1. Funkcya jednej zmiennej. Wartość x, przy której funkcya $y=f(x)$ staje się największą, albo najmniejszą, wyznacza się z równania:

$$f'(x)=0,$$

gdzie: y jest największem, jeżeli $f''(x)<0$,
y „ najmniejszem, „ $f''(x)>0$.

Gdy $f''(x)=0$, a znalezione wartości x mają czynić zadość warunkom maximum i minimum, wówczas powinno być również $f'''(x)=0$, a odpowiednio $f^{IV}(x)\gtrless 0$; i t. d.

2. Funkcya niewyraźna: $f(x, y)=0$. Wartości, przy których y daje maximum albo minimum, winny zadość uczynić równaniom:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0,\quad f(x,y)=0 \text{ i warunkowi } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\gtrless 0.$$

$$y \text{ jest największem, jeżeli } \left[-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]:\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]<0;$$

$$y \text{ „ najmniejszem, „ } \left[-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]:\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]>0.$$

3. Funkcya z dwiema zmiennemi niezależnemi: $z=f(x, y)$. Wartości x i y, przy których funkcya daje maximum albo minimum, otrzymują się z równań:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0.$$

z warunkiem: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right]^2>0,$

natenczas, jeżeli $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0$, to z jest maximum,

„ „ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$, to z jest minimum.

4. **Maxima i minima względne.** Jeżeli maxima i minima funkcyi $v = f(x, y, z)$ mają jednocześnie czynić zadość warunkom $\varphi(x, y, z) = 0$ i $\psi(x, y, z) = 0$, to oznaczmy:

$$u = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z) \text{ i załóżmy:}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x) + \lambda\varphi'(x) + \mu\psi'(x) = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(y) + \lambda\varphi'(y) + \mu\psi'(y) = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = f'(z) + \lambda\varphi'(z) + \mu\psi'(z) = 0;$$

$f'(x)$ oznacza pochodnę cząstkową funkcyi $f(x, y, z)$ względem x i t. d.

Następnie mamy:

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$
$$\psi(x, y, z) = 0.$$

Z trzech pierwszych z pomiędzy pięciu tych równań rugujemy wielkości pomocnicze λ i μ i następnie z pomocą dwóch ostatnich równań znajdujemy wartości x, y i z, które odpowiadają maximum albo minimum.

E. Rozkład ułamków wymiernych na ułamki proste.

Na ułamki proste mogą być rozłożone tylko ułamki wymierne postaci:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \cdots Px + Q}{x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + px + q}.$$

Rozłóżmy $F(x)$ na iloczyn czynników linijnych i w tym celu rozwiążmy równanie:

$$F(x) = 0.$$

Jeżeli α, β, γ, δ, . . . będą pierwiastkami tego równania, to:

$$F(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) \ldots\ldots$$

Odróżniamy trzy przypadki:

1. α, β, γ, δ . . . . . są **rzeczywiste i różne.**

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\alpha_1}{x - \alpha} + \frac{\beta_1}{x - \beta} + \frac{\gamma_1}{x - \gamma} + \frac{\delta_1}{x - \delta} + \ldots\ldots$$

Liczniki α_1, β_1, γ_1 . . . . otrzymamy z równań:

$$\alpha_1 = \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}, \quad \beta_1 = \frac{f(\beta)}{F'(\beta)}, \quad \gamma_1 = \frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)}, \quad \delta_1 = \frac{f(\delta)}{F'(\delta)} \text{ i t. d.}$$

2. Pomiędzy pierwiastkami są **równe** i niechaj α powtarza się m razy, β r razy; wówczas:

$$F(x) = (x - \alpha)^m (x - \beta)^r (x - \gamma)(x - \delta) \ldots,$$

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\alpha_1}{(x - \alpha)^m} + \frac{\alpha_2}{(x - \alpha)^{m-1}} + \frac{\alpha_3}{(x - \alpha)^{m-2}} + \cdots + \frac{\alpha_m}{x - \alpha} + \frac{\beta_1}{(x - \beta)^r}$$
$$+ \frac{\beta_2}{(x - \beta)^{r-1}} + \cdots + \frac{\beta_r}{x - \beta} + \frac{\gamma_1}{x - \gamma} + \frac{\delta_1}{x - \delta} + \ldots\ldots$$

Liczniki $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ otrzymujemy jako spółczynniki potęg $z^0, z^1, \ldots z^{m-1}$ przy rozwinięciu, podług wzrastających potęg z, następującego wyrażenia:

$$\frac{f(\alpha+z)}{(\alpha-\beta+z)^r(\alpha-\gamma+z)(\alpha-\delta+z)\ldots} = \alpha_1 + \alpha_2 z + \alpha_3 z^2 + \cdots + \alpha_m z^{m-1} + \cdots$$

Podobnie znajduje się $\beta_1, \ldots \beta_r$ z rozwinięcia:

$$\frac{f(\beta+z)}{(\beta-\alpha+z)^m(\beta-\gamma+z)(\beta-\delta+z)\ldots} = \beta_1 + \beta_2 z + \beta_3 z^2 + \cdots + \beta_r z^{r-1} + \cdots$$

γ_1, δ_1 i t d. znajdujemy sposobem wskazanym w 1.

3. Niektóre albo wszystkie pierwiastki są **urojone**, tak iż:

$$F(x) = (x-p+qi)(x-p-qi)\,\Phi(x).$$

Jeżeli pierwiastki są różne, to postępujemy jak w punkcie 1. i otrzymujemy:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\alpha_1}{x-p+qi} + \frac{\alpha_2}{x-p-qi} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)},$$

gdzie $\alpha_1 = \frac{f(p-qi)}{F'(p-qi)} = A - iB$, $\alpha_2 = \frac{f(p+qi)}{F'(p+qi)} = A + iB$.

Jeżeli rachunek chcemy przeprowadzić wyłącznie liczbami rzeczywistemi, to obydwa urojone (należące do siebie) ułamki proste łączymy w jeden; otrzymamy wtedy jeden ułamek prosty rzeczywisty, którego mianownik będzie stopnia d r u g i e g o; i będzie:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{2A(x-p) - 2Bq}{(x-p)^2+q^2} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)}.$$

Jeżeli napotykają się pierwiastki urojone równe, to postępujemy, jak w przypadku 2.

F. Wzory całkowe.

a. Wzory ogólne.

We wzorach 1. do 3. u i v są funkcyami zmiennej x.

1. $\int a \cdot du = a\int du = au + C.$

2. $\int (u+v)\,dx = \int u \cdot dx + \int v \cdot dx.$ (Całkowanie przez rozkład).

3. $\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du.$ (Całkowanie przez części).

4. $\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(y)]\,\varphi'(y)\,dy.$ (Całkowanie przez podstawienie).

5. $\frac{\partial}{\partial \alpha}\int f(x, \alpha)\cdot dx = \int \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx.$ (Różniczkowanie pod znakiem całkowym).

6. $\int dy \int f(x, y)\, dx = \int dx \int f(x, y)\, dy.$ (Odwrócenie porządku całkowania).

7. $\int \int \varphi(x)\, dx \cdot dx = x \int \varphi(x)\, dx - \int x\, \varphi(x)\, dx.$

b. Funkcye wymierne.

8. $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$ 9. $\int \frac{1}{x^n}\, dx = -\frac{1}{(n-1)\, x^{n-1}} + C.$

10. $\int (a + bx)^n\, dx = \frac{(a + bx)^{n+1}}{(n+1)\, b} + C.$

11. $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C = \ln cx.$

12. $\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b} \ln (a + bx) + C = \frac{1}{b} \ln c\, (a + bx).$

13. $\int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + C.$ 14. $\int \frac{dx}{(a + bx)^2} = -\frac{1}{b\, (a + bx)} + C.$

15. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,ctg} x + C.$

16.*) $\int \frac{dx}{1 - x^2} = {}^1/_2 \ln \frac{1 + x}{1 - x} + C = \operatorname{ar\,tgh} x + C;$ $\quad x < 1.$

17.*) $\int \frac{dx}{x^2 - 1} = {}^1/_2 \ln \frac{x - 1}{x + 1} + C = -\operatorname{ar\,ctgh} x + C;$ $\quad x > 1.$

18. $\int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, x \right) + C.$

19. $\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{ab} + bx}{\sqrt{ab} - bx} + C$

$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{ar\,tgh} \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, x \right) + C.$ $\quad a > 0,\ b > 0.$

20. $\int \frac{dx}{a + 2bx + cx^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{ac - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{b + cx}{\sqrt{ac - b^2}} + C,$ jeżeli $ac - b^2 > 0;$

$= \frac{1}{2\sqrt{b^2 - ac}} \ln \frac{\sqrt{b^2 - ac} - b - cx}{\sqrt{b^2 - ac} + b + cx} + C$

$= -\frac{1}{\sqrt{b^2 - ac}} \operatorname{ar\,tgh} \frac{b + cx}{\sqrt{b^2 - ac}} + C,$ jeżeli $b^2 - ac > 0;$

---

*) O funkcyach hyperbolicznych i ich odwrotnych, patrz str. 67 i nast.

następnie $\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2} = -\frac{1}{b+cx} + C$, jeżeli $b^2 = ac$.

21. $\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{\beta}{2c} \ln(a+2bx+cx^2) + \frac{ac-\beta b}{c} \int \frac{dx}{a+2bx+cx^2}$.

22. Jeżeli w $\int \frac{f(x)\,dx}{a+2bx+cx^2}$ funkcya $f(x)$ jest funkcyą całkowitą stopnia wyższego niż pierwszy, to rozkładamy funkcyę znajdującą się pod znakiem całkowym na funkcyę całkowitą i na sumę ułamków prostych wymiernych, poczem całkujemy oddzielne składniki.

23. $$\int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^p} = \frac{1}{2(ac-b^2)(p-1)} \cdot \frac{b+cx}{(a+2bx+cx^2)^{p-1}} + \frac{(2p-3)c}{2(ac-b^2)(p-1)} \int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^{p-1}}.$$

24. $$\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{(a+2bx+cx^2)^p} = -\frac{\beta}{2c(p-1)} \cdot \frac{1}{(a+2bx+cx^2)^{p-1}} + \frac{ac-\beta b}{c} \int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^p}.$$

25. Jeżeli $\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \int \frac{Ax^m + Bx^{m-1} + \cdots + Px + Q}{x^n + ax^{n-1} + \cdots + px + q}\,dx$ i $m > n$, to za pomocą dzielenia wydzielamy funkcyę całkowitą, a pozostałą funkcyę ułamkową rozkładamy na ułamki proste (patrz str. 73 i 74) i całkujemy każdą część oddzielnie.

c. Funkcye niewymierne.

26. $\int \sqrt{a+bx} \cdot dx = \frac{2}{3b} (\sqrt{a+bx})^3 + C$.

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b} \sqrt{a+bx} + C$.

28. $\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{3b^2}(3\alpha b - 2a\beta + \beta bx)\sqrt{a+bx} + C$.

29. Całka $\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x)\sqrt{a+bx}}$ przez podstawienie $y = \sqrt{a+bx}$ sprowadza się do postaci N. 18 albo N. 19 (str. 75). (Por. też N. 30).

30. $\int \frac{f\left(x, \sqrt[n]{a+bx}\right)}{\varphi\left(x, \sqrt[n]{a+bx}\right)}\,dx$. Podstawiamy $\sqrt[n]{a+bx} = y$.

31. $$\int x^{m-1}(a+bx)^n\,dx = \frac{x^{m-1}(a+bx)^{n+1}}{(m+n)\,b} - \frac{(m-1)\,a}{(m+n)\,b}\int x^{m-2}(a+bx)^n\,dx$$
$$= \frac{x^m(a+bx)^n}{m+n} + \frac{na}{m+n}\int x^{m-1}(a+bx)^{n-1}\,dx.$$

32. $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$$
$$= 2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.$$

33. *) $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left[x+\sqrt{a^2+x^2}\right] + C = {}^1/_2\ln\left[\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{-x+\sqrt{a^2+x^2}}\right] + C$$
$$= \mathrm{ar\,sinh}\,\frac{x}{a} + C.$$

34. *) $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left[b+cx+\sqrt{c}\cdot\sqrt{a+2bx+cx^2}\right] + C;\quad c>0.$$
$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\,\mathrm{ar\,sinh}\,\frac{b+cx}{\sqrt{ac-b^2}} + C,\ \text{jeżeli}\ ac-b^2>0;$$
$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\,\mathrm{ar\,cosh}\,\frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}} + C,\ \text{jeżeli}\ b^2-ac>0;$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{-c}}\arcsin\frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}} + C,\ \text{jeżeli}\ c<0.$$

35. $$\int\frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{\beta}{c}\sqrt{a+2bx+cx^2} + \frac{\alpha c-\beta b}{c}\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} + C.$$

36. $$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{x^{m-1}X}{mc} - \frac{(m-1)\,a}{mc}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{X} - \frac{(2m-1)\,b}{mc}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{X},$$

gdzie $X=\sqrt{a+2bx+cx^2}$.

37. *) $$\int\sqrt{a^2+x^2}\cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\,\mathrm{ar\,sinh}\,\frac{x}{a} + C.$$

---

*) O funkcyach hyperbolicznych i odwrotnych por. str. 67 i nast.

38. $\int\sqrt{a^2-x^2}\cdot dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

39. *) $\int\sqrt{x^2-a^2}\cdot dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C.$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\operatorname{ar\,cosh}\frac{x}{a}+C.$$

40. $\int\sqrt{a+2bx+cx^2}\cdot dx=\frac{b+cx}{2c}\sqrt{a+2bx+cx^2}$

$$+\frac{ac-b^2}{2c}\int\frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}+C.$$

41. Całka $\int\frac{dx}{(x-a)^p X}$ przez podstawienie $\frac{1}{x-a}=y$ sprowadza się do postaci N. 36 (str. 77).

42. Całka $\int\frac{A+Bx}{\alpha+2\beta x+\gamma x^2}\cdot\frac{dx}{X}$ przez podstawienie $x=\frac{py+q}{y+1}$, gdzie p i q wyznaczają się z równań:

$$\gamma pq+\beta(p+q)+\alpha=0$$
$$cpq+b(p+q)+a=0$$

i po założeniu $y^2=z$, sprowadza się do dwóch całek postaci:

$$\int\frac{dz}{(\alpha_1+\gamma_1 z)\sqrt{a_1+c_1 z}} \quad \text{i} \quad \int\frac{dz}{(\alpha_2+\gamma_2 z)\sqrt{a_1 z+c_1 z^2}},$$

które rozwiązują się podług N. 29 (str. 76) i N. 41.

43. W celu znalezienia całki $\int\frac{f(x)}{F(x)}\cdot\frac{dx}{X}$ rozkładamy ułamek $\frac{f(x)}{F(x)}$, po uprzedniem wydzieleniu funkcyi całkowitej, na ułamki proste i uskuteczniamy całkowanie podług N. 41, jeżeli napotykają się ułamki urojone, to łączymy je podług N. 42.

44. $\int\frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{X^3}=\frac{(a\beta-b\alpha)+(b\beta-c\alpha)x}{(b^2-ac)\sqrt{a+2bx+cx^2}}+C.$

d. Funkcye przestępne.

45. $\int e^x\cdot dx=e^x+C.$ 46. $\int a^x\cdot dx=\frac{a^x}{\ln a}+C.$

47. $\int x^n e^{ax}\cdot dx=\frac{x^n e^{ax}}{a}\left[1-\frac{n}{ax}+\frac{n(n-1)}{a^2x^2}-\cdots\pm\frac{n!}{a^n x^n}\right]+C.$

*) O funkcyach hyperbolicznych i odwrotnych, por. str. 67 i nast.

48. $\int \ln x \cdot dx = x \ln x - x + C.$

49. $\int \frac{(\ln x)^n}{x} dx = \frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1} + C.$

---

50. $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C.$ 51. $\int \cos x \cdot dx = \sin x + C.$

52. $\int \sin^2 x \cdot dx = -{}^1/_4 \sin 2x + {}^1/_2 x + C.$

53. $\int \cos^2 x \cdot dx = {}^1/_4 \sin 2x + {}^1/_2 x + C.$

54. $\int \sin mx \cdot dx = -\frac{\cos mx}{m} + C.$ 55. $\int \cos mx \cdot dx = \frac{\sin mx}{m} + C.$

56. $\int \sin mx \cos nx \cdot dx = -\frac{\cos (m+n) x}{2 (m+n)} - \frac{\cos (m-n) x}{2 (m-n)} + C.$

57. $\int \sin mx \sin nx \cdot dx = \frac{\sin (m-n) x}{2 (m-n)} - \frac{\sin (m+n) x}{2 (m+n)} + C.$

58. $\int \cos mx \cos nx \cdot dx = \frac{\sin (m-n) x}{2 (m-n)} + \frac{\sin (m+n) x}{2 (m+n)} + C.$

59. $\int \operatorname{tg} x \cdot dx = -\ln \cos x + C.$ 60. $\int \operatorname{ctg} x \cdot dx = \ln \sin x + C.$

61. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$ 62. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$

63. $\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$ 64. $\int \frac{dx}{1 - \cos x} = -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C.$

65. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$ 66. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

67. $\int \sin x \cos x \cdot dx = {}^1/_2 \sin^2 x + C.$ 68. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln \operatorname{tg} x + C.$

69. *) $\int \sin^n x \cdot dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \cdot dx.$

70. *) $\int \cos^n x \cdot dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \cdot dx.$

71. $\int \operatorname{tg}^n x \cdot dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \cdot dx.$

---

*) Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to zamiast danych tu wzorów redukcyjnych stosujemy podstawienie $\cos x = z$ albo $\sin x = z$. Całkowanie może być również wykonane za pomocą wzorów 1 i 2 str. 68 i N. 54 i 55.

72. $\int \operatorname{ctg}^n x \cdot dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x \cdot dx.$

73. $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}.$

74. $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}.$

75.*) $\int \sin^p x \cos^q x \cdot dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+q} + \frac{q-1}{p+q}\int \sin^p x \cos^{q-2} x \cdot dx$

$= -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{p+q} + \frac{p-1}{p+q}\int \sin^{p-2} x \cos^q x \cdot dx.$

76.*) $\int \sin^{-p} x \cos^q x \cdot dx = -\frac{\sin^{-p+1} x \cos^{q+1} x}{p-1} + \frac{p-q-2}{p-1}\int \sin^{-p+2} x \cos^q x \cdot dx.$

77.*) $\int \sin^p x \cos^{-q} x \cdot dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{-q+1} x}{q-1} + \frac{q-p-2}{q-1}\int \sin^p x \cos^{-q+2} x \cdot dx.$

78. $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} {}^1\!/_2 x\right) + C$, jeżeli $a^2 > b^2$;

$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{b + a\cos x + \sin x\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x} + C,$

$= \frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}} \operatorname{ar\,tgh}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \operatorname{tg} {}^1\!/_2 x\right) + C,$ jeżeli $a^2 < b^2$.

79. $\int \frac{\cos x \cdot dx}{a+b\cos x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{a+b\cos x} + C.$

80. $\int \frac{\sin x \cdot dx}{a+b\cos x} = -\frac{1}{b}\ln(a+b\cos x) + C.$

81. $\int \frac{A + B\cos x + C\sin x}{a + b\cos x + c\sin x} dx = A\int \frac{d\varphi}{a+p\cos\varphi}$

$+ (B\cos\alpha + C\sin\alpha)\int \frac{\cos\varphi \cdot d\varphi}{a+p\cos\varphi} - (B\sin\alpha - C\cos\alpha)\int \frac{\sin\varphi \cdot d\varphi}{a+p\cos\varphi},$

jeżeli założymy $b = p\cos\alpha$, $c = p\sin\alpha$ i $x - \alpha = \varphi$.

82. $\int e^{ax}\sin bx \cdot dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2} e^{ax} + C.$

83. $\int e^{ax}\cos bx \cdot dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} e^{ax} + C.$

---

*) Jeżeli p lub q jest liczbą nieparzystą, to całkowanie uskutecznia się łatwiej przez podstawienie $\cos x = z$ i $\sin x = z$.

84. $\int \arcsin x \cdot dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

85. $\int \arccos x \cdot dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$

86. $\int \operatorname{arc\,tg} x \cdot dx = x \operatorname{arc\,tg} x - {}^1/_2 \ln (1+x^2) + C.$

87. $\int \operatorname{arc\,ctg} x \cdot dx = x \operatorname{arc\,ctg} x + {}^1/_2 \ln (1+x^2) + C.$

88. Całkowanie wyrażeń wymiernych **funkcyi hyperbolicznych** $\sinh x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$, $\operatorname{ctgh} x$ (i odwrotnych) uskutecznia się za pomocą odpowiednich wzorów dla funkcyj kołowych (i odwrotnych); należy tylko założyć $x = iy$ i korzystać ze związków:

$$\cos ix = \cosh x, \quad \sin ix = i \sinh x, \quad \operatorname{tg} ix = i \operatorname{tgh} x, \quad \operatorname{ctg} ix = -i \operatorname{ctgh} x.$$

e. Całkowanie za pomocą rozwinięcia na szeregi.

Jeżeli w całce $\int f(x)\,dx$ funkcyę $f(x)$ można rozwinąć w szereg, zbieżny wśród danych granic przedziału całkowania dla x, to, po uskutecznieniu całkowania wszystkich wyrazów szeregu, otrzymamy szereg całkowy, zbieżny w tych samych granicach zmiennej x.

Z szeregu Maclaurina (str. 70) wynika:

89. $$\int f(x)\,dx = f(0)\,x + f'(0)\frac{x^2}{2} + \frac{f''(0)}{2!}\frac{x^3}{3} + \frac{f'''(0)}{3!}\frac{x^4}{4} + \cdots$$

90. $$\int_0^x \frac{dx}{\ln x} = 0{,}5772156649\ldots + \ln(-\ln x) + \ln x + {}^1/_2 \frac{(\ln x)^2}{2!} + {}^1/_3 \frac{(\ln x)^3}{3!} + \cdots; \; 0 < x < 1.$$

91. $\int_0^x \frac{e^x \cdot dx}{x}$ sprowadza się przez podstawienie $e^x = z$ do N. 90.

f. Całki określone.

92. $$\int_a^b = -\int_b^a; \qquad \int_a^c = \int_a^b + \int_b^c; \qquad \int_a^c - \int_a^b = \int_b^c.$$

93. $$\int_0^\infty \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}.$$

94. $$\int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{dx}{a+bx^2} = \int_{\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\infty} \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}.$$

95. $$\int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{b}}.$$

96. $$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2};\ b > 0.$$

97. $$\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{x}\, dx = \infty.$$

98. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x \cdot dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots\ 2n}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}.$$

99. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \cdot dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\ 2n}\,\frac{\pi}{2}.$$

n liczba całkowita, dodatna.

100. $$\int_0^{\infty} e^{-x} \cdot dx = 1.$$

101. $$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot dx = {}^1/_2\sqrt{\pi}.$$

102. $$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \cdot dx = \frac{n!}{a^{n+1}};$$ a liczba dodatna, n całkowita, dodatna.

103. $$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1} \cdot dx}{x+1} = \frac{\pi}{\sin n\pi};\ 0 < n < 1.$$

g. Przybliżone obliczanie całek określonych.

Mamy $\int_a^b f(x)\, dx.$

Dzielimy $b-a$ na n równych części $\frac{b-a}{n} = h$ i obliczamy dla wartości $x = a$, $x = a + h$, $x = a + 2h, \ldots\ldots$ odpowiednie wartości $f(x) = y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots\ldots$ poczem otrzymamy:

104. $$\int_a^b f(x)\, dx = h\,[{}^1/_2\, y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + {}^1/_2\, y_n]$$
$$- \frac{B_1 h^2}{2!}[f'(b) - f'(a)] + \frac{B_2 h^4}{4!}[f'''(b) - f'''(a)] - \cdots$$

$B_1, B_2, \ldots\ldots$ są to liczby Bernoulli'ego i oznaczają:

$$B_1=\frac{1}{6},\ B_2=\frac{1}{30},\ B_3=\frac{1}{42},\ B_4=\frac{1}{30},\ B_5=\frac{5}{66},\ B_6=\frac{691}{2730}\ \text{i t. d.}$$

105. $$\int_a^b f(x)\,dx=h\left[{}^1\!/_2\,y_0+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}+{}^1\!/_2\,y_n\right]$$

$$-\frac{1}{12}h^2\left[f'(b)-f'(a)\right]+\frac{1}{384}\varrho\frac{(b-a)^5}{n^4}M.$$

Ostatni wyraz służy do ocenienia błędu, gdzie ϱ jest ułamek właściwy $(0<\varrho<1)$ a M największa wartość bezwzględna, jaką może mieć $f^{IV}(x)$ w granicach $x=a$ do $x=b$.

106. **Prawidło Simpsona:** $$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{3}\left[y_0+4y_1+2y_2+4y_3\right.$$

$$\left.+2y_4+\cdots+4y_{n-1}+y_n\right]-\frac{5}{288}\varrho\frac{(b-a)^5}{n^4}M.$$

n powinno być liczbą parzystą. ϱ i M patrz wzór N. 105. Wzór N. 105 jest dokładniejszy od wzoru N. 106.

G. Równania różniczkowe.

a. Równania różniczkowe rzędu 1-go.

1. $$f(x)\,dx+\varphi(y)\,dy=0.$$

Rozwiązanie: $$\int f(x)\,dx+\int\varphi(y)\,dy=C.$$

2. **Oddzielenie zmiennych.**

$$f(x)\,\varphi(y)\,dx+F(x)\,\psi(y)\,dy=0.$$

Rozwiązanie: $$\int\frac{f(x)}{F(x)}dx+\int\frac{\psi(y)}{\varphi(y)}dy=C.$$

3. $$f(x,y)\,dx+\varphi(x,y)\,dy=0.$$

Jeżeli zachowany jest warunek całkowalności:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x},$$ to mamy rozwiązanie:

$$\int f(x,y)\,dx+\int\left[\varphi(x,y)-\int\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx\right]dy=C,$$

albo: $$\int\varphi(x,y)\,dy+\int\left[f(x,y)-\int\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}dy\right]dx=C.$$

4. Jeżeli przytoczony powyżej warunek całkowalności nie jest zachowany, to można go osiągnąć, mnożąc równania przez mnożnik M,

tak zwany **czynnik całkujący,** który winien czynić zadość następującemu równaniu o pochodnych cząstkowych:

$$f(x, y)\frac{\partial M}{\partial y} - \varphi(x, y)\frac{\partial M}{\partial x} = M\left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right).$$

Nieraz można M wyznaczyć z równania:

$$\frac{dy}{f(x, y)} = -\frac{dx}{\varphi(x, y)} = \frac{dM}{M\left[\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right]}.$$

5. Jeżeli rozwiązanie równania względem $\frac{dy}{dx}$ daje:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

to równanie nosi nazwę **jednorodnego.** Równanie takie rozwiązuje się przez założenie:

$$\frac{y}{x} = t, \text{ przeto } y = xt; \quad dy = x \cdot dt + t \cdot dx.$$

Rozwiązanie: $\ln x = \int \frac{dt}{f(t) - t} + C.$

6. Równanie różniczkowe nosi miano **linijnego,** jeżeli ma postać:

$$f_1(x)\frac{dy}{dx} + f(x)\,y + \varphi(x) = 0.$$

Załóżmy $y = uv$, gdzie u i v są funkcyami zmiennej x, a

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Podstawimy obie wartości w równanie dane do rozwiązania i otrzymamy:

$$f_1(x)\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right) + f(x)\,uv + \varphi(x) = 0.$$

u wyznaczamy z równania:

$$f_1(x)\frac{du}{dx} + f(x)\,u = 0 \text{ i wówczas:}$$

$$\ln\frac{u}{c} = -\int \frac{f(x)}{f_1(x)}\,dx, \quad \text{albo} \quad u = ce^{-\int \frac{f(x)}{f_1(x)}dx}.$$

Z powyższego równania mamy na wyznaczenie ilości v równanie:

$$f_1(x)\,u\frac{dv}{dx} + \varphi(x) = 0,$$

albo $v = -\int \frac{\varphi(x)}{u f_1(x)}\,dx + C_1 = -\int\left(\frac{\varphi(x)}{c f_1(x)}\,e^{\int \frac{f(x)}{f_1(x)}dx}\right)dx + C_1.$

Rozwiązanie będzie zatem następujące:

$$y = uv = e^{-\int \frac{f(x)}{f_1(x)}dx}\left[-\int\left(\frac{\varphi(x)}{f_1(x)}\,e^{\int \frac{f(x)}{f_1(x)}dx}\right)dx + C\right].$$

7. **Całkowanie przez różniczkowanie.**

$$y = F\left(x, \frac{dy}{dx}\right).$$

Załóżmy $\frac{dy}{dx} = z$ i zróżniczkujmy względem x, a otrzymamy:

$$z = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx},$$

co odpowiada niekiedy przypadkowi 6. Wartość, znalezioną dla z, należy podstawić w $y = F(x, z)$.

b. Równania różniczkowe rzędu 2-go.

1. $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x).$

Rozwiązania: 1) $y = \int dx \int f(x)\, dx + Cx + C_1.$
2) $y = x\int f(x)\, dx - \int x f(x)\, dx + Cx + C_1.$

2. $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(y).$

Rozwiązanie: $x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int f(y)\, dy}} + C_1.$

Wogóle: $F\left(\frac{d^2 y}{dx^2}, y\right) = 0.$

Załóżmy $\frac{dy}{dx} = z$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$ i wyrugujmy dx z obu równań: $F\left(\frac{dz}{dx}, y\right) = 0$ i $\frac{dy}{dx} = z$. Rozwiązanie równania danego otrzymuje się przez rozwiązanie równania $F\left(\frac{z \cdot dz}{dy}, y\right) = 0$ za pomocą oddzielenia zmiennych.

3. $\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Podstawiwszy $\frac{dy}{dx} = z$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$, otrzymamy dwa równania: $x = \int \frac{dz}{f(z)} + C$ i $y = \int \frac{z \cdot dz}{f(z)} + C_1$, z których przez wyrugowanie z znajdziemy rozwiązanie.

4. $\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}, x\right)$. Podstawmy $\frac{dy}{dx} = z$ i szukajmy rozwiązania równania różniczkowego rzędu 1-go $\frac{dz}{dx} = f(z, x)$. Po znalezieniu rozwiązania $z = \varphi(x)$, pozostanie tylko scałkowanie równania:

$$dy = \varphi(x)\, dx.$$

5. $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}, y\right)$. Załóżmy $\frac{dy}{dx} = z$, $\frac{d^2y}{dx^2} = z\frac{dz}{dy}$ i szukajmy rozwiązania równania różniczkowego rzędu 1-go: $z\frac{dz}{dy} = f(z, y)$. Znalazłszy $z = \varphi(y)$, otrzymamy rozwiązanie równania danego:

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y)} + C.$$

c. Równania różniczkowe linijne rzędu n-go ze spółczynnikami stałymi.

α) Bez funkcyi wikłającej równanie.

1. $$a\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0.$$

Całka: $y = C_1 e^{w_1 x} + C_2 e^{w_2 x} + \cdots\cdots + C_n e^{w_n x}$.

Wielkości $w_1, w_2, \ldots. w_n$ są pierwiastkami równania:

$$a w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots\cdots + a_n = 0.$$

3. Jeżeli pomiędzy tymi pierwiastkami napotykają się urojone, np. $w_3 = p + qi$, to winien istnieć także pierwiastek $w_4 = p - qi$, jeżeli spółczynniki $a_1, a_2, \ldots. a_n$ są rzeczywiste. Rozwiązanie równania różniczkowego będzie:

$$y = C_1 e^{w_1 x} + C_2 e^{w_2 x} + e^{px}[C_3 \cos qx + C_4 \sin qx] + C_5 e^{w_5 x} + \cdots\cdots + C_n e^{w_n x}.$$

3. Jeżeli niektóre pierwiastki będą równe, $w_1 = w_2 = w_3 = \ldots = w_p$, to rozwiązanie równania będzie:

$$y = e^{w_1 x}\left[C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots\cdots + C_p x^{p-1}\right] + C_{p+1} e^{w_{p+1} x} + \cdots\cdots + C_n e^{w_n x}.$$

β) Z funkcyą wikłającą równanie.

$$a\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = f(x).$$

Całka: $$y = z_1 e^{w_1 x} + z_2 e^{w_2 x} + \cdots\cdots + z_n e^{w_n x}.$$

$w_1, w_2, \ldots. w_n$ wyznaczają się podług α); $z_1, z_2, \ldots. z_n$ wyznaczają się z równań:

$$e^{w_1 x}\frac{dz_1}{dx} + e^{w_2 x}\frac{dz_2}{dx} + e^{w_3 x}\frac{dz_3}{dx} + \cdots\cdots + e^{w_n x}\frac{dz_n}{dx} = 0,$$

$$w_1 e^{w_1 x}\frac{dz_1}{dx} + w_2 e^{w_2 x}\frac{dz_2}{dx} + w_3 e^{w_3 x}\frac{dz_3}{dx} + \cdots + w_n e^{w_n x}\frac{dz_n}{dx} = 0,$$

$$w_1^2 e^{w_1 x} \frac{dz_1}{dx} + w_2^2 e^{w_2 x} \frac{dz_2}{dx} + w_3^2 e^{w_3 x} \frac{dz_3}{dx} + \cdots + w_n^2 e^{w_n x} \frac{dz_n}{dx} = 0,$$

. . . .

. . . .

$$w_1^{n-1} e^{w_1 x} \frac{dz_1}{dx} + w_2^{n-1} e^{w_2 x} \frac{dz_2}{dx} + w_3^{n-1} e^{w_3 x} \frac{dz_3}{dx} + \cdots\cdots$$

$$+ w_n^{n-1} e^{w_n x} \frac{dz_n}{dx} = f(x).$$

Jeżeli $f(x)$ jest funkcyą całkowitą rzeczywistą, to y przyjmuje postać:

$$y = C_1 e^{w_1 x} + C_2 e^{w_2 x} + \cdots + C_n e^{w_n x} + F(x),$$

gdzie $F(x)$ jest funkcyą całkowitą rzeczywistą n-go rzędu, w której spółczynniki wyznaczają się podług sposobu spółczynników nieoznaczonych.

γ) Ze stałą wikłającą równanie.

$$a \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = \mu = \text{stałej}.$$

Całka (por. 1., str. 86): $y = \Sigma (C e^{wx}) + \dfrac{\mu}{a_n}$.

V. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I TEORYA BŁĘDÓW.

a. Rachunek prawdopodobieństwa.

1. **Prawdopodobieństwo bezwzględne** pewnego zdarzenia równa się ilorazowi z podzielenia liczby a przypadków pomyślnych dla zdarzenia oczekiwanego przez liczbę n wszystkich możliwych przypadków w założeniu, że wszystkie przypadki uważamy za równomożliwe:

$$w = \frac{a}{n}.$$

$w = 0$ jest symbolem niemożliwości, $w = 1$ oznacza pewność.

2. Jeśli prawdopodobieństwa kilku niezależnych od siebie zdarzeń oznaczymy odpowiednio przez w_1, w_2, $w_3 \ldots$, to prawdopodobieństwo, iż zdarzenia te przytrafią się jednocześnie lub w pewnem oznaczonem następstwie, wyrazi się iloczynem:

$$w = w_1 w_2 w_3 \ldots\ldots$$

3. Prawdopodobieństwo w, iż zajdzie jedno, którekolwiek z pomiędzy kilku wzajem się wyłączających zdarzeń, których prawdopodobieństwa bezwzględne są odpowiednio w_1, w_2, $w_3 \ldots$, wyraża się sumą prawdopodobieństw oddzielnych zdarzeń:

$$w = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots\cdots$$

4. **Prawdopodobieństwami względnemi** dwu zdarzeń nazywamy prawdopodobieństwa otrzymane w założeniu, iż przy obliczaniu wszystkich możliwych przypadków nie brano w rachubę niepomyślnych, zarówno dla pierwszego, jako też dla drugiego z rozważanych zdarzeń. Jeżeli więc prawdopodobieństwa bezwzględne obu zdarzeń oznaczymy odpowiednio przez w_1, w_2, wtedy ilorazy: $\frac{w_1}{w_1 + w_2}$ i $\frac{w_2}{w_1 + w_2}$ będą wyrażały prawdopodobieństwa względne tychże zdarzeń.

5. Prawdopodobieństwo w, iż z pośród dwu zdarzeń A i B, których prawdopodobieństwa są odpowiednio w_1, w_2, pierwsze zajdzie m razy, drugie zaś n razy, i że zdarzenia te nastąpią po sobie w pewnym oznaczonym porządku, wyraża się następującym wzorem:

$$w = w_1^m w_2^n.$$

Przy dowolnem następstwie zdarzeń wyraża się ono w sposób następujący:

$$w = \frac{(m+n)!}{m!\,n!} w_1^m w_2^n.$$

b. Teorya błędów.

Każde spostrzeżenie połączone jest z błędami przypadkowymi. Każdy błąd przypadkowy można uważać jako sumę nieskończenie wielkiej liczby błędów cząstkowych, które, z jednakowem prawdopodobieństwem, mogą wypaść zarówno dodatnymi, jako też odjemnymi. Przy tem założeniu prawdopodobieństwo ω pewnego błędu, zawierającego się w granicach Δ i $\Delta + d\Delta$, wyraża się wzorem:

Rys. 7.

$$\omega = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} \cdot d\Delta,$$

prawdopodobieństwo zaś W błędu, zawartego w granicach Δ_1 i Δ_2, jest:

$$W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} e^{-h^2\Delta^2} \cdot d\Delta.$$

Zachodząca w tych wzorach stała h jest czynnikiem dobranym dla każdego poszczególnego spostrzeżenia i wyrażającym stopień jego dokładności. Ponieważ stała ta wzrasta wraz ze ścisłością, nazywamy ją przeto **spółczynnikiem dokładności** spostrzeżenia.

Przyjmijmy $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}$, oraz odnieśmy to równanie do pewnego układu spółrzędnych prostokątnych, w których odciętemi niech będą błędy Δ, rzędnemi zaś prawdopodobieństwa y, to równanie powyższe przedstawi t. zw. **krzywą prawdopodobieństwa** (rys. 7); ω jest różniczką pola tej krzywej, W—polem krzywej, zawartem pomiędzy odciętemi Δ_1 i Δ_2. Pole całkowite krzywej (liczone od $\Delta = -\infty$ do $\Delta = +\infty$) równa się 1. Dla $\Delta = 0$ mamy:

$$y_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} = 0{,}5642\,h = y_{\max}.$$

Krzywa składa się z dwóch gałęzi symetrycznych względem osi y, oś Δ zaś jest jej niemaltyczną (asymptotą). Punkty krzywej, określone przez odcięte

$$\pm\Delta_1 = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{0{,}707\,107}{h} = \sqrt{\frac{\Sigma(\Delta^2)}{m}}$$

(liczba m oznacza liczbę błędów) i odpowiadającą im rzędną

$$y_1 = 0{,}606\,53\,\frac{h}{\sqrt{\pi}} = 0{,}342\,198\,h,$$

są jej punktami zwrotnymi (B i B_1).

Dla każdego spostrzeżenia danej dokładności istnieje wartość $\Delta = r$, zwana **błędem prawdopodobnym**, ponieważ przy uskutecznianiu spostrzeżeń może zajść tyleż błędów (zarówno dodatnych jak odjemnych) mniejszych od r, ile większych (co do wartości bezwzględnej). Z powyższego określenia wynika, iż prawdopodobieństwo przytrafienia się błędu, zawartego w granicach $+r$ i $-r$, równa się $^1/_2$, oraz iż rzędne krzywej prawdopodobieństwa, odpowiadające odciętym $\pm r$, dzielą na połowy pole tej krzywej, rozciągające się odpowiednio na prawo i na lewo od osi rzędnych.

Błąd prawdopodobny jest odwrotnie proporcyonalny do spółczynnika dokładności i uważa się za jednostkę błędów, z którą porównywamy inne błędy.

Mamy mianowicie:

$$r = \frac{0{,}476\,936\,4}{h} = 0{,}674\,49\,\Delta_1 = 0{,}674\,49\sqrt{\frac{\Sigma(\Delta^2)}{m}},$$

w którym to wzorze m oznacza liczbę błędów. (Co do znaczenia Δ_1, p. rys. 7 na str. 88).

Chcąc się przekonać, czy liczba dokonanych spostrzeżeń była dostatecznie wielką, czy zachodzące przytem błędy były rzeczywiście przypadkowymi, zwłaszcza zaś chcąc się upewnić o dokładności wyniku spostrzeżeń, winniśmy rozpatrzyć ugrupowanie błędów co do ich wielkości, wynikające z powyższych określeń:

Na 1000 spostrzeżeń przypada błędów, zawartych w odstępach co 0,1 r od 0,0 do 1,0 r:

54, 54, 53, 52, 51, 50, 49, 47, 46, 44, razem 500 błędów;

pomiędzy 1,0 r i 2,0 r:

42, 40, 38, 35, 33, 31, 29, 27, 25, 23, razem 323 błędy;

pomiędzy 2,0 r i 3,0 r:

21, 19, 17, 15, 14, 12, 11, 10, 8, 7, razem 134 błędy;

pomiędzy 3,0 r i 3,5 r . . . . 25 błędów;

pomiędzy 3,5 r i 4,0 r . . . . 11 błędów;

pomiędzy 4,0 r i 5,0 r . . . . 6 błędów;

suma 999 błędów.

Z powyższego wynika, iż należy uważać za niepewne spostrzeżenie, którego błąd przewyższa 5,0 r.

c. Metoda najmniejszych kwadratów.

Niech F będzie daną funkcyą pewnej liczby zmiennych niezależnych $x, y, z \ldots$. oraz n stałych $a, b, c \ldots$. Spostrzeżenia dają nam m wartości funkcyi F, odpowiadających danym wartościom $x, y, z \ldots$, pozostaje więc oznaczyć wartość n stałych w założeniu, iż $m > n$.

Gdybyśmy w tym celu tworzyli dowolne układy n równań, z pomiędzy m danych, i rozwiązywali je względem n niewiadomych stałych, to otrzymane w ten sposób układy wartości stałych byłyby, wogóle biorąc, różne, ponieważ znalezione drogą spostrzeżeń wartości funkcyi F nie są wolne od błędów nieuniknionych. Zadanie więc nasze będzie polegało na tem, aby wyznaczyć taki układ wartości stałych, który, przy uwzględnieniu m wartości F, otrzymanych ze spostrzeżeń, jest najprawdopodobniejszy. Rachunek prawdopodobieństwa poucza, że w tym celu należy spełnić warunek:

$$\Sigma(h^2 \Delta^2) = \min.$$

Jeśli dobierzemy taką liczbę h, aby stosunki $\frac{h_1^2}{h^2}, \frac{h_2^2}{h^2}, \frac{h_3^2}{h^2} \ldots$ były liczbami całkowitemi $g_1, g_2, g_3 \ldots$, to warunek ten przybierze postać następującą:

$$\Sigma(g \Delta^2) = \min. \text{ dla spostrzeżeń o różnej dokładności,}$$
$$\Sigma(\Delta^2) = \min. \text{ dla spostrzeżeń o jednakowej dokładności.}$$

Pierwszy przypadek możemy łatwo sprowadzić do drugiego prostszego, powtarzając w pierwszej sumie każdą wartość Δ tyle razy, ile jedności zawiera odpowiedni spółczynnik g, który otrzymał miano **wagi** spostrzeżenia.

1. Funkcye stopnia pierwszego.

Niech funkcya F będzie stopnia pierwszego względem stałych, mających być obliczonemi:

$$F = ax + by + cz + \cdots,$$

gdzie $x, y, z \ldots$. oznaczają zmienne niezależne.

Niechaj następnie $F_1, F_2, F_3 \ldots$. będą wartościami funkcyi F, otrzymanemi ze spostrzeżeń, zaś $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \ldots$. błędami tych spostrzeżeń.

Jeżeli wreszcie liczba równań wynosi m, liczba zaś stałych n ($m > n$), to najprawdopodobniejsze wartości stałych $a, b, c \ldots$. otrzymamy z równań:

$$\Sigma(gFx) = a\Sigma(gx^2) + b\Sigma(gxy) + c\Sigma(gxz) + \cdots$$
$$\Sigma(gFy) = a\Sigma(gyx) + b\Sigma(gy^2) + c\Sigma(gyz) + \cdots$$
$$\Sigma(gFz) = a\Sigma(gzx) + b\Sigma(gzy) + c\Sigma(gz^2) + \cdots$$
i t. d.

w których np. $\Sigma(gyz) = g_1 y_1 z_1 + g_2 y_2 z_2 + \cdots$

Przy jednakowej dokładności wszystkich spostrzeżeń czynnik g znika wszędzie w powyższych równaniach.

Jeśli w równaniu, określającem funkcyę F, którakolwiek ze stałych nie posiada czynnika zmiennego, to należy w ostatnich równaniach, służących do wyznaczenia szukanych stałych, podstawić 1 zamiast odpowiedniej zmiennej.

Rozwiązania równań, wyznaczających stałe, mają postać następującą (por. str. 49):

$$a = A_1 \Sigma(g\,Fx) + B_1 \Sigma(g\,Fy) + C_1 \Sigma(g\,Fz) + \cdots$$
$$b = A_2 \Sigma(g\,Fx) + B_2 \Sigma(g\,Fy) + C_2 \Sigma(g\,Fz) + \cdots$$
$$c = A_3 \Sigma(g\,Fx) + B_3 \Sigma(g\,Fy) + C_3 \Sigma(g\,Fz) + \cdots \text{ i t. d.}$$

Podstawmy w równanie $F = ax + by + cz + \cdots$ najprawdopodobniejsze wartości $a, b, c \ldots$, wyznaczone w sposób powyższy, obliczmy następnie wartości F, odpowiadające wartościom $x, y, z \ldots$, użytym przy spostrzeżeniu, wreszcie oznaczmy przez $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \ldots$ różnice odpowiednie pomiędzy wartościami F obliczonemi i spostrzeżeniami, a błąd prawdopodobny spostrzeżeń będzie się zawierał w granicach:

$$r = 0{,}67449 \sqrt{\frac{m}{m-n}\,\frac{\Sigma(g\Delta^2)}{\Sigma(g)}}\left(1 \pm \frac{0{,}4769364}{\sqrt{m}}\right);$$

a dla jednakowych dokładności g:

$$r = 0{,}67449 \sqrt{\frac{\Sigma(\Delta^2)}{m-n}}\left(1 \pm \frac{0{,}4769364}{\sqrt{m}}\right).$$

Mamy tutaj: $\Sigma(g\Delta^2) = \Sigma(gF^2) - a\Sigma(gFx) - b\Sigma(gFy) - \cdots;$

oraz: $\Sigma(\Delta^2) = \Sigma(F^2) - a\Sigma(Fx) - b\Sigma(Fy) - \cdots.$

Błędy prawdopodobne stałych obliczonych wyrażają się jak następuje:

$$r_a = r\sqrt{\frac{A_1\,\Sigma(g)}{m}}; \quad r_b = r\sqrt{\frac{B_2\,\Sigma(g)}{m}}; \quad r_c = r\sqrt{\frac{C_3\,\Sigma(g)}{m}} \text{ i t. d.};$$

a dla jednakowych dokładności g: $r_a = r\sqrt{A_1}$; $r_b = r\sqrt{B_2}$; $r_c = r\sqrt{C_3}$ i t. d.

2. Wyrównanie spostrzeżeń bezpośrednich.

Jeśli wielkość spostrzeżona nie zależy od żadnej zmiennej, czyli jeśli

$$F = a,$$

to najprawdopodobniejsza wartość a przybiera postać:

$$a = \frac{\Sigma(Fh^2)}{\Sigma(h^2)} = \frac{\Sigma(Fg)}{\Sigma(g)}$$

lub przy m spostrzeżeniach jednakowo dokładnych:

$$a = \frac{\Sigma(F)}{m}.$$

Innemi słowy: przy spostrzeżeniach jednakowo dokładnych pewnej wielkości niezależnej wartością najprawdopodobniejszą tej wielkości jest **średnia arytmetyczna.**

Błąd prawdopodobny spostrzeżeń $r = 0{,}67449 \sqrt{\frac{m}{m-1} \frac{\Sigma(g\Delta^2)}{\Sigma(g)}}$.

Błąd prawdopodobny średniej arytmetycznej $r_a = \frac{r}{\sqrt{m}}$.

3. Funkcye stopni wyższych.

Jeśli równania w liczbie m, określające funkcyę F, są stopnia wyższego niż pierwszy, względem n stałych $a, b, c \ldots$, to znajdujemy przedewszystkiem przybliżone wartości a_1, b_1, c_1 stałych, rozwiązując względem nich n z pomiędzy danych równań, następnie zaś podstawiamy:

$$a = a_1 + \alpha, \quad b = b_1 + \beta, \quad c = c_1 + \gamma \ldots.$$

Oznaczywszy dalej wartości funkcyi F, odpowiadające przybliżonym wartościom $a_1, b_1, c_1 \ldots$, i bezpośrednio spostrzeżone odpowiednio przez $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \ldots$ i $F_1, F_2, F_3 \ldots$, oraz rozwijając F na szereg Taylora (przyczem opuszczamy kwadraty i wyższe potęgi poprawek $\alpha, \beta, \gamma \ldots$), otrzymujemy m następujących równań dla błędów Δ:

$$\Delta_1 = -F_1 + \Phi_1 + \alpha \frac{\partial \Phi_1}{\partial a_1} + \beta \frac{\partial \Phi_1}{\partial b_1} + \gamma \frac{\partial \Phi_1}{\partial c_1} + \ldots\ldots$$

$$\Delta_2 = -F_2 + \Phi_2 + \alpha \frac{\partial \Phi_2}{\partial a_1} + \beta \frac{\partial \Phi_2}{\partial b_1} + \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial c_1} + \ldots\ldots$$

$$\Delta_3 = -F_3 + \Phi_3 + \alpha \frac{\partial \Phi_3}{\partial a_1} + \beta \frac{\partial \Phi_3}{\partial b_1} + \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial c_1} + \ldots\ldots \text{ i t. d.}$$

Zakładając równość wag g i posiłkując się warunkiem $\Sigma(\Delta^2) = \text{min.}$ lub:

$$\frac{\partial \Sigma(\Delta^2)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma(\Delta^2)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma(\Delta^2)}{\partial \gamma} = 0 \text{ i t. d.},$$

możemy z ostatnich równań obliczyć poprawki $\alpha, \beta, \gamma \ldots$.

Należy zauważyć, iż równania, służące do wyznaczenia $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, otrzymują się z równań, przytoczonych w p. **1.** (str. 90); wystarczy tylko w tych ostatnich zamiast

$$a, b, c \ldots \; x, \quad y, \quad z \ldots F$$

podstawić: $\alpha, \beta, \gamma \ldots \frac{\partial \Phi}{\partial a_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial b_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial c_1} \ldots F - \Phi.$

W razie potrzeby możemy powyższy rachunek powtórzyć kilkakrotnie, dopóki nie osiągniemy żądanej dokładności. Można również stosować tę metodę z pożytkiem i w tym przypadku, kiedy funkcya jest stopnia pierwszego względem stałych, w tym mianowicie celu, aby zbyt wielkie liczby F zastąpić mniejszemi $F - \Phi$.

VI. GEOMETRYA ANALITYCZNA.

A. Punkt i prosta w płaszczyźnie.

W wywodach poniższych przyjmujemy prostokątny układ spółrzędnych.

1. Niechaj x, y i x_0, y_0 będą spółrzędnemi dwóch punktów, których odległość wynosi l, dalej α niechaj będzie kątem nachylenia prostej l względem kierunku dodatnego osi odciętych (oś x), to mamy związki:

$$l = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{x - x_0}{l}; \qquad \sin\alpha = \frac{y - y_0}{l}.$$

2. Jeżeli kresę l, wziętą w kierunku od punktu (x_0, y_0) do punktu (x, y), podzielimy w stosunku $1 : n$, to, oznaczywszy przez x_1, y_1 spółrzędne punktu podziału, otrzymamy:

$$x_1 = \frac{x + n x_0}{1 + n}; \qquad y_1 = \frac{y + n y_0}{1 + n}.$$

3. **Równanie prostej.**

Wogóle prostą wyznacza równanie stopnia pierwszego o 2-ch niewiadomych:

$$Ax + By + C = 0.$$

Wszystkie zatem punkty, których spółrzędne czynią zadość temu samemu równaniu stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi, leżą na jednej prostej.

Jeśli kąt nachylenia prostej do osi x wynosi α, tak że $\operatorname{tg}\alpha = m$ i prosta ta odcina na osi y kresę b, to równaniem jej będzie:

$$y = mx + b.$$

$x = a$ równanie prostej, równoległej do osi y,
$y = b$ „ „ „ „ x,
$y = mx$ „ „ przechodzącej przez początek spółrzędnych.

Prostą, przechodzącą przez dany punkt (x_1, y_1) przedstawia równanie:

$$y - y_1 = m(x - x_1);$$

prostą zaś, przechodzącą przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) równanie:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{albo} \quad \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Jeżeli prosta odcina, licząc zawsze od początku spółrzędnych, na osi x kresę a, zaś na osi y kresę b, to jej równaniem jest:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Ogólnie zachodzi związek: $a=-\frac{C}{A}$, $b=-\frac{C}{B}$ i $m=-\frac{A}{B}$.

4. Równanie prostej, prostopadłej do danej kresy l w drugim jej końcu, jeśli pierwszy koniec opiera się o początek spółrzędnych, a pochylenie kresy ku osi x wynosi α, brzmi:

$x\cos\alpha+y\sin\alpha-l=0$. (**Postać normalna** równania prostej).

Gdy zamiast długości l, wiadomym jest punkt (x_1, y_1) prostej, to równaniem jej jest:

$$(x-x_1)\cos\alpha+(y-y_1)\sin\alpha=0,$$

albo, jeśli punkt x_1, y_1 jest właśnie drugim końcem odcinka l:

$$(x-x_1)x_1+(y-y_1)y_1=0.$$

5. Dla nadania równaniu prostej

$$Ax+By+C=0$$

postaci normalnej, należy wstawić:

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};\quad \sin\alpha=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};\quad l=\frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};$$

przyczem znak pierwiastka trzeba wszędzie brać tak, aby l było dodatne.

6. **Odległością** p punktu (x_1, y_1) od prostej, wyrażonej przez równanie w postaci normalnej, jest:

$$p=\pm(x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-l),$$

przyczem należy brać znak dodatny albo odjemny, zależnie od tego, czy punkt (x_1, y_1) i początek spółrzędnych leżą po różnych stronach, czy też po tej samej stronie prostej.

7. Równanie **prostopadłej**, poprowadzonej z punktu (x_1, y_1) na prostą: $Ax+By+C=0$,

jest:
$$y-y_1=\frac{B}{A}(x-x_1).$$

8. Jeżeli $Ax+By+C=0$ i $A_1x+B_1x+C_1=0$ są równaniami dwóch prostych, to równaniem każdej prostej, przechodzącej przez punkt przecięcia się tych dwóch danych prostych, będzie:

$$Ax+By+C+k(A_1x+B_1y+C_1)=0,$$

lub:
$$(A+kA_1)x+(B+kB_1)y+C+kC=0,$$

w których to wzorach k oznacza liczbę dowolną.

9. **Kąt** φ, utworzony przez dwie proste, wyrażone równaniami numeru poprzedniego (8), otrzymujemy ze związku:

$$\cos\varphi=\frac{AA_1+BB_1}{\pm\sqrt{(A^2+B^2)(A_1{}^2+B_1{}^2)}}.$$

Proste te są równoległe ($\varphi = 0$) jeśli $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}$; są natomiast do siebie prostopadłe ($\varphi = 90^0$), jeżeli $AA_1 + BB_1 = 0$.

10. Dwie **proste równoległe** przedstawiamy zatem równaniami:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{i} \quad k(Ax + By) + C_1 = 0;$$

a dwie **proste prostopadłe** na sobie równaniami:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{i} \quad k(Bx - Ay) + C_1 = 0.$$

11. W razie, jeżeli równania prostych dane są w postaci:

$$y = mx + b, \qquad y = m_1 x + b_1,$$

to muszą zachodzić związki w przypadku równoległości:

$$m = m_1,$$

w przypadku prostopadłości:

$$m m_1 = -1.$$

12. Równanie prostej, przecinającej prostę $y = mx + b$ w punkcie (x_1, y_1) pod kątem φ, jest:

$$y - y_1 = \frac{m + \operatorname{tg}\varphi}{1 - m\operatorname{tg}\varphi}(x - x_1).$$

13. Kąty dwóch prostych (danych przez równanie ogólne numeru 8) przepoławia prosta o równaniu:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \mp \frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2}} = 0.$$

14. **Przekształcanie spółrzędnych.**

Oznaczamy przez x, y spółrzędne względem układu pierwotnego osi prostokątnych, zaś przez x', y' względem nowego.

α) Przesunięcie równoległe układu osi spółrzędnych. Jeżeli f, g są spółrzędnemi nowego początku spółrzędnych, to:

$$x = f + x'; \qquad y = g + y'.$$

β) Obrót układu osi dokoła początku spółrzędnych. Jeśli α oznacza kąt, który przebiedz musi oś pierwotna dodatna x, by przez obrót ku dodatnej osi y zająć położenie nowej osi dodatnej x, to:

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha; \qquad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

γ) Przy równoczesnem przesunięciu i obrocie należy odpowiednio powiązać wyrażenia pod α) i β).

δ) Przekształcenie spółrzędnych równoległych na **biegunowe.** Niechaj r oznacza promień wodzący, a φ kąt biegunowy, jeżeli nadto biegun wpada na początek spółrzędnych, a oś biegunowa na dodatną oś x, to będzie:

$$x = r\cos\varphi; \qquad y = r\sin\varphi.$$

Jeśli x, y są spółrzędnemi **ukośnokątnego** układu osi, o kącie ω, to:

$$x = \frac{r\sin(\omega - \varphi)}{\sin\omega}; \qquad y = \frac{r\sin\varphi}{\sin\omega}.$$

ε) Przekształcenie spółrzędnych biegunowych na spółrzędne równoległe. Zachowując znakowanie jak w δ), mamy dla osi prostokątnych:

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

a dla osi ukośnokątnych:

$$\cos\varphi = \frac{x + y\cos\omega}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y\sin\omega}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega}.$$

B. Linie krzywe w płaszczyznie.

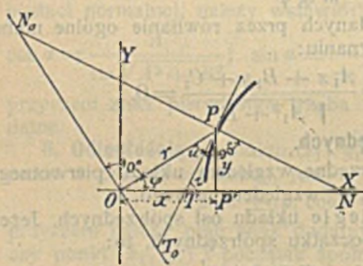
(Krzywe płaskie).

a. Twierdzenia ogólne.

1. Krzywą płaską, w odniesieniu do układu spółrzędnych równoległych, przedstawia **równanie**:

$$F(x, y) = 0.$$

Rys. 8.



Rozwiązując to równanie względem y, otrzymujemy jedno lub kilka równań postaci:

$$y = f(x),$$

które wyobrażają tyleż łącznych lub odrębnych gałęzi krzywej.

To samo odnosi się i do równania krzywej płaskiej w spółrzędnych biegunowych:

$$F(r, \varphi) = 0 \quad \text{albo} \quad r = f(\varphi).$$

Często dla obliczenia dogodniej przedstawić krzywą za pośrednictwem pomocniczej zmiennej niezależnej t w postaci dwóch równań (np. cykloidy):

$$x = \psi_1(t), \qquad y = \psi_2(t);$$

względnie:

$$r = \Phi_1(t), \qquad \varphi = \Phi_2(t).$$

2. Kąt τ, jaki tworzy **styczna** (wzięta w kierunku ku dodatnym y) z dodątną osią x (rys. 8), określa się dla osi prostokątnych ze związków:

$$\sin\tau = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\tau = \frac{dx}{ds}, \quad \operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx};$$

gdzie różniczką **łuku** jest:

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

pierwiastkowi temu, przy wyznaczaniu wielkości $\sin\tau$ i $\cos\tau$, trzeba nadać znak uzgodniony ze znakiem, jaki wypadnie dla $\operatorname{tg}\tau$.

3. Oznaczając przez u (rys. 8) kąt pomiędzy styczną, wziętą w kierunku rosnącego φ, a dodatnym kierunkiem promienia wodzącego r, będziemy mieli:

$$\sin u = \frac{r \cdot d\varphi}{ds}, \quad \cos u = \frac{dr}{ds}, \quad \operatorname{tg} u = \frac{r \cdot d\varphi}{dr}.$$

Różniczka łuku:

$$ds = \pm \sqrt{dr^2 + r^2 \cdot d\varphi^2},$$

przy wyznaczaniu wielkości $\sin u$ i $\cos u$, otrzymuje znów znak uzgodniony ze znakiem, jaki wypadnie dla $\operatorname{tg} u$.

4. **Równanie stycznej** w punkcie (x, y) krzywej brzmi:

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x), \quad \text{albo} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) = 0,$$

przyczem ξ, η oznaczają spółrzędne bieżące stycznej. Znosząc nawias we wzorze ostatnim i zakładając:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta + p = 0,$$

otrzymamy dla krzywych n-go stopnia:

$$p = -\left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 1\,F_{n-1} + 2F_{n-2} + \cdots + (n-1)F_1 + nF_0,$$

w którym to wzorze F_k oznacza wyrazy jednorodne k-go wymiaru funkcyi F.

Styczna PT (p. rys. 8) $= y\dfrac{ds}{dy} = y\dfrac{dx}{dy}\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$.

Podstyczna . . . . $P'T = y\dfrac{dx}{dy}$.

Styczna biegunowa $PT_0 = \dfrac{r\,ds}{dr} = r\sqrt{1 + r^2\left(\dfrac{d\varphi}{dr}\right)^2}$.

Podstyczna biegunowa $OT_0 = \dfrac{r^2 \cdot d\varphi}{dr}$.

5. **Równanie normalnej** w punkcie (x, y) dla spółrzędnych prostokątnych, jeżeli przez ξ, η oznaczymy spółrzędne bieżące, będzie:

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x), \quad \text{albo} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(\xi - x) - \frac{\partial F}{\partial x}(\eta - y) = 0.$$

Normalna PN (p. rys. 8) $= y\dfrac{ds}{dx} = y\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$.

Podnormalna . . . . $P'N = y\dfrac{dy}{dx}$.

Normalna biegunowa $PN_0 = \frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}$.

Podnormalna biegunowa $ON_0 = \frac{dr}{d\varphi}$.

6. **Kierunek zaniku** krzywej, t. j. kąt kierunku jej **punktów nieskończenie odległych**, czyli jej **punktów zaniku**, można oznaczyć, odnosząc daną krzywą do spółrzędnych biegunowych i szukając kąta φ, odpowiadającego wartości $r = \infty$. Jeśli krzywa jest algebraiczna, n-go stopnia, to należy najpierw podzielić jej równanie przez najwyższą potęgę wielkości r. W tym celu pisze się jej równanie w postaci:

$$F(x, y) = F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + \cdots + F_1 + F_0 = 0,$$

w której F_k oznacza wyrazy jednorodne k-go wymiaru funkcyi $F(x, y)$.

7. **Niemaltycznemi (asymptotami)** krzywej są styczne w jej punktach zaniku, t. j. w jej punktach nieskończenie odległych. Równanie stycznej odnosimy do spółrzędnych biegunowych, np. przez podstawienie w jej równanie zamiast spółrzędnych (x, y) punktu styczności jego spółrzędnych biegunowych (r, φ). Równanie to dzielimy przez najwyższą potęgę wielkości r, poczem, zakładając $r = \infty$ i podstawiając kolejno wartości φ dla kierunków zaniku (podług 6-go obliczone), otrzymujemy równanie niemaltycznych.

8. Dwie krzywe, posiadające jeden punkt wspólny, stykają się ze sobą **stycznością** k-go rzędu, jeżeli k pierwszych pochodnych:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ky}{dx^k}$$

ma w tym punkcie dla obu krzywych równe wartości.

Przy styczności rzędu parzystego, krzywe w punkcie wspólnym przecinają się; przy styczności rzędu nieparzystego stykają się bez przecinania się. Zazwyczaj **styczna** krzywej styka się z nią stycznością 1-go rzędu, koło krzywości (patrz 9) stycznością 2-go rzędu.

9. **Kołem krzywości** krzywej w punkcie (x, y) jest koło, którego obwód posiada z nią styczność 2-go rzędu, czyli 3 punkty wspólne. Środek tego koła, czyli t. zw. środek krzywości, jest punktem przecięcia się dwóch nieskończenie blizkich normalnych, wykreślonych w punktach (x, y) i $(x + dx, y + dy)$. **Promień krzywości** ϱ dla spółrzędnych prostokątnych wyraża się wzorem:

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

dla spółrzędnych biegunowych natomiast: $\varrho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{ds}{d\varphi + du}$.

du otrzymuje się przez zróżniczkowanie wyrażenia: $u = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r \cdot d\varphi}{dr}\right)$ (patrz powyżej 3.).

Krzywością krzywej nazywa się jedność podzielona przez ϱ, czyli „wartość odwrotna" promienia krzywości.

10. Spółrzędne X, Y **środka krzywości** dla punktu (x, y) wyznaczamy ze wzorów:

$$X = x - \varrho \frac{dy}{ds}, \qquad Y = y + \varrho \frac{dx}{ds};$$

albo:
$$X = x - \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \qquad Y = y + \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

albo:
$$X = x - \frac{dy}{d\tau}, \qquad Y = y + \frac{dx}{d\tau};$$

albo:
$$X = x - \varrho \sin\tau, \qquad Y = y + \varrho \cos\tau.$$

11. **Rozwiniętą** (Ewolutą) danej krzywej jest krzywa, będąca miejscem geometrycznem jej środków krzywości; krzywa dana względem rozwiniętej jest rozwijającą (Ewolwentą).

Równanie rozwiniętej znajdujemy przez wyrugowanie zmiennych x i y z równania danej rozwijającej i powyższych wzorów na X i Y, uważając w otrzymanem w ten sposób równaniu X i Y za zmienne.

Każdy promień krzywości jest normalną rozwijającej, a jednocześnie styczną do rozwiniętej.

Długość łuku pomiędzy dwoma punktami rozwiniętej jest równą różnicy przynależnych tym punktom promieni krzywości rozwijającej. Stąd wynika, że koniec nitki zupełnie giętkiej, lecz nierozciągliwej, a nawiniętej na rozwiniętą, opisuje rozwijającą, jeśli się go odwija z rozwiniętej, naprężając go stale w kierunku stycznej.

Odwrotnie znajdujemy, przy danem równaniu $F(X, Y) = 0$ rozwiniętej, równanie **rozwijającej** z następujących związków:

$$x = X - S\frac{dX}{dS}, \quad y = Y - S\frac{dY}{dS}, \quad F(X, Y) = 0,$$

w których (X, Y) oznacza dowolny punkt rozwiniętej, a S długość jej łuku aż do tegoż punktu, liczoną od punktu, z którego rozpoczyna się odwijanie.

12. Krzywa jest **wklęsłą** w kierunku dodatnej osi y, gdy $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, jest zaś **wypukłą**, gdy $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$. W punkcie, dla którego $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, podczas gdy $\frac{d^3y}{dx^3} \gtrless 0$, krzywa zmienia swój kształt z wklęsłej na wypukłą, lub odwrotnie. Taki punkt nazywa się **punktem zwrotnym**, a znajdujemy go przez rozwiązanie równania: $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. O ile zaś pierwiastki tego równania jednocześnie czynią zadość wszystkim następnym:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=0,\quad \frac{d^4y}{dx^4}=0,\ \ldots\ \frac{d^ky}{dx^k}=0,\quad \frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}\gtrless 0,$$

to badany punkt tylko wtedy jest punktem zwrotnym, gdy k jest liczbą parzystą. Wówczas bowiem styczna posiada (z powodu 8.) z krzywą styczność rzędu parzystego, przecina ją zatem w punkcie styczności. Jeżeli natomiast k jest liczbą nieparzystą, to styczna w danym punkcie posiada z krzywą styczność rzędu nieparzystego, a więc jej nie przecina, a punkt dany nie jest punktem zwrotnym.

Dla punktu zwrotnego $\varrho=\infty$.

13. Punkt krzywej jest **punktem podwójnym**, jeżeli się w nim przecinają dwie jej gałęzie. W tym razie zawsze ilość:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial y}$$

przybiera postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ (por. str. 71), a zatem muszą jednocześnie obowiązywać równania:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0,\quad F(x,y)=0.$$

Ostatnie równanie dla krzywej stopnia n-go można w punkcie podwójnym przekształcić (jak to już zrobiono w ustępie 4.) na następujące:

$$1\,F_{n-1}+2\,F_{n-2}+\cdots+(n-1)\,F_1+n\,F_0=0.$$

Obie styczne w punkcie podwójnym znajdujemy, rozwiązując względem $\operatorname{tg}\tau$ równanie:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\operatorname{tg}^2\tau+2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\cdot\partial y}\operatorname{tg}\tau+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=0.$$

Jeżeli rozwiązanie to doprowadza do dwóch równych pierwiastków, to obie styczne wpadają na siebie, a punkt podwójny nazywa się wtedy ostrzem. Jeżeli oba pierwiastki równania są urojone, to mamy do czynienia z punktem odosobnionym lub sprzężonym, w którym krzywa nie posiada stycznych (rzeczywistych).

14. **Wielkość pola zawartego:**

α) pomiędzy krzywą, osią odciętych i dwiema rzędnemi y_0, y, odpowiadającemi odciętym: x_0, x wynosi:

$$F=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\,;$$

β) pomiędzy krzywą i dwoma promieniami wodzącymi r_0 i r, odpowiadającymi kątom biegunowym φ_0, φ, wynosi:

$$F={}^1\!/_2\int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2\cdot d\varphi.$$

15. **Długość łuku** s krzywej, zawartego pomiędzy dwoma punktami odpowiadającymi odciętym x_0 i x, wynosi:

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

Przy spółrzędnych biegunowych natomiast będzie:

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \cdot d\varphi = \int_{r_0}^{r} \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} \cdot dr.$$

16. **Krzywe obwijające.** Rój krzywych, t. j. układ krzywych przedstawiony równaniem:

$$F(x, y, p) = 0,$$

o parametrze p, zmieniającym się ciągle, może być obwinięty przez pewną, nową krzywą, noszącą nazwę obwijającej dany rój krzywych. Równanie obwijającej otrzymujemy przez wyrugowanie parametru p z dwóch równań:

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0, \qquad F(x, y, p) = 0.$$

Jeżeli podobny rój krzywych określamy równaniem: $F(x, y, p, q) = 0$ z dwoma zmiennymi parametrami p i q, powiązanymi warunkiem $\varphi(p, q) = 0$, to otrzymamy równanie obwijającej, rugując p i q z trzech równań:

$$\frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \qquad F(x, y, p, q) = 0, \qquad \varphi(p, q) = 0.$$

17. **Trajektorye.** Krzywa, przecinająca prostopadle każdą z roju krzywych:

$$F(x, y, p) = 0,$$

o parametrze p, zmieniającym się ciągle, zowie się trajektoryą prostopadłą danego roju krzywych. Równanie różniczkowe trajektoryi, której spółrzędnemi niechaj będą ξ, η, otrzymamy, rugując p z równań:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\partial F}{\partial \eta} : \frac{\partial F}{\partial \xi} \quad \text{i} \quad F(\xi, \eta, p) = 0.$$

Wobec dowolności stałej całkowania, całkując równanie powyższe, otrzymujemy cały rój trajektoryi.

b. „Przecięcia stożkowe" czyli „stożkowe".

1. Płaszczyzna południkowa M, t. j. płaszczyzna, przechodząca przez oś obrotu stożka kołowego, prostego, przecina płaszcz stożka w dwóch jego tworzących S_1 i S_2; wierzchołek stożka oznaczymy przez s. Inna płaszczyzna E, prostopadła do płaszczyzny M, przecina płaszcz stożka: 1) według **elipsy,** jeżeli E przecina S_1 i S_2 po tej samej

stronie, licząc od wierzchołka s; 2) według **paraboli**, jeżeli E jest równoległą do S_1 lub S_2; 3) według **hyperboli**, jeżeli E przecina S_1 i S_2 po różnych stronach, licząc od wierzchołka s, to zn., że jednę z tworzących S_1 lub S_2 przecina dopiero w jej przedłużeniu po za wierzchołek. Dlatego też trzy krzywe te noszą nazwę przecięć stożkowych. Jeżeli w przypadku 1) płaszczyzna E jest prostopadłą do osi obrotu stożka, to elipsa staje się **kołem**. W przypadku 3) płaszczyzna równoległa do E, lecz przechodząca przez s, przetnie płaszcz stożka według dwóch tworzących, które będą równoległe do niemaltycznych (asymptot) hyperboli, tworzą zatem ze sobą kąt równy kątowi niemaltycznych (patrz rys. 11 na str. 104). Hyperbolę równoboczną zatem, dla której $\alpha = 45^0$, $2\alpha = 90^0$, możemy otrzymać jedynie ze stożków o kącie wierzchołkowym $\geq 90^0$.

2. Jeżeli punkt P porusza się tak, iż każdorazowa odległość PF od stałego punktu F i PQ od stałej prostej, pozostają do siebie w stałym stosunku $PF : PQ = e$, to miejscem geometrycznem takiego punktu jest elipsa, gdy $e < 1$; parabola, gdy $e = 1$; wreszcie hyperbola, gdy $e > 1$. Stosunek e jest liczebną mimośrodowością danej stożkowej. Stały punkt F leży na osi głównej i jest ogniskiem stożkowej; stała prosta zaś jest prostopadłą do tejże osi głównej i nazywa się **kierownicą**. Dla koła jest F jego środkiem, kierownica leży w nieskończoności, a $e = o$.

3. **Równanie ogólne** stożkowych w spółrzędnych równoległych ma postać:

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22} y^2 + 2\, a_1\, x + 2\, a_2\, y + a_0 = 0,$$

i przedstawia elipsę, parabolę, lub hyperbolę zależnie od tego, czy jego wyróżnik $(a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2)$ jest dodatny, równy zeru, lub odjemny.

Ogólne równanie paraboli będzie zatem:

$$(ax + by + c)^2 + Ax + By + C = 0.$$

4. **Środek** elipsy, lub hyperboli, znajdujemy jako punkt przecięcia się prostych:

$$a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_1 = 0; \qquad a_{12}\, x + a_{22}\, y + a_2 = 0.$$

5. Jeżeli: $a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 = k$

jest równaniem, odniesionem do środka elipsy, lub hyperboli, w spółrzędnych prostokątnych, a

$$g_1\, x'^2 + g_2\, y'^2 = k$$

równaniem, odniesionem do osi głównych, to kąt φ, o który musimy obrócić w kierunku dodatnym pierwszy układ osi spółrzędnych, by wpadł na osi główne, określa się wzorem:

$$\operatorname{tg} 2\,\varphi = \frac{2\, a_{12}}{a_{11} - a_{22}};$$

g_1 i g_2 oznaczyć można z dowolnej pary równań poniższych:

$$g_1 + g_2 = a_{11} + a_{22}; \qquad g_1\, g_2 = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2;$$

$$g_1 - g_2 = \frac{a_{11} - a_{22}}{\cos 2\varphi} = \frac{2\,a_{12}}{\sin 2\varphi},$$

czyli jako pierwiastki równania kwadratowego:

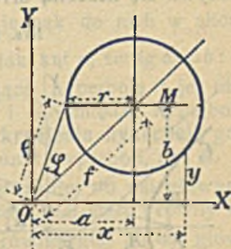
$$(a_{11} - g)(a_{22} - g) - a_{12}^2 = 0.$$

$a_{11} + a_{22}$ nazywa się niezmiennikiem równania stożkowej.

6. Warunkami na to, aby równanie przedstawiało koło, są: $a_{12} = 0$; $a_{11} = a_{22}$ i równość znaku ilości: a_{11} i k.

I. Koło.

Rys. 9.



Równania:

1. Równanie ogólne (rys. 9):

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

2. Równanie środkowe, t. j. początek spółrzędnych w środku koła:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

3. Równanie wierzchołkowe (początek spółrzędnych na obwodzie koła, a OX średnicą):

$$y^2 = x\,(2\,r - x).$$

4. Równania biegunowe dla osi OM (rys. 9):

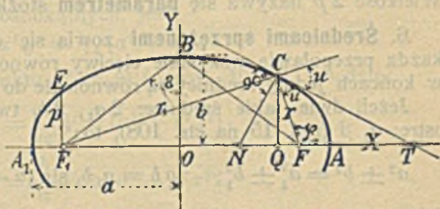
$$\varrho^2 - 2\,\varrho\, f \cos\varphi + f^2 = r^2.$$

Obwody i pola kół patrz str. 2 i następne, pola wycinków i odcinków koła patrz str. 36 i 37 i rozdział VII działu niniejszego.

2. Elipsa i hyperbola.

Do elipsy (rys. 10) we wzorach poniższych odnoszą się znaki górne, do hyperboli (rys. 11) znaki dolne.

Rys. 10.



1. **Równanie środkowe.** Odnosząc równanie do osi głównych krzywej i oznaczając półosi: $OA = a$ i OB (względnie AD) $= b$, otrzymamy równanie:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

lub:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\pm (a^2 - x^2)}.$$

2. **Równanie wierzchołkowe.** (Początek spółrzędnych w wierzchołku A_1 na osi x):

$$\pm y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2 = 2px - \frac{px^2}{a}.$$

3. **Ogniska** F i F_1 leżą na osi x w odległościach od O:

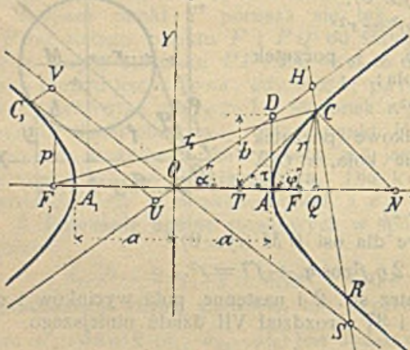
$$OF = OF_1 = \pm\sqrt{a^2 \mp b^2}.$$

Dla elipsy $BF = BF_1 = OA = a$, dla hyperboli $OF = OF_1 = OD$. Stosunek:

$$\frac{OF}{OA} = \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a} = e = \sin\varepsilon, \text{ wzgl. } \frac{OF}{OA} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

nazywa się liczebną mimośrodowością stożkowej.

Rys. 11.



4. **Promienie wodzące**, z obydwu ognisk do dowolnego punktu stożkowej są:

$$r = \pm(a - ex),$$
$$r_1 = a + ex.$$

Dla elipsy ich suma, dla hyperboli zaś ich różnica jest stałą; dla elipsy będzie zatem:

$$r + r_1 = 2a,$$

z czego wynika wykreślenie elipsy zapomocą nitki; a dla hyperboli:

$$r - r_1 = \pm 2a.$$

5. Rzędna w ognisku:

$$p = \pm a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a}.$$

Wielkość $2p$ nazywa się **parametrem** stożkowej.

6. **Średnicami sprzężonemi** zowią się dwie średnice, z których każda przepoławia wszystkie cięciwy równoległe do drugiej. Styczne w końcach jednej średnicy są równoległe do średnicy z nią sprzężonej.

Jeżeli dwie takie średnice: $2a_1$, $2b_1$ tworzą z osią główną kąty ostre: α, β (rys. 15 na str. 108), to:

$$a^2 \pm b^2 = a_1^2 \pm b_1^2; \quad ab = a_1 b_1 \sin(\alpha + \beta); \quad \frac{b^2}{a^2} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta.$$

Równanie obu gatunków stożkowych, odniesione do dwóch średnic sprzężonych, jako do osi spółrzędnych ukośnokątnych, brzmi:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} \pm \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1.$$

7. **Równanie stycznej** w punkcie (x, y): $\frac{\xi x}{a^2} \pm \frac{\eta y}{b^2} = 1.$

Równanie normalnej w tymże punkcie: $\frac{\xi - x}{b^2 x} = \pm \frac{\eta - y}{a^2 y}$.

Przytem ξ i η oznaczają spółrzędne bieżące.

Styczna i normalna są dwusiecznemi kątów pomiędzy obu promieniami wodzącymi.

8. Hyperbola zbliża się coraz bardziej swemi w nieskończoność sięgającemi gałęziami do swych **niemaltycznych (asymptot)**, t. j. do obu prostych $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$, nie dobiegając jednak do nich w skończoności. Każda niemaltyczna tworzy z osią x taki kąt α, że: $\operatorname{tg} \alpha = b : a$.

Dowolna prosta HS (rys. 11), przecinająca hyperbolę i jej niemaltyczne, ma równe odcinki (kresy) CH i RS między hyperbolą a niemaltycznemi, z czego wynika **sposób wykreślenia hyperboli**, gdy są dane: obydwie niemaltyczne i dowolny punkt hyperboli, np. C.

Kresę, odciętą przez niemaltyczne z prostopadłej do osi głównej, każda gałęź hyperboli dzieli tak, że iloczyn części jest stały i równy b^2.

Kresę, odciętą przez gałęzie hyperboli z równoległej do osi głównej, każda niemaltyczna dzieli na dwie części, których iloczyn jest stały i równy a^2.

Kresę, odciętą przez niemaltyczne ze stycznej do hyperboli, punkt styczności dzieli na dwie równe części. Pola trójkątów, wytworzonych przez dowolną styczną i obydwie niemaltyczne, są stałe i równe ab.

Jeżeli dla dowolnego punktu C_1 kresy $C_1 U$ i $C_1 V$ są równoległe do niemaltycznych, to:

$$C_1 U \cdot C_1 V = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

Równanie hyperboli, odniesione do niemaltycznych, jako osi spółrzędnych, prosto- lub ukośnokątnych, jest:

$$x' y' = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

9. Dla dowolnego punktu $C\,(x, y)$ (p. rys. 10 i 11) będzie:

$$\textbf{Styczna}\quad CT = \frac{ay}{bx}\sqrt{\pm(a^2 - e^2x^2)}.$$

$$\textbf{Normalna}\quad CN = \frac{b}{a}\sqrt{\pm(a^2 - e^2x^2)}.$$

$$\textbf{Podstyczna}\quad TQ = \mp\frac{a^2}{x} \pm x. \qquad \textbf{Podnormalna}\quad NQ = \mp\frac{b^2}{a^2}x.$$

10. **Hyperbola równoboczna.**

Równanie odniesione do osi głównych: $x^2 - y^2 = a^2$.

Równanie odniesione do niemaltycznych: $x' y' = \tfrac{1}{2} a^2$.

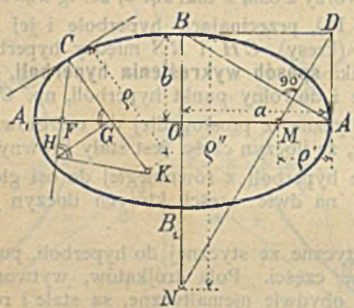
Parametr . . . . $2p = 2a$.
Nadto mamy . . . . $a = b$; $e = \sqrt{2}$; $\alpha = 45^0$.
Niemaltyczne są zatem do siebie prostopadle. Wykreślenie hyperboli równobocznej patrz dział VII rozdział III, maszyny parowe.

11. **Promień krzywości** w punkcie C (rys. 10 i 11):

$$\varrho = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{3/2} = \frac{(r r_1)^{3/2}}{ab} = \frac{p}{\sin^3 FCT} = \frac{p}{\sin^3 u}.$$

Wykreślenie (rys. 12): Wykreśl normalną CG punktu C, oraz prostą CF przez ognisko F, dalej GH prostopadle do GC i HK prostopadle do CH, a punkt K będzie środkiem krzywości.

Rys. 12.



W wierzchołku A promień krzywości elipsy i hyperboli jest:

$$\varrho' = AM = \frac{b^2}{a} = p;$$

w wierzchołku B elipsy promień krzywości wynosi:

$$\varrho'' = BN = \frac{a^2}{b}.$$

Środki krzywości M i N wierzchołków elipsy otrzymujemy (rys. 12) jako przecięcia osi głównych z prostopadłą do BA, wyprowadzoną z punktu D.

12. **Równania biegunowe** stożkowej, odniesione do ogniska F, jako bieguna i do osi głównej FA, jako osi biegunowej (rys. 10 i 11) jest:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} = \pm\frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\varphi}.$$

13. **Pole.** Dla elipsy (rys. 10):

$$\text{Pole } OBCQ = \frac{xy}{2} + \frac{ab}{2}\,\text{arc sin}\,\frac{x}{a}.$$

Pole całej elipsy: πab.

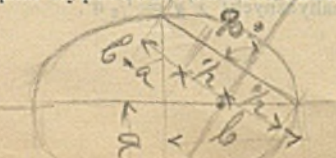
Dla hyperboli (rys. 11):

$$\text{Pole } ACQ = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Ostatni wyraz (odjemnik) tego wzoru przedstawia pole OCA.

$$\text{Pole } OA_1C_1V = \frac{ab}{4} + \frac{ab}{2}\ln\frac{2 \cdot OV}{OD}.$$

O polu hyperboli równobocznej patrz str. 67.



14. Obwód elipsy:

$$U = \pi(a+b)\left[1 + {}^1/_4\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + {}^1/_{64}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + {}^1/_{256}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6 + \cdots\right]$$
$$= \pi(a+b)\,\varkappa.$$

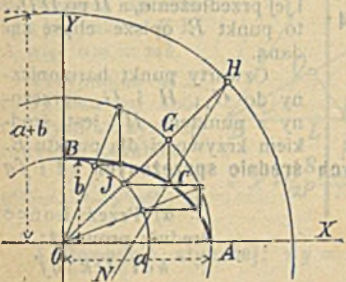
Dla obliczenia ilości $\pi(a+b)$ można użyć tablic str. 2—21, podstawiając $a+b=n$; dla ułatwienia obliczeń ilości $\varkappa$ podajemy:

$\frac{a-b}{a+b}=$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\varkappa=$	1,0025	1,0100	1,0226	1,0404	1,0635	1,0922	1,1267	1,1677	1,2155	1,2732

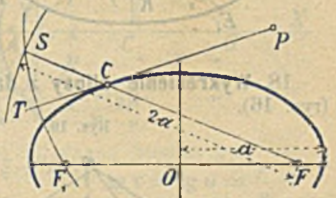
15. Wykreślenie elipsy z danych półosi a i b (rys. 13):

α) Zakreśl ze środka O trzy koła promieniami b, a i $a+b$; nakreśl dowolny promień $OJGH$ i następnie przez J i G równoległe do osi x, względnie y, a ich punkt przecięcia C będzie punktem elipsy, HCN zaś normalną tegoż punktu.

Rys. 13.



Rys. 14.



β) Kresę prostą długości $a+b$ przesuwaj końcami po ramionach kąta prostego, a punkt dzielący kresę tę na części a i b opisze elipsę.

16. Wykreślenie stycznej.

α) **W dowolnym punkcie** C (rys. 10 i 11). Styczną hyperboli będzie dwójsieczna kąta promieni wodzących CF i CF_1, styczną elipsy zaś dwójsieczna kąta między jednym z tych promieni, a przedłużeniem drugiego (p. 7, str. 105).

β) **Z punktu** P **zewnątrz** stożkowej (rys. 14).

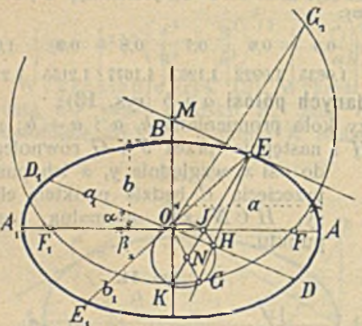
Zakreśl promieniem PF_1 koło ze środka P i promieniem $2a$ koło ze środka F, a prosta, łącząca punkt przecięcia się kół S z ogniskiem F, przetnie stożkową w punkcie styczności C.

17. **Wykreślenie osi głównych elipsy** z danych (co do długości i położenia) dwóch średnic sprzężonych $DD_1 = 2a_1$ i $EE_1 = 2b_1$ (rys. 15). Z E spuść $EH \perp DD_1$ i odetnij na niej $EG = EG_1 = OD_1 = a_1$, a dwójsieczna kąta GOG_1 będzie położeniem jednej osi głównej. Długości zaś osi będą:

oś wielka: $2a = OG_1 + OG$;
oś mała: $2b = OG_1 - OG$.

Albo: Wykreśl OG jak poprzednio, a nad OG, jako średnicą, zakreśl koło; środek jego N połącz z punktem E, a prosta EN przetnie owe koło w dwóch punktach J i K, leżących na osiach głównych. Odległości tych punktów od E są zarazem długościami półosi głównych.

Rys. 15.



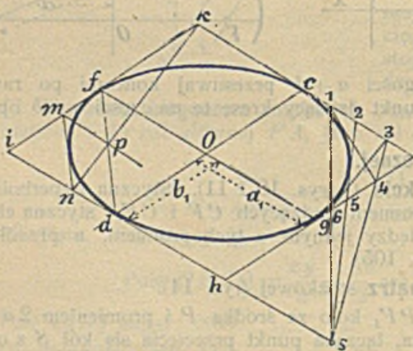
Koło, przechodzące przez G i G_1, a mające swój środek M na osi małej, przecina oś wielką w ogniskach F i F_1.

Jeżeli końce prostej G_1EH przesuwać będziemy tak, by G_1 przesuwało się po OG_1 i jej przedłużeniu, a H po DD_1, to punkt E opisze elipsę żądaną.

Czwarty punkt harmoniczny do G_1, H i G, sprzężony z punktem H, jest środkiem krzywości dla punktu E.

18. **Wykreślenie elipsy z danych średnic sprzężonych** cd i fg (rys. 16).

Rys. 16.



α) Przez końce średnic prowadź: $hdi \parallel lck \parallel gf$ i $lgh \parallel kfi \parallel cd$, przedłuż ih o $hs = dh$, podziel cl na dowolną (w rys. na 4) ilość równych części, nakreśl $s\,3$, $s\,2$, $s\,1$. Punktami przecięcia z gl niechaj będą 4, 5, 6; a proste 14, 25, 36 będą stycznemi elipsy.

β) Na prostej fd (rys. 16) obierz dowolny punkt p, nakreśl kpn, oraz $pm \parallel gf$, a prosta mn będzie styczną elipsy.

3. Parabola.

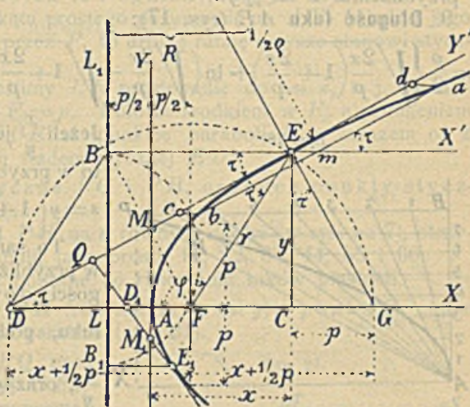
1. **Równanie wierzchołkowe:** $y^2 = 2px$, w którem $2p$ jest parametrem.

2. **Ognisko** F znajduje się w odległości $AF = {}^1/_2\,p$ od wierzchołka A (rys. 17), p jest rzędną w ognisku F. Prosta LL_1, równo

legła do osi y, a przeprowadzona w odległości $AL = -\frac{1}{2}p$ od wierzchołka, lub w odległości $FL = -p$ od ogniska, zowie się **kierownicą** (por. str. 102).

Dla każdego punktu paraboli jest: $FE = EB = x + \frac{1}{2}p$.

Rys. 17.



Średnica EX' (rys. 17) paraboli przepoławia wszystkie cięciwy równoległe do stycznej EY' w końcu tejże średnicy i tworzy z niemi kąt τ; średnica ta jest równoległą do osi AX i nazywa się średnicą sprzężoną z kierunkiem EY'. A więc $am = mb$.

Przyjmując EX' i EY' za osi spółrzędnych, otrzymamy równanie paraboli:

$$y'^2 = \frac{2p}{\sin^2\tau}x' = 2p'x'.$$

4. **Równanie stycznej:** $\eta y = p(\xi + x)$.
Równanie normalnej: $\eta - y = -\frac{y}{p}(\xi - x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\eta y = p(\xi + x) \\ \eta - y = -\frac{y}{p}(\xi - x)\end{array}\right\} \quad \operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg} u = \frac{p}{y} \text{ (por. str. 96 i 97).}$$

Przyczem ξ, η oznaczają spółrzędne stycznej, względnie normalnej. Styczna ED i normalna EG połowią kąty FEB i FEX'. Każdy z kątów: CEG, BED, DEF, FDE jest równy τ. Dalej $DA = AC = x$; $DF = FE = FG = x + \frac{1}{2}p$. Oś y przepoławia kresę stycznej, ograniczoną osią x i punktem styczności; zatem $DM = ME$ i $D_1M_1 = M_1E_1$.

Podstyczna $DC = 2x$. **Podnormalna** $CG = p = \text{const.}$

5. **Równanie biegunowe,** odniesione do F jako bieguna i do FA jako osi biegunowej:

$$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi} = \frac{p}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}.$$

6. **Promień krzywości:** $\varrho = \frac{(p + 2x)^{3/2}}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\sin^3\tau}$.

Rzut promienia ϱ na oś x jest równy $2EF = 2EB$ (rys. 17). Zatem $ER = \frac{1}{2}\varrho$. Można też stosować wykreślenie promienia ϱ podane w rys. 12 dla elipsy i hyperboli (p. str. 106). Promień krzywości w wierzchołku $= p$.

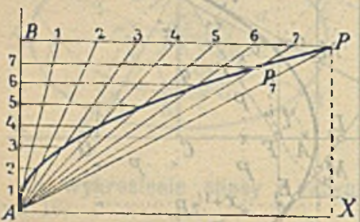
7. **Równanie rozwiniętej:** $27\,p\,y^2 = 8\,(x-p)^3$. Jest to parabola półsześcienna, inaczej parabolą Neila zwana *).

8. **Pole** $AEC = {}^2/_3\,xy$; $aEb = {}^2/_3\,abcd$. A zatem pole F płaskiego odcinka dowolnej krzywej (nieposiadającej jednak punktów zwrotnych i t. p. w danym odcinku) o cięciwie g i strzałce h jest w przybliżeniu: $F = {}^2/_3\,g\,h$.

9. **Długość łuku** AE (rys. 17):

$$s = \frac{p}{2}\left\{\sqrt{\frac{2x}{p}\left(1+\frac{2x}{p}\right)} + \ln\left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1+\frac{2x}{p}}\right)\right\} = EM + \frac{p}{2}\ln\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}.$$

Rys. 18.



Jeżeli $\frac{x}{y}$ jest małym ułamkiem, to w przybliżeniu:

$$s = y\left[1 + {}^2/_3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - {}^2/_5\left(\frac{x}{y}\right)^4\right].$$

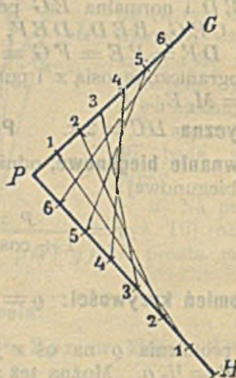
To samo wyrażenie można w przybliżeniu stosować do długości dowolnego płaskiego łuku, podstawiając $\frac{2\,h}{g}$ zamiast $\frac{x}{y}$, oraz g zamiast y (por. 8.).

10. **Wykreślenie paraboli.**

α) Dany wierzchołek A, oś AX i jeden punkt P paraboli (rys. 18).

Rys. 19.

Rys. 20.



*) Wykreślenie paraboli **sześciennej i półsześciennej** podano w dziale IV. Wytrzymałość materyałów w ustępie o belkach stałej wytrzymałości na ugięcie.

Kreślimy: $AB \perp AX$ w A i $PB \parallel AX$ z P. Dzielimy dalej AB i BP na dowolną, lecz jednakową ilość równych części (w rys. na 8). Łącząc, np. A z punktem 7 na BP, i prowadząc z punktu 7, leżącego na AB, równoległą do AX, otrzymamy punkt przecięcia P_7, będący jednym z punktów paraboli i t. d.

β) Dany wierzchołek A i ognisko F, (rys. 19).

Jeżeli wierzchołek kąta prostego posuwa się po AY, a jedno jego ramię stale przechodzi przez F, to drugie ramię zawsze stanowi styczną do paraboli.

Albo (rys. 17): kreślimy CE prostopadle do osi x, t. j. do AF i odcinamy $CG = 2AF = p$. Koło ze środkiem w F, a promieniem FG, przecina prostą CE w punkcie paraboli E, a zarazem oś x w punkcie D, będącym śladem stycznej ED.

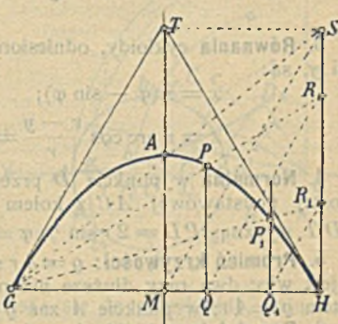
γ) Dane dwie styczne PG i PH, oraz ich punkty styczności G i H (rys. 20).

Podzieliwszy PG i PH na n równych części (w rys. na 7), otrzymamy styczne do paraboli, jako proste 11, 22, 33, 44, 55 i 66.

Wykreślenie to jest podatne do rysowania łuków płaskich.

δ) Dane cięciwa GH (równoległa do osi y) i punkt P; zatem G, H i P są punktami paraboli (rys. 21).

Rys. 21.



Kreślimy HR i PQ prostopadle do GH, dalej GPR i QR. Jeżeli nadto poprowadzimy $Q_1P_1 \perp GH$, a $Q_1R_1 \parallel QR$, to prosta GR_1 natnie prostopadłą Q_1P_1 w punkcie P_1, który będzie punktem paraboli. QR jest kierunkiem stycznej GT w punkcie G. Pion MT w środku M cięciwy GH jest osią x, a A wierzchołkiem paraboli, jeżeli $MA = AT$. Wykreśliwszy styczne GT i HT, można dalsze kreślenie sprowadzić do podanego pod γ).

Jeżeli dane są dwa punkty paraboli H i P, oraz położenie osi głównej MT, to, prowadząc $HM \perp MT$ i przedłużając ją o długość HM, otrzymamy punkt G, poczem możemy postępować dalej w sposób powyżej podany.

11. **Wykreślenie stycznej do paraboli.**

α) **W punkcie jej** E (rys. 17).

Odcinamy na osi: $AD = AC$, albo też $FD = FE$, a DE będzie styczną.

Albo: równoległa do osi x przez E spotka kierownicę LL_1 w punkcie B, a oś y przepoławia kresę BF w punkcie M. Szukaną styczną będzie zaś EM.

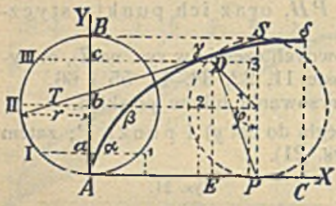
β) **Z punktu** Q, **leżącego zewnątrz paraboli** (rys. 17).
Ze środka Q promieniem QF zakreśl koło, a z punktów B i B_1 prowadź równoległe do AX, które przetną parabolę w E i E_1. Szukanemi stycznemi są: QE i QE_1.

c. Krzywe cykliczne (kołowe).

I. Cykloida pospolita.

1. Cykloida jest krzywą, którą opisuje punkt A obwodu koła AB, podczas gdy tenże toczy się (bez ślizgania) po prostej AC.

Rys. 22.



2. **Wykreślenie** (rys. 22). Odetnij AC=łukowi $AB = \pi r$, podziel obydwa na jednakową ilość równych części, wyznacz punkty przecięcia 1, 2, 3 i uczyń $1\alpha = a\mathrm{I}$, $2\beta = b\mathrm{II}$ i $3\gamma = c\mathrm{III}$; a α, β i γ będą punktami cykloidy. Albo: cykloida obwija koła zakreślone kolejno około punktów podziału kresy AC jako środków, promieniami równemi kolejno cięciwom: $A\mathrm{I}$, $A\mathrm{II}$, $A\mathrm{III}$.

3. **Równania** cykloidy, odniesione do AC jako osi x i AB jako osi y, są:

$$x = r(\varphi - \sin\varphi); \qquad y = r(1 - \cos\varphi).$$

$$x = r \arccos\frac{r-y}{r} \pm \sqrt{(2r-y)y}.$$

4. **Normalna** w punkcie D przechodzi przez punkt styczności P prostej podstawowej AC z kołem tworzącem. PD jest normalną, SDT styczną; $PD = 2r\sin{}^1\!/_2\,\varphi = \sqrt{2ry}$.

5. **Promień krzywości**: $\varrho = 4r\sin{}^1\!/_2\,\varphi = 2\sqrt{2ry}$; ϱ jest więc dwa razy dłuższe niż normalna. W wierzchołku δ będzie zatem $\varrho = 4r$; w punkcie A zaś $\varrho = 0$.

6. **Rozwinięta** cykloidy jest nietylko również cykloidą, lecz nawet przystającą do pierwotnej.

7. **Pole** $AED = r^2({}^3\!/_2\,\varphi - 2\sin\varphi + {}^1\!/_4\sin 2\varphi)$
$= {}^3\!/_2\,rx - {}^1\!/_2\,y\sqrt{(2r-y)y}$;
$AC\delta = {}^3\!/_2\,\pi r^2$.

8. **Długość łuku** $AD = 4r(1 - \cos{}^1\!/_2\,\varphi) = 4r - 2\sqrt{2r(2r-y)}$.
$A\delta = 4r$.

9. **Cykloida „wydłużona“ lub „skrócona“** powstaje, gdy punkt tworzący nie leży na obwodzie, lecz zewnątrz, względnie wewnątrz, koła toczącego się, w odległości p od jego środka. Równania ich są:

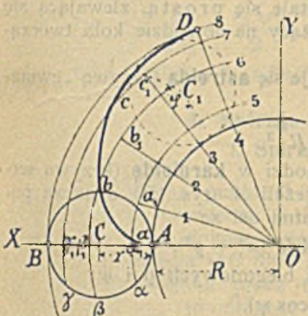
$$x = r\varphi - p\sin\varphi; \qquad y = r - p\cos\varphi.$$

2. Epicykloida i Hypocykloida.

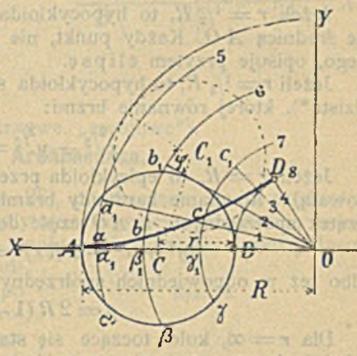
1. Punkt A obwodu koła, o promieniu $AC = r$, które bez ślizgania toczy się po drugim obwodzie koła, o promieniu $AO = R$, opisuje epicykloidę, jeżeli obydwa obwody stykają się zewnętrznie (rys. 23), a hypocykloidę, gdy się stykają wewnętrznie (rys. 24). R promień koła podstawowego (stałego), r promień koła tworzącego (ruchomego).

2. **Wykreślenie** (rys. 23 i 24): Podzielmy półobwód koła AB i kąt $AOD = \frac{r}{R} 180^0$ na tę samą ilość równych części; wykreślmy promienie 1, 2, 3, 4 przez O i łuki kołowe 5, 6, 7, 8 dokoła O; odcinając wreszcie $a_1 a = \alpha_1 \alpha$, $b_1 b = \beta_1 \beta$ i $c_1 c = \gamma_1 \gamma$, otrzymamy w A. a, b, c, D punkty epicykłoidy (rys. 23), względnie hypocykłoidy (rys. 24). Albo: koła ze środkami w punktach spotkania się promieni 1, 2, 3 z obwodem koła podstawowego, zakreślone kolejno cięciwami $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$, są obwinięte przez szukaną krzywą.

Rys. 23.



Rys. 24.



3. **Równania.** (Znaki górne odnoszą się do epicykloidy, dolne zaś do hypocykloidy):

$$x = (R \pm r) \cos\left(\frac{r}{R}\varphi\right) \mp r \cos\left(\frac{R \pm r}{R}\varphi\right);$$

$$y = (R \pm r) \sin\left(\frac{r}{R}\varphi\right) - r \sin\left(\frac{R \pm r}{R}\varphi\right).$$

Zależnie od tego, czy $r \lessgtr R$, hypocykloida R, r zlewa się bądźto z hypocykloidą R, $R - r$, bądź też z epicykloidą R, $r - R$.

4. **Normalna** jakiegokolwiek punktu przechodzi zawsze przez odpowiedni punkt zetknięcia się koła tworzącego z kołem podstawowem.

5. **Promień krzywości**: $\varrho = \frac{4r(R \pm r)}{R \pm 2r} \sin \tfrac{1}{2}\varphi$.

Dla A: $\varrho = 0$;

dla D: $\varrho = 4r \frac{R \pm r}{R \pm 2r}$.

6. **Rozwinięta** jest epicykloidą, względnie hypocykloidą, podobną do danej.

7. **Pole** pomiędzy OA, krzywą i promieniem wodzącym jest:

$$\frac{r(R \pm r)(R \pm 2r)}{2R}(\varphi - \sin\varphi).$$

8. **Długość łuku**: $s = 4r \frac{R \pm r}{R}(1 - \cos \tfrac{1}{2}\varphi)$;

łuk $AD = 4r\frac{(R \pm r)}{R}$.

9. Równania krzywych stają się algebraicznemi (przez wyrugowanie ilości φ), jeżeli stosunek R do r jest wymierny.

Jeżeli $r = \tfrac{1}{2}R$, to hypocykloida staje się prostą, zlewającą się ze średnicą AO. Każdy punkt, nie leżący na obwodzie koła tworzącego, opisuje przytem elipsę.

Jeżeli $r = \tfrac{1}{4}R$, to hypocykloida staje się **astroidą** (krzywą „gwiaździstą“), której równanie brzmi:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}.$$

Jeżeli $r = R$, to epicykloida przechodzi w **kardioidę** (krzywą sercowatą). Równanie kardioidy brzmi, jeżeli A (rys. 23) oznacza początek spółrzędnych, a AO część dodatną osi x:

$$(y^2 + x^2 - 2Rx)^2 = 4R^2(x^2 + y^2),$$

albo też w odpowiednich spółrzędnych biegunowych ϱ i ψ:

$$\varrho = 2R(1 + \cos\psi).$$

Dla $r = \infty$, koło toczące się staje się linią prostą, a odpowiednia krzywa staje sie rozwijającą koła (patrz poniżej pod 3.).

10. **Epicykloida i hypocykloida wydłużona lub skrócona** powstaje, jeżeli punkt tworzący leży zewnątrz, względnie wewnątrz, koła tworzącego, w odległości p od jego środka. Równania ich brzmią:

$$x = (R \pm r)\cos\left(\frac{r}{R}\varphi\right) \mp p\cos\left(\frac{R \pm r}{R}\varphi\right);$$

$$y = (R \pm r)\sin\left(\frac{r}{R}\varphi\right) - p\sin\left(\frac{R \pm r}{R}\varphi\right).$$

3. Rozwijająca koła.

1. Każdy punkt prostej, która bez ślizgania toczy się po obwodzie koła, opisuje rozwijającą koła. (Wykreślenie za pomocą nitki).

2. **Wykreślenie** (rys. 25): BD równe półobwodowi koła AB, jako też sam półobwód, podziel na jednakową ilość równych części (w rys. na 4): αa jest styczną w α, o długości $\alpha D = {}^1/_4\, BD$; βb jest styczną w β, o długości $\beta D = {}^2/_4\, BD$ i t. d. Wówczas A, a, b, c, D będą punktami rozwijającej.

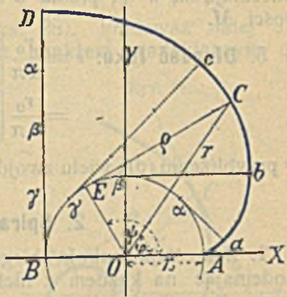
3. **Równania:**

$$x = r_0 (\cos\psi + \psi \sin\psi);$$
$$y = r_0 (\sin\psi - \psi \cos\psi).$$

Równanie biegunowe:

$$\varphi = \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1}.$$

Rys. 25.



4. **Promieniem krzywości** ϱ w punkcie C jest styczna CE z punktu C do koła podstawowego, a więc jest on równy długości łuku koła AE.

5. **Długość łuku** AC, odpowiadającego kątowi ψ, wynosi:

$$s = \frac{\varrho^2}{2 r_0} = \frac{r_0 \psi^2}{2}.$$

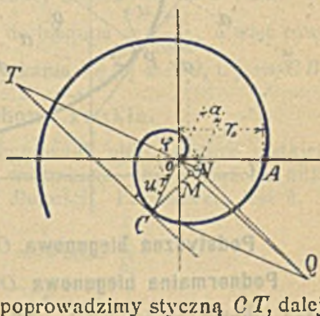
6. **Pole:** $ACO = {}^1/_6\, r_0^2 \psi^3$.

d. Spirale (krzywe „zwojowe").

I. Spirala Archimedesa.

1. Zakreśla ją punkt C (rys. 26), poruszający się z prędkością jednostajną po promieniu OC, gdy tenże również z prędkością jednostajną obraca się dokoła stałego punktu (bieguna) O. Jeżeli jednemu obrotowi promienia OC (360°) odpowiada przebieżona przez C po OC droga r_0, to długość promienia wodzącego, odpowiadająca $\frac{1}{n}$ obrotu, będzie wynosiła $\frac{r_0}{n}$, skąd wprost wynika wykreślenie tej spirali.

Rys. 26.



2. **Równanie biegunowe:**

$$r = a\varphi = \frac{r_0}{2\pi}\varphi,$$

w którem r oznacza promień wodzący, a φ kąt biegunowy, licząc od OA.

3. Jeżeli dla dowolnego punktu C poprowadzimy styczną CT, dalej OT prostopadle do OC i CN prostopadle do CT, to: **podstyczna**

biegunowa $OT = \frac{r^2}{a}$, zaś **Podnormalna biegunowa** $ON = a =$ stałej. Stąd wynika sposób **wykreślania stycznej** do spirali (por. niżej spiralę hyperboliczną).

4. **Promień krzywości:** $\varrho = \frac{(a^2 + r^2)^{3/2}}{2a^2 + r^2}$.

Wykreślenie (rys. 26): Prostopadłe do CN w N i do OC w C przecinają się w Q; prosta OQ przetnie normalną CN w środku krzywości M.

5. **Długość łuku:** $s = \frac{r_0}{4\pi}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \ln\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\right]$

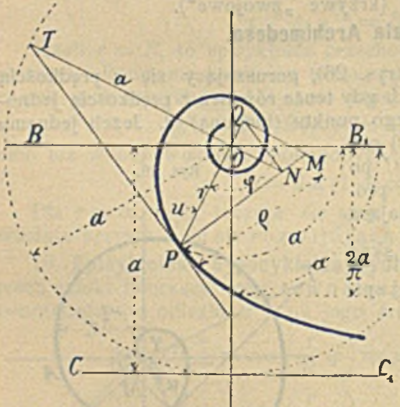
$$= \frac{r_0}{4\pi}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \operatorname{arc\,sinh}\varphi\right],$$

w przybliżeniu (dla wielu zwojów): $s = \frac{r_0}{4\pi}\varphi^2$.

2. Spirala hyperboliczna.

1. Zakreślając około bieguna O dowolne koła (współśrodkowe) i odcinając na każdem z nich równe długości łuków a, w jednę stronę, licząc od osi biegunowej OB_1, otrzymamy w końcach tych łuków szereg punktów, których miejscem geometrycznem jest właśnie spirala hyperboliczna (rys. 27).

Rys. 27.



Równanie jej brzmi: $r\varphi = a$. Ponieważ dla $\varphi = \infty$, r staje się $= 0$, to biegun O jest **punktem niedobieżnym (asymptotycznym)**, dokoła którego spirala opisuje nieskończoną ilość zwojów, nie dosięgając go jednakże.

Dla $\varphi = 0$ staje się $r = \infty$, to zn. prosta CC_1, poprowadzona w oddaleniu a, równolegle do osi biegunowej OB_1, jest niemaltyczną spirali.

2. Jeżeli dla dowolnego punktu P (rys. 27) poprowadzimy styczną PT, oraz OT prostopadle do OP, a PN prostopadle do PT, to:

Podstyczna biegunowa $OT = -a =$ stałej;
Podnormalna biegunowa $ON = -\frac{r^2}{a}$; } por. spiralę Archimedesa.

Stąd wynika sposób **wykreślenia stycznej** do spirali.

3. **Promień krzywości:** $\varrho = \frac{r}{\sin^3 OTP} = \frac{r}{\cos^3 u}$.

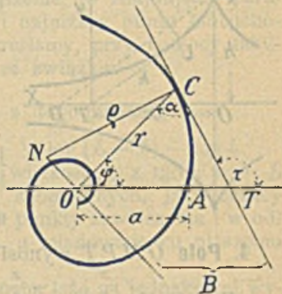
Wykreślenie: Prostopadła do PN w N (rys. 27) przecina promień PO w Q, prostopadła zaś do tegoż promienia, wyprowadzona z Q, przetnie normalną PN w środku krzywości M.

3. Spirala logarytmiczna.

1. **Równanie:** $r = ae^{m\varphi}$.

Dla $\varphi = 0$ będzie $r = OA = a$ (rys. 28). Ponieważ dalej dla $\varphi = -\infty$, $r = 0$, więc biegun O jest **punktem niedobieżnym**, do którego spirala, dla odjemnych wartości φ, coraz to bardziej się zbliża, nie dosięgając go jednakże.

Rys. 28.



2. **Styczna** CT w punkcie dowolnym C tworzy z promieniem wodzącym OC kąt $u = \alpha =$ stałej, tak, że $\operatorname{ctg} \alpha = m$.

3. **Podnormalna biegunowa:**

$$ON = r \operatorname{ctg} \alpha = rm.$$

Normalna biegunowa:

$CN = r\sqrt{1+m^2} = \frac{r}{\sin \alpha} =$ **promieniowi krzywości** ϱ w punkcie C.

4. **Rozwinięta** spirali jest znów spiralą przystającą do danej spirali, lecz obróconą względem danej o kąt $\frac{\pi}{2} - \frac{\ln m}{m}$.

5. **Pole,** zakreślone przez promień wodzący r, począwszy od $\varphi = -\infty$ (bieguna) do $+\varphi$, t. j. aż do punktu C krzywej, równa się połowie pola trójkąta OBC, utworzonego z promienia wodzącego punktu C, jego stycznej i podstycznej biegunowej $= r^2 : 4m$.

6. **Długość łuku** od punktu C aż do bieguna $= \frac{r}{\cos \alpha}$, a więc równa się długości stycznej CT aż do spotkania się jej z NO, t. j. $= CB$.

e. Krzywa łańcuchowa zwykła.

Zwykła łańcuchowa jest linią równowagi nitki zupełnie giętkiej, zawieszonej na dwóch punktach pod warunkiem, aby obciążenie nitki wszędzie było proporcyonalne do jej długości. Parametrem jest h.

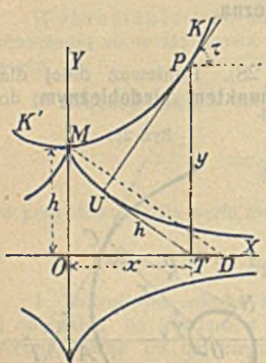
1. **Równanie:** $y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right) = h \cosh \frac{x}{h}$.

$$x = h \ln\left(\frac{y}{h} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 1}\right) = h \operatorname{ar\,cosh} \frac{y}{h}.$$

Początek spółrzędnych leży o $h = MO$ niżej od najniższego punktu M łańcuchowej KK' (rys. 29).

2. Kąt τ, który tworzy styczna UP w dowolnym punkcie P z (poziomą) osią x, określa się z wzoru:

Rys. 29.



$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = \sinh\frac{x}{h}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 1}\,; \quad \cos\tau = \frac{h}{y}\cdot$$

Wprowadzając τ jako zmienną niezależną, otrzymamy poniższe dwa równania łańcuchowej:

$$x = h\ln\frac{1+\sin\tau}{\cos\tau} = h\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right)$$

$$= h\operatorname{ar\,sinh}(\operatorname{tg}\tau)\,; \quad y = \frac{h}{\cos\tau}\cdot$$

3. **Promień krzywości** w punkcie P jest równy, lecz przeciwnie skierowany jak normalna w punkcie P, mierzona od P aż do osi x, t. j. $= \frac{y^2}{h} = \frac{h}{\cos^2\tau}\cdot$

4. **Pole** $OMPT$ wynosi:

$$F = {}^1/_2\,h^2\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = h^2\sinh\frac{x}{h} = h^2\operatorname{tg}\tau = h\sqrt{y^2 - h^2}.$$

5. **Długość łuku** MP jest:

$$s = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = h\sinh\frac{x}{h} = h\operatorname{tg}\tau = \sqrt{y^2 - h^2} = PU = OD,$$

jeżeli TU i MD są prostopadłe do PU.

$$x = h\ln\left[\frac{s}{h} + \sqrt{1 + \left(\frac{s}{h}\right)^2}\right] = h\operatorname{ar\,sinh}\frac{s}{h}\cdot$$

Tablice funkcyi hyperbolicznych cosh i sinh (p. str. 32 i 31) dają wprost wartości rzędnych, względnie długości łuków łańcuchowej dla parametru $h = 1$.

6. **Rozwijająca. [Traktorya Huyghensa** (czytaj Hojensa), lub **krzywa antifrykcyjna].** Jeżeli wierzchołek M jest początkiem rozwinięcia, to równanie rozwijającej (rys. 29) brzmi:

$$\left(\frac{x}{h}\right)^2 = \left[\sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} - \ln\left(\pm\frac{h}{y} \pm \sqrt{\frac{h^2}{y^2} - 1}\right)\right]^2,$$

$$= \left[\sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} - \operatorname{ar\,cosh}\left(\pm\frac{h}{y}\right)\right]^2,$$

zależnie od tego, czy y (rzędna rozwijającej) jest dodatną lub odjemną; albo też: $x = h\,(\operatorname{tgh}\varphi - \varphi)$; $y = \pm\dfrac{h}{\cosh\varphi}$, przyczem φ oznacza pewną zmienną niezależną.

W powyższem h jest stałą długością UT stycznej od krzywej aż do osi x (rys. 29) $= MO$. Traktorya posiada zatem tę właściwość, że długość stycznej pomiędzy krzywą i osią odciętych jest wielkością stałą. Oś ta jest niemaltyczną czterech gałęzi, z których się składa traktorya. Rozwinięta traktoryi (por. str. 101) jest łańcuchowa KMK'. P jest środkiem krzywości; $\varrho = PU$ (p. wyżej). Łuk $MU = h\ln(y:h)$.

7. Jeżeli $2L$ oznacza długość łańcucha, $2l$ odległość poziomą, $2b$ odległość pionową jej punktów zawieszenia, to znajdujemy parametr h, początek spółrzędnych, a przeto i najniższy punkt łańcuchowej, jak następuje: Przez próbowanie określamy, przy pomocy tablicy na $\log\sinh\varphi$ (p. str. 32), wielkość φ ze związku:

$$\frac{\sinh\varphi}{\varphi} = \frac{\sqrt{L^2 - b^2}}{l},$$ względnie z dogodniejszego:

$$\log\sinh\varphi - \log\varphi = {}^1/_2\log(L + b) + {}^1/_2\log(L - b) - \log l.$$

Wówczas $h = l:\varphi$. Obliczając nadto wielkość ψ z $\operatorname{tgh}\psi = b:L$ (p. tabl. str. 34), otrzymamy początek spółrzędnych, jako leżący o $L\operatorname{ctgh}\varphi$ niżej środka kresy, łączącej oba punkty zawieszenia i w odległości poziomej $= \psi h$ od tegoż środka, a mianowicie ku niższemu punktowi zawieszenia.

8. Jeżeli oba punkty zawieszenia łańcucha leżą na jednakowej wysokości, to:

$$b = 0, \qquad \frac{\sinh\varphi}{\varphi} = \frac{L}{l}, \qquad h = \frac{l}{\varphi},$$

a początek spółrzędnych leży niżej prostej zawieszenia o

$$y_0 = L\operatorname{ctgh}\varphi.$$

Kąt zawieszenia α (pochylenie w punktach zawieszenia) będzie:

$$\cos\alpha = \frac{h}{y_0} = \frac{l\operatorname{tgh}\varphi}{L\varphi}.$$

f. Równania kilku innych krzywych.

Krzywa	Spółrzędne prostokątne	Spółrzędne biegunowe
1. Cysoida.	$y^2(a - x) = x^3$	$r = \dfrac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$.
2. Lemniskata.	$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$	$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.
3. Konchoida.	$(x^2 + y^2)(y - b)^2 = a^2y^2$	$r = a + \dfrac{b}{\cos\varphi}$.
4. Liść Kartezyusza.	$x^3 + y^3 = 3axy$	$r = \dfrac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}$.
5. Czworoliść.	$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$	$r = a\sin 2\varphi$.

1. **Cysoida** (bluszczowa). Dane koło o średnicy a; w końcu stałej średnicy (osi x) dana styczna tegoż koła. Przez drugi koniec tej średnicy (początek spółrzędnych) prowadzimy dowolną ilość siecznych, aż do spotkania się z tą styczną. Jeżeli odetniemy długości cięciw, wyznaczone przez koło na każdej siecznej, lecz począwszy od jej punktu spotkania się ze styczną, ku początkowi spółrzędnych, to końce tych kres będą punktami cysoidy.

2. **Lemniskata** jest miejscem geometrycznem punktów, dla których iloczyn ich odległości od dwóch stałych punktów F i F_1 jest stałym, a mianowicie $= \frac{1}{2} a^2$. Odległość $FF_1 = a\sqrt{2}$.

Obie gałęzie krzywej, przechodzące przez środek kresy $a\sqrt{2}$ (początek spółrzędnych), spotykają się w nim pod kątem prostym.

Półosią krzywej jest a. Kąt pomiędzy promieniem wodzącym a normalną $= 2\varphi$. Dla y_{max} jest $\varphi = 30^0$, a $r = a\sqrt{\frac{1}{2}}$. Całkowite pole lemniskaty $= a^2$.

3. **Konchoida** (krzywa muszlowata) jest miejscem geometrycznem punktów, otrzymanych na wszystkich promieniach, zbiegających się w jednym biegunie P, przez odcięcie na każdym z nich pewnej stałej kresy a, poczynając zawsze od punktu przecięcia się promienia z pewną stałą prostą, przeprowadzoną w odległości b od bieguna.

C. Punkt, prosta i płaszczyzna w przestrzeni.

W wywodach poniższych przyjmujemy trzy osie spółrzędnych w przestrzeni, wzajemnie do siebie prostopadłe.

1. Jeżeli x, y, z i x_0, y_0, z_0 są spółrzędnemi dwóch punktów, których odległość wzajemna wynosi l; a α, β, γ oznaczają kąty, które l tworzy z dodatnymi kierunkami osi spółrzędnych, to:

$$l = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

$$\cos\alpha = \frac{x - x_0}{l}; \qquad \cos\beta = \frac{y - y_0}{l}; \qquad \cos\gamma = \frac{z - z_0}{l}.$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

2. Jeżeli kresę l, wziętą w kierunku od x_0, y_0 z_0 ku x, y, z, podzielimy w stosunku $1:n$, to, oznaczając przez x_1, y_1, z_1 spółrzędne punktu podziału, otrzymamy:

$$x_1 = \frac{x + n x_0}{1 + n}; \qquad y_1 = \frac{y + n y_0}{1 + n}; \qquad z_1 = \frac{z + n z_0}{1 + n}.$$

3. **Kąt** φ pomiędzy dwoma kierunkami, wyznaczonymi przez kąty α, β, γ i α_1, β_1, γ_1, określa się z równania:

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1.$$

Jeżeli oba kierunki są do siebie prostopadłe ($\varphi = 90^0$), to musi być:

$$\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 = 0.$$

4. Oznaczając przez λ, μ, ν kąty, jakie prostopadła do podanych powyżej pod 3. kierunków, t. j. prostopadła do płaszczyzny kąta φ, tworzy z kierunkami dodatnymi osi spółrzędnych, otrzymamy związki:

$$\cos\lambda = \frac{\cos\beta\cos\gamma_1 - \cos\beta_1\cos\gamma}{\sin\varphi}; \quad \cos\mu = \frac{\cos\gamma\cos\alpha_1 - \cos\gamma_1\cos\alpha}{\sin\varphi};$$

$$\cos\nu = \frac{\cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta}{\sin\varphi}.$$

Najkrótsza odległość między prostą o kierunku (α, β, γ) przez punkt (x, y, z) a prostą o kierunku $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ przez punkt $(x_1, y_1 z_1)$, równa się bezwzględnej wartości wyrażenia:

$$p = (x_1 - x) \cos \lambda + (y_1 - y) \cos \mu + (z_1 - z) \cos \nu.$$

5. **Prosta** w przestrzeni wyznacza się przez dwa równania:

$$y = mx + b, \qquad z = m_1 x + b_1.$$

Prosta, przechodząca przez punkt (x_1, y_1, z_1) i tworząca z osiami kąty α, β, γ, wyraża się równaniami:

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma}.$$

W poprzednich zatem równaniach jest:

$$m = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}; \qquad m_1 = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha}.$$

Równania prostej, przechodzącej przez punkty (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2), są:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

6. Jeżeli dwie proste w przestrzeni mają się przecinać, to warunkiem niedzownym jest, aby wyznacznik czterech równań obu prostych, sprowadzonych do postaci: $mx + ny + pz + q = 0$, tożsamościowo był równy zeru.

7. **Równania płaszczyzny.**

Ogólnie biorąc, płaszczyznę wyznacza równanie pierwszego stopnia:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Wszystkie zatem punkty, których spółrzędne czynią zadość temu samemu równaniu pierwszego stopnia pomiędzy trzema zmiennemi, leżą w jednej płaszczyźnie.

$By + Cz + D = 0$, równanie płaszczyzny, równoległej do osi x.
$Ax + Cz + D = 0$ „ „ , „ „ „ y.
$Ax + By + D = 0$ „ „ , „ „ „ z.
$Ax + By + Cz = 0$ „ „ , przechodzącej przez początek spółrzędnych.

8. Jeżeli płaszczyzna przecina osie w odległościach a, b, c od początku spółrzędnych, to równaniem jej będzie:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

$x = a$, równanie płaszczyzny, równoległej do płaszczyzny yz.
$y = b$, „ „ , „ „ „ xz.
$z = c$, „ „ , „ „ „ xy.

9. Jeżeli kresa prosta l, zaczynająca się w początku spółrzędnych, tworzy z osiami kąty α, β, γ, to płaszczyznę, przechodzącą przez drugi koniec kresy l, a do niej prostopadłą, przedstawia równanie:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - l = 0. \quad \textbf{(Postać normalna).}$$

Jeżeli zamiast długości l danym jest punkt (x_1, y_1, z_1) płaszczyzny, to jej równanie będzie:

$$(x - x_1)\cos\alpha + (y - y_1)\cos\beta + (z - z_1)\cos\gamma = 0,$$

a jeżeli zamiast długości i kierunku kresy dany jest jej punkt końcowy (x_1, y_1, z_1), to równanie płaszczyzny, przechodzącej przez ten punkt, będzie:

$$(x - x_1)x_1 + (y - y_1)y_1 + (z - z_1)z_1 = 0.$$

10. Aby równaniu ogólnemu płaszczyzny:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

nadać postać normalną, należy wstawić:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \qquad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \qquad l = \frac{-D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Znak pierwiastka taki, by l stało się dodatnem.

11. **Odległość** p punktu (x_1, y_1, z_1) od płaszczyzny, wyrażonej równaniem w postaci normalnej, wynosi:

$$p = \pm(x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - l),$$

przyczem należy uwzględnić znak dodatny albo odjemny, zależnie od tego, czy punkt (x_1, y_1, z_1) i początek spółrzędnych leżą po różnych stronach, czy też po tej samej stronie płaszczyzny.

12. Jeżeli $Ax + By + Cz + D = 0$ jest równaniem płaszczyzny, to prostopadła do niej, w punkcie jej (x_1, y_1, z_1), wyraża się równaniem:

$$z - z_1 = \frac{C}{A}(x - x_1); \qquad z - z_1 = \frac{C}{B}(y - y_1).$$

13. Jeżeli dwa kierunki $(\alpha, \beta, \gamma$ i $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ przechodzą przez punkt (x_1, y_1, z_1), to równanie płaszczyzny, wyznaczonej przez te kierunki i ten punkt, jest:

$$(x-x_1)(\cos\beta\cos\gamma_1 - \cos\beta_1\cos\gamma) + (y-y_1)(\cos\gamma\cos\alpha_1 - \cos\gamma_1\cos\alpha)$$
$$+ (z - z_1)(\cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta) = 0.$$

14. Jeżeli: $Ax + By + Cz + D = 0$ i

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

są równaniami dwóch płaszczyzn, a przez k oznaczymy liczbę dowolną, to płaszczyznę, przechodzącą przez prostą przecięcia się obu płaszczyzn danych, wyznaczamy równaniem:

$$(Ax + By + Cz + D) + k(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0,$$

albo: $(A + kA_1)x + (B + kB_1)y + (C + kC_1)z + D + kD_1 = 0.$

Równanie rzutu na płaszczyznę xy prostej przecięcia się dwóch płaszczyzn otrzymamy, rugując z ich równań zmienną z; w sposób podobny otrzymujemy równania jej rzutu na płaszczyznę xz, względnie yz.

15. **Kąt** φ pochylenia wzajemnego dwóch płaszczyzn (określonych równaniami jak pod 14.) wyrażamy wzorem:

$$\cos\varphi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\pm\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A_1^2+B_1^2+C_1^2)}}.$$

Płaszczyzny są równoległe ($\varphi = 0$), jeżeli: $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$.

Płaszczyzny są do siebie prostopadłe ($\varphi = 90^0$), jeżeli:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0.$$

16. Dwie **płaszczyzny równoległe** wyrażają się zatem równaniami:

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \text{i} \quad Ax+By+Cz+D_1=0.$$

17. Płaszczyzny, przepoławiające kąty między dwiema innemi (określonemi równaniami jak pod 14.), wyrażają się wzorem:

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \mp \frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} = 0.$$

18. **Przemiana spółrzędnych.**

Spółrzędne względem pierwotnego układu oznaczamy przez x, y, z, względem nowego przez x', y', z'.

α) Równoległe przesunięcie osi. Oznaczając przez f, g, h spółrzędne nowego początku, otrzymamy:

$$x = f + x'; \quad y = g + y'; \quad z = h + z'.$$

β) Obrót osi dokoła początku spółrzędnych. Dostawy kątów, utworzonych przez nowe osie x', y', z' z pierwotną dodatną osią x, oznaczamy przez: a, b, c;
podobnież z pierwotną osią y: a', b', c';
" " " z: a'', b'', c'';
wówczas:

$$\begin{aligned} x &= ax' + by' + cz' \\ y &= a'x' + b'y' + c'z' \\ z &= a''x' + b''y' + c''z'. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x' &= ax + a'y + a''z \\ y' &= bx + b'y + b''z \\ z' &= cx + c'y + c''z. \end{aligned}$$

Zachodzą nadto następujące związki:

$$1)\ \begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1. \end{aligned} \qquad 2)\ \begin{aligned} ab + a'b' + a''b'' &= 0 \\ bc + b'c' + b''c'' &= 0 \\ ca + c'a' + c''a'' &= 0. \end{aligned}$$

$$3)\ \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1. \end{aligned} \qquad 4)\ \begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0 \\ a''a + b''b + c''c &= 0. \end{aligned}$$

$$5)\ \begin{aligned} a &= b'c'' - c'b'' \\ b &= c'a'' - a'c'' \\ c &= a'b'' - b'a''. \end{aligned} \qquad 6)\ \begin{aligned} a' &= cb'' - bc'' \\ b' &= ac'' - ca'' \\ c' &= ba'' - ab''. \end{aligned} \qquad 7)\ \begin{aligned} a'' &= bc' - cb' \\ b'' &= ca' - ac' \\ c'' &= ab' - ba'. \end{aligned}$$

γ) Przy równoczesnem przesunięciu i obrocie, należy odpowiednio połączyć wzory z pod α) i β).

δ) Chcąc przekształcić spółrzędne x, y, z punktu na **spółrzędne biegunowe** r, φ, ϑ, należy przedwstępnie określić spółrzędne punktu x', y', z', odniesionego do układu prostokątnego, którego początek byłby biegunem, płaszczyzna $x'y'$ byłaby równikową, a oś x' osią biegunową, od której liczą się kąty φ, poczem będzie:

$$x' = r \cos\varphi \cos\vartheta; \quad y' = r \sin\varphi \cos\vartheta; \quad z' = r \sin\vartheta.$$

Dla punktów płaszczyzny $x'y'$ jest: $\vartheta = 0$.

D. Krzywe o podwójnej krzywości.

a. Twierdzenia ogólne.

1. Krzywą o podwójnej krzywości, odniesioną do układu spółrzędnych równoległych, wyobrażają dwa **równania:**

$$F_1(x, y, z) = 0; \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

Jest ona zatem przecięciem się dwóch powierzchni, z których każdą przedstawia jedno z równań powyższych.

Krzywą tę wyznaczają też równania jej rzutów na płaszczyzny xy i xz:

$$y = \varphi_1(x); \quad z = \varphi_2(x).$$

2. Kąty α, β, γ, jakie **styczna** w punkcie (x, y, z) tworzy z osiami x, y, z, otrzymujemy ze związków:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}; \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}; \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds};$$

a **różniczkę łuku** z wzoru:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

3. **Równanie stycznej** w punkcie (x, y, z) brzmi:

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}.$$

4. **Równanie płaszczyzny normalnej** natomiast:

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0.$$

5. Płaszczyzna, która przechodzi przez punkt (x, y, z) krzywej i dwa bezpośrednio z nim sąsiadujące, nazywa się **płaszczyzną ściśle styczną** w punkcie (x, y, z). Zakładając:

$$A = dy \cdot d^2z - dz \cdot d^2y, \quad B = dz \cdot d^2x - dx \cdot d^2z,$$
$$C = dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x,$$

otrzymamy, jako równanie płaszczyzny ściśle stycznej:

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0.$$

Kąty, jakie dwójnormalna, t. j. prostopadła do płaszczyzny ściśle stycznej, tworzy z osiami x, y, z, określają się ze związków:

$$\cos\lambda = \frac{A}{D}; \qquad \cos\mu = \frac{B}{D}; \qquad \cos\nu = \frac{C}{D},$$

w których:

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = ds\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}$$

$$= ds^2\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}.$$

6. Oznaczając przez $d\tau$ kąt dwóch bezpośrednio po sobie następujących stycznych, będziemy mieli:

$$d\tau = \frac{D}{ds^2},$$

a promień krzywości w płaszczyźnie ściśle stycznej, czyli promień **pierwszej krzywości** krzywej:

$$\varrho_1 = \frac{ds}{d\tau} = \frac{ds^3}{D}.$$

Spółrzędne przynależnego środka krzywości otrzymamy, jako:

$$X = x + \varrho_1{}^2\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}; \quad Y = y + \varrho_1{}^2\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}; \quad Z = z + \varrho_1{}^2\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

7. Dwie sąsiednie płaszczyzny ściśle styczne tworzą ze sobą kąt:

$$d\vartheta = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}$$

$$= \frac{A \cdot d^3x + B \cdot d^3y + C \cdot d^3z}{D^2}\,ds;$$

wyrażenie $\varrho_2 = \frac{ds}{d\vartheta}$ nazywamy promieniem **drugiej krzywości** krzywej lub promieniem „skręcenia" krzywej.

Krzywa jest płaską, jeżeli dla wszystkich jej punktów będzie $d\vartheta = 0$, czyli wyznacznik:

$$A \cdot d^3x + B \cdot d^3y + C \cdot d^3z = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0.$$

b. Linia śrubowa walcowa.

1. Linię śrubową, walcową, czyli zwykłą, zakreśla punkt posuwający się z prędkością jednostajną po obwodzie koła, które równocześnie porusza się również z prędkością jednostajną w kierunku prostopadłym do swej płaszczyzny, które wytwarza zatem prosty walec kołowy; na powierzchni tego właśnie walca punkt poruszający się kreśli linię śrubową.

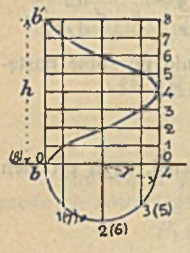
Niechaj będzie promień tego walca r, skok śruby $bb' = h$ (rys. 30), to styczna kąta pochylenia skrętu α będzie:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2\pi r} = a.$$

Jeżeli oś z przyjmiemy w osi walca, oś x przez punkt b linii śrubowej, a przez φ oznaczymy kąt wytworzony z osią x przez rzut promienia wodzącego na płaszczyznę xy, to **równania** linii śrubowej będą:

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad z = ar\varphi;$$

Rys. 30.



albo: $$x = r\cos\frac{z}{ar}; \quad y = r\sin\frac{z}{ar}.$$

2. **Równania stycznej** są:

$$-\frac{\xi - x}{\sin\varphi} = \frac{\eta - y}{\cos\varphi} = \frac{\zeta - z}{a}.$$

Styczna tworzy z osią z i z tworzącemi walca stały kąt:

$$\gamma = 90^0 - \alpha.$$

Rozwijając zatem płaszcz walca na płaszczyznę, a wraz z nim i krzywą śrubową, otrzymamy jej rozwinięcie w postaci linii prostej.

3. **Promienie krzywości** są:

$$\varrho_1 = r(1 + a^2) = \frac{r}{\cos^2\alpha}, \quad \left(\frac{1}{\varrho_1} = \text{pierwszej krzywości}\right),$$

$$\varrho_2 = r\,\frac{1 + a^2}{a} = \frac{r}{\sin\alpha\cos\alpha}, \quad \left(\frac{1}{\varrho_2} = \text{drugiej krzywości}\right).$$

Tak ϱ_1, jak ϱ_2 są tedy stałe, a nadto promień ϱ_1 jest zawsze prostopadły do osi z.

4. **Długość łuku**: $s = \frac{r}{\cos\alpha}\varphi = r\varphi\sqrt{1 + a^2}$.

5. **Wykreślenie rzutu linii śrubowej** na płaszczyznę xz (rys. 30). Podzielmy skok $h = bb'$ na n (tu 8) równych części, tak samo— począwszy od b—obwód koła, będącego przekrojem normalnym walca, na tyleż (n) równych części. Przez pierwsze punkty podziału prowadzimy linie poziome, przez drugie natomiast pionowe, wówczas każdy punkt przecięcia się poziomej z odpowiednią pionową będzie punktem szukanego rzutu linii śrubowej.

E. Powierzchnie krzywe.

a. Twierdzenia ogólne.

1. Równanie powierzchni krzywej dla spółrzędnych prostokątnych ma postać ogólną: $F(x, y, z) = 0$, a rozwiązane względem zmiennej z przybiera postać: $z = f(x, y)$.

Przyjmiemy oznaczenia skrócone:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = s; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

2. Równanie **płaszczyzny stycznej** do powierzchni w punkcie (x, y, z) będzie:

$$(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

3. Równanie **normalnej** zaś:

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Kąty α, β, γ, jakie tworzy normalna z osiami, otrzymujemy ze związków:

$$\cos\alpha = \frac{1}{W}\frac{\partial F}{\partial x}; \quad \cos\beta = \frac{1}{W}\frac{\partial F}{\partial y}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{W}\frac{\partial F}{\partial z},$$

w których: $$W = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

4. **Cząstka pola** powierzchni krzywej, odpowiadająca swemu rzutowi $dx \cdot dy$ na płaszczyznę xy, wyraża się wzorem:

$$dM = \frac{dx \cdot dy \cdot W}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Dwukrotne scałkowanie tego wyrażenia (w granicach dowolnych lub od siebie zależnych) doprowadza do wyrażenia na pole określonego obszaru danej powierzchni krzywej.

5. Każda płaszczyzna, przechodząca przez normalną do danej powierzchni, przecina ją w linii, którą nazywają **przekrojem normalnym.** Jeżeli styczna tego przekroju tworzy z osiami kąty λ, μ, ν, to promień krzywości przekroju wyrazi się wzorem:

$$\varrho = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\cos^2\lambda + 2s\cos\lambda\cos\mu + t\cos^2\mu}.$$

6. **Twierdzenie Meunieur'a:** Płaszczyzna, przechodząca przez styczną przekroju normalnego, a tworząca z jego płaszczyzną kąt ϑ, przecina powierzchnię według przekroju ukośnego, którego promień krzywości w punkcie uważanym jest:

$$\varrho' = \varrho\cos\vartheta.$$

7. Przekroje normalne, prostopadłe do siebie, a dla których ϱ staje się największością ϱ_1, lub najmniejszością ϱ_2, nazywają się **przekrojami normalnymi głównymi.** Wartości ϱ_1 i ϱ_2 określają się równaniami:

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}.$$

8. **Twierdzenie Eulera:** Dla dowolnego przekroju normalnego, którego płaszczyzna tworzy kąt φ z płaszczyzną przynależną do ϱ_1, mamy:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_2}.$$

9. Wyrażenie $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}$ nazywa się **miarą krzywości**, a $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$ **krzywością średnią** powierzchni w punkcie (x, y, z).

b. Powierzchnie drugiego rzędu.

1. **Postać ogólna równania** powierzchni drugiego rzędu jest:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0.$$

2. Zakładając dla skrócenia:

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \Gamma; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta; \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \delta_1; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = \delta_2,$$

(przyczem $a_{ik} = a_{ki}$), otrzymamy następujące warunki, określające główne rodzaje powierzchni, przedstawionych przez równanie ogólne, jeżeli $a_{11} > 0$:

$\Delta > 0, \quad \delta_1 > 0, \quad \Gamma < 0$ elipsoid.

$\Delta < 0$ albo: $\Delta > 0, \quad \delta_1 < 0$ $\begin{cases} \Gamma < 0 & \text{hyperboloid jednopowłokowy.} \\ \Gamma = 0 & \text{stożek.} \\ \Gamma > 0 & \text{hyperboloid dwupowłokowy.} \end{cases}$

$\Delta = 0 \begin{cases} \delta_1 < 0 \text{ albo } \delta_2 < 0 & \text{paraboloid hyperboliczny.} \\ \delta_1 > 0 \text{ albo } \delta_2 > 0 & \text{„ eliptyczny.} \end{cases}$

3. Dla **powierzchni ośrodkowych** ($\Delta \gtrless 0$) t. j. posiadających środek, środek ich jest przecięciem się trzech płaszczyzn:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1 = 0.$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2 = 0.$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3 = 0.$$

4. Równania powierzchni ośrodkowych, odniesione do układu prostokątnego spółrzędnych z początkiem w środku powierzchni, a osiami zlewającemi się z osiami głównemi powierzchni, brzmią:

dla **elipsoidu:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$

dla **hyperboloidu jednopowłokowego:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$

dla **hyperboloidu dwupowłokowego:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$

W równaniach powyższych a, b, c oznaczają półosie przekrojów głównych; w pierwszym przypadku są one wszystkie trzy rzeczywiste, w drugim przypadku c, a w trzecim b i c oznaczają urojone półosie hyperboli przekrojów głównych.

5. **Stożek.** Każde równanie jednorodne, stopnia drugiego, z trzema zmiennemi:

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = 0$ wyobraża stożek.

Jeżeli krzywa wodząca jest elipsą, o półosiach a i b, a jej płaszczyzna w odległości h (od początku spółrzędnych) jest prostopadłą do osi z, to równanie stożka, którego wierzchołek znajduje się w początku spółrzędnych, będzie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{h^2} = 0.$$

Jeżeli krzywa wodząca jest kołem o promieniu a, to w równaniu powyższem wypada podstawić: $b = a$, poczem otrzymamy równanie prostego stożka kołowego. Por. b. 1., str. 101.

6. **Kula.** Równanie odniesione do środka: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Jeżeli ξ, η, ζ są spółrzędnemi środka kuli, to równanie jej będzie:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = r^2.$$

Każde równanie kształtu:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

przedstawia kulę, przyczem:

$$\xi = -\tfrac{1}{2} A; \quad \eta = -\tfrac{1}{2} B; \quad \zeta = -\tfrac{1}{2} C;$$
$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}.$$

Powierzchnie drugiego stopnia bezśrodkowe:

7. **Paraboloidy.** Najprostszy kształt równania:

$$\frac{x^2}{2p} \pm \frac{y^2}{2q} = z.$$

Górny znak odnosi się do paraboloidu eliptycznego; p i q są parametrami parabol przekrojów głównych. Dla paraboloidu hyperbolicznego p jest parametrem paraboli przekroju głównego, a $q = p \operatorname{tg}^2 \varphi$; przyczem φ jest połową kąta płaszczyzn niemaltycznych.

8. **Walec.** Równanie walca, stojącego prostopadle na jednej z płaszczyzn spółrzędnych, jest równobrzmiące z równaniem krzywej jego przekroju z tąże płaszczyzną.

Jeżeli przekrój walca z płaszczyzną xy jest elipsą lub hyperbolą, o półosiach a i b, i jeżeli tworzące walca są pochylone do osi spółrzędnych o kąty α, β, γ, to jego równaniem będzie:

$$\frac{\left(x - z\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right)^2}{a^2} \pm \frac{\left(y - z\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)^2}{b^2} = 1.$$

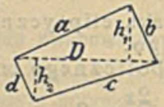
Znak górny $+$ odnosi się do walca eliptycznego, dolny natomiast — do walca hyperbolicznego.

Wreszcie równanie walca parabolicznego brzmi:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{2y}{p} - \frac{2x}{q} = 0.$$

VII. POLA POWIERZCHNI I OBJĘTOŚCI BRYŁ.

A. Pola figur płaskich.

Figury	Oznaczenie wymiarów	Pole F
1. Trójkąt. (por. str. 64).	Rys. 31.  h wysokość względem boku a, $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, m_1, m_2, m_3 ośrodkowe, $s_0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)$, x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 spółrzędne wierzchołków względem dowolnych osi prostokątnych.	$F = \frac{1}{2} a h$ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $= \frac{1}{2} a b \sin\gamma$ $= \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha}$ $= 2 r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ $= \rho^2 \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\alpha \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\beta \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\gamma$ $= \rho s = \frac{abc}{4r}$ $= \frac{1}{3}\sqrt{s_0(s_0-m_1)(s_0-m_2)(s_0-m_3)}$ $= \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}$ $= \pm \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ + x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ + x_3 y_1 - x_1 y_3 \end{matrix} \right\}.$
	Początek spółrzędnych leży w wierzchołku 3: $[x_3 = 0,\ y_3 = 0]$.	$F = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ $= \pm \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1).$
Trójkąt prostokątny. (por. str. 65).	a, b przyprostokątnie, c przeciwprostokątnia, α kąt przeciwległy bokowi a.	$F = \frac{1}{2} a b$ $= \frac{1}{2} a^2 \operatorname{ctg} \alpha$ $= \frac{1}{2} b^2 \operatorname{tg} \alpha$ $= \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha.$ $\quad a^2 + b^2 = c^2.$
2. Czworokąt. (D i D_1 przekątnie, φ kąt zawarty między niemi).	Rys. 32.  m prosta, łącząca środki przekątni.	$F = \frac{h_1 + h_2}{2} D = \frac{D D_1 \sin\varphi}{2}.$ $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ $= D^2 + D_1^2 + 4 m^2.$

Figury	Oznaczenie wymiarów	Pole F
Czworokąt, wpisany w koło.	a, b, c, d 4-ry boki, $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$.	$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$. $D D_1 = ac + bd$.
Trapez.	a, b boki równoległe, h wysokość.	$F = \frac{a+b}{2} h = \frac{D D_1 \sin \varphi}{2}$.
Równoległobok.	a, b boki, h odległość boków b, γ kąt równoległoboku.	$F = bh = ab \sin \gamma$ $= \frac{1}{2} D D_1 \sin \varphi$. $2(a^2 + b^2) = D^2 + D_1^2$.
Prostokąt.	a, b boki.	$F = ab = \frac{1}{2} D^2 \sin \varphi$.
Ukośnik (rhombus).	a bok, γ kąt ukośnika.	$F = a^2 \sin \gamma$ $= \frac{1}{2} D D_1$.
3. Wielokąt.	$x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3 \ldots x_n y_n$ spółrzędne n wierzchołków, względem dowolnych osi prostokątnych. [Suma kątów wewnętrznych wynosi: $(n-2) \cdot 180^0$].	$F = \pm \frac{1}{2} \{ (x_2 y_1 - x_1 y_2) + (x_3 y_2 - x_2 y_3) + (x_1 y_3 - x_3 y_1) + \cdots \cdots + (x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n) + (x_1 y_n - x_n y_1) \}$. Można też określić F, rozkładając wielobok, za pomocą przekątni, na trójkąty.
Wielokąt foremny (prawidłowy). (por. tabl. str. 35).	R promień koła opisanego, r promień koła wpisanego, $a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ bok, n ilość boków, $\varphi = 180^0 : n$, U obwód.	$F = \frac{1}{4} n a^2 \operatorname{ctg} \varphi$ $= \frac{1}{2} n R^2 \sin 2\varphi$ $= n r^2 \operatorname{tg} \varphi$. $U = na = 2nR \sin \varphi$ $= 2nr \operatorname{tg} \varphi$. Kąt wielokąta $= 180^0 - 2\varphi$.
4. Koło. (por. tablicę dla F i U, str. 1 do 21).	r promień, d średnica, U obwód.	$F = \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi d^2 = \frac{1}{4} U d$ $= 0{,}7853981634\, d^2$. $U = \pi d$.
Pierścień kołowy. (Dla oznaczenia pola F można posiłkować się tablicą str. 1 do 21).	R promień zewnętrzny, r promień wewnętrzny, D średnica zewnętrzna, d średnica wewnętrzna, ϱ średni promień, δ szerokość pierścienia.	$F = \pi (R^2 - r^2)$ $= \frac{1}{4} \pi (D^2 - d^2)$ $= \frac{1}{4} \pi D^2 - \frac{1}{4} \pi d^2$ $= 2 \pi \varrho \delta$.

Figury	Oznaczenie wymiarów	Pole F
Odcinek koła. (Tabl. str. 36 i 37).	r promień, φ^0 kąt środkowy w stopniach.	$F = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\varphi^0 \pi}{180} - \sin \varphi\right)$.
Wycinek koła. (Dla oznaczenia pola F można posiłkować się tablicą str. 1 do 21).	r promień, b długość łuku, φ^0 kąt środkowy, przynależny łukowi b w stopniach, φ łuk, odpowiadający temuż kątowi i promieniowi 1.	$F = \frac{1}{2} b r = \frac{\varphi^0}{360} \pi r^2 = \frac{1}{2} \varphi r^2$. $\varphi = \frac{\varphi^0 \pi}{180}$. $b = \frac{\varphi^0 \pi}{180} r$.
Wycinek pierścienia kołowego.	Rys. 33. 	$F = \frac{\varphi^0 \pi}{360} (R^2 - r^2) = \frac{\varphi^0 \pi}{180} \varrho \delta = \varphi \varrho \delta$.

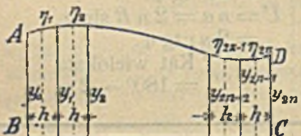
5. **Stożkowe.** Elipsa i jej odcinki p. str. 106; odcinki hyperboli p. str. 106; odcinki paraboli p. str. 110.

Pola innych krzywych p. str. 112 do 119.

6. **Pole dowolnego kształtu.**

α. Niechaj pole będzie ograniczone z trzech stron prostemi, z których $AB = y_0$ i $DC = y_{2n}$ (rys. 34) są prostopadłe do BC. Dzielimy BC na **parzystą** ilość ($2n$) równych części h, w punktach podziału kreślimy rzędne $y_1, y_2 \ldots y_{2n-1}$, a oznaczając nadto średnie wysokości tak otrzymanych pasków pola przez $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{2n}$, określamy w przybliżeniu pole $ABCD$ z jednego z poniższych, kolejno coraz dokładniejszych wzorów:

Rys. 34.



1. $F = h\left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{2n-2} + y_{2n-1} + \frac{1}{2} y_{2n}\right)$.
2. $F = h \Sigma (\eta)$.
3. $F = \frac{1}{3} h (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$.
4. $F = \frac{3}{8} h (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7$
$+ \cdots + 2y_{m-3} + 3y_{m-2} + 3y_{m-1} + y_m)$.

5. $F = h\Sigma[\eta + {}^1/_{12}(y_0 - \eta_1) + {}^1/_{12}(y_{2n} - \eta_{2n})]$. *)

6. $F = h\Sigma[\eta + {}^1/_{72}(8y_0 + \eta_2 - 9\eta_1) + {}^1/_{72}(8y_{2n} + \eta_{2n-1} - 9\eta_{2n})]$.**)

We wzorze 4. ilość rzędnych powinna być $m + 1 = 3n + 1$, a więc ilość m równych części h podzielna przez 3.

Wzór 3., t. zw. **wzór Simpsona**, daje tylko wtenczas dokładne wyniki, gdy y jest funkcyą całkowitą najwyżej trzeciego stopnia swej odległości od dowolnego punktu. Wówczas starczy wymierzyć lub wyrachować y_m, średnią rzędną między y_0 i y_{2n}, a jeżeli H oznacza całkowitą wysokość BC, to:

$$F = {}^1/_6 H(y_0 + 4y_m + y_{2n}).$$

β. Zmierzywszy lub wyrachowawszy 5 odległych od siebie o h, rzędnych y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, otrzymamy:

$$F = {}^2/_{45} h[7(y_0 + y_4) + 32(y_1 + y_3) + 12y_2].$$

Wzór ten jest zupełnie dokładny, jeżeli y jest funkcyą całkowitą najwyżej czwartego stopnia swej odległości od dowolnego punktu.

γ. Dalsze wzory przybliżone zestawiono na str. 82 i 83, gdyż całka $\int_a^b f(x)\,dx$ wyobraża pole $ABCD$, jeżeli przyjmiemy BC za oś x, a $y = f(x)$ będzie równaniem krzywej AD, wreszcie a i b oznaczać będą odcięte, odpowiadające rzędnym AB i DC.

δ. **Sposób Czebyszewa** (bardzo dokładny) patrz dział XII o budowie okrętów, przy obliczaniu wyporu i t. d.

B. Objętości i powierzchnie brył.

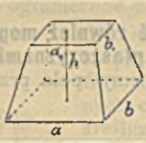
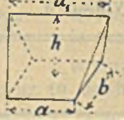
Wzory poprzednie służyć również mogą do obliczenia objętości brył ograniczonych dwiema płaszczyznami równoległemi, o ile przez $y_0 \ldots y_{2n}$ rozumieć będziemy pola przekrojów równoległych do owych płaszczyzn.

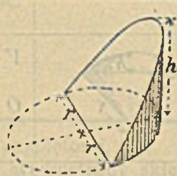
Bryła	Oznaczenie wymiarów	Objętość $= V$. Cała powierzchnia $= O$. Pole płaszcza, t. j. krzywej części powierzchni $= M$.
1. Graniastosłup (pryzmat)	F pole podstawy, h wysokość.	$V = Fh$.
Sześcian foremny.	a krawędź, d przekątnia.	$V = a^3$. $O = 6a^2$. $d^2 = 3a^2$.

*) Podług Ponceleta.
**) Podług Frankego. Por. „Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-V. zu Hannover" 1875, str. 177.

Bryła	Oznaczenie wymiarów	Objętość $= V$. Cała powierzchnia $= O$. Pole płaszcza, t. j. krzywej części powierzchni $= M$.
Graniastosłup trójkątny, ukośnie ścięty.	a, b, c długość trzech równoległych krawędzi, N przekrój prostopadły do tychże krawędzi.	$V = {}^1/_3\,(a + b + c)\,N$.

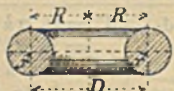
Graniastosłup n-kątny (i walec) ukośnie ścięty. Jeżeli l oznacza prostą, łączącą środki ciężkości obu podstaw, a N przekrój prostopadły, do l, to $V = Nl$.

Równoległościan prostokątny. (Prostopadłościan).	a, b, c długości krawędzi, schodzących się w jednym wierzchołku, d przekątnia.	$V = abc$. $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. $O = 2\,(ab + bc + ca)$.
2. Ostrosłup. (Piramida).	F podstawa, h wysokość.	$V = {}^1/_3\,Fh$.
Ostrosłup trójkątny.	$x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ spółrzędne trzech wierzchołków; czwarty wierzchołek leży w początku spółrzędnych.	$V = {}^1/_6 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.
Ostrosłup prosto ścięty.	F, f podstawy równoległe, czyli dna, h ich odległość.	$V = {}^1/_3\,h\,(F + f + \sqrt{Ff})$.
3. Obelisk. (Rys. 35).	Rys. 35. 	$V = {}^1/_6\,h\,[(2a + a_1)\,b + (2a_1 + a)\,b_1]$ $= {}^1/_6\,h\,[ab + (a + a_1)(b + b_1) + a_1 b_1]$.
4. Klin. (Rys. 36).	Rys. 36. 	$V = {}^1/_6\,(2a + a_1)\,bh$.
5. Walec.	F podstawa, h wysokość.	$V = Fh$.
Walec kołowy prosty.	r promień podstawy, h wysokość.	$V = \pi r^2 h$. $M = 2\pi r h$. $O = 2\pi r\,(r + h)$.

Bryła	Oznaczenie wymiarów	Objętość $= V$. Cała powierzchnia $= O$. Pole płaszcza, t. j. krzywej części powierzchni $= M$.
Walec kołowy, prosty, ukośnie ścięty.	h_1 najkrótsza tworząca, h_2 najdłuższa „ , r promień podstawy.	$V = \pi r^2 \frac{h_1 + h_2}{2}$. $M = \pi r (h_1 + h_2)$.
Kopyto walcowe. *) (Rys. 37).	Rys. 37. 	$V = \frac{2}{3} r^2 h$. $M = 2 r h$. Ścięcie przechodzi przez środek podstawy; podstawą jest zatem półkole, t. j. $a = b = r$ (por. przyp. u dołu). Godnem uwagi jest, że powyższe wzory są niezależne od π.
Walec wydrążony (rura).	R promień zewnętrzny, r „ wewnętrzny, h wysokość, $s = R - r$ grubość ścianki, $\varrho = \frac{1}{2}(R + r)$ średni promień.	$V = \pi h (R^2 - r^2)$ $= \pi h s (2R - s)$ $= \pi h s (2r + s)$ $= 2 \pi h s \varrho$.
6. Stożek kołowy.	r promień podstawy, h wysokość, s tworząca.	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. $M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi r s$. $s = \sqrt{r^2 + h^2}$.
Stożek prosto ścięty.	Jak poprzedni; nadto R promień drugiej podstawy.	$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + R r + r^2)$. $M = \pi s (R + r)$. $s = \sqrt{(R - r)^2 + h^2}$.
7. Kula. (Dla V należy posiłkować się tablicą str. 38, dla O tabl. str. 1 do 21).	r promień, $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 0{,}620351 \sqrt[3]{V}$. $d = 2r$ średnica.	$V = \frac{1}{3} \pi r^3 = 4{,}188790205\, r^3$ $= \frac{1}{6} \pi d^3 = 0{,}523598776\, d^3$. $O = 4 \pi r^2 = \pi d^2$ $= 4 \times$ pole koła wielkiego.
Kula wydrążona. (Tabl. str. 38).	R zewn., r wewn. promień, D „ , d „ średnica.	$V = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3)$ $= \frac{1}{6} \pi (D^3 - d^3)$.
Odcinek kuli, czyli czasza kulista.	h wysokość (strzałka) odcinka, r promień kuli, a średnica podstawy.	$V = \frac{1}{6} \pi h (3a^2 + h^2)$ $= \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)$. $M = 2 \pi r h = \pi (a^2 + h^2)$. $a^2 = h (2r - h)$.

*) Jeżeli podstawa kopyta jest większa lub mniejsza niż półkole, $2a$ zaś jest prostą krawędzią kopyta, b długością prostopadłej z podnóża h na $2a$ poprowadzonej, wreszcie 2φ kątem środkowym obwodu podstawy, wyrażonym w stopniach, to będzie:

$$V = \frac{h}{3b}\left[a(3r^2 - a^2) + 3r^2(b - r)\frac{\varphi \pi}{180}\right]; \qquad M = \frac{2rh}{b}\left[(b - r)\frac{\varphi \pi}{180} + a\right].$$

Bryła	Oznaczenie wymiarów	Objętość $= V$. Cała powierzchnia $= O$. Pole płaszcza, t. j. krzywej części powierzchni $= M$.
Strefa, czyli pas kulisty.	h wysokość pasa, r promień kuli, a, b promienie podstaw (den) ($a > b$).	$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2+3b^2+h^2)$. $M = 2\pi r h$. $r^2 = a^2 + \left(\frac{a^2-b^2-h^2}{2h}\right)^2$.
Wycinek kuli. (Rys. 38).	Rys. 38. 	$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$ $= 2{,}0943951024\, r^2 h$. $O = \pi r(2h + a)$.
Dwukąt kulisty (sferyczny)	φ^0 kąt obu kół wielkich (boków).	$M = \frac{\varphi^0}{90}\pi r^2$ $= 0{,}0349066\,\varphi^0 r^2$.
Trójkąt kulisty (sferyczny)	ε^0 nadmiar sferyczny, t. j. różnica pomiędzy sumą kątów, a 180^0.	$M = \frac{\varepsilon^0}{180}\pi r^2$ $= 0{,}0174533\,\varepsilon^0 r^2$.
8. Elipsoid.	a, b, c 3 półosie.	$V = \frac{4}{3}\pi abc$.
Elipsoid obrotowy.	1) Gdy $2a$ jest osią obrotu: 2) „ $2b$ „ „ „ :	$V = \frac{4}{3}\pi ab^2$. $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$.
9. Paraboloid obrotowy.	r promień podstawy, h wysokość.	$V = \frac{1}{2}\pi r^2 h = 1{,}570796\, r^2 h$ $=$ połowie walca kołowego o promieniu r i wysokości h.
Paraboloid ścięty.	R, r promienie podstaw równoległych (den), h wysokość.	$V = \frac{1}{2}\pi(R^2 + r^2)h$ $=$ pole średniego przekroju $\times$ wysokość.
10. Pierścień walcowy. (Rys. 39).	Rys. 39.  $d = 2r$.	$V = 2\pi^2 R r^2 = 19{,}739\, R r^2$ $= \frac{1}{4}\pi^2 D d^2 = 2{,}4674\, D d^2$. $O = 4\pi^2 R r = 39{,}478\, R r$ $= \pi^2 D d = 9{,}8696\, D d$.
11. Kubeł eliptyczny.	Podstawy równoległe są dowolnemi elipsami o półosiach a, b i a_1, b_1.	$V = \frac{1}{6}\pi h[2(ab + a_1 b_1)$ $+ a b_1 + a_1 b]$.

Bryła	Oznaczenie wymiarów	Objętość $= V$. Cała powierzchnia $= O$. Pole płaszcza, t. j. krzywej części powierzchni $= M$.
12. Beczka.	D średnica w środku wysokości, d średnica den, h wysokość.	$V = {}^1/_{12}\,\pi h\,(2D^2 + d^2)$ w przybliżeniu dla klepek, zgiętych podług łuku koła. $V = {}^1/_{15}\,\pi h\,(2D^2 + Dd + {}^3/_4\,d^2)$ dokładnie dla klepek parabolicznych.
13. Sklepienie kolebkowe lub **kapiaste, t. j.** wycinek walca wydrążonego.	s połowa rozpiętości, r promień wewnętrzny sklepienia (podniebienia), δ grubość sklepienia, h strzałka, l długość sklepienia.	$V = \frac{\varphi^0 \pi}{360}(2r\delta + \delta^2)\,l.$ $\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{s}{r-h}\right).$
14. Sklepienie krzyżowe nad prostokątem $2S \times 2s$.	s, r, δ, h, $2S$ (zamiast l) i φ oznaczenia, jak w 13. dla jednej kolebki, S, R, Δ, h, $2s$, ψ dla drugiej kolebki.	$V = \frac{\varphi^0 \pi}{360}(2r\delta + \delta^2)\,S + \frac{\psi^0 \pi}{360}(2R\Delta + \Delta^2)\,s.$ $\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{s}{r-h};\ \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{S}{R-h}\right).$

15. Objętości prostego stożka kołowego, paraboloidu obrotowego, kuli i walca kołowego mają się do siebie, przy jednakowym $r = {}^1/_2 h$, jak $2:3:4:6$. Objętość kuli równa się 0,523599 krotnej objętości sześcianu, opisanego dokoła tejże kuli, t. j. o krawędzi $2r$.

16. Jeżeli z pasa kulistego o wysokości h (por. powyżej pod **7.**) wykrajemy stożek ścięty o podstawach równych dnom pasa, to, nazwawszy długość tworzącej stożek ten s, otrzymamy objętość pozostałej bryły pierścieniowatej:

$$V = {}^1/_6\,\pi h s^2.$$

17. Pryzmoidami nazywamy bryły o dwóch podstawach równoległych i bocznej powierzchni, składającej się z dowolnej liczby ścian (trójkątów, trapezów, równoległoboków, a nawet powierzchni wichrowatych). Do ich obliczenia stosujemy wzór Simpsona (str. 133):

$$V = {}^1/_6\,H\,(F_0 + 4F_m + F_{2n}).$$

Przykłady: 1. **Obelisk** wysokości h, (por. str. 134), o podstawach trapezowych. Wysokości tych trapezów niechaj będą c i c_1, a ich szerokości środkowe m i m_1, to objętość obelisku będzie:

$$V = {}^1/_6\,h\,[(2m + m_1)\,c + (2m_1 + m)\,c_1]$$
$$= {}^1/_6\,h\,[mc + (m + m_1)(c + c_1) + m_1 c_1].$$

2. **Rampa drogowa** (podjazd). Jeżeli h jest wysokością nasypu głównego, b szerokością drogi podjazdowej, to, przy spadku podjazdu $1:n$, a pochyleniu skarp drogi głównej i podjazdu $1:m$, otrzymamy objętość podjazdu:

$$V = {}^1/_6 h^2 (n - m) [3b + 2hm (1 - m:n)].$$

Np. dla $n = 45$ i $m = 1{,}5$: $\quad V = 21{,}75 h^2 (b + 0{,}0067\, h)$.

18. Prawidło Guldina (Pappusa).*)

1. Jeżeli s jest długością krzywej, obracającej się dokoła osi, która leży w płaszczyznie samej krzywej, a x_0 odległością środka ciężkości krzywej od tejże osi, to pole powstającej **powierzchni obrotowej** będzie:

$$M = 2\pi x_0 s.$$

$$= \text{droga środka ciężkości} \times \text{długość krzywej}.$$

2. Gdy plaska figura zamknięta, o polu F, obraca się dokoła osi, leżącej w jej płaszczyznie, wytwarza ona **bryłę obrotową** o objętości:

$$V = 2\pi x_0 F$$

$$= \text{droga środka ciężkości} \times \text{pole figury}.$$

W obydwu przypadkach 1. i 2. figura obracająca się powinna leżeć wyłącznie po jednej stronie osi.

3. Dla dwóch równoległych osi obrotowych, przebiegających w odległości wzajemnej a, otrzymamy poniższe związki, w których M_1 i V_1 odnosi się do pierwszej, M_2 i V_2 do drugiej osi:

$$M_1 = 2\pi a s \pm M_2 \quad \text{i} \quad V_1 = 2\pi a F \pm V_2.$$

Jeżeli figura tworząca s lub F leży pomiędzy osiami równoległemi, ważnym jest znak $-$, w przeciwnym zaś razie znak $+$.

4. Jeżeli $y = f(x)$ jest równaniem krzywej południkowej, odniesionem do osi obrotowej jako osi x, a M i V są zawarte między dwiema płaszczyznami prostopadłemi do osi obrotu, a więc do siebie równoległemi, a oddalonemi od początku spółrzędnych o x_1 i x_2, to mamy wzory ogólne:

$$M = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \cdot ds \quad \text{i} \quad V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 \cdot dx.$$

$ds = \sqrt{dx^2 + d^2y}$ jest różniczką łuku krzywej południkowej.

5. Jeżeli s lub F są sumami algebraicznemi długości łuków s_1, s_2, s_3 .... lub pól F_1, F_2, F_3 ..., dla których znamy odległości środków ciężkości od osi obrotu x_{01}, x_{02}, x_{03} ..., to:

$$M = 2\pi (s_1 x_{01} + s_2 x_{02} + s_3 x_{03} + \cdots)$$
$$V = 2\pi (F_1 x_{01} + F_2 x_{02} + F_3 x_{03} + \cdots).$$

*) Porówn. także Chr. Nehls, „Ueber den Flächen- und Rauminhalt der durch Bewegung von Kurven und Flächen erzeugten Flächen- und Raumgrössen". Archiv der Mathematik und Physik, 2 Reihe, Bd. XIII, 1894.

6. Dla obrotu niezupełnego (w p. 1. do 5.) należy wartości M, względnie V, pomnożyć przez $\varphi^0 : 360^0$, jeżeli φ^0 oznacza kąt środkowy części obrotu (por. np. 13., str. 137).

7. Prawidła powyższe można stosować i w tym przypadku, gdy środek ciężkości figury opisuje dowolną krzywą, o ile tylko płaszczyzna figury zawsze będzie skierowana prostopadle do kierunku drogi, a chwilowa oś obrotu, przechodząca przez środek krzywości drogi, nigdy nie przetnie figury tworzącej. Zamiast długości łuku koła (p. pod 6.) wypada natenczas podstawić długość drogi przebieżonej.

VIII. PÓŁPERSPEKTYWICZNE RZUTY RÓWNOLEGŁE.

(Aksonometrya).

1. **Półperspektywiczną metodę** rzutów równoległych stosujemy nieraz z korzyścią dla rysunkowego przedstawienia przedmiotu w sposób, pozwalający nietylko wniknąć zupełnie w postać i związek samego przedmiotu, lecz nadto oznaczać wprost zapomocą danych podziałek przynajmniej te wymiary przedmiotu, które są równoległe do jednej z trzech osi głównych rysunku, czego nie pozwala metoda rzutów środkowych, czyli perspektywa właściwa, dająca natomiast obrazy bardziej łudzące i więcej do prawdy zbliżone. Dogodnym jest następujący sposób postępowania: Odniósłszy dany przedmiot do trzech osi prostokątnych i przyjąwszy równe podziałki na każdej osi, rzucamy snopem promieni równoległych owe trzy osi wraz z podziałkami na dowolnie względem osi pochyloną płaszczyznę rysunku, poczem przenosimy dowolne wymiary przedmiotu, równoległe do jednej z osi, kreśląc je w rysunku równolegle do rzutu tejże osi i odmierzając je podług rzutu podziałki owej osi. Oś z, oraz rzut jej w rysunku, przyjmujemy zazwyczaj pionowo.

2) Stosując **rzut ukośnokątny** (względem płaszczyzny rysunku nachylony), możemy tak kierunki rzutów osi, jako też jednostki podziałek rzuconych, przyjąć dowolnie, z zastrzeżeniem jednakże, aby nie więcej niż dwa rzuty osi miały ten sam kierunek, a nie więcej niż jeden rzut podziałki miał jednostkę długości równą zeru (twierdzenie Pohlkego).

Proste układy (oznaczenia podług rys. 40):

1) $e_x = e_z = 1$; $e_y = 1,\ {}^1/_2,\ {}^1/_3$;
$\varphi = 90^0$; $\psi = 45^0,\ 60^0$.
(t. zw. perspektywa kawaleryjska).

2) $e_x = e_y = e_z = 1$; $\varphi + \psi = 90^0$.
t. zw. perspektywa wojskowa).

3. Jeżeli w danym przedmiocie zachodzą nietylko linie proste i płaszczyzny, lecz również i koła w rozmaitych położeniach, walce i stożki kołowe, kule i dowolne powierzchnie obrotowe, to dogodniejszym będzie **rzut prostokątny.** Przy stosowaniu tego rzutu dany kierunek osi w rysunku określa już wielkość jednostek podziałkowych rysunku i naodwrót. Tablica poniższa podaje niezbędne dane dla stosunków najbardziej używanych *), przy zastosowaniu następujących oznaczeń:

Rys. 40.

e jednostka długości istotnej podziałki rysunku;

e_x, e_y, e_z jednostki rzutów podziałek;

φ i ψ kąty ostre, jakie oś x, względnie y, tworzy z kierunkiem osi z.

Rzuty prostokątne.

Rodzaj rzutu	$e_x : e_y : e_z$	$e_z : e$	ctg φ (wartości przybliżone)	ctg ψ (wartości przybliżone)
Rzut jednomierny	1 : 1 : 1	0,8165	$\varphi = \psi = 60^0$	
Rzuty dwumierne	1 : 1/2 : 1	0,9428	1 : 8	7 : 8
	1 : 1/3 : 1	0,9733	1 : 18	17 : 18
	1 : 1/4 : 1	0,9847	1 : 32	31 : 32
Rzuty trójmierne	5/6 : 2/3 : 1	0,9670	1 : 5	1 : 3
	9/10 : 1/2 : 1	0,9853	1 : 11	4 : 11

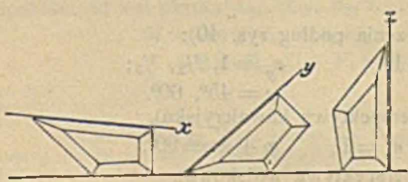
Kolumna ostatnia określa kierunki osi.

4. Jeżeli r_x, r_y, r_z oznaczać będą takie kresy, które, mierzone na podziałkach osi x, y, względnie z, dadzą równe wyniki cyfrowe, to znaczy, że $r_x = r\,(e_x : e)$ i t. d., to możemy i bez podziałek osiowych

*) W zwykłych warunkach polecenia godnym będzie rzut 1 : 1/2 : 1, najprostszy po rzucie jednomiernym, dającym zazwyczaj niełądne obrazy.

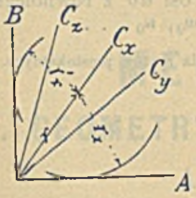
Do kreślenia równoległych do osi wielce dogodnym okazał się czworokąt rysunkowy (rodzaj ekierki), przedstawiony obok (rys. 41) w trzech położeniach. stosowanych do kreślenia. Czworokąty takie dla przeróżnych stosunków osi i nachyleń wyrabia Albert Martz w Stuttgarcie.

Rys. 41.

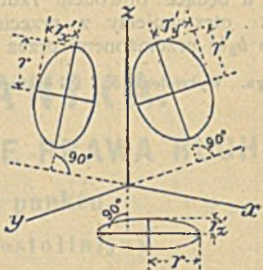


oznaczyć owe kresy sposobem skróceń (rys. 42), przydatnych i do innych celów (por. 5). Promienie C_x, C_y, C_z kreślimy tak, aby wstawy ich kątów nachylenia względem A miały wartości $e_x : e$, $e_y : e$, względnie $e_z : e$.

Rys. 42.



Rys. 43.

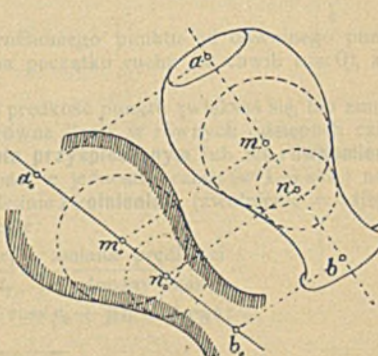


5. **Koła** równoległe do płaszczyzn spółrzędnych (rys. 43). Koło równoległe do płaszczyzny yz przedstawi się w postaci elipsy, której środek będzie w rzucie środka koła, oś wielka równą będzie istotnej średnicy koła i skierowaną prostopadle do rzutu osi x, a długość małej półosi (r_x p. 4.) będzie:

$$r'_x = \sqrt{r^2 - r_x^2}.$$

Podobnie postępujemy z kołami równoległemi do płaszczyzn xz i xy. Oznaczenia kres r'_x, r'_y, r'_z najdogodniej dokonać podług rys. 42. Dla stosunku rzutów $1 : {}^1/_2 : 1$ jest $r'_x = r'_z = {}^1/_3 r$.

Rys. 44.



6. Obrazem **kuli** będzie zawsze koło, zakreślone około obrazu punktu środkowego kuli, promieniem równym istotnemu promieniowi kuli.

Grubość **walców** kołowych, dowolnie skierowanych, zawsze w obrazie równą będzie istotnej grubości samego walca.

7. **Powierzchnie obrotowe** w dowolnem położeniu (rys. 44). Wykreśliwszy rzut ab osi obrotowej, kreślimy obok

istotną długość tejże osi $a_0 b_0$ w takiem położeniu, aby $a_0 a \parallel b_0 b$, poczem rysujemy istotny profil (krzywą tworzącą) powierzchni obrotowej po obydwu stronach osi $a_0 b_0$. Zakreślając dalej koła dotykające profil około dowolnych punktów m_0, n_0 . . ., leżących dostatecznie gęsto obok siebie na osi $a_0 b_0$ i równo wielkie koła około punktów m, n . . . leżących na rzucie osi, a będących rzutami punktów m_0, n_0 . . ., otrzymamy krzywe, obwijające koła w końcu wspomniane, a będące obwodem rzutu powierzchni obrotowej. Punkty m, n . . . otrzymujemy z przecięcia się osi ab z równoległemi do $a_0 a$ (lub $b_0 b$) przełożonemi przez punkty m_0, n_0 . . .

Uwaga. Wykreślenia 5, 6 i 7 ważne są tylko dla rzutów prostokątnych.