0 Le scandale des irrationnelles

histoires d'arithmétique

Le scandale des irrationnelles

la croix des mathématiciens

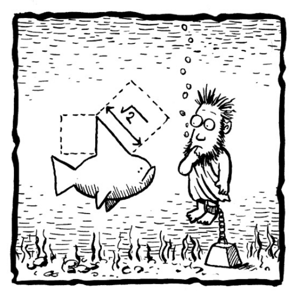
hist-math.fr Bernard Ycart

Mmhh, croix des mathématiciens, scandale, tout ceci n'augure rien de bien drôle !

1 La mort d'Hippase

La mort d'Hippase

Hippase de Métaponte (ca. 500 av. J.-C.)



Eh bien non, en effet ! Et surtout pas pour ce pauvre Hippase de Métaponte, noyé pour avoir divulgué le secret que Pythagore voulait cacher au monde : la diagonale d'un carré et son côté n'ont pas de commune mesure, il n'y a pas de longueur fixée dont les deux soient multiples entiers, en clair, leur rapport n'est pas un nombre rationnel.

Il a fallu longtemps, très longtemps, avant d'exprimer les choses ainsi. En attendant, ne vous inquiétez pas trop pour ce pauvre Hippase, on n'est même pas sûr qu'il ait existé. Voici ce que dit Pappus de la légende. Pappus est un des dernier parmi les grands mathématiciens grecs. Il écrit un commentaire sur le livre dix des Éléments d'Euclide, huit siècles après la découverte du scandale.

2 Commentaire sur le livre X des Éléments d'Euclide

« La secte (ou l'école) de Pythagore était si affectée par la vénération qu'elle avait de ces choses qu'un adage s'y répandit, disant que celui qui le premier divulguerait la connaissance des sourds et des irrationnels et la répandrait auprès des non-initiés, périrait par noyade : c'est probablement une parabole par laquelle ils cherchaient à exprimer leur conviction que premièrement il est mieux de taire tout ce qui est sourd, irrationnel, inconcevable dans l'univers, et secondement que l'âme qui par erreur ou insouciance dévoile ou révèle quoi que ce soit de cette nature en ce monde, se condamne à errer de ci de là dans un océan de non-identité [...]. »

Commentaire sur le livre X des Éléments d'Euclide
Pappus (ca 290–350)

La secte (ou l'école) de Pythagore était si affectée par la vénération qu'elle avait de ces choses qu'un adage s'y répandit, disant que celui qui le premier divulguerait la connaissance des sourds et des irrationnels et la répandrait auprès des non-initiés, périrait par noyade : c'est probablement une parabole par laquelle ils cherchaient à exprimer leur conviction que premièrement il est mieux de taire tout ce qui est sourd, irrationnel, inconcevable dans l'univers, et secondement que l'âme qui par erreur ou insouciance dévoile ou révèle quoi que ce soit de cette nature en ce monde, se condamne à errer de ci de là dans un océan de non-identité[...].

La religion de Pythagore était basée sur la croyance que les nombres entiers sont l'essence de toute chose. Alors trouver dans une figure aussi simple qu'un carré, deux longueurs qui ne sont pas dans un rapport d'entiers, ça faisait désordre. Trois qualificatifs forts sont employés par Pappus. Sourd est la traduction de « alogon » c'est-à-dire ce dont on ne peut pas parler, l'inexprimable. Il semble que le glissement sémantique de « ce qui ne peut pas être dit » vers « muet » puis « sourd », soit dû aux Arabes. Irrationnel peut faire référence à la déraison comme à l'absence de ratio, de rapport (sous-entendu d'entiers).

Le nombre entier, par essence discret et discontinu et la grandeur continue étaient des objets de natures totalement différentes pour les Grecs. Pappus explique que c'est de là que vient le problème.

3 Commentaire sur le livre X des Éléments d'Euclide

Commentaire sur le livre X des Éléments d'Euclide
Pappus (ca 290–350)

« La propriété que nous cherchons à exposer appartient essentiellement à la géométrie, car ni l'incommensurable ni l'irrationnel ne se trouvent parmi les nombres, qui sont au contraire rationnels et commensurables ; tandis qu'elles sont concevables dans le cas des quantités continues, dont l'étude appartient à la géométrie. »

La propriété que nous cherchons à exposer appartient essentiellement à la géométrie, car ni l'incommensurable ni l'irrationel ne se trouvent parmi les nombres, qui sont au contraire rationnels et commensurables ; tandis qu'elles sont concevables dans le cas des quantités continues, dont l'étude appartient à la géométrie.

4 Commentaire sur le livre X des Éléments d'Euclide

« La raison de cela est que les nombres, procédant par degrés, avancent par addition de ce qui est un minimum, et progressent indéfiniment ; tandis que les quantités continues commencent par un tout déterminé et indéfiniment divisible. »

Commentaire sur le livre X des Éléments d'Euclide
Pappus (ca 290–350)

La raison de cela est que les nombres, procédant par degrés, avancent par addition de ce qui est un minimum, et progressent indéfiniment ; tandis que les quantités continues commencent par un tout déterminé et indéfiniment divisible.

Pour les Grecs, l'infini des nombres et celui de la géométrie vont en sens contraire, vers l'infiniment grand pour les nombres, vers l'infiniment petit pour la géométrie.

Ce n'est pas une vision tardive due au seul Pappus. Aristote, dans la Métaphysique, expliquait à peu près la même chose sept siècles avant.

5 Métaphysique V, 13

« La quantité est un nombre, quand elle se compte ; c'est une grandeur, quand elle se mesure. On entend par nombre ce qui peut se diviser en parties non continues ; et par grandeur, ce qui est divisible en parties qui tiennent les unes aux autres. »

Du temps d'Aristote, l'incommensurabilité de la diagonale était déjà un fait bien connu. C'est même un de ses exemples favoris : il l'utilise vingt-six fois dans son œuvre. La démonstration qu'Aristote connaissait est celle que nous utilisons toujours.

Métaphysique V, 13
Aristote (384–322 av. J.-C.)

La quantité est un nombre, quand elle se compte ; c'est une grandeur, quand elle se mesure. On entend par nombre ce qui peut se diviser en parties non continues ; et par grandeur, ce qui est divisible en parties qui tiennent les unes aux autres.

6 Premiers Analytiques I, 23

« On prouve, par exemple, l'incommensurabilité de la diagonale, par cette raison que les nombres impairs deviendraient égaux aux nombres pairs, si on posait la diagonale commensurable ; on tire alors la conclusion que les nombres impairs deviennent égaux aux nombres pairs, et on prouve hypothétiquement l'incommensurabilité de la diagonale par ce qu'une conclusion fausse découle de la proposition contradictoire. Car tel est, nous l'avons dit, le raisonnement par l'absurde : il consiste à prouver l'impossibilité d'une chose au moyen de l'hypothèse concédée au début. »

Premiers Analytiques I, 23
Aristote (384–322 av. J.-C.)

On prouve, par exemple, l'incommensurabilité de la diagonale, par cette raison que les nombres impairs deviendraient égaux aux nombres pairs, si on posait la diagonale commensurable ; on tire alors la conclusion que les nombres impairs deviennent égaux aux nombres pairs, et on prouve hypothétiquement l'incommensurabilité de la diagonale par ce qu'une conclusion fausse découle de la proposition contradictoire. Car tel est, nous l'avons dit, le raisonnement par l'absurde : il consiste à prouver l'impossibilité d'une chose au moyen de l'hypothèse concédée au début.

7 Paul Erdős (1913–1996)

Voici ce raisonnement, par le mathématicien le plus prolifique du vingtième siècle, Paul Erdős lui-même. Un orfèvre en matière d'arithmétique et de démonstration.

Un jour qu'il était chez son ami Andrew Vazsonyi, il s'était mis en tête de démontrer l'irrationalité de racine de deux à la femme d'Andrew, Laura. C'est Andrew qui raconte l'histoire, et qui a gardé la page que vous allez voir.

Paul Erdős (1913–1996)

8 Je vais te démontrer le scandale pythagoricien

« Laura, je vais te démontrer le scandale pythagoricien. S'il y a quoi que ce soit que tu ne comprennes pas, dis-le moi, et j'éclaircirai les choses.

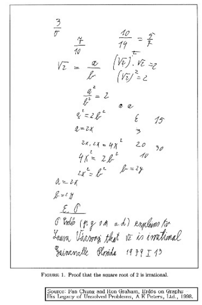
Supposons que la racine de deux est rationnelle, donc qu'elle est égale à a/b, où a et b sont deux nombres entiers. OK ? » Laura était d'accord. Alors il continua, étape par étape, et atteint la contradiction. « Tu vois, la supposition était fausse, la racine carrée de deux ne peut pas être rationnelle. »

Mais Laura n'avait pas aimé la démonstration. Erdős se fâcha. « Je t'avais demandé de me dire à chaque pas si tu ne comprenais pas quelque chose, tu n'as rien dit ».

Alors Laura, avec un certain bon sens : « Mais pourquoi tu ne m'as pas dit dès le début que tout cela était faux ? ». Et là il paraît qu'Erdős est sorti de ses gonds.

Je vais te démontrer le scandale pythagoricien

Paul Erdős (1913–1996)



9 approximation de $\sqrt{2}$

approximation de $\sqrt{2}$

YBC 7289 (ca 1700 av. J.-C.)

Il faut accorder à Laura qu'avant les Pythagoriciens, personne ne s'était posé la question de l'irrationalité. Par contre donner une mesure approchée de la diagonale d'un carré, les Mésopotamiens savaient le faire, et même plutôt bien.

Regardez cette tablette. Elle représente un carré avec ses deux diagonales. en haut à gauche on lit 30, qui est le côté du carré. Sur la diagonale, on lit de gauche à droite 1, 24, 51, et 10. En-dessous de la diagonale : 42, 25, 35.

10 approximation de $\sqrt{2}$

approximation de $\sqrt{2}$

YBC 7289 (ca 1700 av. J.-C.)

- $30 = \frac{1}{2}$
- $1.24.51.10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \sqrt{2} - 6 \times 10^{-7}$
- $42.25.35 = \frac{42}{60} + \frac{25}{60^2} + \frac{35}{60^3} = \frac{1}{\sqrt{2}} - 3 \times 10^{-7}$

L'écriture est sexagésimale. Il faut comprendre le côté du carré, écrit 30, comme 1/2 (trente soixantièmes si vous préférez).

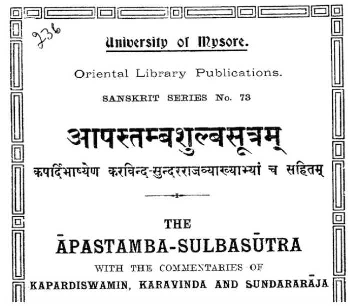
La diagonale du carré de côté 1/2 vaut $1/\sqrt{2}$ dont l'inverse est $\sqrt{2}$. Les Mésopotamiens donnaient souvent les quantités en même temps que leurs inverses. Les valeurs données ici pour $1/\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ ont une précision inférieure à 10^{-6}.

11 Śulba Sūtra

Chez les Indiens, bien avant Pythagore, la religion védique avait codifié les usages géométriques pour la construction des autels destinés aux cérémonies. Ces enseignements religieux ou Sutras s'appellent des Shulba Sutras, le mot Shulba signifiant corde. Voici ce qu'on y lit.

Śulba Sūtra

Baudhāyana (ca 800 av. J.-C.), Āpastamba (ca 600 av. J.-C.)



236

University of Mysore.

Oriental Library Publications.

SANSKRIT SERIES No. 73

आपस्तम्बशुल्बसूत्रम्

कपर्दिभाष्येण करविन्द-सुन्दरराजव्याख्याभ्यां च सहितम्

THE

ĀPASTAMBA-SULBASŪTRA

WITH THE COMMENTARIES OF

KAPARDISWAMIN, KARAVINDA AND SUNDARARĀJA

12 Śulba Sūtra

La diagonale d'un carré double sa surface. La mesure doit être augmentée d'un tiers et d'un quart diminué d'un trente-quatrième ; ceci est la diagonale.

Vous voyez ce que donne le calcul : une valeur approchée à $2\ 10^{-6}$.

Comment les Mésopotamiens et les Indiens obtenaient-ils des résultats aussi précis ? Par un algorithme itératif, peut-être celui que nous appelons méthode de Héron, je vous le raconte ailleurs. Vous voyez la formule, on peut la comprendre comme un développement limité à l'ordre 1 de racine carrée de a^2+h. Partez de a=1 plus h=1, la première approximation de la racine est 1 plus 1/2 soit 3/2. La deuxième itération consiste à écrire que 2=9/4 moins 1/4. On trouve 17/12 comme approximation au second ordre, ce qui n'est déjà pas si mal. Une itération de plus donne le résultat d'Apastamba.

Et au fait, ce fameux dixième livre d'Euclide que Pappus avait commenté ?

Śulba Sūtra

Baudhāyana (ca 800 av. J.-C.), Āpastamba (ca 600 av. J.-C.)

La diagonale d'un carré double sa surface. La mesure doit être augmentée d'un tiers et d'un quart diminué d'un trente-quatrième ; ceci est la diagonale.

$$1+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{34}\right)\right)=\sqrt{2}+2.124\times 10^{-6}\,.$$

$$\sqrt{a^2+h}\simeq a+\frac{h}{2a}$$

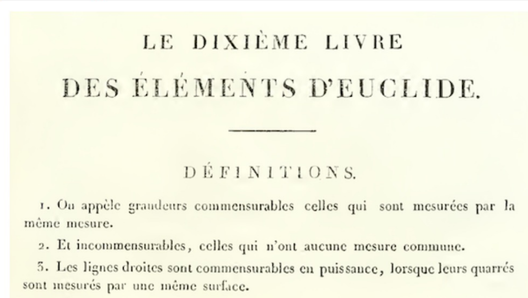
13 Éléments, Livre X

Eh bien le voici. Il est entièrement consacré à une très longue discussion de l'irrationalité. Il commence par la définition de commensurable et incommensurable. Puis viennent d'autres définitions, comme la notion de commensurabilité en puissance (si les carrés sont commensurables), et bien d'autres.

Les trois livres précédents, sept, huit et neuf portaient sur les longueurs commensurables, c'est-à-dire essentiellement sur l'arithmétique. Au début du livre sept, on trouve le fameux algorithme d'Euclide. Il est énoncé sous la forme suivante.

Éléments, Livre X

Euclide (ca 600 av. J.-C.)



LE DIXIÈME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. On appèle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure.

2. Et incommensurables, celles qui n'ont aucune mesure commune.

3. Les lignes droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs quarrés sont mesurés par une même surface.

14 L'algorithme d'Euclide pour des nombres

L'algorithme d'Euclide pour des nombres
Éléments, Livre VII, Proposition I

Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché du plus grand, si le reste ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité, les nombres proposés seront premiers entr'eux.

« Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché du plus grand, si le reste ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité, les nombres proposés seront premiers entr'eux. »

La proposition d'après montre comment le même algorithme donne le PGCD de deux nombres. Son énoncé est : « Deux nombres non premiers entr'eux étant donnés, trouver leur plus grande commune mesure. »

Le même algorithme peut être appliqué à des grandeurs commensurables. C'est la proposition 3 du livre X. Elle dit que si deux grandeurs sont commensurables, l'algorithme consistant à retrancher la plus petite de la plus grande se termine en un nombre fini de pas, et trouve la plus grande commune mesure. La contraposée est la Proposition 2 du livre X.

15 L'algorithme d'Euclide pour des grandeurs

L'algorithme d'Euclide pour des grandeurs
Éléments, Livre X, Proposition II

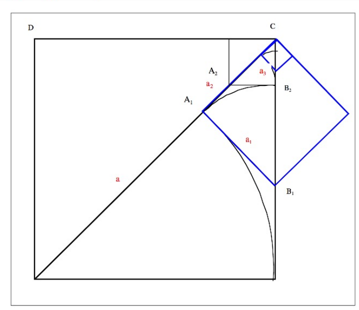
Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent ; ces grandeurs seront incommensurables.

« Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent ; ces grandeurs seront incommensurables. »

Cette technique de soustractions successives, les Grecs l'avaient baptisée « anthyphérèse ».

16 Incommensurabilité de la diagonale

Incommensurabilité de la diagonale
par l'algorihme d'Euclide (anthyphérèse)



Elle peut permettre de matérialiser géométriquement l'incommensurabilité. Sur cette figure, vous voyez les itérations consistant chaque fois à retrancher le côté de la diagonale. Elles se poursuivent jusqu'à l'infini, d'où l'incommensurabilité.

Certains historiens pensent que ça a pu être le moyen par lequel les Pythagoriciens ont découvert l'incommensurabilité, avant la démonstration par l'absurde d'Aristote.

17 Irrationalité du nombre d'or

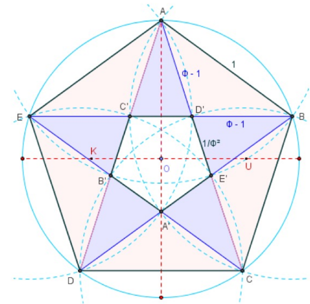
On a même conjecturé qu'ils avaient pu découvrir ainsi l'irrationalité du nombre d'or, par anthyphérèse sur le pentagramme inscrit dans le pentagone.

Le nombre d'or est le rapport de la diagonale du pentagone à son côté. Si les deux étaient commensurables, ils le seraient aussi avec le côté et la diagonale du petit pentagone délimité par le pentagramme. Et ainsi de suite.

Mais Euclide savait faire beaucoup plus général. Il donne dans le livre X une longue série de propositions, dont la diagonale du carré, celle du pentagone, ne sont que des cas particuliers. Par exemple celle-ci.

Irrationalité du nombre d'or

par l'algorihme d'Euclide (anthyphérèse)



18 Commensurabilité des côtés

« Les carrés qui n'ont pas entre eux la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, n'ont pas leurs côtés commensurables en longueur. »

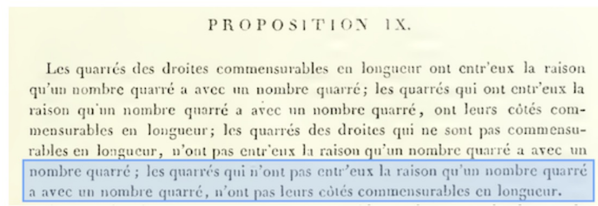
En clair, puisque 2 n'est pas un carré, le côté d'un carré de surface 2 est irrationnel. La même chose est vraie pour 3, 5, 6, etc, n'importe quel entier qui n'est pas un carré.

Alors pourquoi donc la démonstration par l'absurde d'Aristote pour la diagonale d'un carré apparaît-elle dans la toute dernière proposition du livre X, la cent-dix-septième ? et avec une variante par dessus le marché !

La structure, la logique de ce livre dix sont beaucoup plus difficiles à suivre que celles des douze autres livres. Voici ce qu'en disait De Morgan, au dix-neuvième siècle.

Commensurabilité des côtés

Euclide, Éléments, Livre x, Proposition ix


PROPOSITION IX.

Les quarrés des droites commensurables en longueur ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; les quarrés qui ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, ont leurs côtés commensurables en longueur; les quarrés des droites qui ne sont pas commensurables en longueur, n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré ; les quarrés qui n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, n'ont pas leurs côtés commensurables en longueur.

19 it should never be read

« Ce livre a une exhaustivité dont aucun des autres, même pas le cinquième, ne peut se vanter ; et nous pourrions presque suspecter que Euclide, après avoir arrangé son matériel dans sa tête, et avoir complètement élaboré le dixième livre, a écrit les précédents ensuite, et n'a pas souhaité les réviser à fond. »

Et un peu plus loin, en contradiction apparente avec ce qui précède :

« Sur ce livre en particulier, on doit affirmer qu'il ne devrait jamais être lu, excepté par l'étudiant versé en algèbre, et dans ce cas, non comme une partie des mathématiques, mais de l'histoire des mathématiques. »

Oui, le dixième livre des Éléments d'Euclide mérite une place à part, par sa longueur et sa difficulté. D'où les nombreux commentaires qu'il a suscités. Nous avons parlé de Pappus plus haut, les commentateurs arabes ont été beaucoup plus nombreux que les grecs.

it should never be read

Augustus De Morgan (1806–1871)

This book has a completeness which none of the others, not even the fifth, can boast of; and we could almost suspect that Euclid, having arranged his materials in his own mind, and having completely elaborated the tenth book, wrote the preceding books after it, and did not like to revise them thoroughly.

Of this particular book it must be asserted that it should never be read except by the student versed in algebra, and then not as a part of mathematics, but of the history of mathematics.

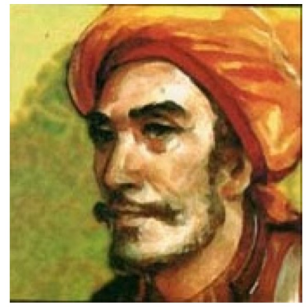
20 Abū Ja‘far al-Khāzin (900–971)

Rien qu'au dixième siècle, on dispose d'une vingtaine de commentaires différents au dixième livre. Il est impossible de les évoquer tous. Celui d'al-Khazin est l'un d'eux. Comme d'habitude chez les Arabes, ce portrait est imaginaire.

La tradition des commentaires au dixième livre d'Euclide avait commencé avec al-Mahani au neuvième siècle, puis sont venus parmi les plus célèbres al-Khazin, al-Haytham, al-Karaji, as-Samawal, al-Khayyam. Tous ces savants disposaient du nouvel outil mis au point par al-Khwarizmi, l'algèbre. Ils se sont peu à peu affranchis de la géométrie, et ont développé un calcul algébrique des sommes finies des racines n-ièmes d'entiers, parallèlement, et de façon analogue, au calcul polynomial.

Voici par exemple la classification que propose al-Khazin.

Abū Ja‘far al-Khāzin (900–971)



21 Explication de la dixième épître d'Euclide

« Pour toute ligne droite posée, il existe un nombre infini de lignes droites qui lui sont comparées ; certaines lui sont commensurables soit en longueur, soit en puissance seulement, soit en longueur et en puissance ; et certaines lui sont commensurables soit en longueur seulement, soit en puissance, soit en longueur et en puissance ensemble. Ce qui fait six classes. »

Explication de la dixième épître d'Euclide
Abū Ja‘far al-Khāzin (900–971)

Pour toute ligne droite posée, il existe un nombre infini de lignes droites qui lui sont comparées ; certaines lui sont commensurables soit en longueur, soit en puissance seulement, soit en longueur et en puissance ; et certaines lui sont commensurables soit en longueur seulement, soit en puissance, soit en longueur et en puissance ensemble. Ce qui fait six classes.

22 Explication de la dixième épître d'Euclide

Al-Khazin continue de façon très pédagogique en donnant des exemples dans des triangles équilatéraux, puis des carrés, et il en arrive à décrire complètement les six types auxquels il s'intéresse. Évidemment il n'écrit pas de formules algébriques littérales comme nous.

Voici comment il énonce la première formule. « Tout nombre dont nous soustrayons du carré le quart, ce nombre donne avec la racine du second, le premier binôme. » Al-Khazin précise qu'on n'obtient pas ainsi tous les binômes. Au douzième siècle, as-Samawal donnera plusieurs formules analogues, dans son traité sur l'arithmétique. Mais il énonce en plus une vision numérique, très proche de la nôtre.

Explication de la dixième épître d'Euclide
Abū Ja‘far al-Khāzin (900–971)

1. $a+\sqrt{a^2-a^2/4}$
2. $a+\sqrt{a^2-a^2/2}$
3. $a+\sqrt{a^2+a^2/3}$
4. $a+\sqrt{2a^2}$
5. $\sqrt{a}+\sqrt{a-a/4}$
6. $\sqrt{a}+\sqrt{a-a/2}$

23 Traité sur l'Arithmétique (1172)

« Ce que l'on extrait de l'approximation des racines irrationnelles par le calcul est ce par quoi nous voulons obtenir une quantité rationnelle proche de la racine irrationnelle. Il peut exister une quantité rationnelle plus proche que cela de la racine irrationnelle. Il peut ensuite exister une troisième quantité rationnelle, plus proche de la racine irrationnelle que la seconde et la première quantités, car pour n'importe quelle quantité rationnelle supposée proche d'une racine irrationnelle, la différence entre elles est de fait une ligne droite, et une ligne peut être divisée et partitionnée indéfiniment. »

As-Samawal a donc une idée tout à fait claire de ce que peut être un algorithme d'approximation.

Traité sur l'Arithmétique (1172)
As-Samaw'al (ca. 1130–1180)

[. . .] Ce que l'on extrait de l'approximation des racines irrationnelles par le calcul est ce par quoi nous voulons obtenir une quantité rationnelle proche de la racine irrationnelle. Il peut exister une quantité rationnelle plus proche que cela de la racine irrationnelle. Il peut ensuite exister une troisième quantité rationnelle, plus proche de la racine irrationnelle que la seconde et la première quantités, car pour n'importe quelle quantité rationnelle supposée proche d'une racine irrationnelle, la différence entre elles est de fait une ligne droite, et une ligne peut être divisée et partitionnée indéfiniment.

24 Simon Stevin (1548–1620)

En Europe, les choses vont évoluer beaucoup plus tard, avec cet homme, Simon Stevin.

Simon Stevin (1548–1620)

25 Le char à voile de Maurice de Nassau, Prince d'Orange

Il était hollandais et mathématicien au service du prince d'Orange. Le mathématicien au service d'un gouvernant à l'époque, c'était surtout un ingénieur, qui répondait à des questions d'ordre militaire.

Simon Stevin avait mis au point pour son prince ce magnifique char à voile, testé sur les plages de la mer du Nord. En 1608, il a transporté 28 passagers entre Scheveningen et Pettem à plus de 30 kilomètres-heure. Les témoins ont même précisé qu'aucun cheval, aussi véloce soit-il, ne pourrait le suivre bien longtemps.

Simon Stevin, quand il ne dessinait pas des plans de fortifications et de machines de guerre, écrivait des livres d'arithmétique, dont ce. . .

Le char à voile de Maurice de Nassau, Prince d'Orange
Simon Stevin (1548–1620)

26 la croix des mathématiciens

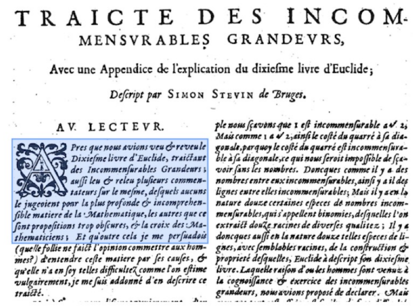
« Traité des incommensurables grandeurs ». Voici les premières lignes, dans l'encadré bleu.

« Après que nous ayons vu et revu le dixième livre d'Euclide, traitant des incommensurables grandeurs ; aussi lu et relu plusieurs commentateurs sur le même, desquels certains le jugeaient comme la matière la plus profonde et incompréhensible de la mathématique, les autres que ce sont des propositions trop obscures, et la croix des mathématiciens ; Et qu'outre cela, je me persuadais (quelle folie ne fait l'opinion commettre aux hommes ?) de comprendre cette matière par ses causes, et qu'elle n'a en soi de telles difficultés qu'on l'estime vulgairement, je me suis adonné à décrire ce traité. »

Ce n'était pas une folie : Stevin comprend le premier, qu'il n'y a pas de différence essentielle entre les nombres, qu'ils soient entiers, rationnels, ou irrationnels. Et il l'affirme avec force.

la croix des mathématiciens

Simon Stevin, Traité des incommensurables grandeurs (1585)



TRAICTE DES INCOMMENSVRABLES GRANDEVRS,

Avec une Appendice de l'explication du dixieſme livre d'Euclide;

Deſcript par SIMON STEVIN *de Bruges.*

AV LECTEVR.

A Pres que nous avions veu & reveu le Dixieſme livre d'Euclide, traictant des Incommenſurables Grandeurs; auſſi leu & releu pluſieurs commentateurs ſur le meſme, deſquels aucuns le jugeoient pour la plus profonde & incomprehenſible matiere de la Mathematique, les autres que ce ſont propoſitions trop obſcures, & la croix des Mathematiciens; Et qu'outre cela je me perſuadois (quelle follie ne faict l'opinion commettre aux hommes?) d'entendre ceſte matiere par ſes cauſes, & qu'elle n'a en ſoy telles difficultez comme l'on eſtime vulgairement, je me ſuis addonné d'en deſcrire ce traicté.

ple nous ſçavons que 1 eſt incommenſurable a $\sqrt{2}$, Mais comme 1 a $\sqrt{2}$, ainſi le coſté du quarré à ſa diagonale, parquoy le coſté du quarré eſt incommenſurable à ſa diagonale, ce qui nous ſeroit impoſſible de ſçavoir ſans les nombres. Doncques comme il y a des nombres entre eux incommenſurables, ainſi y a il des lignes entre elles incommenſurables; Mais il y a en la nature douze certaines eſpeces de nombres incommenſurables, qui s'appellent binomies, deſquelles l'on extraict douze racines de diverſes qualitez; Il y a doncques auſſi en la nature douze telles eſpeces de lignes, avec ſemblables racines, de la conſtruction & proprieté deſquelles, Euclide à deſcript ſon dixieſme livre. Laquelle raiſon d'ou les hommes ſont venuz à la cognoiſſance & exercice des incommenſurables grandeurs, nous avions propoſé de declarer. Mais

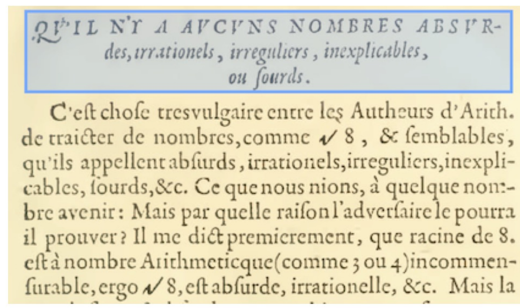
27 Arithmétique (1585)

« Qu'il n'y a aucun nombres absurdes, irrationnels, irréguliers, inexplicables, ou sourds. C'est chose très vulgaire entre les auteurs d'arithmétique de traiter de nombres comme $\sqrt{8}$ et semblables, qu'ils appellent absurdes, irrationnels, irréguliers, inexplicables, sourds, et cetera. Ce que nous nions, à quelque nombre que ce soit. »

Là, tout le monde a dû s'écrier : bon sang mais c'est bien sûr ! évidemment il a raison ! Eh bien non, Stevin a été âprement combattu, en particulier par Arnauld et Nicole dans leur Art de Penser, qui est aussi désigné par « Logique de Port-Royal ».

Arithmétique (1585)

Simon Stevin (1548–1620)



QV'IL N'Y A AVCVNS NOMBRES ABSVRdes, irrationels, irreguliers, inexplicables, ou ſourds.

C'eſt choſe tresvulgaire entre les Autheurs d'Arith. de traicter de nombres, comme $\sqrt{}$ 8, & ſemblables, qu'ils appellent abſurds, irrationels, irreguliers, inexplicables, ſourds, &c. Ce que nous nions, à quelque nombre avenir: Mais par quelle raiſon l'adverſaire le pourra il prouver? Il me dict premierement, que racine de 8. eſt à nombre Arithmeticque (comme 3 ou 4) incommenſurable, ergo $\sqrt{}$ 8, eſt abſurde, irrationelle, &c. Mais la

28 La logique ou l'art de penser (1662)

« Nous voyons encore que Simon Stevin, très célèbre mathématicien du prince d'Orange, ayant défini le nombre, *Nombre est cela par lequel s'exprime la quantité de chacune chose*, il se met ensuite fort en colère contre ceux qui ne veulent pas que l'unité soit nombre, jusqu'à faire des exclamations de rhétorique, comme s'il s'agissait d'une dispute fort solide. »

... et pire encore :

La logique ou l'art de penser (1662)

Antoine Arnauld (1612–1694), Pierre Nicole (1625–1695)

Nous voyons encore que Simon Stevin, tres-celebre Mathematicien du Prince d'Orange, ayant defini le nombre, *Nombre est cela par lequel s'exprime la quantité de chacune chose*, il se met ensuite fort en colere contre ceux qui ne veulent pas que l'vnité soit nombre, jusqu'à faire des exclamations de rhetorique, comme s'il s'agissoit d'vne dispute fort solide.

29 La logique ou l'art de penser (1662)

« Le même Stevin est plein de semblables disputes sur les définitions de mots, comme quand il s'échauffe pour prouver que le nombre n'est point une quantité discrète : que la proportion des nombres est toujours arithmétique, et non géométrique : que toute racine de quelque nombre que ce soit est un nombre. Ce qui fait voir qu'il n'a point compris proprement ce que c'était qu'une définition de mot, et qu'il a pris les définitions des mots qui sont incontestables, pour les définitions des choses qui sont contestables. »

Malgré Arnauld et Nicole, les idées de Stevin ont fini par percoler, tout au long du dix-septième siècle.

La logique ou l'art de penser (1662)
Antoine Arnauld (1612–1694), Pierre Nicole (1625–1695)

Le mesme Steuin est plein de semblables disputes sur les definitions de mots, comme quand il s'échauffe pour prouver que le nombre n'est point vne quantité discrette : que la proportion des nombres est toujours arithmetique, & non geometrique : que toute racine de quelque nombre que ce soit est vn nombre. Ce qui fait voir qu'il n'a point compris proprement ce que c'estoit qu'vne definition de mot, & qu'il a pris les definitions des mots qui sont incontestables, pour les definitions des choses qui sont contestables.

30 Arithmetica Universalis (1707)

L'Arithmetica Universalis, ce sont les notes du cours d'arithmétique donné par Newton à Cambridge. Voici ses définitions.

« On entend par nombre, moins une collection de plusieurs unités, qu'un rapport abstrait d'une quantité quelconque à une autre de même espèce, qu'on regarde comme l'unité. Le *nombre* est de trois espèces, l'*entier*, le *fractionnaire* et le *sourd*. L'*entier* est mesuré par l'unité ; le *fractionnaire* par un sous-multiple de l'unité ; le *sourd* est incommensurable avec l'unité. »

Arithmetica Universalis (1707)
Isaac Newton (1643–1727)

On entend par nombre, moins une collection de plusieurs unités, qu'un rapport abstrait d'une quantité quelconque à une autre de même espèce, qu'on regarde comme l'unité. Le *nombre* est de trois espèces, l'*entier*, le *fractionnaire* et le *sourd*. L'*entier* est mesuré par l'unité ; le *fractionnaire* par un sous-multiple de l'unité ; le *sourd* est incommensurable avec l'unité.

À part le mot sourd qui n'est plus en usage, la définition paraît tout à fait moderne. Donc au début du dix-huitième siècle, la bataille était gagnée ? Eh bien non, loin s'en fallait. Voici ce qu'on lit dans la seconde édition de l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert. L'article « Sourd » a été écrit par l'Abbé de la Chapelle sur qui d'Alembert se déchargeait de beaucoup de corvées.

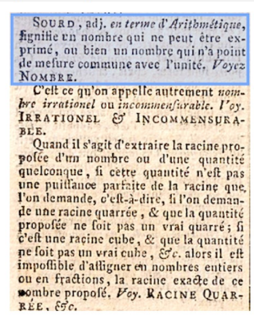
31 Nombre Sourd

« En terme d'arithmétique, « sourd » signifie un nombre qui ne peut pas être exprimé, ou bien un nombre qui n'a point de mesure commune avec l'unité. C'est ce qu'on appelle autrement nombre irrationnel ou incommensurable. »

À part le « qui ne peut pas être exprimé », rien de vraiment scandaleux.

Reportons-nous, comme conseillé, à l'article « Incommensurable ». Celui-là est rédigé par d'Alembert lui-même.

Nombre Sourd
Abbé de la Chapelle, Encyclopédie (1780-1782)


SOURD, adj. *en terme d'Arithmétique*, ſignifie un nombre qui ne peut être exprimé, ou bien un nombre qui n'a point de meſure commune avec l'unité. *Voyez* NOMBRE.

C'eſt ce qu'on appelle autrement *nombre irrationel* ou *incommenſurable*. *Voy.* IRRATIONEL *&* INCOMMENSURABLE.

Quand il s'agit d'extraire la racine propoſée d'un nombre ou d'une quantité quelconque, ſi cette quantité n'eſt pas une puiſſance parfaite de la racine que l'on demande, c'eſt-à-dire, ſi l'on demande une racine quarrée, & que la quantité propoſée ne ſoit pas un vrai quarré ; ſi c'eſt une racine cube, & que la quantité ne ſoit pas un vrai cube, *&c.* alors il eſt impoſſible d'aſſigner en nombres entiers ou en fractions, la racine exacte de ce nombre propoſé. *Voy.* RACINE QUARRÉE, *&c.*

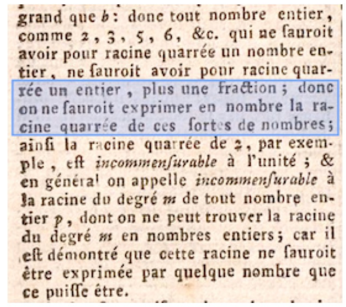
32 Incommensurable

« Tout nombre entier comme 2, 3, 5, 6 qui ne saurait avoir pour racine carrée un nombre entier, ne saurait avoir pour racine carrée un entier plus une fraction ; donc on ne saurait exprimer en nombre la racine carrée de ces sortes de nombres. »

Pour d'Alembert, comme deux n'a pas pour racine carrée une fraction, la racine carrée de deux n'est pas exprimable en nombre : alogon, inconcevable, innommable, sourd, absurde, inexplicable, irrationnel.

Incommensurable

d'Alembert, Encyclopédie (1780-1782)


grand que *b* : donc tout nombre entier, comme 2, 3, 5, 6, &c. qui ne ſauroit avoir pour racine quarrée un nombre entier, ne ſauroit avoir pour racine quarrée un entier, plus une fraction ; donc on ne ſauroit exprimer en nombre la racine quarrée de ces ſortes de nombres ; ainſi la racine quarrée de 2, par exemple, eſt *incommenſurable* à l'unité ; & en général on appelle *incommenſurable* à la racine du degré *m* de tout nombre entier *p*, dont on ne peut trouver la racine du degré *m* en nombres entiers ; car il eſt démontré que cette racine ne ſauroit être exprimée par quelque nombre que ce puiſſe être.

33 références

Vingt siècles après Euclide, le cas de d'Alembert est un peu désespéré vous ne trouvez pas ? Qu'est-ce qu'on pourrait bien faire de lui ? On ne va tout de même pas le noyer comme Hippase !

Et si on l'attachait au mât du char à voile de Stevin, sur la plage un jour de grand vent ?

références

- M. Ben Miled (1999) Les commentaires d'al-Māhāni et d'un anonyme du Livre X des Éléments d'Euclide, *Arabic Sciences and Philosophy*, 9(1), 91–119
- M. Caveing (1998) *L'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*, Villeneuve d'Ascq : Presses Universitaires du Septentrion
- N. Farès (2009) La notion d'irrationalité selon un mathématicien du Xe siècle : Abū Ja'far al-Khāzin, *Lebanese Science Journal*, 10, 113–123
- F. Pluvinage (2003) En mettant des segments bout à bout, *Revue de l'APMEP*, 446, 328–336
- S. Rommevaux (2014) Irrationalité des nombres, irrationalité des lignes selon Michael Stifel et Simon Stevin, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 20(2), 171–209
- K. Saito (1998) Mathematical reconstructions out, textual studies in : 30 years in the historiography of Greek mathematics, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 4, 131–142