Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de la filière

Master Droit Economie et Gestion, mention Actuariat

et l'admission à l'Institut des Actuaires

le 22 mai 2019

Par : Grégory Buet

Titre: Influence du GSE sur le calcul des BE/SCR d'un contrat d'assurance vie mono support.

Confidentialité : ☐ NON (X) OUI (Durée : ☐ 1 an (X) 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires	signatures	*Entreprise :*
Mme Florence PICARD		Nom : BNP PariBas Cardif
M. Michel GERMAIN		
M. Vincent RUOL		
Membres présents du jury de la filière actuariat		*Directeur de mémoire en entreprise :*
M. Alexis COLLOMB		*Nom :* Zaika RAKOTONDRAMBOLA
M. Nathanaël ABECERA		*Signature :*
M. Olivier DESMETTRE		*Invité :*
M. David FAURE		*Nom :* Fabien PERRUCOT
M. François WEISS		*Signature :*

Signature du responsable entreprise

Secrétariat

Signature du candidat

Bibliothèque :

CNAM – 292 rue Saint-Martin F-75141 Paris Cedex 03

Influence du GSE sur le calcul des BE/SCR d'un contrat d'assurance vie mono support

“Le premier principe est que vous ne devez pas vous duper … et vous êtes la personne la plus facile à duper.”

Richard Phillips Feynman (Prix Nobel de physique 1965)

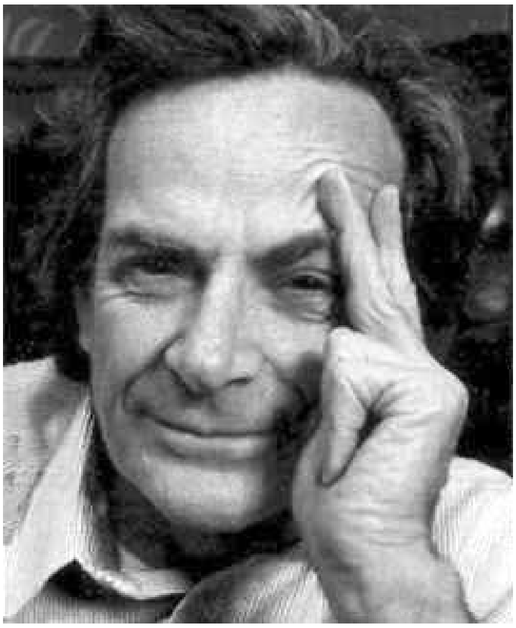


Figure 1: Richard Phillips Feynman

RESUME

Mots clés : Assurance Vie, Solvabilité II, Pilier 1, Pilier 3, BE, SCR, EIOPA, ACPR, GSE

Depuis le 1er janvier 2016, la directive Européenne Solvabilité II est entrée en vigueur. Chaque compagnie d'assurance doit donc maintenant disposer d'un montant minimum de fonds propres dit SCR (Solvency Capital Requirement) et de provisions mathématiques spécifiques dites BE (Best Estimate).

Le SCR correspond à un capital économique. Il est calculé sur les risques propres à la compagnie et vise à limiter la probabilité de ruine à 1 an à 0,5%.

Le BE correspond quant à lui à la valeur actuelle probable des flux futurs de trésorerie estimés.

Un générateur de scénario économique correspond à des projections sur un horizon de temps donné, de grandeurs économiques et financières : taux d'intérêt, prix des actions, etc. Il va servir à alimenter nos modèles ALM pour le calcul de nos BE et SCR

Le but de ce mémoire sera de montrer l'influence du générateur de scénarios économiques dans le calcul des exigences quantitatives (SCR et BE) d'un contrat d'assurance vie mono support euro (pilier 1 Solvabilité 2).

ABSTRACT

Key words: Insurance, Solvency II, Pillar 3, Pillar 1, SCR, BE, Compliance, EIOPA, ACPR, ESG.

The European directive Solvency II is due to be implemented on 1st January 2016. Solvency II pilar 1 requires that insurers and reinsurers respect a minimun level of own funds (the SCR or Solvency Capital Requirement) and specific technical provision (the BEL or Best Estimate Liability).
This SCR is defined as an economic capital which aims to reduce the 1 year ruin probability at 0,5% level.

Each insurance company will have to Estimate its own SCR using the standard formula or internal form.

The Best Estimate Liability is the expected or mean value (probability weighted average)
of the present value of future cash flows for current obligations, projected over the contract's run-off period, taking into account all up-to-date financial market and actuarial information.

Economic Scenario Generator (ESG) uses a mathematical procedure to simulate, not predict, the returns for assets

This paper deals with the ESG impact on Best Estimate//Solvency Capital Requirement calculus (Solvency II pilar 1).

LIMITES

Ce mémoire d'actuariat a pour objectif de montrer l'influence du générateur de scénario économique dans le calcul des exigences quantitatives (SCR et BE) d'un contrat d'assurance vie mono support euro (pilier 1 Solvabilité 2).

En raison des particularités et opportunités inhérentes à chaque compagnie d'assurances, les constats et conclusions présentés ne peuvent se substituer à l'analyse du cadre particulier.

De plus, en raison des incertitudes inhérentes à toute information relative au futur, certaines hypothèses peuvent ne pas se vérifier et nos modélisations deviendraient caduques (ex : Taux d'intérêts négatifs).

Les limites sont détaillées dans le paragraphe « Etude des sensibilités puis tests et limites du GSE/modèle ALM complexifié ».

Ainsi, l'ensemble des résultats obtenus est uniquement valable dans le seul cadre des hypothèses définies dans ce mémoire.

SYNTHESE

Depuis le 1er janvier 2016, la directive Européenne Solvabilité II est entrée en vigueur. Cette directive repose, en grande partie, sur la valeur économique des actifs et passifs. Les provisions mathématiques sont alors des BE (Best Estimate) et les actifs passent d'une valeur comptable à une valeur de marché.
Chaque compagnie d'assurance doit donc maintenant disposer d'un montant minimum de fonds propres dit SCR (Solvency Capital Requirement) et de provisions mathématiques spécifiques dites BE (Best Estimate).

Le SCR correspond à un capital économique. Il est calculé sur les risques propres à la compagnie et vise à limiter la probabilité de ruine à 1 an à 0,5%.

En Solvabilité 2, les provisions « Best Estimate » correspondent à l'actualisation de tous les flux probables futurs (cotisations, prestations, frais, fiscalité,…) actualisés avec une courbe des taux sans risque.

Un générateur de scénarios économiques correspond à des projections sur un horizon de temps donné, de grandeurs économiques et financières : taux d'intérêt, prix des actions, etc

Le but de ce mémoire sera de montrer l'influence du générateur de scénarios économiques dans le calcul des exigences quantitatives (SCR et BE) d'un contrat d'assurance vie mono support euro (pilier 1 Solvabilité 2).

En vulgarisant et généralisant le propos, il s'agit grâce à des modélisations mathématiques, d'estimer de façon statistique les principaux risques encourus du fonds en euro.
Cela nous servira à calculer les besoins en fonds propres permettant d'éviter à 99,5% sur une année la ruine des compagnies d'assurance (SCR) ainsi les besoins en provisions (BE).

Pour ce faire, il nous faudra calculer les valeurs projetées des instruments financiers : actions, obligations et taux (GSE).

L'objectif prioritaire consiste alors à étudier l'influence du changement des modèles d'action et de taux (dans le GSE), sur le montant des fonds propres requis et provision. En effet, nous verrons qu'à un modèle action et de taux considérés ne correspondront pas les mêmes besoins en fonds propres et provisions.

Partie Théorique

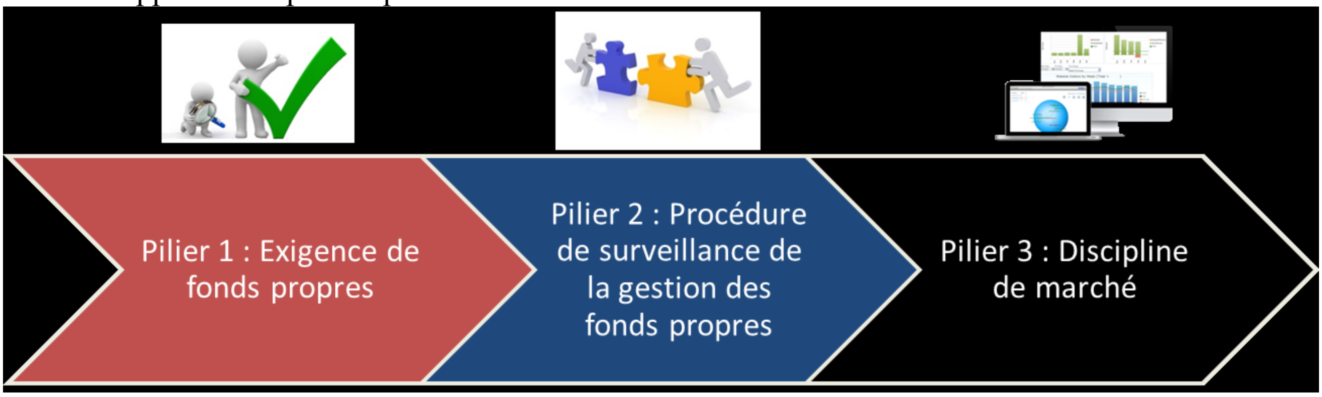
Avant de commencer, il convient de préciser que ce mémoire s'est effectué en partie au sein de Natixis Assurances et BNP Paribas Cardif.

Pour plus d'informations sur BNP Paribas Cardif, il convient de regarder la partie correspondante.

Maintenant que le cadre est posé, résumons plus précisément les notions théoriques indispensables à la bonne compréhension du problème.

Ces notions indispensables sont :

- La directive Solvabilité 2 : Dans la lignée de Bâle II, l'objectif de la directive Solvabilité 2 est de mieux adapter les fonds propres exigés des compagnies d'assurance et de réassurance aux risques que celles-ci encourent dans leur activité. Pour cela la directive s'appuie sur 3 piliers qui sont :



- Le contrat d'épargne en euros : Un contrat d'assurance-vie mono support se définit comme un contrat dans lequel l'épargne est investie sur un seul type de placement. En fait, un contrat d'assurance-vie monosupport est un contrat en euros, au sein duquel l'épargne est gérée par l'assureur sur des produits tels que des obligations, des emprunts d'Etats ou des bons du Trésor.etc.. La valeur globale du contrat d'assurance-vie est exprimée en euros, et non en unités de compte.
- La gestion Actif Passif (En anglais ALM = Asset and Liability Management) : La gestion actif-passif, consiste à analyser la situation du bilan de la compagnie d'assurance et son évolution probable sur un horizon de planification, en fonction de variables. L'évaluation de ce bilan financier nous permettra, par la suite, de calculer le Best Estimate.
- Le Générateur de Scénarios Economiques (GSE) : Le GSE sert à effectuer des simulations (ici stochastiques) de différents paramètres économiques ou financiers, que l'on appelle plus communément « facteurs de risque ». Notre GSE va ainsi alimenter nos modèles ALM pour le calcul de nos BE et SCR

Ainsi, pour notre étude, nous avons donc utilisé le couple d'outils : GSE et modèle ALM pour calculer les exigences réglementaires qui nous intéressent en prenant en compte plusieurs couples de modèle d'instruments financiers.

Notre étude a donc été basée sur les couples (modèle de taux – modèle d'action) suivants :

- Vasicek – Merton (Modèle ALM simplifié seulement)
- Vasicek – Black Scholes (Modèle ALM simplifié seulement)
- Hull White – Black Scholes (Modèle ALM simplifié et complexifié)
- Hull White – Merton (Modèle ALM simplifié et complexifié)
- CIR étendu (Cox-Ingersoll-Ross étendu = CIR++) – Black Scholes (Modèle ALM simplifié et complexifié)
- CIR étendu – Merton (Modèle ALM simplifié et complexifié)

Chacun de ces modèles[1] est détaillé dans le paragraphe « 2.2.1 Modèles d'Actif »

[1] On ne parle pas ici de modèles « intégrés de GSE » comme Ahlgrim ou Wilkie (cf intervention Winter associés) mais bien de modèles d'actif de taux et d'action qui constituent notre GSE

Nos travaux se basent également sur trois modèles ALM :

- Modèle ALM dit « Simplifié » => ce modèle a pour principales hypothèses :
  - La non prise en compte du risque de mortalité
  - Le non re balancement des gains de l'assuré sur le contrat d'épargne, le client récupère à chaque échéance les bénéfices de son placement, sous forme de rachat partiel.
- Modèle ALM dit « Complexifié » => ce modèle, plus réaliste que le précédent, a pour principales hypothèses :
  - La prise en compte du risque de mortalité
  - Le re balancement des gains de l'assuré sur le contrat d'épargne
- Modèle ALM dit « Complexifié modifié » => ce modèle, très proche du précédent, a pour principales hypothèses :
  - La prise en compte du risque de mortalité
  - Le re balancement des gains de l'assuré sur le contrat d'épargne
  - Le versement de dividendes

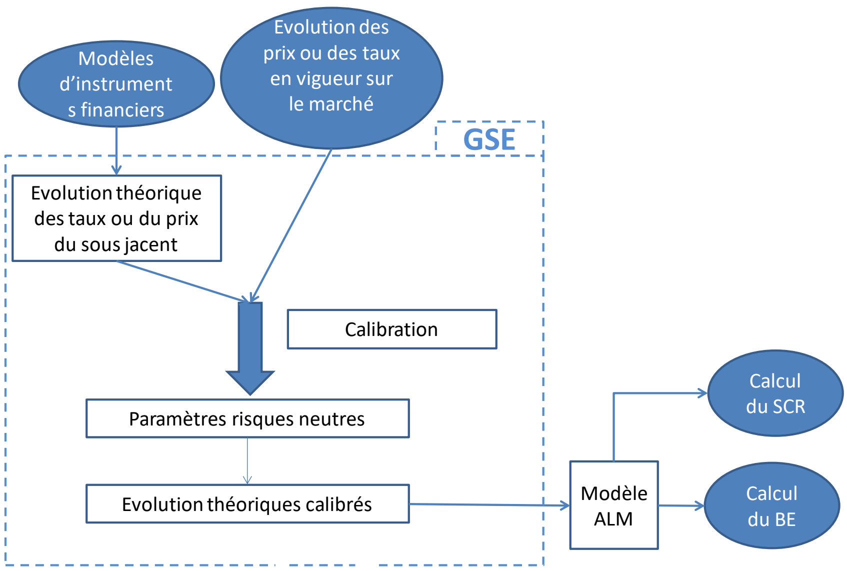
Ces modèles sont détaillés respectivement dans les parties « 2.2 Modèle ALM simplifié » et « 2.3 Modèle ALM complexifié »

Partie Quantitative

Maintenant que le cadre est posé, l'étude en elle-même peut commencer.

Le premier point structurant est la calibration du GSE. En effet, cela permet d'ajuster les paramètres du modèle afin de rendre les résultats cohérents avec les prix du marché. Notre calibration se fera en risque neutre, ce choix est expliqué dans l'annexe « 10 Méthodologie de calibrage de ces modèles».

Pour remettre cette étape dans le contexte général, nous pouvons résumer par le schéma[2] suivant :



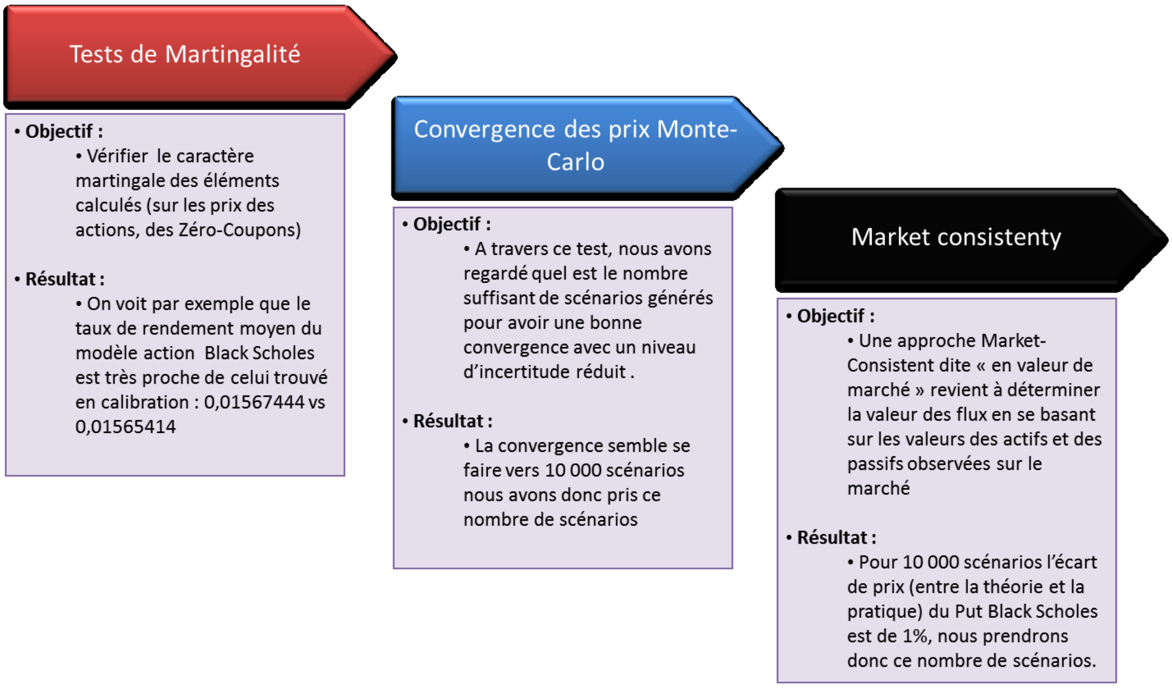
[2] Pour le modèle complexifié, il y aura aussi le calcul de la RM = Risk Margin

Pour chaque modèle d'action et de taux, nous aurons la démarche suivante :

- Choix des données de marché pour la calibration (Pour les actions ce sera les calls/puts et pour les obligations ce sera les caps/floors)
- Définition de l'algorithme de calibration (via les fonctions de pricing calls/puts et caps/floors pour les différentes modélisations)
- Résultats de la calibration et conclusions (Evaluation des paramètres des modèles actions et obligations (taux))
- Calcul des instruments financiers (Des tests seront effectués dans la partie test pour voir la cohérence de ces calculs)

Pour plus d'information, il faut étudier la partie « 4.1.2 Modèles et Calibrage»
Une fois ces calculs d'actifs réalisés, nous testons notre GSE pour savoir si les résultats sont cohérents.

Les tests du GSE et leurs conclusions sont résumés ci-dessous :



Ces différents tests sont accessibles dans la partie « 4.3 Les tests du GSE »

Maintenant que notre GSE est testé nous allons l'utiliser pour alimenter nos modèles ALM.

Modèle ALM Simplifié

Ce modèle ne prend en compte ni le risque de mortalité ni le re-balancement des gains de l'assuré. Cela va tout de même nous fournir une première indication sur le niveau des BE et SCR.

Dans le modèle simplifié nous avons calculé notre BE uniquement via le scénario central. Cependant nous avons testé le BE suivant la convergence des actifs et la convergence du BE est atteinte pour 10 000 scénarios d'actifs.

Nous avons donc calculé nos BE via les 6 couples de modèles définis précédemment pour 10 000 scénarios d'actifs à chaque fois mais en ne prenant en compte que le scénario central.

Nous arrivons au tableau de résultats suivants :

BE X / BE Black Scholes - Vasicek	BE Black Scholes - Vasicek	BE Black Scholes - Hull White	BE Merton - Vasicek	BE Merton - Hull White	BE Black Scholes - CIR++	BE Merton - CIR++
Valeur du BE	1 482 953 038	1 373 789 161	1 475 840 054	1 366 963 758	1 367 149 164	1 360 345 401
Valeur en % du BE Black Scholes - Vasicek	100,00%	92,60%	99,50%	92,20%	92,20%	91,70%

On remarque que le choix des modèles d'action influe sur le calcul des BE mais moins que les modèles de taux. Ainsi, la modélisation des obligations via un modèle de taux Vasicek a une influence significative sur le BE car les taux Vasicek sont assez éloignés du marché et surpondèrent les taux courts.

De la même manière que pour le BE, nous avons calculé notre SCR selon la formule standard donc uniquement via le scénario central (avec le calcul des actifs sur 10 000 scénarios).

Nous avons calculé nos SCR via les couples de modèles définis précédemment.
Nous arrivons au tableau de résultats suivants :

SCR X / SCR Black Scholes - Vasicek	SCR Black Scholes - Vasicek	SCR Black Scholes - Hull White	SCR Black Scholes - CIR++	SCR Merton - Vasicek	SCR Merton - Hull White	SCR Merton- CIR++
Valeur du SCR	118 673 622	116 750 970	116 736 967	111 610 761	115 525 713	116 878 760
Valeur en % du SCR Black Scholes – Vasicek	100,00%	98,40%	98,30%	94,10%	97,30%	98,50%

Comme pour les BE, les valeurs des SCR sont homogènes.

Que ce soit pour la valeur BE ou le SCR, que le modèle de Vasicek engendre les plus grandes disparités. Cela peut en partie être expliqué par le fait que les modèles de Hull-White et CIR++ utilisent les prix du marché pour calculer les taux zéro-coupon, contrairement à celui de Vasicek. Les résultats sont détaillés dans la partie « 2.3 5 Modèlisation du Passif (Modèle ALM Simplifié) »

1 **Nota Bene**

Même si notre modèle simplifié est assez irréaliste, les SCRs trouvés sont de ~ 115 millions. Si on fait le ratio SCR/Actifs on trouve 7% et ce ratio est en accord avec les ratios SCR/Actifs des compagnies d'assurance généralement de l'ordre de 6 - 7 %.

Nous allons maintenant utiliser un modèle ALM plus réaliste. L'idée est de voir si nos premières conclusions sur l'influence du GSE dans les calculs réglementaires se confirment avec un modèle plus réaliste.

Modèle ALM Complexifié [3]

Ce modèle plus réaliste prend en compte le risque de mortalité et le re balancement des gains de l'assuré. Il pourrait servir pour des études ponctuelles pour challenger les chiffres des assureurs.

Les hypothèses sont détaillées dans la partie « 2.3 Modèle ALM compléxifié »

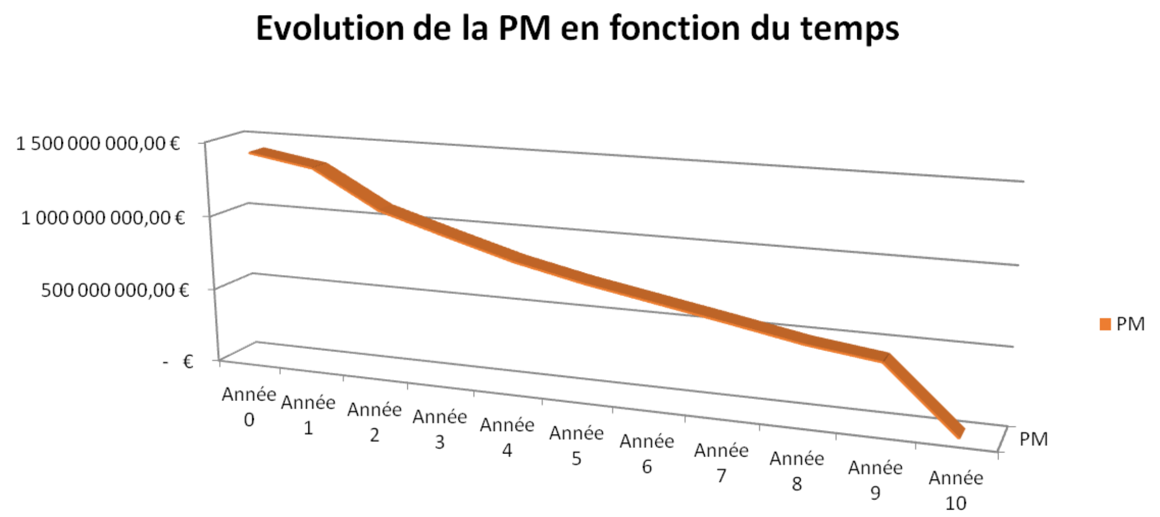
2 **Nota Bene**

De manière simpliste le TMG + TFGSE =1%. Au vu de la proportion d'obligation dans nos investissements, il nous faudrait donc une obligation donnant un coupon fixe >1% pour s'assurer de la bonne santé financière de l'assureur. Ce qui est le cas car nos coupons rapportent en moyenne 1,8% (cf paragraphe sur les actifs)

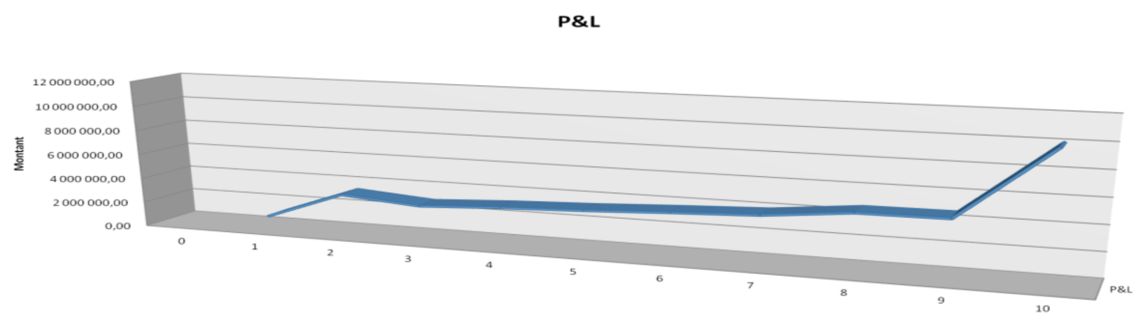
Pour ce modèle ALM, le modèle de taux Vasicek n'est pas retenu car ses résultats post calibrations sont jugés trop éloignés des données de marché.

Afin d'illustrer ce modèle, voici quelques résultats intermédiaires pour le couple Hull White – Merton

- Evolution de la PM sur 10 ans en scenario central



- Evolution du compte de résultat



[3] Le modèle ALM simplifié est développé sous R mais les modèles ALM complexifiés sont sous Excel.
En fait, nos tentatives de développement d'un modèle ALM complexifié sous R nous ont montré la difficulté de la tâche. La gestion de plusieurs tableaux imbriqués et bien mises en forme, se fait plus facilement sous Excel que R. Cependant, R fonctionne très bien pour les calculs en masse (par exemple un GSE produisant 100 000 scénarios stochastiques d'actions et de taux)

Remarque : Logiquement le P&L net de taxes suit la même courbe que le rendement de l'actif. Il y a un rendement artificiellement plus élevé en dernier année avec le rachat massif des contrats cf « 6.1.2 Résultats intermédiaires du modèle pour le scénario central pour le couple Hull White - Merton ».

3 — Nota Bene

On observe ce qui se produit en réalité en assurance vie : l'assureur gagne en moyenne peu d'argent (ici 3 millions € de gain moyen pour un actif à ~ 1,5 milliards € avec un portefeuille en run off) mais on gagne toujours de l'argent en moyenne

Regardons maintenant la comparaison des différents BE trouvés :

BE X / BE Black Scholes - Hull White	BE Black Scholes - Hull White	BE Merton - Hull White	BE Black Scholes -CIR++	BE Merton - CIR++
Valeur du BE	1 328 922 966	1 327 298 492	1 326 855 717	1 325 639 773
Valeur en % du BE Black Scholes - Hull White	100,00%	99,90%	99,80%	99,80%

Comme pour le modèle simplifié, une fois le modèle de Vasicek enlevé, on voit que les BE sont très proches. Cela est normal car les taux d'actualisation zéro coupon des modèles sont eux même très proches.

Regardons maintenant la comparaison des différents SCR trouvés :

SCR X / SCR Black Scholes - Hull White	SCR Black Scholes - Hull White	SCR Black Scholes - CIR++	SCR Merton Hull-White	SCR Merton-CIR++
Valeur du SCR	57 281 316	60 937 707	57 369 807	61 024 425
Valeur en % du SCR Black Scholes – Hull White	100,00%	106,40%	100,20%	106,50%

Remarque : Ces résultats bien que proches montrent que le choix des modèles utilisés a bien un impact sur le calcul du SCR. Il y a tout de même une variation de près de 7% entre le SCR CIR - Merton et le SCR Hull White-Black Scholes.
Les résultats sont détaillés dans la partie « 6.3 Calcul des SCR »

4 — Nota Bene

Ce gain de capital en changeant de modèle ne semble pas encore complétement réglementé par l'ACPR. D'ailleurs, il est probable que ces derniers imposent davantage de restrictions sur les GSE dans les années qui arrivent.

5 **Nota Bene**

Le montant du SCR peut sembler faible comparativement au montant d'actif. En effet, le ratio SCR/Actif serait de 4% donc assez loin des 7/8% habituels. Cependant si l'on regarde les chiffres de BPCE Assurances au 31/12/2016 en prenant les SCR marché et risque de souscription vie. Le total de ces SCR sur le montal de l'actif est de 4,9% donc assez proche de nos 4% (Cf Rapport SFCR BPCE Assurances)

Une étude de sensibilité nous montre que, sans surprise, notre modèle ALM complexifié est sensible aux TMG, variation de taux, variation de rachat, variation de frais de gestion. (cf la partie « 7.1 Etude des sensibilités pour le modèle complexifié »)

De plus notre test de fuite [4]économique sur ce modèle ALM varie de 0,4 à 0,6% (cf la partie « 7.2 Test de fuite économique sur le modèle ALM ») ce qui est inférieur au seuil (généralement utilisé) de 1% mesurant la viabilité du modèle mais cela reste une fuite à prendre en compte.

Modèle ALM Complexifié modifié

L'idée de ce modèle est de montrer de plus grandes variations de BE et SCR qu'avec le modèle précédent.

Pour ce faire nous avons procédé aux principaux changements suivants :

- Nouvelle allocation d'actifs 75% d'obligations, 20% d'actions et 5% de trésorerie
- Banqueroute (ie quand l'actif < 0) topée dans le modèle (cela sert notamment dans le calcul du SCR actions)
- Ajout des dividendes de l'action (elles suivent le taux des coupons)

Pour continuer le système d'entonnoir de notre étude, nous avons fait nos calculs avec les couples de modèles les plus différentiant (ie . Hull White – Black Scholes et CIR étendu – Merton)

Nous trouvons alors les résultats de BE suivants :

BE X/ BE Black Scholes – Hull White	BE Black Scholes – Hull White	BE Merton – CIR++
Valeur du BE	1 432 075 149 €	1 421 568 880 €
Valeur en % du BE Black Scholes - Hull White	100%	99%

Nous avons une différence de près de **<u>1%</u>** du BE **soit 5 fois plus** qu'avec les hypothèses précédentes.

[4] % Fuite de valeur (t=fin de projection) = $\frac{Fuite\ de\ valeur(t=fin\ de\ projection)}{Valeur\ de\ marché\ de\ l'actif(t=0)}$

Pour 1000 scénarios nous trouvons les résultats suivants pour les SCR:

SCR X/ SCR Black Scholes – Hull White	BE Black Scholes – Hull White	BE Merton – CIR++
Valeur du SCR marchés actions	144 066 116 €	134 931 447 €
Valeur en % du SCR Black Scholes - Hull White	100%	94%

Nous avons une différence de plus de **6%** du SCR

Comparaison des modèles et conclusion

Nous pensions que le changement de couple de modèles au sein du GSE n'aurait une influence notable que sur notre modèle ALM simplifié, car les BE calculés via ce modèle se basaient (essentiellement) sur les gains des actifs.

Mais, d'après notre étude, le choix de modèle au sein du GSE a aussi une influence notable sur les modèles ALM plus réaliste. Nos écarts[5] sont ainsi de l'ordre de 6% pour les SCR et de 1% pour les BE.

De plus, il ne faut pas oublier les méthodes de calibration dans la problématique. En effet, certains travaux montrent qu'il est possible de générer des écarts de modèle notables en faisant varier le sous-jacent de calibration (cf l'annexe « 14 . Résultats d'études sur les variations de BE/SCR venant de GSE »).

Pour conclure, nous pensons qu'il est très probable que dans les années à venir un organisme de supervision comme l'ACPR contrôle les GSE [6]de manière plus stricte. Cela ne sera pas simple car il n'existe pas de GSE standard sur le marché et la remarque vaut également pour le modèle ALM.

A ce titre, une proposition de GSE standardisé [7]pourrait être une piste pour réguler les excès et faciliter la comparabilité entre assureurs.

---

[5] Nos travaux sont aussi à relativiser dans le contexte de taux au 31/12/2011. A cette époque, les taux étaient bas mais pas négatifs, d'où la relative stabilité de nos BEs/SCRs.

[6] A ce sujet : la publication d'orientations au niveau européen sur l'utilisation de GSE a été mis au plan d'études de l'EIOPA dans le cadre de la révision 2020 de la directive Solvabilité 2.

[7] La remarque pourrait s'appliquer également avec un modèle ALM standardisé. A ce titre, notre modèle ALM simplifié pourrait être revu pour au moins prendre en compte la mortalité des assurés.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d’abord à remercier le professeur Michel Fromenteau ex directeur du Master 2 Actuariat au Conservatoire Nationale des Arts et Métiers. Sa disparition est une perte importante pour le monde de l’actuariat.

Je suis particulièrement reconnaissant envers Zaika Rakotondrambola, Actuaire Certifié IA, pour sa disponibilité, son encadrement et ses précieux conseils durant ce travail.

Je remercie également Fabien Perrucot (Actuaire Certifié IA), Karim Zennaf (Actuaire Associé IA) et Quentin Affagard (Actuaire Certifié IA), pour leurs soutiens et leurs conseils avisés tout au long de la réalisation de mon mémoire.

J’adresse également mes remerciements à tous les collaborateurs de Natixis Assurances et BNP Paribas Cardif, dont Denis Vaudelin, Jean-Paul Félix et Cyril Bellin. Merci pour l’accueil chaleureux et la disponibilité de chacun durant cette étude.

Je souhaite enfin témoigner ma reconnaissance à ma famille, en particulier à mon épouse Laurianne et à mon fils Pierre-Loup. Sans oublier toutes les personnes qui m’ont aidé, de près ou de loin, à réaliser ce mémoire dans les meilleures conditions.

BNP Paribas Cardif est l'un des métiers qui composent International Financial Services. Il regroupe les filiales assurance vie et dommages de BNP Paribas. En 40 ans d'existence, BNP Paribas Cardif est devenu un spécialiste mondial de l'assurance des personnes et des biens, présent dans 37 pays en Europe, en Asie et en Amérique latine.

Une mission : assurer les personnes, leurs familles et leurs biens. BNP Paribas Cardif commercialise des produits et services dans les domaines de l'épargne et de la protection par l'intermédiaire de multiples partenaires.

Une ambition : être la référence mondiale en partenariats d'assurance et le leader des solutions d'assurance pour les personnes.

Deux activités avec une large gamme de produits :

- La protection: assurance des personnes, protection du budget, des revenus et des moyens de paiement...
- L'épargne: contrats d'assurance vie multi-supports, contrats diversifiés, etc. pour constituer et faire fructifier un capital ou préparer la retraite...

Un business model basé sur la diversification :

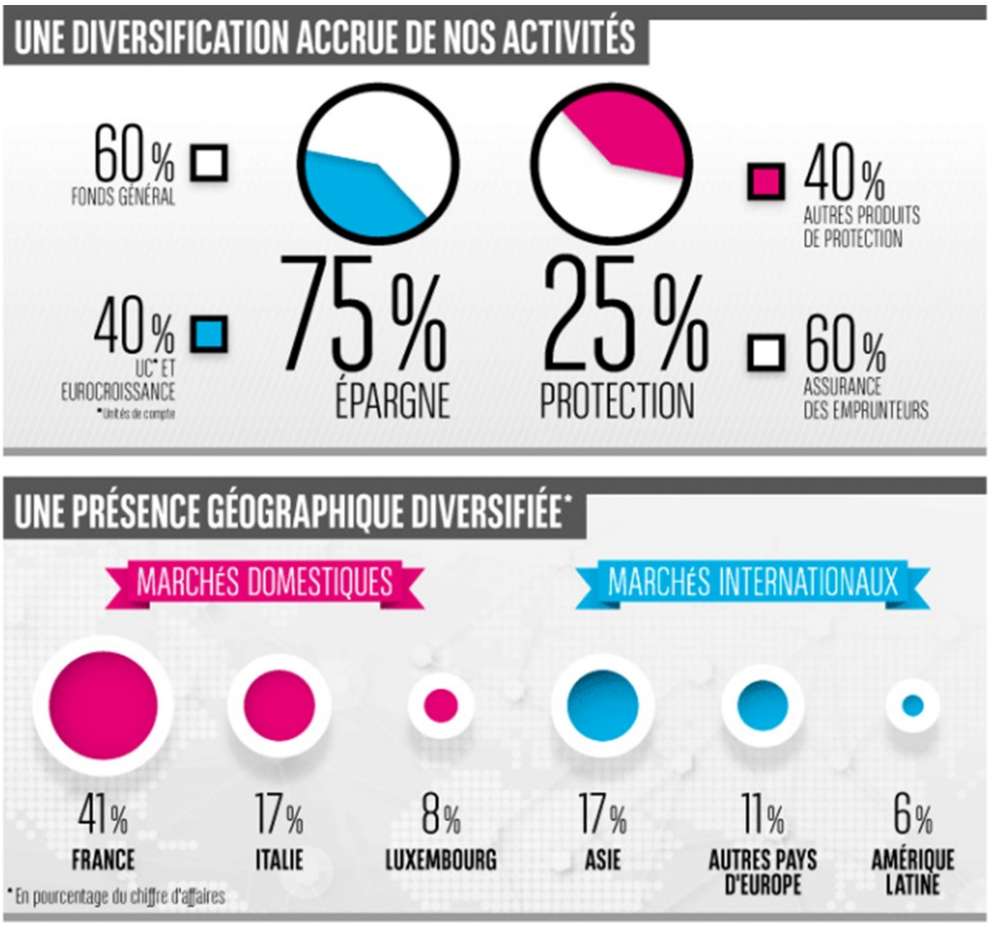


Figure 2 : BNPP Cardif overview

Les chiffres clés 2015 en milliards d'euros	
Chiffres d'affaires	**28**
Produit Net Bancaire	**2,3**
Résultat net avant impôts	**1,3**

Un modèle original basé sur le partenariat :

La distribution de nos produits via un réseau de partenaires internes au et externes au Groupe.

- Une étroite collaboration et des relations fortes fondées sur une confiance mutuelle.
- La garantie d'une connaissance approfondie des méthodes du partenaire et de leurs clients
- Des solutions totalement intégrées aux processus de vente des partenaires et aux besoins du client final

Une étroite collaboration s'est développée au fil des ans et des relations fortes sont fondées sur une confiance mutuelle. Les solutions sont ainsi totalement intégrées aux processus de vente des partenaires et aux besoins du client final.

(Retour Synthèse)

1 SOLVENCY II ET NOTIONS INTRODUCTIVES A L'ETUDE

1.1 Les piliers de SOLVENCY II

Avant de détailler les piliers de Solvency II, il convient de rappeler les principaux objectifs de la réforme

Solvency II vise à définir un cadre harmonisé permettant aux entreprises d'assurance européennes de :

- Protéger les assurés et les bénéficiaires
- Continuer à être un vecteur de croissance et de stabilité économique
- Améliorer leur compétitivité internationale

Ce cadre de référence se traduit par des exigences en matière de :

- Solvabilité
- Gouvernance et gestion des risques
- Communication d'informations au marché et aux autorités de tutelle leur permettant d'apprécier la situation des entreprises d'assurance :
  - Solvabilité et solidité financière
  - Robustesse du système de gestion des risques
- Niveau et modalités d'intervention des autorités de tutelle

1.1.1 Pilier 1

Le premier pilier a pour objectif de définir les normes quantitatives de calcul des provisions techniques et des fonds propres. Ces niveaux règlementaires sont définis pour les fonds propres : MCR et SCR :

- le MCR (Minimum Capital Requirement) représente le niveau minimum de fonds propres en dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle sera automatique => ce point ne sera pas abordé dans le mémoire
- le SCR (Solvency Capital Requirement) représente le capital cible nécessaire pour absorber le choc provoqué par un risque majeur (par exemple : un sinistre exceptionnel, un choc sur les actifs...).

1.1.2 Pilier 2

Le deuxième pilier a pour objectif de fixer des normes qualitatives de suivi des risques en interne aux sociétés et comment l'autorité de contrôle doit exercer ses pouvoirs de surveillance dans ce contexte.

L'identification des sociétés "les plus risquées" est un objectif et les autorités de contrôle auront en leur pouvoir la possibilité de réclamer à ces sociétés de détenir un capital plus élevé que le montant suggéré par le calcul du SCR (capital add-on) et/ou de réduire leur exposition aux risques.

1.1.3 Pilier 3

Le troisième pilier a pour objectif de définir l'ensemble des informations détaillées auxquelles le public aura accès, d'une part, et auxquelles les autorités de contrôle pourront avoir accès pour exercer leur pouvoir de surveillance, d'autre part.

Les 3 piliers de la réforme Solvabilité 2 résumés :

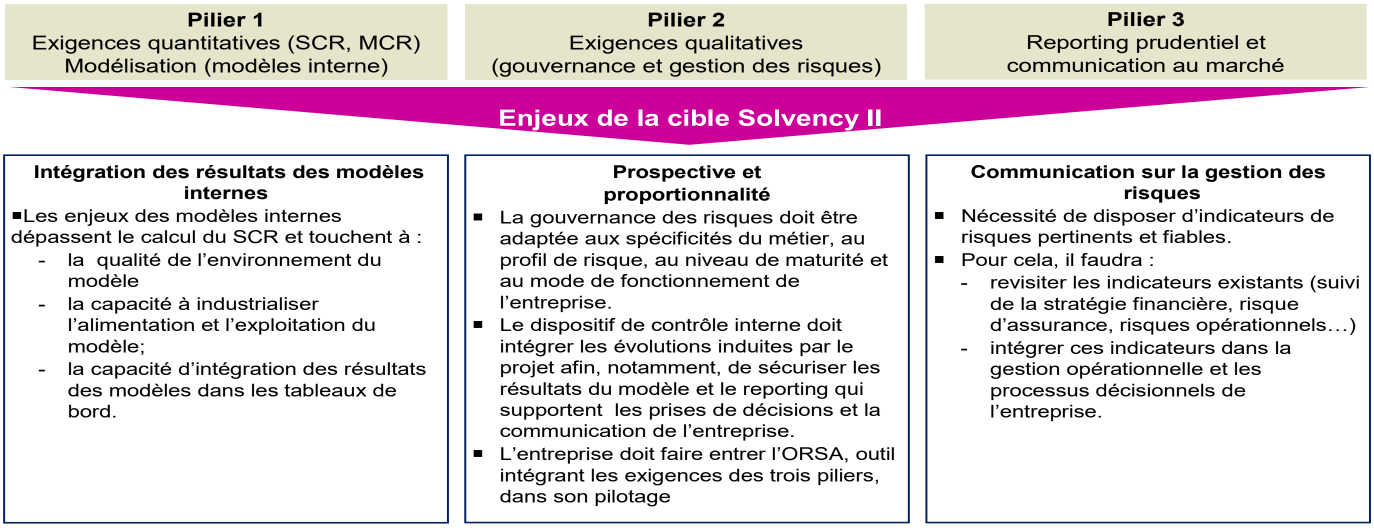


Figure 3 : Les 3 piliers S2

1.2 Les notions introductives

Le cadre réglementaire posé, voyons ensembles les notions introductives indispensables à l'étude.

1.2.1 Les contrats d'assurance vie

Avant de nous concentrer sur le portefeuille étudié voici un état des lieux des principaux types de placements en assurance-vie :

- les contrats en unités de compte : le client investit un capital en achetant des unités de compte sous forme d'actions, d'obligations, etc..... Avec ce type de contrat, seul le nombre d'unités de compte achetées est garanti. Le client n'est donc pas assuré de récupérer le montant du capital investi puisque la valeur des unités de compte est soumise aux variations boursières du marché.
- les contrats en euros : ce type de contrat est beaucoup moins risqué pour le client puisque le capital investi par le client est garanti à tout moment et est augmenté des intérêts selon les conditions du contrat.
- les contrats multi-support : il s'agit d'une combinaison entre les contrats en unités de compte et des contrats en euros (avec possibilité d'arbitrage)
- les contrats euro-croissance : il s'agit d'un contrat mono ou multisupport qui comporte des fonds diversifiés. Ces fonds, investis dans le financement de l'économie française, ne comportent une garantie en capital qu'au terme d'une détention minimale de 8 ans et devraient être mieux rémunérés que les fonds en euros.

1.2.2 Caractéristiques et clauses d'un contrat d'assurance vie en fonds euro

Un contrat d'épargne en euros est un produit d'assurance vie individuelle qui prévoit contre le paiement à la souscription d'une prime unique, le versement d'un capital à l'échéance du contrat, à la mort de l'assuré ou au rachat du contrat.

Ce type de produit est principalement souscrit par les assurés en tant qu'outil de placement permettant de bénéficier des avantages fiscaux que confère la réglementation des contrats d'assurance vie.

Le capital versé au contrat à la souscription, représente l'épargne constituée qui est revalorisée tous les ans.

i. Les cotisations

Voici les principaux types de cotisations :

- Contrat à versements périodiques programmés : Calendrier de versement (mensuel, trimestriel, annuel…) mis en place avec la plupart du temps la possibilité d'effectuer des versements complémentaires.
- Contrat à versements libres : Pas de calendrier de versement mais l'assuré est souvent soumis à un montant minimal de cotisation
- Contrat à cotisation unique : Le versement se fait lors de la souscription

ii. Les chargements

Les frais relatifs aux contrats d'épargne en euros qui sont à la charge de l'assuré sont de deux types.

Tout d'abord, il y a les frais prélevés sur la prime unique versée à la souscription, qui sert de base à l'épargne, et les frais sur les versements libres, s'ils ont lieu.

Les autres frais, aussi appelés chargement sur l'encours, sont prélevés sur le montant de l'épargne constituée à chaque fin d'année au moment de la revalorisation et concernent la gestion des contrats.

iii. Les rachats

Les assurés peuvent se retrouver dans une situation, comme un décès ou un accident, où ils ont un besoin immédiat de liquidités.

L'option de rachat leur permet de disposer de leur épargne lorsqu'ils le souhaitent. Ils peuvent également exercer cette option dans l'optique de réinvestir à un taux plus avantageux.

Les rachats peuvent être totaux ou partiels. Le montant reversé lors du rachat peut subir des pénalités en fonction de l'ancienneté du contrat.

iv. La revalorisation du contrat

La principale raison d'être du contrat d'épargne en euros est de procurer un rendement financier aux assurés.

Le contrat d'épargne en euros comprend un taux technique qui définit la revalorisation minimale de l'épargne de l'assuré chaque année. Ce taux est décidé à la souscription du contrat.

Le contrat peut également avoir un taux minimum garanti ou TMG. Ce taux garantit la revalorisation minimale de l'épargne pour la première année. Ce taux constituant un important argument commercial, il dépend des conditions de marché et est déterminé à la souscription du contrat.

D'après l'article A132-3 du Code des Assurances, ce taux ne peut dépasser 85% de la moyenne sur les deux dernières années des taux de rendement de l'actif considéré.

De plus le code des Assurances contraint réglementairement l'assureur à reverser 90% de ses bénéfices techniques, ou 100% de sa perte technique et 85% de ses bénéfices financiers à l'ensemble de ses assurés.

Cette revalorisation concerne l'ensemble du portefeuille assuré.

Le contrat peut comporter également une clause de participation aux bénéfices financiers, qui est uniquement relative à l'assuré de ce contrat. Cette clause est définie comme un pourcentage des produits financiers nets des charges financières, de l'ordre en général de 90%.

Cependant, si l'assureur veut éviter de subir une vague de rachats massifs l'année suivante, il se doit de revaloriser l'épargne constituée par ses assurés à un niveau équivalent à la concurrence.

Cette contrainte peut pousser l'assureur à verser une participation aux bénéfices discrétionnaire à l'assuré.

Le processus de revalorisation des contrats est compliqué et dépend autant de paramètres contractuels, réglementaires et économiques, que de décisions de gestion de l'assureur.

1.2.3 Gestion Actif Passif

La gestion actif-passif, (En anglais ALM = Asset and Liability Management) consiste à analyser la situation du bilan et son évolution probable sur un horizon de planification, en fonction de variables vis-à-vis desquelles elle précise des anticipations (taux d'intérêt, développement commercial, indicateurs macro-économiques et autres variables de marché).

Elle a pour objectif d'estimer et piloter l'équilibre entre les ressources et les emplois au regard des risques pris par l'établissement sous contrainte d'un niveau de rentabilité et d'un cadre réglementaire précis et variable selon les pays.

Dans le cadre de ce mémoire, l'assureur place l'épargne de ses assurés sur les marchés financiers. Il nous faut donc anticiper l'évolution de rendement attendue.

Nous développerons donc un modèle ALM, qui permet de prédire le bilan de l'organisme assureur. L'évaluation du bilan financier nous permettra, par la suite, de calculer le Best Estimate.

1.2.4 Best Estimate

Définition du Best Estimate

Le Best Estimate est égal à la valeur actuelle probable des flux futurs de trésorerie estimés à partir :
- D'informations courantes et fiables.
- D'hypothèses réalistes et spécifiques à l'entité

De plus, le Best Estimate doit être évalué en brut, donc sans tenir compte des montants couverts par la réassurance (cf Règlement délégué)

Quelques notions structurantes pour expliquer notre démarche globalement.

Principe de flux réplicable

Un passif est réplicable si les flux qu'il engendre peuvent être parfaitement répliqués et couverts à l'aide d'instruments financiers se monnayant sur un marché suffisamment actif, liquide et transparent (informations rapidement accessibles).

Un marché est supposé actif, liquide et transparent si :
- Les participants du marché peuvent exécuter rapidement un grand nombre de transactions avec un faible impact sur le prix (Marché profond).
- Les informations sur les échanges courants et leurs prix sont disponibles au public
- Les 2 points ci-dessous sont vérifiés à tout instant

Dans le cas des passifs réplicables, la valeur actuelle du portefeuille répliquant procure de façon immédiate un prix observable qui doit être utilisé pour valoriser le passif. C'est l'évaluation market to market.

En étendant le concept, on peut remarquer que si une option, une garantie ou une part du contrat peut être isolée et peut être répliquée sur un marché actif, liquide et transparent, les flux associés sont considérés comme réplicables.

Exemple de flux réplicables : Les passifs des bons de capitalisation et d'épargne en Unité de compte sans garantie plancher sont réplicables

Par contre si aucune distinction n'est possible entre les flux réplicables et non réplicables, la méthode de calcul relative aux flux non réplicables doit être retenue (cf QIS6).

Les flux non réplicables

Pour les passifs non réplicables, l'évaluation doit correspondre à la somme du Best Estimate et de la marge pour risque (Risk Margin). Le Best Estimate et la Risk Margin font l'objet d'une évaluation séparée.
Dans le QIS5, certaines précisions sont mentionnées sur les méthodes explicites pour le calcul du Best Estimate et de la Risk Margin.

Le Best Estimate pour les contrats d'épargne en euros

Dans ce paragraphe, nous définissons la notion de Best Estimate (BE).

De plus, nous explicitons les deux particularités propres au calcul du Best Estimate dans le cadre de l'assurance vie :

- l'utilisation d'un modèle actif-passif pour prendre en compte les interactions entre l'actif et le passif,
- une approche stochastique pour intégrer la valeur temps des options et garanties des contrats.

Etude du Cas du Best Estimate pour les contrats d'épargne en euros

Comme expliqué précédemment, un passif est réplicable si les flux qu'il engendre peuvent être parfaitement répliqués et couverts à l'aide d'instruments financiers se monnayant sur un marché suffisamment actif, liquide et transparent (informations rapidement accessibles).

De plus, les contrats d'épargne en euros contiennent des garanties en cas de vie mais aussi de décès. Les éventuelles couvertures de cette garantie en cas de décès reposent ainsi sur des hypothéses et projection du nombre de décès annuels. Toutefois, au regard de la taille du portefeuille assuré au titre de ces garanties et des tables de mortalités retenues pour les évaluations, le risque d'erreur n'est pas négligeable dans la projection du nombre de décès.
Ainsi, les éventuelles couvertures des engagements des contrats en euros ne permettraient pas de couvrir les passifs sans risque d'erreurs négligeables. Dans ce contexte pour les passifs des contrats d'épargne en euros, il convient donc de déterminer le best Estimate et la Risk Margin associée. Les passifs de ces **contrats ne sont donc pas considérés comme réplicables**.

Méthode d'évaluation des prestations

La détermination des flux de prestations peut être complexe à déterminer. En effet, ces flux dépendent de deux comportements intéractifs :

- Le comportement de l'assureur (taux minimum garanti, taux de participation aux bénéfices, etc…)
- Le comportement de l'assuré (rachat, réduction, etc..)

Sur le plan technique, la méthode de modélisation appropriée serait l'utilisation de modèles sotchastique. Nous détaillerons cela lors du paragraphe suivant.

Incidence de l'assurance vie sur le calcul du Best Estimate

Le cadre de l'assurance vie se prête bien à l'utilisation d'un modèle Actif-Passif ou ALM (pour Asset and Liability Management) et l'utilisation d'un cadre stochastique pour le calcul du Best Estimate.

i. Nécessité d'utiliser un modèle ALM pour calculer le BE en assurance-vie

L'une des spécificités de l'assurance vie réside dans le lien étroit qui existe entre :

- la performance financière constatée à l'actif,
- la revalorisation des contrats par le biais de la participation aux bénéfices,
- le comportement de rachat des assurés.

Le calcul du Best Estimate en assurance-vie requiert ainsi l'utilisation d'un modèle actif-passif permettant de modéliser ces interactions qui existent entre l'actif et le passif de l'assureur.

ii. Nécessité d'une approche stochastique en assurance-vie

La plupart des contrats d'assurance vie contiennent des options et des garanties, comme :

- Taux minimum garanti associé au mécanisme de participation aux bénéfices
- Option de rachat.

Or celles-ci représentent un coût pour l'assureur dû à la dissymétrie du partage du risque. En effet, l'assuré dans le cas de ces deux options, n'est soumis à aucun risque. Le détail du fonctionnement de ces garanties du point de vue de l'assuré et de l'assureur est présenté ci-dessous.

Pour une compagnie d'assurance-vie, le calcul du Best Estimate doit se faire dans un cadre stochastique car l'assureur souhaite prendre en considération tous les scénarios possibles même ceux qui le placent dans une situation difficile, les interactions entre l'Actif et le Passif, ainsi que le coût des options et garanties financières. Le schéma ci-dessous illustre cette idée :

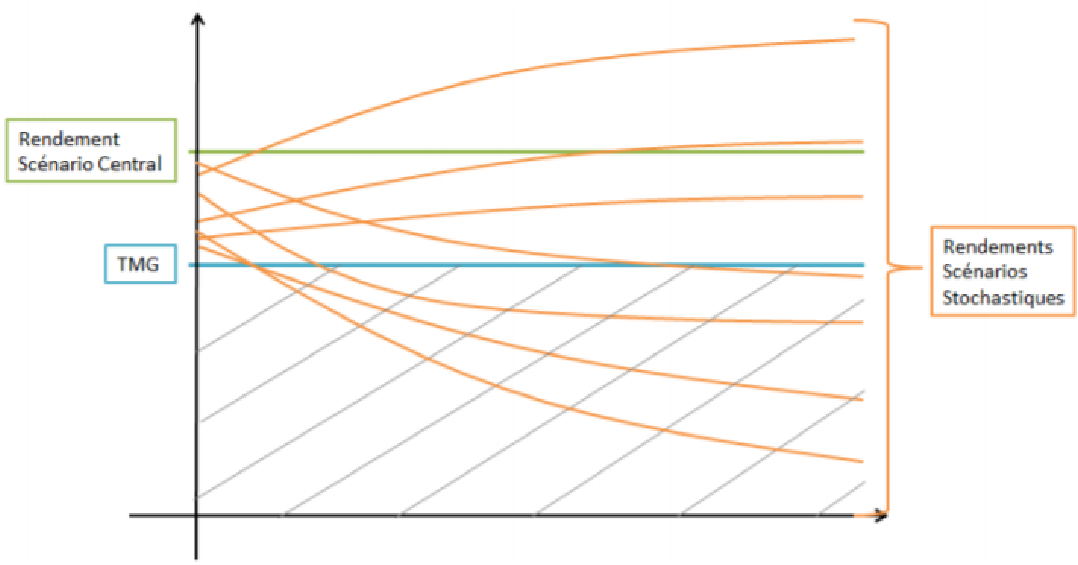


Figure 4 : Exemple de repartition des rendements entre le scenario central et les scenarios stochastique pour un TMG donné

La zone hachurée représente un problème pour la compagnie car les rendements financiers, pour ces scénarios, sont plus faibles que le TMG. L'assureur se retrouve dans une situation défavorable car il ne peut pas compter seulement sur son rendement financier pour payer ses assurés. Le coût de la garantie du TMG va donc augmenter et se ressentir dans la valeur du BE stochastique.

Dans un cadre déterministe, avec le seul calcul du rendement relatif au scénario central, l'assureur n'aurait aucun problème avec la situation décrite par le schéma ci-dessus. Dans ce cadre, quelle que soit la valeur du TMG, tant que celle-ci est inférieure au rendement financier du scénario central, le Best Estimate obtenu aura toujours la même valeur. Ainsi, le scénario central ne permet pas d'évaluer correctement le coût des options et garanties pour l'assureur.

Dans le cadre stochastique, le BE, calculé comme étant la moyenne sur tous les scénarios de la somme des flux de passif actualisés, serait bien plus élevé que le BE central, car il y a 4 scénarios (sur 7) qui donnent des rendements inférieurs au TMG.

L'assureur doit donc prendre en compte la possibilité que ces scénarios se réalisent et il doit provisionner suffisamment pour être capable de payer ses assurés même dans ces situations critiques.

Ainsi, l'utilisation des scénarios stochastiques est essentielle afin d'estimer au mieux le coût des options et garanties auxquelles sont confrontés les assureurs. C'est pourquoi l'emploi d'un modèle de taux robuste et précis est essentiel pour la réalisation de scénarios réalistes et un calcul optimal du BE stochastique.

A ce titre un générateur de scénarios économiques se révèle un outil particulièrement adapté pour aider à générer des scénarios stochastiques.

1.2.5 SCR

D'après le code des assurances le SCR se définit de la manière suivante :

> *Article L352-1*
> *« I. - Les entreprises d'assurance et de réassurance détiennent des fonds propres éligibles couvrant le capital de solvabilité requis. Le capital de solvabilité requis est calculé soit à l'aide de la formule standard, soit à l'aide d'un modèle interne intégral ou partiel approuvé par l'Autorité de contrôle prudentiel et de résolution. [..] »*
>
> *Article R352-2*
> *« Le capital de solvabilité requis est calculé comme suit :*
> *1° Ce calcul se fonde sur l'hypothèse d'une continuité de l'exploitation de l'entreprise concernée ;*
> *2° Le capital de solvabilité requis est calibré de manière à garantir que tous les risques quantifiables auxquels l'entreprise d'assurance ou de réassurance est exposée soient pris en considération. Il couvre le portefeuille en cours, ainsi que le nouveau portefeuille dont la souscription est attendue dans les douze mois à venir. Pour ce qui concerne le portefeuille en cours, il couvre seulement les pertes non anticipées. Le capital de solvabilité requis correspond à la valeur en risque des fonds propres de base de l'entreprise d'assurance ou de réassurance, avec un niveau de confiance de 99,5 % à l'horizon d'un an ;*
> *3° Le capital de solvabilité requis couvre au minimum les risques suivants :*
>
> *a. Le risque de souscription en non-vie ;*
> *b. Le risque de souscription en vie ;*
> *c. Le risque de souscription en santé ;*
> *d. Le risque de marché ;*
> *e. Le risque de crédit ;*

f. Le risque opérationnel, qui comprend les risques juridiques, mais ne comprend ni les risques découlant des décisions stratégiques, ni les risques de réputation ;

4° Lorsqu'elles calculent leur capital de solvabilité requis, les entreprises d'assurance et de réassurance tiennent compte de l'impact des techniques d'atténuation des risques, sous réserve que le risque de crédit et les autres risques inhérents à l'emploi de ces techniques soient pris en considération de manière adéquate dans le capital de solvabilité requis. »

Obligation de calcul du SCR

Le SCR doit être calculé au moins une fois par an :

- Il doit être recalculé lors de toute modification significative du profil de risques
- Il doit être recalculé sur demande de l'autorité de contrôle (ACPR)
- Il peut être augmenté d'un « add-on » décidé par l'ACPR

L'organisme doit justifier son choix entre :

- La formule standard
- La formule standard avec des paramètres spécifiques
- Un modèle interne partiel
- Un modèle interne total

Structure de la formule standard :

Article R352-4
« Le capital de solvabilité requis calculé selon la formule standard est la somme des éléments suivants :

a. Le capital de solvabilité requis de base prévu à l'article R. 352-5 ;
b. L'exigence de capital pour risque opérationnel prévue à l'article R. 352-8 ;
c. L'ajustement prévu à l'article R. 352-9 visant à tenir compte de la capacité d'absorption de pertes des provisions techniques prudentielles mentionnées à l'article L. 351-2 et des impôts différés. »

Article R352-5
« I.- Le capital de solvabilité requis de base se compose de modules de risque individuels qui sont agrégés.
Il comprend au moins les modules de risque suivants :

a. Le risque de souscription en non-vie ;
b. Le risque de souscription en vie ;
c. Le risque de souscription en santé ;
d. Le risque de marché ;
e. Le risque de contrepartie.[..]

II.- Les coefficients de corrélation appliqués aux fins de l'agrégation des modules de risque mentionnés au I ainsi que le calibrage des exigences de capital pour chaque module de risque aboutissent à un capital de solvabilité requis global satisfaisant aux principes énoncés à l'article R. 352-2.

III.- Chacun des modules de risque mentionnés au I est calibré sur la base d'une mesure de la valeur en risque, avec un niveau de confiance de 99,5 % à l'horizon d'un an.
S'il y a lieu, il est tenu compte des effets de diversification dans la conception de chaque module de risque.

Pour toutes les entreprises d'assurance et de réassurance, la même conception et les mêmes spécifications sont utilisées pour les modules de risque, tant pour le capital de solvabilité requis de base que pour tout calcul simplifié prévu à l'article R. 352-10.[..] »

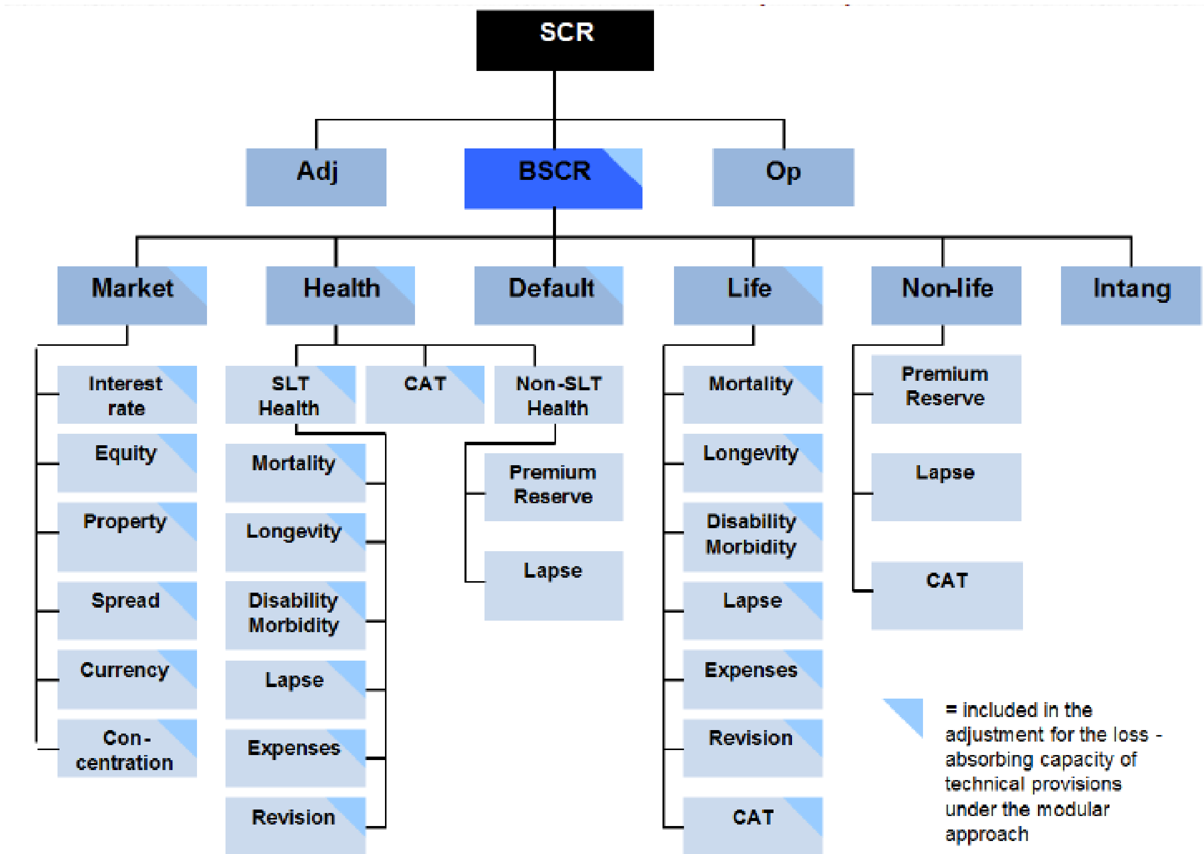


Figure 5 : Pieuvre SCR

Un « SCR de sous-module» est calculé pour chacun des sous modules.
Un « SCR de module » est calculé pour chacun des modules, en agrégeant les SCR des sous modules par une formule du type suivant :

$$SCR_{non\ life} = \sqrt{\sum_{i,j} CorrNL(ij) * SCRi * SCRj}$$

Figure 6 : Exemple d'agrégation de SCR

Où

a) (a) la somme couvre toutes les combinaisons possibles (i,j) des sous-modules ;
b) b) CorrNL(i,j) représente le coefficient de corrélation relatif au risque de souscription en non-vie pour les sous-modules i et j ;
c) (c) SCRi et SCRj représentent les exigences de capital pour les sous-modules i et j, respectivement.

1.2.6 Générateur de scénarios économiques

Le Générateur de Scénarios Economiques (GSE) sert à effectuer des simulations stochastiques sur un horizon, de différents paramètres économiques ou financiers, que l'on appelle plus communément « facteurs de risque ».

La plupart des risques mis en lumière sont les risques de marché, à savoir les risques de taux, de crédit et d'action (le risque de crédit n'étant généralement pas modélisé sur ce type de contrat).

Dans notre cas, l'assureur réinvestit sur les marchés l'argent des assurés dans des portefeuilles comportant seulement des obligations et des actions. Ainsi, il doit faire face aux risques de baisse des marchés actions ainsi qu'au risque de baisse ou de hausse des taux d'intérêts.

Nous présenterons plus tard les différents modèles d'actions et de taux utilisés pour modéliser ces évolutions (ainsi que les hypothèses utilisées).

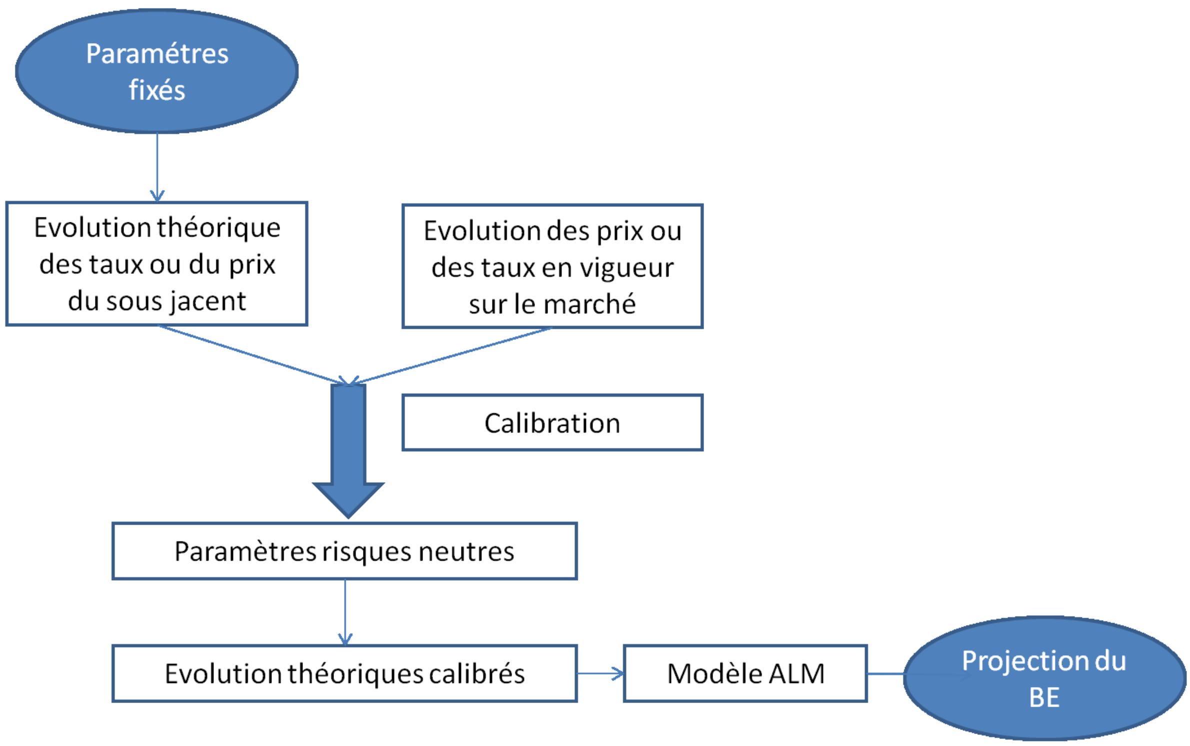


Figure 7 : Schéma GSE/ALM

2 LE GENERATEUR DE SCENARIO ECONOMIQUE(GSE) & MODELE ASSET LIABILITIES MANAGEMENT (ALM)

2.1 Bref historique du GSE

Dans cette partie nous allons voir des notions théoriques utiles pour construire un GSE (essentiellement pour la modélisation des actifs).

2.1.1 Rappel et historique des différents outils mathématiques utilisés (EDP)

Les modèles mathématiques utilisés dans le présent mémoire sont des modèles éprouvés qui reposent sur les Equations aux Dérivées Partielles (EDP).

En mathématiques, plus précisément en calcul différentiel, une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation dont les solutions sont des fonctions vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles.

Ainsi, une EDP a souvent de très nombreuses solutions, les conditions étant moins strictes que dans le cas d'une équation différentielle ordinaire (à une seule variable) ;

Il est assez intuitif de comprendre que si les ensembles de solutions d'une équation différentielle ordinaire sont paramétrées par un ou plusieurs paramètres correspondant aux conditions supplémentaires alors dans le cas des EDP, les conditions aux limites se présentent plutôt sous la forme de fonction donc beaucoup plus de solution que pour une équation différentielle.

Les EDP ont été démocratisés au fil du temps, notamment au 20ieme siècle avec des prémisses remontant au 18ieme siècle.

Ainsi :

- **Pierre Simon De Laplace** inventa les équations **de LaPlace** résolue grâce au **Laplacien**
- **Henri Poincaré** résolue l'équation **d'Heaviside** (dite des télégraphistes)
- **Joseph Fourrier**, brillant mathématicien et physicien, s'en servira pour créer sa célèbre équation de la chaleur.
- **Norbert Wiener** s'inspira grandement des outils de M.Fourrier pour définir le processus de Wiener (qui permet de modéliser le mouvement Brownien) utilisé dans de nombreuses modélisations d'actifs financier.
    - Le processus de Wiener est d'ailleurs un des processus de Levy (**Paul Pierre Lévy** est un des pères de la théorie moderne des probabilités modernes) les mieux connus.

La frise chronologique ci-dessous replace ces différents mathématiciens à travers le temps :

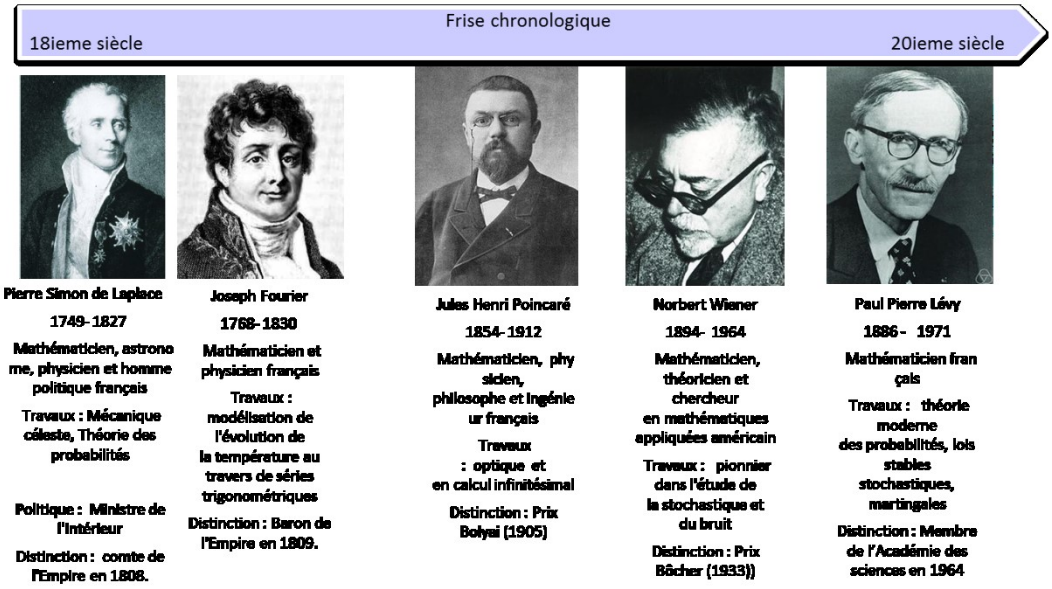


Figure 8 : Les mathématiciens de l'EDP

<u>Cas Equations aux Dérivées Partielles en finance :</u>

Les EDP sont omniprésentes dans les sciences, puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures, mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation de l'électromagnétisme (équations de Maxwell) ou des mathématiques financières (équation de Black-Scholes).
C'est d'ailleurs ce dernier cas qui va nous intéresser pour la modélisation des actions.

Pour rappel, les mathématiques financières sont une branche des mathématiques appliquées ayant pour but la modélisation, la quantification et la compréhension des phénomènes régissant les opérations financières d'une certaine durée (emprunts et placements / investissements) et notamment les marchés financiers. Elles font jouer le facteur temps et utilisent principalement des outils issus de l'actualisation, de la théorie des probabilités, du calcul stochastique, des statistiques et du calcul différentiel.

- Sur le marché des dérivés d'options : le modèle de Black et Scholes sert souvent de base à la modélisation (souvent customisé pour enlever ses imperfections : volatilité constante, taux d'intérêt constant…)
- Sur le marché des taux d'intérêt et dérivés de taux d'intérêt : aucun modèle ne fait l'unanimité chez les spécialistes. Les taux d'intérêts sont en effet soumis à des pressions exogènes très importantes, qui rendent caduques très rapidement toutes les calibrations possibles et les taux négatifs viennent ajouter une difficulté

2.1.2 Rappels autour de la notion de risque-neutre

Sous certaines hypothèses (complétude, AOA) il existe une probabilité dite risque neutre, notée Q, sous laquelle les prix actualisés sont des martingales :

$$St = E^{Qt}[S_T e^{-r(T-t)}|F_t]$$

Figure 9 : Risque Neutre

En fait, il existe deux univers de probabilités pour générer des scénarios économiques :

Un univers de probabilités réelles, lorsque l'on cherche à déterminer les évolutions futures compatibles avec les observations historiques : dans ce cas, les simulations reproduisent le plus fidèlement possible la réalité et les modèles sont généralement calibrés sur les données historiques. Dans cette configuration, les actifs risqués offrent une prime de risque, ce qui rend difficile la réalisation d'une évaluation correcte.

Un univers de probabilités risque neutre, lorsque l'on est dans une logique d'évaluation : dans ce cas, tous les actifs ont une performance moyenne égale au taux sans risque (les primes de risque sont nulles), ce qui permet de réaliser des évaluations en actualisant les flux futurs au taux sans risque. En outre, pour garantir une évaluation cohérente avec les prix observés sur les marchés, les modèles doivent être calibrés à partir de ces prix de marché.

Nous avons choisis un GSE en univers risque neutre car la directive Solvabilité 2 (FR) dit :

- « Les passifs sont valorisés au montant pour lequel ils pourraient être transférés ou réglés dans le cadre d'une transaction conclue, dans des conditions de concurrence normales, entre des parties informées et consentantes. » => fair-value (IFRS)
- « Le calcul des provisions techniques utilise, en étant cohérent avec elles, les informations fournies par les marchés financiers et les données généralement disponibles sur les risques de souscription (cohérence avec le marché) » => Valorisation de marché et Market-consistency

L'utilisation de la valorisation risque-neutre en assurance vie, est donc liée à une réglementation et à un formalisme d'estimation de la solvabilité

2.2 Modèle ALM simplifié

2.2.1 Modèles d'Actif du GSE

Dans ce chapitre, nous présenterons les différents modèles étudiés et implémentés sous R. Au cours de cette étape, les paramètres des différents modèles ont été supposés constants et fixés à l'avance. (Retour Synthèse)

- **Les modèles d'actions**

Dans un premier temps, nous choisissons de modéliser le risque action. Ce risque se mesure , entre autres, au travers de la volatilité des prix.

Le modèle Black&Scholes

En 1973, Fisher Black et Myron Scholes ont développé la théorie permettant d'évaluer le prix d'une option. Basée sur des hypothèses concernant le fonctionnement des marchés financiers, notamment sur l'efficience des marchés, leur modèle a connu un essor considérable. Les outils utilisés aujourd'hui pour établir le prix d'une option repose sur ce modèle.

Le prix de l'action est régi par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Avec :

- S_t est le prix de l'actif sous-jacent au temps t

- µ la dérive
- σ la volatilité
- Wt un processus de Wiener

De plus, le modèle Black-Scholes repose sur un certain nombre de conditions :

- le prix de l'actif sous-jacent St suit un mouvement brownien géométrique avec une volatilité **σ** constante et une dérive **µ** constante
- dSt = µ St dt + σ St dWt où Wt est un processus de Wiener.
- il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage,
- le temps est une fonction continue,
- il est possible d'effectuer des ventes à découvert,
- il n'y a pas de coûts de transactions,
- il existe un taux d'intérêt sans risque, connu à l'avance et constant,
- tous les sous-jacents sont parfaitement divisibles (on peut par exemple acheter 1/100e d'action),
- dans le cas d'une action, celle-ci ne paie pas de dividendes entre le moment de l'évaluation de l'option et l'échéance de celle-ci.

En résolvant l'équation dSt = µ St dt + σ St dWt, on trouve :

$$St = S0e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma Wt}$$

avec S0 la valeur de l'actif au temps t = 0

On peut retrouver cette relation avec la formule d'itô :
Si

$$St = S0e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma Wt}$$

$$\mathrm{dSt} = \mathrm{f(t, Wt)}\ \ avec\ \ f(t,x) = S0e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma x}$$

$$\mathrm{dSt} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\ f(t,Wt)dt + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\ f(t,Wt)dWt\ +\ \frac{1}{2} * \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,Wt) * \sigma^2 dt$$

$$\mathrm{dSt} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)Stdt + \sigma StdWt + \frac{1}{2}\sigma^2 Stdt$$

$$\mathrm{dSt} = \mu Stdt +\ \sigma StdWt$$

On a alors :

$St + h = Ste^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)h+\sigma\sqrt{h}Z}$ avec Z qui suit une loi normale N(0, 1).

En effet :

$$St + h = S0e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t+h)+\sigma Wt+h}$$

$$St + h = Ste^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(h)+\sigma(Wt+h-Wt)}$$

Or Wt+h - Wt = $\sqrt{h}Z$ avec Z suivant une loi normale centre réduite
D'où :

$$St + h = Ste^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(h)+\sigma\sqrt{h}Z}$$

Points positifs et négatifs du modèle :

Pro	Cons
Simplicité du modèle	Les rendements gaussiens amènent à sous-estimer les variations de grande amplitude
Echelle commune simple de comparaison	Supposer la volatilité comme constante est éloigné de la réalité
	La dynamique de Black-Scholes ne traduit pas les discontinuités de trajectoire du cours occasionnées lors de krachs boursiers.

Figure 10: Points positives et negatives du modéle de Black Scholes

Le modèle de Merton à saut

A l'instar du modèle de Black-Scholes, le modèle de Merton modélise l'évolution du prix d'un actif. Ce modèle repose sur l'efficience du marché des actions. Il intègre cependant la possibilité de sauts du cours boursier. Cette notion de saut est introduite via un processus de Poisson. Entre deux instants de sauts, on suppose que la dynamique du cours suit celle de Black-Scholes.

Le prix de l'action est régi par l'équation différentielle stochastique suivante :
dSt = μ*St*dt + σ*St*dWt + St*dLt

Où $Lt = \sum_{i=0}^{Nt} Ui$

Avec :

- St est le prix de l'actif sous-jacent au temps t
- μ la dérive
- σ la volatilité
- Wt un processus de Wiener
- N = (Nt) t_0 un processus de Poisson d'intensité λ
- Ui une famille de variables aléatoire iid (indépendantes et identiquement distribuées)

La résolution de cette équation nous permet de savoir que le cours du prix d'un actif s'exprime de la façon suivante :

$$St = S0e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}-\lambda k\right)t+\sigma Wt+\sum_{i=1}^{Nt} Yi}$$

Avec :

- Y =(Yi)i≥1 une suite de variables aléatoires i.i.d suivant une loi normale de moyenne γ et de variance $\sigma^2 u$. Cette variable traduit le pourcentage de variations que subit l'actif lorsqu'un événement de Poisson se produit.
- k = $E[e_i^Y - 1] = -1 + e^{\gamma + \sigma^2 u/2}$

Il en découle que :

$St + h = Ste^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k\right)h + \sigma\sqrt{h}Z + \sum_{i=1}^{Nt+h} Yi}$ où Z suit une loi normale centrée réduite.

La démonstration est analogue à celle de Black-Scholes

Points positifs et négatifs du modèle :

Pro	Cons
La dynamique de Black-Scholes ne traduit pas les discontinuités de trajectoire du cours occasionnées lors des krachs mais le modèle de Merton tend à pallier à cet inconvénient.	Le modèle de Merton nécessite davantage de paramètres que celui de Black-Scholes, ce qui le rend plus complexe
	Supposer la volatilité comme constante est éloigné de la réalité

Figure 11 : Points positifs et negatives du modéle de Merton à saut

- **Les modèles de taux**

Les différents modèles de taux sont caractérisés par des équations stochastiques différentielles sur le taux court instantané. Grâce à ces équations caractéristiques, nous en déduisons le taux court r(t).

Une fois que nous avons obtenu r(t), nous allons chercher à faire une discrétisation exacte, avec un pas de un an, afin de pouvoir calculer le prix du zéro-coupon de maturité T à la date t grâce à la formule :

$$P(t,T) = E * [e^{-\int_t^T rudu} | Ft]$$

Figure 12 : Prix du zéro coupon de maturité T à la date t

Avec E*[.], l'espérance en univers risque neutre.

Enfin, une fois le prix du zéro-coupon déterminé, nous pouvons en déduire le taux zéro-coupon grâce à la formule :

$$R(t,T) = -\ln\big(P(t,T)\big) / (T-t)$$

Figure 13 : Taux zero coupon

Les obligations zéro-coupon constituent l'outil de base pour les modèles de taux. Cela permet entre autres de comparer les résultats trouvés avec les différents modèles dont il est question dans cette section.

Le modèle de Vasicek

Le modèle de Vasicek est le modèle d'équilibre classique. Il permet de modéliser le taux d'intérêt instantané, suivant le processus d'Ornstein Uhlenbeck, défini par la formule suivante :

drt = k [Θ− rt] dt + σ dWt

Figure 14 : Equation de Vasicek

Avec :

- rt le taux au temps t
- k, Θ et σ des constantes positives,
- Θ s'interprétant comme la moyenne de long terme du taux autour de laquelle évolue le taux court instantané,
- k étant la vitesse de retour à la moyenne de long terme,
- σ la volatilité du taux court terme,
- Wt un mouvement Brownien.

En résolvant l'équation Figure 14, on obtient :

$$rt = r0 * e^{-kt} + \theta * (1 - e^{-kt}) + \sigma * e^{-kt} * \int_0^t e^{ks} dWs$$

Figure 15 : Taux vasicek

où r0 représente le taux a l'instant 0.

Plus généralement, l'équation peut s'écrire :

$$rt = rs * e^{-k(t-s)} + \theta * \left(1 - e^{-k(t-s)}\right) + \sigma * e^{-kt} * \int_0^t e^{ku} dWu$$

On peut alors en déduire la formule suivante :

$$r_{t+h} = rt * e^{-kh} + \theta * (1 - e^{-kh}) + \sigma * \sqrt{\frac{1 - e^{-2kh}}{2k}} * Z$$

Avec Z suivant une loi normale centrée réduite

Démonstration :

$$rt = r0 * e^{-kt} + \theta * (1 - e^{-kt}) + \sigma * e^{-kt} * \int_0^t e^{ks} dWs$$

$$r_{t+h} = r0 * e^{-k(t+h)} + \theta * \left(1 - e^{-k(t+h)}\right) + \sigma * e^{-k(t+h)} * \int_0^{t+h} e^{ks} dWs$$

$$r_{t+h} = r0 * e^{-kt}e^{-kh} + \theta * (1 - e^{-kt}) * e^{-kh} + \sigma * e^{-kt} * e^{-kh} * \int_0^t e^{ks} dWs + \theta * (1 - e^{-kh}) + \sigma * \int_t^{t+h} e^{-k(t+h-s)} dWs$$

$$r_{t+h} = rt * e^{-kh} + \theta * (1 - e^{-kh}) + \sigma * \int_0^{t+h} e^{-k(t+h-s)} dWs$$

L'intégrale $\sigma * \int_0^{t+h} e^{-k(t+h-s)} dWs$ suit une loi normale centrée car la fonction $e^{-k(t+h-s)}$ est déterministe.

Calculons maintenant sa variance :

$$Var(\int_t^{t+h} e^{-k(t+h-s)} dWs) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$= E((\int_t^{t+h} e^{-k(t+h-s)} dWs)^2) = E(\int_t^{t+h} e^{-2k(t+h-s)} ds) = [e\string^(-2k(t+h-s))/2k]_t^{t+h}$$

$$= \frac{1 - e^{-2k(h)}}{2k}$$

Donc $r_{t+h} = rt * e^{-kh} + \theta(1 - e^{-kh}) + \sigma * \sqrt{\frac{1-e^{-2k(h)}}{2k} * Z}$ avec Z qui suit une loi normale centrée réduite

Grâce à la formule Figure 12, on en déduit que le prix du zéro-coupon de maturité T à la date t, pour le modèle de Vasicek est donné par l'équation Figure 16 :

P(t,T)=A(t,T)$e^{B(t,T)r(t)}$

Figure 16 : Prix du zero coupon de maturité T à la date t pour le modèle de Vasicek

Avec,

$$\begin{cases} A(t,T) = e^{[(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2})(B(t,T)-(T-t)-\sigma^2 * \frac{B(t,T)^2}{4k}]} \\ B(t,T) = \frac{1-e^{-k(T-t)}}{k} \end{cases}$$

Figure 17 : Equation de Vasicek

On peut maintenant calculer le taux zéro coupon de maturité T à la date t :

R(t,T) =R∞ $+ (rt - R\infty) * \frac{1-e^{-k(T-t)}}{k(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4(T-t)k^3}\left(1 - e^{-k(T-t)}\right)^2$

Figure 18 : Taux zéro coupon de maturité T à la date t de Vasicek

Avec : R∞ $= \theta - \frac{\sigma^2}{2k^2}$

Points positifs et négatifs du modèle :

Pro	Cons
Le modèle est simple	Les variations des taux courts instantanés sont corrélées
On peut avoir une solution analytique des taux	Supposer la volatilité comme constante est éloigné de la réalité
Peu de paramètres sont demandés pour pouvoir calculer les taux zéro-coupon	Le modèle n'est pas assez souple. C'est-à-dire que la courbe que l'on obtient avec le modèle de Vasicek ne peut pas coller totalement avec la courbe des zéro- coupon réelle. En effet, elle ne peut pas reproduire toute les formes que peut prendre la courbe réellement observée sur le marché
Les taux courts instantanés peuvent prendre des valeurs négatives car les taux suivent un processus gaussien (Ce qui peut se produire dans la réalité)….	…mais en réalité le modèle de Vasicek gère mal les taux négatifs. Nous détaillerons plus le sujet dans les limites du modèle chapitre 7.2

Figure 19 : Points positifs et negatifs du modéle de Vasicek

Le modèle de Hull-White

Le modèle de Hull-White est une extension du modèle de Vasicek. En effet, la différence réside pour le paramètre de moyenne à long terme Θ, constant dans le modèle de Vasicek, qui varie maintenant en fonction du temps.

Cette fonction peut être exprimée en fonction de valeurs présentes sur le marché, disponibles à l'instant t=0, notamment par le prix des obligations zéro-coupons ainsi que le taux forward instantané associé.

Ainsi le modèle permet d'avoir une cohérence avec les prix du marché : c'est un modèle avec absence d'opportunité d'arbitrage.

L'équation différentielle stochastique pour le modèle de Hull-White est donnée en équation **Figure 20.**

$$drt = k[\theta_t - r_t]dt + \sigma dWt$$

Figure 20 : EDP Hull White

Avec :

- rt la valeur du taux au temps t,
- k, et σ des constantes positives,
- θt une fonction positive dépendant du temps,
- Wt un processus de Weiner.

Une autre écriture de l'équation différentielle **Figure 20** est donnée en équation **Figure 21**. Nous utiliserons cette dernière pour la suite.

$$drt = [b_t - ar_t]dt + \sigma dWt$$

Figure 21 : EDP Hull White 2

avec,

- a une constante positive correspondant à la vitesse de retour à la moyenne,
- σ une constante positive correspondant à la volatilité du taux court,
- bt une fonction positive déterministe dépendant du temps. Ce paramètre contrôle la moyenne long terme.

Notations :

- Soit $P^M(0,T)$ le prix de l'obligation zéro-coupon de maturité T observé sur le marché à la date 0.
- Soit $\boldsymbol{f^M(0,T)}$ le taux forward instantané associé (cf équation Figure 22) :

  $$\mathbf{f^M(0,T)} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} \mathbf{ln}(P^M(0,T))$$

  Figure 22 : Taux Forward Hull White à t=0

Le modèle de Hull White reproduit la courbe des taux zéro coupon de marché si l'on considère :

$$b(t) = \frac{\partial \mathbf{f^M(0,t)}}{\partial T} + a * \mathbf{f^M(0,t)} + \frac{\sigma^2}{2a} * (\mathbf{1} - \mathbf{e^{-2at}})$$

Figure 23 : Reproduction de la courbe de taux ZC avec équation Hull white 1

On obtient alors :

$$rt = r0e^{-kt} + \mathbf{e^{-kt}} * \int_0^t \boldsymbol{\theta_s} * \mathbf{e^{ks} ds} + \boldsymbol{\sigma} * \mathbf{e^{-kt}} * \int_0^t \mathbf{e^{ks}\, dW_s}$$

Figure 24: Reproduction de la courbe de taux ZC avec équation Hull white 1

avec,

- Ws un processus de Weiner
- r0 le taux a l'instant 0

On peut réécrire cette équation de la forme suivante :

$$r_t = r_s e^{-a(t-s)} + \boldsymbol{\alpha_t} - \boldsymbol{\alpha_s} \mathbf{e^{-a(t-s)}} + \boldsymbol{\sigma} \int_s^t \mathbf{e^{-a(t-u)}\, dW_u}$$

Figure 25 : Reproduction de la courbe de taux ZC avec équation Hull white 3

Avec

$$\boldsymbol{\alpha_t} = \mathbf{f^M(0,t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} * (\mathbf{1} - e^{-2at})^2$$

Figure 26 : Paramétre Hull White

De l'équation Figure 25, on en déduit l'équation suivante :

$$r_{t+h} = r_t e^{-ah} + \boldsymbol{\alpha_{t+h}} - \boldsymbol{\alpha_t} \mathbf{e^{-ah}} + \boldsymbol{\sigma} \sqrt{\frac{\mathbf{1-e^{-2ah}}}{\mathbf{2a}}} * \mathbf{Z}$$

Figure 27 : Taux Hull White

où, Z suit une loi normale centrée réduite.

Cette formule s'obtient de la même manière qu'évoquée précédemment avec le modèle de Vasicek.

Le prix du zéro-coupon de maturité T à la date t, pour le modèle de Hull-White est donné par l'équation suivante :

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

Figure 28 : Prix du zéro-coupon de maturité T à la date t, pour le modèle de Hull-White

Avec

$$\begin{cases} A(t,T) = \dfrac{P^M(0,T)*e^{(B(t,T)*f^M(0,t) - \frac{\sigma^2*(1-e^{-2at})*B(t,T)^2}{4a}}}{P^M(0,t)} \\ B(t,T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)}) \end{cases}$$

Figure 29 : Paramétres Hull White

Le taux zéro coupon est ensuite déterminé grâce à l'équation Figure 13

Points positifs et négatifs du modèle :

Pro	Cons
Modèle plus précis que celui de Vasicek et comme dans le modèle de Vasicek, le taux court instantané peut toujours prendre des valeurs négatives…..	…mais en réalité le modèle HullWhite gère mal les taux négatifs. Nous détaillerons plus le sujet dans les limites du modèle chapitre 7.2
Permet d'avoir une moyenne long terme non figée dans le temps.	Par rapport à Vasicek, plus de paramètres sont requis pour faire tourner le modèle notamment avec l'ajout du prix de l'obligation zéro-coupon ainsi que le taux instantané associé, à la date t=0
Le modèle est cohérent avec le marché.	

Figure 30 : Points positifs et negatifs Hull White

Le modèle CIR++ (Cox-Ingersoll-Ross étendu)

Dans un premier temps nous allons présenter le modèle CIR (Cox-Ingersoll-Ross) établi en 1985.

Avec ce modèle et sous la probabilité risque neutre Q, le taux d'intérêt court est modélisé par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dxt = k[\theta - xt]dt + \sigma\sqrt{xt} * dWt \\ x(0) = x0 \end{cases}$$

Figure 31 : EDP CIR

avec k, θ, et σ des constantes positives et où :

- k est la vitesse de retour à la moyenne du taux,
- θ représente la moyenne de long terme du taux court,
- σ représente la volatilité du taux de court terme,
- Wt est un mouvement brownien.

Comme le modèle de Vasicek, le modèle de CIR permet un retour à la moyenne.

Cependant, on remarque que ce qui le différencie du modèle de Vasicek est le terme$\sqrt{\mathrm{xt}}$. Ce terme interdit au taux d'intérêt court de prendre de prendre des valeurs négatives.

La simulation des incréments peut être faite de manière exacte ou par des approximations.

Pour le cas exact, les incréments du taux d'intérêt court suivent une loi du chi-deux décentrée à d degré de liberté, c'est à dire que pour tout s tel que 0<s<t, r(t) est défini par :

$$x(t) = \frac{\sigma^2(1-e^{-k(t-s)})}{4k} * {\chi_d}^2\left(\frac{4ke^{-k(t-s)}}{\sigma^2(1-e^{-k(t-s)})} x(s)\right)$$

Figure 32 : Incrément du taux d'intérêt court

où, $d = \frac{4k\theta}{\sigma^2}$ est le nombre de degré de liberté de la loi du chi-deux.

De cette formule, nous pouvons en déduire l'équation donnée ci-dessous, utilisée pour déterminer par récursion les valeurs du taux d'intérêt court à chaque date :

$$x(t+h) = \frac{\sigma^2(1-e^{-kh})}{4k} * {\chi_d}^2\left(\frac{4ke^{-kh}}{\sigma^2(1-e^{-kh})} x(t)\right)$$

Figure 33 : Taux d'intérêt court

Le modèle CIR++ : Extension du modèle CIR

En 2001, Brigo et Mercurio donnent une extension du modèle de CIR. Ils définissent que sous la probabilité risque neutre Q, le taux d'intérêt court instantané est la somme d'une fonction déterministe $\phi^{\mathrm{CIR}}(\mathrm{t}, \alpha)$ et d'un processus de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) de paramètres k, θ, et σ et x0 :

$$\begin{cases} r(t) = x(t) + \phi^{CIR}(t,\alpha) \\ x(0) = x0 \\ dx(t) = k[\theta - x(t)]dt + \sigma\sqrt{x(t)} * dW(t) \end{cases}$$

Figure 34: EDP CIR++

Avec :

- $\phi^{CIR}(t,\alpha) = f^M(0,t) - f^{CIR}(0,t,\alpha)$
- $f^{CIR}(0,t,\alpha) = \frac{2k\theta(e^{th}-1)}{2h+(k+h)(e^{th}-1)} + x0 \frac{4h^2e^{th}}{[2h+(k+h)(e^{th}-1)]^2}$
- $h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$

Notons fM(0, t) le taux forward instantané et PM(0, T), le prix de l'obligation zéro coupon de maturité T, observé sur le marché à la date 0.

Le calcul de l'espérance de l'intégrale donnée en équation **Figure 12** pour le modèle CIR++, montre que le prix du zéro-coupon de maturité T à la date t (noté P(t, T)) est donné par :

$$P(t,T) = \tilde{A}(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

Figure 35 : prix du zéro-coupon de maturité T à la date t CIR++

Où :

$$\begin{cases} \tilde{A}(t,T) = \dfrac{P^M(0,T)A(0,t)e^{-B(0,t)x0}}{P^M(0,t)A(0,T)e^{-B(0,T)x0}} A(t,T)e^{B(t,T)\phi^{CIR}(t,\alpha)} \\ A(t,T) = \left(\dfrac{2he^{(k+h)(T-t)/2}}{2h+(k+h)(e^{\frac{T-t}{h}}-1)}\right)^{2k\theta/\sigma^2} \\ B(t,T) = \left(\dfrac{2(e^{\frac{(T-t)}{h}}-1)}{2h+(k+h)\left(e^{\frac{T-t}{h}}-1\right)}\right) \end{cases}$$

Figure 36 : Paramétres CIR++

Utilisation de la méthode de Monte Carlo pour implémenter les modèles d'action et de taux

La méthode de Monte-Carlo est une méthode numérique, qui utilise des tirages aléatoires permettant de réaliser un calcul numérique. La méthode de simulation de Monte-Carlo permet d'introduire une approche statistique du risque dans une décision financière.

Cette méthode consiste à isoler des variables clés d'une étude et de leur affecter une distribution de probabilité. Un grand nombre de tirages aléatoires dans les distributions de probabilités est effectué pour chacune de ces variables afin de déterminer le nombre d'occurrences de chacun des résultats.

La méthode de simulation de Monte-Carlo repose sur la loi forte des grands nombres :

- Si X1,...,Xn n variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, intégrables et de moyenne E(X) alors : $\frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n} => E(X)$

Entre autres, la provision Best Estimate est la moyenne des sommes de flux futurs actualisés dans différents scénarios économiques, représentant chacun un caractère aléatoire de l'évolution de l'actif. C'est pour cette raison que nous utilisons la méthode de Monte Carlo pour le calcul de la provision Best Estimate.

Nous utiliserons également cette méthode pour générer le prix de nos actifs via des variations de la loi normale.

Maintenant que nous avons déterminés l'actif, regardons le passif.

2.2.2 Modèle Passif

Pour notre modèle simplifié, la stratégie d'allocation cible de notre organisme assureur est la suivante : 70% d'obligations et de 30% d'actions. Il assure à ses clients une participation aux bénéfices d'une hauteur de 90% des rendements financiers.

D'où le Bilan :

Actif	Passif
Obligations Actions	Fonds propres =Réserves de l'entreprise Provisions techniques =Best Estimate (+ Risk Margin=0 ici)

Figure 37 : Bilan modèle simplifié

De plus, nous émettons un certain nombre d'hypothèses sur notre gestion :

Modèle simplifié	
No Hp	**Description de l'hypothèse**
H1	Horizon de projection de 10 ans
H2	Les gains de l'assuré ne sont pas replacés sur le contrat d'épargne, Le client récupère à chaque échéance les bénéfices de son placement sous forme de rachat partiel
H3	La même allocation de portefeuille est gardée tout au long de la projection
H4	Les provisions du passif sont uniquement composés de Best Estimates
H5	Il n'y a pas de réassurance
H6	Nos provisions ne tiennent pas compte du risque de mortalité

Figure 38 : Hypothèses de gestion du modèle ALM simplifié

L'assureur place un capital initial C (pour nous C=1,4199 milliards €) sur les marchés financiers selon l'allocation d'actifs présentée antérieurement. Il garantit de transmettre 90% de la performance aux assurés sur une période de dix ans.

Hypothèses de la gestion actif et passif zoom sur les Provisions financières

Avant de détailler notre premier modèle ALM faisons un tour d'horizon des différentes provisions financières.

En général en assurance vie, les provisions sont constituées des PM, de la provision pour dépréciation durable (PDD), de la provision pour risque d'exigibilité (PRE) et de la réserve de capitalisation (RC).

Réserve de Capitalisation

La réserve de capitalisation est une provision technique particulière car elle ne figure pas au passif réel du bilan mais dans les capitaux propres (impact sur marge de solvabilité). Elle ne se calcule pas contrat par contrat mais sur le portefeuille global. Elle permet de lisser dans le temps le rendement des actifs obligataires et surtout d'éviter que l'assureur ne soit tenté de vendre au coup par coup des actifs obligataires pour pouvoir profiter d'une baisse des taux (bénéfice à court terme réinvesti mais ces titres sont aussi moins rentables car une baisse des taux a été constatée initialement).

Provision pour Dépréciation Durable (Art. R332-19)

La PDD constitue un dispositif dérogatoire par rapport au droit commun. Cette provision est dotée à l'actif (actif soustractif). Il s'agit d'une correction de valeur. Elle peut s'appliquer à tous les actifs et se constitue ligne à ligne. Il n'existe pas de règles comptables visant à normer le calcul de la PDD. On la constitue dès lors que l'on considère qu'un titre a perdu de la valeur par rapport à sa valeur d'achat et ce de manière durable.

Provision pour Risque d'Exigibilité

Elle est constituée globalement sur le sous-groupe des actifs relatifs à l'article R332-20 (cela signifie que les obligations ne sont pas concernées). Elle apparaît au passif du bilan. Il s'agit de comparer la valeur nette comptable de tout le portefeuille à la valeur de réalisation globale à l'instant considéré.
Si la valeur de réalisation globale est supérieure à la valeur nette comptable, on ne dote pas de PRE. En revanche, si la valeur de réalisation globale est inférieure à la valeur nette comptable, la PRE est dotée. Il s'agit donc de la moins-value latente constatée sur le portefeuille.

Provision Mathématique

Une provision mathématique est une provision nécessaire à la couverture d'un engagement. C'est le montant qu'un assureur doit détenir dans ses comptes pour garantir son engagement vis-à-vis des souscripteurs de contrats.

Son calcul est relativement encadré par la réglementation et intègre la mortalité, les intérêts financiers, les cotisations futures que le souscripteur s'est éventuellement engagé à verser en contrepartie des engagements de l'assureur.

NB : Nous prendrons comme hypothèse, pour notre modèle simplifié, que toutes les provisions autres que la provision mathématique seront à 0. Pour le modèle complexifié la réserve de capitalisation sera prise en compte.

2.2.3 Description des interactions actif-passif

Notons ZCi le taux zéro-coupon pris à la date t=i, de maturité t= i+1 et EvolAction l'évolution du prix de l'action au cours des dix prochaines années.

Si jamais la performance est négative, l'assureur prend sur ses fonds propres, et l'assuré ne reçoit aucun bénéfice.

Le gain de l'assuré vaut alors :

$$Gain(i) = \max[0; (ZCi * 0{,}7 * C + \frac{EvolAction\ i+1 - EvolAction\ i}{EvolAction\ i} * 0{,}3 * C) * 0\ ,9]$$

Figure 39 : Gain du modèle simplifié

Au terme du contrat (n=10), la rentabilité du placement sera équivalente à :

$$\sum_{i=1}^{n} Gain(i)/C$$

Figure 40 : Gain total du modèle simplifié

A la dernière échéance, l'assuré bénéficiera de Gain(T) + C euros car le capital initial est récupéré.

2.2.4 Best Estimate

Concrètement, notre calcul du Best Estimate s'effectue en run-off, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de nouvelle souscription pendant la simulation. De plus, nous supposons l'absence de réassurance sur le portefeuille étudié.

De plus, au vu de nos hypothèses Figure 40, la moyenne pondérée de nos flux futurs (cf définition Best Estimate) se calcule d'après le modèle ALM par la formule suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Gain\ i}{(1 + ZC\ 0{:}\ i)^{i}} + \frac{C}{(1 + ZC\ 0{:}\ i)^{n}}$$

Figure 41 : Formule du BE du modèle simplifié

avec $ZC\ 0{:}i$ le taux zéro-coupon pris à la date t=0 de maturité t=i.

2.2.5 SCR

Nous allons calculer le SCR via la formule standard

L'approche de la formule standard est la suivante :
SCR = BSCR + SCR Opérationnel − Ajustements

avec
- BSCR également appelé SCR de base correspondant au capital requis de base
- SCR Opérationnel, le chargement en capital au titre du risque opérationnel
- Ajustements, effet d'atténuation qui traduit la capacité d'absorption des pertes par les assurés et les impôts différés

Dans le contexte de l'assurance-vie, le calcul de SCR par la formule standard nécessite un modèle ALM comme modèle de valorisation. En appliquant des chocs instantanés aux actifs et passifs du bilan de la société d'assurance (ou via des formules factorielles), nous pouvons calculer le SCR de chaque module de risque. Ces chocs sont déterminés au préalable par le législateur.

Dans un premier temps, nous calculons les valeurs à t=0 de l'actif et des provisions techniques, qui se résume à calculer l'actif et le BE dans notre cas. De ces deux valeurs nous pouvons en déduire le montant des fonds propres de l'entreprise.

Ensuite nous appliquons un choc, à la hausse ou à la baisse, d'un des paramètres, c'est-à-dire le taux de mortalité ou bien le taux d'intérêt.

Puis nous recalculons à t=0, la valeur de l'actif et des provisions techniques, afin de pouvoir en déduire le montant de fonds propre après le choc.

En fait, nous nous intéressons à la variation des fonds propres entre les deux bilans (choqué et non choqué) => Cela correspond à ce que perdrais l'assureur si le choc se produisait.

Si le montant des fonds propres après le choc est plus grand qu'auparavant, le choc n'est pas défavorable. Il ne faut donc pas le prendre compte. Si au contraire, la valeur des fonds propres est diminuée, alors le choc est à prendre en compte.

Dans notre cas, nous avons implémenté et calculé un SCR simplifié car nous avons avancé un certain nombre d'hypothèses.

Nous avons pris en compte uniquement la composante BSCR, qui s'avère être la plus importante. Les autres composantes, qui sont rappelées dans la formule, ont été considérées comme nulles.

De plus, l'actif de l'entreprise n'est composé que d'obligations et d'actifs. Nous n'avons pas pris en compte certains paramètres, comme la mortalité et le rachat.

En fait, nous n'avons eu qu'à appliquer un choc sur les actions et sur les obligations. On a donc le SCR qui est égal au BSCR, qui lui-même est égal au module "Market".

Les scénarios défavorables dans notre cas sont : la baisse des taux d'intérêts ainsi que la baisse brutale du prix des actions.

Les chocs appliqués sont :

- une baisse de 39% de la valeur des actions (avec Dampener à 9% cela fait un choc à 30%)

Date	Texte	Formule de calcul	Indice	Valeur du dampener
2010	QIS5 Technical Specifications + QIS5 Calibration Paper	$SA = \left(\frac{CI - AI}{AI}\right)$ $Dampener = max[min[SA, 10\%], -10\%]$	MSCI World Price Index	-9%
Octobre 2011	Draft Implementing measures Solvency II	$SA = \frac{1}{2}\left(\frac{CI - AI}{AI} - 8\%\right)$ $Dampener = max[min[SA, 10\%], -10\%]$	Non défini	Non précisée
Octobre 2012	Technical Specifications for the Solvency II valuation and Solvency Capital Requirements calculations (Part I)	$SA = \frac{1}{2}\left(\frac{CI - AI}{AI} - 8\%\right)$ $Dampener = max[min[SA, 10\%], -10\%]$	MSCI Europe en devise locale	-7%
Janvier 2013	Technical Specification on the Long Term Guarantee Assessment	Pas de dampener car application du choc transitoire de 22%.		
Avril 2014	Technical Specification for the Preparatory Phase	$SA = \frac{1}{2}\left(\frac{CI - AI}{AI} - 8\%\right)$ $Dampener = max[min[SA, 10\%], -10\%]$	Indice non défini Moyenne des performances total return et non total return	+7,5%
Octobre 2014	Règlement délégué	$SA = \frac{1}{2}\left(\frac{CI - AI}{AI} - 8\%\right)$ $Dampener = max[min[SA, 10\%], -10\%]$	Non défini	Non précisée
Décembre 2014	Consultation Paper on the proposal for draft ITS on the equity index for the symmetric adjustment on the equity capital charge	$SA = \frac{1}{2}\left(\frac{CI - AI}{AI} - 8\%\right)$ $Dampener = max[min[SA, 10\%], -10\%]$	Panier d'indices actions proposé par l'EIOPA, Price Index	+2,83% au 31/12/2014

Source : Recherche CPR AM

Notations : SA désigne la valeur de l'ajustement symétrique avant d'être cappée et floorée à +/-10%, et CI et AI désignent respectivement la valeur courante de l'indice actions et son niveau moyen sur 3 ans.

Figure 42 : Taux de dampener

- une baisse des taux d'intérêt différente selon la maturité :

Maturité	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Choc à la hausse	70%	70%	70%	70%	64%	59%	55%	52%	49%	47%	44%	42%	39%	37%	35%	34%	33%
Choc à la baisse	-75%	-75%	-75%	-65%	-56%	-50%	-46%	-42%	-39%	-36%	-33%	-31%	-30%	-29%	-28%	-28%	-27%

Figure 43 : Chocs de taux 1/2

Maturité	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	30	>30
Choc à la hausse	31%	30%	29%	27%	26%	26%	26%	26%	26%	26%	25%	25%
Choc à la baisse	-28%	-28%	-28%	-29%	-29%	-29%	-30%	-30%	-30%	-30%	-30%	-30%

Figure 44: Choc des taux 2/2

Nous avons utilisé la matrice d'agrégation suivante (les valeurs étant issues de celles du Régement délégué) :

	Taux d'intérêt	Actions
Taux d'intérêt	1	0,5
Actions	0,5	1

Figure 45 : Matrice de corrélation du risque de marché

Pour calculer le SCR, il faut définir les valeurs de l'actif et du passif avant le choc.

- L'actif est composé de deux éléments : les actions et les obligations. La valeur de l'actif correspond alors à la somme de la valeur de ces deux éléments.
    - Les actions s'estiment comme la somme d'argent que l'on pourrait gagner si l'on vendait toutes les actions présentes dans le portefeuille. Cette somme est égale au nombre d'actions multiplié par le prix de l'action. A l'instant t = 0, le nombre d'actions correspond au capital action (i.e la somme d'argent placé dans les actions) divisé par le prix d'une action. La valeur de la classe des actions s'évalue à travers la somme d'argent placé dans les actions.
    - Les obligations ont pour valeur la somme des flux actualisés. La formule de calcul ressemble fortement à notre formule du Best Estimate. En effet, si l'on considère que l'on investit l'intégrale de nos actifs dans des obligations et que l'on donne à l'assuré 100% de la performance, la valeur de notre actif, donc des obligations, est égale à notre Best Estimate.
- Le passif se compose des fonds propres auxquels s'ajoutent les provisions techniques. Avec nos hypothèses, les provisions techniques se résument au Best Estimate. Suite au bilan présenté précédemment, la valeur des fonds propres avant le choc correspond à la valeur des actifs moins celle des provisions techniques

Pour plus d'information voir l'annexe : Extrait code R pour calcul du SCR

2.3 Modèle ALM complexifié

Maintenant que le modèle ALM simplifié a été défini regardons notre modèle plus réaliste.
(Retour Synthèse)

2.3.1 Modèles Actif du GSE

Les actifs sont modélisés de la même manière que pour le modèle simplifié. Seul changement, le modèle de taux de Vasicek n'est plus utilisé (nous expliquerons pourquoi dans la partie pratique).

2.3.2 Modèle Passif

La stratégie d'allocation cible de notre organisme assureur est la suivante : 75% d'obligations, 5% d'actions et de 20% de trésorerie. Il assure à ses clients une participation aux bénéfices d'une hauteur de 90% des rendements financiers.

Hypothèses sur notre portefeuille de contrats

Dans le cadre de ce mémoire, nous étudierons un vrai contrat en euros (anonymisé) fermé à toute souscription nouvelle (run off).

Fin 2011, date de calcul, le montant de provisions mathématiques est d'environ 1,4 milliards d'euros pour plus de 630 assurés.

L'assuré a la possibilité d'effectuer plusieurs versements sur son contrat d'épargne et peut, à tout moment, récupérer tout ou partie de son capital en effectuant ce que l'on appelle un rachat (partiel ou total). Cette option de rachat est non sans risque pour l'assureur puisque les assurés peuvent utiliser l'option de rachat à tout moment, obligeant ainsi l'assureur à prendre ses dispositions pour pouvoir honorer ses engagements à ce moment-là.

L'épargne des assurés, placée sur les contrats en euros, permet à l'assureur de réinvestir cet argent sur les marchés financiers dans différents actifs.

Cependant, quel que soit la performance réalisée (gains ou pertes) sur les marchés, le capital des assurés est garanti. La revalorisation du capital est, quant à elle, fonction des performances réalisées sur les marchés par l'assureur :

- Dans le cas où l'assureur est en perte et n'a pas su tirer profit de ses placements, les capitaux des clients ont un rendement au **taux minimum garanti** de 0,5 %, c'est-à dire qu'ils ont la garantie de conserver le capital investi. Seul l'assureur supporte le risque et devra donc « piocher » dans ses fonds propres pour pallier aux pertes.
- Dans le cas où l'assureur a réalisé des bénéfices, le code des assurances lui impose de reverser un minimum de 85% (le Code des assurances prévoit qu'au moins 90 % des bénéfices techniques et 85 % des bénéfices financiers doivent être redistribués aux assurés et 100% des pertes techniques.) des bénéfices aux assurés ; c'est ce que l'on appelle la **participation aux bénéfices**. L'assureur a la possibilité de les redistribuer soit dans l'immédiat (ici ce sera le cas cf paragraphe ALM), soit de manière différée en constituant une provision pour participation aux bénéfices. Mise sous réserve pour une période maximale de 8 ans, la participation aux bénéfices profite principalement au lissage de la rémunération des Remarque : Le décès de l'assuré ne sera pas pris en compte dans le cadre de ce mémoire

Illustration du portefeuille :

Age	Ancienneté	Provision Mathématique Initiale
5	4	24 800,19
7	4	5 547,79
8	5	5 803,68
10	6	13 797,76
11	5	43 991,32
13	7	14 871,53

Figure 46 : Extrait du portefeuille

2.3.3 Description des interactions actif-passif

Le Bilan est :

Actif	Passif
Obligations + Actions + Trésorerie	Fonds propres (Réserves de l'entreprise) + Provisions techniques (Best Estimate + Risk Margin)

Figure 47 : Bilan modèle complexifié

De plus, nous émettons un certain nombre d'hypothèses sur notre gestion :

- Horizon de projection = 10 ans
- Fonds propres = FP = 120 000 000
- Les gains de l'assuré sont replacés sur le contrat d'épargne
- Taux de Frais de gestion sur encours (TFGSE) = 0,5%
- Taux Minimum Garanti (TMG)= 0,5%
- Taux de participation aux bénéfices = 90%
- La participation aux bénéfices est distribuée chaque année
- La même allocation de portefeuille est gardée tout au long de la projection
- Les provisions de notre passif sont composées par le Best Estimate et la marge pour risque
- Nous supposons qu'il n'y a pas de réassurance.
- Nos provisions tiennent compte du risque de mortalité et rachat partiel (ces notions seront explicitées dans les prochains chapitres)
- Les décès et les rachats sont supposés avoir lieu au début d'exercice. Cependant, les prestations versées n'ont lieu qu'en fin d'année, et sont entre ces deux instants, revalorisées au taux servi l'année précédente.
- La modélisation ne prend pas en compte d'éventuelles primes futures

L'assureur place un capital initial C+FP (pour nous C=1,419 milliards €), représentant l'ensemble des encours des assurés et les fonds propres, sur les marchés financiers selon l'allocation d'actifs présentée antérieurement. Il garantit de transmettre 90% de la performance aux assurés sur une période de dix ans.

NB : De manière simpliste le TMG + TFGSE =1%. Au vu de la proportion d'obligation dans nos investissements, il nous faudrait donc une obligation donnant un coupon fixe >1,2% pour s'assurer de la bonne santé financière de l'assureur. Ce qui est le cas car nos coupons rapportent en moyenne 1,8% (cf paragraphe sur les actifs)

Remarque : Le GSE utilisé est celui du modèle simplifié. Le calibrage reste identique pour une projection de 10 ans (car l'on reste sur des données de fin 2011).

Le modèle ALM est cette fois ci implémenté sous VBA Excel. Il est composé de deux boucles principales, une boucle sur le calcul du BE et une autre sur le calcul du SCR.

Le nombre d’années de simulations n’est pas un paramètre du modèle. La simulation est réalisée sur 10 ans (en gardant le calibrage du modèle simplifié)

Au début de chaque simulation, le modèle enregistre les variations du marché obligataire et du marché actions sur les N années de projection, suivant les modèles stochastiques mis en place.

Le schéma simplifié d’une simulation sur une année peut être représenté de la manière suivante :

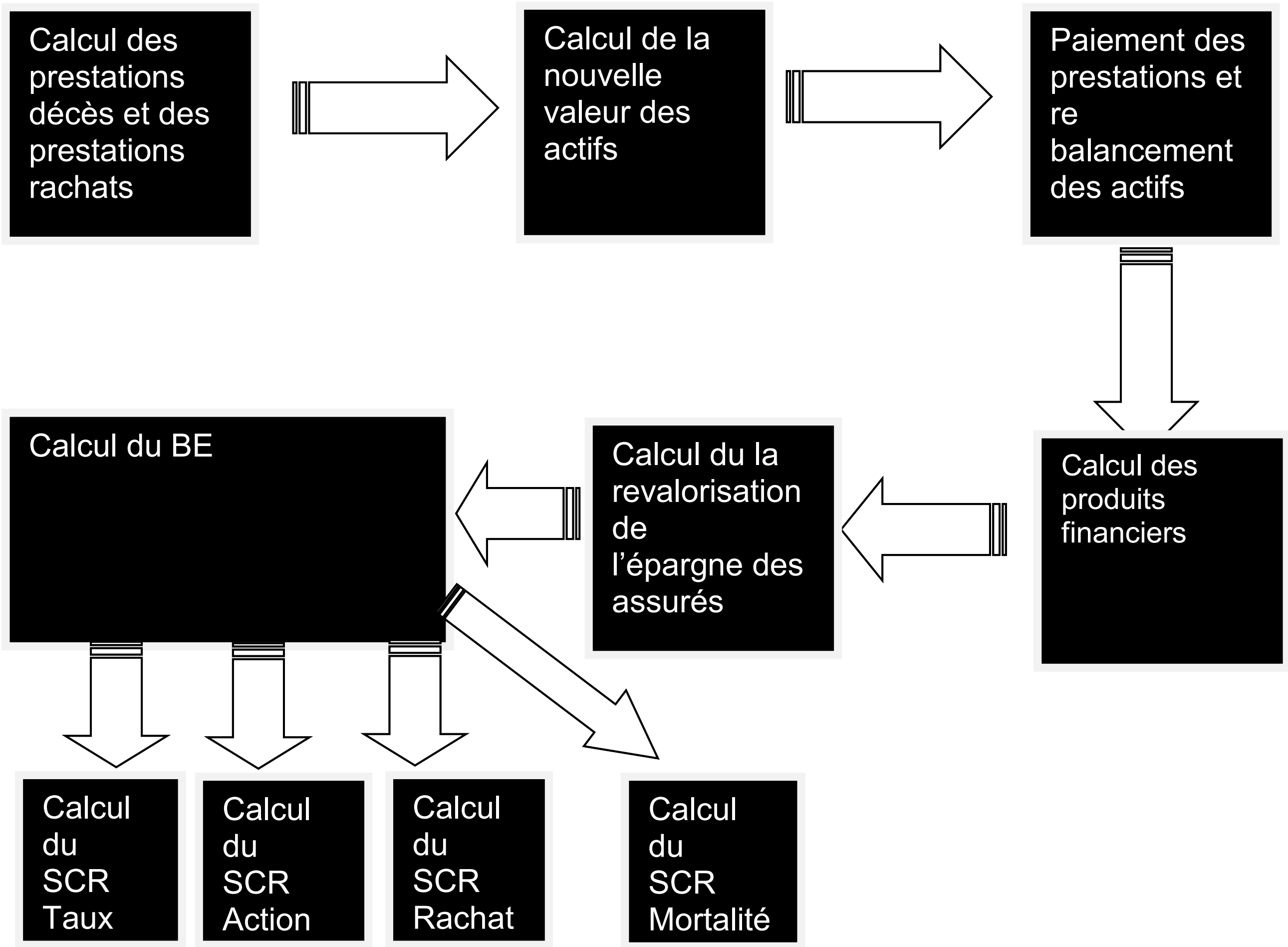


Figure 48 Schéma de calcul

Nous allons maintenant détailler les différentes étapes de calcul

Les décès

Les décès sont supposés avoir lieu en début d’exercice. Cependant, les prestations versées n’ont lieu qu’en fin d’année, et sont entre ces deux instants revalorisées au taux servi l’année précédente.

La mortalité n’étant pas un élément essentiel du modèle (les sorties pour cause de décès étant minimes) il sera considéré que les assurés meurent suivant les tables de mortalité. Les taux annuel de mortalité sont définis par la table de mortalité TH00-02. Les prestations décès sont la somme des provisions mathématiques des contrats pour lesquels l’assuré est décédé sur l’exercice.

Les rachats

Les taux de rachat structurel sont définis via une table d'expérience (cf paragraphe rachats structurels).

Pour calculer les rachats conjoncturels, les indications fournies dans le QIS 5 par l'ACPR sont suivies (cf paragrahe rachats conjoncturels).

Le taux de rachat total de l'année j est alors défini de la façon suivante :

$$\text{Taux rachat total}_{(j)} \;\; = \max(0; \text{taux rachat conjecturels}_{(j)} + \text{taux rachats structurels}_{(j)})$$

Remarque : l'assuré peut racheter son contrat sans pénalité.

Les rachats structurels

Les rachats structurels sont uniquement dépendants de la composition du portefeuille. Ils sont indépendants de la conjoncture économique. Ces rachats s'expliquent soit par la dégradation financière de l'assuré, soit par la fiscalité de l'assurance vie.

Une hypothèse de rachat structurel classique consiste à retenir :

- Un pic de rachat en première année de contrat (dynamique de rétractation assez courante en assurance vie)
- Un pic de rachat au bout de 8 ans (du fait des taxes plus avantageuses)
- Un niveau de rachat constant sur la période 1 à 7 ans et un second plateau de rachat plus important pour le reste de la vie du contrat

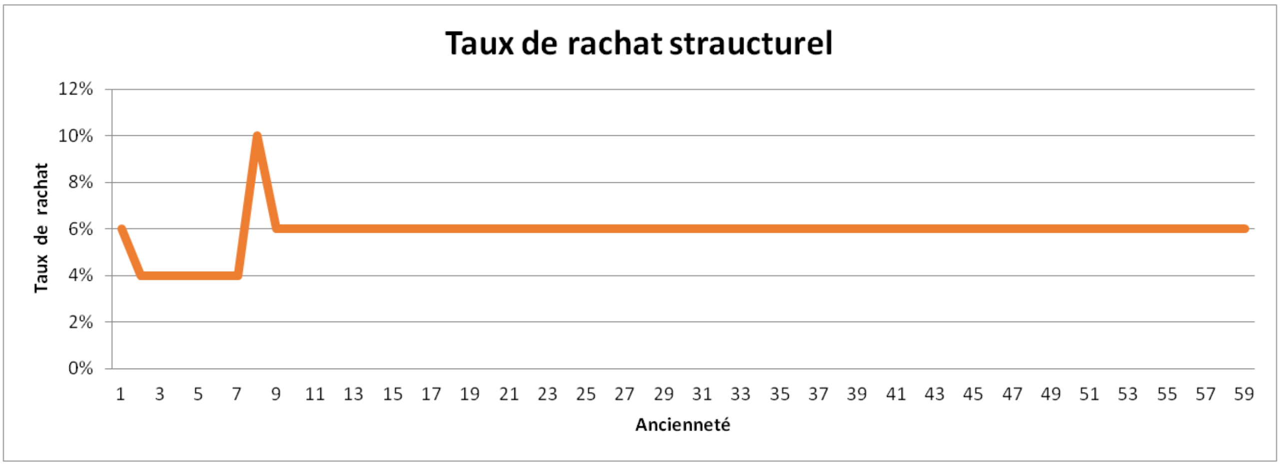


Figure 49 : Taux rachat struturel

Les rachats conjecturels

Les rachats conjoncturels correspondent aux rachats qu'effectuent les assurés en arbitrant entre l'évolution des marchés financiers (en particulier des taux d'intérêts) et les taux servis par l'assureur. En effet, en cas de hausse de taux, une partie des assurés peut racheter leurs contrats pour accéder aux taux plus compétitifs des nouveaux contrats.

Deux scenarii de loi de rachat sont proposés (à titre indicatif) par l'ACPR, un plafond maximum et un plancher minimum de rachat, constituant ainsi un "tunnel" de rachats. Les organismes sont en conséquence invités à ajuster leurs lois de rachat afin de se situer dans ce "tunnel" de rachats

$$Rachat_{Conjoncturel} = \begin{cases} RC_{max} & \text{si } (\mathrm{taux}_{\mathrm{servi}} - \mathrm{taux}_{\mathrm{attendu}}) < \alpha \\ RC_{max} * \dfrac{\mathrm{taux}_{\mathrm{servi}} - \mathrm{taux}_{\mathrm{attendu}} - \beta}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha < (\mathrm{taux}_{\mathrm{servi}} - \mathrm{taux}_{\mathrm{attendu}}) < \beta \\ 0 & \text{si } \beta < (\mathrm{taux}_{\mathrm{servi}} - \mathrm{taux}_{\mathrm{attendu}}) < \gamma \\ RC_{max} * \dfrac{\mathrm{taux}_{\mathrm{servi}} - \mathrm{taux}_{\mathrm{attendu}} - \gamma}{\delta - \gamma} & \text{si } \gamma < (\mathrm{taux}_{\mathrm{servi}} - \mathrm{taux}_{\mathrm{attendu}}) < \delta \\ RC_{min} & \text{si } (\mathrm{taux}_{\mathrm{servi}} - \mathrm{taux}_{\mathrm{attendu}}) > \delta \end{cases}$$

Figure 50 : Rachat conjecturel

Avec

Plafonds	α	β	γ	δ	RC_{min}	RC_{max}
Maximum	-4%	0%	1%	4%	-4%	40%
Minimum	-6%	-2%	1%	2%	-6%	20%

Figure 51 : Paramètres du rachat conjecturel

- α représente le seuil en dessous duquel les rachats conjoncturels sont constants et ne dépendent pas de l'écart de taux,
- β est le seuil d'indifférence à la baisse du taux servi,
- γ correspond au seuil d'indiérence à la hausse du taux servi,
- δ est le seuil au-dessus duquel le taux de rachat conjoncturel est constant et égal à un minimum.

Un bon indicateur du $\mathrm{taux}_{\mathrm{attendu}}$ par les assurés est le Taux Moyen des emprunts d'Etat (TME). C'est d'ailleurs cela que nous allons prendre dans le cadre de ce mémoire.

Le $\mathrm{taux}_{\mathrm{servi}}$ est la taux de participation aux bénéfices servit l'année précédente.

Au 31/12/2011 le TME était 3,23% et il était de 2,03% au 31/12/2012. En mars 2017 le TME est de 1,1%.

Nous prendrons donc les TME (de 2011 à 2016 puis projetterons les TME futurs) comme taux attendu.

Dec 2011	Dec 2012	Dec 2013	Dec 2014	Dec 2015	Dec 2016
3,23%	2,03%	2,41%	0,98%	0,97%	0,80%

Figure 52 : TME

Dans ce mémoire, nous choisissons les paramètres suivants :
- α=-5%
- β=-1%
- γ=1%
- δ=3%
- RCmin= -5%
- RCmax= 30%

Remarque : nous avons simplement pris la moyenne des bornes de chaque paramètre.

Remarque :
Ce rachat variable est un pourcentage des rachats structurels. Le rachat variable peut être négatif: cette situation traduit une surperformance remarquable des taux servis par rappo rt au taux benchmark des clients (typiquement lorsque $\text{taux}_{\text{servi}}$>TME+δ).
Le taux de rachat global dans ce cas là est finalement plus faible que le taux de rachat structurel.

Les frais réels

Notre taux de frais est de 0,5%. Il permet de calculer les frais réels de l'assureur chaque année j :

$$\text{Frais}_{(j)} = 0{,}5\% * \text{PM ouverture}_{(j)}$$

Les interactions Actif/Passif

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la modélisation des interactions Actif/Passif.

En effet, l'évolution des actifs, la politique d'attribution de la participation aux bénéfices et donc la revalorisation des contrats ont un impact sur le passif de l'assureur à travers l'augmentation des provisions techniques et le comportement de rachat. Nous allons expliquer comment le modèle fonctionne pour calculer les montants qui seront affectés aux provisions des assurés.

Le re balancement de l'Actif

L'allocation de l'Actif est définie par une allocation cible en actions, obligations et trésorerie (5% actions, 75% obligations et 20% trésorerie). Cette allocation cible est suivie tout au long de la projection.
Chaque fin d'année, l'assureur vérifie que cette allocation est respectée en valeur de marché. Si ce n'est pas le cas, il procède à des investissements et désinvestissements entre les actifs du fonds pour se rapprocher de cette allocation cible.

Pour cela, le modèle calcule la valeur de marché des obligations et des actions présentes en portefeuille en fin d'année (31/12/N). La valeur de marché totale du portefeuille en fin d'année N est la somme des valeurs de marché des obligations et des actions et trésorerie détenues à la fin de l'année N :

$$\text{VM totale}_{(N)} = \text{VM Obligation}_{(N)} + \text{VM Action}_{(N)} + \text{VM Trésorerie}_{(N)}$$

Si la part d'obligations en valeur de marché du portefeuille est supérieure à l'allocation cible, l'assureur désinvestit en obligations pour investir en actions/trésorerie. Inversement, si la part d'obligation en valeur de marché est inférieure à l'allocation cible, l'assureur désinvestit en actions/trésorerie pour investir en obligations

Les produits financiers

A l'inventaire de l'année j, le montant des produits financiers obtenus au cours de l'exercice en question est calculé :

$$\begin{aligned}&\text{Produits financiers}_{(j)}\\&= \text{Coupons}_{(j)} + \text{Revenu trésorerie}_{(j)} + \text{Gain ou perte de vente d'actions}_{(j)}\\&+ G\text{ain ou perte de la vente d'obligations}_{(j)}\end{aligned}$$

Remarques : Le rendement de l'actif ne prend pas en compte la vente d'obligation (cela va dans la réserve de capitalisation) mais ce ne sera plus le cas dans le deuxième modèle complexifié.

Il n'y a pas de surcote/décote de l'obligation car nous considérerons qu'elle est toujours acheté au pair

Taux de rendement de l'actif

Par simplification, le taux de rendement de l'actif pour l'exercice j se calcule par le rapport des produits financiers de l'année j sur la valeur marchée (et non la valeur nette comptable comme cela se fait normalement) des actifs présents en portefeuille en fin d'année j :

$$\mathrm{TRA}_{(j)} = \frac{\text{Produits financiers}_{(j)}}{VM\ actions_{(j)} + VM\ Obligations_{(j)} + Trésorerie_{(j)}}$$

La revalorisation cible

Le taux servi cible est le taux que l'assureur va chercher à servir pour une année donnée. Il souhaite proposer un taux comparable au taux offert par la concurrence afin d'éviter une vague de rachats importante l'année qui suit.

Avec notre participation aux bénéfices à 90%, le taux servi contractuel est tel que :

$$\text{Taux servi cible}_{(j)} = \max(\,0{,}9 * \mathrm{TRA}_{(j)}, \mathrm{TMG} = 0{,}5\%\,)$$

Remarque : La participation aux bénéfices est toujours reversée la même année

Les provisions mathématiques

Revalorisation de la PM

Avec un TGFSE à 0,5%, la PM est revalorisée comme suit :

$$\mathrm{PM}_{(j)} = \left[\,\mathrm{PM}_{(j-1)} - \mathrm{rachat}_{(j)} - \text{décès}_{(j)}\,\right] * (1 - 0{,}5\%) * (1 + \text{taux servi cible}_{(j)})$$

La provision mathématique de clôture finale « PM clôture » est calculée d'après l'expression suivante :

$$\text{PM clôture}_{(j)} = Max\ [0, (PM\ clôture_{(j-1)} * (1 - taux\ chargement) - décès_{(j)} - rachat_{(j)}) * (1 + taux\ servi_{(j)})]$$

Remarque : La participation aux bénéfices est incluse dans cette PM de clôture

2.3.4 Best Estimate

Moyenne pondérée des flux futurs, le Best Estimate se calcule d'après le modèle ALM par la formule suivante :

$$BE = \sum_{j=1}^{nb\ scénarios} \frac{1}{nb\ scénarios} \sum_{i=1}^{n} \frac{Rachat_{\ i,j} + Décés_{i,j}}{(1 + ZC\ 0\colon i)^{i}}$$

Figure 53 : BE modèle complexifié

avec $ZC\ 0{:}i$ le taux zéro-coupon pris à la date t=0 de maturité t=i.

<u>Illustration avec le BE pour le couple Hull White-Black Scholes pour le scenario central:</u>

Scenario	Periode	Rachat	Décès	Taux cible	Taux à la maturité	BEL
1	1	80969392,83	171191,1612	0,010292477	0,014119844	80 010 843,36
1	2	159297823,1	93787782,36	0,010659006	0,013005066	246 629 038,65
1	3	65094783,7	75886730,18	0,011693372	0,013705647	135 340 124,69
1	4	71099597,27	66115379,7	0,015175924	0,015371255	129 092 811,68
1	5	52522135,35	56393621,17	0,01828428	0,017319154	99 955 018,88
1	6	44512423,73	48534987,45	0,020894644	0,019214219	83 006 375,67
1	7	51789411,17	41553513,62	0,022841881	0,020821716	80 803 859,36
1	8	49229211,93	45579277,58	0,024199914	0,02211368	79 589 104,66
1	9	41763585,23	25406039,27	0,024322102	0,023208585	54 638 068,96
1	10	423492940,2	0	0,071195387	0,024165644	333 537 094,31

Figure 54 : BE HW Merton

2.3.5 SCR

Nous allons étudier 4 modules :

- Action
- Taux
- Rachat
- Mortalité

Comme précédemment (avec le modèle simplifié), notre calcul de SCR suivra la modèle standard EIOPA.

Le calcul du capital requis est fondé sur une approche ΔBOF[8] : le capital requis est déterminé par l'impact d'un scénario spécifique sur la BOF de la compagnie d'assurance.

<u>Pour le SCR marché</u>, la démarche est la même que celle décrite lors de l'utilisation du modèle ALM simplifié. Nous ne re détaillerons donc pas ce cas.

<u>Pour le SCR risque de souscription :</u>

D'après le modèle standard, le risque de souscription vie regroupe normalement les risques suivants :

- Risque de mortalité
- Risque de longévité
- Risque d'incapacité/ morbidité

[8] BOF (basic own fund) = Actif – Passif hors dettes subordonnées et marge de risque

- Risque de rachat
- Risque de dépense
- Risque de révision
- Risque catastrophe

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous limiterons au SCR Vie composé uniquement du SCR rachat et du SCR mortalité.

SCR mortalité : Le besoin en capital $Life_{mort}$ correspond à l'impact sur l'actif net qu'aurait un choc à la hausse de 50% des taux de mortalité pour chaque âge et chaque police.

$$\Delta BOF = Basic\ Own\ Funds - Basic\ Own\ Funds\ Choqué$$

$$Life_{mort} = (\Delta BOF | choc\ mortalité)$$

SCR de rachat : Le risque rachat est le risque de perte, ou de changement défavorable de la valeur des engagements d'assurance, résultant de fluctuations affectant le niveau ou la volatilité des taux de cessation, d'échéance, de renouvellement et de rachat des polices.

$$Life_{lapse} = \max(Life_{up}\ ; Life_{down}\ ; Life_{mass})$$

$Life_{up} = \left(\Delta BOF \middle| lapseshock_{up}\right)$ correspond à la variation du BOF suite à un choc à la hausse de 50% sur le taux de rachat. Le taux de rachat étant inférieur à 100%

$Life_{down} = (\Delta BOF | lapseshock_{down})$ correspond à la variation du BOF suite à un choc à la baisse de 50% sur le taux de rachat. La variation induite du taux de rachat ne devant pas excéder 20%

$$Life_{mass} = \begin{cases} (\Delta BOF | lapseshock_{mass\ retail})\ , choc\ de\ 40\%\ pour\ les\ contrats\ retail \\ (\Delta BOF | lapseshock_{mass\ non-retail})\ , choc\ de\ 70\%\ pour\ les\ contrats\ non\ retail \end{cases}$$

Pour obtenir le SCR risque de souscription vie, on tient compte de la corrélation entre le risque décès et le risque de rachat. Dans les spécifications techniques, cette corrélation est nulle. Le SCR risque de souscription est alors donné par :

$$SCR_{life} = \sqrt{{Life_{mort}}^2 + {Life_{lapse}}^2}$$

2.3.6 RM

La marge pour risque (RM=Risk Margin en anglais) correspond à l'élément ajouté à la meilleure estimation des provisions pour établir les provisions techniques lorsque celles-ci ne sont pas calculées comme un tout (cas peu fréquent où un actif peut répliquer les flux de passif).

Cette marge pour risque est calculée « de manière à garantir que la valeur des provisions techniques soit équivalente au montant que les entreprises d'assurance et de réassurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance. » (Directive 2009/138/CE)

La méthode retenue pour l'évaluation de la marge pour risque dans les spécifications techniques (TP.5.1) correspond à l'estimation par le coût du capital, soit :

$$RM = coc * \sum_{t>0} \frac{SCR(t)}{(1 + r_{t+1})^{t+1}}$$

Figure 55 : Risk Margin

Avec :

- coc , le taux du coût du capital défini à 6%
- SCR(t) : le capital de solvabilité requis après t années
- r_{t+1} : le taux d'intérêt sans risque de maturité t+1

La formule de calcul fait référence aux **capitaux de solvabilité futurs**, difficilement calculables sans approximations. A cet effet, l'EIOPA a proposé plusieurs niveaux d'approximation pour le calcul de la marge pour risque :

- Méthode 1 : Calcul exhaustif des SCR futurs sans approximation
- Méthode 2 : Approximation des charges de capital pour certains modules de risque
- Méthode 3 : Approximation du SCR par une approche proportionnelle (au prorata des provisions techniques notamment)

Sous cette hypothèse, les SCR futurs se calculent de la façon suivante :

  - $SCR(t) = \frac{SCR(0)}{BE_{net}(0)} * BE_{net}(t)$ et avec :
    - SCR(t) : le capital de solvabilité requis après t années
    - $BE_{net}(t)$: Best Estimate net de réassurance en date de t

- Méthode 4 : Estimation de tous les SCR futurs actualisés à partir d'une approche basée sur la duration des engagements

  - $RM = \left(\frac{coc}{1+r_1}\right) * Duration_{modifiée}(0) * SCR(0)$ et avec :
    - SCR(0) : le capital de solvabilité requis à la date t =0
    - coc le taux du coût du capital défini à 6%
    - $\mathrm{Duration}_{\mathrm{modifiée}}(0) = \frac{\sum_t \frac{tF_t}{(1+r_t)^t}}{(1+r_a)*\sum_t \frac{F_t}{(1+r_t)^t}}$ correspond à la duration du passif
- Méthode 5 : Détermination de la marge de risque par un pourcentage de la meilleure estimation. Cette méthode n'est toutefois recommandée que si l'activité de l'assureur se limite à une seule branche.
- $RM = \alpha_{lob} * BE_{net}(0)$et avec :
  - α_{lob} : Pourcentage fixe par branche d'activité
  - $BE_{net}(0)$: Best Estimate net de réassurance en date t = 0

Remarque : A l'instar de plusieurs assureurs vie en France, nous utilisons la méthode 4 pour estimer le RM. Elle sera donc calculée sur la base d'un coût d'immobilisation du capital pour une entreprise de référence, qui porterait exactement les mêmes risques **à l'exception du risque de marché.**

2.4 Modèle ALM complexifié modifié

L'idée de ce modèle est de montrer de plus grandes variations de BE et SCR qu'avec le modèle précédent.

Pour ce faire nous avons procédés aux changements suivants :

- Nouvelle allocation d'actifs 75% d'obligations, 20% d'actions et 5% de trésorerie
- Réserve de capitalisation enlevée des calculs (notamment pour le rendement de l'actif)
- Banqueroute topée dans le modèle (cela sert notamment dans le calcul du SCR actions)
- Nouveau calcul de SCR (prenant en compte la banqueroute)
- Ajout des dividendes de l'action (elles suivent le taux des coupons)

Toutes les autres hypothèses du modèle ALM complexifié ont été reprises.

PARTIE QUANTITATIVE

Pour rappel : Le but du mémoire est de montrer l'influence du générateur de scénario économique dans le calcul des exigences quantitatives d'un contrat d'assurance vie mono support euro (pilier 1 Solvabilité 2).

Ainsi nous détaillerons, dans premier temps, la partie exigences quantitatives dite « pilier 1 » de solvabilité 2. Nous étudierons en particulier le calcul du BE et du SCR d'un contrat euro mono support en faisant :

- Un rappel sur les caractéristiques d'un contrat d'épargne en euros
- Plusieurs modélisations de l'actif (Actions et Obligations) de la compagnie d'assurance
- La calibration des modèles étudiés
- L'élaboration de deux modèles ALM
- La projection des flux via les modèles ALM pour avoir le calcul des Best Estimates
- Le choc des bilans pour avoir les SCRs et RMs (Risk Margin) associés

Nous ferons les études quantitatives via 2 modélisations distinctes du passif. La première modélisation sera dite « simplifiée » et ne prendra pas en compte les décès/rachats. La deuxième modélisation prendra, entre autres, décès/rachats et sera dite « complexifiée ». La troisième modèlisation reprendra en grande partie les hypothèses de la deuxième mais changera la répartition d'action et incorporera des dividendes, elle sera dite « complexifiée modifiée ».

Résumé des hypothèses de modélisation du mémoire

Résumé des hypothèses :

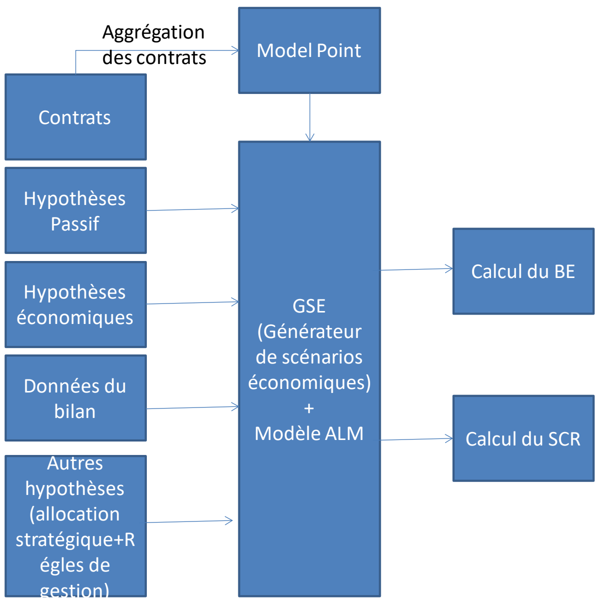


Figure 56 : Premières hypothèses de modélisation

Quelques remarques :

GSE : Le Générateur de scénarios économiques est en général une solution de marché de type Moody's RiskIntegrity. Ce type de progiciel nous permet de choisir les modèles à utiliser et ensuite de les calibrer.

Model Point : Le model point est un aggrégat de contrats. En effet, une projection de 100 000 contrats peut prendre énormément de temps et de ressources alors que la projection d'un contrat père avec des caractéristiques représentatives (Pour des contrats d'assurance vie : âge, taux etc..)

Autres hypothèses : Hypothèses de rachat et de mortalité.

Hypothèses réglementaires et usuels : En général on projette les contrats d'assurances vie à 30 ans mais ici nous projetterons à 10 ans.

A la fin des projections, la provision mathématique ne doit pas être trop élevée (attention aux hypothèses de taux d'actualisation et rachats/mortalités pas élevés).

Hypothèses économiques : courbe de taux + GSE
Un paragraphe plus bas sera consacré aux taux négatifs (possible sous le modèle de Vasicek).

Hypothèse Bilan : Niveau de la PPE initiale et de la PRE initiale (non pris en compte dans ce mémoire)

Hypothèse ALM : Management rules (ex TMG=0,5%, TFGSE=0,7% etc..) particulièrement vrai dans le cadre de notre deuxième modèle dit « complexifié »

3 MODELISATION DES ACTIFS

La modélisation des actifs est commune pour les deux modèles ALM

3.1 Actions

3.1.1 Données en entrée

Pour le calibrage des modèles d'action, l'objectif est de s'appuyer sur les calls et les puts présents sur le marché. Nous avons pris les valeurs des calls et des puts du CAC40 données par le site internet : euronext.com. Ces données ont été prises le 31 décembre 2011.

Les données récupérées sur le site se composent de :

Type	Cours CAC40	Strike	date	Nb jour avant échéance	Prix
Call	3159,81	3050	21/01/2012	21	113
Call	3159,81	3100	21/01/2012	21	66
Call	3159,81	3150	21/01/2012	21	31
Call	3159,81	3200	21/01/2012	21	13
Call	3159,81	3250	21/01/2012	21	4
Call	3159,81	3300	21/01/2012	21	1
Put	3159,81	3000	21/01/2012	21	12
Put	3159,81	3050	21/01/2012	21	22
Put	3159,81	3100	21/01/2012	21	37

Put	3159,81	3150	21/01/2012	21	60
Put	3159,81	3200	21/01/2012	21	92
Call	3159,81	2900	25/02/2012	56	267
Call	3159,81	3000	25/02/2012	56	168
Call	3159,81	3100	25/02/2012	56	80
Call	3159,81	3200	25/02/2012	56	30
Call	3159,81	3300	25/02/2012	56	8
Put	3159,81	2800	25/02/2012	56	10
Put	3159,81	2900	25/02/2012	56	21
Put	3159,81	3000	25/02/2012	56	42
Put	3159,81	3100	25/02/2012	56	77

3.1.2 Modèles et Calibrage

Outils pour la calibration

Fonctions de pricing
Le pricing permet d'obtenir le prix des produits dérivés par le biais d'une formule fermée. Pour nos modèles de taux, les fonctions de pricing du cap et des swaptions nous intéresseront , quant aux modèles d'action , ce seront celles des calls et des puts. (Retour Synthèse)

Fonctions de pricing du call
C'est une formule fermée très répandue qui permet d'obtenir le prix d'un call selon la dynamique de Black-Scholes :

$$C\ BS = St * N(d1) - K * e^{-r(T-t)} * N(d2)$$

Figure 57 : Call BS

Avec :

- $d1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}[\ln\frac{St}{K} + T(r + \frac{\sigma^2}{2})$
- $d2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}[\ln\frac{St}{K} - T(r - \frac{\sigma^2}{2})$
- *N*(.) est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Pour utiliser le pricing du call au sein du calibrage propre à Merton, nous exprimons le pricing de Merton en fonction de celui de Black-Scholes par l'équation suivante :

$$C\ Merton = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda(T-t))^i e^{-\lambda(T-t)}}{i!} C_i\ BS$$

Figure 58 : Call Merton

Avec

- $C_i\ BS = C\ BS\ (ri, \sigma i)$
- $ri = r - \lambda k + i\ln(1+k)\ /(T-t)$ et $\sigma i = \sqrt{\sigma^2 + i{\sigma_u}^2/(T-t))}$

Fonctions de pricing des puts
Pour l'option de vente, le formule fermée est telle que :
$P\ BS = -St * N(-d1) + K * e^{-r(T-t)} * N(-d2)$
Figure 59 : Put BS

Avec :

- $d1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}[\ln\frac{St}{K} + T(r + \frac{\sigma^2}{2})$
- $d2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}[\ln\frac{St}{K} - T(r - \frac{\sigma^2}{2})$
- *N*(.) est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Analytiquement, nous obtenons le pricing de l'option de Put de Merton en reprenant la formule Figure 58 en remplaçant la formule du Call de Black-Scholes par la formule des Puts de Black-Scholes.

Volatilité implicite de Black-Scholes

La pratique du marché est d'exprimer le prix des actifs selon la volatilité implicite de Black-Scholes. Cette cotation en volatilité implicite fait suite à la diffusion dans une large mesure du modèle de Black-Scholes. Le concept est le suivant : plus on est à la monnaie, plus la volatilité est basse, et plus on s'en éloigne, plus elle est élevée, c'est ce qu'on appelle le *smile de volatilité*. Cette vision tend à sous-estimer le prix des options hors de la monnaie.

Néanmoins, comme nous l'avons dit précédemment, nous devons convertir la volatilité en euros, afin de pouvoir comparer les valeurs que l'on obtient avec nos formules fermées.

3.1.3 Résultats et conclusions

Après avoir calibré nos modèles, nous trouvons les résultats suivants (cf annexe « 3 Codes R » pour le code source) :

Modèle de Black-Scholes	r0=Mu	Sigma
Valeur paramètre	0.0156497	0.1488495

Modèle de Merton	r0=Mu	sigma_Mer	sigmaU_Mer	lambda_Mer
Valeur paramètre	0.0156497	0.7999992	0.5100000	0.8000000

3.1.4 Calcul des instruments financiers d'actions

Valeur des actions pour modèle de Black & Scholes:

Année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur action BS	100	101,5889	103,2583	104,9647	106,6338	108,2404	109,9359	111,6425	113,3812	115,122	116,8888

Figure 60 : Valeur BS Scénario central

Graphique avec 100 scénarios pour le modèle action de Black & Scholes sous R :

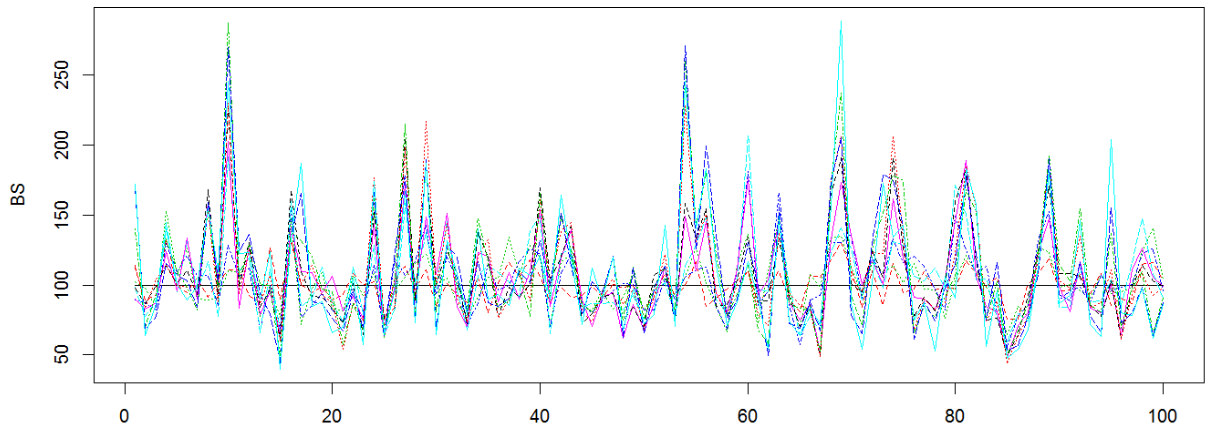


Figure 61: Evolution de l'action à travers 100 scénarios sous R

Graphique avec 1 000 scénarios pour le modèle action de Black Scholes sous R :

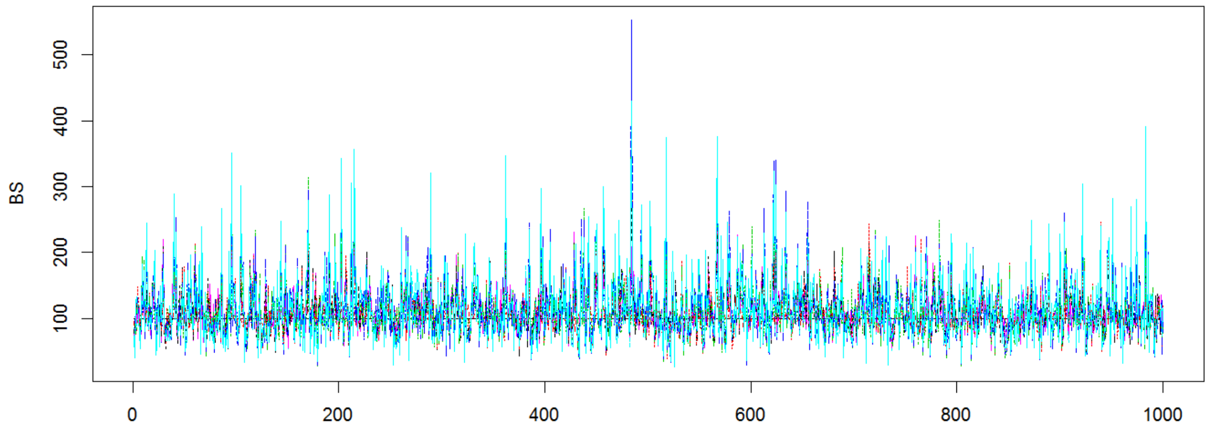


Figure 62 : Evolution de l'action à travers 1000 scénarios sous R

Graphique avec 10 000 scénarios pour le modèle action de Black Scholes sous R :

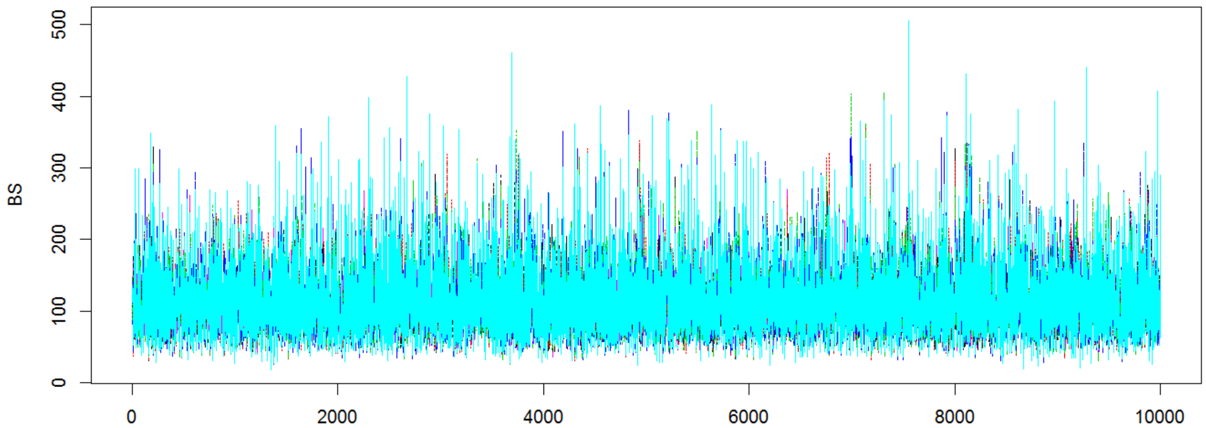


Figure 63: Evolution de l'action à travers 10000 scénarios sous R

Valeur des actions pour modèle de Merton :

Année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur action Merton	100	101,7248	103,4361	105,16	107,0895	108,7568	110,8208	112,0917	114,2023	115,3576	116,7454

Figure 64 : Valeur de l'action sous le modèle de Merton

3.2 Taux

3.2.1 Données en entrée

Comme défini dans la section précédente, l'usage de données observables sur le marché est nécessaire au calibrage en univers risque-neutre. Nous nous sommes appuyés sur plusieurs données réelles du marché.

Tout d'abord, nous avons obtenu les taux zéro-coupon de maturité T , T qui varie de 6 mois à 10 ans, avec un pas de 6 mois (d'après les courbes de taux de CNO France). Ces données sont prises au 31 décembre 2011.Dans un premier temps, ces données nous ont permis de reconstruire une courbe des taux du marché grâce à un système d'interpolation par splines cubiques (pour fabriquer les pas de 6 mois).

Maturité	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
Taux ZC Dec 2011	0,01499844	0,01422	0,01349463	0,01309	0,01323667	0,0138	0,01458117	0,01549	0,01646738	0,01747

Maturité	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10
Taux ZC Dec 2011	0,0184593	0,0194	0,02026293	0,02104	0,02173275	0,02236	0,02294107	0,02348	0,02398047	0,02446

Nous avons aussi obtenu des prix exprimés sous forme de volatilités des caps pour des maturités allant de 1 à 10 ans, à un pas annuel. Une des étapes que nous avons dû prendre en compte lors du calibrage des modèles fut de convertir les prix du marché, exprimés sous forme de volatilités, afin de pouvoir les comparer avec les prix obtenus avec les formules fermées de nos modèles.

Ces données, prises en fin d'année 2011, nous ont permis de calibrer les modèles de taux .

Maturité	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prix Caps	0.531	0.603	0.501	0.467	0.423	0.39	0.366	0.349	0.335	0.323

3.2.2 Modèles et calibrage

Fonction de princing du Cap
Dans la pratique du marché, on calcule les prix des caps avec la formule de **Black** (au temps t=0)

$$Cap\ Black\ (0,T,\theta,N,K,\sigma_{\alpha,\beta}) = N * \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0,Ti) * \theta i * BL(K,F(0,Ti-1,Ti),vi,1)$$

Figure 65 : Cap Black

Avec

$$\begin{cases} BL(K,F,v,\omega) = F * \omega * \Phi(\omega * d1(K,K,v)) - K * \omega * \phi(w * d2(K,F,v)) \\ d1(K,F,v) = \dfrac{\log\left(\frac{F}{K}\right) + \sigma^2/2\sigma}{v} \\ d2(K,F,v) = \dfrac{\log\left(\frac{F}{K}\right) - \frac{\sigma^2}{2\sigma}}{v} \\ vi = \sigma_{\alpha,\beta*\sqrt{Ti-1}} \end{cases}$$

Figure 66 : Paramétre Cap Black

où

- ϕ est la fonction de répartition de la loi Gaussienne standard.
- $P(0, Ti)$ est le prix du zéro-coupon aujourd'hui pour la maturité Ti
- $\sigma_{\alpha,\beta}$ est la volatilité implicite
- N est le nominal
- θ_i est la fraction d'année entre $Ti{-}1$ et Ti

De la formule précédente, nous avons besoin du strike K pour pricer notre cap. Pour cela, nous allons supposer que notre actif est ATM c'est-à dire At the money ; le cours de l'actif sous-jacent est égal au prix d'exercice K.

En effet, considérons un cap avec des délais de paiement T_+1, ..., $T\_$ et un strike K.

Le cap est dit à la monnaie (At The Monney) si le strike est égal au cours du marché ; ie si et seulement si

$$K = K\ ATM = S_{\alpha,\beta} = \frac{P(0,T_\alpha)-P(0,T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta}(\theta_i * P(0,T_i))}$$

Figure 67 : Strike ATM

Le cap peut aussi être **In The Money** si $K < KATM$ ou **Out of The Money** si $K > KATM$

Fonction de pricing des Swaptions :

Selon les conditions prévues dans le contrat optionnel, on peut contracter :

- Un Call Swaption, qui est équivalent à une swaption payeuse. Si l'acheteur exerce son option, il paye un taux fixe au lieu d'un taux variable.
- Un Put Swaption, qui correspond à une swaption receveuse. Dans le cas où l'option est exercée, le vendeur reçoit du taux variable et paye au taux fixe.

Comme pour le pricing des caps, la pratique du marché dans le calcul des swaptions est l'utilisation de la formule de **Black-Like** suivante pour une swaption payeuse(t=0) :

$$PS\ Black = N * BL\left(K, S_{\alpha,\beta}(0), \sigma_{\alpha,\beta} * \sqrt{T_\alpha}, 1\right) * \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (P(0,Ti) * \theta i)$$

Figure 68 : PS Black

De la même façon, nous cherchons à déterminer le strike de notre produit dérivé, afin de se trouver à la monnaie.
Considérons une swaption payeuse avec strike K qui donne le droit au détenteur d'entrer dans le swap en $T\_$ avec des délais de paiement T_+1, ..., $T\_$.

On dit qu'elle est à la monnaie si et seulement si

$$K = K\ ATM = S_{\alpha,\beta} = \frac{P(0,T_\alpha) - P(0,T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta}(\theta_i * P(0,T_i))}$$

Figure 69 : Strike ATM Put

Comme dans le cas des caps, on peut ainsi déterminer notre strike. De plus, on peut noter que la différence entre une swaption payeuse et receveuse correspondante est équivalent à un taux forward start.

3.2.3 Résultats et conclusions

Après avoir calibré nos modèles, nous trouvons les résultats suivants :

Modèle de Black-Scholes	r0=Mu	Sigma
Valeur paramètre	0.0156497	0.1488495

Modèle de Merton	r0=Mu	Sigma_Mer	Gamma_Mer	SigmaU_Mer	Lambda_Mer
Valeur paramètre	0.0156497	0.7999992	0.0020000	0.5100000	0.8000000

Modèle de Vasicek	K	Theta	Sigma
Valeur paramètre	1	0.03420029	0.18493042

Modèle de Hullwhite	A	Sigma
Valeur paramètre	0.007352448	0.008523560

Modèle CIR++	K	Theta	Sigma	x0
Valeur paramètre	0.36225510	0.58636093	0.02808635	0.01559235

Figure 70 : Paramètres de la calibration

Ces paramètres en cohérence avec la réalité du marché sont qualifiés de paramètres risque-neutre. Pour plus de détail sur la méthodologie de calibrage, il conviendra de regarder les annexes « 10 Méthodologie de calibrage de ces modèles» et « 3 Codes R » (paragraphe calibration)

Une fois ces paramètres risque-neutre obtenus, nous les entrons en input des modèles que nous avons implémenté. Nous obtenons une projection du taux Zéro-Coupon et une évolution du prix des actions cohérente avec la réalité du marché.

On observe cependant que la projection du prix des actions avec le modèle de Merton est assez peu précise car elle change régulièrement. Afin de remédier à ce problème, nous allons utiliser la méthode de Monte Carlo afin de pouvoir avoir une projection assez stable.

3.2.4 Calcul des instruments financier de taux

Valeur des taux zéro coupons à t=0 et T=1 à 10 :

Année	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zero coupon Vas	0,01959979	0,01966948	0,01921431	0,01880444	0,01849942	0,01827735	0,01811275	0,01798736	0,01788921	0,01781047
Zero coupon HW	0,01411984	0,01300507	0,01370565	0,01537125	0,01731915	0,01921422	0,02082172	0,02211368	0,02320859	0,02416564
Zero coupon CIR+	0,01411984	0,01300507	0,01370565	0,01537125	0,01731915	0,01921422	0,02082172	0,02211368	0,02320859	0,02416564

Figure 71 : Taux instantané Zéro coupons sous différents modèles

Si on compare avec le taux zéro coupon marché donnée par le CNO, on voit que les modèles Hull White et CIR++ recréent bien la courbe originale :

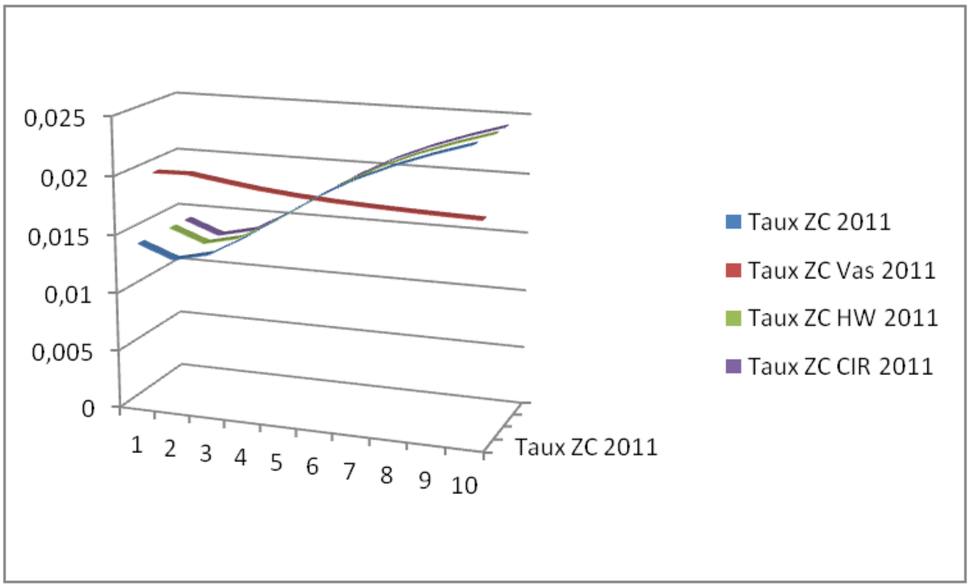


Figure 72 : Graphique évolution des taux zéro coupons modélisé vs Zéro coupon marché

Valeur des taux zéro coupons à l'instant (t-1) de maturité t (pour les coupons variables) :

Année	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zero coupon Vas i	0,01959979	0,0268652	0,02987363	0,0307282	0,03145459	0,0314867	0,03121073	0,03102843	0,03115913	0,03157733
Zero coupon HW i	0,01411984	0,01209774	0,01551547	0,02111376	0,02608003	0,03024276	0,03231134	0,03361718	0,03519694	0,03655087
Zero coupon CIR++ i	0,01411984	0,0118171	0,01523571	0,02065456	0,02563481	0,02942748	0,03144107	0,03225476	0,03341382	0,0340862

Figure 73: Taux forward Zéro coupons sous différents modèles

3.3 Les tests du GSE

Validation des scénarios générés : Afin de valider les résultats, de nombreux tests sont réalisables. Nous vous proposons dans les paragraphes suivant de faire les tests les plus utilisés. (Retour Synthèse)

3.3.1 Tests de Martingalité

On va vérifier le caractère martingale des éléments calculés (sur les prix des actions).

Regardons le rendement moyen des actions via notre modèle de Black Scholes avec notre calibrage pour 10 000 scénarios et sur une projection de 30 ans :

Borne inférieure	moy	Borne supérieure	Si/Si-1
100	100	100	
101,6074	101,764	101,9205	1,01764
103,1413	103,3681	103,5948	1,015762942
104,7636	105,048	105,3324	1,016251629
106,2501	106,5844	106,9188	1,014625695
107,7658	108,1466	108,5275	1,014656929
109,4952	109,9216	110,3479	1,016412906

Borne inférieure	moy	Borne supérieure	Si/Si-1
109,4952	109,9216	110,3479	1,016412906
110,9878	111,4559	111,9239	1,01395813
112,6219	113,1298	113,6378	1,015018496
114,2444	114,7921	115,3397	1,014693741
115,9627	116,5523	117,1418	1,015333808
117,7803	118,41	119,0396	1,015938767
119,6696	120,3415	121,0134	1,016311967
121,3621	122,0744	122,7866	1,014399854
123,3073	124,0642	124,8211	1,016299896
124,8909	125,6838	126,4767	1,013054531
127,0342	127,8714	128,7085	1,017405584
129,2328	130,1183	131,0037	1,01757156
131,5239	132,4614	133,3988	1,018007459
133,7432	134,7313	135,7193	1,017136313
135,6696	136,6979	137,7262	1,01459646
137,835	138,9118	139,9886	1,016195567
139,9551	141,0787	142,2023	1,015599107
142,0525	143,2219	144,3912	1,015191521
144,0134	145,2273	146,4413	1,014002049
146,2305	147,4929	148,7552	1,015600373
148,2966	149,6107	150,9249	1,014358657
150,579	151,9435	153,3081	1,015592468
153,0786	154,5084	155,9381	1,016880617
155,3396	156,8187	158,2977	1,014952585
157,9061	159,4507	160,9953	1,016783713

Figure 74 : Tableau test de martingalité

D'où :

Taux de rendement moyen	0,015674444
Taux de rendement sans risque calibré	0,01565414

Figure 75 : Rendement moyen d'action BS du modèle vs rendement moyen du marché

Le taux de rendement moyen est très proche de celui trouvé en calibration (et donc paramétré dans le modèle). Le test est donc réussi

3.3.2 Convergence des prix Monte-Carlo et formule Fermée des modèles utilisés

A travers ce test, nous allons regarder quel est le nombre suffisant de scénarios générés pour avoir une bonne convergence avec un niveau d'incertitude réduit.

Convergence du modèle Action Black Scholes (avec notre calibrage mais projection sur 30 ans)

Nombre de simulations	Projection de l'action sur 30 ans (S0=100)
1	321.43744
100	149.87662
1 000	168.0846
2 000	157.5043
10 000	159.8459
20 000	159.8696
30 000	159.8088
100 000	159.3803
1 000 000	159.9990
1 500 000	159.8384

La convergence semble se faire vers 10 000 scénarios nous prendrons donc cela.

Convergence du modèle taux Hull White cas du Zéro coupon forward à t=1 pour T=30 avec notre calibrage

Nombre de simulations	Taux ZC selon Hull White (ZC 1:30)
1	0.04371003
100	0.04370696
1 000	0.04370597
10 000	0.04370599
30 000	0.04370593
100 000	0.04370595
1 000 000	0.04370593

Figure 76 : Convergence des action et taux Zéro coupons

La convergence à la 7ieme décimale semble se faire vers 10 000 scénarios

3.3.3 Market consistenty

Une approche Market-Consistent dite « en valeur de marché » revient à déterminer la valeur des flux en se basant sur les valeurs des actifs et des passifs observées sur le marché.

L'intérêt de cette approche est d'être cohérente avec les prix en vigueur sur le marché et prend donc implicitement en compte le risque de marché.

La norme Solvabilité 2 impose une valorisation en valeur de marché des engagements de l'assureur.

Avec notre GSE calibré nous avons généré 100, 10000 et 30000 scénarios de prix de sous-jacent via le modèle de Black scholes.

Nous allons pouvoir ainsi calculé des prix de puts via ses scénarios à chaque fois et donc trouvé le prix de puts moyen.

Exemple avec S=100, K=100, Sigma=15%, T=1, r=4% pour 20 scénarios

Scenario	Initial Stock Price	Year Stock Price	Option Payoff	Value Put Option Payoff
1	100	85,44650946	14,55349054	13,99374091
2	100	101,2687941	0	0
3	100	84,397738	15,602262	15,002175
4	100	96,30534222	3,694657784	3,552555561
5	100	79,94035895	20,05964105	19,28811639
6	100	112,2106761	0	0

Scenario	Initial Stock Price	Year Stock Price	Option Payoff	Value Put Option Payoff
7	100	82,0489334	17,9510666	17,26064096
8	100	120,0263053	0	0
9	100	106,8584923	0	0
10	100	87,59470495	12,40529505	11,92816832
11	100	88,71421519	11,28578481	10,85171616
12	100	105,2195343	0	0
13	100	99,42903841	0,570961587	0,549001526
14	100	96,21480834	3,785191656	3,639607362
15	100	117,9321506	0	0
16	100	101,6328028	0	0
17	100	104,3046569	0	0
18	100	104,8145931	0	0
19	100	89,10916526	10,89083474	10,47195648
20	100	115,0419766	0	0

Figure 77: Recalcul de la valeur du put BS

On trouve une valeur moyenne du put de 5,326= (13,9937409068659+0+ 15,002175+..)/20

Nous comparons alors avec le prix trouvé avec la formule fermée de Black Scholes et trouvons les résultats suivants :

Nb scénarios	Prix put via GSE Monte Carlo	Prix put BS	Ecart
20	5,326883933	4,107544	29,69%
100	4,687004091	4,107544	14,11%
10 000	4,151833902	4,107544	1,08%
30 000	4,097220906	4,107544	0,25%

Figure 78 : Récapitulatif des prix des puts BS

- Market consistency 2 : Cohérence entre les surfaces de volatilité de marché et les surfaces de volatilité générées par les modèles. Cette étape certifie le caractère « Market Consistent » des scénarios générés par le GSE.

Cas Black scholes :

La volatilité implicite : En utilisant les prix observés des options Court terme et en inversant la formule de Black-Scholes, on peut retrouver le paramètre σ. Ici, en général, on n'a pas une seule valeur de sigma, mais une courbe qui dépend du strike K, c'est le phénomène du "smile de volatilité".

La démonstration de la formule de la volatilité de Black Scholes se trouve en annexe.

En pratique, pour calculer la volatilité implicite, on ne se sert pas de la formule de la volatilité de Black Scholes trop compliquée à mettre en place mais on utilise une résolution numérique (cf code R en annexe « 11 Test du GSE ».

On trouve alors le tableau suivant :

Type	Cours CAC40	Strike	date	Nb jour avant	Prix	Nb jour avant échéance en a	Vol imp
Call	4443,63	4350	16/05/2014	21	91,1	0,057502738	NA
Call	4443,63	4400	16/05/2014	21	60,2	0,057502738	0,07265863
Call	4443,63	4450	16/05/2014	21	33,3	0,057502738	0,08107276
Call	4443,63	4500	16/05/2014	21	18,3	0,057502738	0,09122748
Call	4443,63	4550	16/05/2014	21	8,5	0,057502738	0,09482222
Call	4443,63	4600	16/05/2014	21	3,8	0,057502738	0,09917893
Put	4443,63	4300	16/05/2014	21	34	0,057502738	0,2128804
Put	4443,63	4350	16/05/2014	21	48,5	0,057502738	0,2114624
Put	4443,63	4400	16/05/2014	21	67,8	0,057502738	0,2119241
Put	4443,63	4450	16/05/2014	21	94,6	0,057502738	0,2197224
Put	4443,63	4500	16/05/2014	21	128,8	0,057502738	0,235031
Call	4443,63	4200	20/06/2014	56	215,1	0,153340635	NA
Call	4443,63	4300	20/06/2014	56	142,7	0,153340635	NA
Call	4443,63	4400	20/06/2014	56	83,9	0,153340635	0,07597396
Call	4443,63	4500	20/06/2014	56	41,8	0,153340635	0,08877707
Call	4443,63	4600	20/06/2014	56	16,8	0,153340635	0,09255533
Put	4443,63	4100	20/06/2014	56	36,6	0,153340635	0,2287879
Put	4443,63	4200	20/06/2014	56	55,6	0,153340635	0,2217109
Put	4443,63	4300	20/06/2014	56	84,3	0,153340635	0,2181761
Put	4443,63	4400	20/06/2014	56	126,3	0,153340635	0,2201633

Figure 79 : Calcul de la volatilité implicite

Graphiquement, nous retrouvons le smile de volatilité suivant pour les puts arrivant à échéance dans 21 jours :

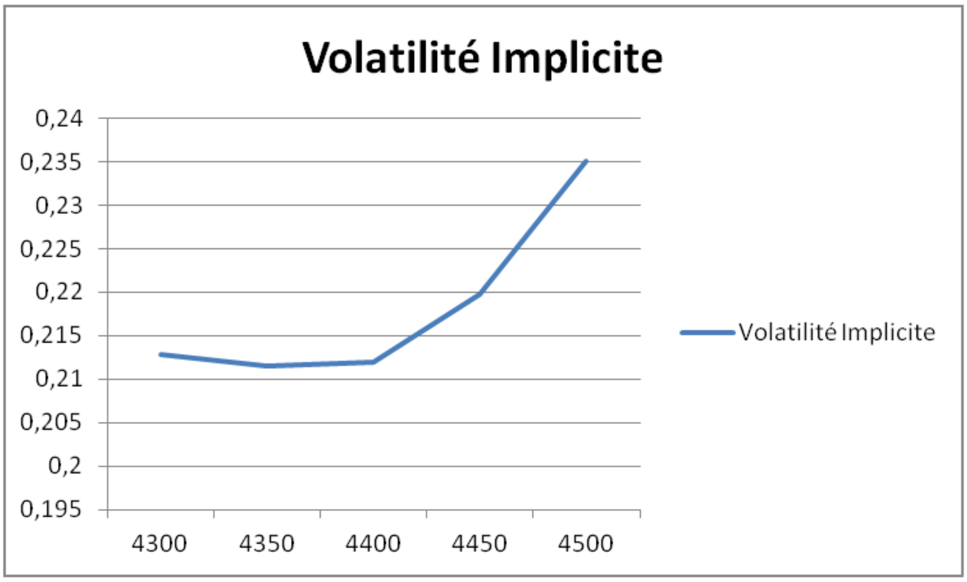


Figure 80 : Smile de volatilité

Enfin, lorsque l'on fait la moyenne de ces volatilités implicites court terme, nous trouvons les résultats suivants :

Volatilité implicite moyenne	0,15741911
Volatilité calibrée	0,13496017

Figure 81: Comparaison de volatilité

Soit une différence de 14% entre la volatilité implicite moyenne et la volatilité calibrée

4 MODELISATION DU PASSIF (MODELE ALM SIMPLIFIE)

4.1 Calcul des BE

4.1.1 Résultats et conclusion

Il va y avoir 6 scénarios possibles pour les calculs du BE.

Nous détaillerons chaque couple (modèle action, modèle obligation) pour expliciter le scénario et faire une étude d'impact sur les modèles utilisés.

Remarque les données sont issues de notre algorithme sous R :

Couple Black Scholes - Vasicek

Best_Estimate
1 482 953 038,00

Figure 82 : BE du modèle Vasicek – Black Scholes

Couple Black Scholes – Hull White

Best_Estimate
1 373 767 521,00

Figure 83 : BE du modèle Hull White – Black Scholes

Couple Merton – Vasicek

Best_Estimate
1 475 840 054,00

Figure 84 : BE du modèle Vasicek– Merton

Couple Merton – Hull White

Best_Estimate
1 366 963 758,00

Figure 85 : BE du modèle Hull White– Merton

Couple Black Scholes – CIR++

Best_Estimate
1 367 149 164,00

Figure 86 : BE du modèle CIR++– Black Scholes

Couple Merton – CIR++

Best_Estimate
1 360 345 401,00

Figure 87 : BE du modèle CIR++– Merton

On remarque que le choix des modèles action n'influe par énormément sur le calcul des BE. C'est assez normal car la projection des actions suivants Merton et Black Scholes donne des résultats similaires d'une part et d'autre part l'investissement d'action est minoritaire dans notre actif (30%d'action contre 70% d'obligation). Par contre la modélisation des obligations via un modèle de taux Vasicek a une vraie influence sur le BE car les taux Vasicek sont assez éloignés du marché et sur pondèrent les taux courts.

Comparaison des BE par rapport au BE Black Scholes - Vasicek	**BE Black Scholes – Vasicek**	**BE Black Scholes - Hull White**	**BE Merton-Vasicek**	**BE Merton - Hull White**	**BE Black Scholes - CIR++**	**BE Merton - CIR++**
Valeur du BE	1 482 953 038	1 373 789 161	1 475 840 054	1 366 963 758	1 367 149 164	1 360 345 401
Valeur en % du BE Black Scholes – Vasicek	100,0%	92,6%	99,5%	92,2%	92,2%	91,7%

Figure 88: Comparaison des BE

4.1.2 Test

Pour calculer la provision Best Estimate, nous générons 10 000 scénarios possibles de l'actif. Pour chaque scénario, nous déterminons les flux futurs à verser par l'assureur, actualisés avec la courbe des taux zéro-coupon du CEIOPS. Puis nous calculons, pour chacune de ces 10 000 simulations, la somme de ces flux futurs. La provision best Estimate est égale à la moyenne de tous ses scénarios.

Les provisions Best Estimate pour le couple « Hull White-Black Scholes » dans le cadre de nos hypothèses sont de :

Nombre de simulations	**Montant de la provision best Estimate en euros**
1,00	1 277 553 769,00
10,00	1 373 180 927,00
1 000	1 369 928 132,00
10 000	1 373 789 161,00
100 000	1 373 767 521,00
1 000 000	1 373 573 007,00
10 000 000	1 373 542 537,00

Figure 89 : Calcul du BE en function du nombre de simulation des actifs

A partir de 10 000 simulations le BE semble converger, nous avons donc pris ce chiffre pour nos calculs de BE.

Remarque : Nous utiliserons une méthode plus rigoureuse pour tester la convergence du BE dans le modèle complexifié. Un extrait de code R est disponible en annexe (Test des BE modèle simplifié)

4.2 Calcul des SCR

A partir de ces hypothèses voici les résultats qui en découlent pour les couples actions/obligations préalablement définis.

Pour le couple Vasicek Black Scholes :

SCR Vasicek - Black Scholes
118 673 622

Figure 90 : SCR Vas BS modèle simplifié

Pour le couple Hull White Black Scholes :

SCR Hull White - Black Scholes
116 750 970

Figure 91 : SCR HW BS modèle simplifié

Pour le couple CIR++ Black Scholes :

SCR CIR++ – Black Scholes
116 736 967

Figure 92 : SCR CIR++ BS modèle simplifié

Pour le couple Vasicek Merton :

SCR Vasicek – Merton
111 610 761

Figure 93 : SCR Vas Mer modèle simplifié

Pour le couple Hull White Merton :

SCR Hull White – Merton
115 525 713

Figure 94 : SCR HW Mer modèle simplifié

Pour le couple CIR++ Merton :

SCR CIR++ – Merton
116 878 760

Figure 95 : SCR Cir++ Mer modèle simplifié

Comparaison des SCR :

Comparaison des SCR par rapport au SCR Black Scholes - Vasicek	SCR Black Scholes – Vasicek	SCR Black Scholes - Hull White	SCR Black Scholes - CIR++	SCR Merton-Vasicek	SCR Merton Hull-White	SCR Merton-CIR++
Valeur en % du SCR Black Scholes – Vasicek	100,00%	98,38%	98,37%	94,05%	97,35%	98,49%

Figure 96 : Comparaison des SCR

Comme pour les BE, les valeurs des SCR sont homogènes. Toutefois les écarts constatés peuvent avoir des impacts significatifs sur la solvabilité d'un assureur.

Que ce soit pour la valeur BE ou le SCR, que le modèle de Vasicek engendre les plus grandes disparités. Cela peut en partie être expliqué par le fait que les modèles de Hull-White et CIR++ utilisent les prix du marché pour calculer les taux zéro-coupon ; contrairement à celui de Vasicek.

NB : Même si notre modèle simplifié est assez irréaliste, les SCRs trouvés sont de ~ 115 millions. Si on fait le ration SCR/Actifs on trouve 7% et ce ratio est en accord avec les ratios SCR/Actifs des compagnies d'assurance.

4.3 Limites du modèle simplifié

Maintenant que notre première étude touche à sa fin, il est temps de faire un bilan des limites du modèles ALM simplifié

Notre modèle ALM simplifié a de nombreuses limites :

- Non prise en compte de la mortalité et du rachat
- Gains retirés du portefeuille chaque fin d'année et redistribués aux assurés
- Prise en compte seulement du scénario central dans le calcul du BE
- Actif toujours positif (actions et obligations) car application uniquement du scénario central (ce qui inclut une sous-estimation du BE)
- Corrélation entre actifs non prise en compte par le GSE
- Modèle non éprouvé en cas de chute de taux (taux négatif non pris en compte par le modèle CIR++)

Afin de régler une majorité de ces limites, nous avons développé un modèle ALM plus réaliste dit « complexifié » que nous allons présenter dans le chapitre suivant.
Entre autres, ce modèle prendra en compte les risques de rachat/mortalité et les gains ne seront pas retirés chaque année

5 MODELISATION DU PASSIF (MODELE ALM COMPLEXIFIE)

Nous allons maintenant utiliser un modèle ALM plus réaliste. L'idée est de voir si nos premières conclusions sur l'influence du GSE dans les calculs réglementaires se confirment avec un modèle plus réaliste

5.1 Cas détaillé

5.1.1 Hypothèses des actifs

Les caractéristiques de l'obligation sont les suivantes :

- Maturité 10 ans
- Coupon variable indéxé sur les Zero coupon forward : pour l'année i, Ci = 0,75* ZC i i
- Nominal 100

Les caractéristiques de l'action sont les suivantes :

- Tracker CAC 40 (PX1)
- Pas de dividende

La trésorerie est rémunérée au taux zéro coupon chaque année

5.1.2 Résultats intermédiaires du modèle pour le scénario central pour le couple Hull White -Merton

Evolution de la PM :

- Evolution de la PM sur 10 ans en scenario centrale, couple Hull White – Merton (Retour Synthèse)

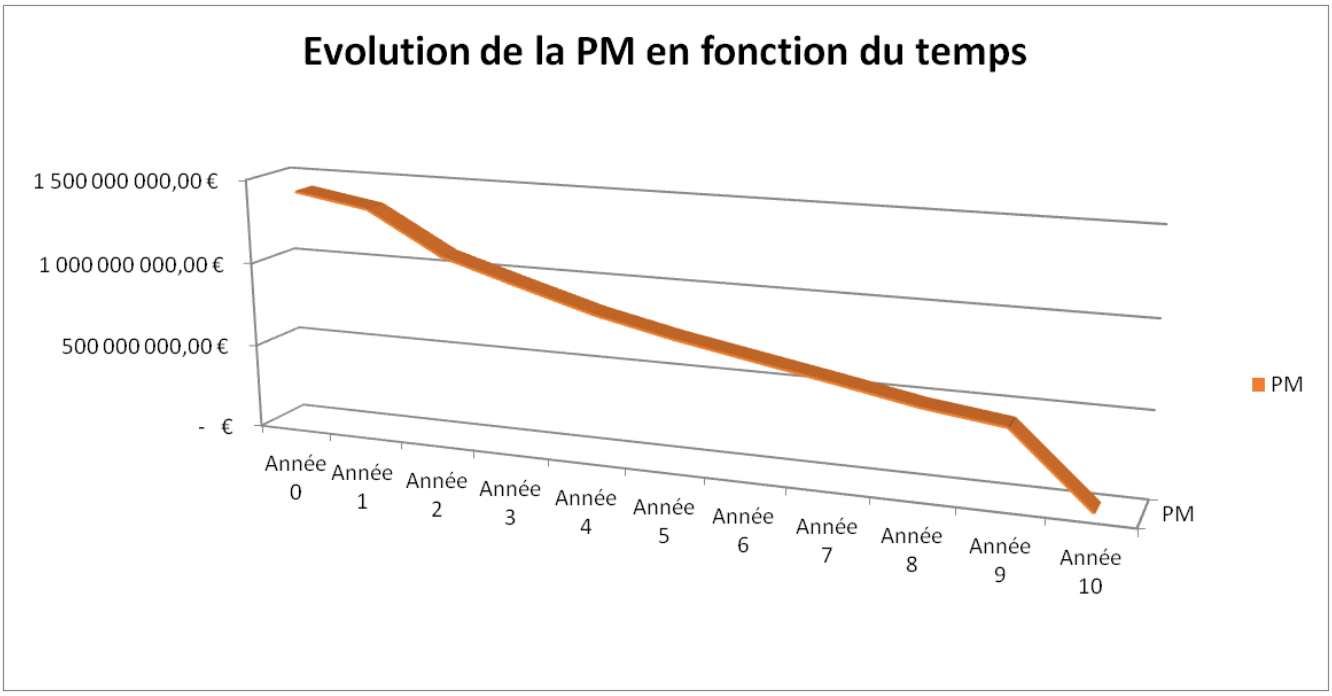
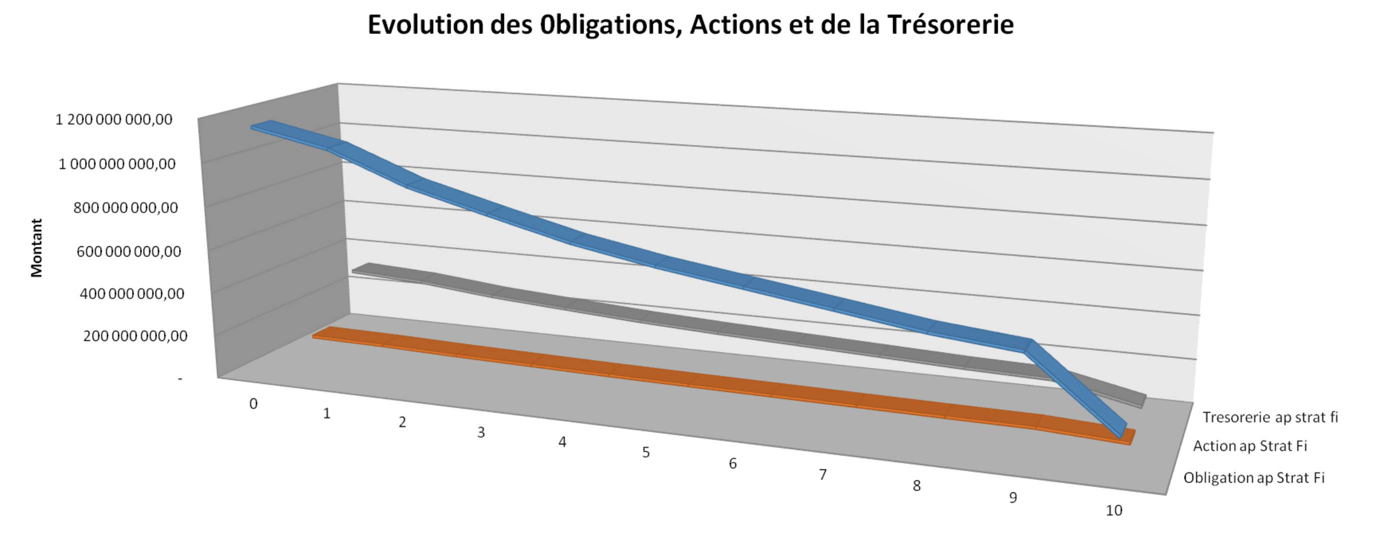


Figure 97: Evolution PM

Remarque : Malgré une table de rachat assez agressive, la PM est encore presqu'au tiers de sa valeur l'avant dernière année. Pour éviter ce décrochage, l'ACPR recommande souvent une projection qui permettent d'avoir une PM résiduelle faible (en pratique la projection se fait souvent sur 30 ans ou plus).

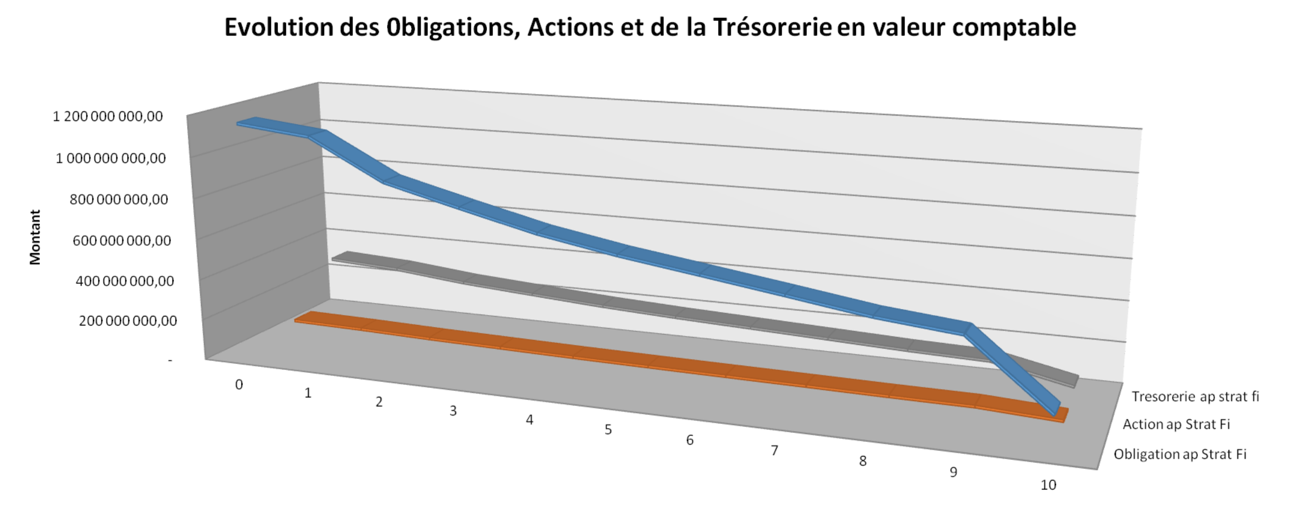
Evolution de la valeur marché et comptable des actifs

Evolution de la valeur de marché de l'actif :



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Obligation ap Strat Fi	1 154 926 716	1 079 821 157	939 817 187,0	843 893 673,1	751 860 921,8	682 283 990,8	625 843 693,6	569 436 362,5	511 954 100,3	474 039 157,8	168 147 327,3
Action ap Strat Fi	76 995 114,45	71 988 077,18	62 654 479,13	56 259 578,21	50 124 061,45	45 485 599,39	41 722 912,91	37 962 424,17	34 130 273,36	31 602 610,52	11 209 821,83
Tresorerie ap strat fi	307 980 457,7	287 952 308,7	250 617 916,5	225 038 312,8	200 496 245,8	181 942 397,5	166 891 651,6	151 849 696,6	136 521 093,4	126 410 442,0	44 839 287,30

Figure 98: Evolution Obligation/Action/Tréso



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Obligation ap Strat Fi	1 154 926 716	1 115 467 530	926 825 383,6	834 258 557,8	746 013 350,7	679 407 231,2	624 989 885,3	569 566 947,1	512 500 857,2	474 928 707,9	168 678 160,4
Action ap Strat Fi	76 995 114,45	70 767 479,69	61 617 891,23	55 337 308,46	49 220 944,19	44 788 280,78	40 945 837,74	37 532 004,75	33 499 503,62	31 286 112,12	11 076 566,12
Tresorerie ap strat fi	307 980 457,7	287 952 308,7	250 617 916,5	225 038 312,8	200 496 245,8	181 942 397,5	166 891 651,6	151 849 696,6	136 521 093,4	126 410 442,0	44 839 287,30

Figure 99 : Evolution Obligation/Action/Tréso en VNC

Remarque : C'est par la trésorerie que passent les rachats/décès

Indice action sur le scénario central pour le modèle de Merton :

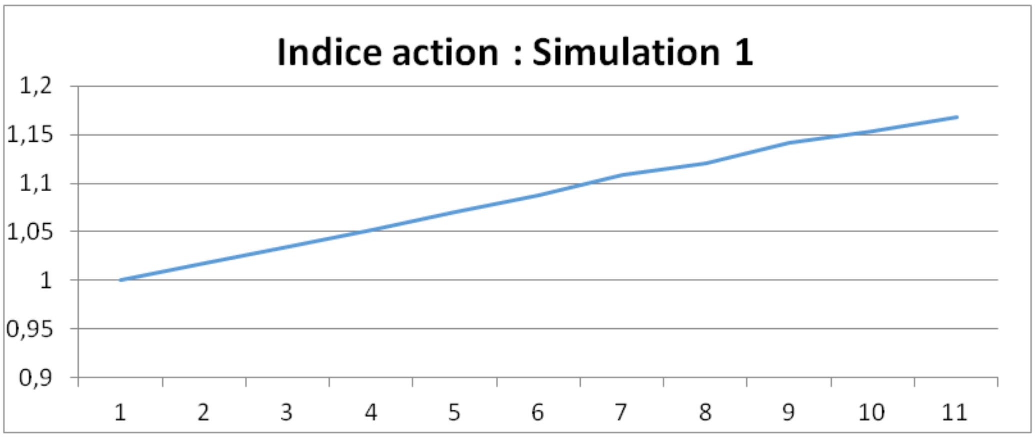


Figure 100 : Evolution Action Scenario Central

Remarque : Graphiquement, on voit que notre modèle de Merton respecte le risque neutre car l'action suit une droite qui a pour pente le taux sans risque.

Exemple de taux de rendement sur les simulations 2,3 et 4 :

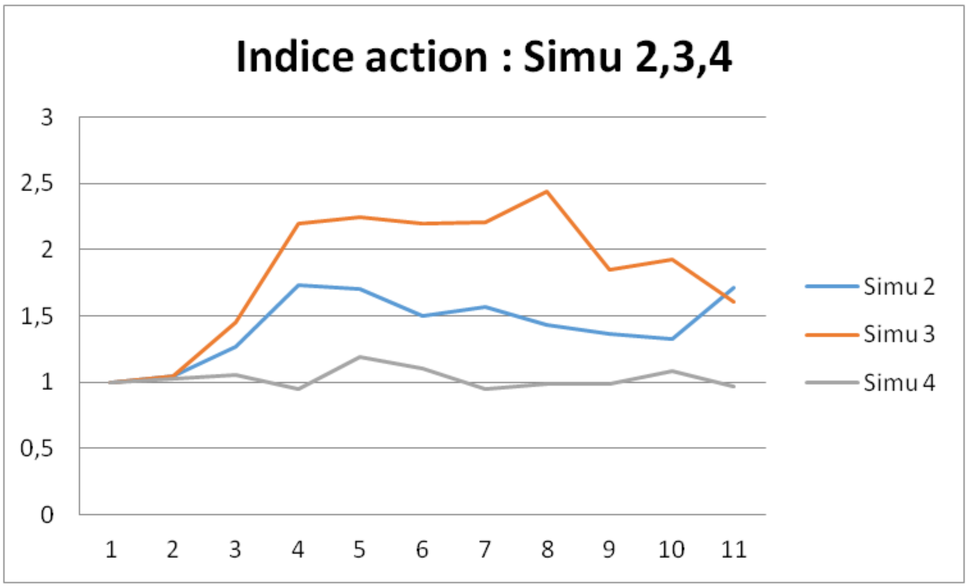
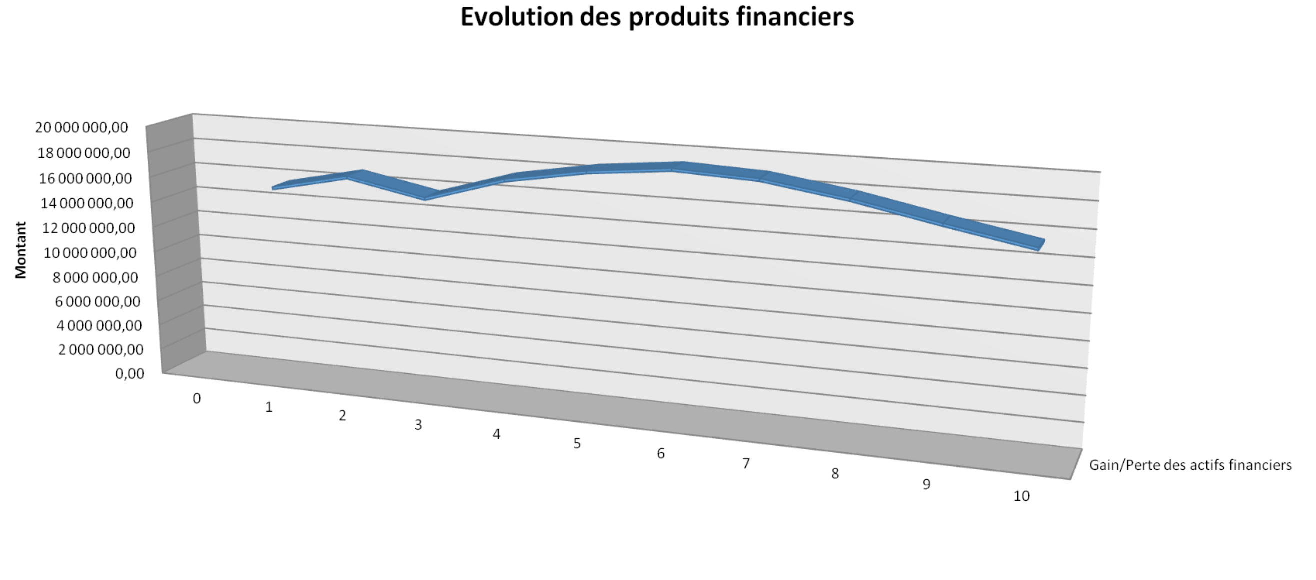


Figure 101 : Evolution Action Scenario 2,3,4

Evolution des produits financiers

Les produits financiers sur 10 ans :

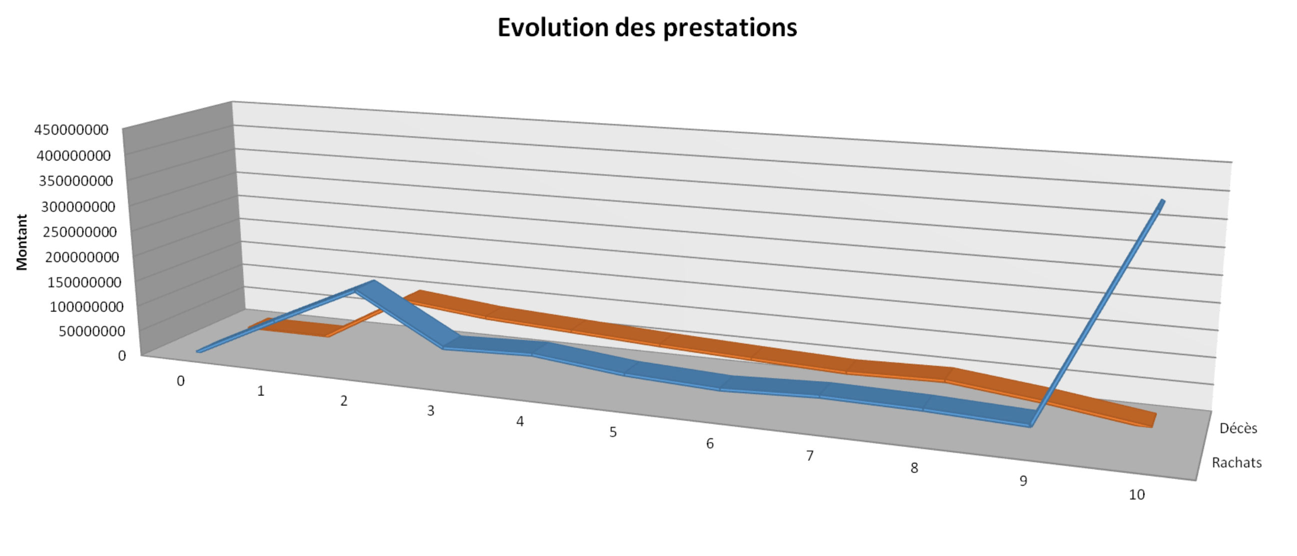


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gain/Perte des actifs financiers		15 425 614,08	16 722 631,56	15 523 103,51	17 375 602,61	18 429 425,12	19 047 023,62	18 757 998,71	17 797 992,59	16 526 414,10	15 350 468,70

Figure 102 : Evolution Produits financiers

Remarque : Les produits financiers bruts sont assez stables

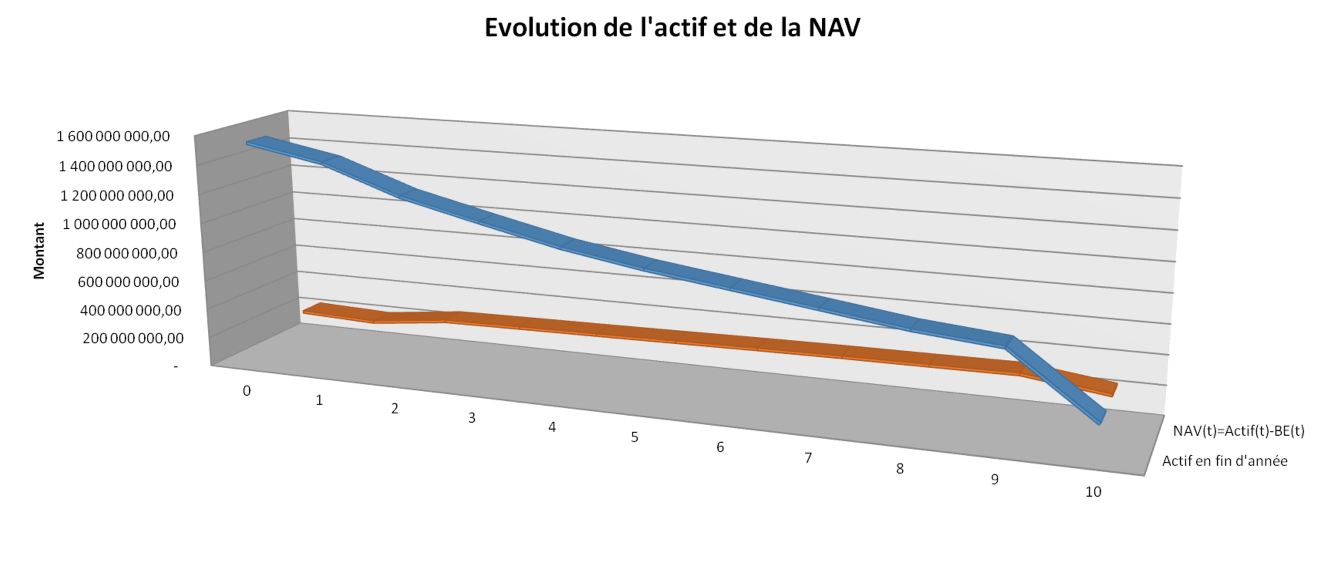
Evolution des prestations



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rachats	0	80 969 392,83	159 281 339,7	65 097 121,27	71 083 400,92	52 526 556,05	44 515 897,92	51 856 306,58	49 071 942,57	41 641 421,57	423 698 215,3
Décès	0	171 191,16	93 788 016,91	75 889 582,45	66 118 109,86	56 398 617,43	48 538 979,24	41 557 493,37	45 583 663,79	25 411 954,39	-

Figure 103 : Evolution des prestations

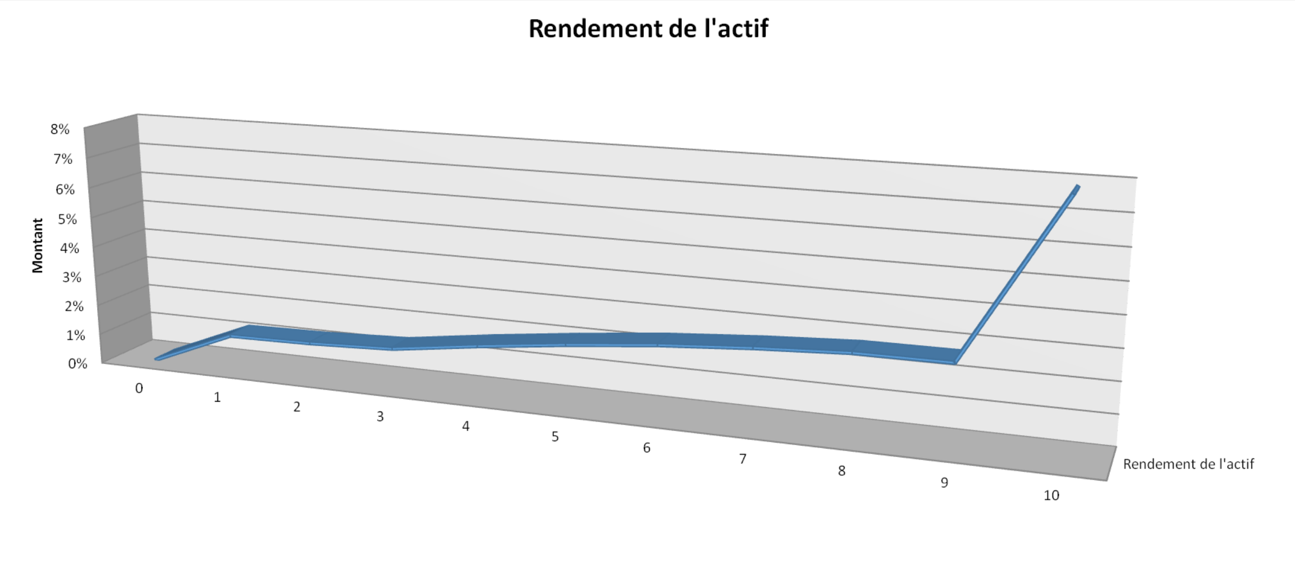
Remarque : La dernière année la PM est entièrement rachetée



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Actif en fin d'année	1 539 902 288	1 439 761 543	1 253 089 582	1 125 191 564	1 002 481 229	909 711 987,7	834 458 258,1	759 248 483,4	682 605 467,1	632 052 210,4	224 196 436,5
NAV(t)=Actif(t)-BE(t)	217 308 043,1	197 178 141,1	257 119 384,5	264 566 472,9	270 936 280,3	278 130 700,1	285 890 006,5	291 545 445,3	294 363 192,6	298 353 444,3	224 196 436,5

Figure 104 : Evolution de l'actif et de la NAV

Remarque : En t=10, la NAV=Actif car il y a un rachat total en dernière année. Cette NAV sera notre valeur de marché résiduelle

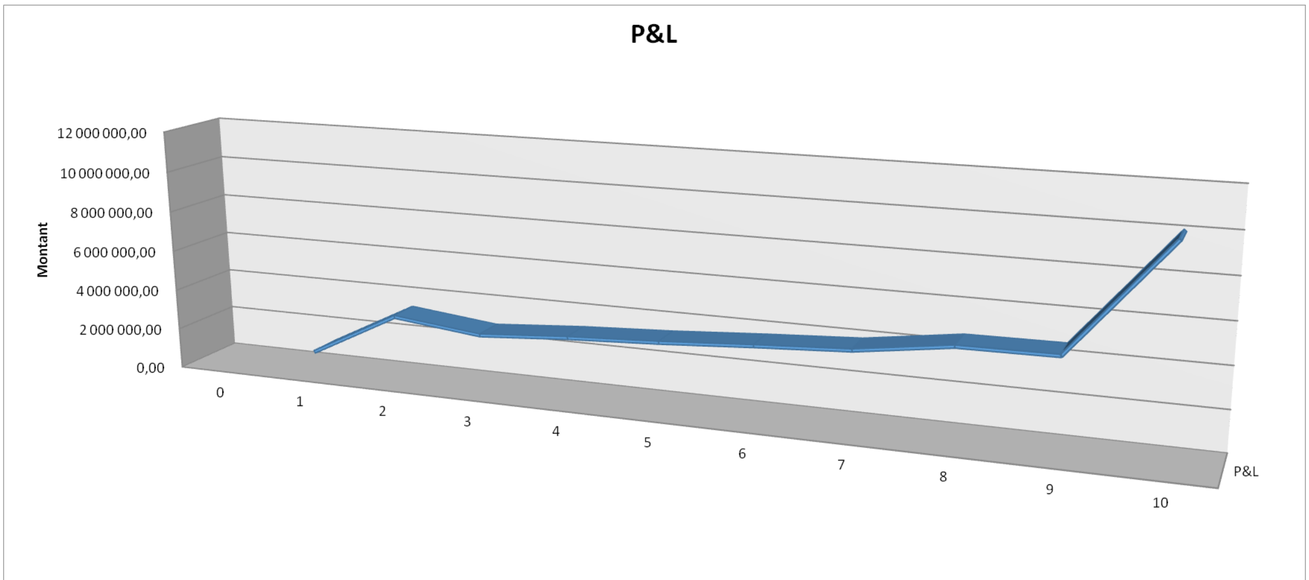


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rendement de l'actif	0%	1,14%	1,19%	1,30%	1,69%	2,03%	2,32%	2,53%	2,69%	2,70%	7,83%

Figure 105 : Rendement de l'actif

Remarque : Le rendement tourne autour des 1,8 % excepté la dernière année avec la vente massive d'actions.

Evolution du compte de résultat



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P&L		1 101 720,41	3 339 649,07	2 853 229,93	3 171 593,16	3 396 180,55	3 691 693,12	3 949 692,45	4 587 014,96	4 629 104,03	10 085 257,93

Figure 106 : P&L

Remarque : Logiquement le P&L net de taxes suit la même courbe que le rendement de l'actif

NB : On observe ce qui se produit en réalité en assurance vie : l'assureur gagne en moyenne peu d'argent (ici 3 millions € de gain moyen pour un actif à ~1,5 milliards € avec un portefeuille en run off) mais on gagne toujours de l'argent en moyenne.

5.2.1 Résultats et conclusions

Au vu des résultats fournis précédemment, nous ne prendrons pas en compte le modèle de taux de Vasicek dans notre modèle complexifié

Pour le modèle HW – BS

Nombre de simulations	Montant BE HW BS
1 (Scenario Centrale)	1 322 623 143,05
100,00	1 329 581 081,00
5 000,00	1 328 922 966,37
10 000,00	1 328 963 451,18

Pour le test de fuite économique (détail au 7.2 Test de fuite économique sur le modèle ALM) :

Fuite économique
0,59%

Figure 107 : BE HW BS

Pour le modèle CIR++ – BS

Nombre de simulations	Montant BE CIR++ BS
1 (Scenario Centrale)	1 321 023 315,84
10,00	1 328 934 499,06
1 000,00	1 326 916 412,71
2 000,00	1 326 912 340,88
10 000,00	1 326 799 093,19

Fuite économique
0,35%

Figure 108 : BE CIR++ BS

Pour le modèle HW- Merton

Nombre de simulations	Montant BE HW Mer
1 (Scenario Centrale)	1 322 594 245,87
100,00	1 327 038 353,21
2 000,00	1 327 262 121,57
10 000,00	1 327 334 862,15

Fuite économique
0,68%

Figure 109 : BE HW Mer

Pour le modèle CIR++ – Merton

Nombre de simulations	Montant BE CIR Mer
1 (Scénario Centrale)	1 321 003 082,53
10,00	1 326 667 309,26
1 000,00	1 325 604 956,75
5 000,00	1 325 639 773,07

Fuite économique
0,40%

Figure 110 : BE CIR++ Mer

Comparaisons des différents BE pour 5000 scénarios :

Comparaison des BE par rapport au BE Black Scholes - Hull White	BE Black Scholes - Hull White	BE Merton - Hull White	BE Black Scholes -CIR++	BE Merton - CIR++
Valeur du BE	1 328 922 966	1 327 298 492	1 326 855 717	1 325 639 773
Valeur en % du BE Black Scholes – Hull White	100,0%	99,9%	99,8%	99,8%

Comme pour le modèle simplifié, une fois le modèle de Vasicek enlevé, on voit que les BE sont très proches. Cela est normal car les taux d'actualisation zéro coupon des modèles sont très proches.
Dans le paragraphe suivant nous expliquons pourquoi avoir retenu 5000 scénarios.

5.2.2 Tests

Pour le modèle CIR+ BS calcul du BE pour un pas de 100 allant de 100 à 1000 (le tableau équivalent avec un pas de 200 allant de 200 à 10 000 se trouve en annexe)

Nombre de simulations	BE CIR+ BS
100	1 328 000 988,89
200	1 327 607 230,43
300	1 327 189 386,72
400	1 327 088 623,82
500	1 327 110 664,68
600	1 327 062 621,70
700	1 327 089 724,39
800	1 327 037 750,34
900	1 326 976 288,90
1000	1 326 916 412,71

Figure 111 : Test BE CIR+ BS

Nous souhaitons déterminer le nombre de simulations nécessaires pour obtenir un résultat satisfaisant et stable. Nous étudions la stabilité du résultat en calculant la provision best Estimate pour un nombre de simulation allant de 1 à 10000. Nous obtenons les graphiques suivants :

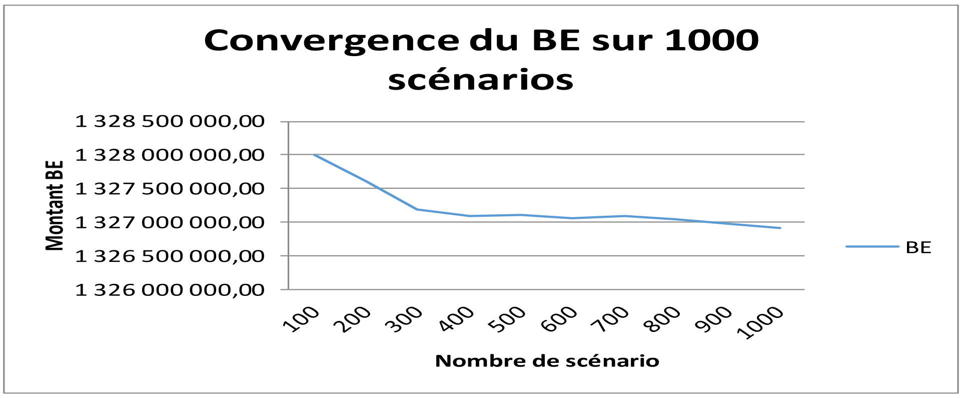


Figure 112 : Convergence BE 1000

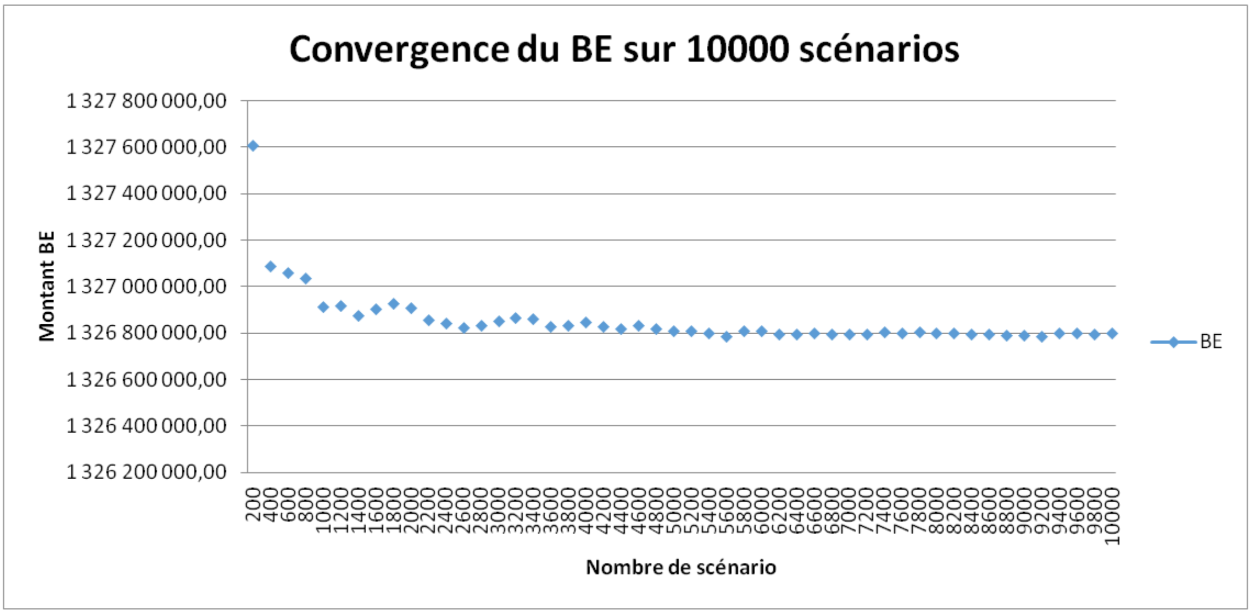


Figure 113 : Convergence BE 10 000

Le résultat du calcul est relativement stable pour n'importe quel nombre de simulations.

Nous remarquons sur le graphique que le résultat converge complètement à partir d'un nombre de simulations égale à 5000 (et la convergence à partir de 1000 scénarios est intéressante).

5.2.3 Intervalle de confiance du Best Estimate

Nous allons maintenant montrer que notre intuition graphique peut se retrouver statistiquement.

Dans le but de déterminer un intervalle de confiance pour la provision best Estimate, nous avons effectué un bootstrap sur l'échantillon des sommes des flux futurs actualisés des 10000 scénarios.

Le boostrap est une technique d'inférence statistique basée sur une succession de rééchantillonages.

La technique du bootstrap procède de la manière suivante :

- B échantillons bootstrap sont crées, et une statistique Z() est calculé pour chacun des échantillons bootstrap.
    - Un échantillon bootstrap s'obtient en effectuant n tirages avec remise dans l'échantillon(X1,..Xn) de façon à constituer une collection (X'1,...,X'n) dans laquelle chaque observation figure avec une multiplicité comprise entre 0 et n.
- La statistique appropriée est la moyenne. Nous tirons 50 échantillons bootstrap qui sont obtenus sur les 10000 sommes de flux futurs actualisés. Nous obtenons ainsi 50 provisions best Estimate et nous calculons les quantiles à 2,5% et à 97,5% pour trouver les bornes de l'intervalle de confiance.

Voici le code R associé :

```
# Code de bootstrap sous R
# Import des données
size <- 50
data = scan("D:/Documents/Actuariat/Memoire/BEL50.csv",sep = ";", dec = ".")
# Une array est un tableau à n dimensions de valeurs de même type. Une matrice est une array à 2 dimensions.
#La fonction sample permet de tirer au hasard, avec ou sans remise, un certain nombre d'éléments dans un vecteur.
bootstrap.data <- array(NA, dim=c(50, size))
# bootstrap confidence interval
for(i in 1:50){ bootstrap.data[i,] <- sample(data, size, replace=TRUE)}
#On utilise rowMeans() qui permet de calculer la moyenne sur les lignes d'une matrice
bootstrap.mu.hat <- rowMeans(bootstrap.data)
# On regarde le quantile
quantile(bootstrap.mu.hat , prob=c(2.5,97.5)/100)
```

Figure 114 : Bootstrap R

L'intervalle de confiance à 95% est [1 326 800 000 ; 1 327 000 000]. Nous remarquons que la provision best Estimate (1 326 809 155) que nous avons obtenue précédemment, pour 5000 scénarios, appartient bien à cet intervalle de confiance (tout comme la convergence pour 1000 scénarios).

5.3 Calcul des SCR

Passons maintenant au calcul de la deuxième exigence réglementaire qui nous intéresse

5.3.1 Résultats et conclusions

Afin de clarifier la lecture, nous mettrons en premier les résultats puis nous expliciterons les calculs.

Pour le couple HW-BS

Montant SCR HW BS
57 281 316,20

Figure 115 : SCR HW BS

Pour le couple CIR++ - BS

Montant SCR CIR++ BS
60 937 706,51

Figure 116 : SCR CIR++ BS

Pour le couple HW-Mer

Montant SCR HW Mer
57 369 807,25

Figure 117 : SCR HW Mer

Pour le couple CIR++ - Mer

Montant SCR CIR++ Mer
61 024 424,93

Figure 118 : SCR CIR++ Mer

Comparaison des SCR par rapport au BE Black Scholes - Hull White	SCR Black Scholes - Hull White	SCR Black Scholes - CIR++	SCR Merton Hull-White	SCR Merton-CIR++
Valeur en % du SCR Black Scholes – HullWhite	100,00%	106,38%	100,15%	106,53%

Remarque : Ces résultats bien que proches montrent que le choix des modèles utilisé à bien un impact sur le calcul du SCR. Il y a tout de même une variation de près de 7% entre le SCR CIR Merton et le SCR Hullwhite Black Scholes.

NB 1 : Ce gain de capital en changeant de modèle ne semble pas encore complétement réglementé par l'ACPR. D'ailleurs, il est probable que ces derniers imposent des restrictions plus strictes sur les GSE dans les années qui arrivent.

NB 2 : Le montant du SCR peut sembler faible comparativement au montant d'actif. En effet, le ratio SCR/Actif serait de 4% donc assez loin des 7/8% habituels. Cependant si l'on regarde les chiffres de BPCE Assurances au 31/12/2016 en prenant les SCR marché et risque de sousciption vie. Le total de ces SCR sur le montal de l'actif est de 4,9% donc assez proche de nos 4% (Cf Rapport SFCR BPCE Assurances)

Regardons maintenant les résultats détaillés pour le couple Hull White - Merton :

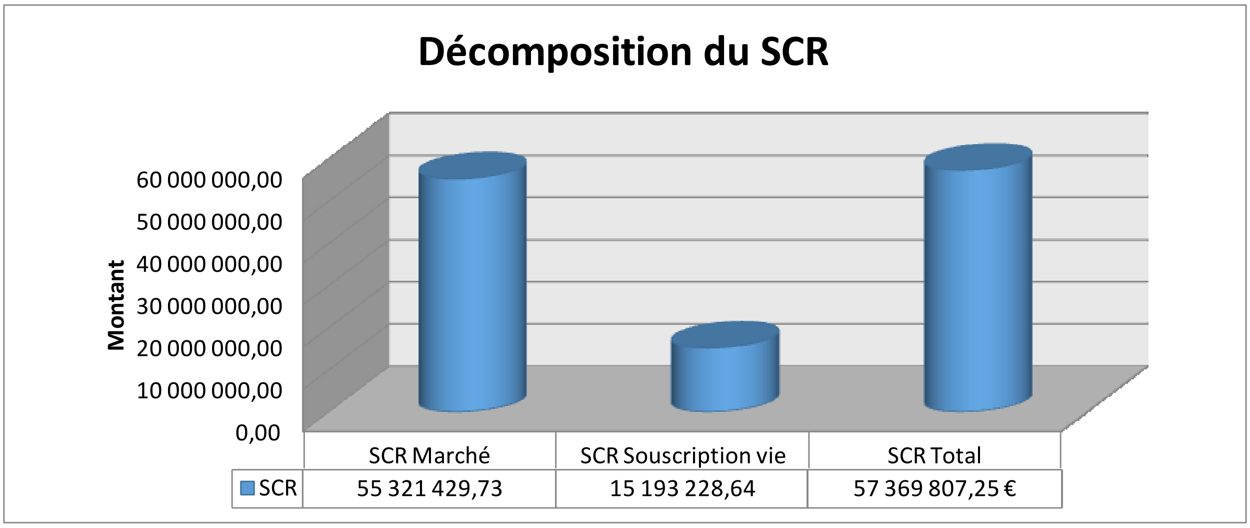
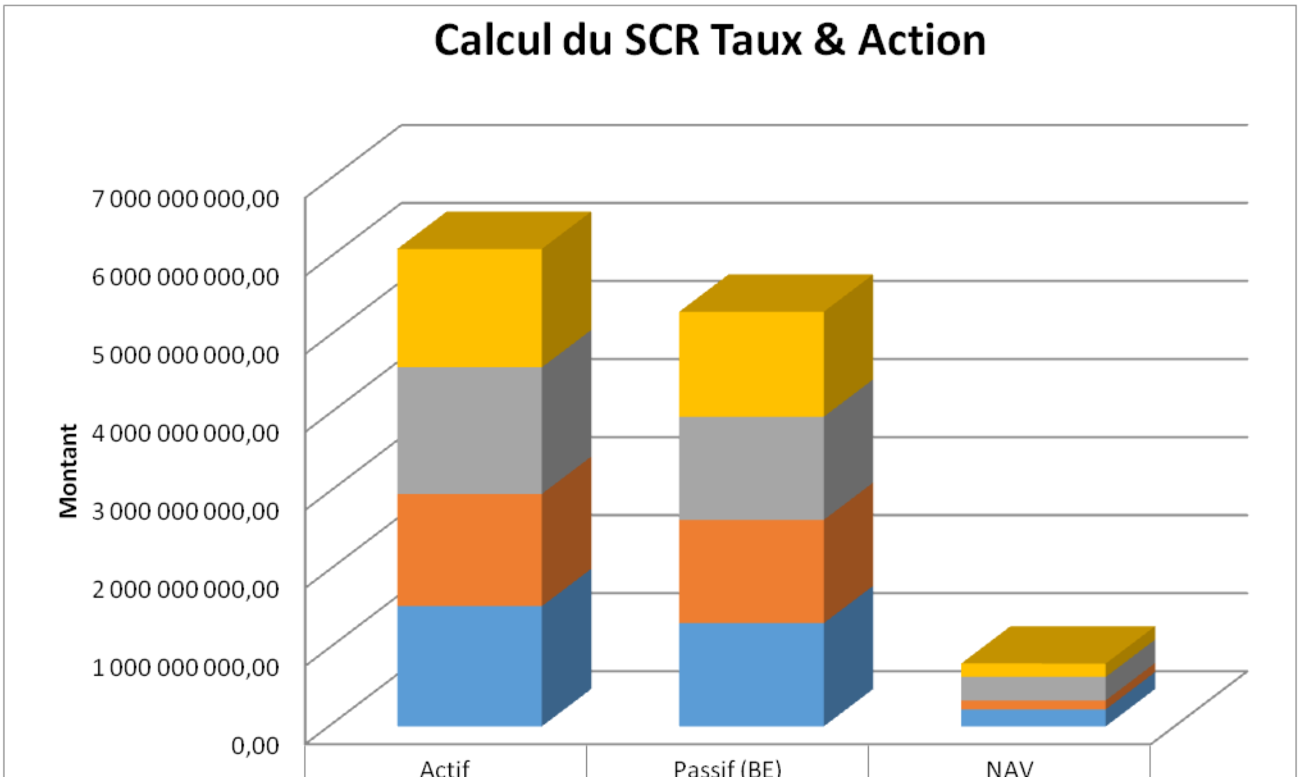


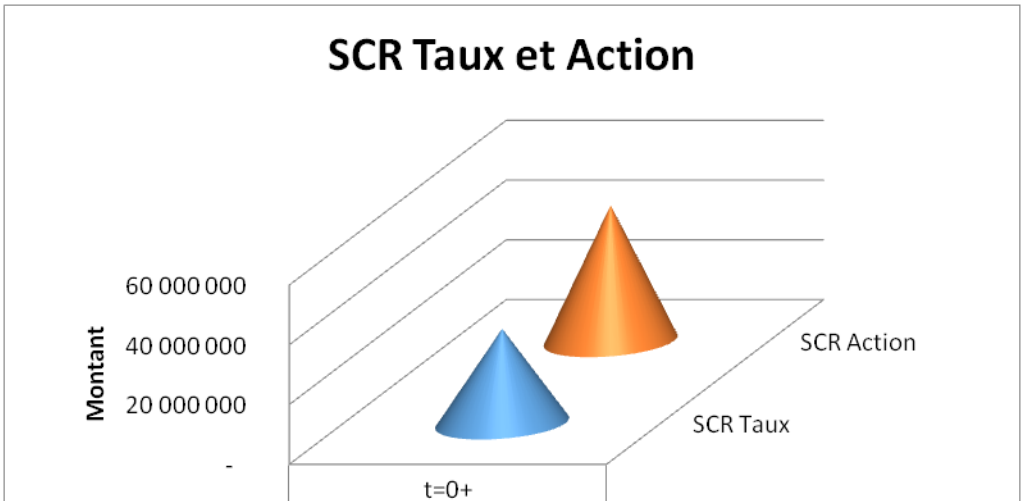
Figure 119 : Décomposition SCR

Focus sur le SCR marché :



	Actif	Passif (BE)	NAV
Action choc baisse	1 516 803 754,63	1 344 893 016,41	171 910 738,23
Taux Down	1 622 502 170,16	1 322 376 720,83	300 125 449,34
Taux Up	1 438 573 295,79	1 322 919 963,76	115 653 332,03
Scénario Central	1 539 902 288,97	1 322 594 245,87	217 308 043,10

Figure 120 : SCR Taux et Action

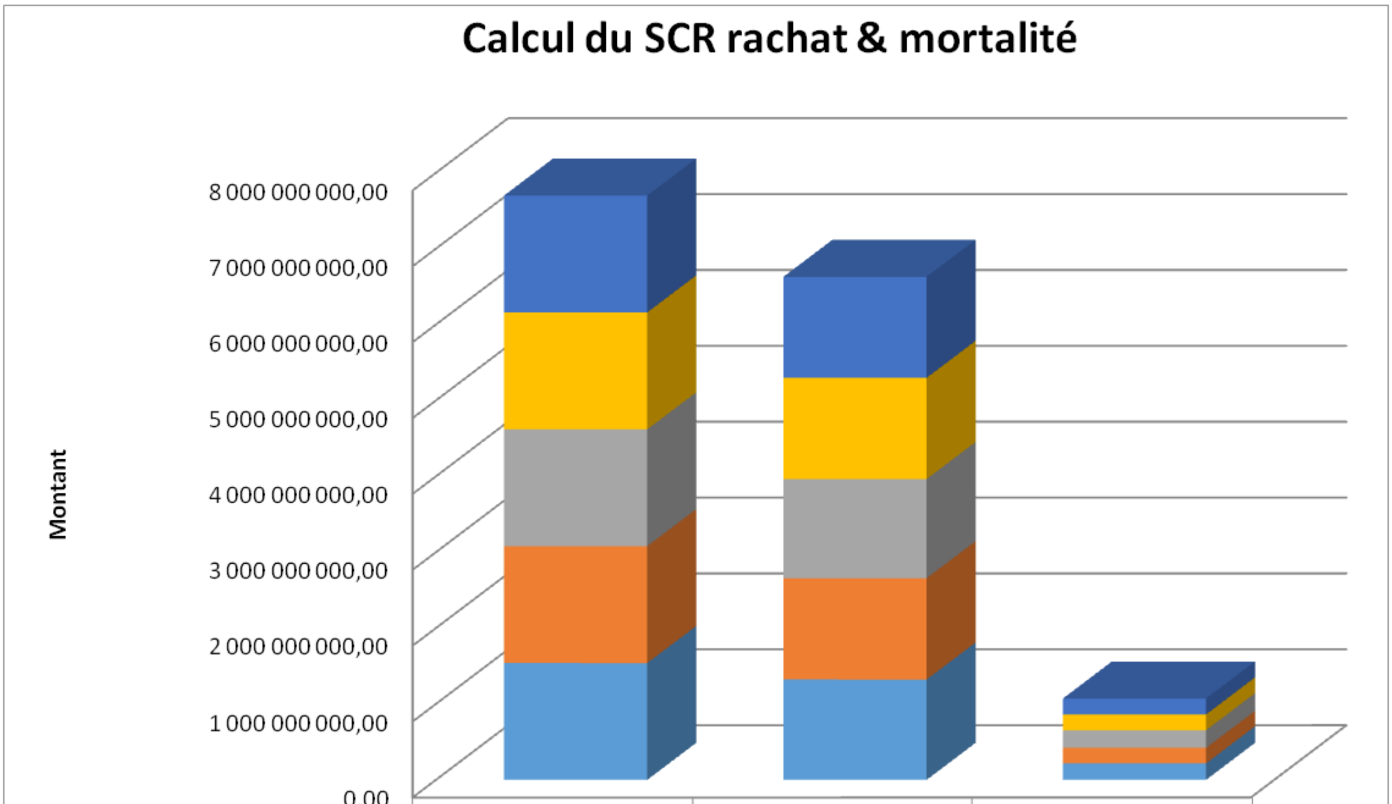


	t=0+
SCR Taux	31 615 586
SCR Action	45 397 305

Figure 121 : SCR Taux et Action 2

Le SCR risque de marché s'établit à 55 millions d'euros, soit 4% du total d'actif. De plus, le risque action concentre près de 58% de ce SCR contre 42% pour le risque de taux. Or, les expositions sur les produits d'actions et les produits de taux (Obligations) sont respectivement de 5% et 75%. Une allocation avec plus d'action ferait augmenter drastiquement le SCR.

<u>Focus sur le SCR risque de souscription :</u>



	Actif	Passif (BE)	NAV
Scénario choc hausse mortalité	1 539 902 288,97	1 330 720 270,84	209 182 018,13
Scénario life mass	1 539 902 288,97	1 333 050 770,23	206 851 518,74
Scénario life down	1 539 902 288,97	1 307 136 335,23	232 765 953,74
Scénario life Up	1 539 902 288,97	1 335 431 765,68	204 470 523,28
Scénario Central	1 539 902 288,97	1 322 594 245,87	217 308 043,10

Figure 122 : SCR Rachat et Mortalité

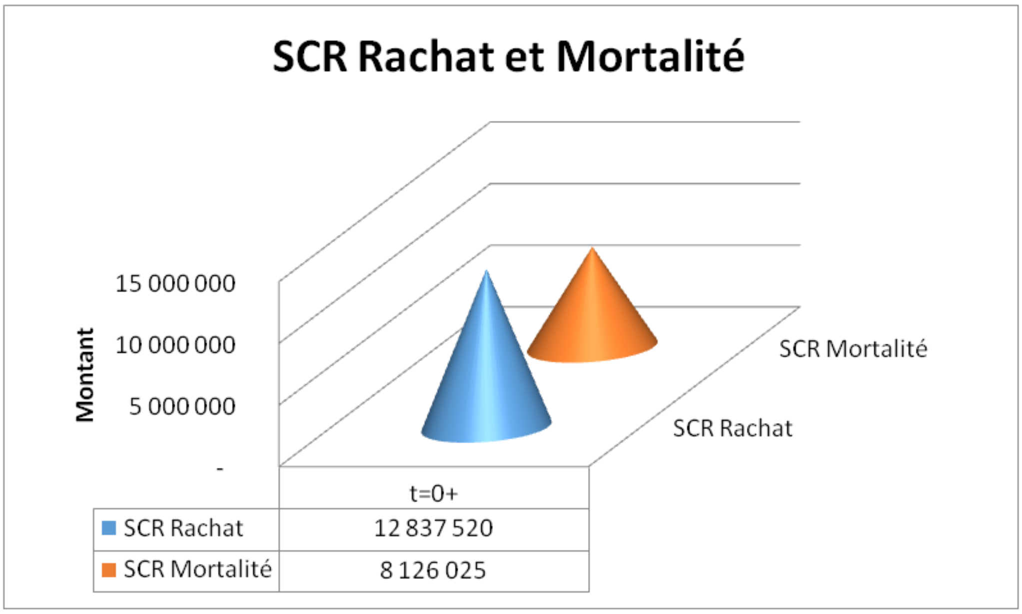


Figure 123 : SCR Rachat et Mortalité 2

Le SCR risque de souscription vie s'établit à 15 millions d'euros, soit 1 % du total des engagements.
Ce montant est à imputer essentiellement au SCR risque de rachat qui provient à son tour du SCR life Up (scénario de choc à la hausse)

Remarque : Contrairement aux chocs du risque de marché, les chocs du risque de souscription vie n'affectent que le passif.

5.3.2 Exemple de calcul

Dans cette partie, nous allons détailler le calcul du SCR risque de taux pour les taux augmentant. Le calcul complet du SCR sera détaillé en annexe.

<u>SCR Taux up</u>

On applique un choc sur les taux à la hausse suivant la loi ACPR :

	Obligation									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Exemple Scénario	0,01411984	0,01300507	0,01370565	0,01537125	0,01731915	0,01921422	0,02082172	0,02211368	0,02320859	0,02416564
Valeur	95,6332481									
choc à la hausse	70%	70%	64%	59%	55%	52%	49%	47%	44%	42%
Scénario hausse	0,02400374	0,02210861	0,02247726	0,02444029	0,02684469	0,02920561	0,03102436	0,03250711	0,03342036	0,03431522
Valeur	87,2427411									
choc à la baisse	-75%	-65%	-56%	-50%	-46%	-42%	-39%	-36%	-33%	-31%
Scénario baisse	0,00352996	0,00455177	0,00603048	0,00768563	0,00935234	0,01114425	0,01270125	0,01415276	0,01554975	0,01667429
Valeur	102,472898									

Figure 124 : SCR Taux

Avec

Coupon	0,01058988	0,00910743	0,01175754	0,01569733	0,01955984	0,02265305	0,02439667	0,02531201	0,02614543	0,02739889

Figure 125 : Coupon variable

Remarque : bien qu'indexés sur les ZC, les coupons variables ne sont pas choqués. Seuls les taux d'actualisation sont choqués

En t=0, on a alors les valeurs d'actif suivantes :
- Valeur de l'obligation choqué = 87,2 (les taux augmentent donc la valeur des obligations baisse)
- Montant investi en obligation (choqué) = 1 053 597 723,55
- Montant investi en action =76 995 114,45
- Montant investi en Trésorerie = 307 980 457,79

D'où le montant de l'actif après stratégie financière en valeur de marché (choqué) = 1 438 573 295,79

Regardons maintenant la valeur du BE choqué : BE choqué = 1 252 880 839,00

D'où la NAV (Taux Up) = 1 438 573 295,79 - 1 252 880 839,00 = 185 692 457

D'où SCR Taux Up = NAV choqué – NAV initiale = 185 692 457 - 217 308 043= -23 680 720 donc nombre négatif, donc besoin en Fonds propres

Un raisonnement similaire est appliqué pour les autres modules du SCR. Les calculs se trouvent en annexe.

5.4 Calcul de la RM

Après calcul dans notre modèle ALM complexifié, nous avons les résultats suivants :

Montant RM HW Mer
4 499 959,26

Figure 126 : RM HW Mer

Montant RM CIR++ BS
4 495 429,85

Figure 127 : RM CIR++ BS

Montant RM CIR++ Mer
4 601 267,11

Figure 128 : RM CIR++ Mer

Montant RM HW BS
4 164 305,351

Figure 129 : RM HW BS

Les Risk Margin sont donc relativement stables suivants les couples de modèles. Cela est assez normal au vu de l'homogénéité des BE et SCR.

5.5 Analyse rapide du bilan prudentiel initial pour le couple Hull White-Merton

Le Bilan (avec le scénario central) à t=0 est :

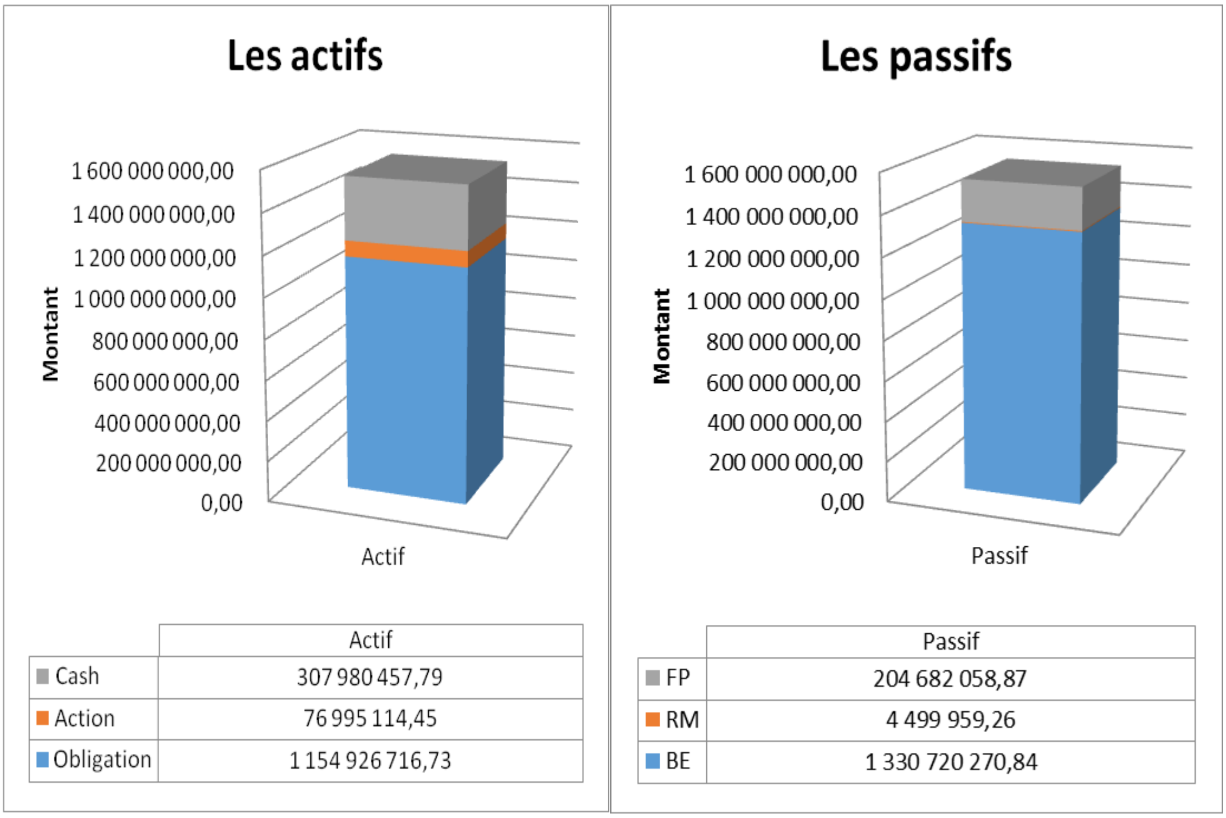


Figure 130 : Bilan S2 t=0

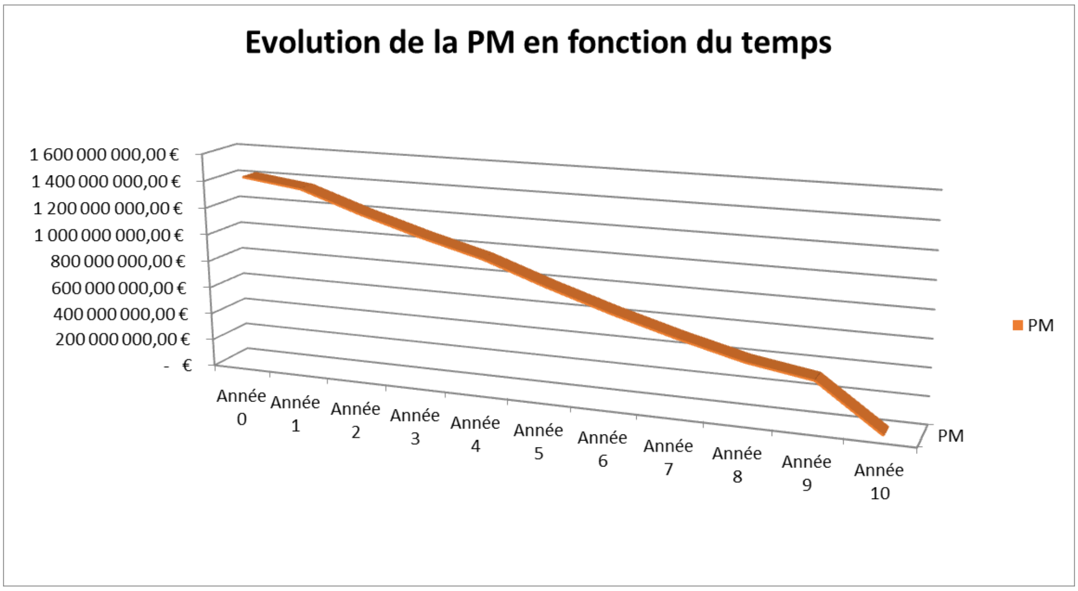
Les fonds propres de 200 millions d'euros sous Solvabilité 2, sont largement supérieurs au 60 millions de SCR demandé. Vu son profil de risque, l'assureur pourrait donc descendre ces fonds propres.

Sans surprise la RM est très faible et pèse très peu au passif. Le BE lui reste le principal poste du passif.

6 MODELISATION DU PASSIF (MODELE ALM COMPLEXIFIE MODIFIE)

6.1 Résultats intermédiaires du modèle pour le scénario central pour le couple CIR++ -Merton

Evolution de la PM en fonction du temps

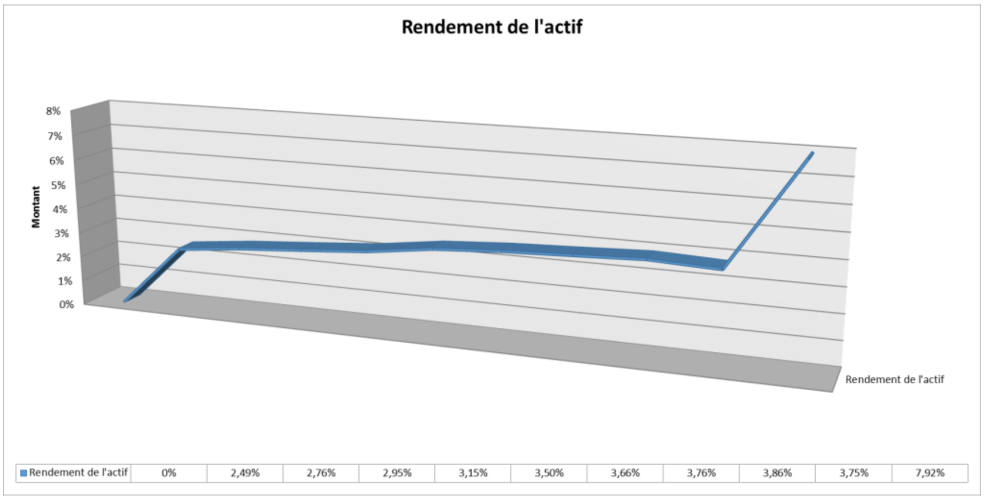


Remarque : La PM se consume légèrement plus rapidement que pour le modèle précédent. Cela est dû au rendement de notre actif. Cependant, la PM reste toujours élevé en dernier année. Pour éviter ce décrochage, l'ACPR recommande souvent une projection permettant d'éteindre la PM (souvent 30ans +).

Nous sommes souvent dans de le cas de taux de rachat conjecturel important. C'est le cas où

$$RC_{max} * \frac{\text{taux}_{\text{servi}} - \text{taux}_{\text{attendu}} - \gamma}{\delta - \gamma} \text{ si } \gamma < (\text{taux}_{\text{servi}} - \text{taux}_{\text{attendu}}) < \delta$$

Evolution du rendement de l'actif



Remarque : Grace aux dividendes des actions le taux de rendement de l'actif la moyenne est à ~ 3% (si on ne compte pas la dernière année qui est dévoyée à cause du rachat total)/
Le taux de fuite économique a également augmenté à ~3%
Le dernier rendement (~8%) est lié à la vente totale des actifs au bout des 10 ans

6.2 Calcul des BE et SCR

Dans ce chapitre, nous calculons suivant les hypothèses du § 2.3.7, l'idée étant de se mettre dans des conditions ou les variations inter modèles seront plus importantes.

Pour ce faire, nous avons décidé de ne garder que les 2 modèles les plus différenciant (ie Hull White & Black Scholes Vs CIR++ & Merton).

Les calculs se feront sur la base de 1000 scénarios (car ce chiffre suffit pour un intervalle de confiance à 95% cf § 5.2.2).

Nous trouvons alors les résultats de BE suivants :

BE X/ BE Black Scholes – Hull White	BE Black Scholes – Hull White	BE Merton – CIR++
Valeur du BE	1 432 075 148,78 €	1 421 568 879,82 €
Valeur en % du BE Black Scholes - Hull White	100,00%	99%

Nous avons une différence de près de **<u>1%</u>** du BE **soit 5 fois plus** qu'avec les hypothèses précédentes.

Pour 1000 scénarios nous trouvons les résultats suivants pour les SCR:

SCR X/ SCR Black Scholes – Hull White	BE Black Scholes – Hull White	BE Merton – CIR++
Valeur du SCR marchés actions	144 066 116,24 €	134 931 447,00 €
Valeur en % du SCR Black Scholes - Hull White	100,0%	94%

Nous avons une différence de plus de **<u>6%</u>** du SCR

7 ETUDE DES SENSIBILITES PUIS TESTS ET LIMITES DU GSE/MODELE ALM COMPLEXIFIE

7.1 Etude des sensibilités pour le modèle complexifié

Dans ce chapitre, on se propose de mesurer l'effet des variations de certains paramètres du modèle choisi à desseins sur les indicateurs bilanciels suivants :

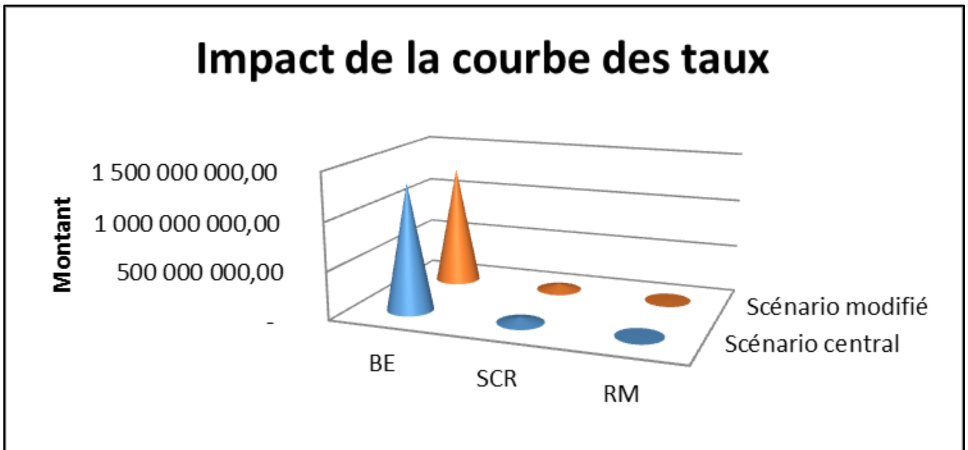
- Le Best Estimate (BE)
- Le Solvency Capital Requirement (SCR)
- La Risk Margin (RM)

Cette étude de sensibilité se fera uniquement pour le scénario central et pour le couple HullWhite-Merton

Remarque : L'un des objectifs de l'ORSA est de donner une vision critique des résultats du Pilier 1, notamment au travers de sensibilités. (Retour Synthèse)

7.1.1 Sensibilité aux taux

On fait varier de +1% la courbe des taux sans risque.



	BE	SCR	RM
Scénario central	1 322 594 245,87	57 369 807,25	4 499 959,26
Scénario modifié	1 251 871 855,04	61 289 061,04	6 396 533,66

Figure 131 : Sensibilité Taux

Sur le Best Estimate (BE)

On constate une baisse du BE suite à la hausse de 1% des taux. Ce résultat est assez logique, il s'explique par l'actualisation plus importante des flux pris en compte dans le calcul du BE.

Sur le Solvency Capital Requirements (SCR)

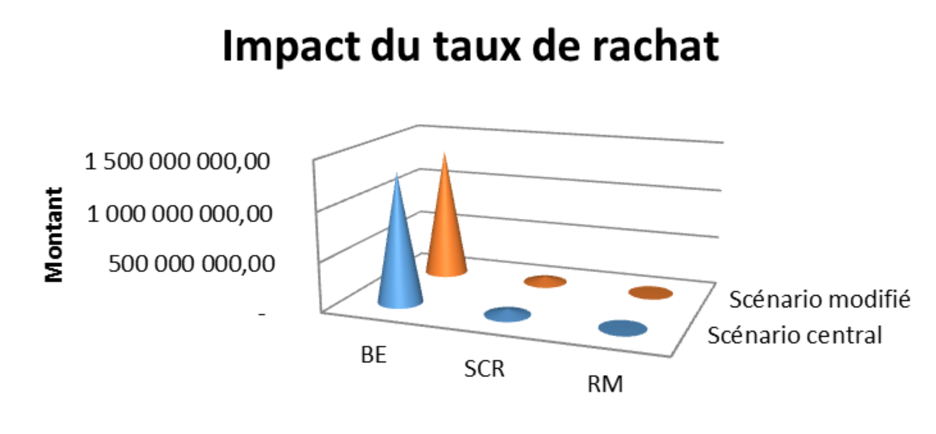
Légére hausse du SCR car les SCR rachat et mortalité augmentent car seul le passif bouge pour ces SCRs. Cela entraine une hausse de la NAV et donc une augmentation du SCR de rachat/mortalité.

La baisse du SCR risque de marché qui se traduit par une diminution du SCR risque de taux ne permet pas d’avoir une baisse globale

Sur la Risk Margin (RM)

La hausse de 1% des taux sans risque entraine une légère hausse de la Risk Margin. Ce résultat était attendu car la Risk Margin est corrélée positivement avec le SCR de souscription (avec taux d’actualisation et BE quasi inchangés)

7.1.2 Sensibilité aux taux de rachat



	BE	SCR	RM
Scénario central	1 322 594 245,87	57 369 807,25	4 499 959,26
Scénario modifié	1 335 555 762,40	58 381 116,18	4 490 470,26

Figure 132: Sensibilité Rachat

Sur le Best Estimate (BE)

Une hausse de 3% du taux de rachat fait croître le BE. En effet, le flux de prestations rachat est directement impacté par cette hausse. L'augmentation de ce flux entraîne alors la hausse du BE.

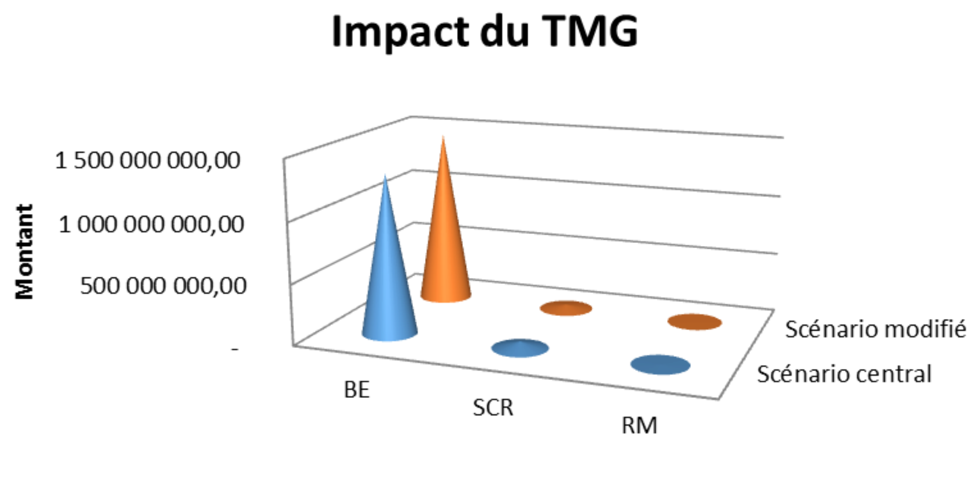
Sur le SCR

On observe une variation du SCR à la baisse essentiellement lié à la baisse du SCR risque de rachat.

Sur la RM

On observe également une variation à la baisse de la Risk Margin en effet même si le SCR a un peu augmenté et le taux d’actualisation reste inchangé, le BE lui diminue plus vite. Cela entraine donc une légère baisse de la RM

7.1.3 Sensibilité aux TMG



	BE	SCR	RM
Scénario central	1 322 594 245,87	57 369 807,25	4 499 959,26
Scénario modifié	1 452 242 890,72	35 484 569,78	798 908,98

Figure 133 : Sensibilité TMG

Sur le Best Estimate (BE)

Comme attendu, on constate une augmentation du BE suite à la hausse de 3% du TMG. Ce résultat s'explique par l'accroissement des engagements de l'assureur induit lors de la revalorisation des contrats. Plus le TMG est élevé, plus le contrat est revalorisé à la hausse et plus élevé sera le BE.

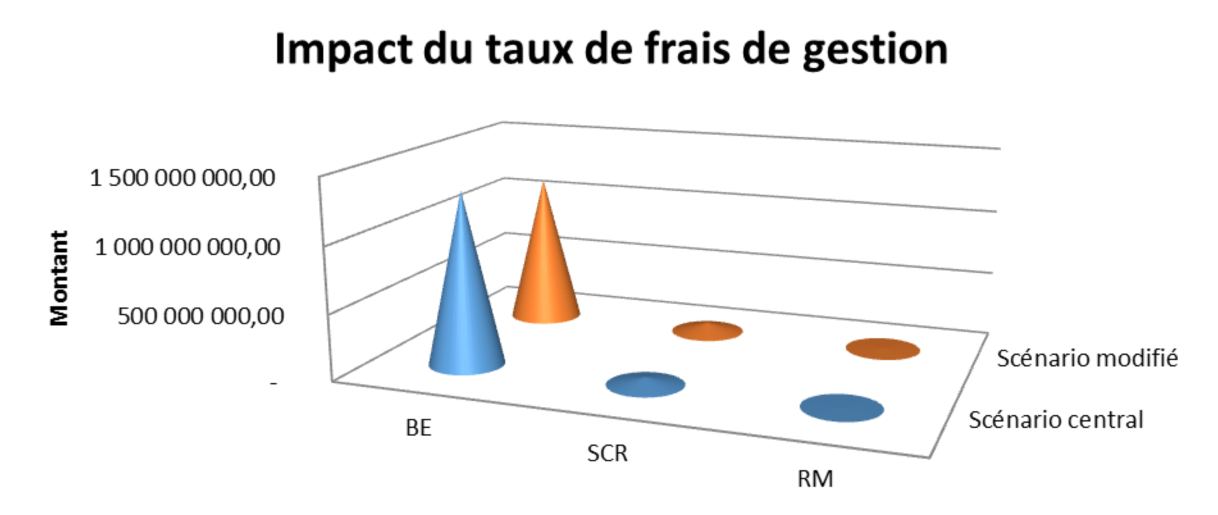
Sur le SCR

La hausse de 3% du TMG entraine une baisse du SCR. Cette baisse est essentiellement liée au SCR risque de souscription.

Sur la RM

La hausse de 3% du TMG entraine une baisse de la Risk Margin. Ce résultat était attendu car la Risk Margin est définie comme une fonction croissante du SCR de souscription (avec des paramètres quasi stables).

7.1.4 Sensibilité aux frais de gestion



	BE	SCR	RM
Scénario central	1 322 594 245,87	57 369 807,25	4 499 959,26
Scénario modifié	1 149 971 700,08	70 409 185,38	10 504 886,07

Figure 134: Sensibilité Frais de gestion

Sur le Best Estimate (BE)

La diminution du BE (-15%) consécutive à la hausse de 1% du TFGSE s'explique à l'instar du TMG dans la revalorisation des contrats. Plus le TFGSE est élevé, moins il y a d'encours sur le contrat .

Sur le SCR

Légère hausse du SCR à imputer au SCR risque de souscription. La PM prend en compte l'augmentation du TFGSE.

Sur la RM

On observe également une variation à la baisse de la Risk Margin du fait de sa corrélation positive avec le SCR souscription déjà évoquée (avec des paramètres quasi stables)

7.2 Tests et limites des modèles

Cette partie va décrire :

- Les limites des différents modèles d'instruments financiers utilisés (BS, Merton, Vasicek, HullWhite etc…)
- Le test du modèle ALM complexifié

Cette partie ne décrira pas le test du GSE (fait dans le chapitre GSE) ou les limites du modèle ALM simplifié (fait dans le chapitre du modèle ALM simplifié)

7.2.1 Test de fuite économique sur le modèle ALM

Le test de fuite économique permet de vérifier que le modèle ne crée pas ou ne perd pas de valeur.

Pour ce faire, le modèle est lancé avec la simulation du scénario central. Il s'agit alors de comparer l'ensemble des cash flows déflatés et la valeur de marché résiduelle en fin de projection avec la valeur marché de l'actif à t=0

Pour nous l'ensemble des cash flows déflaté est :

- Prestation
- Expense = Frais
- Profit

Le pourcentage de fuite de valeur se définit alors comme suit :

$$\%\ Fuite\ de\ valeur\ (t = fin\ de\ projection) = \frac{Fuite\ de\ valeur(t = fin\ de\ projection)}{Valeur\ de\ marché\ de\ l'actif(t = 0)}$$

Pour le couple de modèle Hull White-Merton nous trouvons les chiffres suivants :

Test de fuite économique	**Expense**	33 056,02
	Prestations	1 322 594 245,87
	P&L total	3 545 209,40
	Valeur de marché residuelle	224 196 436,50
	Total	1 550 368 947,79
	Valeur marché actif t=0	1 539 902 288,97
	% de fuite	0,68%

Figure 135 : Fuite économique

Le modèle valide un test de fuite lorsque le % de fuite n'excède pas 1%. Il est considéré comme très bon lorsque le % de fuite de valeur est inférieur à 0,2%.

Notre modèle valide donc le test de fuite mais n'est pas considéré comme très bon. En plus de ce test, on remarque que notre NAV(t) évolue peu. Ce qui est normal avec nos hypothèses de duration des instruments financiers, d'allocation d'actif, de durée de projection et de taux rendement des obligations.

Actif en fin d'année	1 539 902 288,97	1 439 761 543,63	1 253 089 582,70	1 125 191 564,22	1 002 481 229,06	909 711 987,75	834 458 258,15	759 248 483,40	682 605 467,18	632 052 210,46	224 196 436,50
NAV(t)=Actif(t)-BE(t)	217 308 043,10	197 178 141,12	257 119 384,55	264 566 472,94	270 936 280,38	278 130 700,15	285 890 006,51	291 545 445,38	294 363 192,65	298 353 444,35	224 196 436,50

Figure 136 : NAV (t)

7.2.2 Limites des modèles actions et taux du GSE

Critiques des principaux modèles utilisés

Modèle d'action de Black Scholes

Cons
Les rendements Gaussiens amènent à sous-estimer les variations de grande amplitude
Supposer la volatilité comme constante est éloigné de la réalité
La dynamique de Black-Scholes ne traduit pas les discontinuités de trajectoire du cours occasionnées lors de krachs boursiers.

Modèle d'action de Merton

Cons
Le modèle de Merton nécessite davantage de paramètres que celui de Black-Scholes, ce qui le rend plus complexe
Supposer la volatilité comme constante est éloigné de la réalité

Modèle de taux de Vasicek

Cons
Supposer la volatilité comme constante est éloigné de la réalité
Le modèle n'est pas assez souple. C'est-à-dire que la courbe que l'on obtient avec le modèle de Vasicek ne peut pas coller totalement avec la courbe des zéro- coupon réelle. En effet, elle ne peut pas reproduire toute les formes que peut prendre la courbe réellement observée sur le marché

Modèle de taux de Hullwhite

Cons
Par rapport à Vasicek, plus de paramètres sont requis pour faire tourner le modèle notamment avec l'ajout du prix de l'obligation zéro-coupon ainsi que le taux instantané associé, à la date t=0

7.2.3 Limites du modèle ALM complexifié

Non prise en compte des taux bas voire négatifs

Notre modèle ALM ne dispose pas d'un modèle de taux capable de bien gérer les taux bas . Les taux bas obligent les assureurs à diversifier leur portefeuille d'actifs.

A cause des taux bas et des règles prudentielles de Solvabilité 2, les assureurs doivent adapter leur gestion d'actifs pour capturer du rendement tout en limitant le coût en capital.

Les assureurs redoutent une remontée brutale des taux qui pourrait entraine des sorties de l'assurance vie au passif et un choc sur l'actif avec les dépréciations des obligations.

La remonté graduelle des taux qui se profilent depuis l'automne 2016 pourrait cependant améliorer leur situation pour 2017.

Dans ce contexte les assureurs utilisent pour modéliser les taux bas, le modèle LMN (Longstaff, Mithal et Neis).

Durée de projection trop courte

Nos simulations sont faites sous 10 ans. Pour être plus conforme avec les pratiques de marché, la simulation devrait être réalisée sur 30 ans, après avoir vérifié au préalable que la différence entre les provisions calculées avec cet horizon et celles calculées jusqu'à extinction totale du portefeuille est négligeable, comme le demande les spécifications techniques du QIS5.

Prise en compte partielle de la banqueroute

Le modèle complexifié modifié prend en compte la banqueroute (Actif <0) en la topant et en arrêtant les calculs. Ces cas se produisent principalement lors des chocs actions pour le SCR de marché. Dès que la banqueroute est détectée toutes les colonnes du compte de résultat passent à 0 et la colonne banqueroute est topée pour enlever le scénario du calcul du SCR ou du BE. Pour améliorer le modèle, on pourrait faire un système d'emprunt au taux du marché pour recapitaliser.

Utilisation de formules standards

SCR modèle standard

L'attrait de cette démarche est d'être uniforme, ce qui en fait la méthode par défaut imposée par Solvabilité II pour l'évaluation du capital réglementaire. Néanmoins, elle est **fondée sur une échelle commune de calculs du risque qui s'applique à tous les organismes assureurs de façon identique**. Ce dernier aspect amène à l'implémentation d'un modèle interne, qui est basé sur une évaluation plus personnelle du SCR.

Autres limites

Lors des achats/ventes, un seul type d'action et d'obligation à la maturité respectivement infini ou de 10 ans. Peu réaliste, il faudrait faire évoluer le modèle et gérer un système de rachat d'actif Fifo.
Modèle ALM Excel lent, environ 10 heures pour faire tourner les 10 000 scénarios de BE.

8 COMPARAISON DES MODELES ALM

Dans cette partie nous allons prendre du recul sur les différents résultats observés en les comparants et challengeant.

8.1 Comparaison des modèles

8.1.1 Modèle ALM Simplifié versus Complexifié

En préambule, les modèles étudiés restent des modèles. En ce sens, ils ne peuvent traduire l'entière complexité de la réalité.

Cependant, si l'on revient sur la genèse de l'étude, nous avions dans un premier temps implémenté un modèle ALM simplifié.

ALM simplifié

A l'origine, ce modèle avait pour principal but que de tester le GSE. Il est assez irréaliste pour les contrats d'assurance vie car tous les gains sortent du portefeuille au fur et à mesure et les risques de mortalités et rachat ne sont pas pris en compte.

Si l'on ne prend pas en compte les modèles de taux de Vasicek, les BEs n'ont une variation maximale que de 1%.

Le même raisonnement s'applique aux SCRs avec la aussi une variation de 1%.

Il est difficile de comparer le modèle simplifié avec les autres car les modélisations sont éloignées. Pour le modèle simplifié les flux sortant sont les gains en actions et coupons tandis que pour les modèles complexifiés les flux sortant sont les montants de rachat et décès.

ALM complexifié vs ALM complexifié modifié

En étudiant le deuxième modèle, les variations des BEs sont du même ordre mais leurs montants sont moins importants que ceux du premier modèle :

- BE ~ 1,327 milliards d'euros pour le modèle ALM Complexifié
- BE ~ 1,430 milliards d'euros pour le modèle ALM Complexifié modifié

Les différences se trouvent dans :

- la répartition d'actif (notamment passage de 5% d'actions à 20% d'actions)
- le fait d'incorporer des dividendes dans le second cas
- le fait de mieux gérer la risque neutralisation des obligations

On passe alors d'un écart de BE de **0,2%** à **1%** dans le cas du modèle ALM Complexifié modifié. Soit **5 fois plus d'écart** avec les nouvelles hypothèses décrites en §2.3.7

Pour le SCR, les variations sont plus importantes pour le modèle ALM Complexifié modifié (jusqu'à 7%) que pour le modèle ALM Complexifié (6,5%) mais les montants sont aussi très différents.

- SCR ~ 60 millions d'euros pour le modèle ALM Complexifié
- SCR ~ 140 millions d'euros pour le modèle ALM Complexifié modifié

Cela s’explique grandement par de l’allocation d’actif des deux modèles et en particulier dans la part d’action (20% pour le modèle ALM Complexifié modifié vs 5% pour le modèle ALM Complexifié)

8.1.2 Piste d’amélioration

Dans ce paragraphe nous décrirons quelques pistes d’améliorations concernent le modèle ALM complexifié et le GSE.

Pour le modèle ALM complexifié, il faudrait :

- Gérer plus de provisions comme par exemple la Provision pour Risque d'Exigibilité
- Faire un onglet tableau de bord de pilotage avec des indicateurs clefs
- Trouver plus de facteurs de sensibilité (allocation d’actif, taux du coupon etc..)
- Améliorer la vitesse de traitement => pour ce faire un passage d’Excel à R semble judicieux
- Investiguer sur la fuite économique pour la réduire encore ou la ré-intégrer intelligemment

Pour le GSE, il faudrait :

- Généraliser les tests à tous les modèles de taux et actions utilisés
- Trouver une méthodologie de calibration plus simple et robuste
- Améliorer l’ergonomie du GSE qui est assez dur à manipuler pour un néophyte du progiciel R

Comme nous l'avons vu, afin d'être conforme à la directive Solvabilité II, les entités d'assurance doivent évaluer leur passif de manière market-consistent.

Pour cela, elles mettent en place des outils dans le but d'évaluer les produits financiers mais aussi de projeter et de gérer les risques. L'attrait du GSE est qu'il regroupe ces deux fonctions, ce qui en fait un instrument incontournable pour répondre aux exigences de Solvabilité II. Néanmoins, le GSE peut influer de différentes façons sur le calcul du passif. C'est d'ailleurs ce que nous avons vu à partir de nos modèles ALM. Ainsi, les modèles de taux et d'actions [9]peuvent impacter sur les calculs du BE/SCR par le GSE. Nos écarts[10] sont de l'ordre de 6% pour les SCR et de 0,2% pour les BE, cependant ces écarts peuvent s'intensifier (du moins pour le BE) avec la répartition d'actifs. En utilisant notre troisième modèle ALM [11], nous passons à un écart de BE de 1%.

Aujourd'hui, le superviseur cherche à améliorer sa maitrise de l'audit des GSE du marché et des gains de capitaux qui peuvent résulter de leurs utilisations. Dans un avenir proche, cette « duperie » pourrait être mieux régulée et les assureurs devront alors justifier davantage leurs choix de modélisation.

En outre, ce mémoire s'attarde sur l'influence des modèles mais ce n'est pas le seul élément influant sur les écarts de BE/SCR. Ainsi d'autres mémoires montrent que les sous-jacents pour la calibration (exemple Caps vs Swaption pour les modèles de taux) peuvent aussi impacter ces calculs (cf l'annexe « 14 . Résultats d'études sur les variations de BE/SCR venant de GSE »).

Pour conclure, les principaux acteurs de la place ainsi que les superviseurs/régulateurs ne semblent pas encore avoir atteint leur maturité en matière de production et de contrôle des chiffres-clefs. C'est d'ailleurs ce défi de contrôle et d'uniformisation qui semble les attendre pour les prochaines années…. A ce sujet, la publication d'orientations au niveau européen sur l'utilisation de GSE a été mis au plan d'études de l'EIOPA dans le cadre de la révision 2020 de la directive Solvabilité 2.

[9] Le cœur du calcul reste cependant le modèle de taux surtout pour une assurance vie mono-support

[10] Nos travaux sont aussi à relativiser dans le contexte de taux au 31/12/2011. A cette époque, les taux étaient bas mais pas négatifs, d'où la relative stabilité de nos BEs/SCRs

[11] Nos modèles peuvent être améliorés, ainsi pour le modèle ALM, on pourrait gérer plus de provisions comme par exemple la Provision pour Risque d'Exigibilité ou Investiguer sur la fuite économique pour la réduire encore ou la ré - intégrer intelligemment. Pour le GSE, il serait possible de trouver une méthodologie de calibration plus simple et robuste. (cf partie 8.1.2 pour plus de détails)

En mémoire de Michel Fromenteau, professeur pédagogue et bienveillant qui s'est éteint le 18 décembre 2017.

Ancien élève de l'École nationale de la statistique et de l'administration économique, Michel Fromenteau a été pendant vingt ans commissaire contrôleur des assurances, d'abord au ministère des Finances, puis à l'Autorité de contrôle des assurances et des mutuelles.

Responsable du master finance de marché, spécialité actuariat, du Centre d'expertise en finance, assurance et banque (Cefab) du Cnam, il est nommé titulaire de la chaire d'Actuariat à sa création en janvier 2008, faisant des formations portées par cette chaire des références de ces secteurs économiques clés.

Actuaire agrégé, vice-président du collège des membres du Haut-conseil de l'Institut des actuaires, il était également membre du Laboratoire interdisciplinaire de recherche en sciences de l'action (Lirsa) du Cnam.

Michel Fromenteau possédait des compétences et un humanisme qui lui ont permis de jouer un rôle important au sein de la place comme auprès des acteurs de la finance et de l'assurance.

1 Sommaire des figures

2 Bibliographie

Publications et ouvrages

- EUROPEAN COMMISSION (juillet 2010) *QIS 5 Technical Specifications*
- Code des Assurance (2011)
- Ricco Rakotomalala- Université Lumière Lyon 2 (2008) *Tests de normalité - Techniques empiriques et tests statistiques*

Supports de cours (CNAM 2014-2016)

- ACT 206 : Actuariat branche vie
- GFN203 : Marchés financiers I : produits de taux et gestion de portefeuilles
- GFN204 : Marchés financiers II : futures et options
- ACT207 : Réglementation des entreprises et droit du contrat d’assurance

Mémoires et études

- Marylène DE CUBBER : Rentabilité et tarification sous Solvabilité II : vers une évolution de l'offre produit ?
- Fabien PERUS & Hinarii PICHEVIN : Construction d'un modèle général pour les interactions actif/passif d'un contrat d'épargne
- Emmanuel OHNOUNA : Evaluation « Best Estimate » de contrat d’épargne en euros
- Nathanael Cogrel, Elsa Dubon, Amélie Roué et Farida Soumani : Rapport du Bureau d’Étude n°5 Impact du Générateur de Scénarios Économiques

3 Codes R

Explication du déroulement du code avec fichiers R associés.
Remarque : Pour l’import de fichier source il conviendra de remplacer dans le code les répertoires des inputs

Modèles

Pour la définition des modèles (à ouvrir avec Notepad++ de préférence)

BS.r

- Modèle de Blackscholes :

Merton.r

- Modèle de Merton :

Vasicek.r

- Modèle de Vasicek :

- Modèle de HullWhite : ModeleHullWhite_Et_fonctionsCom.r

Précalibrage
Pour le calibrage (à ouvrir avec Notepad++ de préférence) => fichiers d'import Csv :

sigmaMkt2011.csv C-P2011.csv tauxZC2011.csv maturite2011.csv

Pour avoir les call put 2011, nous avons utilisé la fonction de volatilité implicite : VolImp.r

sur les call put 2014 ConvergenceDonnées v2.xlsx

Remarque : Pour avoir une interpolation réaliste du taux ZC à base de pas de 0,5 on utilise interpSplinesCubiques (courbeZC,0.5), interpSplinesCubiques (courbeZC,1.5)…etc

Calibrage
Il faut télécharger la librairie dfoptim avant de commencer

- Chargement des données (à adapter au bon répertoire) : ChargementDonneesv3.r

CalibrageBSv2.r

- Calibrage modèle de Blackscholes :

CalibrageMertonv3.r

- Calibrage modèle de Merton :

calibrageVasicekv2.r

- Calibrage modèle de Vasicek :


calibrageHullwhiteMemoirev2.r

- Calibrage modèle de HullWhite :

BE et SCR

Pour le modèle ALM (à ouvrir avec Notepad++ de préférence) :


ALMv4.r

- ***Le modèle de base :***

Pour le calcul du SCR (à ouvrir avec Notepad++ de préférence) :


SCRv4.r

Le modèle de base :

4 Inversion de la formule de Black scholes

Pour obtenir une expression de la volatilité d'après la formule de Black-Scholes, reprenons donc la formule de Black-Scholes pour un call-européen :

C(S, t) = SN(d1) − Ee−r(T −t)N(d2)

Or
$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-0,5s^2}\, ds$, on a alors :
$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2}$ et $SN'(d1) = S\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5d1^2}$

$$SN'(d1) = S\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5d1^2} = S\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right)+(r+0,5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2}$$

$$SN'^{(d1)} = S\frac{1}{\sqrt{2\pi}} * E * e^{\ln\left(\frac{S}{E}\right)} * e^{\frac{-0,5\left(\ln^2\left(\frac{S}{E}\right)\ \ +\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 (T-t)^2+2\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\ln\left(\frac{S}{E}\right)\right)}{\sigma^2(T-t)}}$$

$$SN'^{(d1)} = S\frac{1}{\sqrt{2\pi}} * E * e^{-0.5*\frac{\left(\ln^2\left(\frac{S}{E}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 (T-t)^2+2\ln\left(\frac{S}{E}\right)(T-t)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right.}{\sigma^2(\mathrm{T-t})})}$$

De plus :

$$Ee^{-r(T-t)}N'(d2) = Ee^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5*d2^2}$$

$$Ee^{-r(T-t)}N'(d2) = Ee^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5*\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right)+(r-0,5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2}$$

$$Ee^{-r(T-t)}N'(d2) = Ee^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5*\left(\frac{\ln^2\left(\frac{S}{E}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 (T-t)^2+2\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\ln\left(\frac{S}{E}\right)}{\sigma^2\sqrt{T-t}}+2r(T-t)\right)}$$

$$Ee^{-r(T-t)}N'(d2) = Ee^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5*\left(\frac{\ln^2\left(\frac{S}{E}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 (T-t)^2+2\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\ln\left(\frac{S}{E}\right)}{\sigma^2\sqrt{T-t}}\right)}$$

On a donc :

$$SN'(d1) = \ Ee^{-r(T-t)}N'(d2)$$

Posons :
$C^{(1)} = \frac{\partial C}{\partial(lnS)}$
$C^{(2)} = \frac{\partial^2 C}{\partial(lnS)^2}$
$\xi = C^{(2)} - C^{(1)}$
On a alors : $C^{(1)} = SN(d1) + \frac{S*N\prime(d1)}{\sigma\sqrt{T-t}} - E\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{T-t}}N'(d2)$
$C^{(2)} =$ S*N(d1) + 2*$\frac{S*N\prime(d1)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{S*N\prime(d1)}{(\sigma\sqrt{T-t})^2} - E\frac{e^{-r(T-t)}}{(\sigma(T-t))^2}N''(d2)$

D'ou :

$$\xi = \frac{S}{\sigma(T-t)}N'(d1) + \frac{S}{(\sigma(T-t))^2}N''(d1) - E\frac{e^{-r(T-t)}}{(\sigma(T-t))^2}N''(d2)$$

Or $N''(d) = -dN'(d), d1 = d2 + \sigma(T-t)$ on a alors :

$$\xi = \frac{S}{\sigma(T-t)}N'(d1) + \frac{1}{\left(\sigma(T-t)\right)^2} * \left(Ee^{-r(T-t)}d2N'(d2) - Sd1N'(d1)\right)$$

$$\xi = \frac{S}{\sigma(T-t)}N'(d1) + \frac{1}{\left(\sigma(T-t)\right)^2} * \left(Ee^{-r(T-t)}\sigma(T-t)N'(d2)\right)$$

$$\xi = \frac{S}{\sigma(T-t)}N'(d1) + \frac{1}{\left(\sigma(T-t)\right)} * \left(Ee^{-r(T-t)}N'(d2)\right)$$

$$\xi = \frac{2S}{\sigma(T-t)}N'(d1) = \frac{1}{\left(\sigma(T-t)\right)} * \left(2Ee^{-r(T-t)}N'(d2)\right)$$

Soit $E\xi$ l'élasticité de la fonction auxiliaire ξ par rapport à S :

$$E\xi = \frac{\partial \ln|\xi|}{\partial(lnS)}$$

Or ln$|\xi|$ = ln(2)+ln(S)-ln$(\sigma(T-t)) - \ln(\sqrt{2\pi}) - d1^2/2$ donc :

$$E\xi = 1 - \frac{d1}{\sigma(T-t)} = -\frac{d1}{\sigma(T-t)} + \frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} = -\frac{d1}{\sigma(T-t)} + \frac{(\mathrm{r}+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma^2(T-t)} + 1/2 - \mathrm{r}/\sigma^2$$

$$E\xi = -\frac{1}{\sigma^{2(T-t)}}\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \frac{1}{2} - r/\sigma^2$$

Et

$$\sigma^{2(T-t)}\left(E\xi - \frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2}\right) = \ln\left(\frac{E}{S}\right) <=> \sigma^2(T-t)\left(E\xi - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{E}{S}\right) - r(T-t)$$

Donc $\sigma = \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{E}{S}\right) - r(T-t)}{(T-t)(E\xi - \frac{1}{2})}}$

5 Zoom sur le contexte des taux bas en 2017

Dans ce contexte de taux bas, les assureurs peuvent jouer sur les maturités des actifs pour réinvestir des titres à des échéances régulières et profiter des rendements plus forts.

Ainsi, le réassureur Scor dispose de capacité de « réinvestissement », les coupons arrivant à maturité représentant 35% de son portefeuille d'actifs.

Dans ce nouvel univers de taux, une gestion obligataire plus courte devient avantageuse.

Ainsi, d'après le cabinet Optimind Winter « les taux bas avaient poussé les assureurs à aller chercher du rendement sur des maturités plus longues à 15,20 ou 30 ans. Si le rendement redevient acceptable, ils pourraient se repositionner sur les emprunts d'états aux maturités les plus courtes ».

Sous l'effet des incertitudes entourant l'élection présidentielle en France, l'écart de rendement entre l'OAT à 10 ans et le Bund Allemand s'est creusé, franchissant le 20 février les 80 points de base, son plus haut niveau depuis novembre 2012.

Au 9 mars 2017 la remontée des taux reste trop faible pour que les assureurs bénéficient à plein de ses effets positifs. Le taux de l'OAT à 10 ans est ainsi passé de 0,1% à 1% mais la tendance doit encore se confirmer avant de bouleverser la gestion des assureurs.

Les assureurs continuent donc de diversifier leur portefeuille afin de chercher du rendement sur des classes d'actifs alternatives.

Ainsi pour obtenir du rendement Allianz s'est tourné dès 2012 sur des classes d'actifs alternatives comme la dette d'infrastructure. Or avec les taux bas, de nombreux autres assureurs ont fait de même faisant chuter de 50% en deux ou trois ans le rendement supplémentaire par rapport aux instruments traditionnels.

Ainsi pour garder sa compétitivité Allianz se positionne maintenant sur des transactions de plus en plus complexes et cherche des instruments alternatifs pour profiter de la prime d'illiquidité.

Pour la MASCF le contexte est différent encore. Ainsi, d'après leur directeur financier « le portefeuille de MASCF est de 28 milliards d'euros d'actifs est composé de 80% d'obligations, dont 15% de titres d'états et le reste de titres corporate. Dans un contexte de taux bas prolongés, l'avantage est à la gestion avec une durée longue. Mais aujourd'hui avec la remontée des taux qui s'amorce, l'avantage revient aux maturités plus courtes. Avec des maturités de 5 ans environ, nous avons supporté le coût lors de la baisse des taux et nous nous sommes bien repositionnés en cas de remontée »

Solvabilité 2 a également joué un rôle dans la gestion d'actifs des grands assureurs. Ainsi si les petits acteurs ont une gestion d'actifs d'abord pilotée au regard de l'impact en capital, les grands acteurs avaient anticipé les effets de solvabilité 2. Ils disposent aujourd'hui de marge de manœuvre nécessaire pour capturer du rendement sur des classes d'actifs plus risqués.

Ainsi le directeur de financement et d'investissement d'AG2R la mondiale confie : « Jusqu'en 2012 nous avons dérisqués notre portefeuille en prévision de Solvabilité 2, les actions et l'immobiliers passant de 30 à 15% de nos actifs. Depuis, nous sommes revenus à l'achat sur ces classes d'actifs. Pour 2017 , nous prévoyons 300 Millions d'euros d'achat en immobilier et 250 millions d'euros d'achat en actions. »

D'après le cabinet EY « Un mouvement de remonté des taux s'est effectivement enclenché à l'automne 2016. Le taux de l'OAT 10 ans est maintenant proche des 1%. Le taux 5 ans est aussi repassé positif mais les taux restent assez bas. Ainsi bien que les placements des assureurs soient contraint en terme de coût en capital S2, leur ratio SCR est aujourd'hui proche des 200% de moyenne. Ce qui compte donc aujourd'hui dans le pilotage financier est donc de prendre de risque de manière couverte.

Dans ce contexte, les assureurs continuent de diversifier leurs actifs pour capturer du rendement. Tout d'abord au sein de la poche obligataire en plaçant sur du corporate. Ensuite en allant chercher une prime d'illiquidité sur des actifs comme les loans, les placements privées euro PP, les infrastructures et le private equity. Cela reste conscrit à 4/6% du portefeuille mais cela permet une diversification en terme de risque. On observe aussi un enrichissement de la poche d'action mais de manière partiellement couverte »

6 Nombre de simulations pour avoir un BE convergent

Nombre de simulations	BE CIR+ BS
200	1327607230
400	1327088624
600	1327062622
800	1327037750
1000	1326916413
1200	1326917959
1400	1326877249
1600	1326905966
1800	1326931258
2000	1326912341
2200	1326858701
2400	1326843014
2600	1326826857
2800	1326836648
3000	1326851000
3200	1326865227
3400	1326860571
3600	1326831645
3800	1326834039
4000	1326847951
4200	1326831825
4400	1326819040
4600	1326834937
4800	1326819688
5000	1326809155
5200	1326808478
5400	1326800261
5600	1326787381
5800	1326809089
6000	1326812153
6200	1326798153
6400	1326796049
6600	1326801615
6800	1326797102
7000	1326795620
7200	1326796967
7400	1326807206
7600	1326802962
7800	1326806547
8000	1326801962
8200	1326801315
8400	1326796980
8600	1326797029
8800	1326793371
9000	1326792890
9200	1326788332
9400	1326799970
9600	1326802866
9800	1326797311
10000	1326799093

7 Détails des calculs des SCR modèle complexifié

Explication chiffré du SCR de taux

<u>SCR Taux up</u>
On applique un choc sur les taux suivant la loi ACPR :

	Obligation									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Exemple Scénario	0,01411984	0,01300507	0,01370565	0,01537125	0,01731915	0,01921422	0,02082172	0,02211368	0,02320859	0,02416564
Valeur	95,6332481									
choc à la hausse	70%	70%	64%	59%	55%	52%	49%	47%	44%	42%
Scénario hausse	0,02400374	0,02210861	0,02247726	0,02444029	0,02684469	0,02920561	0,03102436	0,03250711	0,03342036	0,03431522
Valeur	87,2427411									
choc à la baisse	-75%	-65%	-56%	-50%	-46%	-42%	-39%	-36%	-33%	-31%
Scénario baisse	0,00352996	0,00455177	0,00603048	0,00768563	0,00935234	0,01114425	0,01270125	0,01415276	0,01554975	0,01667429
Valeur	102,472898									

Avec

Coupon	0,01058988	0,00910743	0,01175754	0,01569733	0,01955984	0,02265305	0,02439667	0,02531201	0,02614543	0,02739889

Remarque : bien qu'indexés sur les ZC, les coupons variables ne sont pas choqués. Seuls les taux d'actualisation sont choqués

Si la Valeur de l'obligation (t=0, choqué)=87.2 (les taux augmentent donc la valeur des obligations baisse)
Obligation ap Strat Fi (choqué) 1 053 597 723,55

Action ap rendement 76 995 114,45
Trésorerie ap strat fi 307 980 457,79

D'où Actif après stratégie financière en valeur de marché (choqué) 1 438 573 295,79

Scenario	Periode	Rachat	Décès	Taux cible	Taux à la maturité	BEL
1	1	80969392,83	171191,1612	0,010294985	0,024003735	79 238 562,53
1	2	158961088,9	93792573,55	0,011418142	0,022108613	241 937 596,35
1	3	65171945,74	75979284,53	0,011604285	0,022477261	132 045 526,39
1	4	71373927,97	66193140,81	0,015058771	0,024440295	124 901 563,18
1	5	52566231,46	56441260,24	0,018133373	0,026844688	95 484 425,96
1	6	44544790,17	48570520,42	0,02072232	0,029205613	78 344 447,18
1	7	51236282,69	41578455,51	0,022583377	0,031024356	74 943 585,90
1	8	48394113,71	45608424,45	0,023909518	0,03250711	72 777 171,49
1	9	41126652,06	25509785,73	0,023975061	0,033420363	49 569 968,26
1	10	425485969,9	0	0,06721126	0,034315215	303 637 991,76

D'où la NaV (Taux Up) = 1 438 573 295,79 - 1 252 880 839,00 € = 185 692 457

D'où SCR taux up = Nav choqué – Nav ini=185 692 457-217 308 043=-23 680 720 donc nombre négatif, donc besoin en FP

<u>SCR Taux down</u>

La Valeur de l'obligation en t=0 après le choc est de 102,4 (les taux baissent donc la valeur des obligations augmente).

Les autres données financières après ce choc sont :

- Montant Obligation = 1 237 526 597,92
- Montant Action = 76 995 114,45
- Montant Trésorerie = 307 980 457,79

D'où :

Actif après stratégie financière en valeur de marché (choqué) = 1 622 502 170,16

On trouve alors BE (t=0, choqué) = 1 381 513 407

Scenario	Periode	Rachat	Décès	Taux cible	Taux à la maturité	BEL
1	1	80969392,83	171191,1612	0,010343718	0,003529961	80 855 168,40
1	2	159545615,2	93784256,37	0,010203373	0,004551773	251 039 322,20
1	3	66065387,94	75823402,19	0,011804304	0,006030485	139 352 467,42
1	4	70818221,44	65984103,97	0,015314792	0,007685627	132 676 260,63
1	5	52438522,98	56297138,15	0,018405647	0,009352343	103 790 599,81
1	6	44444401,26	48455338,31	0,02105512	0,011144247	86 923 219,81
1	7	52126329,72	41489660,15	0,022951453	0,012701247	85 699 960,51
1	8	49486819,07	45508320,13	0,024394872	0,014152755	84 893 489,24
1	9	41952162,38	25319918,99	0,024475352	0,015549752	58 549 612,43
1	10	422063511,6	0	0,072276692	0,016674295	357 733 306,55

D'où la NAV (Taux down) = 1 622 502 170 - 1 381 513 407 = 240 988 763

D'où SCR (Taux down) = NAV choquée – NAV initiale = 31 615 586 >0 (pas de besoin de capitaux supplémentaire)

C'est un nombre positif, on gagne de l'argent avec une baisse de taux. Ce n'est pas très étonnant car notre portefeuille d'actif est constitué en majorité d'obligation qui augmente quand les taux baissent.

<u>SCR action</u>

On applique un choc sur les actions de -30% (avec la prise en compte du Dampener)

La Valeur de l'obligation en t=0 est de 95,6 (scénario normal).

Les autres données financières après ce choc sont :

- Montant Obligation = 1 154 926 716,73
- Montant Action = 53 896 580,11
- Montant Trésorerie = 307 980 457,79

D'où :

Actif après stratégie financière en valeur de marché (choqué) = 1 516 803 754,63

On trouve alors BE (t=0, choqué) = 1 344 893 016,41

Scenario	Periode	Rachat	Décès	Taux cible	Taux à la maturité	BEL
1	1	80969392,83	171191,1612	0,015273795	0,014119844	80 010 843,36
1	2	132764703,8	94163803,4	0,014925587	0,013005066	221 139 244,40
1	3	67181488,51	78524680,73	0,016066715	0,013705647	139 875 722,51
1	4	61591934,78	68622650,29	0,019347567	0,015371255	122 506 793,93
1	5	55296685,04	59624993,97	0,022818479	0,017319154	105 466 820,97
1	6	58836363,27	51480147,54	0,025601318	0,019214219	98 411 913,05
1	7	71960107,39	43350478,05	0,022079314	0,020821716	99 820 531,11
1	8	66422348,91	47501895,17	0,02888676	0,02211368	95 636 251,90
1	9	54492030,14	24344696,06	0,029466406	0,023208585	64 128 488,35
1	10	403633917,5	0	0,363334114	0,024165644	317 896 406,82

D'où la NAV (choquée Action) = 1 516 803 754,63 - 1 344 893 016,41 € = 171 910 738

D'où SCR (Action) = NAV choquée – NAV initiale = 171 910 738 - 217 308 043 = - 45 397 305

<u>SCR rachat en hausse</u>

L'actif en t=0 n'est pas choqué car les rachats se font en fin d'année

D'où :

Actif après stratégie financière en valeur de marché = 1 539 902 288,97

On trouve alors BE (t=0, choqué) = 1 335 431 766

Scenario	Periode	Rachat	Décès	Taux cible	Taux à la maturité	BEL
1	1	121454089,2	171191,1612	0,010610635	0,014119844	119 931 861,22
1	2	190496076,4	90847516,7	0,011038733	0,013005066	274 166 125,58
1	3	91523663,33	70697597,59	0,012052979	0,013705647	155 729 961,16
1	4	89938725,49	59296243,37	0,01562074	0,015371255	140 401 304,27
1	5	69248918,19	48784139,39	0,018780263	0,017319154	108 322 219,62
1	6	56539721,9	40403997,21	0,021403123	0,019214219	86 482 220,89
1	7	60235688,98	33312400,05	0,023323199	0,020821716	80 981 463,20
1	8	53717914,82	36512929,57	0,024702009	0,02211368	75 746 298,19
1	9	43704569,38	18292455,63	0,024621783	0,023208585	50 430 499,69
1	10	308842239,3	0	0,058821353	0,024165644	243 239 811,87

D’où la NaV (rachat en hausse) = 1 539 902 289 - 1 335 431 766 = 204 470 523

D’où SCR (rachat en hausse) = 204 470 523 - 217 308 043 = - 12 837 520

<u>SCR rachat en baisse</u>

L’actif en t=0 n’est pas choqué car les rachats se font en fin d’année

D’où :

Actif après stratégie financière en valeur de marché = 1 539 902 288,97

On trouve alors BE (t=0, choqué) = 1 307 136 335

Scenario	Periode	Rachat	Décès	Taux cible	Taux à la maturité	BEL
1	1	40484696,42	171191,1612	0,01	0,014119844	40 089 825,49
1	2	125704202,5	96728549,54	0,010334343	0,013005066	216 758 182,22
1	3	34659201,09	81272288,1	0,011355474	0,013705647	111 292 479,22
1	4	47241898,03	73451509,1	0,01478369	0,015371255	113 549 203,02
1	5	29769355,8	64885707,31	0,017779486	0,017319154	86 867 583,92
1	6	26148049,92	57945530,48	0,020397462	0,019214219	75 018 780,61
1	7	36462732,97	51448512,77	0,022233029	0,020821716	76 101 835,81
1	8	37553664,4	56487057,81	0,023582884	0,02211368	78 944 585,25
1	9	33187577,94	34820042,92	0,023802257	0,023208585	55 319 723,84
1	10	575421805,7	0	0,085036075	0,024165644	453 194 135,84

D’où la NAV (rachat en baisse) = 1 539 902 289 - 1 307 136 335 = 232 765 954

D’où SCR (rachat en baisse) > 0 car NAV (rachat en baisse)> NAV Scenario central =>pas de besoin de capitaux supplémentaire

C’est un nombre positif, on gagne de l’argent avec les rachats en baisse. Ce qui n’est pas étonnant car le montant de notre passif détermine l’actif. Aussi, notre actif (tout comme l’actif d’un assureur vie en bonne santé) gagne de l’argent en moyenne tous les ans donc plus notre actif est important plus les gains seront importants.

<u>SCR rachat massif</u>

L’actif en t=0 n’est pas choqué car les rachats se font en fin d’année

D’où :
Actif après stratégie financière en valeur de marché = 1 539 902 288,97

On trouve alors BE (t=0, choqué) = 1 333 050 770

Scenario	Periode	Rachat	Décès	Taux cible	Taux à la maturité	BEL
1	1	113357150	171191,1612	0,010546072	0,014119844	111 947 657,65
1	2	184442094,5	91435615,05	0,010964859	0,013005066	268 839 684,33
1	3	86549193,23	71720741,34	0,011980739	0,013705647	151 936 747,53
1	4	86541260,3	60620598,14	0,015535636	0,015371255	138 450 907,45
1	5	66343244,01	50240305,4	0,018679878	0,017319154	106 991 965,67
1	6	54579886,92	41935907,06	0,021306217	0,019214219	86 100 474,48
1	7	59033308,54	34841098,75	0,023222993	0,020821716	81 263 946,05
1	8	53230371,55	38193323,81	0,024606984	0,02211368	76 747 663,59
1	9	43679277,11	19558084,47	0,024560833	0,023208585	51 439 431,86
1	10	329274903,9	0	0,060938717	0,024165644	259 332 291,61

D'où la NAV (rachat en masse) = 1 539 902 289 - 1 333 050 770 = 206 851 519

D'où SCR (rachat en masse) = 206 851 519 - 217 308 043 = 10 456 524

<u>SCR hausse de mortalité</u>

L'actif en t=0 n'est pas choqué car les rachats se font en fin d'année

D'où Actif après stratégie financière en valeur de marché 1 539 902 288,97

BE choqué = 1 330 720 271

Scenario	Periode	Rachat	Décès	Taux cible	Taux à la maturité	BEL
1	1	80969392,83	256786,7418	0,010295634	0,014119844	80 095 247,17
1	2	159266889,6	140614116,8	0,0111464	0,013005066	292 230 623,65
1	3	62294462,81	102323490	0,012042441	0,013705647	158 030 749,17
1	4	64462349,49	81393736,02	0,015503206	0,015371255	137 222 427,14
1	5	47695436,95	63657064,41	0,01854	0,017319154	102 191 287,39
1	6	39531720,94	50356114,78	0,021070291	0,019214219	80 187 759,82
1	7	46037736,54	39880358,84	0,022861768	0,020821716	74 376 431,96
1	8	42831776,39	43852714,16	0,024253709	0,02211368	72 769 232,23
1	9	35955389,3	19423649,42	0,024057228	0,023208585	45 047 203,39
1	10	366397222,9	0	0,064779441	0,024165644	288 569 308,92

D'où la NaV (hausse de mortalité) = 1 539 902 289 - 1 330 720 271 = 209 182 018

D'où SCR (hausse de mortalité) = 209 182 018 - 217 308 043 = 8 126 025

<u>Agrégation des différents SCR :</u>

<u>Calcul du SCR souscription vie :</u>

En l'état nous avons :
- SCR Rachat = Maximum des SCR rachat = 12 837 520
- SCR Mortalité = 8 126 025

Pour obtenir le SCR risque de souscription vie, on tient compte de la corrélation entre le risque décès et le risque de rachat. Dans les spécifications techniques, cette corrélation est nulle. Le SCR risque de souscription est alors donné par :

$$\mathrm{SCR}_{\mathrm{life}} = \sqrt{\mathrm{Life}_{\mathrm{mort}}{}^{2} + \mathrm{Life}_{\mathrm{lapse}}{}^{2}}$$

D'où SCR souscription vie = 15 193 229

<u>Calcul du SCR marché</u>

SCR taux = Maximun des SCR taux = 31 615 586

SCR Action = 45 397 305

En appliquant la matrice de corrélation :

	Taux d'intérêt	Actions
Taux d'intérêts	1	0.5
Actions	0.5	1

on trouve :

SCR Marché = 55 321 429,73

Quand on aggrége les SCR avec la matrice de corrélation suivante :

	Marché	Souscription vie

Marché	1	0
Souscription vie	0	1

On a alors :
SCR Total = 57 369 807,25 €

8 Présentation du Système d'Information (SI) amont du reporting Solvabilité 2 de Natixis Assurances

Présentation générale

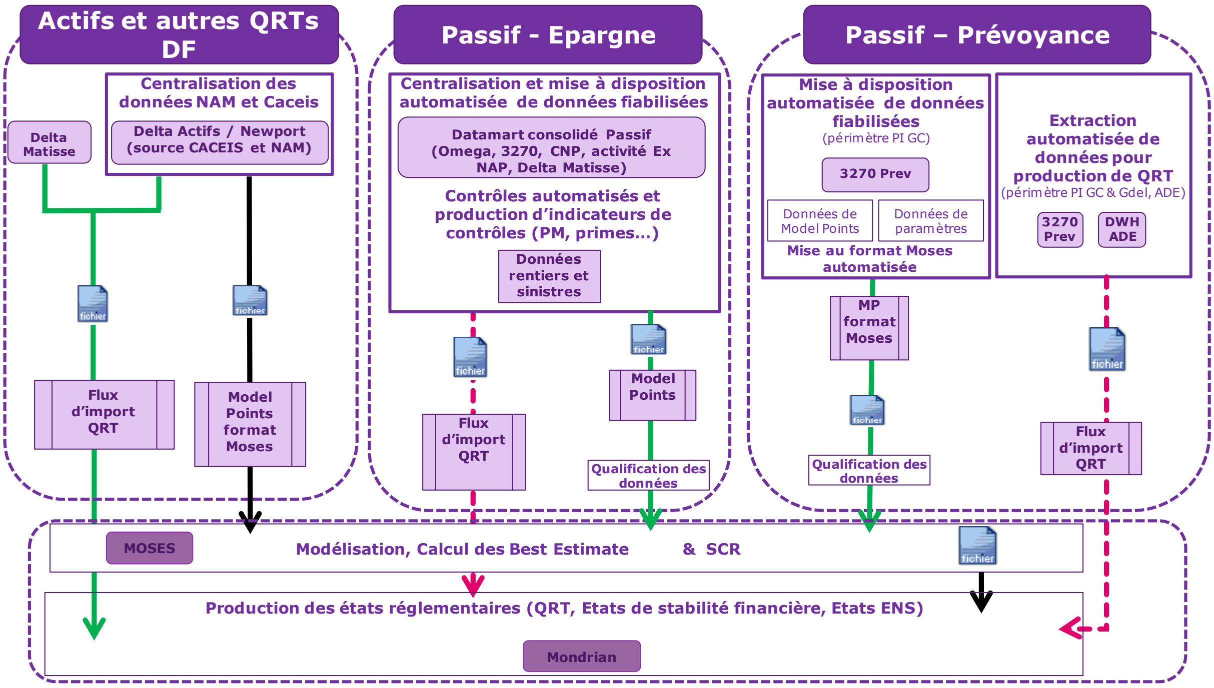


Figure 137 : Schéma de production des QRTs

Notions clefs

Flux d'import :
En informatique, un flux (souvent remplacé par le mot anglais stream) est une suite infinie d'éléments gérés de façon temporelle. Un flux présente ainsi une analogie avec une bande transporteuse où les éléments sont traités séquentiellement, plutôt que globalement.

Les flux ne sont pas traités comme les lots de données - en effet les fonctions usuelles n'y fonctionnent pas de façon globale - parce que les flux sont des données potentiellement illimitées et non pas des données classiques (par définition finies).

Infocentre : exemple 3270 Infocentre Portefeuille
Un infocentre consistait dans les années 70 et 80 à mettre à la disposition d'utilisateurs finaux toute la puissance de calcul d'un ordinateur en temps partagé au moyen de terminaux, de banques de données, de langages (BASIC, FORTRAN, APL…), d'une aide en ligne et d'une équipe d'assistance technique.

Un infocentre était au départ installé sur un ordinateur central (mainframe) équipé de terminaux passifs, cathodiques ou de type machine à écrire. Les systèmes utilisés étaient VM/CMS, MVS/TSO, Multics, VMS ou UNIX. Le Service Bureau d'IBM proposait un infocentre nommé Application System, permettant à des divisions d'une entreprise d'obtenir des réponses rapides sur les produits, les services, les ventes, les livraisons, etc.

L'infocentre en tant que base de données et de services de calcul mis à disposition des utilisateurs a, depuis les années 90, été remplacé par l'informatique décisionnelle, et les concepts de datawarehouse ou entrepôt de données et de datamarts .

Data warehouse :
Le terme entrepôt de données (ou base de données décisionnelle, ou encore data warehouse) désigne une base de données utilisée pour collecter, ordonner, journaliser et stocker des informations provenant de base de données opérationnelles et fournir ainsi un socle à l'aide à la décision en entreprise.

Datamart : exemple Datamart consolidé passif
Un datamart (parfois traduit magasin de données ou comptoir de données) est un sous-ensemble d’un data warehouse destiné à fournir des données aux utilisateurs, et souvent spécialisé vers un groupe ou un type d'affaire.

Techniquement, c'est une base de données relationnelle utilisée en informatique décisionnelle et exploitée en entreprise pour restituer des informations ciblées sur un métier spécifique, constituant pour ce dernier un ensemble d’indicateurs utilisés pour le pilotage de l’activité et l’aide à la décision.

Détails des différents logiciels

Briques systèmes de gestion et systèmes comptables

Les systèmes de gestion sont multiples et reflètent les différents métiers de Natixis Assurances :

- ✓ Epargne individuelle :
  - OMEGA (Graphtalk AIA)
  - Système Assurances Vie Natixis Life (Graphtalk AIA)
  - GESTASS (AS400)
  - BOSS (Pack Solutions)
  - 3270 (2AI)

- ✓ Epargne collective et Prévoyance individuelle
  - 3270 (2AI)
  - Outil article 83
  - Bases de gestion Assurance des Emprunteurs (ADE)

Les systèmes de gestion sont gérés et hébergés sur des serveurs Unix, Windows, AS400 et Mainframe (3270). Les bases de données relationnelles et hiérarchiques sur lesquelles ils s’appuient sont de technologies Oracle, IMS/DB et DB2/AS400 et DL1.

Dans le domaine comptabilité / consolidation, les systèmes utilisés sont les suivants :

- ✓ Comptabilité générale : MATISSE (Peoplesoft)
- ✓ Reporting comptable : Open Executive (CEGID)
- ✓ Comptabilité divisionnaire : Olis FA (CACEIS Fastnet)
- ✓ Consolidation : COPERNIC (BO Finance SAP)

Des décisionnels sont également déployés sur les périmètres suivants :

- ✓ Epargne centralisée
  - En sortie d'OMEGA (Delta Omega)
  - En sortie 3270 (Infocentre Portefeuille)
  - En sortie AS400 (Décisionnel NAP)

- ✓ Epargne déléguée : en sortie de BOSS (Décisionnel NAP)

- ✓ Actif (Décisionnel Delta Financier)

Brique modèle de projection des cash-flows et de calcul du bilan économique, du SCR et du MCR

Le modèle de projection des cash-flows utilisé dans le cadre de l'estimation du besoin de marge de solvabilité au sens Solvabilité II s'appuie majoritairement sur le logiciel MoSes (portefeuille Epargne), qui est le logiciel cible pour l'ensemble du Groupe Natixis Assurances (portefeuilles Epargne, Prévoyance et Rentes).

La solution MoSes est alimentée par un ensemble de fichiers .csv eux-mêmes générés à partir de traitements Excel.

Ces traitements s'appuient sur des données de production brutes issues des systèmes décisionnels ainsi que sur des données ressaisies manuellement. Ils permettent la constitution tant pour l'actif que le passif des model point files (MP). La Solution MoSes permet la projection des cash-flows dans un environnement stochastique à partir des MP ainsi constitués et des hypothèses (scénarios économiques issus d'un GSE, etc.) ou paramètres d'initialisation comptable (provisions réglementaires, etc.).

Des opérations sont effectuées en sortie de modèle, actuellement sous Excel : calcul du SCR (Capital de Solvabilité Requis), du MCR (Minimum de Capital Requis), de la marge de risque, production du bilan prudentiel, etc.

En termes de gestion et gouvernance des risques dans Solvabilité 2, l'outil MoSes utilisé pour le modèle interne s'appuie sur les données réparties selon les domaines suivant :

- ✓ Actif,
- ✓ Epargne individuelle et collective,
- ✓ Prévoyance individuelle (centralisée et déléguée),
- ✓ Assurance des emprunteurs (ADE).

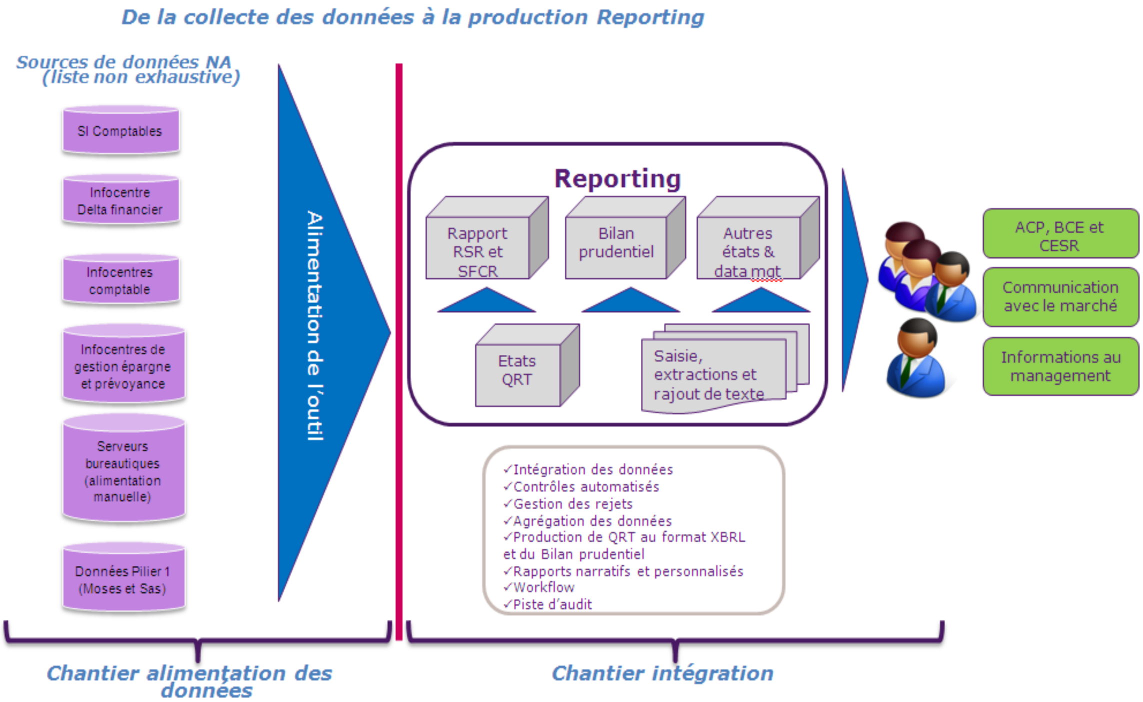


Figure 138 : Chantiers d'alimentation des QRTs

9 Méthodologie de calibrage de ces modèles

Maintenant que nous avons définis nos modèles d'action et de taux, il va nous falloir les calibrer. Le calibrage permet d'ajuster les paramètres du modèle afin de rendre les résultats cohérents. (Retour Synthèse)

En effet, malgré des modèles très performants, si on entre en input des données éloignées de la réalité, les résultats obtenus n'auront aucun sens.

Il existe de nombreuses méthodes de calibrage mais notre étude est ancrée dans l'univers risque-neutre nécessaire au bon fonctionnement de notre générateur de scénarios économiques.

Rappel : Univers risque neutre versus univers historique
Générer ces scénarios économiques peut se faire dans deux univers distincts : en monde réel ou en monde risque neutre.

- L'univers réel consiste à projeter les facteurs de risque sur la base de données historiques. Il traduit l'aversion au risque des acteurs du marché en représentant fidèlement la réalité du marché.
- L'univers risque neutre induit, quant à lui, que les flux futurs générés par un actif sont actualisés au taux sans risque. Complètement fictif, ce monde est idéalisé de manière à ce qu'aucun des acteurs du marché ne soit averse au risque. Il n'y a donc aucune prime de risque associée à une transaction.

Il existe de nombreuses méthodes de calibrage. Notre mémoire étant ancrée dans l'univers risque-neutre, nous avons donc préconisé les méthodes de calibrage inscrites dans cet univers. Par conséquent, il convient d'exclure toute méthode qui repose sur les données historiques.

Un calibrage en univers risque-neutre est un processus d'ajustement, cohérent avec les prix en vigueur sur le marché.

L'Idée est de minimiser l'écart quadratique entre le prix théorique et le prix observé sur le marché.

La démarche sera la suivante. En se basant sur les prix observés sur le marché, nous allons déterminer les paramètres de manière à ce que le prix théorique de notre modèle soit équivalent au prix du marché.

Pour se faire, nous allons nous appuyer sur les prix des produits dérivés présents sur le marché. Cette méthode est cependant appliquée plus aisément aux modèles possédant une formule fermée. Les différents modèles que nous avons étudiés respectent cette dernière condition.
Cependant, le recours à de nombreux paramètres et à des modèles complexes rend long et difficile la démarche qui vise à chercher la valeur des paramètres en univers risque-neutre.

- **Les produits dérivés en référence**

Par définition, un produit dérivé est un instrument financier dont la valeur fluctue suivant l'évolution du taux ou du prix du sous-jacent. Par la suite, nous allons principalement nous intéresser aux prix du call, put, cap et swaption.
Pour rappel, une option est un contrat par lequel le porteur a le droit et non l'obligation d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent à un prix d'exercice fixé à l'avance (strike price) à une date donnée.

- **Implémentation**

Plus loin dans ce mémoire, nous présentons succinctement les différentes étapes qui nous ont permis d'aboutir au calibrage de nos modèles.

Tout d'abord, nous avons obtenu les taux zéro-coupon de maturité T , T qui varie de 6 mois à 10 ans, avec un pas de 6 mois. Ces données sont prises en décembre 2011.

Dans un premier temps, ces données nous ont permis de reconstruire une courbe des taux du marché grâce à un système d'interpolation par splines cubiques.

  - **Volatilité implicite de Black-Scholes (pour les actions)**

La pratique du marché est d'exprimer le prix des actifs selon la volatilité implicite de Black-Scholes. Cette cotation en volatilité implicite fait suite à la diffusion dans une large mesure du modèle de Black-Scholes.

Le concept est le suivant : plus on est à la monnaie, plus la volatilité est basse, et plus on s'en éloigne, plus elle est élevée, c'est ce qu'on appelle le smile de volatilité. Cette vision tend à sous-estimer le prix des options hors de la monnaie.

Néanmoins, comme nous l'avons dit précédemment, nous devons convertir la volatilité en euros, afin de pouvoir comparer les valeurs que l'on obtient avec nos formules fermées .

  - **L'algorithme d'optimisation de Hooke-Jeeves (pour les obligations et actions)**

Pour faire le calibrage risque neutre nous avons utilisé le package dfoptim pour trouver les paramètres des modèles optimaux.

Plus particulièrement, nous avons utilisé la fonction hjkb pour modéliser l'algorithme de Hooke-Jeeves.

Pour un pas de descente pk prédéterminé, on détermine uk+1 en fonction de uk par la méthode de descente. Voici le résultat engendré : uk+1 = uk + pk*dk avec dk la direction de descente.

Dans le cas où uk+1 = uk, le pas est réduit

L'implémentation de l'algorithme de Hooke-Jeeves est une méthode d'optimisation non linéaire qui se présente, sous R, comme ceci hjkb(par,fn,lower=-inf, upper=inf,control=list(), ...)

Avec :

- Par = Vecteur (de paramètre) initial à optimiser
- Fn = Fonction de contrôle d'erreur (pour nous ce sera l'écart quadratique) à minimiser
- Lower = Borne inférieure de l'intervalle de recherche
- Upper = Borne supérieur de l'intervalle de recherche

Cet algorithme prend en entrée la fonction objective non linéaire qui doit être optimisée.

C'est une fonction scalaire qui prend un vecteur réel comme argument et renvoie un scalaire qui est la valeur de la fonction à ce point. Ainsi notre algorithme nous donne la meilleure estimation du vecteur de paramètres.

Exemple pratique de calibration du modèle de Black Scholes

Exemple d'utilisation pour le calibrage du modèle de Black Scholes sous R :

```
## Calibration du modèle de Black-Scholes ##
library(dfoptim)
LB = c(r0,1e-15)
UB = c(r0,2)
param=hjkb(c(r0,1),Ecart_Quad_BS, lower=LB, upper=UB)$par

#Les paramètres sont :
mu_BS_RN=param[1]
sigma_BS_RN=param[2]

# Résultats de l'optimisation
Ecart_Quad_BS(c(mu_BS_RN,sigma_BS_RN))
mu_BS_RN
sigma_BS_RN
```

Figure 139 : Code calibration BS

Le code complet se retrouve dans l'annexe du code R

10 Test du GSE

Market consitency (recherche de la volatilité implicite)

Voici l'algorithme sous R que nous avons utilisé. Tout d'abord, nous implémentons la formule de Black scholes :

```
## Fonction Black-Scholes
BS <-function(S, K, T, r, sig, type="C"){
  d1 <- (log(S/K) + (r + sig^2/2)*T) / (sig*sqrt(T))
  d2 <- d1 - sig*sqrt(T)
  if(type=="C"){
    value <- S*pnorm(d1) - K*exp(-r*T)*pnorm(d2)
  }
  if(type=="P"){
    value <- K*exp(-r*T)*pnorm(-d2) - S*pnorm(-d1)
  }
  return(value)
}
```

Figure 140 : Code R Black Scholes

Ensuite notre algorithme de recherche de la volatilité qui utilise la méthode des bissectrices :

```r
## Fonction pour trouver la volatilité implicite de Black-Scholes en utilisant la méthode de la bisectrice
implied.vol <-function(S, K, T, r, market, type){
  sig <- 0.20
  sig.up <- 1
  sig.down <- 0.001
  count <- 0
  err <- BS(S, K, T, r, sig, type) - market

  ## On répéte la recherche de sigma jusqu'à une erreur suffisament petite ou avoir atteint 100000 itérations

  while(abs(err) > 0.00001 && count<100000){
    if(err < 0){
      sig.down <- sig
      sig <- (sig.up + sig)/2
    }else{
      sig.up <- sig
      sig <- (sig.down + sig)/2
    }
    err <- BS(S, K, T, r, sig, type) - market
    count <- count + 1
  }

  ## On retourne NA si le compteur est à 100000sans trouver de sigma convenable
  if(count==100000){
    return(NA)
  }else{
    return(sig)
  }
}
```
Figure 141: Code R pour rechercher la volatilité implicite

11 Réglementation des BE

Réglementation des provisions techniques sous Solvabilité 2

1. Provisions techniques : Principe de calcul de la meilleure estimation

Article R351-2
« I.- La valeur des provisions techniques prudentielles, mentionnées à l'article L. 351-2, est égale à la somme de la meilleure estimation et de la marge de risque.

1) La meilleure estimation correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs compte tenu de la valeur temporelle de l'argent estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente, soit la valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs.

Le calcul de la meilleure estimation est fondé sur des informations actualisées et crédibles et des hypothèses réalistes et fait appel à des méthodes actuarielles et statistiques adéquates, applicables et pertinentes. »

Rappel : Provisions techniques = meilleure estimation + marge pour Risque

Rappelons tout d'abord la définition du Best Estimate selon le code des assurances :

> *Article R351-2*
> *« La projection en matière de flux de trésorerie utilisée dans le calcul de la meilleure estimation tient compte de toutes les entrées et sorties de trésorerie nécessaires pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance, pendant toute la durée de ceux-ci.*
>
> *La meilleure estimation est calculée brute, sans déduction des créances découlant des contrats de réassurance et des véhicules de titrisation. Le montant de ces créances est calculé séparément, conformément à l'article R. 351-12.*
>
> *L'ensemble des contrats qui donnent naissance aux engagements précités à prendre en compte est défini à l'article 17 du règlement délégué (UE) n° 2015/35 de la Commission du 10 octobre 2014. Les frontières de ces contrats sont définies à l'article 18 du même règlement.*
>
> *Les exigences relatives à la qualité des données et aux conditions dans lesquelles des approximations sont autorisées sont définies aux articles 19 à 21 du même règlement.*
>
> *Les hypothèses à utiliser pour le calcul des provisions techniques prudentielles sont définies aux articles 22 à 26 du même règlement.*
>
> *Les modalités de projections des flux de trésorerie sont définies aux articles 28 à 36 du même règlement.*
>
> *La courbe des taux sans risques pertinente est définie aux articles 43 à 61 du même règlement. »*

12 Les différents Bilans trouvés à t=0 Modèle ALM Simplifié

Le calcul du SCR nous a donné les valeurs bilans en t=0, voici nos résultats :

Bilan en valeur comptable

	En montants réels	**En base 100**
Actif	1 419 902 288,97	100
OBLIG_TAUX_VAR	993 931 602,28	70
ACTION	425 970 686,69	30
CASH	0	
	En montants réels	**En base 100**
Passif	1 419 902 288,97	100
FP	0,00	0
PM	1 419 902 288,97	100

Figure 142 : Bilan Comptable

Bilan pour le couple VAS BS (en valeur marché)

Actif	1 523 639 620,00
OBLIG_TAUX_VAR	1 097 668 933,00
ACTION	425 970 687,00
CASH	0

Passif	1 523 639 620,00
FP	40 686 582,00
BE	1 482 953 038,00
RM	0

Figure 143: Bilan Vas BS

Bilan pour le couple HW BS (en valeur marché)

Actif	1 432 405 283,00
OBLIG_TAUX_VAR	1 006 434 596,00
ACTION	425 970 687,00
CASH	0

Passif	1 432 405 283,00
FP	58 637 762,00
BE	1 373 767 521,00
RM	0

Figure 144 : Bilan HW BS

Pour le couple VAS MER

Actif	1 523 639 620,00
OBLIG_TAUX_VAR	1 097 668 933,00
ACTION	425 970 687,00
CASH	0

Passif	1 523 639 620,00
FP	47 799 566,00
BE	1 475 840 054,00
RM	0

Figure 145 : Bilan Vas Mer

Pour le couple HW MER

Actif	1 432 405 283,00
OBLIG_TAUX_VAR	1 006 434 596,00
ACTION	425 970 687,00
CASH	0

Passif	1 432 405 283,00
FP	65 441 525,00
BE	1 366 963 758,00

RM	0

Figure 146 : Bilan HW Mer

Pour le couple CIR BS

Actif	1 425 051 554,00
OBLIG_TAUX_VAR	999 080 867,00
ACTION	425 970 687,00
CASH	0

Passif	1 425 051 554,00
FP	57 902 390,00
BE	1 367 149 164,00
RM	0

Figure 147 : Bilan CIR++ BS

Pour le couple CIR Mer

Actif	1 425 051 554,00
OBLIG_TAUX_VAR	999 080 867,00
ACTION	425 970 687,00
CASH	0

Passif	1 425 051 554,00
FP	64 706 153,00
BE	1 360 345 401,00
RM	0

Figure 148 : Bilan CIR++ Mer

Remarque : Les SCR sont d'environ 115 millions d'euros pour chaque cas étudiés or les fonds propres que nous trouvons en valeur marché vont de 40 à 65 millions d'euros.

Ils ne permettent pas d'absorber les chocs étudiés. Une solution serait de rajouter des fonds propres et donc du cash dans les différents cas.

Prenons le cas Vasicek-Black Scholes, si l'on veut 200 millions d'euros de fonds propres au passif, notre bilan devient :

Actif	1 684 962 780,00
OBLIG_TAUX_VAR	1 099 678 675,00
ACTION	425 970 687,00
CASH	159 313 418

Passif	1 691 043 435,00
FP	200 000 000,00
BE	1 491 043 435,00

Figure 149: Bilan modifié Vas BS

Le bilan en valeur comptable devient

	En montants réels	En base 100
Actif	1 579 215 706,97	100
OBLIG_TAUX_VAR	993 931 602,28	63
ACTION	425 970 686,69	27
CASH	159 313 418,00	10
	En montants réels	**En base 100**
Passif	1 579 215 706,97	
FP	165 394 073	10
PM	1 419 902 289	90

Figure 150 : Bilan comptable modifié

13 Les différences des modèles ALM Simplifié vs ALM Complexifié

Si on résume les différences des deux modèles ALM, l'on peut produire le tableau suivant :

	Actif	Risques	Gestion des bénéfices
Modèle simplifié	70% Obligations 30% Actions	Risques action et de taux	Les bénéfices sortent chaque années
Modèle complexifié	75% Obligations 5% Actions 20% Trésorerie	Risques action, taux, mortalité et rachat	Les bénéfices sont réinvestis suivant les règles de gestion

	GSE (nombre de scénario pour les instrume	BE (flux sortant pris en compte)	SCR
Modèle simplifié	10 000	Gains des actions et des obligations	SCR risque de marché
Modèle complexifié	10 000	Rachats et décés des assurés	SCR risque de marché et risque de souscriptions

	Commentaire
Modèle simplifié	GSE utilisable pour des missions de conseil (audits de GSE, inputs pour calcul de BE/SCR)
Modèle complexifié	GSE utilisable pour des missions de conseil (audits de GSE, inputs pour calcul de BE/SCR) et modèle ALM sous réserve de test plus poussé utilisable pour mission de conseil (peut être à traduire en R)

14 Résultats d'études sur les variations de BE et SCR provenant de variation de modèle du GSE

Mémoire IA ou étude	Modèles	Hypothèses principales	Ecart de BE	Commentaire
Mémoire : Implémentation et calibrage d'un GSE : impact sur la volatilité du Solvency Capital Requirement	Modèle de Hull & White et Modèle G2++	Les contrats d'assurance modélisés sont regroupés en groupes homogènes (model points). 45 models points sont d´efinis dans cette étude. Ils sont différenciés par les facteurs discriminants suivants : • Taux de chargement sur encours ; • TMG brut ; • Taux de participation aux b´en´efices contractuel ; • Ancienneté fiscale. Chaque ligne de model point repr´esente un groupe de contrats portant les caract´eristiques moyennes suivantes : • PM ouverture moyenne ; • Age moyen ; • Sexe ; • Nombre de polices. Le TMG relatif aux contrats modélisés prend les valeurs dans l'intervalle [0% ;2%], la moyenne du TMG est de 1%. Le taux de participation aux bénéfices contractuel est considéré identique pour chaque model point et s'élève `a 90%. Le taux chargement sur encours est pris dans l'intervalle [0,5% ;0,9%], la moyenne s´'el`eve `a 0,7%. Le taux de frais réel est renseigné au global et s'élève à 0,4%. Modélisation de l''actif : Notre portefeuille obligataire est composé de 70% d'obligations d'Etat et de 30% d'obligations corporate notées AA.	Ecart BEL HW-G2++ = -0,05%	Ecart PVFP 1,16%
Mémoire : Effet du choix des modèles et de leur calibrage dans le GSE sur le bilan	Vasicek a deux facteurs G2++	Voici quelques variables financiéres : le TMG est de 0% la cotisation est unique et est egale à 100, la valeur de l'engagement initiale V E0 est donc egale à 100 le taux de marché annuel dans chaque scénario est egal au taux 10 ans il n'y a pas de frais appliqués	Comparaison des BE sans revalo-risation et sans rachats conjoncturels: Ecart BE ~0,6% Comparaison des BE avec une politique de revalorisation généreuse : Ecart BE ~1,6% Comparaison des BE avec une politique de revalorisation suivant le taux de marché : Ecart BE ~1,9% Comparaison des BE avec une politique de revalorisation peu généreuse : Ecart BE ~1,6%	Utilisation d'option Swaption
Impact des modéles de taux sur les evaluations Solvabilité 2 en assurance vie	G2++, HW, LMN	Pour être repr esentatif de la situation des assureurs en France, l'actif du bilan étudié est créé à partir des statistiques du rapport de l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR) de la situation des principaux organismes d'assurance en 2015. Le portefeuille obligataire se subdivise en cinq classes de notations (de C a AAA). La maturité de toutes les obligations est de 10 ans et la duration du portefeuille obligataire est de 9 ans. Par l'ancienneté du portefeuille et la chute des taux, l'assureur constate des plus-values latentes de 11% sur ses obligations. Le spread obligataire r esultant est estimé à 0.3%. Les autres poches d'actifs sont les actions, l'immobilier, le monetaire et les Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobiliéres (OPCVM) obligataires. A part l'actif monétaire, tous sont supposés en plus-value latente de 4%. Au passif, l'assureur posséde un portefeuille de contrats euro synthétis e en un seul model point . Les contrats en stock possédent un taux minimum garanti (TMG) de 0%. De plus, l'assureur s'engage contractuellement a reverser chaque ann ee 95% des produits financiers à l'assuré. Le model-point présente un âge de 60 ans. La provision mathématique initiale du model point est de 96 millions d'euros. L'assureur posséde également une Provision pour Participation aux Excédents (PPE) de 4 millions d'euros equirépartie sur les 8 années à venir (soit 8 x 500 000 euros). Enfin, la r eserve de capitalisation est de 2 000 000 d'euros.	Pour support Euro, hors modèle LMN : Ecart SCR ~0%	Le modèle LMN implique des écarts plus important
Impacts du GSE sur les éléments de bilan Cas des risques de long terme (SIA)	HW et LMM+			Modèle LMN + et HW avec conditions de marché "normales"
Etude Cardif	Confidentiel	Confidentiel	Ecart BE 0,5% et Ecart SCR 5%	Confidentiel