Une histoire de mathématiques à écouter sur

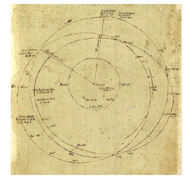
hist-math.fr

0 Les trois corps

histoires d'astronomie

Les trois corps

héritiers de Newton



hist-math.fr Bernard YCART

Une fois de plus, nous allons parler des « Principes mathématiques de la philosophie naturelle » de Newton. Je sais, ça fait beaucoup, mais que voulez-vous : c'est le livre le plus important de la science moderne. Comme ce n'est pas la première fois que je vous assène cette vérité abrupte, il serait peut-être temps que je vous dise pourquoi, vous ne croyez pas ?

Écoutez d'abord Laplace.

1 il restera comme monument

« D'autres présenteront sous un point de vue plus général et plus simple, les théories exposées dans le livre des Principes, et toutes les vérités qu'il a fait éclore ; mais il restera comme monument de la profondeur du génie qui nous a révélé la plus grande loi de l'univers. »

Et s'il y a quelqu'un qui était bien placé pour parler de toutes les vérités que Newton a fait éclore, c'est Laplace. Il a consacré la plus grande partie de sa carrière à développer les conséquences mathématiques des Principia de Newton.

Écoutez maintenant Delambre, dans son éloge funèbre de Lagrange.

il restera comme monument
Laplace, Exposition du système du monde (1827)

D'autres présenteront sous un point de vue plus général et plus simple, les théories exposées dans le livre des Principes, et toutes les vérités qu'il a fait éclore ; mais il restera comme monument de la profondeur du génie qui nous a révélé la plus grande loi de l'univers.

2 le premier inventeur conservera son rang

« Ce fut pour eux une bien bonne fortune que le système du monde, découvert par Newton. Jamais l'analyse transcendante ne pouvait trouver un sujet plus digne et plus grand ; quelques progrès qu'on y fasse, le premier inventeur conservera son rang ; aussi M. Lagrange, qui le citait souvent comme le plus grand génie qui eût jamais existé, ajoutait-il aussitôt : *et le plus heureux ; on ne trouve qu'une fois un système du monde à établir*. Il a fallu cent ans de travaux et de découvertes pour élever l'édifice dont Newton avait posé les fondements, mais on lui tient compte de tout, et l'on suppose qu'il a parcouru en entier la carrière qu'il avait ouverte avec un éclat qui a dû encourager ses successeurs. »

le premier inventeur conservera son rang
Delambre, Notice sur la vie et les ouvrages de M. le comte Lagrange (1814)

Ce fut pour eux une bien bonne fortune que le système du monde, découvert par Newton. Jamais l'Analyse transcendante ne pouvait trouver un sujet plus digne et plus grand ; quelques progrès qu'on y fasse, le premier inventeur conservera son rang ; aussi M. Lagrange, qui le citait souvent comme le plus grand génie qui eût jamais existé, ajoutait-il aussitôt : *et le plus heureux ; on ne trouve qu'une fois un système du monde à établir*. Il a fallu cent ans de travaux et de découvertes pour élever l'édifice dont Newton avait posé les fondements, mais on lui tient compte de tout, et l'on suppose qu'il a parcouru en entier la carrière qu'il avait ouverte avec un éclat qui a dû encourager ses successeurs.

3 Émilie du Châtelet (1706–1749)

Nous n'allons pas explorer le contenu entier des Principia, simplement quelques aspects qui concernent les calculs de trajectoires. Comme d'habitude, j'utiliserai la traduction d'Émilie du Châtelet. L'édition définitive date de 1759, dix ans après la mort d'Émilie, 32 après celle de Newton,... et 72 ans après la première édition des Principia.

Vous vous souvenez qu'il a fallu tout ce temps pour que l'héritage gigantesque de ce livre soit accepté. Il a fallu se débarrasser des tourbillons cartésiens, et accepter la gravitation universelle. Il a fallu surtout accumuler des calculs et des preuves expérimentales. La plus éclatante a été acquise trois mois avant la publication de la traduction d'Émilie du Châtelet. C'est la prédiction correcte du retour de la comète de Halley par Clairaut, aidé de Lalande et Nicole-Reine Lepaute. Mais tout cela, je vous le raconte ailleurs.

Alors voyons, que trouve-t-on de si extraordinaire dans ce livre ?

Émilie du Châtelet (1706–1749)
Newton, Principes mathématiques de la philosophie naturelle (1759)

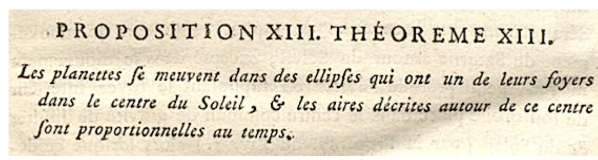
4 Lois de Kepler exactes

D'abord une démonstration rigoureuse des lois de Kepler, à partir du seul principe de la gravitation universelle. Vous voyez ici la Proposition 13 du Livre 3 : « Les planètes se meuvent dans des ellipses qui ont un de leurs foyers dans le centre du Soleil, et les aires décrites autour de ce centre sont proportionnelles au temps ». Ce sont les deux premières lois de Kepler.

C'est un succès éclatant. Il a été acquis dans le Livre I par une suite de propositions théoriques, dans le style des Éléments d'Euclide. Malheureusement il ne concerne qu'une idéalisation de la réalité : celle où chaque planète, de masse négligeable par rapport au Soleil, ne subirait qu'une seule attraction, celle du Soleil.

Newton en est parfaitement conscient, et il a déjà préparé le terrain dans le même Livre I, par des propositions... nettement moins euclidiennes.

Lois de Kepler exactes
Newton, Principes mathématiques de la philosophie naturelle (1759)


PROPOSITION XIII. THÉOREME XIII.

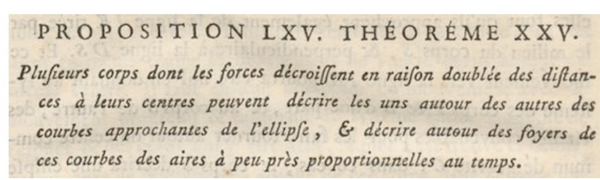
Les planettes se meuvent dans des ellipses qui ont un de leurs foyers dans le centre du Soleil, & les aires décrites autour de ce centre sont proportionnelles au temps.

5 Lois de Kepler approximatives

« Plusieurs corps dont les forces décroissent en raison doublée des distances à leurs centres peuvent décrire les uns autour des autres des courbes approchantes de l'ellipse, et décrire autour des foyers de ces courbes, des aires à peu près proportionnelles au temps. »

Eh oui : les lois de Kepler ne sont que des approximations. La question se pose alors de l'universalité de la gravitation. L'attraction en inverse du carré de la distance ne serait-elle aussi qu'une première approximation ? Newton est persuadé que non : si les mouvements observés diffèrent des lois de Kepler c'est à cause du même principe, qui crée des forces d'attraction avec les autres éléments du système solaire. Il y a plusieurs cas où ces autres forces ne peuvent pas être négligées. L'un d'eux est celui de l'interaction entre Jupiter et Saturne, qui toutes deux sont des planètes beaucoup plus massives que la Terre.

Lois de Kepler approximatives
Newton, Principes mathématiques de la philosophie naturelle (1759)


PROPOSITION LXV. THÉORÉME XXV.

Plusieurs corps dont les forces décroissent en raison doublée des distances à leurs centres peuvent décrire les uns autour des autres des courbes approchantes de l'ellipse, & décrire autour des foyers de ces courbes des aires à peu-près proportionnelles au temps.

6 L'action de Jupiter sur Saturne

« L'action de Jupiter sur Saturne ne doit pas être absolument négligée », dit Newton. Après un calcul de proportion, il trouve qu'elle peut atteindre un deux-cent-onzième de l'action du Soleil. Il conclut : « Et de là vient que l'orbe de Saturne est dérangé si sensiblement dans chaque conjonction avec Jupiter, que les astronomes s'en aperçoivent. »

L'action de Jupiter sur Saturne

Newton, Principes mathématiques de la philosophie naturelle (1759)

Cependant l'action de Jupiter ſur Saturne ne doit pas être abſolument négligée : car la gravité vers Jupiter eſt à la gravité vers le Soleil (à diſtances égales) comme 1 à 1067 ; donc, dans la conjonction de Jupiter & de Saturne, la diſtance de Saturne à Jupiter étant à ſa diſtance au Soleil à peu près comme 4 à 9, la gravité de Saturne vers Jupiter ſera à ſa gravité vers le Soleil comme 81 à 16 × 1067 ou comme 1 à 211 à peu près. Et delà vient que l'orbe de Saturne eſt dérangé ſi ſenſiblement dans chaque conjonction avec Jupiter, que les Aſtronomes s'en apperçoivent.

7 Tous les mouvements de la Lune

Mais le cas le plus important, et de loin, est celui des satellites, tout particulièrement de la Lune. « Les mouvements de ces petites planètes, dit Newton, doivent être troublés de plusieurs façons par l'action du Soleil qui doit causer des inégalités dans leur mouvement telles qu'on en remarque dans notre Lune. »

Mais il a confiance dans sa loi : « Tous les mouvements de la Lune, et toutes ses inégalités sont une suite et se tirent des principes qu'on a posés ci-dessus. »

Pourtant en réalité, il est beaucoup moins assuré qu'il le voudrait. Il a longtemps cherché une prédiction théorique des mouvements lunaires, sans succès. Et c'est probablement la raison principale pour laquelle il a tant tardé à rédiger, alors qu'il avait découvert la gravitation universelle dès son année miraculeuse, 20 ans avant les Principia.

Tous les mouvements de la Lune

Newton, Principes mathématiques de la philosophie naturelle (1759)

PROPOSITION XXII. THÉORÉME XVIII.

Tous les mouvemens de la Lune, & toutes ſes inégalités ſont une ſuite & ſe tirent des principes qu'on a poſés ci-deſſus.

Pendant que les grandes planettes ſont portées autour du Soleil, elles peuvent emporter dans leur révolution d'autres planettes plus petites, qui tournent autour d'elles dans des ellipſes dont le foyer eſt placé dans le centre des grandes planettes, ce qui eſt clair par la Prop. 65. du Liv. 1. Les mouvemens de ces petites planettes, doivent être troublés de pluſieurs façons par l'action du Soleil qui doit cauſer des inégalités dans leur mouvement telles qu'on en remarque dans notre Lune ; car dans les ſyzygies cette

8 *Lunæ Theoria* Newtoniana

Il n'a écrit sa théorie de la Lune qu'en 1702, quinze ans après les Principia. Et encore, ce ne sont que quelques pages de résultats numériques, qui seraient presque passées inaperçues, sans Daniel Gregory. C'est le neveu du James Gregory des développements en série. Il est professeur d'astronomie à Oxford et fait tout ce qu'il peut pour promouvoir la théorie de Newton. C'est dans ce but qu'il écrit ces Éléments d'astronomie physique et géométrique. On ignore pourquoi Newton a accepté, ou demandé, que sa « Théorie newtonienne de la Lune » paraisse dans ce manuel.

Lunæ Theoria Newtoniana

David Gregory, Astronomiæ physicæ & geometricæ elementa (1702)

Lunæ Theoria Newtoniana.

'Obſervatorium *Grenovicenſe* occidentalius eſt *Pariſienſi* $2^{gr}. 19'$,
'*Uraniburgo* $12^{gr}. 51'. 30''$ & *Gedano* $18^{gr}. 48'$.
'Solis & Lunæ Motus medios ab Æquinoctio verno in Meridi-
'ano *Grenovicenſi* pono ſequentes: nempe *Anno* 1680 *Decembris*
'Die ultimo *Stylo Juliano* Meridie, Motus medius Solis eſt $9^{sig}. 20^{gr}.$
'$34'. 46''$. Apogæi Solis $3^{sig}. 7^{gr}. 23'. 30''$. Motus medius Lunæ $6^{sig}.$
'$1^{gr}. 35'. 45''$. Apogæi Lunæ $8^{sig}. 4^{gr}. 28'. 5''$. Nodi aſcendentis Or-
'bitæ Lunaris $5^{sig}. 24^{gr}. 14'. 35''$. Et *Anno* 1700. *Decembris* Die
'ultimo *Stylo Juliano* Meridie, Motus medius Solis eſt $9^{sig}. 20^{gr}. 43'.$
'$50''$. Apogæi Solis $3^{sig}. 7^{gr}. 44'. 30''$. Motus medius Lunæ $10^{sig}.$
'$15^{gr}. 19'. 50''$. Apogæi Lunæ $11^{sig}. 8^{gr}. 18'. 20''$. & Nodi aſcendentis $4^{sig}.$
'$27^{gr}. 24'. 20''$. Viginti enim Annis *Julianis*, ſive diebus 7305, Solis
'motus eſt $20^{rev}. 0^{sig}. 0^{gr}. 9'. 4''$. Motus Apogæi Solis $21'. 00''$. Lunæ

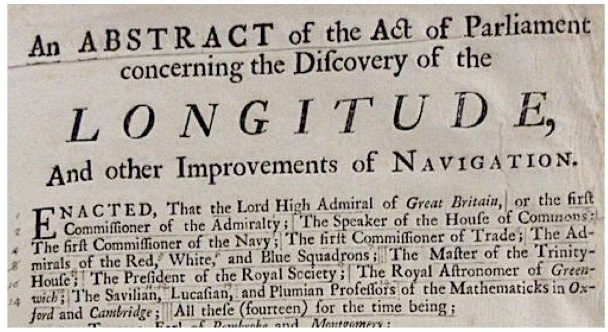
9 Longitude Act (1714)

Si une théorie fiable de la Lune est aussi importante, c'est à cause des applications à la navigation qu'elle pourrait avoir. Un des succès des Principia est la théorie des marées, que Newton explique par l'attraction de la Lune et du Soleil. Grâce à lui, les horaires et les amplitudes des marées en un lieu donné sont théoriquement prédictibles… pourvu que l'on sache calculer la position de la Lune. L'autre application, encore plus importante, est la détermination des longitudes.

Vous voyez ici le Longitude Act, promettant une récompense faramineuse à qui sera capable de calculer les longitudes en mer avec moins d'un degré de précision. Au tout début du dix-huitième siècle, les mathématiciens pensent encore que la solution passe par l'astronomie : soit les éclipses des satellites de Jupiter, soit la trajectoire de la Lune. Mais pour cela, il faudrait disposer de tables fiables, et donc savoir les calculer avec précision.

Ce n'est que longtemps après Newton qu'une théorie de la Lune pourra être enfin, en accord complet avec les observations.

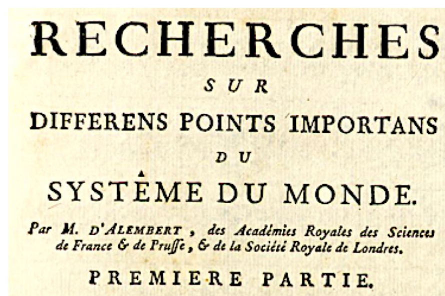
Longitude Act (1714)


An ABSTRACT of the Act of Parliament concerning the Discovery of the LONGITUDE, And other Improvements of NAVIGATION.

ENACTED, That the Lord High Admiral of *Great Britain*, or the first Commissioner of the Admiralty; The Speaker of the House of Commons; The first Commissioner of the Navy; The first Commissioner of Trade; The Admirals of the Red, White, and Blue Squadrons; The Master of the Trinity-House; The President of the Royal Society; The Royal Astronomer of *Greenwich*; The Savilian, Lucasian, and Plumian Professors of the Mathematicks in *Oxford* and *Cambridge*; All these (fourteen) for the time being;

10 Recherches sur le Système du Monde (1754)

Recherches sur le Système du Monde (1754)
Jean le Rond dit d'Alembert (1717–1783)


RECHERCHES
SUR
DIFFERENS POINTS IMPORTANS
DU
SYSTÊME DU MONDE.
Par M. D'ALEMBERT, des Académies Royales des Sciences de France & de Prusse, & de la Société Royale de Londres.
PREMIERE PARTIE.

Les plus grands y ont travaillé. Je vous ai déjà parlé de Lagrange et Laplace. Avant eux, il y avait eu Euler bien sûr, Clairaut qui est le principal artisan de la prédiction du retour de la comète, et d'Alembert.

D'Alembert publie ses « Recherches sur différents points importants du système du monde » en 1754, cinq ans avant le retour de la comète de Halley. Parlant de Newton, il dit :

11 il laissoit encore beaucoup à faire

« Malgré tout le cas qu'on doit faire de la Théorie de M. *Newton* sur la Lune, malgré les tables qui ont résulté de cette théorie, il s'en faut beaucoup que cette matière soit épuisée.

Quelque lumière qu'il ait portée dans le système de l'univers, il n'a pu manquer de sentir qu'il laissait encore beaucoup à faire à ceux qui le suivraient.

Il suffit à sa gloire, que plus d'un demi-siècle se soit écoulé sans qu'on ait presque rien ajouté à sa Théorie de la Lune ; et il y a peut-être plus loin du point où il est parti à celui où il est parvenu, que du point où il en est resté à celui auquel nous pouvons maintenant atteindre. »

Ce demi-siècle aura au moins servi à comprendre d'où vient le problème.

il laissoit encore beaucoup à faire
d'Alembert, Recherches sur le système du monde (1754)

Malgré tout le cas qu'on doit faire de la Théorie de M. *Newton* sur la Lune, malgré les Tables qui ont résulté de cette théorie il s'en faut beaucoup que cette matière soit épuisée.

[…] Quelque lumiére qu'il ait portée dans le système de l'univers, il n'a pû manquer de sentir qu'il laissoit encore beaucoup à faire à ceux qui le suivroient.

[…] Il suffit à sa gloire, que plus d'un demi sècle se soit écoulé sans qu'on ait presque rien ajouté à sa Théorie de la Lune ; & il y a peut-être plus loin du point où il est parti à celui où il est parvenu, que du point où il en est resté à celui auquel nous pouvons maintenant atteindre.

12 C’est là le fameux problème

« La question se réduit donc à déterminer l’orbite que la Lune décrit en vertu de l’action que la Terre et le Soleil exercent sur elle ; et cette question quoique déjà très réduite dans cet énoncé, renferme encore assez de difficultés, pour qu’on ne soit pas tenté d’y en ajouter de nouvelles. C’est là le fameux problème que les géomètres ont appelé *Problème des trois corps*, parce qu’il consiste à déterminer l’orbite d’un corps céleste, attiré par deux autres. »

On peut se faire une idée de l’importance que l’on donnait à l’époque à cette question, en lisant les sujets des prix de l’Académie royale des sciences.

C’est là le fameux problème

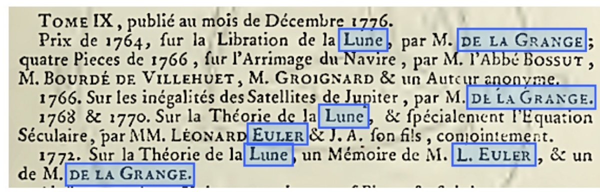
d’Alembert, Recherches sur le système du monde (1754)

La question se réduit donc à déterminer l’orbite que la Lune décrit en vertu de l’action que la Terre et le Soleil exercent sur elle ; et cette question quoique déjà très-réduite dans cet énoncé, renferme encore assez de difficultés, pour qu’on ne soit pas tenté d’y en ajouter de nouvelles. C’est là le fameux Problême que les Géomètres ont appellé *Problème des trois corps*, parce qu’il consiste à déterminer l’orbite d’un corps céleste, attiré par deux autres.

13 Prix de l’Académie Royale des Sciences (1764–1772)

Voici ceux de 1764 à 1772. Il y a eu quatre mémoires sur la Lune, et un sur les satellites de Jupiter. À eux deux, Lagrange et Euler ont trusté tous les prix.

Prix de l’Académie Royale des Sciences (1764–1772)



TOME IX, publié au mois de Décembre 1776.
Prix de 1764, fur la Libration de la Lune, par M. DE LA GRANGE; quatre Pieces de 1766, fur l’Arrimage du Navire, par M. l’Abbé BOSSUT, M. BOURDÉ DE VILLEHUET, M. GROIGNARD & un Auteur anonyme.
1766. Sur les inégalités des Satellites de Jupiter, par M. DE LA GRANGE.
1768 & 1770. Sur la Théorie de la Lune, & fpécialement l’Equation Séculaire, par MM. LÉONARD EULER & J. A. fon fils, conjointement.
1772. Sur la Théorie de la Lune, un Mémoire de M. L. EULER, & un de M. DE LA GRANGE.

14 Pierre Simon Laplace (1749–1827)

Dans la génération d’après Lagrange, le personnage central est Laplace. Jusqu’à sa mort, il travaillera sur son monumental Traité de Mécanique Céleste. Il y prend bien soin de reconnaître ce qu’il doit à ses prédécesseurs.

Pierre Simon Laplace (1749–1827)

Traité de Mécanique Céleste (1798–1824)

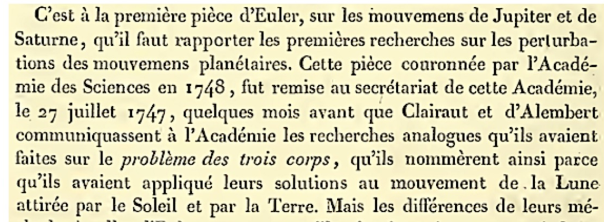
15 Cette pièce fut remise le 27 juillet 1747

« C'est à la première pièce d'Euler, sur les mouvements de Jupiter et de Saturne, qu'il faut rapporter les premières recherches sur les perturbations des mouvements planétaires. Cette pièce fut remise le 27 juillet 1747, quelques mois avant que Clairaut et d'Alembert communiquassent à l'Académie les recherches analogues qu'ils avaient faites sur le *problème des trois corps*, qu'ils nommèrent ainsi parce qu'ils avaient appliqué leurs solutions au mouvement de la Lune attirée par le Soleil et par la Terre. »

Depuis le milieu du dix-huitième siècle au moins, et jusqu'au vingtième, le problème des trois corps est resté la pierre d'achoppement des systèmes d'équations différentielles. Écoutez ce qu'en dit Henri Poincaré en 1890. Il est l'auteur des avancées les plus importantes depuis Laplace.

Cette pièce fut remise le 27 juillet 1747

Laplace, Traité de Mécanique Céleste, Tome 5 (1824)



C'est à la première pièce d'Euler, sur les mouvemens de Jupiter et de Saturne, qu'il faut rapporter les premières recherches sur les perturbations des mouvemens planétaires. Cette pièce couronnée par l'Académie des Sciences en 1748, fut remise au secrétariat de cette Académie, le 27 juillet 1747, quelques mois avant que Clairaut et d'Alembert communiquassent à l'Académie les recherches analogues qu'ils avaient faites sur le *problème des trois corps*, qu'ils nommèrent ainsi parce qu'ils avaient appliqué leurs solutions au mouvement de la Lune attirée par le Soleil et par la Terre. Mais les différences de leurs mé-

16 certaines solutions particulières

« Je suis bien loin d'avoir résolu complètement le problème que j'ai abordé. Je me suis borné à démontrer l'existence de certaines solutions particulières remarquables que j'appelle solutions périodiques, solutions asymptotiques, et solutions doublement asymptotiques. J'ai étudié plus spécialement un cas particulier du problème des trois corps, celui où l'une des masses est nulle et où le mouvement des deux autres est circulaire ; j'ai reconnu que dans ce cas les trois corps repasseront une infinité de fois aussi près que l'on veut de leur position initiale, à moins que les conditions initiales du mouvement ne soient exceptionnelles. »

En 1927, on célèbre le double centenaire, de la mort de Newton et de celle de Laplace. Le secrétaire perpétuel de l'Académie, Émile Picard, y va de son discours.

certaines solutions particulières

Poincaré, Le problème des trois corps (1890)

Je suis bien loin d'avoir résolu complètement le problème que j'ai abordé. Je me suis borné à démontrer l'existence de certaines solutions particulières remarquables que j'appelle solutions périodiques, solutions asymptotiques, et solutions doublement asymptotiques. J'ai étudié plus spécialement un cas particulier du problème des trois corps, celui où l'une des masses est nulle et où le mouvement des deux autres est circulaire ; j'ai reconnu que dans ce cas les trois corps repasseront une infinité de fois aussi près que l'on veut de leur position initiale, à moins que les conditions initiales du mouvement ne soient exceptionnelles.

17 Un double centenaire : Newton et Laplace (1927)

« Malgré d'immenses efforts, le problème primordial de la mécanique céleste, celui du mouvement de plusieurs points matériels s'attirant suivant la loi de Newton, n'a pas fait au point de vue pratique de progrès sensibles depuis le temps de Lagrange et de Laplace ; il faut toujours recourir à des séries divergentes dont le calcul est très laborieux. »

Voici ce qu'en disait Laplace au tout début de sa carrière.

Un double centenaire : Newton et Laplace (1927)

Émile Picard (1856–1941)

Malgré d'immenses efforts, le problème primordial de la Mécanique céleste, celui du mouvement de plusieurs points matériels s'attirant suivant la loi de Newton, n'a pas fait au point de vue pratique de progrès sensibles depuis le temps de Lagrange et de Laplace ; il faut toujours recourir à des séries divergentes dont le calcul est très laborieux.

18 Recherches sur le calcul intégral ... (1772)

L'article est intitulé : « Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde. »

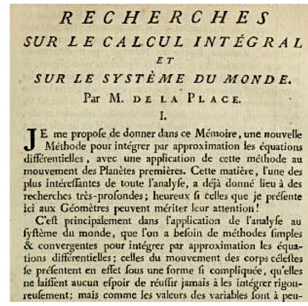
« Je me propose de donner dans ce mémoire, une nouvelle méthode pour intégrer par approximation les équations différentielles, avec une application de cette méthode au mouvement des planètes premières.

C'est principalement dans l'application de l'analyse au système du monde, que l'on a besoin de méthodes simples et convergentes, pour intégrer par approximation les équations différentielles ; celles du mouvement des corps célestes se présentent en effet sous une forme si compliquée, qu'elles ne laissent aucun espoir de réussir jamais à les intégrer rigoureusement. »

Laplace exprime ici une idée, que je vais développer dans la suite de cette histoire. La détermination des trajectoires des corps célestes est un problème à la fois si important, et si compliqué, qu'il a suscité le développement de nombreuses méthodes d'approximation. On en trouve déjà dans les Principia naturalis.

Recherches sur le calcul intégral ... (1772)

Pierre Simon Laplace (1749–1827)



RECHERCHES
SUR LE CALCUL INTÉGRAL
ET
SUR LE SYSTÈME DU MONDE.
Par M. DE LA PLACE.
I.

JE me propofe de donner dans ce Mémoire, une nouvelle Méthode pour intégrer par approximation les équations différentielles, avec une application de cette méthode au mouvement des Planètes premières. Cette matière, l'une des plus intéreffantes de toute l'analyfe, a déjà donné lieu à des recherches très-profondes; heureux fi celles que je préfente ici aux Géomètres peuvent mériter leur attention!

C'eft principalement dans l'application de l'analyfe au fyftème du monde, que l'on a befoin de méthodes fimples & convergentes pour intégrer par approximation les équations différentielles; celles du mouvement des corps céleftes fe préfentent en effet fous une forme fi compliquée, qu'elles ne laiffent aucun efpoir de réuffir jamais à les intégrer rigoureufement; mais comme les valeurs des variables font à peu-

19 la ligne parabolique

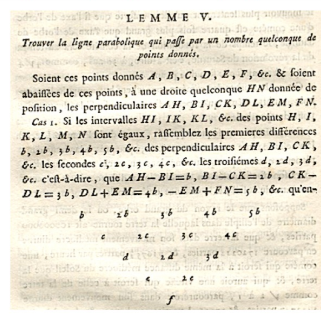
Regardez ce lemme 5, qui se trouve dans le livre 3, entre deux résultats sur la trajectoire des comètes. « Trouver la ligne parabolique qui passe par un nombre quelconque de points donnés ». Dans le langage de l'époque, une ligne parabolique, c'est une courbe polynomiale. En clair, Newton définit le polynôme interpolateur de Lagrange... dont Lagrange n'a jamais prétendu être l'inventeur. Le problème est de déterminer une fonction polynomiale qui interpole des positions observées, de manière à en prédire d'autres. Le plus remarquable est que Newton décrit en même temps la méthode optimale pour calculer les valeurs d'un polynôme ; ce que nous appelons les différences divisées,... de Newton cette fois-ci.

Oh bien sûr, l'astronomie n'avait pas attendu Newton pour susciter le développement de méthodes numériques. Il y avait eu avant, au moins la trigonométrie et les logarithmes. À partir de Newton, ce sont surtout les méthodes de résolution des systèmes linéaires et des équations différentielles qui sont concernées. Une bonne partie de ce que nous appelons « analyse numérique » est née des besoins de l'astronomie.

Pour vous raconter la suite, j'ai besoin d'un petit retour en arrière.

la ligne parabolique

Newton, Principes mathématiques de la philosophie naturelle (1759)



LEMME V.

Trouver la ligne parabolique qui paffe par un nombre quelconque de points donnés.

Soient ces points donnés A, B, C, D, E, F, &c. & foient abaiffées de ces points, à une droite quelconque HN donnée de pofition, les perpendiculaires AH, BI, CK, DL, EM, FN.

Cas 1. Si les intervalles HI, IK, KL, &c. des points H, I, K, L, M, N font égaux, raffemblez les premieres différences b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, &c. des perpendiculaires AH, BI, CK, &c. les fecondes c, $2c$, $3c$, $4c$, &c. les troifiémes d, $2d$, $3d$, &c. c'eft-à-dire, que $AH-BI=b$, $BI-CK=2b$, $CK-DL=3b$, $DL+EM=4b$, $-EM+FN=5b$, &c. qu'en-

$b \quad 2b \quad 3b \quad 4b \quad 5b$

$c \quad 2c \quad 3c \quad 4c$

$d \quad 2d \quad 3d$

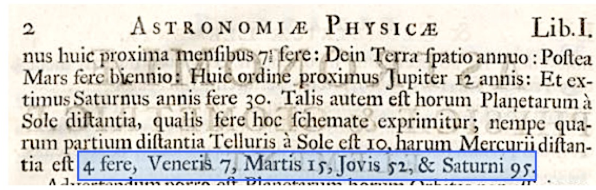
$e \quad 2e$

f

20 Distances des planètes au Soleil

Distances des planètes au Soleil

David Gregory, Astronomiæ physicæ & geometricæ elementa (1702)


2 ASTRONOMIÆ PHYSICÆ Lib. I.

nus huic proxima menfibus 7½ fere: Dein Terra fpatio annuo: Poftea Mars fere biennio: Huic ordine proximus Jupiter 12 annis: Et extimus Saturnus annis fere 30. Talis autem eft horum Planetarum à Sole diftantia, qualis fere hoc fchemate exprimitur; nempe quarum partium diftantia Telluris à Sole eft 10, harum Mercurii diftantia eft 4 fere, Veneris 7, Martis 15, Jovis 52, & Saturni 95.

Vous vous souvenez de David Gregory, le newtonien, neveu de son oncle ? Il commence son livre en donnant les distances des planètes au Soleil, de façon originale. Si la distance de la Terre au Soleil vaut 10, dit-il, celle de Mercure est 4, de Vénus 7, de Mars 15, de Jupiter 52, et de Saturne 95.

21 Loi de Titius-Bode $D = 4 + 3 \times 2^n$

Loi de Titius-Bode $D = 4 + 3 \times 2^n$

Johann Daniel Titius (1729–1796) Johann Elert Bode (1747–1826)

Allez savoir pourquoi, un certain Titius, relayé une génération plus tard par Bode, a soutenu mordicus que ces nombres entiers étaient des termes d'une suite arithmético-géométrique. Si vous écrivez 4, puis 4 plus 3, 4 plus trois fois deux, etc, vous trouvez les entiers donnés par Gregory. Enfin presque : la distance de Mars est 15 et non pas 16, celle de Saturne, 95 et non pas 100. Mais surtout, il y a un trou, à la distance 28. Et tous les astronomes du monde se sont mis à y chercher la planète manquante.

22 Giuseppe Piazzi (1746–1826)

Giuseppe Piazzi (1746–1826)

Découverte de Céres (1er janvier 1801)

Le plus étonnant est qu'il y avait bien quelque chose à cette distance-là. C'est Giuseppe Piazzi qui l'a trouvé. Piazzi c'est ce prêtre italien, qui regarde fixement... Mais non ! qu'alliez-vous penser ? C'est une allégorie ! Cette jeune personne que Piazzi a l'air de trouver fort agréablement dévêtue est Uranie, la muse de l'astronomie. Elle lui montre dans le ciel la nouvelle planète, baptisée Cérès. Enfin une planète... un astéroïde tout au plus, beaucoup plus petit que notre Lune, et très difficile à suivre. D'ailleurs Piazzi ne l'observe qu'à peine plus d'un mois, puis on perd sa trace. Où est-elle donc passée ?

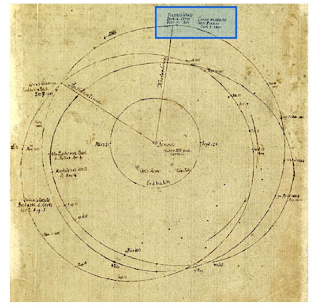
23 Calcul de la trajectoire de Cérès (1801)

Il ne faudra que quelques pages de calcul à Gauss pour la retrouver. Ce que vous voyez là est un croquis de sa propre main. Dans l'encadré bleu, la petite partie de la trajectoire observée par Piazzi. Le cercle central est la trajectoire terrestre.

Comment Gauss a-t-il fait ? Il a utilisé sa méthode des moindres carrés. Déterminer les coefficients de l'ellipse qur laquelle Cérès se déplace, c'est résoudre un système, qui a plus d'équations (une par observation), que d'inconnues. La méthode des moindres carrés consiste à exhiber la solution qui minimise les carrés des distances aux observations.

Et ça marche. Gauss prédit la trajectoire de Cérès à partir des observations de Piazzi entre le premier janvier et le 11 février, soit seulement trois degrés, et on la retrouve à l'endroit prévu, au bout de onze mois. C'est un exploit du même ordre que celui de Le Verrier 45 ans plus tard.

Calcul de la trajectoire de Cérès (1801)
Carl Friedrich Gauss (1777–1855)



24 Heinrich Olbers (1758–1840)

D'autant qu'il récidive : en cherchant Cérès, cet Heinrich Olbers trouve l'année suivante un autre astéroïde à la même distance du Soleil, ou presque. C'est Pallas. Et Gauss recommence les calculs, encore plus vite cette fois. Il prédit à nouveau correctement la trajectoire.

Heinrich Olbers (1758–1840)
Découverte de Pallas (28 mars 1802)

25 Gauss en 1803

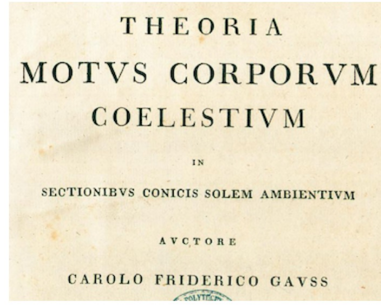
Il n'a que 25 ans, et la publication récente des Disquisitiones Arithmeticæ aurait déjà suffi à le rendre célèbre. Mais ses exploits astronomiques éclipseraient presque ses découvertes en arithmétique.

Gauss en 1803
Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

26 Theoria motus corporum coelestium (1809)

Theoria motus corporum coelestium (1809)
Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

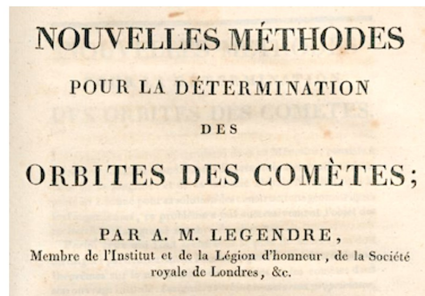
En 1809 paraît sa « Théorie du mouvement des corps célestes parcourant des sections coniques autour du soleil ». Encore un chef d'œuvre. Depuis Cérès et Pallas, il a étendu, théorisé, généralisé, comme il sait si bien le faire. Et ce livre contient non seulement la théorie du mouvement des corps célestes, mais encore, comme sous-produit en quelque sorte accessoire, la définition de la loi normale, et bien sûr son rapport avec la méthode des moindres carrés.


THEORIA
MOTVS CORPORVM
COELESTIVM
IN
SECTIONIBVS CONICIS SOLEM AMBIENTIVM
AVCTORE
CAROLO FRIDERICO GAVSS

27 Nouvelles méthodes pour la détermination… (1805)

Nouvelles méthodes pour la détermination… (1805)
Adrien-Marie Legendre (1752–1833)

Je vous ai déjà raconté cela, et aussi la colère de Legendre, qui estimait, à tort bien sûr, qu'il en était le premier inventeur. Il l'avait publiée en 1805, lui aussi comme outil de calcul numérique pour la détermination des orbites des comètes.


NOUVELLES MÉTHODES
POUR LA DÉTERMINATION
DES
ORBITES DES COMÈTES;
PAR A. M. LEGENDRE,
Membre de l'Institut et de la Légion d'honneur, de la Société royale de Londres, &c.

28 Disquisitio de elementis ellipticis Palladis (1811)

Disquisitio de elementis ellipticis Palladis (1811)
Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Mais Gauss voyait beaucoup plus loin, comme d'habitude. En 1811, il publie un nouvel article : « Recherches sur les éléments elliptiques de Pallas ». Il y détaille une nouvelle application de la méthode des moindres carrés, le système linéaire auquel elle aboutit, et la méthode de résolution de ce système linéaire : ce que nous appelons le « Pivot de Gauss ».


22 CAR. FRID. GAVSS

$$n + a\,p + b\,q + c\,r + d\,s + \text{etc.} = w$$
$$n' + a'\,p + b'\,q + c'\,r + d'\,s + \text{etc.} = w'$$
$$n'' + a''\,p + b''\,q + c''\,r + d''\,s + \text{etc.} = w''$$
$$n''' + a'''\,p + b'''\,q + c'''\,r + d'''\,s + \text{etc.} = w'''$$

etc., aequationes conditionales, vt $ww + w'w' + w''w'' + w'''w''' +$ etc. $= \Omega$ fiat minimum, esse hasce

$$aw + a'w' + a''w'' + a'''w''' + \text{etc.} = 0$$
$$bw + b'w' + b''w'' + b'''w''' + \text{etc.} = 0$$
$$cw + c'w' + c''w'' + c'''w''' + \text{etc.} = 0$$
$$dw + d'w' + d''w'' + d'''w''' + \text{etc.} = 0$$

etc. siue

designando breuitatis caussa

$an + a'n' + a''n'' + a'''n''' +$ etc. per $[an]$
$aa + a'a' + a''a'' + a'''a''' +$ etc. per $[aa]$
$ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' +$ etc. per $[ab]$
etc.
$bb + b'b' + b''b'' + b'''b''' +$ etc. per $[bb]$
$bc + b'c' + b''c'' + b'''c''' +$ etc. per $[bc]$
etc. etc.

p, q, r, s etc. determinari debere per eliminationem ex aequationibus

$$[an] + [aa]p + [ab]q + [ac]r + [ad]s + \text{etc.} = 0$$
$$[bn] + [ab]p + [bb]q + [bc]r + [bd]s + \text{etc.} = 0$$
$$[cn] + [ac]p + [bc]q + [cc]r + [cd]s + \text{etc.} = 0$$
$$[dn] + [ad]p + [bd]q + [cd]r + [dd]s + \text{etc.} = 0$$

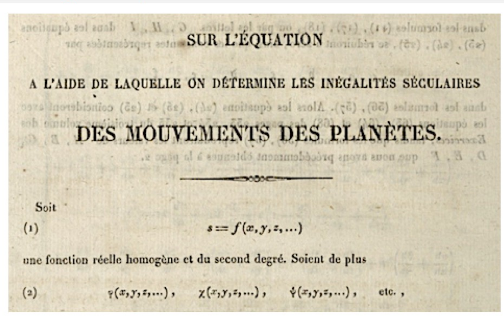
etc.

29 Sur l'équation à l'aide de laquelle… (1829)

Sur l'équation à l'aide de laquelle… (1829)
Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Comme les systèmes linéaires rencontrés sont souvent symétriques, Gauss a déjà été conduit à leur donner une forme diagonale. Mais il ne développe pas la théorie des valeurs propres. C'est Cauchy, qui remarque le premier que les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles, en 1826, donc bien avant que ne soient définies les matrices et les valeurs propres. Ce résultat, il le recycle trois ans plus tard et en donne une démonstration.

Regardez le titre de son article : « Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes ».


SUR L'ÉQUATION
A L'AIDE DE LAQUELLE ON DÉTERMINE LES INÉGALITÉS SÉCULAIRES
DES MOUVEMENTS DES PLANÈTES.

Soit

(1) $s = f(x, y, z, \ldots)$

une fonction réelle homogène et du second degré. Soient de plus

(2) $\varphi(x,y,z,\ldots)$, $\chi(x,y,z,\ldots)$, $\psi(x,y,z,\ldots)$, etc.,

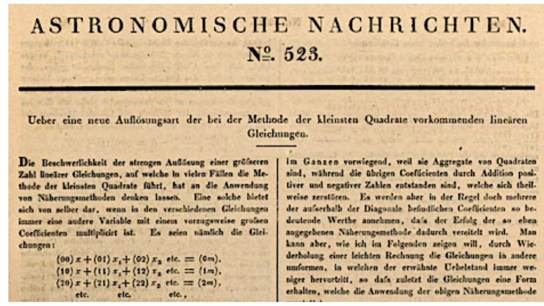
30 Ueber eine neue Auflösungsart... (1845)

L'histoire ne fait que commencer. Pour résoudre des problèmes astronomiques de plus en plus compliqués, le pivot de Gauss ne suffit plus. Il faut trouver des méthodes d'approximation des solutions de très grands systèmes. Gauss lui-même donne les bases de la méthode de Gauss-Seidel en 1823. Pour les matrices symétriques issues de la méthode des moindres carrés, se pose toujours la question d'une méthode efficace de calcul des valeurs propres et d'une matrice de vecteurs propres. Jacobi la résout, par une suite de rotations planes successives. Nous appelons cela la méthode de Jacobi, et elle est encore en usage.

Le titre de son article est « Sur un nouveau procédé de résolution des équations linéaires qui se présentent dans la méthode des moindres carrés ». Regardez la revue qui le publie : les Nouvelles Astronomiques.

Maintenant, la date. Deux ans plus tôt, en 1843, paraissait l'article d'Ada Lovelace décrivant le premier ordinateur théorique, la machine analytique de Babbage. Entre les deux, Grassmann avait publié, dans l'indifférence générale, sa « Théorie de l'extension », c'est-à-dire les fondements de l'algèbre linéaire. Il allait falloir encore un bon siècle pour que la conjonction des trois, algèbre linéaire, ordinateur, et méthodes de calcul issues de l'astronomie, donnent naissance à l'analyse numérique moderne.

Ueber eine neue Auflösungsart... (1845)
Carl Gustav Jacobi (1804–1851)


ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.
№. 523.

Ueber eine neue Auflösungsart der bei der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden linearen Gleichungen.

Die Beschwerlichkeit der strengen Auflösung einer gröfseren Zahl linearer Gleichungen, auf welche in vielen Fällen die Methode der kleinsten Quadrate führt, hat an die Anwendung von Näherungsmethoden denken lassen. Eine solche bietet sich von selber dar, wenn in den verschiedenen Gleichungen immer eine andere Variable mit einem vorzugsweise grofsen Coefficienten multiplicirt ist. Es seien nämlich die Gleichungen:

$$(00)x + (01)x_1 + (02)x_2 \text{ etc.} = (0m),$$
$$(10)x + (11)x_1 + (12)x_2 \text{ etc.} = (1m),$$
$$(20)x + (21)x_1 + (22)x_2 \text{ etc.} = (2m),$$
$$\text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.},$$

im Ganzen vorwiegend, weil sie Aggregate von Quadraten sind, während die übrigen Coefficienten durch Addition positiver und negativer Zahlen entstanden sind, welche sich theilweise zerstören. Es werden aber in der Regel doch mehrere der aufserhalb der Diagonale befindlichen Coefficienten so bedeutende Werthe annehmen, dafs der Erfolg der so eben angegebenen Näherungsmethode dadurch vereitelt wird. Man kann aber, wie ich im Folgenden zeigen will, durch Wiederholung einer leichten Rechnung die Gleichungen in andere umformen, in welchen der erwähnte Uebelstand immer weniger hervortritt, so dafs zuletzt die Gleichungen eine Form erhalten, welche die Anwendung der obigen Näherungsmethode

31 références

références

- J. Z. Buchwald, I. B. Cohen eds. (2001) *Isaac Newton's natural philosophy*, Cambridge, MA : The MIT Press
- J.-L. Chabert et al. (1994) *Histoire d'algorithmes ; Du caillou à la puce*, Paris : Belin
- C. Cunningham (2016) *Early investigations of Ceres and the discovery of Pallas*, Cham : Springer
- J. Dhombres, S. Sochon, S. Debarbat (2012) *Pierre-Simon de Laplace (1749–1827) Le parcours d'un savant*, Paris : Hermann
- P. Schroeder (2007) *Loi de la gravitation universelle : Newton, Euler et Laplace*, Paris : Springer
- D. Tournès (2014) Mathematics of engineers : Elements for a new history of numerical analysis, *ICM congress*, 1255–1273

J'adore ce genre de construction : des fondements éloignés et simultanés, qui ne se rejoignent que bien plus tard pour donner un bel édifice. Comme la Tour Eiffel, ou le viaduc de Millau, ou encore l'arche de la passerelle à Saint-Louis dans le Missouri.

Vous voyez ce que je veux dire ? Non ? C'est n'importe quoi ? Vous avez raison, je dois être fatigué. Allez, à la revoyure !