



UNIVERSITAT POLITÈCNICA  
DE CATALUNYA  
BARCELONATECH

→ **UPCGRAU**

Fluidotecnia →  
Problemas resueltos

Pedro Javier Gamez-Montero  
Esteban Codina Macia





UNIVERSITAT POLITÈCNICA  
DE CATALUNYA  
BARCELONATECH



iniciativa  
digital politècnica  
Publicacions Acadèmiques UPC

→ **UPCGRAU**

Fluidotecnia →  
Problemas resueltos

Pedro Javier Gamez-Montero  
Esteban Codina Macia

Primera edición: diciembre de 2018

- © Los autores, 2018
- © Fotografía de portada: Sakura Gamez Majima
- © Iniciativa Digital Politècnica, 2018  
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC  
Edifici K2M, Planta S1, Despatx S103-S104  
Jordi Girona 1-3, 08034 Barcelona  
Tel.: 934 015 885  
[www.upc.edu/idp](http://www.upc.edu/idp)  
E-mail: [info.idp@upc.edu](mailto:info.idp@upc.edu)

Depósito legal: B 30110-2018  
ISBN: 978-84-9880-734-9

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede realizarse con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista en la ley.



# Índice

Índice .....	5
Prólogo .....	7
15 recomendaciones para la resolución de problemas de Fluidotecnia .....	13
1. Evolución de la densidad del aire en el interior de un tanque esférico .....	17
2. Funcionamiento de un gasómetro de campana .....	29
3. Evolución del nivel de agua en depósitos comunicados con un bidón y un muelle....	43
4. Variación del nivel de solución de un colorante en un depósito .....	53
5. Depósito de salmuera con células de carga.....	63
6. Flujo en el interior de una electroválvula oleohidráulica .....	79
7. Depósito de salmuera con Impacto de un chorro de agua sobre un álabe móvil .....	91
8. Estudio de un helicóptero .....	105
9. Accionamiento de un ventilador axial sujeto mediante cables.....	121
10. Descarga de un depósito con aireador.....	135
11. Fuente de agua de Herón de Alejandría.....	149
12. Flujo a través de una plataforma giratoria .....	161
13. Tubería en U unida a un disco giratorio.....	171
14. Dispositivo similar a un viscosímetro capilar .....	187
15. Suministro de agua con una noria hidráulica .....	197
16. Flujo a través de un anillo guía.....	207
17. Fluidodinámica de una bomba de pistones .....	219
18. Fluidodinámica de una corredera.....	231
19. Estudio de un amortiguador de pequeñas dimensiones.....	241
20. Fluidodinámica del modelo de un vertedero.....	257
21. Caudal y presiones en un sifón .....	267
22. Evolución del flujo por el interior de un tubo troncocónico .....	277





## Prólogo

Una de las estrategias metodológicas más recurrentes y que es posible identificar en la enseñanza de la mayoría de las materias que configuran los grados o másteres de Ingeniería es la resolución de problemas.

Desde nuestra posición, entendemos por resolución de problemas una concepción sistémica que estructura una determinada práctica dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje para incidir en el desarrollo de alguna habilidad, proceso o conocimiento de manera general. En este sentido, nosotros hemos propuesto la siguiente colección de problemas en el ámbito de la Fluidotecnia.

Sea cual sea el tipo de problema a que nos enfrentemos, parece claro que hay una serie de fases que son necesarias para resolverlo, como señaló claramente el matemático húngaro George Pólya en su libro *How to Solve It*: comprender el problema, trazar un plan o estrategia, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida.

### Comprender el problema

En ocasiones, esta fase parece innecesaria, sobre todo en contextos muy específicos, pero resulta de suma importancia, especialmente cuando los problemas por resolver no son de formulación estrictamente matemática. Entender el problema que se debe abordar es la tarea más difícil; por ello es tan importante orientar a los alumnos en este proceso.

Se debe leer el enunciado despacio.

- ¿Cuáles son los datos? (Lo que conocemos)
- ¿Cuáles son las incógnitas? (Lo que buscamos)
- Hay que tratar de hallar la relación entre los datos y las incógnitas.
- Si se puede, es conveniente trazar un esquema o un dibujo de la situación.



## Trazar un plan para resolverlo

Hay que plantearlo de un modo flexible y recursivo, alejado del mecanicismo.

- ¿Este problema es parecido a otros que ya conocemos?
- ¿Se puede plantear el problema de otra forma?
- Imaginar un problema similar pero más sencillo.
- Suponiendo que el problema ya está resuelto: ¿Cómo se relaciona la situación de llegada con la de partida?
- ¿Se utilizan todos los datos cuando se traza el plan?

## Ejecutar el plan

También hay que plantearlo de una manera flexible y recursiva, alejada del mecanicismo. Y tener en cuenta que el pensamiento no es lineal, sino que hay saltos constantes entre el diseño del plan y su puesta en práctica.

Al ejecutar el plan se debe comprobar cada uno de los pasos.

- ¿Se puede ver claramente que cada paso es correcto?
- Antes de hacer algo, hay que pensar: ¿Qué se consigue con esto?
- Se debe acompañar cada operación matemática de una explicación, contando qué se hace y para qué se hace.
- Cuando surge alguna dificultad que nos deja bloqueados, debemos volver al principio, reordenar las ideas y probarlo de nuevo.

## Comprobar los resultados

Es la fase más importante en la vida diaria, porque supone la confrontación con contexto del resultado obtenido por el modelo del problema que hemos realizado, y su contraste con la realidad que queríamos resolver.

- Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado.
- Fijarnos en la solución. ¿Parece lógicamente posible?
- ¿Se puede comprobar?
- ¿Hay algún otro modo de resolver el problema?
- ¿Se puede hallar otra solución?
- Acompañar la solución con una explicación que indique claramente lo que se ha hallado.
- Utilizar el resultado obtenido y el proceso seguido para formular y plantear nuevos problemas.





Aunque estas cuatro etapas se presentan teóricamente separadas, en el proceso de resolución de un problema se entremezclan. Por ejemplo, a la vez que se va entendiendo un enunciado, van surgiendo ideas que iluminan el plan de resolución y, al tiempo que vamos ejecutando nuestro plan, descubrimos “cosas” que nos llevan a modificarlo o a mejorarlo.

Y esto es lo verdaderamente interesante y lo que nos va a pasar a nosotros.

Como complemento a la estrategia expuesta, nos permitimos exponer las consideraciones siguientes:

- La única manera de aprender a resolver problemas es resolviendo problemas; es muy bueno conocer técnicas y procedimientos, pero en acción, no solo en el plano teórico, porque si no se trata de un conocimiento vacío.
- El proceso para formular un problema consiste en construir un modelo matemático que incorpore las hipótesis físicas adecuadas y las aproximaciones matemáticas, y que analice la situación real con la suficiente precisión para el propósito entre manos. Efectivamente, este proceso de adaptación del modelo simbólico a su prototipo físico es, sin duda, una de las experiencias más valiosas del estudio de la Ingeniería.
- La capacidad de la ingeniera o del ingeniero de tomar decisiones válidas depende de sus conocimientos reales de las diversas técnicas y principios científicos, que le ayudan a idear una máquina o un sistema para que tenga las características deseadas para su funcionamiento. Una mente analítica, lógica y con razonamiento debe prevalecer ante una mente idealista, cuando hablamos de Ingeniería.

Para finalizar, solo nos queda comentar que hemos intentado, en todo momento, proporcionar un ambiente de realidad técnica atractivo, e infundir en los estudiantes un punto de vista profesional como medio para desarrollar los motivos de estudio de la Fluidotecnica, como resultado de la actividad práctica desarrollada inextricablemente con la técnica, para prepararles para las condiciones de trabajo reales con que se encontrarán al dejar la universidad.

Hemos procurado proponer problemas cuya resolución requiera cierto esfuerzo personal por parte del estudiante, y le instamos a que desarrolle su capacidad para representar su trabajo de manera clara, lógica y limpia.

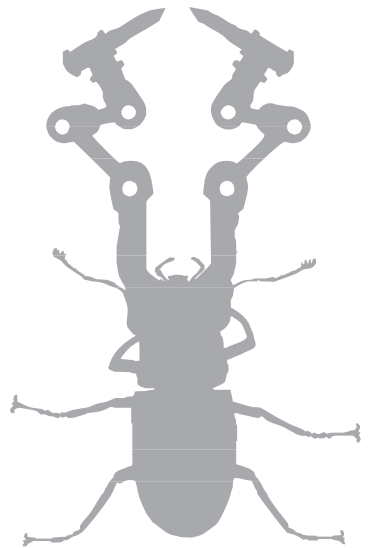
Estamos convencidos de que este documento debe perfeccionarse en lo posible, por lo cual agradecemos de antemano todas las indicaciones que recibamos en este sentido. Y nos daremos por satisfechos si consiguiéramos acabar con el prejuicio tan extendido entre los estudiantes de que es lo mismo “saber” que “poder hacer”.

Las competencias cada vez tienen más importancia en la evaluación del desempeño en Ingeniería. El conocimiento por sí solo no sirve si no se tiene capacidad de hacer; es lo que se denomina “saber hacer” (*know-how*), que se consigue practicando. Por ello la experiencia es tan importante: haciendo, se aprende y se consolidan los conocimientos. En este contexto, no podemos olvidarnos de otro concepto: necesitamos “querer” hacer, eso es, tener la actitud necesaria, pues es un factor determinante en todo lo que hagamos. Es la gasolina del motor, esencial para que el desempeño de una determinada actividad



sea brillante. Por ello, las competencias cobran una importancia decisiva en el contexto de una economía competitiva, y sobre ellas los estudiantes deberán construir su marca personal: una buena formación, el desarrollo de las habilidades necesarias para sacar el fruto adecuado a dichos conocimientos, motivación y una actitud que impulse a seguir avanzando, a seguir creciendo.

Los autores







# 15 recomendaciones para la resolución de problemas de Fluidotecnia

## 1 Leer es fundamental

Lea todo el enunciado del problema antes de empezar. Es aconsejable leer el enunciado del problema por completo antes de comenzar, incluidas las preguntas. Además, preste atención al peso que se da a los diferentes apartados (si se indica) y asigne a cada apartado en particular la parte del tiempo total disponible de acuerdo con su peso.

## 2 Mecánica de fluidos

Olvidese del fluido y piense en cómo se formularía el problema si no hubiese el fluido. Estimule su imaginación y la creatividad. No se imponga condiciones ni pautas a seguir antes de comprender, pensar y razonar el problema. No escatime recursos. Lo importante es no dejar de hacerse preguntas.

## 3 Mecánica de fluidos

Ahora incluya el fluido y piense qué hace este fluido y cómo interviene. Analice la situación real del problema para captar los fenómenos o principios físicos que se manifiestan, con la precisión suficiente, y así poder construir un modelo simplista del mismo. Recuerde una frase de Einstein: “Todo debería hacerse lo más simple posible, pero no más.”

## 4 La estructura es básica

La resolución del problema debe incluir los apartados siguientes:

- a. Hipótesis
- b. Dibujo del esquema
- c. Principios básicos
- d. Resolución
- e. Resultados
- f. Conclusiones
- g. *Explicación*: dentro de cada apartado, se debe incluir siempre una pequeña explicación para razonar y argumentar los pasos que se han dado.



## 5 ¡Dibuje!

Utilice los dibujos y esquemas que estime necesarios. Los dibujos permiten una rápida interpretación y organización de los razonamientos del problema. Recuerde que la misión principal de estos es enriquecer o facilitar el proceso de aprendizaje de los estudiantes. En los exámenes, se valoran muy positivamente y se suelen dar puntos por dibujar (a mano alzada) de manera clara, correcta y precisa. No sea rícano: haga tantos dibujos como considere oportuno, incluso si el enunciado del problema ya viene con uno.

## 6 Definición de variables

Use el esquema para definir las variables; por ejemplo, indique las fuerzas con flechas, nombre las flechas y póngalas en el dibujo en la dirección en que espera que actúen las fuerzas (y si los valores numéricos son positivos, la dirección de la fuerza será la esperada; mientras que, si salen negativos, simplemente serán en el sentido contrario, o bien es que en los cálculos puede haber algún error y es necesario repasarlos.)

## 7 Utilice la notación de las variables

Siempre que introduzca una nueva variable, defínala con una notación clara, a menos que utilice la notación estándar (no es necesario definir  $\rho$  = densidad, pero si opta por designarla “ $d$ ”, es mejor que indique “ $d$  es para densidad”, o algo así).

## 8 Clasifique las variables del problema

Le invitamos a elaborar una lista de todas las variables y agruparlas por categorías (naturaleza de fluido, geometría, prestaciones, etc.).

(I) Geometría ↔ (II) Fluido ↔ (III) Prestación

No puede tener una categoría vacía, sin variables. Si es así, es que algo va mal.

Lo mismo sobre las hipótesis. Clasifique las variables del modo siguiente: las que ayuden a definir el entorno físico (la *geometría*); las que ayuden a definir la naturaleza y las propiedades del fluido, y, por último, las que definan el proceso o, en el caso de una máquina, sus prestaciones. Aproveche para indicar qué variables son datos y cuáles son incógnitas. Indudablemente, ello no es estrictamente imprescindible, pero le ayudará a crear una imagen panorámica del problema.

## 9 Hipótesis y suposiciones

Cuando tenga que hacer una suposición, como eliminar un término de una ecuación, exponga sus razones para hacerlo y justifíquelo. Si no lo hace, la persona que corrija su solución puede tener la impresión de que no está al tanto de la existencia del término que se ha dejado o que ha obviado.



## 10 El orden y la limpieza denotan interés

Sea lo más ordenado y limpio posible, pues ello transmite claridad de pensamiento a la persona que corrige su resolución (aun cuando la resolución sea incorrecta). Además, hace más fácil y comprensiva la corrección.

## 11 A medida que se vaya resolviendo el problema

A medida que avance en la resolución, opte por utilizar términos generales. Es decir, llame a la gravedad  $g$ , a la densidad  $\rho$ , al caudal volumétrico  $Q$ , etc. Cuando haya obtenido su solución (expresada en términos de variables), verifique las dimensiones para evitar grandes errores en la formulación del problema. Dentro de cada apartado, se debe incluir siempre una pequeña explicación para razonar y argumentar los pasos que se vayan dando a medida que se vaya avanzando en la resolución del problema.

## 12 Se deben resolver todos los apartados del problema

No deje ningún problema y/o apartado de un problema sin inspeccionar ni intentar resolver. Si el tiempo se está agotando, al menos apunte algunas palabras y/o cálculos incompletos que indiquen cómo procedería si tuviera tiempo. Si no se dice nada, no se podrá dar crédito a la falta de tiempo.

## 13 Procure superar los “atascos”

Si no tiene una idea clara sobre cómo comenzar y si no se le ocurre la idea o el camino para hacerlo, transcurrido un tiempo razonable vaya a otro apartado o a otro problema (si procede). Ello es aplicable también si se queda “atascado” en medio de un problema.

## 14 Identifique los resultados erróneos

Una vez obtenida una solución, antes de enmarcarla, no olvide poner sus unidades, ya que toda respuesta numérica tiene unidades. Compruebe que las unidades son consistentes conforme al sistema internacional (S. I.). Compruebe también el sentido físico de sus resultados. Si no puede hallar el error, indique qué no le gusta de su valor numérico y por qué.

## 15 Orden de magnitud

Cuando proceda, utilice unidades que le permitan ver más claro el sentido físico del resultado. Por ejemplo, en el cálculo del caudal volumétrico del agua que sale por un grifo de cocina, un resultado de  $1,67 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$  es más difícil de interpretar que  $1 \text{ L}/\text{min}$ , ya que todos tenemos la experiencia de llenar un recipiente con agua en nuestra cocina, eso es, tenemos “orden de magnitud”.

→ 1





## Evolución de la densidad del aire en el interior de un tanque esférico

Un tanque esférico de diámetro interior  $D = 4$  m (v. figura 1) se encuentra inicialmente abierto a la atmósfera en unas condiciones iniciales de presión  $P_0 = P_{\text{atm}}$  y densidad  $\rho_0 = 1$  kg/m<sup>3</sup>. En el instante  $t = 0$  seg, el tanque se cierra a la atmósfera y se abre la válvula de entrada  $V_A$  que deja pasar un flujo de gas constante de  $\dot{m}_A = 12$  kg/h mientras se mantiene la válvula de salida  $V_B$  cerrada. En el instante  $t = t_1$  seg, la presión en el interior del tanque es de  $P_1 = 1$  bar (relativo) y, a partir de este instante, la válvula de salida  $V_B$  deja pasar un caudal constante  $Q_B = 10$  m<sup>3</sup>/h (v. figura 2).

En un proceso isotérmico, se pide:

Determinar el tiempo  $t = t_1$ .

Evaluar cómo varía la densidad del fluido en el interior del tanque a partir del tiempo  $t = t_1$ .

Determinar el tiempo  $t = t_2$  en que la densidad del fluido en el interior del tanque alcanza un valor un 5 % superior a la densidad final (condición de equilibrio).

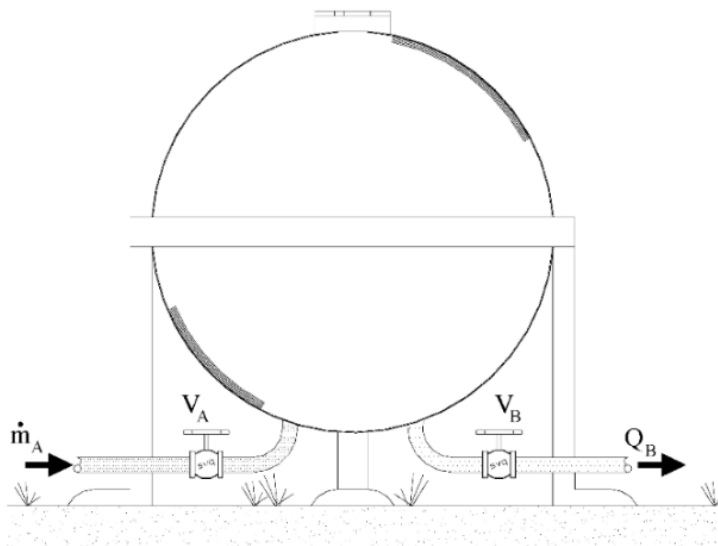
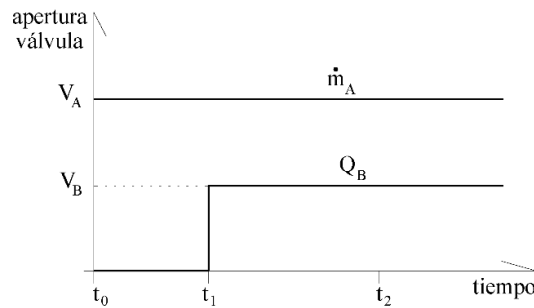


Figura 1.  
Esquema del tanque esférico y las válvulas (no a escala)



Figura 2.  
Evolución de la apertura de las válvulas



## Estrategia para resolver el problema

### Comprender el problema

¿Cuáles son los datos? (¿Qué conocemos?)

Del enunciado, podemos extraer los parámetros que definen el entorno físico (geometría), pero en este caso solo disponemos del diámetro del depósito esférico, y no de las dimensiones de las conexiones de entrada al depósito y de salida. Recuerde que necesitará la fórmula para calcular el volumen de una esfera.

¿Podemos definir la naturaleza del fluido?

Obviamente, se trata de un fluido en estado gaseoso cuya densidad variará con el tiempo, pero ¿puede explicar qué tipo de proceso termodinámico seguirá el gas presumiblemente dentro del depósito, cuando haya transferencia de masa a través de las conducciones de entrada y salida?

Se sabe que el estado de una sustancia viene definido por el valor de sus propiedades físicas y, en consecuencia, el estado de una cantidad de gas viene determinado por su presión, volumen y temperatura. La ecuación que describe normalmente la relación entre la presión, el volumen, la temperatura y la cantidad (en moles) de un gas ideal es la ecuación de Clapeyron:  $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$

donde:  $P$  = presión absoluta,  $V$  = volumen,  $n$  = moles de gas,  $R$  = constante universal de los gases ideales,  $T$  = temperatura absoluta y  $n = m/M$ , siendo  $m$  = masa del gas y  $M$  = peso molecular del gas.

Se sabe que los gases reales que se aproximan más al comportamiento del gas ideal son los gases monoatómicos en condiciones de baja presión y alta temperatura. En cualquier otro caso, hay que utilizar ecuaciones alternativas (normalmente, cabe recurrir a ecuaciones que utilizan el factor de compresibilidad  $z$ ).

Se sabe que, cuando un sistema pasa de un estado inicial de equilibrio a un estado final también de equilibrio por una sucesión de estados, se dice que ha experimentado un “proceso termodinámico en equilibrio”.

Se sabe que la termodinámica considera procesos en que una variable de estado es constante: isotérmico, isobárico, isocórico, adiabático, isentrópico e isentálpico.



¿Puede explicar qué proceso termodinámico sigue el gas en el interior del depósito? Intente proponer un tipo de proceso e indique cuáles son sus pros y sus contras.

¿Cuáles son las incógnitas? ¿Ve factible que, haciendo un balance de materia, pueda encontrar la relación entre los datos y las incógnitas?

Se sabe que el balance de materia se basa en la ley de conservación de la materia (la materia ni se crea ni se destruye, solo se transforma), que establece que la masa de un sistema cerrado permanece siempre constante (excluyendo las reacciones nucleares o atómicas en que la materia se transforma en energía según la ecuación de Einstein).

La masa que entra en un sistema debe salir del sistema o acumularse dentro de él. En los casos más simples, el interior del sistema se considera homogéneo (perfectamente mezclado). Para poder hacer un balance integral de la materia, primero se deben identificar los límites del sistema, es decir, determinar cómo el sistema está conectado con el resto del mundo y cómo el resto del mundo afecta el sistema.

¿Cuáles son los límites del sistema? ¿Puede definir las condiciones termodinámicas (estado) de los flujos de gas en las conducciones de entrada al depósito y de salida?

### **Trazar un plan para resolverlo**

¿Este problema es parecido a otros que ya conocemos? ¿Podría identificarlos?  
¿Puede imaginar un problema similar pero más sencillo? ¿Qué pasaría si el fluido pudiera considerarse incompresible?

Se sabe que un volumen de control se define como una región en el espacio. La masa entra o sale de sus límites, los cuales se conocen como la superficie de control (descripción de Euler).

Se sabe que, desde el punto de vista euleriano, la ecuación de continuidad establece que el ritmo (local) al cual se incrementa la densidad del fluido en el volumen de control (es decir, el incremento de masa) es igual a la afluencia o entrada de masa. Por el contrario, si hay pérdida de masa del volumen de control, la densidad del fluido en el volumen de control decrece.

### **Ejecutar el plan**

Antes de hacer cualquier cosa, hay que pensar: ¿Qué se consigue con ello?

Proponga un volumen de control. ¿Cómo lo considera: deformable o no deformable?  
¿Sabe qué implicaciones tiene la deformabilidad del volumen de control?

Ayúdese de un esquema para identificar el sistema y el volumen de control. Haga lo propio con las superficies de control. Dibuje los vectores que definen la superficie de control (superficies de flujo) y los vectores que definen las correspondientes velocidades del fluido.

¿Puede explicar cuál es el perfil de velocidades en cada una de las superficies de control?  
¿Necesita plantear alguna hipótesis?



Se sabe que un flujo uniforme es aquel flujo en que, en cualquier punto de la superficie de control, el vector velocidad es el mismo. Es decir, la velocidad es independiente del diferencial de superficie elegido.

Se sabe que un flujo permanente, denominado también *flujo estacionario*, se caracteriza porque las condiciones de velocidad en cualquier punto no cambian con el tiempo, sino que permanecen constantes.

¿Puede justificar que en este problema las hipótesis más plausibles son de flujo uniforme y no permanente?

¿Puede escribir la ecuación que expresa el principio de conservación de la masa (denominada *ecuación de continuidad*)? ¿Puede simplificarla?

Se sabe que el flujo volumétrico de un fluido se define como la integral extendida a toda la superficie de control del producto escalar de los vectores: velocidad del flujo y diferencial de superficie.

Se sabe que el flujo másico de un fluido se define como la integral extendida a toda la superficie de control del resultado de multiplicar la densidad del fluido por el producto escalar de los vectores: velocidad del flujo y diferencial de superficie.

Recuerde que al ejecutar el plan se deben comprobar cada uno de los pasos.

- Cada operación matemática debe ir acompañada de una explicación que cuente qué se hace y para qué.
- Si surge alguna dificultad que nos deja bloqueados, debemos volver al principio, reordenar las ideas y probarlo de nuevo.

### **Comprobar los resultados**

Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado. Se aconseja acompañar la solución de una explicación que indique claramente lo que se ha hallado.

En este punto, se aconseja representar los resultados obtenidos en función del tiempo. ¿Le parecen lógicamente posibles?

¿Puede comprobar la solución? ¿Puede identificar algunas condiciones singulares?



## Estudio

### Breve descripción

El problema presenta la entrada de un caudal másico constante de aire a un tanque esférico. Inicialmente, la imposibilidad de salida del aire y de deformación del tanque condicionan la compresibilidad del aire en su interior. Posteriormente, cuando, además de la entrada de aire constante y su compresión en el interior del tanque, se impone un caudal volumétrico constante de salida de aire, se produce una nueva evolución de la densidad del aire en el tanque en función del tiempo.

### Análisis

Análisis INTEGRAL	
Volumen de control (VC)	
Indeformable	Inercial (fijo)
Deformable	No inercial (móvil)

### Hipótesis que se plantean

PROPIEDADES del fluido			
<b>Densidad</b>	Constante	Incompresible	Homogéneo
	<b>Variable:</b> Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		<b>Gas ideal</b>	Adiabático
			Isotérmico
COMPORTAMIENTO del fluido			
En reposo	Equilibrio	Absoluto	
		Relativo	
En movimiento	Régimen	Estacionario	
		Transitorio	
PRESTACIONES del fluido			
- Densidad			
Otras hipótesis de TRABAJO			
- Propiedades físicas y perfiles de velocidades constantes y uniformes en las secciones de control - Flujo másico por la válvula de entrada y caudal volumétrico por la válvula de salida constantes - Tanque indeformable			

### Principios básicos y leyes fundamentales

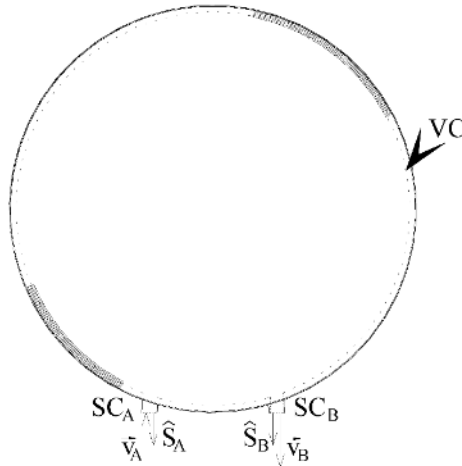
- Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Ley de los gases ideales



### Resolución

Una vez establecido el tipo de VC que se utilizará en el desarrollo del problema, se identifican las correspondientes superficies de control (SC) en la esfera que forma el tanque (v. figura 3).

Figura 3. Evolución de la apertura de las válvulas y la situación del volumen de control (VC), y las superficies de control (SC)



En la ecuación de continuidad,

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV}_{\neq 0} + \int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0 \quad (1)$$

donde el término temporal de la variación de masa en el VC no es nulo, ya que se produce un proceso de llenado, compresión y vaciado del tanque. Estudiando la ecuación de continuidad por términos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV \stackrel{Hip.i}{=} \frac{\partial}{\partial t} \rho \int_{VC} dV = \frac{\partial}{\partial t} [\rho V] = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\neq 0} V + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{=0; \text{indeformable}} \rho \quad (2)$$

donde el término de la variación del volumen de la esfera es nulo, ya que no varía con el tiempo. Así:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = V \frac{d\rho}{dt} \quad (3)$$

Teniendo presente la figura 3,

$$\int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \int_{SC_A} \rho \left( \underbrace{\vec{v}_A \cdot d\vec{S}_A}_{(-)} \right) + \int_{SC_B} \rho \left( \underbrace{\vec{v}_B \cdot d\vec{S}_B}_{(+)} \right) \stackrel{Hip.iii}{=} - \underbrace{\rho v_A S_A}_{\dot{m}_A} + \underbrace{\rho v_B S_B}_{\dot{Q}_B} \quad (4)$$

Así,



$$\int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = -\dot{m}_A + \rho Q_B \quad (5)$$

Y, agrupando términos:

$$V \frac{d\rho}{dt} + \rho Q_B = \dot{m}_A \quad (6)$$

### Determinar el tiempo $t = t_1$ seg

En el intervalo de tiempo  $t_1 - t_0$ , la válvula  $V_B$  se encuentra cerrada. De esta forma, la ecuación (6),

$$\begin{aligned} V \frac{d\rho}{dt} &= \dot{m}_A \\ d\rho &= \frac{\dot{m}_A}{V} dt \end{aligned} \quad (7)$$

e integrado,

$$\rho_1 - \rho_0 = \frac{\dot{m}_A}{V} (t_1 - t_0) \quad (8)$$

Conocido el volumen de una esfera

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{6} \pi D^3 \quad (9)$$

si se introduce en la ecuación anterior se obtiene:

$$t_1 = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\frac{\dot{m}_A}{\frac{1}{6} \pi D^3}} + t_0 \quad (10)$$

Del enunciado se conocen los datos  $\rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $t_0 = 0 \text{ seg}$ ,  $D = 4 \text{ m}$  y  $\dot{m}_A = 12 \text{ kg/h} = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ kg/seg}$ . Sin embargo, la densidad  $\rho_1$  no se conoce a priori. Tomando del enunciado y suponiendo que la compresión en el interior del tanque esférico sigue un proceso isotérmico, la ley que define este proceso es.

$$\frac{P^*}{\rho^n} = \text{Cte} \quad (11)$$

donde el asterisco indica presión absoluta y el índice politrópico para la densidad es  $n = 1$  en un proceso isotérmico. La constante será evaluada en el instante del cual se tiene información sobre la presión y la densidad; así:

$$\begin{aligned} \frac{P_1^*}{\rho_1} &= \frac{P_0^*}{\rho_0} \\ \rho_1 &= \rho_0 \frac{P_1^*}{P_0^*} \end{aligned} \quad (12)$$



donde,

$$\begin{aligned} P_0^* &= P_{\text{atm}} \cong 1 \text{ bar} \cong 10^5 \text{ Pa} \\ P_1^* &= P_1 + P_{\text{atm}} \cong 2 \text{ bar} \cong 2 \cdot 10^5 \text{ Pa} \end{aligned} \quad (13)$$

Sustituyendo los datos de (13) en la ecuación (12), se obtiene:

$$\rho_1 = 1 \frac{2 \cdot 10^5}{10^5} = 2 \text{ kg/m}^3 \quad (14)$$

Finalmente, sustituyendo los datos del enunciado y este último resultado en la ecuación (10),

$$t_1 = \frac{2-1}{3,33 \cdot 10^{-3}} + 0 = 10063,1 \text{ seg} = 167,7 \text{ min} \cong 2,7 \text{ h} = \frac{1}{6} \pi 4^3 \quad (15)$$

### **Evaluar cómo varía la densidad del fluido en el interior del tanque a partir del tiempo $t = t_1$ seg**

A partir del instante de tiempo  $t_1$ , la válvula de salida  $V_B$  se abre y deja pasar un caudal volumétrico  $Q_B$ . Tomando la ecuación (6),

$$\begin{aligned} V \frac{d\rho}{dt} &= \dot{m}_A - \rho Q_B \\ V \frac{d\rho}{(\dot{m}_A - \rho Q_B)} &= dt \\ \frac{V}{Q_B} \frac{d\rho}{\left(\frac{\dot{m}_A}{Q_B} - \rho\right)} &= dt \end{aligned} \quad (16)$$

e integrándola,

$$\begin{aligned} -\frac{V}{Q_B} \ln \left[ \frac{\dot{m}_A}{Q_B} - \rho \right]_{\rho_1}^{\rho} &= [t]_{t_1}^t \\ t &= t_1 - \frac{V}{Q_B} \ln \left[ \frac{\frac{\dot{m}_A}{Q_B} - \rho}{\frac{\dot{m}_A}{Q_B} - \rho_1} \right] \end{aligned} \quad (17)$$





Reordenando términos.

$$\rho(t) = \frac{\dot{m}_A}{Q_B} - \left( \frac{\dot{m}_A}{Q_B} - \rho_1 \right) \exp \left[ \frac{t_1 - t}{\frac{V}{Q_B}} \right] \quad (18)$$

y se evalúa cómo varía la densidad del fluido en el interior del tanque a partir del tiempo  $t = t_1$ .

**Determinar el tiempo  $t = t_2$  en que la densidad del fluido en el interior del tanque alcanza un valor un 5 % superior a la densidad final (condición de equilibrio)**

Para determinar el tiempo para el cual la densidad del fluido en el interior del tanque permanecerá constante, se sabe que, cuando se llegue al régimen permanente, la ecuación (6) establecerá,

$$V \cdot \underbrace{\frac{d\rho}{dt}}_{=0 \text{ (en el régimen permanente)}} + \rho Q_B = \dot{m}_A \quad (19)$$

Y, por tanto, la densidad de condición de equilibrio  $\rho_{ce}$  será:

$$\begin{aligned} \rho Q_B &= \dot{m}_A \\ \rho_{ce} &= \frac{\dot{m}_A}{Q_B} \end{aligned} \quad (20)$$

La densidad será constante en la condición de equilibrio y su valor, tomando los datos del enunciado,

$$\rho_{ce} = \frac{12}{10} = 1,2 \text{ kg/m}^3 \quad (21)$$

La densidad en el interior del tanque  $\rho_2$  en el tiempo  $t = t_2$ , en que alcanza un valor un 5 % superior a la densidad de condición de equilibrio, vale:

$$\rho_2 = 1,05 \rho_{ce} = 1,05 \cdot 1,2 = 1,26 \text{ kg/m}^3 \quad (22)$$

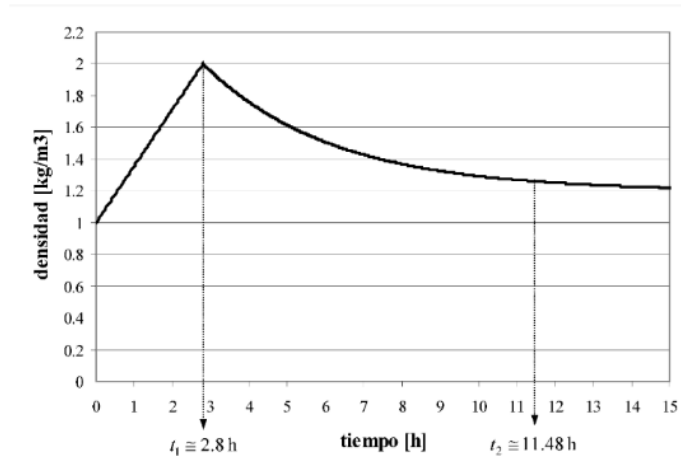
Finalmente, sustituyendo los valores calculados y del enunciado en la ecuación (17):

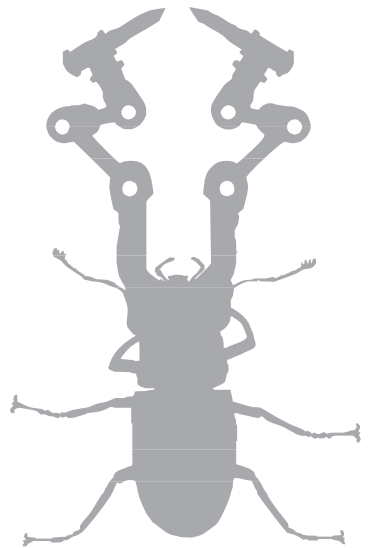
$$t_2 = 10063,1 - \frac{\frac{1}{6} \pi 4^3}{2,78 \cdot 10^{-3}} \ln \left[ \frac{\frac{3,33 \cdot 10^{-3}}{2,78 \cdot 10^{-3}} - 1,26}{\frac{3,33 \cdot 10^{-3}}{2,78 \cdot 10^{-3}} - 2} \right] \cong 41400 \text{ seg} = 11,5 \text{ h} \quad (23)$$

También se puede determinar mediante la representación gráfica de la función  $\rho(t)$  de la ecuación (18), como se muestra en la figura 4.



Figura 4.  
Evolución de la densidad en el interior del tanque





→2



# Funcionamiento de un gasómetro de campana

En la figura 1, se presenta un esquema similar a un gasómetro de campana en condiciones de equilibrio y cuando la válvula está cerrada.

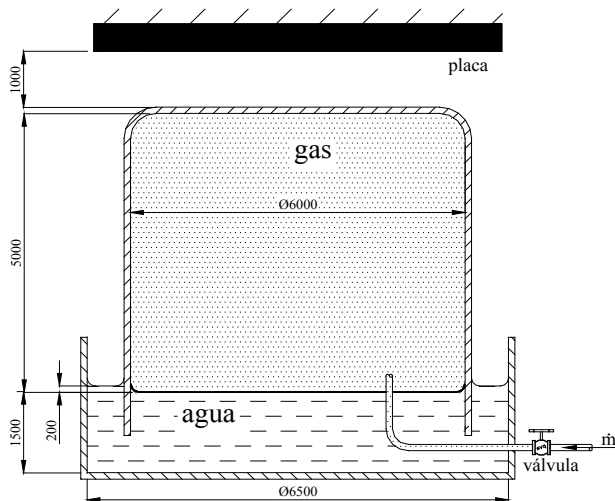


Figura 1.  
Esquema similar a un gasómetro de campana (no a escala).

En un instante determinado, la válvula se abre y comienza a entrar un caudal másico de gas en el interior de la campana de valor  $\dot{m} = 0,10 \text{ kg/min}$  que la hace subir hasta que llega a tocar la placa, siendo este su máximo.

Se pide:

- 1-Calcular cómo varía la altura de la campana en función del tiempo.
- 2-Calcular cómo varía la presión del gas en el interior de la campana antes y después de tocar la placa

Datos:

Constante del gas  
 $R \cong 287 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$

Temperatura del gas  
 $T = 15^\circ \text{C}$

Proceso de compresión del gas isotérmico



## Estrategia para resolver el problema

### Comprender el problema

Recuerde leer detenidamente todo el problema, incluidas todas las preguntas.

Sin hacer ningún cálculo, intente razonar cómo y por qué se mueve la campana. ¿Cómo intuye el comportamiento del agua desde la situación inicial hasta la final (cuando la campana toca la placa superior y la válvula A está abierta)?

¿Cuáles son los datos de partida?

Del enunciado, podemos extraer los parámetros que definen el entorno físico (geometría). En este caso, disponemos de los diámetros del depósito y de la campana, así como las dimensiones que permiten definir la posición inicial (cotas) de las superficies libres de agua en el interior de la campana y del depósito.

Observe que la cota de la superficie libre de agua en el depósito es superior a la cota de la superficie libre de agua en el interior de la campana.

¿Podemos definir la naturaleza (propiedades) de los fluidos implicados en este problema? Obsérvese que en este problema intervienen dos fluidos:

- un fluido en estado líquido: agua dentro del depósito
- un fluido en estado gaseoso: gas contenido en el interior de la campana.

Se sabe que la densidad ( $\rho$ ) de un fluido es su masa por unidad de volumen.

Se sabe que la compresibilidad de un fluido es una propiedad de la materia que hace que todos los cuerpos reduzcan su volumen (y aumenten su densidad) al someterlos a una presión o compresión determinada, manteniendo constantes otros parámetros.

Se sabe que la densidad de los fluidos varía ampliamente entre ellos. En condiciones atmosféricas, la densidad del aire es, aproximadamente, de  $1,22 \text{ kg/m}^3$ ; la del agua, de unos  $1.000 \text{ kg/m}^3$ , y la del mercurio, de  $13.500 \text{ kg/m}^3$ . Para un fluido concreto, la densidad varía con la temperatura y la presión. Esta variación es bastante fuerte para los gases, pero relativamente débil en los líquidos. Si la variación de la densidad se pudiera despreciar, se diría que el fluido es incompresible.

De lo anterior, podemos presuponer que la densidad del agua es constante, pues se puede considerar como un fluido incompresible. Pero ¿podemos aceptar que la densidad del gas dentro de la campana es constante? ¿En todas las fases del problema?

A priori, hay que considerar que todos los gases son compresibles, ya que manifiestan una variación importante de su densidad como consecuencia de una variación de la presión, pero, si analizamos detenidamente nuestro problema, ¿podemos plantear la hipótesis de que la variación de la densidad del gas en el interior de la campana es despreciable y, en consecuencia, considerarlo un fluido incompresible?



### Posible razonamiento

Obsérvese que el agua actúa como elemento de estanqueidad del gas contenido en la campana y que la presión dentro de la campana es proporcional a la diferencia de cotas de las superficies libres de agua, fuera y dentro de la campana (de acuerdo con la ecuación fundamental de la fluidoestática). Obsérvese que, durante el movimiento de ascenso de la campana, los niveles de las superficies libres del agua son constantes, la variación de presión es nula y la temperatura es constante. Luego, la densidad del gas dentro de la campana es constante.

¿Está de acuerdo con el razonamiento anterior? ¿Puede completarlo?

¿Qué fuerzas soportan el peso de la campana?

¿Qué ocurrirá cuando la campana haga contacto con la placa? ¿Es aceptable mantener la hipótesis de que la densidad del gas es constante?

Con relación al funcionamiento del gasómetro de campana, ¿cuáles son las incógnitas? ¿Ve factible que, haciendo solo un balance de materia (para el gas), pueda hallar la relación entre los datos y las incógnitas?

¿Considera necesario hacer otro balance de materia para el agua? ¿En este caso, cuáles serían las hipótesis?

### Trazar un plan para resolverlo

Se sabe que, desde el punto de vista euleriano, para establecer un balance de masa de un fluido es necesario definir un volumen de control y aplicar la ecuación de continuidad (principio conservación de masa).

Si ambos fluidos (agua y aire) se mueven y estamos interesados en analizar el funcionamiento del gasómetro, proponga los volúmenes de control necesarios. ¿Cómo los considera: deformables o no deformables?

¿Necesita alguna ecuación adicional?

### Ejecutar el plan

Recuerde que, antes de hacer cualquier cosa, hay que pensar: ¿Qué se consigue con ello?

Ayúdese de un esquema para identificar el sistema y el volumen de control de ambos fluidos. Haga lo propio con las superficies de control. Dibuje los vectores que definen la superficie de control (superficies de flujo) y los vectores que definen las correspondientes velocidades del fluido.

¿Puede explicar cuál es el perfil de velocidades en cada una de las superficies de control? ¿Necesita plantear alguna hipótesis?

¿Puede razonar qué proceso termodinámico sigue el gas en el interior de la campana cuando está en contacto con la placa? Intente proponer un tipo de proceso e indique sus pros y sus contras.



¿Tiene claro lo que debe hacer? Si la respuesta es afirmativa, puede empezar a aplicar los balances de materia para el gas y posteriormente para el líquido. Si la respuesta es negativa, le aconsejamos que vuelva a leer el enunciado. Recuerde: pensar es gratis.

Se aconseja acompañar los desarrollos y los cálculos con una explicación donde indique claramente qué pretende y qué es lo que ha hallado.

### Comprobar los resultados

- Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado.

- En este punto, se aconseja representar los resultados obtenidos en función del tiempo. ¿Le parecen lógicamente posibles?

- Suponiendo que ha llegado a unos resultados correctos, ¿puede comprobar y justificar adecuadamente las hipótesis propuestas?

Por último, si tuviera que volver a resolver el problema, ¿cambiaría algunos de los planteamientos y de las hipótesis utilizadas con el objetivo de simplificarlo y resolverlo de una manera más simple?

### Estudio

#### Breve descripción

En la primera parte del problema, el gasómetro de campana irá ascendiendo debido a la entrada de caudal másico constante de gas por la válvula. La densidad se mantendrá constante y será el volumen ocupado por el gas el que variará, hasta alcanzar la placa fija superior. La presión en el interior vendrá determinada por el peso de la campana y reflejada en la diferencia de alturas entre las superficies libres de agua. En la segunda parte, al no poder desplazarse la campana, será la superficie libre del agua la que irá descendiendo en el interior de esta y, como resultado de ello, la presión variará.

#### Análisis

<b>Análisis INTEGRAL</b>	
<b>Volumen de control (VC)</b>	
<b>Indeformable</b>	<b>Inercial (fijo)</b>
<b>Deformable</b>	No inercial (móvil)





### Hipótesis que se plantean

<b>PROPIEDADES del fluido</b>			
<b>Densidad</b>	Constante	Incompresible	Homogéneo
	<b>Variable:</b> Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		<b>Gas ideal</b>	Adiabático
			<b>Isotérmico</b>
<b>COMPORTAMIENTO del fluido</b>			
En reposo	Equilibrio	Absoluto	
		Relativo	
<b>En movimiento</b>	<b>Régimen</b>	Estacionario	
		<b>Transitorio</b>	
<b>PRESTACIONES del fluido</b>			
- Variación de la presión en el interior del gasómetro de campana			
<b>Otras hipótesis de TRABAJO</b>			
- La densidad es independiente de la posición de las partículas de fluido en el interior (homogéneo) del VC. - El flujo másico por la válvula de entrada es constante. - La variación de la temperatura es despreciable. - Las propiedades físicas y los perfiles de velocidades son constantes y uniformes en las secciones de control. - Los sólidos son indeformables. - Se considera despreciable cualquier tipo de pérdida de energía.			

### Principios básicos y leyes fundamentales

- Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Fluidostática
- Ley de los gases ideales

### Resolución

#### Calcular cómo varía la altura de la campana en función del tiempo

En primer lugar, es conveniente evaluar la condición de equilibrio. La presión  $P_0$  en el interior de la campana puede evaluarse mediante la ecuación fundamental de la fluidostática (v. figura 2). Para ello, se puede considerar que el peso de la campana es soportado por la presión del gas, aceptando las siguientes hipótesis:

- La presión del gas es prácticamente constante en todo el recinto interior de la campana
- El peso del gas es despreciable
- El empuje del agua sobre la parte sumergida de la campana es despreciable



De esta forma,

$$\begin{aligned} P_B &= P_A \\ P_A &= P_{atm} + \rho_{agua} g \Delta y \\ P_B &\cong P_0^* = P_{atm} + \rho_{agua} g \Delta y \end{aligned} \quad (1)$$

donde,

$$\left. \begin{aligned} \rho_{agua} &= 1000 \text{ kg/m}^3 \\ g &= 9,81 \text{ m/s}^2 \\ \Delta y &= 0,2 \text{ m} \\ P_{atm} &\cong 10^5 \text{ Pa} \end{aligned} \right\} \rightarrow P_0^* = 101962 \text{ Pa [abs]} \quad (2)$$

De esta forma, el peso de la campana  $W$  es

$$S_{cam} = \frac{\pi}{4} 6^2 = 28,27 \text{ m}^2 \rightarrow W = (P_0^* - P_{atm}) \cdot S_{cam} = 55474,24 \text{ N} \cong 5,7 \text{ Tn} \quad (3)$$

Además, tras su análisis, se evidencia que la densidad en el interior de la campana permanece constante, habida cuenta de que esta densidad depende solo del peso de la campana y este es constante. Por último, para conocer la densidad en el interior de la campana, se emplea la ecuación de los gases perfectos:

$$\rho_0 = \frac{P_0^*}{RT} = \frac{101962}{287(273+15)} = 1,23 \text{ kg/m}^3 \quad (4)$$

Para evaluar cómo varía la altura de la campana en función del tiempo, se debe establecer el principio de conservación de la masa, ecuación de continuidad mediante un análisis integral. Primero hay que establecer el tipo de volumen de control (VC) que se va a utilizar.

Volumen de control (VC)	<b>Indeformable</b>	La superficie de la parte superior de la
	<b>Deformable</b>	campana se mueve a la velocidad $\frac{dz}{dt}$
	<b>Inercial</b>	Sistema de referencia fijo
	<b>No inercial</b>	

Una vez establecido el tipo de VC que se utilizará en el desarrollo del problema, se identifican las correspondientes superficies de control (SC) en el interior de la campana (v. figura 2).

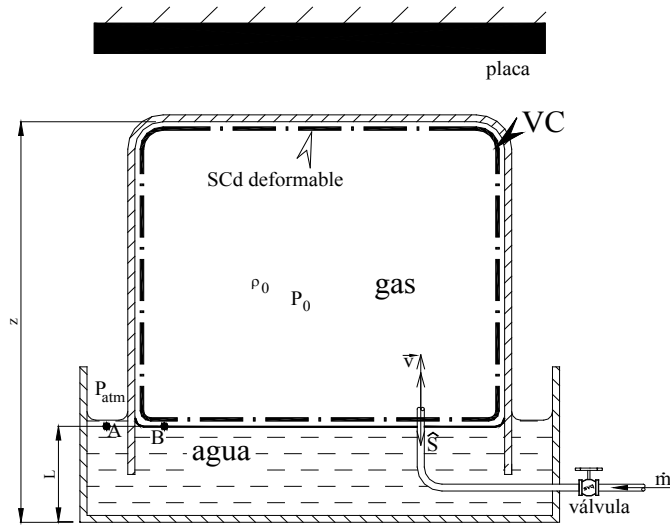


Figura 2. Situación del volumen de control (VC) y la superficie de control deformable (SCd)

Partimos de la ecuación de continuidad:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV}_{\neq 0} + \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (5)$$

en que el término temporal de la variación de masa en el VC no es nulo, puesto que se produce un proceso de llenado en el interior de la campana.

Estudiando la ecuación de continuidad por términos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV \stackrel{\text{Hip.}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \rho \int_{VC} dV = \frac{\partial}{\partial t} [\rho V] = V \frac{\partial \rho}{\frac{\partial t}{=0}} + \rho \frac{\partial V}{\partial t} \quad (6)$$

donde el término  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  es nulo, ya que la densidad en el interior del volumen de control (VC) no varía en el tiempo hasta que la campana no llega a tocar la placa. La presión y la temperatura en el interior de la campana  $P_0$  serán equivalentes en todo momento al peso de la campana, hasta que esta toque con la placa. Así,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = \rho \frac{dV}{dt} \quad (7)$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales y la variación del volumen,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = \rho_0 \frac{d}{dt} [S_{cam} (z - L)] = \rho_0 S_{cam} \frac{dz}{dt} \quad (8)$$



donde  $S_{cam}$  es la superficie interior de la campana.  $\int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$

Teniendo presente la figura 2, la única superficie de control es la del tubo de entrada de la válvula:

$$\int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{SC} \rho \underbrace{\vec{v} \cdot d\vec{S}}_{(-) \text{ Hip.}} = - \underbrace{\rho v S}_{\dot{m}} = -\dot{m} \quad (9)$$

Ahora, introduciendo la ecuación (9) y (8) en (5),

$$\rho_0 S_{cam} \frac{dz}{dt} - \dot{m} = 0 \quad (10)$$

Integrando la ecuación (10) y sustituyendo (3) y (4),

$$\int_{z_0}^z \partial z = \frac{\dot{m}}{\rho_0 S_{cam}} \int_0^t \partial t$$

$$z = z_0 + \frac{\dot{m}}{\rho_0 S_{cam}} t \quad (11)$$

que, con  $z_0 = 6,5 \text{ m}$  y  $\dot{m} = 0,10 \text{ kg/min} = 1,67 \cdot 10^{-3} \text{ kg/seg}$ , finalmente se obtiene:

$$z = 6,5 + 4,8 \cdot 10^{-5} t \quad (12)$$

La campana tocará la placa aproximadamente en

$$7,5 = 6,5 + 4,8 \cdot 10^{-5} t \Rightarrow t \cong 347 \text{ min} \cong 5,8 \text{ h} \quad (13)$$

despreciando el espesor de la pared de la campana.

### Calcular cómo varía la presión del gas en el interior de la campana antes y después de tocar la placa

Primero hay que establecer los volúmenes de control que se van a utilizar.

Volumen de control (VC1)	<del>Indeformable</del>	Tomando la superficie de la interfase gas-agua como superficie de control deformable
	<del>Deformable</del>	
Volumen de control (VC2)	<del>Inercial</del>	Sistema de referencia fijo
	<del>No inercial</del>	
	<del>Indeformable</del>	Tomando las superficies de control SC1 en la interfase agua-atmósfera y SC2 en la interfase gas-agua
	<del>Deformable</del>	
	<del>Inercial</del>	Sistema de referencia fijo
	<del>No inercial</del>	



Una vez establecido el tipo de VC que se utilizará en el desarrollo del problema, se identifican las correspondientes superficies de control (SC) en el interior de la campana (v. figura 3).

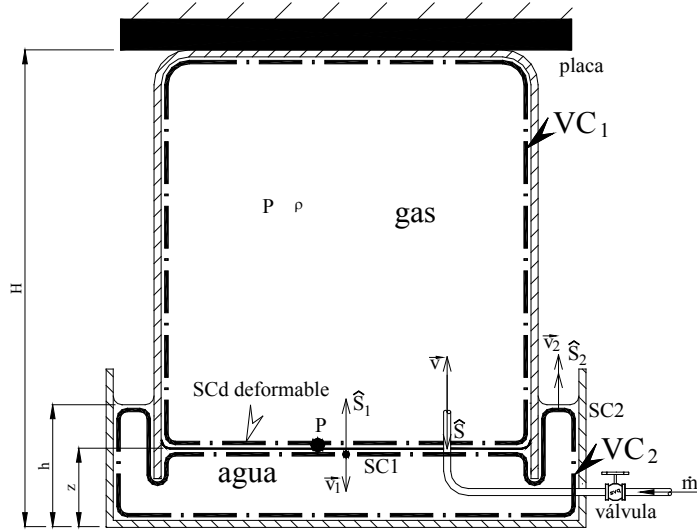


Figura 3. Situación del volumen de control (VC) y la superficie de control deformable (SCd)

Para resolver esta cuestión cuando la campana toca la placa, de nuevo se evalúa la ecuación de continuidad para el volumen de control 1 (VC1).

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC1} \rho dV}_{\neq 0} + \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (14)$$

donde el término temporal de la variación de masa en el VC1 no es nulo, ya que se produce un proceso de llenado y compresión en el interior de la campana.

Estudiando la ecuación de continuidad por términos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC1} \rho dV \stackrel{\text{Hip.}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \rho \int_{VC1} dV = \frac{\partial}{\partial t} [\rho V_1] = V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V}{\partial t} \quad (15)$$

donde ninguno de los términos temporales es nulo, ya que la densidad en el interior del volumen de control (VC1) y el propio volumen de control varían en el tiempo. Así,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC1} \rho dV = (H - z) S_{cam} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial t} [S_{cam} (H - z)] = (H - z) S_{cam} \frac{d\rho}{dt} - \rho S_{cam} \frac{dz}{dt} \quad (16)$$

Teniendo presente la figura 3, la única superficie de control es la del tubo de entrada de la válvula,

$$\int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{SC} \rho \underbrace{\vec{v} \cdot d\vec{S}}_{(-)} \stackrel{\text{Hip.}}{=} - \underbrace{\rho v S}_{\dot{m}} = -\dot{m} \quad (17)$$



Ahora, introduciendo la ecuación (17) y (16) en (14),

$$-\rho S_{cam} \frac{dz}{dt} + (H - z) S_{cam} \frac{d\rho}{dt} - \dot{m} = 0 \quad (18)$$

Para determinar la variación de la densidad en el tiempo, se sabe que el proceso de compresión es isotérmico, de modo que

$$\frac{P^*}{\rho^n} = Cte \quad (19)$$

donde  $P^*$  es la presión absoluta (el asterisco indica presión absoluta) y el índice politrópico vale  $n = 1$  para un proceso isotérmico. Para los dos estados de  $t_0$  a  $t$ ,

$$\begin{aligned} \frac{P_0^*}{\rho_0} &= \frac{P^*}{\rho} \\ \rho &= \rho_0 \frac{P^*}{P_0^*} \end{aligned} \quad (20)$$

Y, diferenciando,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho_0}{P_0^*} \frac{dP^*}{dt} \quad (21)$$

Para determinar la variación de la altura del volumen de control del interior de la campana (VC1), se toma un nuevo volumen de control que recoge el depósito de agua (VC2), donde se aplica de nuevo la ecuación de continuidad:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC2} \rho dV}_{=0} + \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (22)$$

en que el término temporal ahora sí es nulo, ya que el volumen de control (VC2) es fijo y la densidad del agua se considera constante. El término de las superficies de control es el siguiente, teniendo presente la figura 3,

$$\int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{\overbrace{SC_1+SC_2}^{SC}} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{SC_1} \rho \underbrace{\vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1}_{(-)} + \int_{SC_2} \rho \underbrace{\vec{v}_2 \cdot d\vec{S}_2}_{(+)} \stackrel{\text{Hip.}}{=} -\rho_{agua} v_1 S_1 + \rho_{agua} v_2 S_2 \quad (23)$$

Introduciendo la ecuación (23) en (22),

$$\begin{aligned} -\rho_{agua} v_1 S_1 + \rho_{agua} v_2 S_2 &= 0 \\ v_1 S_1 &= v_2 S_2 \\ -\frac{dz}{dt} S_1 &= \frac{dh}{dt} S_2 \end{aligned} \quad (24)$$

que, integrando, da la relación



$$h = -\frac{S_1}{S_2} z \quad (25)$$

La relación entre las superficies libres de las interfaces agua-atmósfera y gas-agua viene también determinada por la hidrostática,

$$P^* = P_{atm} + \rho_{agua} g (h - z) \quad (26)$$

Sustituyendo la ecuación (25) en la ecuación (26) y reordenando,

$$P^* = P_{atm} + \rho_{agua} g \left( -z \frac{S_1}{S_2} - z \right) = P_{atm} - \rho_{agua} g \left( \frac{S_1}{S_2} + 1 \right) z$$

$$z = \frac{-P^* + P_{atm}}{\rho_{agua} g \left( \frac{S_1}{S_2} + 1 \right)} \quad (27)$$

Diferenciando la ecuación (26),

$$\frac{dP^*}{dt} = \rho_{agua} g \left( \frac{dh}{dt} - \frac{dz}{dt} \right) \quad (28)$$

e introduciendo la ecuación (24) en (28),

$$\frac{dP^*}{dt} = \rho_{agua} g \left( -\frac{dz}{dt} \frac{S_1}{S_2} - \frac{dz}{dt} \right) = -\rho_{agua} g \left( \frac{S_1}{S_2} + 1 \right) \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-1}{\rho_{agua} g \left( \frac{S_1}{S_2} + 1 \right)} \frac{dP^*}{dt} \quad (29)$$

donde  $S_1 \equiv S_{cam}$ .

Finalmente, sustituyendo la ecuación (20), (21), (27) y (29) en la ecuación (18),

$$\rho_0 \frac{P^*}{P_0^*} S_{cam} \frac{1}{\rho_{agua} g \left( \frac{S_{cam}}{S_2} + 1 \right)} \frac{dP^*}{dt} + \left[ H + \frac{P^* - P_{atm}}{\rho_{agua} g \left( \frac{S_{cam}}{S_2} + 1 \right)} \right] S_{cam} \frac{\rho_0}{P_0^*} \frac{dP^*}{dt} - \dot{m} = 0 \quad (30)$$

Y, reordenando,

$$\left[ \frac{2P^* - P_{atm}}{\rho_{agua} g \left( \frac{S_{cam}}{S_2} + 1 \right)} + H \right] \frac{dP^*}{dt} = \frac{P_0^*}{\rho_0 S_{cam}} \dot{m} \quad (31)$$



Integrando,

$$\int_{P_0^*}^{P^*} \left[ \frac{2P^* - P_{atm}}{\rho_{agua} g \left( \frac{S_{cam}}{S_2} + 1 \right)} + H \right] dP^* = \frac{P_0^*}{\rho_0 S_{cam}} \dot{m} \int_0^t dt \quad (32)$$

y se obtiene:

$$\frac{(P^{*2} - P_{atm} P^*) - (P_0^{*2} - P_{atm} P_0^*)}{\rho_{agua} g \left( \frac{S_{cam}}{S_2} + 1 \right)} + H (P^* - P_0^*) = \frac{P_0^*}{\rho_0 S_{cam}} \dot{m} t \quad (33)$$

Sustituyendo valores,

$$S_2 = \frac{\pi}{4} (6,5^2 - 6^2) = 4,91 \text{ m}^2 \quad (34)$$

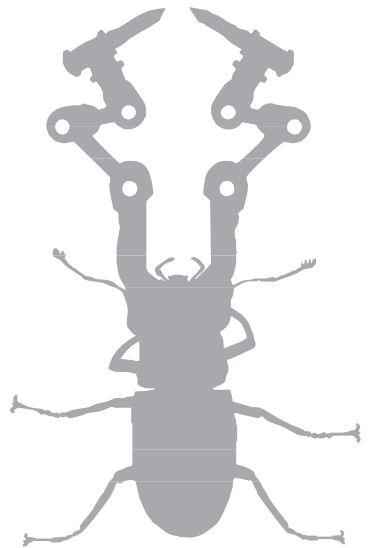
donde no se tiene en cuenta el espesor de la pared de la campana.

$$\frac{(P^2 - 10^5 P^*) - (101962^2 - 10^5 \cdot 101962)}{1000 \cdot 9,81 \left( \frac{28,27}{4,91} + 1 \right)} + 7,5 (P^* - 101962) = \frac{101962}{1,23 \cdot 28,27} 1,67 \cdot 10^{-3} t \quad (35)$$

Para  $t = 30 \text{ min} = 1.800 \text{ seg}$ , por ejemplo, la presión absoluta en el interior de la campana es:

$$t = 1800 \text{ seg} \rightarrow P^* = 102933 \text{ Pa}$$





→ 3



# Evolución del nivel de agua en depósitos comunicados con un bidón y un muelle

En la figura 1, se presenta el esquema de dos depósitos comunicados por agua, el depósito *A* y el depósito *B*, ambos abiertos a la atmósfera.

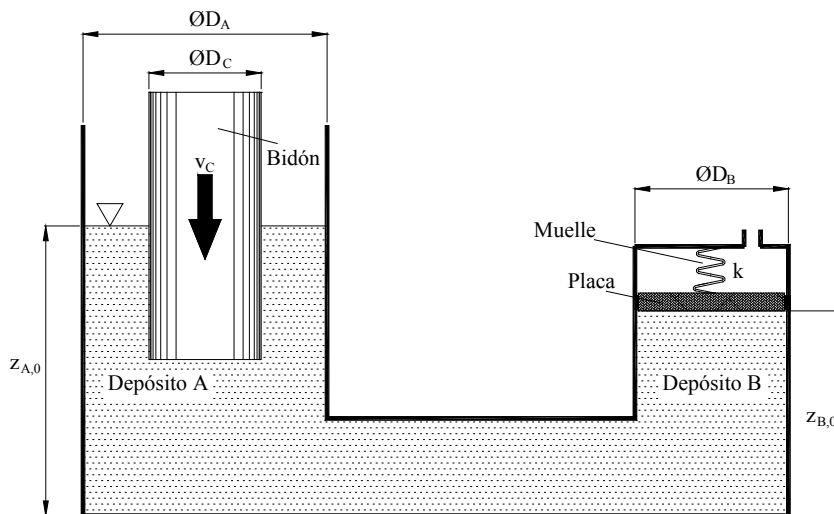


Figura 1.  
Esquema de los depósitos y elementos  
(no a escala)

En el depósito *A*, se ha introducido un bidón que en un instante inicial sitúa la superficie libre a una altura  $z_{A,0}$  con respecto a la base del depósito. A partir de ese instante inicial, el bidón se empieza a sumergir en el depósito a una velocidad constante  $v_C$ .

En el depósito *B*, se ha instalado una placa fijada al mismo mediante un muelle de constante  $k$ . En el mismo instante inicial anterior, la placa se encuentra a  $z_{B,0}$  con respecto a la base del depósito.



Se pide:

1. Determinar la expresión de la altura de la superficie libre del depósito  $A$  en función del tiempo cuando el bidón se sumerge en el depósito a velocidad constante.
2. Calcular, utilizando los datos de la tabla adjunta, la altura de la superficie libre con respecto a la base del depósito en un tiempo de 2 segundos.

Hipótesis:

- Movimiento cuasiestático (no aceleraciones)
- La placa no registra fugas y se desplaza sin rozamiento.

Datos:

$D_A = 1 \text{ m}$	$k = 9.631 \text{ N/m}$	$z_{B,0} = 0,7 \text{ m}$
$D_B = 50 \text{ cm}$	$\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$	$M_{placa} = 10 \text{ kg}$
$D_C = 60 \text{ cm}$	$z_{A,0} = 1 \text{ m}$	$v_C = 0,01 \text{ m/s}$

## Estrategia para resolver el problema

### Comprender el problema

Recuerde leer detenidamente todo el problema, incluidas todas las preguntas.

¿Cuáles son los datos de partida?

Del enunciado, podemos extraer los parámetros que definen el entorno físico (geometría), pero ¿qué podemos decir de la naturaleza del fluido?

¿Podemos presuponer que la densidad del agua es constante en cualquier punto de los depósitos comunicados?

Se sabe que, para un sistema homogéneo, la expresión  $\text{densidad} = \text{masa} / \text{volumen}$  puede aplicarse en cualquier región del sistema y siempre se obtiene el mismo resultado. Sin embargo, un sistema heterogéneo no presenta la misma densidad en partes diferentes. En este caso, hay que definir la “densidad puntual”, que será distinta en cada punto, posición o porción “infinitesimal” del sistema.

¿Qué fuerzas actúan sobre la superficie sumergida del bidón? Y ¿qué fuerzas actúan sobre la placa situada en el depósito B?

Se sabe que la presión en un fluido es debida a la transferencia de energía cinética de las moléculas que lo constituyen en los choques sobre una superficie inmersa en el fluido.

Se sabe que, desde un punto de vista más preciso, podemos definir la presión en cualquier punto de un fluido como el cociente de la fuerza normal  $dF$  ejercida sobre una pequeña superficie  $dA$  que incluya dicho punto, y dicha área.



Se sabe que el principio fundamental de la hidrostática establece que la presión en un punto del interior de un fluido (presión hidrostática) es directamente proporcional a su densidad, a la profundidad que se encuentre dicho punto y a la gravedad del lugar en que se encuentre el fluido.

Sin hacer ningún cálculo, ¿cómo intuye el movimiento del agua cuando el bidón se introduce más en el interior del depósito A?

¿Puede calcular las variables que definen la condición de equilibrio del sistema (condiciones iniciales)?

Con relación al movimiento del bidón, la compresión del muelle y el desplazamiento del agua, ¿cuáles son las incógnitas?

Este problema ¿es similar a otros que ya ha resuelto? ¿Puede imaginar un problema parecido, pero más sencillo, que pueda ayudarle a esbozar un plan para resolverlo?

¿Ve factible, haciendo solo un balance de materia (para el agua), poder hallar la relación entre los datos y las incógnitas?

### **Trazar un plan para resolverlo**

Proponga el volumen de control necesario y defina al detalle todas las superficies de control. ¿Cuáles de ellas son superficies de flujo?

Se sabe que, a efectos del balance de masa, el movimiento del bidón es equivalente a un flujo másico definido por la densidad del líquido y el producto escalar de la velocidad relativa del bidón con respecto a la superficie de control elegida y la superficie del bidón.

¿Necesita alguna ecuación adicional? ¿Cómo puede estimar las condiciones de contorno?

### **Ejecutar el plan**

Recuerde que, antes de hacer cualquier cosa, hay que pensar: ¿Qué se consigue con ello?

Ayúdese de un esquema para identificar el sistema y el volumen de control. Haga lo propio con las superficies de control. Dibuje los vectores que definen la superficie de control (superficies de flujo) y los vectores que definen las correspondientes velocidades del fluido.

¿Puede explicar cuál es el perfil de velocidades para cada una de las superficies de control? ¿Necesita plantear alguna hipótesis adicional?

¿Tiene claro lo que debe hacer? Si la respuesta es afirmativa, puede empezar a aplicar el principio de conservación de la masa. Si la respuesta es negativa, le aconsejamos que vuelva a leer el enunciado.

Se aconseja acompañar los desarrollos y los cálculos con una explicación en que se indique claramente lo que se pretende y lo que se ha hallado.



### Comprobar los resultados

Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado. En este punto, se aconseja representar los resultados obtenidos en función del tiempo. ¿Le parecen lógicamente posibles?

Suponiendo que ha llegado a unos resultados correctos, ¿puede comprobar y justificar adecuadamente las hipótesis propuestas?

### Estudio

#### Breve descripción

El problema propone la determinación de la altura de la superficie libre de un depósito que varía por la acción de entrada de un bidón a velocidad constante y la compresión de un muelle a través de la tapa/placa de otro depósito. El equilibrio de fuerzas debido a la presión fluidoestática sobre la placa, el peso de esta y el muelle determinan su altura y, por ende, la altura de la superficie libre en conjunto con la conservación de la masa.

#### Análisis

<b>Análisis INTEGRAL</b>	
<b>Volumen de control (VC)</b>	
<b>Indeformable</b>	<b>Inercial (fijo)</b>
Deformable	No inercial (móvil)

#### Hipótesis que se plantean

<b>PROPIEDADES del fluido</b>			
<b>Densidad</b>	<b>Constante</b>	<b>Incompresible</b>	<b>Homogéneo</b>
	Variable: Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		Gas ideal	Adiabático Isotérmico
<b>COMPORTAMIENTO del fluido</b>			
<b>En reposo</b>	<b>Equilibrio</b>	Absoluto	
		<b>Relativo</b>	
En movimiento	Régimen	Estacionario	
		Transitorio	
<b>PRESTACIONES del fluido</b>			
- Densidad			
<b>Otras hipótesis de TRABAJO</b>			
<ul style="list-style-type: none"> <li>- El movimiento es cuasiestático (no aceleraciones).</li> <li>- La placa no registra fugas y se desplaza sin rozamiento.</li> <li>- Las propiedades físicas y los perfiles de velocidades son constantes y uniformes en las secciones de control.</li> <li>- Los sólidos son indeformables.</li> <li>- La variación de la temperatura es despreciable.</li> <li>- Se considera despreciable cualquier tipo de pérdida de energía.</li> </ul>			



## Principios básicos y leyes fundamentales

- 2ª ley de Newton
- Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Fluidoestática

## Resolución

**Determinar la expresión de la altura de la superficie libre del depósito A en función del tiempo cuando el bidón se sumerge en el depósito a velocidad constante**

En primer lugar, hay que analizar las condiciones en la placa antes de que el bidón comience su movimiento descendente. La condición de equilibrio en la placa será (v. figura 2):

$$F_{M,0} + W = P_{B,0} S_B \quad (1)$$

La presión en la parte inferior de la placa  $P_{B,0}$  es debido al fluido en condiciones iniciales. Así, la Fluidoestática en las condiciones iniciales, eso es, antes de que el bidón comience su movimiento descendente, teniendo presente las hipótesis propuestas, es

$$P_{B,0} = \underbrace{P_A}_{=P_{atm}=0(\text{rel})} + \rho g (z_{A,0} - z_{B,0}) = \rho g (z_{A,0} - z_{B,0}) \quad (2)$$

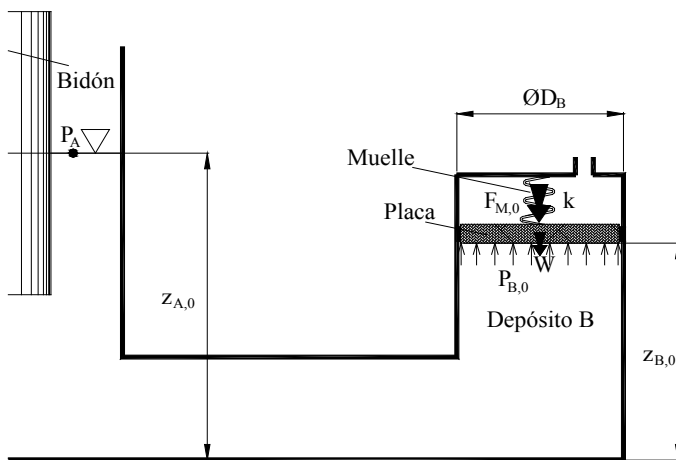


Figura 2.  
Detalle del equilibrio  
en la placa

Sustituyendo ahora en la ecuación (1), la fuerza inicial del muelle  $F_{M,0}$  es:

$$F_{M,0} = -M_{placa} g + \rho g (z_{A,0} - z_{B,0}) \frac{\pi}{4} D_B^2 \quad (3)$$

Y, tomando los datos del enunciado,

$$F_{M,0} = 479,8 \text{ N} \quad (4)$$



La fuerza que ejerza el muelle  $F_M$  en cualquier instante para la hipótesis de movimiento cuasiestático será:

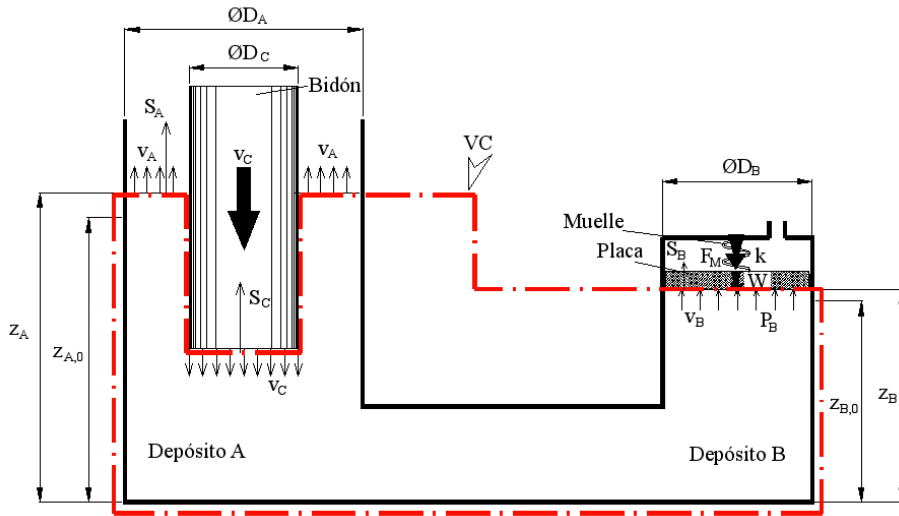
$$F_M = F_{M,0} + k(z_B - z_{B,0}) \quad (5)$$

Para determinar la expresión de la altura de la superficie libre del depósito  $A$  en función del tiempo, se llevará a cabo un análisis integral en un volumen de control VC **inercial** e **indeformable**, como el que se presenta en la figura 3. Aplicando el *principio de conservación de la masa* en el análisis integral, se obtiene:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV}_{=0; \text{Hip.}} + \int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0 \quad (6)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} V}_{=0; \text{Hip.}} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t} \rho}_{=0; \text{indeformable}} + \underbrace{\rho}_{\text{Hip.}} \int_{SC} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0$$

Figura 3. Detalle del volumen de control



de donde las superficies de control son:

$$\int_{SC} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \int_{S_{CA}} (v_A dS_A) + \int_{S_{CB}} (v_B dS_B) + \int_{S_{CC}} (-v_C dS_C) = 0 \quad (7)$$

$$\underbrace{v_A}_{\text{Hip.}} \int_{S_{CA}} (dS_A) + \underbrace{v_B}_{\text{Hip.}} \int_{S_{CB}} (dS_B) + \underbrace{v_C}_{\text{Hip.}} \int_{S_{CC}} (-dS_C) = 0$$

y se obtiene:

$$v_A S_A + v_B S_B - v_C S_C = 0 \quad (8)$$





Las incógnitas que aparecen en la expresión anterior serán las velocidades en las secciones de control A y B. La velocidad de la superficie libre en el depósito A y en el depósito B, en función del tiempo, serán:

$$v_A = \frac{dz_A}{dt} \quad v_B = \frac{dz_B}{dt} \quad (9)$$

de forma que la relación entre las velocidades de las superficies de control es:

$$\frac{dz_A}{dt} \frac{\pi}{4} D_A^2 + \frac{dz_B}{dt} \frac{\pi}{4} D_B^2 - v_C \frac{\pi}{4} D_C^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dz_A}{dt} D_A^2 + \frac{dz_B}{dt} D_B^2 = v_C D_C^2 \quad (10)$$

Es necesario determinar una nueva relación entre las velocidades de las superficies de control. Para ello, la condición de equilibrio en la placa en cualquier instante en la hipótesis de movimiento cuasiestacionario (v. figura 2) será:

$$F_M + W = P_B S_B \quad (11)$$

Aplicando de nuevo la condición de Fluidoestática, la presión en la parte inferior de la placa  $P_B$  en cualquier instante debida al fluido, teniendo presentes las hipótesis propuestas, será:

$$P_B = \underbrace{P_A}_{=P_{atm}=0(\text{rel})} + \rho g (z_A - z_B) = \rho g (z_A - z_B) \quad (12)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5) y (12) en la ecuación (11),

$$F_{M,0} + k (z_B - z_{B,0}) + W = \rho g (z_A - z_B) S_B \quad (13)$$

Y, derivando esta última expresión con respecto al tiempo,

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{dF_{M,0}}{dt}}_{=0, Cte} + k \left( \frac{dz_B}{dt} - \underbrace{\frac{dz_{B,0}}{dt}}_{=0, Cte} \right) + \underbrace{\frac{dW}{dt}}_{=0, Cte} &= \rho g \left( \frac{dz_A}{dt} - \frac{dz_B}{dt} \right) S_B \\ k \frac{dz_B}{dt} &= \rho g \left( \frac{dz_A}{dt} - \frac{dz_B}{dt} \right) S_B \\ \frac{dz_B}{dt} &= \left( \frac{k}{\rho g S_B} + 1 \right)^{-1} \frac{dz_A}{dt} \end{aligned} \quad (14)$$

Ahora, sustituyendo la relación de velocidades de las superficies libres obtenida mediante el equilibrio de fuerzas en la placa, ecuación (14), en la ecuación derivada de conservación de la masa, ecuación (10), se obtiene:

$$\frac{dz_A}{dt} D_A^2 + \left( \frac{4k}{\rho g \pi D_B^2} + 1 \right)^{-1} D_B^2 \frac{dz_A}{dt} = v_C D_C^2$$



$$\frac{dz_A}{dt} \left[ D_A^2 + \frac{D_B^2}{\left( \frac{4k}{\rho g \pi D_B^2} + 1 \right)} \right] = v_C D_C^2$$
$$dz_A = v_C D_C^2 \left[ D_A^2 + \frac{D_B^2}{\left( \frac{4k}{\rho g \pi D_B^2} + 1 \right)} \right]^{-1} dt \equiv K^* dt \quad (15)$$

Integrando,

$$\int_{z_{A,0}}^{z_A} dz_A = \int_{t_0}^t K^* dt \rightarrow z_A = z_{A,0} + K^* (t - t_0) \quad (16)$$

Finalmente,

$$z_A = z_{A,0} + v_C D_C^2 \left[ D_A^2 + \frac{D_B^2}{\left( \frac{4k}{\rho g \pi D_B^2} + 1 \right)} \right]^{-1} (t - t_0) \quad (17)$$

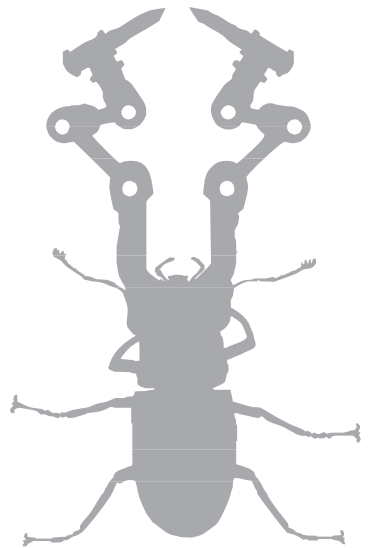
**Calcular, utilizando los datos de la tabla adjunta, la altura de la superficie libre con respecto a la base del depósito en un tiempo de 2 segundos**

Tomando los datos del enunciado, para

$$t_0 = 0 \rightarrow z_{A,0} = 1 \text{ m}$$
$$t = 2 \text{ s} \rightarrow z_A = z_A(t = 2 \text{ s}) \quad (18)$$

En la ecuación (17), se obtiene:

$$z_A(t = 2 \text{ s}) = 1,18 \text{ m} \quad (19)$$



→ 4



## Variación del nivel de solución de un colorante en un depósito

Un depósito contiene inicialmente 1.000 litros de una solución de colorante con una concentración de 10 g/l (v. figura 1). En el depósito, entra un caudal de 1 l/s de una solución del mismo colorante con una concentración de 200 g/l, mientras que, por un orificio situado en el fondo, de 50 mm de diámetro, se escapa un chorro de solución mezcla a una velocidad dada por la ecuación de Torricelli. El depósito es de sección recta cuadrada de 1 m de lado.

- 1) Hallar la ecuación diferencial que define la variación del nivel de solución en el depósito, en función del tiempo.
- 2) Hallar la ecuación diferencial que define la variación temporal de la concentración de colorante en el depósito.

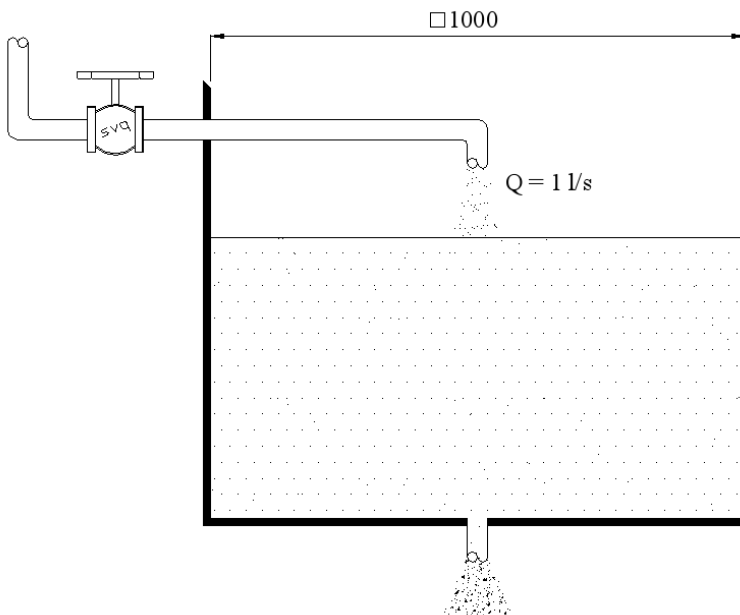


Figura 1.  
Depósito con solución de colorante (no a escala)



## Estrategia para resolver el problema

### Comprender el problema

Recuerde leer detenidamente todo el problema, incluidas todas las preguntas.

¿Cuáles son los datos de partida?

Del enunciado, podemos extraer los parámetros que definen el entorno físico. En este caso, además, disponemos de información sobre la cantidad inicial de líquido dentro del depósito y del flujo másico aportado al depósito.

Se sabe que todos los movimientos de los fluidos han de satisfacer el principio de conservación de la materia.

Se sabe que un fluido homogéneo es aquel que existe a lo largo de toda la región que se está considerando como una sola especie. Por ejemplo, el aire puede experimentar cambios de densidad, velocidad y temperatura, pero permanece identificable como una mezcla estable de gases, que denominamos *aire*. El agua, el aceite o el mercurio pueden ser comprimidos, calentados y acelerados, pero, a menos que se produzca un cambio de fase, estos líquidos pueden considerarse homogéneos. Los fluidos no homogéneos se caracterizan por las variaciones que hay en la cantidad de una sustancia con respecto a otra, de punto a punto del sistema.

Se sabe que, cuando el medio que consideramos está formado por  $N$  especies cuya proporción relativa puede cambiar, existe una ecuación de conservación para cada una de ellas. La velocidad de cada especie se puede expresar como la velocidad media del fluido más la velocidad de difusión de esa especie. Normalmente, la velocidad de difusión no es tomada en consideración en la mayoría de los balances de masa porque es mucho más pequeña que la velocidad media del fluido.

Se sabe que, en general, un problema de balance de un medio fluido formado por  $N$  especies está constituido por una ecuación de balance másico global, considerando que el medio fluido es homogéneo, más una ecuación de balance másico para cada una de las especies o parámetros de calidad que se requieran.

Con relación al proceso de llenado o vaciado del depósito, ¿cuáles son las incógnitas? ¿Ve factible, haciendo solo un balance de materia (para el medio fluido considerado homogéneo), encontrar la relación entre los datos y las incógnitas? ¿Cómo podemos estimar el flujo másico de fluido que sale del depósito?

Se sabe que, para resolver el balance de masa de cada especie, es necesario disponer de los resultados que definen la dinámica del proceso de descarga del depósito y, por tanto, hay que plantear y resolver en primer lugar la ecuación de continuidad considerando que el medio fluido es homogéneo.

Se sabe que el teorema o principio de Torricelli es una aplicación del principio de Bernoulli y estudia el flujo de un líquido contenido en un recipiente, a través de un pequeño orificio, bajo la acción de la gravedad. Ello nos permite evaluar la velocidad teórica del líquido como la que tendría un cuerpo cualquiera que cayera libremente en el vacío desde el nivel del líquido  $h$  hasta el centro de gravedad del orificio de sección  $S$ .



Se sabe que el caudal o volumen del fluido que pasa por el orificio por unidad de tiempo,  $Q$ , puede calcularse como el producto del área real de la vena de fluido (sección contraída) por la velocidad real media del fluido que pasa por esa sección, y, por consiguiente, se puede escribir la siguiente ecuación:

$$Q = S_c v_r = S C_c C_v v_t = S C_d \sqrt{2gh}$$

Donde:

- $v_t$  es la velocidad teórica o la descarga ideal que hubiera ocurrido si no estuvieran presentes la fricción y la contracción de la vena fluida (ecuación de Torricelli).
- $C_c$  es el coeficiente de contracción de la vena fluida a la salida del orificio. Su significado radica en el cambio brusco de sentido que deben realizar las partículas de la pared interior próximas al orificio. Es la relación entre el área contraída y la del orificio. Suele estar en torno a 0,65.
- $C_d$  es el coeficiente por el cual el valor ideal de descarga es multiplicado para obtener el valor real y se denomina *coeficiente de descarga*. Numéricamente, es igual al producto de los otros dos coeficientes.

El coeficiente de descarga,  $C_d = C_c \cdot C_v$ , variará con la carga y el diámetro del orificio. Sus valores para el agua han sido determinados y tabulados por numerosos experimentadores. A modo orientativo, se pueden tomar valores sobre 0,6. Así, se puede apreciar la importancia del uso de estos coeficientes para obtener unos resultados de caudal aceptables.

¿Puede definir la naturaleza (densidad y concentración) de la solución acuosa con colorante almacenada en el interior del depósito e indicar cómo varía en el tiempo?

Sin realizar ningún cálculo, intente razonar cómo se vacía el depósito. ¿Cómo intuye el comportamiento de la concentración de la especie “colorante” desde la situación inicial hasta la final?

¿Cree que es necesario realizar otro balance de materia para la especie “colorante”? En este caso, ¿cuáles serían las hipótesis

### Trazar un plan para resolverlo

Se sabe que, desde el punto de vista euleriano, para establecer un balance de masa de un fluido es necesario definir un volumen de control y aplicar la ecuación de continuidad (principio de conservación de la masa).

Este problema ¿es similar a otros que ya conocemos? Considerando que la respuesta es afirmativa, ¿puede esquematizar los pasos a seguir?



## Ejecutar el plan

Recuerde que, antes de hacer cualquier cosa, hay que pensar: ¿Qué se consigue con ello?

Sírvase de un esquema para identificar el sistema y el volumen de control de ambos fluidos. Haga lo propio con las superficies de control. Dibuje los vectores que definen la superficie de control (superficies de flujo) y los vectores que definen las correspondientes velocidades del fluido.

¿Puede explicar cuál es el perfil de velocidades en cada una de las superficies de control?  
¿Necesita plantear alguna hipótesis?

¿Tiene claro lo que debe hacer? Si la respuesta es afirmativa, puede empezar a aplicar los balances de materia para el medio fluido considerado fluido homogéneo y, posteriormente, para cada especie. Si la respuesta es negativa, le aconsejamos que vuelva a leer el enunciado.

Se aconseja acompañar los desarrollos y los cálculos de una explicación que indique claramente lo que se pretende y lo que se ha hallado.

## Comprobar los resultados

Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado.

En este punto, se aconseja representar los resultados obtenidos en función del tiempo. Recuerde que una forma de sintetizar y visualizar los resultados es mediante gráficos. ¿Le parecen razonables?

Suponiendo que ha llegado a unos resultados correctos, ¿puede corroborar y/o justificar adecuadamente las hipótesis utilizadas?

Para consolidar todo lo realizado en este problema, le invitamos a que haga una lista exhaustiva de los conceptos utilizados y una síntesis del plan que le ha permitido resolver el problema.

## Estudio

### Breve descripción

Se trata de evaluar la evolución temporal de la concentración de colorante en un depósito con una determinada solución inicial por el cual se vierte un caudal volumétrico constante. En primer lugar, al estar abierto el depósito en su parte inferior, se irá vaciando y se debe definir la variación del nivel de solución en función del tiempo. A partir de esta definición, se podrá evaluar la variación de la concentración del colorante en el interior del depósito, teniendo en cuenta la entrada de un caudal volumétrico constante de solución.





## Análisis

<b>Análisis INTEGRAL</b>	
<b>Volumen de control (VC)</b>	
<b>Indeformable</b>	<b>Inercial (fijo)</b>
<b>Deformable</b>	No inercial (móvil)

## Hipótesis que se plantean

<b>PROPIEDADES del fluido</b>			
<b>Densidad</b>	<b>Constante</b>	<b>Incompresible</b>	<b>Homogéneo</b>
	Variable: Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		Gas ideal	Adiabático
			Isotérmico
<b>COMPORTAMIENTO del fluido</b>			
En reposo	Equilibrio	Absoluto	
		Relativo	
En movimiento	<b>Régimen</b>	Estacionario	
		<b>Transitorio</b>	
<b>PRESTACIONES del fluido</b>			
- Nivel de concentración del colorante			
<b>Otras hipótesis de TRABAJO</b>			
- La variación de la temperatura es despreciable. - Las propiedades físicas y los perfiles de velocidades son constantes y uniformes en las secciones de control. - El cambio de concentración no varía la densidad del fluido en el interior del depósito. - Los sólidos son indeformables. - Se considera despreciable cualquier tipo de pérdida de energía.			

## Principios básicos y leyes fundamentales

- Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Principio de conservación de la energía. Ecuación de Bernoulli

## Resolución

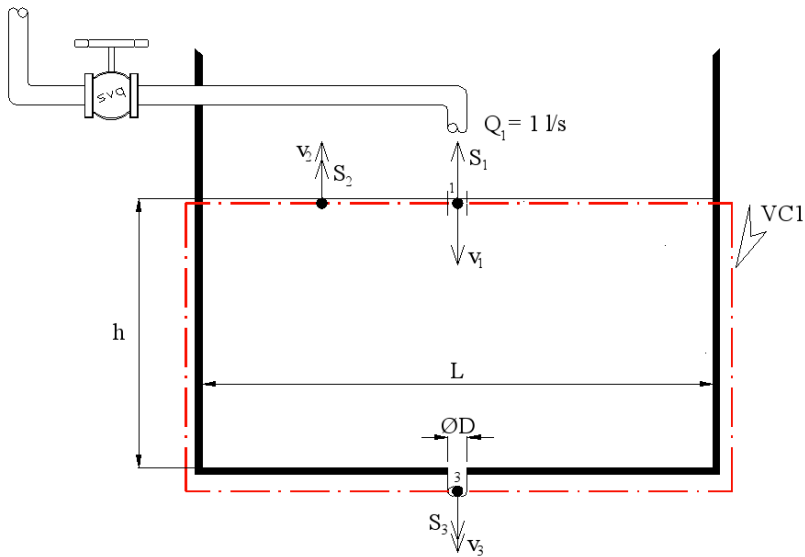
### Hallar la ecuación diferencial definidora de la variación del nivel de solución en el depósito en función del tiempo

En primer lugar, se debe calcular el nivel de la solución en el depósito sin tener en cuenta las concentraciones. Para hallar la relación de alturas de los depósitos en el tiempo, se



debe llevar a cabo un análisis integral en el volumen de control VC1 **inercial e indeformable**, como el que se presenta en la figura 2. Aplicando el *principio de conservación de la masa* en el análisis integral, se obtiene:

Figura 2.  
Detalle del volumen de control



$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV}_{=0; \text{Hip.}} + \int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0 \quad (1)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} V}_{=0; \text{Hip.}} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t} \rho}_{=0; \text{indeformable}} + \underbrace{\rho}_{\text{Hip.}} \int_{SC} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0$$

de modo que las superficies de control serán:

$$\int_{SC} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \int_{SC1} (-v_1 dS_1) + \int_{SC2} (-v_2 dS_2) + \int_{SC3} (v_3 dS_3) = 0 \quad (2)$$

$$\underbrace{v_1}_{\text{Hip.}} \int_{SC1} (-dS_1) + \underbrace{v_2}_{\text{Hip.}} \int_{SC2} (dS_2) + \underbrace{v_3}_{\text{Hip.}} \int_{SC3} (dS_3) = 0$$

y se obtendrá:

$$-v_1 S_1 - v_2 S_2 + v_3 S_3 = 0 \quad \rightarrow \quad Q_1 + v_2 L^2 = v_3 \frac{\pi}{4} D^2 \quad (3)$$



Las incógnitas que aparecen en la expresión anterior serán las velocidades en las secciones de control 2 y 3. La velocidad de la superficie libre del depósito en función del tiempo será:

$$v_2 = \frac{dh}{dt} \quad (4)$$

La velocidad a la salida del orificio se halla aplicando el principio de conservación de la energía, que, mediante las hipótesis convenientes, deriva en la conocida ecuación de Bernoulli:

$$H_2 = H_3 + \underbrace{\Delta H_{2-3}}_{=0, \text{Hip.f}} \quad (5)$$

Aplicándola entre los puntos 2 y 3 representados en la figura 2:

$$\underbrace{\frac{P_2}{\rho g}}_{=0, \text{rel}} + \underbrace{z_2}_{=h} + \underbrace{\frac{v_2^2}{2g}}_{=0, v_2^2 \approx 0} = \underbrace{\frac{P_3}{\rho g}}_{=0, \text{rel}} + \underbrace{z_3}_{=0, \text{ref}} + \frac{v_3^2}{2g} \quad (6)$$

y se obtiene la no menos conocida ecuación de Torricelli:

$$v_3 = \sqrt{2gh} \quad (7)$$

Sustituyendo ahora las ecuaciones (4) y (7) en la ecuación (3):

$$Q_1 + \frac{dh}{dt} L^2 = \sqrt{2gh} \frac{\pi}{4} D^2 \quad (8)$$

De modo que la ecuación diferencial definidora de la variación del nivel de solución en el depósito en función del tiempo es:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{2gh} \frac{\pi}{4} D^2 - Q_1}{L^2} \quad (9)$$

Tomando los datos del enunciado:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1 \frac{1 \text{ m}^3}{\text{s } 10^3 \text{ l}} = 0,001 \text{ m}^3/\text{s} \\ D &= 50 \text{ mm} = 0,05 \text{ m} \\ L &= 1000 \text{ mm} = 1 \text{ m} \end{aligned} \quad (10)$$

Finalmente,

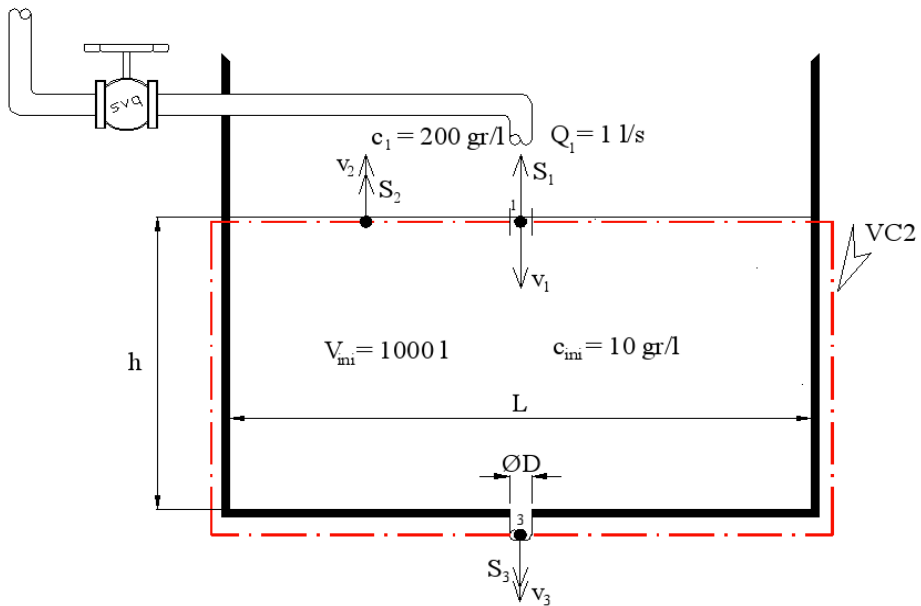
$$\frac{dh}{dt} = 1,96 \cdot 10^{-3} \sqrt{19,62h} - 0,001 \quad (11)$$



**Encontrar la ecuación diferencial definidora de la variación temporal de la concentración de colorante en el depósito**

Ahora, se calculará la variación temporal de la concentración de colorante en el depósito. Para ello, se debe llevar a cabo un análisis integral en el volumen de control VC2 **inercial** y **deformable**, como el que se presenta en la figura 3. Se realiza con un volumen de control deformable para mostrar su funcionalidad, pero se puede llevar a cabo el mismo análisis con el mismo VC indeformable y se obtiene el mismo resultado. Aplicando el *principio de conservación de la masa* en el análisis integral teniendo en cuenta las concentraciones, se obtiene:

Figura 3. Detalle del volumen de control



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho c dV + \int_{SC} \rho c (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0 \quad (12)$$

El término del volumen de control para el volumen de control inercial y deformable es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho c dV = \underbrace{\rho}_{Hip.} \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} c dV = \rho \underbrace{\frac{\partial c}{\partial t} \int_{VC} dV}_{independiente \text{ del VC}} = \rho \frac{\partial}{\partial t} (cV) = \rho \frac{\partial}{\partial t} (cS_2 h) =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho S_2 \frac{\partial}{\partial t} (ch) = \rho S_2 \left[ h \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} c \right] \quad (13)$$

El término de las superficies de control para el volumen de control inercial y deformable es:



$$\begin{aligned}
 \int_{SC} \rho c (\vec{v} \cdot d\vec{S}) &= \underset{=0; \text{Hip.}}{\rho} \int_{SC} c (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \rho \int_{SC1} c_1 (-v_1 dS_1) + \rho \int_{SC3} c_3 (v_3 dS_3) = \\
 &= \underbrace{c_1 v_1}_{\text{Hip.}} \rho \int_{SC1} (-dS_1) + \underbrace{c_3 v_3}_{\text{Hip.}} \rho \int_{SC3} (dS_3) = -\rho c_1 v_1 S_1 + \rho c_3 v_3 S_3
 \end{aligned} \tag{14}$$

Y se obtiene:

$$\rho S_2 \left[ h \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} c \right] - \rho c_1 v_1 S_1 + \rho c_3 v_3 S_3 = 0 \tag{15}$$

Se puede decir que la concentración de colorante  $c$  en el depósito será prácticamente la misma que la concentración de colorante a la salida por el orificio  $c_3$ ; es decir:

$$c_3 \equiv c \tag{16}$$

También se sabe que  $Q_1 = v_1 S_1$ , y de la ecuación (7) se obtiene la ecuación diferencial definidora de la variación temporal de la concentración de colorante  $c$  en el depósito.

$$L^2 \left[ h \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} c \right] - c_1 Q_1 + c \sqrt{2gh} \frac{\pi}{4} D^2 = 0 \tag{17}$$

Integrando la ecuación (9) e introduciéndola en la ecuación (17), se podría integrar la concentración de colorante en el depósito  $c$  para obtener su variación en el tiempo.

→ 5



## Depósito de salmuera con células de carga

En la figura 1, se presenta un depósito con un volumen de fluido  $V$  que inicialmente está lleno con 400 litros de agua. Por encima de la superficie libre del depósito, se sitúa la tubería 1, por la cual sale un caudal de fluido (salmuera)  $q_1$  de concentración  $e_1$ , y una tubería 2, por la cual sale un caudal del mismo fluido  $q_2$ , pero de concentración  $e_2$ .

Del depósito, sale un caudal de fluido  $Q$  de concentración  $E$ . Las pérdidas de carga, incluida la energía cinética a la salida del depósito, se pueden aproximar alrededor del punto de trabajo (para facilitar los cálculos) con una recta del tipo  $\Delta\xi = KQ$ , donde  $K$  es una constante.

El depósito está soportado por dos células de carga que permiten medir el peso del mismo en todo momento. Las células de carga están taradas con el depósito, es decir, cuando el depósito está vacío, las células indican 0.

Se sabe que, cuando el depósito contiene 400 litros, la altura  $H_{ini}$  es igual a 2 metros y las tuberías 1 y 2, empiezan a verter salmuera.

A partir de estas condiciones, se pide:

1. ¿Cómo varía el caudal en la descarga en función del tiempo?
2. ¿De qué manera influye la cantidad de movimiento en las lecturas de las células de carga cuando empiezan a verter las tuberías de salmuera?
3. ¿Cómo varía la concentración en el interior del depósito?
4. Aplicar a los datos siguientes:

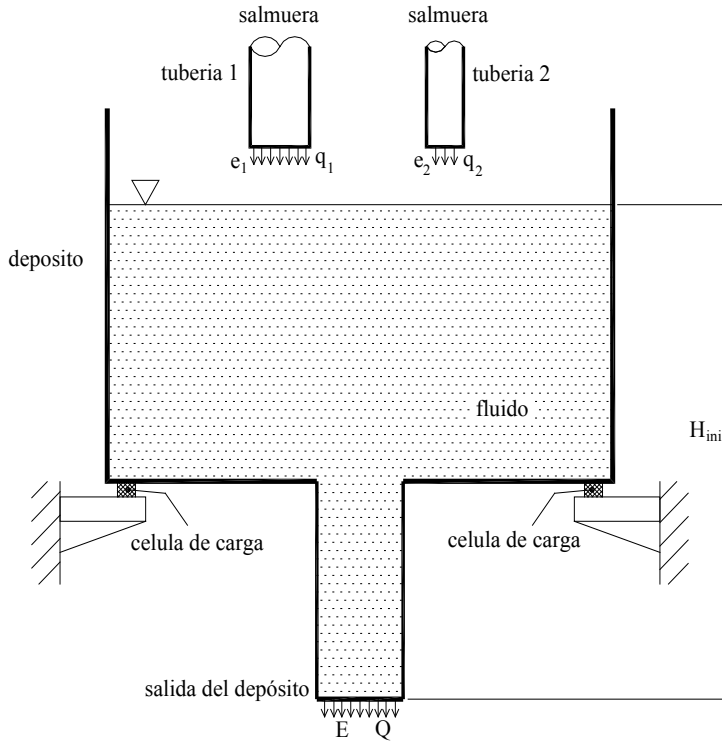
$$\begin{array}{lll} q_1 = 35 \text{ l/min} & e_2 = 5 \text{ g/l} & S_{\text{depósito}} = 0,5 \text{ m}^2 \\ q_2 = 10 \text{ l/min} & K = 2.500 \text{ (J/kg)/(m}^3\text{/s)} & V_{\text{ini}} = 400 \text{ litros} \\ e_1 = 10 \text{ g/l} & H_{\text{ini}} = 2 \text{ m} & \end{array}$$

Hipótesis:

- Supóngase que todos los fluidos tienen una densidad similar a la del agua ( $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$ ).
- Supóngase una mezcla homogénea e instantánea en el depósito.



Figura 1.  
Esquema del depósito (no a escala)



## Estrategia para resolver el problema

### Comprender el problema

Recuerde leer detenidamente todo el problema, incluidas todas las preguntas.

¿Cuáles son los datos de partida?

Del enunciado, podemos extraer los parámetros que definen el entorno físico (geometría del depósito, etc.). En este caso, además, disponemos de información sobre la cantidad inicial de salmuera dentro del depósito y de los flujos másicos aportados al depósito, pero ¿qué podemos decir del flujo másico que sale del depósito?

Se sabe que todos los movimientos de los fluidos han de satisfacer el principio de conservación de la materia.

Se sabe que, en términos generales, un problema de balance de un medio fluido formado por  $N$  especies estará constituido por una ecuación de balance másico global, considerando que el medio fluido es homogéneo, más una ecuación de balance másico para cada una de las especies o parámetros de calidad que se requiera.

Se sabe que, cuando el medio que consideramos está formado por  $N$  especies cuya proporción relativa puede cambiar, existe una ecuación de conservación para cada una de ellas. La velocidad de cada especie se puede expresar como la velocidad media del fluido más la velocidad de difusión de esa especie. Normalmente, la velocidad de difusión no





se toma en consideración en la mayoría de los balances de masa porque es mucho más pequeña que la velocidad media del fluido.

¿Puede definir la naturaleza (densidad y concentración) de la solución de salmuera que está almacenada en el interior del depósito? Sin realizar ningún cálculo, intente razonar cómo se vacía el depósito. ¿Cómo intuye el comportamiento de la concentración desde la situación inicial hasta la final?

Con relación al proceso de llenado/vaciado del depósito, ¿cuáles son las incógnitas? ¿Es consciente de que haciendo solo un balance de materia (para el medio fluido considerado homogéneo) no puede encontrar la relación entre los datos y las incógnitas? Observe que en el problema están implicados dos conceptos: el movimiento del fluido (cinemática) y la variación temporal de la concentración de la salmuera en el interior del depósito.

### **Trazar un plan para resolverlo**

Este problema ¿es similar a otros que ya hemos planteado? ¿Tiene claro el esquema o el plan a seguir para resolverlo? Si tiene dudas, le invitamos a revisar algún problema que haya resuelto en relación con los procesos de carga y descarga de un depósito.

¿Ya lo ha revisado? Intente esquematizar en un diagrama la estrategia a seguir. En este punto, le invitamos a releer el enunciado. ¿Cree que la estrategia planteada le permite resolver todas las cuestiones planteadas?

Observe que, además de evaluar el movimiento de la masa de fluido durante el proceso de llenado y vaciado del depósito, se pide estimar de qué modo el movimiento de salmuera influye en el sistema de pesado (células de carga) cuando empiezan a verter las tuberías.

Se sabe que la opción de plantear un balance integral es interesante para analizar la interacción mutua entre un objeto y el fluido que conforma su entorno.

Se sabe que la ecuación principal que describe la dinámica de los fluidos deriva del principio físico enunciado por Newton (segunda ley de Newton), que establece que la variación de la cantidad de movimiento de un objeto se debe a las fuerzas externas que actúan sobre él.

Se sabe que las fuerzas externas que actúan sobre un volumen de control están agrupadas en dos categorías: las fuerzas másicas, debidas a la acción de los campos de fuerzas (p. ej., el campo gravitatorio), y las fuerzas superficiales, debidas a las tensiones normales y tangenciales que se manifiestan por efecto de la presión y de la acción viscosa.

Recuerde que la ecuación que expresa el principio de conservación de la cantidad de movimiento es una ecuación vectorial; en consecuencia, la podemos descomponer en sus tres componentes (ejes coordenados  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ).



### Ejecutar el plan

Recuerde que, antes de hacer cualquier cosa, hay que pensar: ¿Qué se consigue con ello?

Recuerde también que, para hacer un balance integral (desde el punto de vista euleriano), es imprescindible definir un volumen de control. ¿Qué características tiene el volumen de control elegido? ¿Es fijo y arbitrario? ¿Es móvil?

Ayúdese de un esquema para identificar el sistema y el volumen de control. Haga lo propio con las superficies de control. ¿Cuáles de ellas son superficies de flujo?

Dibuje los vectores que definen la superficie de control (superficies de flujo) y los vectores que definen las velocidades del fluido y sus correspondientes vectores de cantidad de movimiento. ¿Necesita plantear alguna hipótesis para simplificar los cálculos de cada uno de los términos de los balances integrales planteados?

Se aconseja acompañar los desarrollos y los cálculos con una explicación que indique claramente lo que se pretende y lo que se ha hallado.

¿Ha conseguido definir el movimiento de salmuera durante el proceso de carga/descarga del depósito? Si la respuesta es afirmativa, ahora puede plantear el principio de conservación de la cantidad de movimiento utilizando el mismo volumen de control. Si la respuesta es negativa, le invitamos a consultar este tema en un libro de texto de referencia. Aproveche la ocasión para resolver algunos problemas que ya estén resueltos en el libro citado.

### Comprobar los resultados

Lea de nuevo el enunciado y compruebe que lo que se pedía es lo que se ha averiguado. Asegúrese de que ha interpretado correctamente el enunciado y que tiene muy asumidos los movimientos de la salmuera a través de las tuberías y dentro del depósito.

En este punto, se aconseja representar los resultados obtenidos en función del tiempo. ¿Le parecen lógicamente posibles? ¿En qué instante se manifiesta la variación de la cantidad de movimiento?

Suponiendo que ha llegado a unos resultados correctos, ¿puede comprobar y justificar adecuadamente las hipótesis propuestas?

Por último, suponiendo que ha resuelto correctamente este problema, le invitamos a realizar un ejercicio de autocontrol. ¿Puede hacer un esquema de todo el proceso de cálculo y de las hipótesis utilizadas? ¿Cree que algunos de los cálculos realizados se podrían simplificar?



## Estudio

### Breve descripción

En primer lugar, se trata de desarrollar la descarga de un depósito con dos entradas y una salida. Además, el depósito es soportado por unas células de carga que leen las variaciones de fuerza debido a la acumulación o al vaciado del depósito, así como a la cantidad de movimiento asociada a los flujos de las dos entradas y de la salida. Finalmente, la concentración en el interior del depósito es función del tiempo debido a la variación de la misma en el interior y el balance entre salidas y entradas.

### Análisis

Análisis INTEGRAL	
Volumen de control (VC)	
Indeformable	Inercial (fijo)
Deformable	No inercial (móvil)

### Hipótesis que se plantean

PROPIEDADES del fluido			
Densidad	Constante	Incompresible	Homogéneo
	Variable: Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		Gas ideal	Adiabático
			Isotérmico
COMPORTAMIENTO del fluido			
En reposo	Equilibrio	Absoluto	
		Relativo	
En movimiento	Régimen	Estacionario	
		Transitorio	
PRESTACIONES del fluido			
- Caudal de descarga, fuerza y nivel de concentración			
Otras hipótesis de TRABAJO			
- El cambio de concentración no varía la densidad del fluido en el interior del depósito. - Se supone que todos los fluidos tienen una densidad similar a la del agua. - Se supone una mezcla homogénea e instantánea en el depósito. - La variación de la temperatura es despreciable. - Las propiedades físicas y los perfiles de velocidades son constantes y uniformes en las secciones de control. - Los sólidos son indeformables.			



### Principios básicos y leyes fundamentales

- Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Principio de conservación de la cantidad de movimiento
- Principio de conservación de la energía. Ecuación de Bernoulli

### Resolución

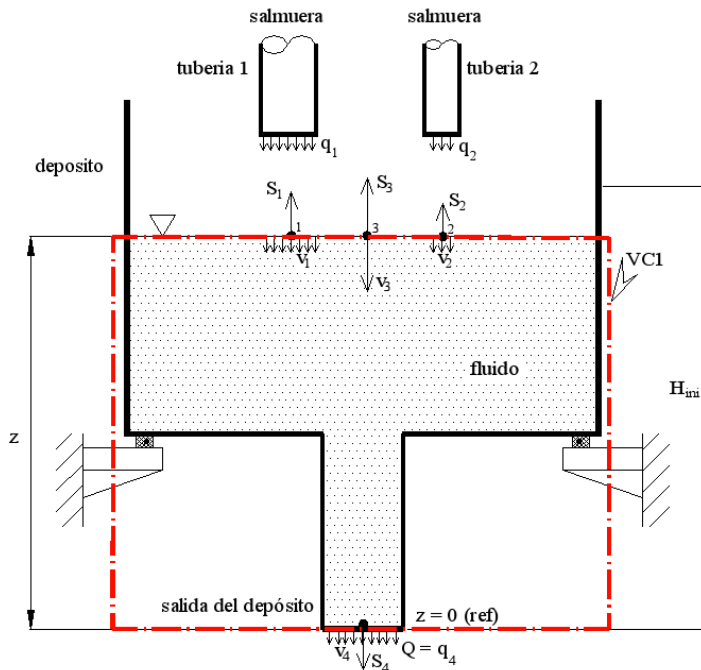
#### ¿Cómo varía el caudal en la descarga en función del tiempo?

En primer lugar, se debe calcular el nivel de la solución en el depósito sin tener en cuenta las concentraciones. Para encontrar la relación de alturas de los depósitos en el tiempo, se debe llevar a cabo un análisis integral en el volumen de control VC1 **inercial e indeformable**, como el que se presenta en la figura 2. Aplicando el *principio de conservación de la masa* en el análisis integral, se obtiene:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV}_{=0; \text{Hip.a y b}} + \int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0 \quad (1)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} V}_{=0; \text{Hip.b}} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t} \rho}_{=0; \text{indeformable}} + \underbrace{\rho}_{\text{Hip.b}} \int_{SC} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0$$

Figura 2. Detalle del volumen de control inercial e indeformable





de modo que las superficies de control son:

$$\int_{SC} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \int_{SC1} (-v_1 dS_1) + \int_{SC2} (-v_2 dS_2) + \int_{SC3} (-v_3 dS_3) + \int_{SC4} (v_4 dS_4) = 0 \quad (2)$$

$$\underbrace{v_1}_{\text{Hip. } SC1} \int (-dS_1) + \underbrace{v_2}_{\text{Hip. } SC2} \int (-dS_2) + \underbrace{v_3}_{\text{Hip. } SC3} \int (-dS_3) + \underbrace{v_4}_{\text{Hip. } SC4} \int (dS_4) = 0$$

y se obtiene:

$$-v_1 S_1 - v_2 S_2 - v_3 S_3 + v_4 S_4 = 0 \quad \rightarrow \quad q_1 + q_2 + v_3 S_3 = q_4 \quad (3)$$

Las incógnitas que aparecen en la expresión anterior serán la velocidad en la sección de control 3  $v_3$  y el caudal de fluido que sale del depósito  $q_4$ . La velocidad de la superficie libre del depósito en función del tiempo es:

$$v_3 = -\frac{dz}{dt} \quad (4)$$

Para calcular el caudal de descarga  $q_4$ , se debe aplicar el principio de conservación de la energía, que, mediante las hipótesis convenientes, deriva en la conocida ecuación de Bernoulli. Entre el punto 3 sobre la superficie libre y el punto 4 en la sección de salida,

$$E_3 = E_4 + \Delta E_{3-4} \quad (5)$$

$$\underbrace{\frac{P_3}{\rho}}_{=0, \text{rel}} + \underbrace{gz_3}_{=gz} + \underbrace{\frac{v_3^2}{2}}_{=0, v_3^2 \approx 0} = \underbrace{\frac{P_4}{\rho}}_{=0, \text{rel}} + \underbrace{gz_4}_{=0, \text{ref}} + \frac{v_4^2}{2} + \Delta E_{3-4} \quad (6)$$

Según el enunciado del problema, las pérdidas de carga, incluida la energía cinética a la salida del depósito, se pueden aproximar alrededor del punto de trabajo (para facilitar los cálculos) con una recta del tipo  $\Delta \xi = KQ$ , donde  $K$  es una constante. De ahí:

$$gz = \underbrace{\frac{v_4^2}{2} + \Delta E_{3-4}}_{=\Delta \xi} = \Delta \xi = Kq_4 \quad \text{donde } K = Cte \quad (7)$$

y resulta:

$$q_4 = \frac{gz}{K} \quad (8)$$

Sustituyendo ahora las expresiones (4) y (8) en la expresión (3),

$$q_1 + q_2 - \frac{dz}{dt} S_3 = \frac{gz}{K} \quad \rightarrow \quad KS_3 \frac{dz}{-gz + K(q_1 + q_2)} = dt \quad (9)$$

Integrando,



$$\int_{H_{ini}}^z KS_3 \frac{dz}{-gz + K(q_1 + q_2)} = \int_{t_{ini}}^t dt \quad (10)$$

y se obtiene:

$$\begin{aligned} -\frac{KS_3 \ln(-gz + K(q_1 + q_2))}{g} \Big|_{H_{ini}}^z &= t \Big|_{t_{ini}}^t \\ -\frac{KS_3}{g} \ln\left(\frac{-gz + K(q_1 + q_2)}{-gH_{ini} + K(q_1 + q_2)}\right) &= t - t_{ini} \end{aligned} \quad (11)$$

Ahora, tomando los datos del enunciado,

$$\begin{aligned} S_3 &\equiv S_{\text{depósito}} = 0,5 \text{ m}^2 \\ q_1 &= 35 \frac{1 \text{ min}}{\text{min } 60 \text{ s}} \frac{\text{m}^3}{1000 \text{ l}} = 5,83 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} \\ q_2 &= 10 \frac{1 \text{ min}}{\text{min } 60 \text{ s}} \frac{\text{m}^3}{1000 \text{ l}} = 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} \\ K &= 2500 \text{ (J/kg)/(m}^3/\text{s)} \\ t_{ini} &= 0 \text{ s} \rightarrow H_{ini} = 2 \text{ m} \end{aligned} \quad (12)$$

se obtiene:

$$t = -127,42 \ln\left[\frac{(-9,81z + 1,875)}{-17,75}\right] \quad (13)$$

Por ejemplo, el tiempo que se empleará en que la altura sea la mitad de la altura inicial:

$$z = \frac{H_{ini}}{2} = 1 \text{ m} \rightarrow t(z = 1 \text{ m}) = 102,59 \text{ s} \quad (14)$$

La altura en función del tiempo será:

$$z = 1,81 \exp\left(-\frac{t}{127,42}\right) + 0,19 \quad (15)$$

Y la variación del caudal en la descarga  $q_4$  en función del tiempo:

$$q_4 = \frac{gz}{K} = 7,1 \cdot 10^{-3} \exp\left(-\frac{t}{127,42}\right) + 7,46 \cdot 10^{-4} \quad (16)$$



## ¿De qué manera influye la cantidad de movimiento en las lecturas de las células de carga cuando empiezan a verter las tuberías de salmuera?

Se trata de aplicar el *principio de conservación cantidad de movimiento* en su análisis integral. Se elige un volumen de control **indeformable** e **inercial**, igual al que se ha utilizado anteriormente, representado en la figura 2.

El *principio de cantidad de movimiento* en análisis integral es:

$$\vec{F}_{ext,VC} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) \quad (17)$$

Se estudiarán al detalle cada uno de los cuatro términos del principio de cantidad de movimiento.

### Fuerzas externas que actúan sobre el VC

$$\vec{F}_{ext,VC}$$

$$\vec{F}_{ext,VC} = \vec{F}_{másicas,VC} + \vec{F}_{normales,SC} + \vec{F}_{tangenciales,SC} \quad (18)$$

- Fuerzas másicas:  $\vec{F}_{másicas,VC} = \rho g V_{ini} (-\hat{k})$  cuando empiezan a verter las tuberías de salmuera
- Fuerzas superficiales
- Fuerzas normales:

$$\vec{F}_{normales,SC} = \underbrace{p_1}_{=P_{atm}=0(rel)} S_1 (-\hat{k}) + \underbrace{p_2}_{=P_{atm}=0(rel)} S_2 (-\hat{k}) + \underbrace{p_3}_{=P_{atm}=0(rel)} S_3 (-\hat{k}) + \underbrace{p_4}_{=P_{atm}=0(rel)} S_4 \hat{k} = 0$$

- Fuerzas tangenciales. Se elige tomar las fuerzas equivalentes, que además serán las incógnitas del problema, es decir, la lectura de las células:

$$\vec{F}_{tangenciales,SC} \leftrightarrow \vec{F}_{equivalente,SC} = F_z \hat{k}$$

$$\vec{F}_{ext,VC} = \vec{F}_{másicas,VC} + \vec{F}_{normales,SC} + \vec{F}_{tangenciales,SC} = \rho g V_{ini} (-\hat{k}) + F_z \hat{k} \quad (19)$$

### Variación temporal de la cantidad de movimiento en el interior del VC

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV$$

El término temporal es:



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \bar{v} dV = \underbrace{\rho}_{\text{Hip.}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \bar{v} dV = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \underbrace{\bar{v} dV}_{\text{no varía en función del tiempo}} = 0 \quad (20)$$

### Variación de la cantidad de movimiento en las SC

$$\int_{SC} \rho \bar{v} (\bar{v} \cdot d\bar{S})$$

Teniendo presente la figura 2,

$$\begin{aligned} \int_{SC} \rho \bar{v} (\bar{v} \cdot d\bar{S}) &= \int_{SC1} \rho \bar{v}_1 (\bar{v}_1 \cdot d\bar{S}_1) + \int_{SC2} \rho \bar{v}_2 (\bar{v}_2 \cdot d\bar{S}_2) + \int_{SC3} \rho \bar{v}_3 (\bar{v}_3 \cdot d\bar{S}_3) + \int_{SC4} \rho \bar{v}_4 (\bar{v}_4 \cdot d\bar{S}_4) = \\ &= \underbrace{\rho}_{\text{Hip.}} \int_{SC1} \bar{v}_1 (\bar{v}_1 \cdot d\bar{S}_1) + \underbrace{\rho}_{\text{Hip.}} \int_{SC2} \bar{v}_2 (\bar{v}_2 \cdot d\bar{S}_2) + \underbrace{\rho}_{\text{Hip.}} \int_{SC3} \bar{v}_3 (\bar{v}_3 \cdot d\bar{S}_3) + \underbrace{\rho}_{\text{Hip.}} \int_{SC4} \bar{v}_4 (\bar{v}_4 \cdot d\bar{S}_4) = \\ &= \rho \int_{SC1} (0, 0, -v_1) ((0, 0, -v_1) \cdot (0, 0, dS_1)) + \rho \int_{SC2} (0, 0, -v_2) ((0, 0, -v_2) \cdot (0, 0, dS_2)) + \\ &+ \rho \int_{SC3} (0, 0, -v_3) ((0, 0, -v_3) \cdot (0, 0, dS_3)) + \rho \int_{SC4} (0, 0, -v_4) ((0, 0, -v_4) \cdot (0, 0, -dS_4)) = \\ &= \rho \int_{SC1} (0, 0, -v_1) (0, 0, -v_1 dS_1) + \rho \int_{SC2} (0, 0, -v_2) (0, 0, -v_2 dS_2) + \\ &+ \rho \int_{SC3} (0, 0, -v_3) (0, 0, -v_3 dS_3) + \rho \int_{SC4} (0, 0, -v_4) (0, 0, v_4 dS_4) = \\ &= \rho \int_{SC1} (0, 0, v_1^2 dS_1) + \rho \int_{SC2} (0, 0, v_2^2 dS_2) + \rho \int_{SC3} (0, 0, v_3^2 dS_3) + \rho \int_{SC4} (0, 0, -v_4^2 dS_4) - \\ &= \rho \underbrace{v_1^2}_{\text{Hip.}} \int_{SC1} (0, 0, dS_1) + \rho \underbrace{v_2^2}_{\text{Hip.}} \int_{SC2} (0, 0, dS_2) + \rho \underbrace{v_3^2}_{\text{Hip.}} \int_{SC3} (0, 0, dS_3) + \rho \underbrace{v_4^2}_{\text{Hip.}} \int_{SC4} (0, 0, -dS_4) = \\ &= \rho v_1^2 S_1 \hat{k} + \rho v_2^2 S_2 \hat{k} + \rho v_3^2 S_3 \hat{k} + \rho v_4^2 S_4 (-\hat{k}) \end{aligned} \quad (21)$$

Reordenando la expresión anterior,

$$\begin{aligned} \int_{SC} \rho \bar{v} (\bar{v} \cdot d\bar{S}) &= \left\{ \rho v_1 q_1 + \rho v_2 q_2 + \rho \left( -\frac{dz}{dt} \right)^2 S_3 - \rho v_4 q_4 \right\} \hat{k} = \\ &= \left\{ \rho \frac{q_1^2}{S_1} + \rho \frac{q_2^2}{S_2} + \rho \left( -\frac{dz}{dt} \right)^2 S_3 - \frac{\rho}{S_4} \left( \frac{gz}{K} \right)^2 \right\} \hat{k} \end{aligned} \quad (22)$$

### Fuerza realizada por las células de carga sobre el depósito

Finalmente, reuniendo las expresiones determinadas y sustituyendo las ecuaciones (19), (20) y (22) en la ecuación (17),





$$\vec{F}_{ext,VC} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) \quad (23)$$

$$\rho g V_{ini} (-\hat{k}) + F_z \hat{k} = \left\{ \rho \frac{q_1^2}{S_1} + \rho \frac{q_2^2}{S_2} + \rho \left( -\frac{dz}{dt} \right)^2 S_3 - \frac{\rho}{S_4} \left( \frac{gz}{K} \right)^2 \right\} \hat{k} \quad (24)$$

$$Z: F_z = \rho \frac{q_1^2}{S_1} + \rho \frac{q_2^2}{S_2} + \rho \left( -\frac{dz}{dt} \right)^2 S_3 - \frac{\rho}{S_4} \left( \frac{gz}{K} \right)^2 + \rho g V_{ini} \quad (25)$$

se obtiene la fuerza externa  $F_z$  que ejercen ambas células de carga y la influencia de la cantidad de movimiento en sus lecturas cuando. Cuando empiezan a verter las tuberías de salmuera,

$$t = t_{ini} = 0 \rightarrow z = H_{ini} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = 0 \quad (26)$$

Finalmente,

$$Z: F_z = \rho \frac{q_1^2}{S_1} + \rho \frac{q_2^2}{S_2} - \frac{\rho}{S_4} \left( \frac{gH_{ini}}{K} \right)^2 + \rho g V_{ini} \quad (27)$$

donde sería necesario conocer los diámetros de la tubería 1 y 2 y el diámetro de la tubería de salida del depósito para poder evaluar la lectura de las células de carga.

### ¿Cómo varía la concentración en el interior del depósito?

Ahora, se calculará la variación temporal de la concentración  $e$  en el interior depósito. Para ello, se debe llevar a cabo un análisis integral en el volumen de control VC2 **inercial** y **indeformable**, como el que se presenta en la figura 3. Aplicando el *principio de conservación de la masa* en análisis integral, teniendo en cuenta las concentraciones, se obtiene:

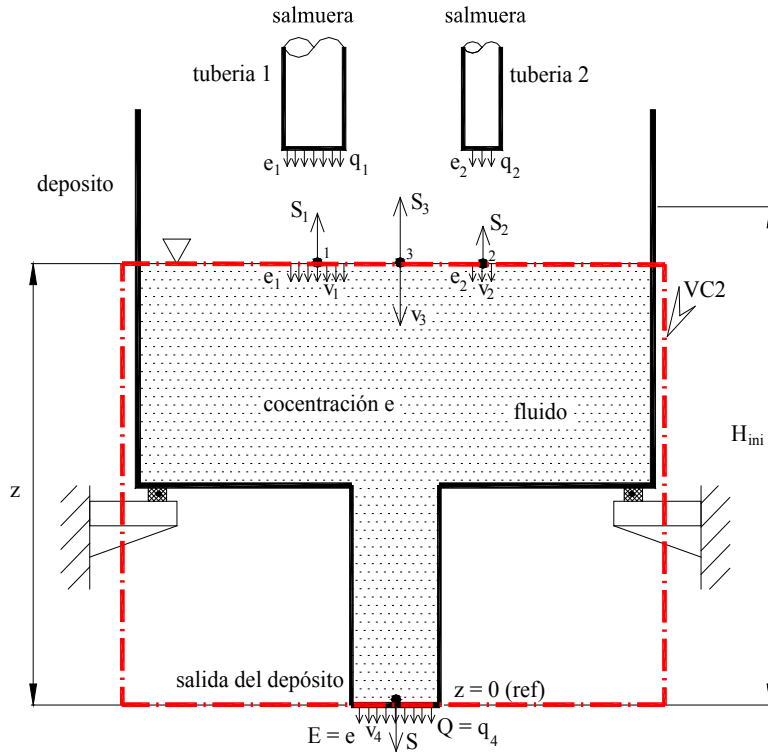
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho e dV + \int_{SC} \rho e (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0 \quad (28)$$

El término del volumen de control para un volumen de control inercial y deformable es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho e dV &= \underbrace{\rho}_{\text{Hip.}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e dV = \rho \underbrace{\frac{\partial e}{\partial t} \int_{VC} dV}_{\text{independiente del VC}} = \rho \frac{\partial}{\partial t} (eV) = \rho \frac{\partial e}{\partial t} V + \rho \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{=0, \text{indeformable}} \\ e &= \rho \frac{de}{dt} V \end{aligned} \quad (29)$$



Figura 3.  
Detalle del  
volumen de  
control  
inercial e inde-  
formable



Y el término de las superficies de control para un volumen de control inercial y indeformable,

$$\begin{aligned}
 \int_{SC} \rho e (\vec{v} \cdot d\vec{S}) &= \underset{=0; \text{Hip. a,b}}{\rho} \int_{SC} e (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \\
 &= \rho \int_{SC1} e_1 (-v_1 dS_1) + \rho \int_{SC2} e_2 (-v_2 dS_2) + \rho \int_{SC3} e_3 (-v_3 dS_3) + \rho \int_{SC4} e_4 (v_4 dS_4) = \quad (30) \\
 &= \underset{\text{Hip.}}{e_1} v_1 \rho \int_{SC1} (-dS_1) + \underset{\text{Hip.}}{e_2} v_2 \rho \int_{SC2} (dS_2) + \underset{\text{Hip.}}{e_3} v_3 \rho \int_{SC3} (-dS_3) + \underset{\text{Hip.}}{e_4} v_4 \rho \int_{SC4} (dS_4) = \\
 &= -\rho e_1 v_1 S_1 - \rho e_2 v_2 S_2 - \rho e_3 v_3 S_3 + \rho e_4 v_4 S_4
 \end{aligned}$$

Finalmente, y por la hipótesis e:  $e_3 = e_4 \equiv e$

$$\int_{SC} \rho e (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = -\rho e_1 q_1 - \rho e_2 q_2 - \rho e v_3 S_3 + \rho e q_4 \quad (31)$$

Y, del estudio anterior, ecuaciones (4) y (8),



$$\int_{SC} \rho e (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = -\rho e_1 q_1 - \rho e_2 q_2 + \rho e \frac{dz}{dt} S_3 + \rho e \frac{gz}{K} \quad (32)$$

Finalmente, reagrupando las expresiones (29) y (32) en la (28),

$$\begin{aligned} \rho \frac{de}{dt} V - \rho e_1 q_1 - \rho e_2 q_2 + \rho e \frac{dz}{dt} S_3 + \rho e \frac{gz}{K} &= 0 \\ V \frac{de}{dt} - e_1 q_1 - e_2 q_2 + e \frac{dz}{dt} S_3 + e \frac{gz}{K} &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

De la ecuación (9),

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-gz + K(q_1 + q_2)}{KS_3} \quad (34)$$

de forma que

$$\begin{aligned} V \frac{de}{dt} - e_1 q_1 - e_2 q_2 + e \left( \frac{-gz + K(q_1 + q_2)}{KS_3} \right) S_3 + e \frac{gz}{K} &= 0 \\ V \frac{de}{dt} - e_1 q_1 - e_2 q_2 + e \left( \frac{-gz + K(q_1 + q_2)}{K} \right) + e \frac{gz}{K} &= 0 \\ \cdot V \frac{de}{dt} - e_1 q_1 - e_2 q_2 - \frac{egz}{K} + \frac{eK(q_1 + q_2)}{K} + e \frac{gz}{K} &= 0 \\ V \frac{de}{dt} &= e_1 q_1 + e_2 q_2 - e(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (35)$$

finalmente,

$$V_{ini} \frac{de}{e_1 q_1 + e_2 q_2 - e(q_1 + q_2)} = dt \quad (36)$$

donde  $V \equiv V_{ini}$  ya que el volumen de control es indeformable. Integrando,

$$\int_{e_{ini}}^e V_{ini} \frac{de}{e_1 q_1 + e_2 q_2 - e(q_1 + q_2)} = \int_{t_{ini}}^t dt \quad (37)$$

$$-V_{ini} \frac{\ln(e_1 q_1 + e_2 q_2 - e(q_1 + q_2))}{(q_1 + q_2)} \Big|_{e_{ini}}^e = t \Big|_{t_{ini}}^t \quad (38)$$

El tiempo transcurrido hasta alcanzar una cierta concentración  $e$  en el interior del depósito es



$$t = t_{ini} + \frac{-V_{ini}}{(q_1 + q_2)} \ln \frac{(e_1 q_1 + e_2 q_2 - e(q_1 + q_2))}{(e_1 q_1 + e_2 q_2 - e_{ini}(q_1 + q_2))} \quad (39)$$

La concentración  $e$  en el interior del depósito en función del tiempo para las condiciones:

$$t_{ini} = 0 \rightarrow e_{ini} = 0 \text{ depósito inicialmente lleno con } V_{ini} = 400 \text{ l de agua}$$

$$e = \frac{(e_1 q_1 + e_2 q_2) - (e_1 q_1 + e_2 q_2) \exp \left\{ \frac{(q_1 + q_2)t}{-V_{ini}} \right\}}{(q_1 + q_2)} \quad (40)$$

Tomando los datos que faltaban del enunciado,

$$\begin{aligned} V_{ini} &\equiv 400 \text{ l} = 0,4 \text{ m}^3 \\ e_1 &= 10 \frac{\text{gr}}{\text{l}} \frac{1000 \text{ l}}{\text{m}^3} \frac{\text{kg}}{1000 \text{ gr}} = 10 \text{ kg/m}^3 \\ e_2 &= 5 \frac{\text{gr}}{\text{l}} \frac{1000 \text{ l}}{\text{m}^3} \frac{\text{kg}}{1000 \text{ gr}} = 5 \text{ kg/m}^3 \\ t_{ini} &= 0 \rightarrow e_{ini} = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Y, tras su sustitución en la ecuación (40), se obtiene:

$$e = 8,887 [1 - \exp(-0,001875t)] \quad (42)$$

Por ejemplo, para el caso estudiado, la concentración  $e$  en el interior del depósito que se obtendrá cuando la altura de la superficie libre sea la mitad de la altura inicial será:

$$z = \frac{H_{ini}}{2} = 1 \text{ m} \rightarrow t(z = 1 \text{ m}) = 102,59 \text{ s} \rightarrow e = 1,56 \text{ gr/l} \quad (43)$$



→ 6



## Flujo en el interior de una electroválvula oleohidráulica

En la figura 1, se ha representado la sección de una electroválvula oleohidráulica, constituida por:

- Una corredera **A** de diámetro  $D$
- Un muelle **M** de constante  $k$
- Un electroimán (no dibujado) que desarrolla una fuerza  $F$  en función de la intensidad eléctrica aportada  $i$

Se sabe que, cuando la electroválvula (v. Gráfico 1) trabaja en seco (sin paso de fluido) a una intensidad de 30 mA, se desarrolla una fuerza en el electroimán de 100 N, lo cual permite comprimir el muelle unos 2 mm y, en consecuencia, reducir la sección de paso del fluido. Se pide:

1. Deducir la posición final de la corredera, considerando la influencia de las fuerzas de flujo, cuando entre las lumbreras de entrada y salida se mide una diferencia  $\Delta P$ .
2. Calcular la variación de la sección de paso con relación al caso de trabajo en seco (sin paso de fluido), cuando entre las lumbreras de entrada y salida se mide una diferencia de presión equivalente a 3 MPa y el coeficiente de derrame de la sección de paso vale 0,6.

Otros datos:

$$D=2\text{cm}$$

$$k = 50 \text{ N/mm}$$

$$\Delta P = 3 \text{ MPa}$$

$$\theta_1 = 45^\circ$$

$$x_i = 2,5 \text{ mm}$$

$$C_d = 0,6$$

$$\theta_2 = 30^\circ$$

$$\rho_{\text{fluido}} = 850 \text{ kg/m}^3$$



Hipótesis:

- Supóngase que el fluido entra en la válvula de tal forma que la lámina de fluido se adapta a la geometría de la corredera y su espesor  $e$  se mantiene en todo momento.
- Supóngase nulo el rozamiento entre la superficie de la corredera y el cuerpo.

Figura 1.  
Esquema-sección de  
la electroválvula (no a  
escala)

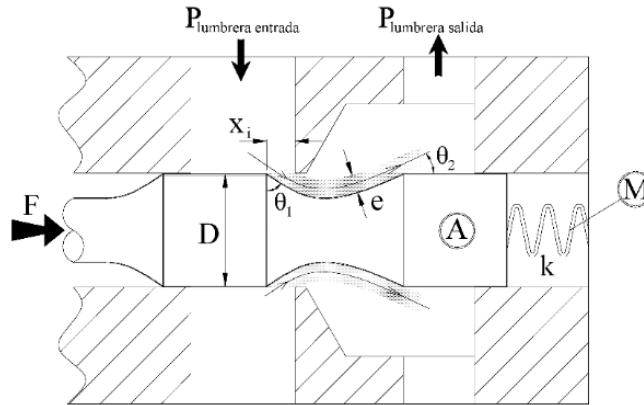
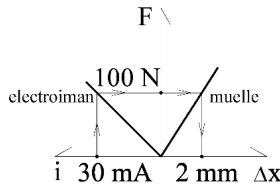


Figura1b  
Comportamiento en  
seco de la electro-  
válvula



## Estrategia para resolver el problema

### Comprender el problema

Antes de empezar este apartado, le aconsejamos que lea detenidamente el enunciado del problema. Hágalo muy despacio, intentando interpretar todo el enunciado, incluidas las preguntas.

Utilice los dibujos y los esquemas que crea necesarios. Sea generoso en utilizar todos los recursos que le brinda la expresión gráfica. Haga los dibujos suficientemente grandes para que pueda etiquetar de forma adecuada los vectores. No sea perezoso/a. El resultado de no trazar los dibujos adecuados o de hacerlos con desgana puede tener consecuencias directas para la rápida interpretación del problema y su posterior resolución.

¿Cuáles son los datos? (¿Qué es lo que conocemos?)

Del enunciado, se puede colegir que podemos extraer los parámetros que definen el entorno físico (geometría de la electroválvula) y una simple descripción de los elementos que permiten mover y posicionar la corredera (electroimán y muelle).





¿Podemos definir la naturaleza (propiedades) del fluido?

Obviamente, se trata de un aceite hidráulico (un fluido en estado líquido). ¿Se puede aceptar por hipótesis que su densidad es constante? ¿Se puede justificar razonadamente esta hipótesis? ¿Qué hipótesis cabe establecer con respecto a su viscosidad?

Antes de hacer cualquier cálculo, le invitamos a responder a las siguientes cuestiones: suponiendo, en principio, que no hay fluido en el interior de la válvula, dibuje el diagrama de sólido libre de la corredera y defina las ecuaciones que definen el equilibrio mecánico de la misma.

Se sabe que el primer paso en la resolución del problema de equilibrio de un sólido rígido es esquematizar el diagrama de sólido libre.

Se sabe que un diagrama de cuerpo libre es una representación gráfica de todas las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido, sustituyendo las ligaduras por reacciones. Todas las fuerzas externas se representan mediante vectores etiquetados de la forma adecuada. Las flechas indican la dirección y la magnitud de las fuerzas y, en la medida de lo posible, deberían situarse en el punto en que se aplican.

Se sabe que el equilibrio mecánico es un estado estacionario en que se cumple alguna de las dos condiciones siguientes:

- Un sistema está en equilibrio mecánico cuando la suma de fuerzas y momentos sobre cada partícula del sistema es 0.
- Un sistema está en equilibrio mecánico si su posición en el espacio de configuración es un punto en el cual el gradiente de energía potencial es 0.

Se sabe que solo se deben incluir las fuerzas que actúan sobre el objeto, ya sean de rozamiento, gravitatorias, normales, de arrastre o de contacto. Cuando se trabaja con un sistema de referencia no inercial, es apropiado incluir fuerzas ficticias, como la centrífuga, la de Coriolis, etc.

Suponiendo que usted es capaz de calcular correctamente la posición de equilibrio de la corredera, ¿puede intuir o visualizar el movimiento del aceite por el interior de la electroválvula cuando fluye de la lumbrera de entrada a la de salida? ¿De qué modo el fluido puede perturbar la posición de la corredera? ¿Cree que siguen cumpliéndose las ecuaciones de equilibrio definidas en los párrafos anteriores? ¿Ve factible añadir una fuerza que contemple los efectos del movimiento de fluido sobre la corredera?

Se sabe que, según la tercera ley de Newton (principio de acción y reacción), la corredera reacciona contra el fluido con una fuerza igual y en sentido contrario.

¿Haciendo un balance integral sobre un volumen de control previamente definido (conservación de la cantidad de movimiento), ve factible hallar la relación entre los datos y las incógnitas?

### **Trazar un plan para resolverlo**

Se sabe que, en general, para evaluar la interacción entre el movimiento de un fluido y un objeto se puede seguir la estrategia siguiente:



1. Establecer la condición de equilibrio de fuerzas sobre el objeto (diagrama de sólido libre), teniendo en cuenta que una de las fuerzas a considerar es la acción del fluido sobre el objeto (condición de equilibrio mecánico).
2. Establecer la ecuación que describe el principio de conservación de la cantidad de movimiento sobre un volumen de control que delimita el fluido que está en contacto con el objeto (punto de vista fluidomecánico). Obsérvese que esta ecuación expresa la fuerza resultante de todas las fuerzas (máscas) sobre la masa de fluido enmarcado por el volumen de control y de las acciones (fuerzas superficiales) que tienen lugar en toda la superficie del volumen de control en un instante dado, así como el efecto dinámico de la intensidad de la variación de la cantidad de movimiento en el interior del volumen para el instante en consideración.

Recuerde: Para hacer un balance integral (punto de vista euleriano), es imprescindible definir un volumen de control. ¿Qué características tiene el volumen de control elegido? ¿Es fijo y arbitrario? ¿Es móvil?

Ayúdese de un esquema para identificar el sistema y el volumen de control. Haga lo propio con las superficies de control. ¿Cuáles de ellas son superficies de flujo?

Dibuje y etiquete correctamente los vectores que definen la superficie de control (superficies de flujo) y los vectores que definen las velocidades del fluido y sus correspondientes vectores de cantidad de movimiento. ¿Necesita plantear alguna hipótesis para simplificar los cálculos de cada uno de los términos de los balances integrales planteados?

¿Este problema es similar a otros que ya hemos planteado? ¿Tiene claro el esquema o el plan a seguir para resolver este problema? Si tiene dudas al respecto, le invitamos a revisar algún problema que haya resuelto en relación con el principio de conservación de la cantidad de movimiento. (Consulte un libro de texto de referencia.)

### **Ejecutar el plan**

Recuerde: Antes de hacer algo, hay que pensar: ¿Qué se consigue con cada paso? Le invitamos a trazar un pequeño esquema de los pasos a seguir. Tenga presente que, al ejecutar el plan, debe comprobar cada uno de los pasos, y que la ecuación del balance integral tiene carácter vectorial.

Cada operación matemática debe ir acompañada de una explicación de lo que se hace y para qué.

Cuando surge alguna dificultad que nos deja bloqueados, debemos volver al principio, reordenar las ideas y probarlo de nuevo.

### **Comprobar los resultados**

Lea de nuevo el enunciado y compruebe que lo que se pedía es lo que se ha averiguado.

Se aconseja acompañar la solución con una explicación que indique claramente lo que se ha obtenido.



En este punto, se aconseja representar los resultados obtenidos sobre el esquema o dibujo. ¿Le parecen razonablemente posibles? ¿Puede comprobar la solución (con alguna situación singular)?

## Estudio

### Breve descripción

La posición de la corredera de la electroválvula oleohidráulica viene definida por el equilibrio de fuerzas entre el electroimán y el muelle, únicamente si el fluido no está en movimiento. En el momento en que se produce un caudal volumétrico entre las superficies de paso, formadas por la corredera y el cuerpo, debido a la diferencia de presión entre la lumbrera de entrada y la lumbrera de salida, se generan fuerzas de flujo originadas por el propio movimiento del fluido. Estas fuerzas de flujo se incorporan al equilibrio de fuerzas sobre la corredera y alteran la posición de la misma.

### Análisis

Análisis <b>INTEGRAL</b>	
Volumen de control (VC)	
Indeformable	Inercial (fijo)
Deformable	No inercial (móvil)

### Hipótesis que se plantean

PROPIEDADES del fluido			
Densidad	Constante	Incompresible	Homogéneo
	Variable: Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		Gas ideal	Adiabático
			Isotérmico
COMPORTAMIENTO del fluido			
En reposo	Equilibrio	Absoluto	
		Relativo	
En movimiento	Régimen	<b>Estacionario</b>	
		Transitorio	
PRESTACIONES del fluido			
- Fuerzas de flujo que inciden en la posición de la corredera			
Otras hipótesis de <b>TRABAJO</b>			
- La variación de la temperatura es despreciable. - Las propiedades físicas y los perfiles de velocidades son constantes y uniformes en las secciones de control. - Supóngase que el fluido entra en la válvula de tal forma que la lámina de fluido se adapta a la geometría de la corredera y su espesor $e$ se mantiene en todo momento. - Supóngase nulo el rozamiento entre la superficie de la corredera y el cuerpo.			



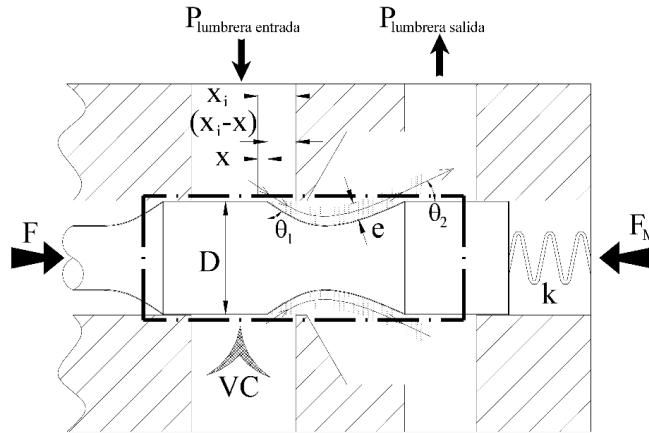
### Principios básicos y leyes fundamentales

- Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Principio de conservación de la cantidad de movimiento
- Ecuación de Bernoulli para un orificio

### Resolución

Una vez establecido el tipo de VC que se utilizará en el desarrollo del problema, se identifican las superficies de control (SC) correspondientes en la esfera que forma el tanque (v. figura 3).

Figura 3.  
Esquema de la electroválvula. Situación del volumen de control (VC) y las superficies de control (SC)



$VC \rightarrow$  El volumen de control (VC) es el que se indica en la figura con la línea trazo-punto-trazo. El volumen de control es inercial (fijo) e indeformable.

$(x_i - x)$  Posición genérica de paso en la condición de equilibrio.

### Deducir la posición final de la corredera, considerando la influencia de las fuerzas de flujo, cuando entre las lumbreras de entrada y salida se mide una diferencia $\Delta P$

Partiendo de la posición de equilibrio en seco, la acción de las fuerzas de flujo sobre la corredera de la válvula vendrá determinada por el principio de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\sum \bar{F}_{ext,VC} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \bar{v} dV + \int_{SC} \rho \bar{v} (\bar{v} \cdot d\bar{S}) \quad (1)$$

Así, los términos de la ecuación (1) para la componente  $x$  quedan (v. figura 1):

$$\sum \bar{F}_{ext,VC,x}$$



Fuerzas:

- Másicas. No existen en la dirección x
- Superficiales
  - *Normales (debidas a la presión)*. Todas sus componentes quedan anuladas entre sí actuando sobre las superficies de control del VC.
  - *Tangenciales*. No ha lugar, de acuerdo con el VC escogido.
  - *Mecánicas*
    - *Electromagnéticas*:  $F = + 100 \text{ N}$
    - *Elásticas*:  $F_M = -kx$

$$\sum F_{ext,VC,x} = F - kx \tag{2}$$

El término temporal es nulo, debido a las hipótesis propuestas.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC,x} \rho v_x dV = 0 \tag{3}$$

$$\int_{SC,x} \rho v_x (\vec{v} \cdot d\vec{S})$$

$$\begin{aligned} \int_{SC,x} \rho v_x (\vec{v} \cdot d\vec{S}) &= \int_{SCx,1} \underbrace{\rho v_{1x}}_{(+)} \left( \underbrace{\vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1}_{(-)} \right) + \int_{SCx,2} \underbrace{\rho v_{2x}}_{(+)} \left( \underbrace{\vec{v}_2 \cdot d\vec{S}_2}_{(+)} \right) \\ \int_{SC,x} \rho v_x (\vec{v} \cdot d\vec{S}) &= -\rho v_{1x} |v_1| |S_1| \cos \theta_1 + \rho v_{2x} |v_2| |S_2| \cos \theta_2^* \\ \int_{SC,x} \rho v_x (\vec{v} \cdot d\vec{S}) &= -\rho v_{1x} |v_1| |S_1| \cos \theta_1 + \rho v_{2x} |v_2| |S_2| \sin \theta_2 \end{aligned} \tag{4}$$

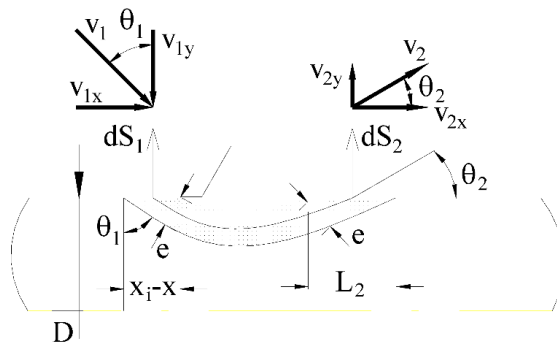


Figura 4. Esquema de las superficies de control y de los componentes de velocidad



Teniendo en cuenta las componentes de la velocidad (v. figura 4),

$$\begin{aligned} v_{1x} &= |v_1| \sin \theta_1 \\ v_{2x} &= |v_2| \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Y, sustituyendo en la ecuación (4),

$$\int_{SC,x} \rho v_x (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = -\rho |v_1|^2 |S_1| \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \rho |v_2|^2 |S_2| \cos \theta_2 \sin \theta_2 \quad (6)$$

Finalmente, introduciendo las ecuaciones (2), (3) y (6) en la ecuación (1), resulta:

$$F - kx = -\rho |v_1|^2 |S_1| \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \rho |v_2|^2 |S_2| \cos \theta_2 \sin \theta_2 \quad (7)$$

En la ecuación (7), se debe evaluar el caudal volumétrico  $Q$  que fluye por la válvula con el objetivo de determinar los módulos de las velocidades  $v_1$  y  $v_2$ . El caudal que fluye por la válvula es función de la geometría de la superficie de paso del fluido, de las propiedades del fluido y de la diferencia de presiones entre la lumbrera de entrada y la de salida.

Así, tomando por simplificación la hipótesis de trabajo del comportamiento de la geometría de la superficie de paso del fluido asimilable al comportamiento de la geometría de un orificio, se puede aplicar la ecuación de Bernoulli para un orificio como

$$Q = C_d S_{paso} \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}} \quad (8)$$

donde (v. figura 4):

$$\begin{aligned} S_{paso} &= \pi D (x_i - x) \\ \Delta P &= P_{lumbrera, entrada} - P_{lumbrera, salida} \end{aligned} \quad (9)$$

Por otro lado, las secciones de paso se pueden estimar suponiendo un espesor de la lámina de fluido constante  $e$  (v. figura 4):

$$e = (x_i - x) \cos \theta_1 \quad (10)$$

De acuerdo con la ecuación de continuidad,

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV}_{=0} + \int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{S}) &= 0 \\ \int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{S}) &= \int_{SC,1} \rho \left( \underbrace{\vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1}_{(-)} \right) + \int_{SC,2} \rho \left( \underbrace{\vec{v}_2 \cdot d\vec{S}_2}_{(+)} \right) \\ \int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{S}) &= -\rho |v_1| |S_1| \cos \theta_1 + \rho |v_2| |S_2| \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (11)$$



Y, habida cuenta de que la densidad no varía, se obtiene la expresión para el caudal volumétrico  $Q$ :

$$Q = |v_1| |S_1| \cos \theta_1 = |v_2| |S_2| \sin \theta_2 \quad (12)$$

en que las superficies de paso de fluido son:

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv S_{paso} = \pi D (x_i - x) \\ S_2 &= \pi D L_2 \end{aligned} \quad (13)$$

De nuevo, observando la figura 4,

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{e}{\sin \theta_2} = \frac{(x_i - x) \cos \theta_1}{\sin \theta_2} \\ S_2 &= \pi D \frac{(x_i - x) \cos \theta_1}{\sin \theta_2} \end{aligned} \quad (14)$$

La componente vertical de la velocidad en la sección 1,  $v_{1y}$ , es:

$$v_{1y} = |v_1| \cos \theta_1 \quad (15)$$

En conjunto, con las ecuaciones (8), (9) y (12),

$$v_{1y} = \frac{Q}{S_1} = \frac{C_d \pi D (x_i - x) \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}}{\pi D (x_i - x)} = C_d \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}} \quad (16)$$

y el módulo de la velocidad en la sección 1 es:

$$|v_1| = \frac{C_d \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}}{\cos \theta_1} \quad (17)$$

Con el mismo procedimiento, la componente vertical de la velocidad en la sección 2,  $v_{2y}$ , es:

$$v_{2y} = |v_2| \sin \theta_2 \quad (18)$$

En conjunto, con las ecuaciones (8), (9) y (12),

$$v_{2y} = \frac{Q}{S_2} = \frac{C_d \pi D (x_i - x) \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}}{\pi D \frac{(x_i - x) \cos \theta_1}{\sin \theta_2}} = C_d \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}} \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_1} \quad (19)$$



y el módulo de la velocidad en la sección 1,

$$|v_2| = \frac{C_d \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}}{\cos \theta_1} \quad (20)$$

De las ecuaciones (17) y (20), se demuestra que los módulos de las velocidades en ambas secciones son iguales.

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (13), (17) y (20) en la ecuación (7), se obtiene:

$$F - kx = -\rho \left[ \frac{C_d \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}}{\cos \theta_1} \right]^2 [\pi D(x_i - x)] \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \rho \left[ \frac{C_d \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}}{\cos \theta_1} \right]^2 \left[ \pi D \frac{(x_i - x) \cos \theta_1}{\sin \theta_2} \right] \cos \theta_2 \sin \theta_2 \quad (21)$$

Simplificando,

$$F - kx = -\frac{C_d^2 2\Delta P}{\cos \theta_1} [\pi D(x_i - x)] \sin \theta_1 + \frac{C_d^2 2\Delta P}{\cos \theta_1} [\pi D(x_i - x)] \cos \theta_2$$

$$F - kx = \frac{C_d^2 2\Delta P}{\cos \theta_1} [\pi D(x_i - x)] (\cos \theta_2 - \sin \theta_1) \quad (22)$$

$$F - kx = C_d^2 2\Delta P \pi D (x_i - x) \left( \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} - \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} \right)$$

Finalmente, reordenando,

$$x = \frac{C_d^2 2\Delta P \pi D x_i - \frac{F}{\left( \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} - \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} \right)}}{C_d^2 2\Delta P \pi D - \frac{k}{\left( \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} - \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} \right)}} \quad (23)$$





**Calcular la variación de la sección de paso con relación al caso de trabajo en seco (sin paso de fluido) cuando entre las lumbreras de entrada y salida se mide una diferencia de presión equivalente a 3 MPa y el coeficiente de derrame de la sección de paso vale 0,6**

Tomando los datos del enunciado y sustituyéndolos en la ecuación (23),

$$x = \frac{0,6^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 0,02 \cdot 0,0025 - \frac{100}{\left(\frac{\cos 30}{\cos 45} - \frac{\sin 45}{\cos 45}\right)}}{0,6^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 0,02 - \frac{50 \cdot 10^3}{\left(\frac{\cos 30}{\cos 45} - \frac{\sin 45}{\cos 45}\right)}} \cong 1,22 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (24)$$

La posición final de la corredera con respecto a la inicial es de 1,22 mm.

→7



## Depósito de salmuera con Impacto de un chorro de agua sobre un álabe móvil

Por una tobera sale un chorro que incide ortogonalmente sobre un álabe móvil (v. figura 1). Se pide evaluar la fuerza ejercida por el chorro del fluido sobre el álabe en los supuestos siguientes:

- 1- El álabe y la tobera están fijos, y el chorro de fluido tiene una velocidad  $v_c$  con respecto a la tobera.
- 2- El álabe se desplaza hacia la tobera a una velocidad  $v_p = \frac{v_c}{2}$ . Resuelva este apartado utilizando un volumen de control inercial.

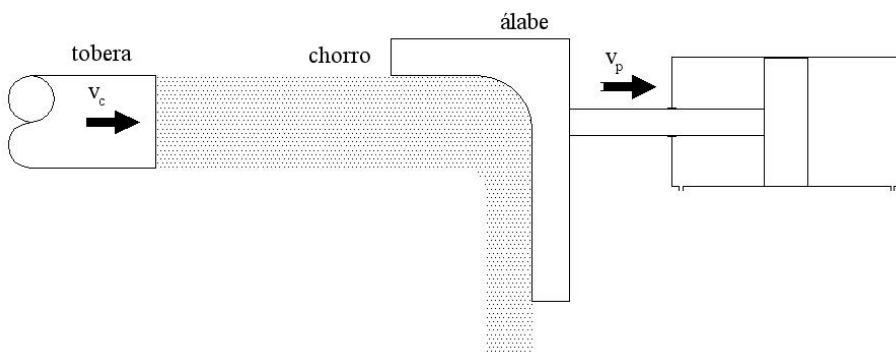


Figura 1.  
Esquema del chorro y el álabe (no a escala)



## Estrategia para resolver el problema

### Comprender el problema

Antes de empezar este apartado, le aconsejamos que lea detenidamente el enunciado. Hágalo muy despacio, intentando interpretar todo el enunciado, incluidas las preguntas. Utilice los dibujos y los esquemas que estime necesarios. Los dibujos repercuten en una rápida interpretación y organización de los razonamientos del problema. Recuerde que su misión principal es enriquecer o facilitar el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

¿Cuáles son los datos? (¿Qué es lo que conocemos?)

Del enunciado, se puede colegir que podemos extraer fácilmente los parámetros que definen el entorno físico (la geometría de la tobera y el álabe).

Se sabe que los cuerpos continuos, sin excepción, se comportan conforme a unas leyes de balance o conservación. La mecánica de medios continuos postula estas leyes, pues no son demostrables a partir de otros principios y constituyen, junto con la cinemática y los modelos constitutivos, los tres pilares de esta disciplina. Estas leyes de conservación –a saber, de la masa, de la cantidad de movimiento, del momento cinético y de la energía– son idénticas para todos los cuerpos: sólidos, fluidos y gases de todo tipo.

Se sabe que la mecánica de fluidos es la rama de la física comprendida dentro de la mecánica de medios continuos que estudia el movimiento de los fluidos, así como las fuerzas que lo provocan.

Se sabe que las superficies y los volúmenes de control son especialmente útiles en mecánica de fluidos, en que la posición de las partículas del fluido en cada instante suele ser irrelevante (según el punto de vista euleriano).

Antes de lanzarse a realizar cálculos, le invitamos a que dedique un cierto tiempo a contemplar distintas situaciones del problema (cuando el álabe está fijo, se mueve hacia la tobera o se mueve alejándose del álabe, etc.) y a definir distintos volúmenes de control: unos fijos (inerciales) y otros móviles (no inerciales).

Con la ayuda de distintos dibujos, intente visualizar el movimiento del fluido que sale de la tobera y que incide sobre el álabe. Intente dibujar los vectores que representan las velocidades del fluido con respecto a las superficies de control correspondientes a los distintos volúmenes de control planteados.

Recuerde que, si utilizamos un volumen de control inercial, nosotros visualizamos el movimiento del fluido desde el exterior del volumen de control y, al contrario, si utilizamos un volumen de control no inercial, nos movemos con el volumen de control.

Se sabe que la primera fase para ser creativos e imaginativos consiste en acumular experiencias y conocimientos, y archivarlos para que vayan madurando. Así se van configurando las ideas y los conceptos, hasta que irrumpen en el consciente.

Es en las ideas donde reside nuestra fuerza ¡y tanto mejor si las sostenemos con obstinación! (Enzo Ferrari).



Admitiendo que se ha conseguido un cierto dominio en la visualización e interpretación del problema, ahora hay que empezar a cuantificar algunas cosas. ¿Se puede definir la naturaleza (propiedades) del fluido? ¿Qué hipótesis necesita formular? ¿Se pueden cuantificar las velocidades del fluido (cinemática) con relación a las superficies de control?

Se sabe que, para cuantificar correctamente el movimiento del fluido a través del volumen de control, se debe plantear un balance integral de la masa. ¿Recuerda cómo lo había aplicado en anteriores problemas?

Se sabe que, según la tercera ley de Newton (principio de acción y reacción), el álabe reacciona contra el fluido que sale de la tobera con una fuerza igual y en sentido contrario.

Recuerde que, para evaluar la interacción entre el movimiento de un fluido y un objeto, se puede seguir la estrategia siguiente:

1. Establecer la condición de equilibrio de fuerzas sobre el objeto (diagrama sólido libre), teniendo en cuenta que una de las fuerzas por considerar es la acción del fluido sobre el objeto (condición de equilibrio mecánico).
2. Establecer la ecuación que describe el principio de conservación de cantidad de movimiento sobre un volumen de control que delimita el fluido que está en contacto con el objeto (punto de vista fluidomecánico).

¿Haciendo un balance integral sobre un volumen de control previamente definido (conservación cantidad de movimiento), ve factible encontrar la relación entre los datos y las incógnitas?

¿Es consciente de que necesita primero los resultados del balance integral de masa antes de aplicar el principio conservación de cantidad de movimiento? ¿Ya lo ha planteado?

### **Trazar un plan para resolverlo**

¿Este problema es parecido a otros que ya hemos planteado? ¿Tiene claro el esquema o el plan a seguir para resolverlo? Si tienes dudas al respecto, le invitamos a revisar algún problema que haya resuelto en relación con el principio de conservación de la cantidad de movimiento. (Consulte un libro de texto de referencia.)

### **Ejecutar el plan**

Recuerde que, antes de hacer cualquier cosa, hay que pensar: ¿Qué se consigue con cada paso? Le invitamos a revisar y a completar (en su caso) el esquema de los pasos a seguir. Si no lo puede explicar de forma simple es que no lo entendió bien.

Recuerde que la ecuación del balance integral de masa tiene un carácter escalar y que el balance integral de cantidad de movimiento tiene un carácter vectorial.



Tenga presente que, al ejecutar el plan, se deben comprobar cada uno de los pasos, y recuerde que es muy aconsejable acompañar cada operación matemática de una explicación de lo que se hace y para qué.

Cuando surge alguna dificultad que nos deja bloqueados, debemos volver al principio, reordenar las ideas y revisar el plan previsto. Y volver a probarlo sin desfallecer.

### Comprobar los resultados

Lea de nuevo el enunciado y compruebe que lo que se pedía es lo que ha averiguado.

Se aconseja acompañar la solución con una explicación que indique claramente lo que se ha hallado.

En este punto, es recomendable representar los resultados obtenidos sobre el esquema o dibujo. ¿Le parecen razonablemente posibles? ¿Puede comprobar la solución?

Se sabe que los resultados del problema son independientes del volumen de control elegido. Le invitamos a comprobarlo. Si ha llegado hasta aquí, usted puede hacerlo. ¡Ánimo!

## Estudio

### Breve descripción

El problema plantea el conocido ejercicio del cálculo de la fuerza que se debe realizar en un álabe en movimiento a velocidad constante para contrarrestar la fuerza debida a la cantidad de movimiento que tiene un chorro que impacta contra él. La novedad radica en solucionarlo mediante un volumen de control inercial, fijo a la tobera, en vez de fijar el volumen de control al álabe (en cuyo caso sería un volumen de control no inercial – móvil)

### Análisis

<b>Análisis INTEGRAL</b>	
<b>Volumen de control (VC)</b>	
<b>Indeformable</b>	<b>Inercial (fijo)</b>
Deformable	No inercial (móvil)



## Hipótesis que se plantean

PROPIEDADES del fluido			
Densidad	Constante	Incompresible	Homogéneo
	Variable: Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		Gas ideal	Adiabático
			Isotérmico
COMPORTAMIENTO del fluido			
En reposo	Equilibrio	Absoluto	
		Relativo	
En movimiento	Régimen	Estacionario	
		Transitorio	
PRESTACIONES del fluido			
- Fuerza debida a la cantidad de movimiento			
Otras hipótesis de TRABAJO			
- La variación de la temperatura es despreciable. - Las propiedades físicas y los perfiles de velocidades son constantes y uniformes en las secciones de control. - Los sólidos son indeformables. - Se consideran despreciable cualquier tipo de pérdida de energía. - Los efectos de la gravedad en el fluido son despreciables. - El área de la sección transversal del chorro se mantiene constante e igual a la de la tobera.			

## Principios básicos y leyes fundamentales

- Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Principio de conservación de la cantidad de movimiento

## Resolución

**El álabe y la tobera están fijos, y el chorro de fluido tiene una velocidad  $v_c$  con respecto a la tobera**

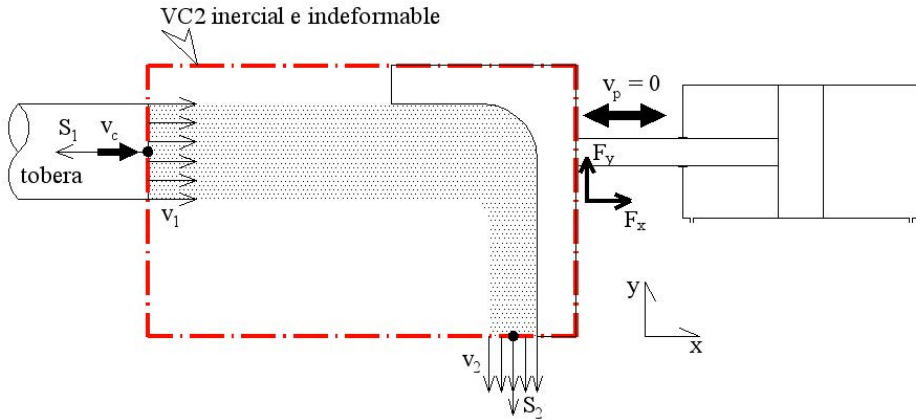
Para evaluar el esfuerzo ejercido por el chorro del fluido sobre el álabe, se realizará un análisis integral mediante volúmenes de control. Para analizar el problema, el volumen de control VC2 más adecuado será **indeformable e inercial**, y situará las superficies de control en los puntos 1 y 2, tal como se representa en la figura 2. El principio básico que se debe aplicar primero es el de *conservación de la masa* en forma integral:



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{A}) = 0 \quad (1)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0, \text{Hip.}} V + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{=0; \text{indeformable}} \rho + \underbrace{\rho}_{\text{Hip.}} \int_{SC} (\vec{v} \cdot d\vec{A}) = 0$$

Figura 2. Detalle del volumen de control inercial e indeformable



de donde las superficies de control son

$$\int_{SC} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \int_{SC1} (-v_1 dS_1) + \int_{SC2} (v_2 dS_2) = \underbrace{v_1}_{\text{Hip.}} \int_{SC1} (-dS_1) + \underbrace{v_2}_{\text{Hip.}} \int_{SC2} (dS_2) = 0 \quad (2)$$

y se obtiene:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad (3)$$

donde se sabe que

$$v_1 = v_c \quad (4)$$

Y, como hipótesis,

$$S_1 = S_2 = S_{tobera} \quad (5)$$

Entonces,

$$v_2 = v_c \frac{S_1}{S_2} = v_c \frac{S_{tobera}}{S_{tobera}} = v_c \quad (6)$$

Para evaluar la fuerza ejercida por el chorro de fluido sobre el álabes, es necesario aplicar el *principio de conservación de la cantidad de movimiento* en su análisis integral. Se elige un volumen de control **indeformable** e **inercial**, igual al utilizado anteriormente, representado en la figura 2.





El principio de cantidad de movimiento en análisis integral es:

$$\vec{F}_{ext,VC} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) \quad (7)$$

Se estudiarán al detalle cada uno de los tres términos del principio de cantidad de movimiento.

**Fuerzas externas que actúan sobre el VC:**  $\vec{F}_{ext,VC}$

$$\vec{F}_{ext,VC} = \vec{F}_{másicas,VC} + \vec{F}_{normales,SC} + \vec{F}_{tangenciales,SC} \quad (8)$$

- *Fuerzas másicas:*  $\vec{F}_{másicas,VC} = 0$  despreciable desde las hipótesis y no actúan en la dirección X.
- *Fuerzas superficiales*
  - *Fuerzas normales:*  $\vec{F}_{normales,SC} = \underbrace{p_1}_{=P_{atm}=0(rel)} S_1 \hat{i} + \underbrace{p_2}_{=P_{atm}=0(rel)} S_2 \hat{j} = 0$ , ya que se bajará en términos de presiones relativas.
  - *Fuerzas tangenciales.* En las superficies de control del volumen de control escogido, no se presentan esfuerzos cortantes. Se elige tomar la *fuerza mecánica*, que además será la incógnita del problema:

$$\vec{F}_{tangenciales,SC} \leftrightarrow \vec{F}_{mecánica,SC} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$$

$$\vec{F}_{ext,VC} = \vec{F}_{másicas,VC} + \vec{F}_{normales,SC} + \vec{F}_{tangenciales,SC} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} \quad (9)$$

**Variación temporal de la cantidad de movimiento en el interior del VC:**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV$$

El término temporal es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV = \underbrace{\rho}_{Hip b} \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v} dV = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \underbrace{\vec{v} dV}_{no \text{ varía en función del tiempo}} = 0 \quad (10)$$

**Variación de la cantidad de movimiento en las SC:**

$$\int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S})$$



Teniendo presente la figura 2,

$$\begin{aligned}
 \int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) &= \int_{SC1} \rho \vec{v}_1 (\vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1) + \int_{SC2} \rho \vec{v}_2 (\vec{v}_2 \cdot d\vec{S}_2) = \underset{\text{Hip.}}{\rho} \int_{SC1} \vec{v}_1 (\vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1) + \underset{\text{Hip.}}{\rho} \int_{SC2} \vec{v}_2 (\vec{v}_2 \cdot d\vec{S}_2) = \\
 &= \rho \int_{SC1} (v_1, 0, 0) ((v_1, 0, 0) \cdot (-dS_1, 0, 0)) + \rho \int_{SC2} (0, -v_2, 0) ((0, -v_2, 0) \cdot (0, -dS_2, 0)) = \\
 &= \rho \int_{SC1} (v_1, 0, 0) (-v_1 dS_1) + \rho \int_{SC2} (0, -v_2, 0) (v_2 dS_2) = \tag{11} \\
 &= \rho \int_{SC1} (-v_1^2 dS_1, 0, 0) + \rho \int_{SC2} (0, -v_2^2 dS_2, 0) = \underset{\text{Hip.}}{\rho} \underset{SC1}{v_1^2} \int (-dS_1, 0, 0) + \underset{\text{Hip.}}{\rho} \underset{SC2}{v_2^2} \int (0, -dS_2, 0) = \\
 &= \rho v_1^2 S_1 (-\hat{i}) + \rho v_2^2 S_2 (-\hat{j})
 \end{aligned}$$

Y, reordenando la expresión anterior,

$$\int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \rho v_1^2 S_1 (-\hat{i}) + \rho v_2^2 S_2 (-\hat{j}) \tag{12}$$

### Fuerza del álabe contra el chorro de fluido $\vec{F}$

Finalmente, reuniendo las expresiones determinadas y sustituyendo las ecuaciones (9), (10) y (12) en la ecuación (7),

$$\vec{F}_{ext,VC} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) \tag{13}$$

$$F_x \hat{i} + F_y \hat{j} = \rho v_1^2 S_1 (-\hat{i}) + \rho v_2^2 S_2 (-\hat{j}) \tag{14}$$

$$X: F_x = -\rho v_1^2 S_1 \tag{15}$$

$$Y: F_y = -\rho v_2^2 S_2$$

### Fuerza realizada por el chorro del fluido contra el álabe en X: $\vec{R}$

La fuerza que realiza el chorro de fluido contra el álabe debida a la cantidad de movimiento es:

$$X: R_x = -F_x = \rho v_1^2 S_1 = \rho v_c^2 S_{tobera} \tag{16}$$

$$Y: R_y = -F_y = \rho v_2^2 S_2 = \rho v_c^2 S_{tobera}$$

**La placa se desplaza hacia la tobera a una velocidad  $v_p = \frac{v_c}{2}$ . Resuelva este apartado utilizando un volumen de control inercial.**

Tomando las mismas hipótesis que en el apartado anterior, el volumen de control VC2 será **indeformable e inercial** y situará las superficies de control en los puntos 1 y 2, tal



como se representa en la figura 3. El volumen de control VC2 se encuentra fijo a la tobera y el álabe se introduce dentro del mismo acercándose a la tobera a la velocidad  $v_p = \frac{v_c}{2}$

El principio básico que se debe aplicar primero es el de *conservación de la masa* en forma integral para este caso:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{A}) = 0 \quad (17)$$

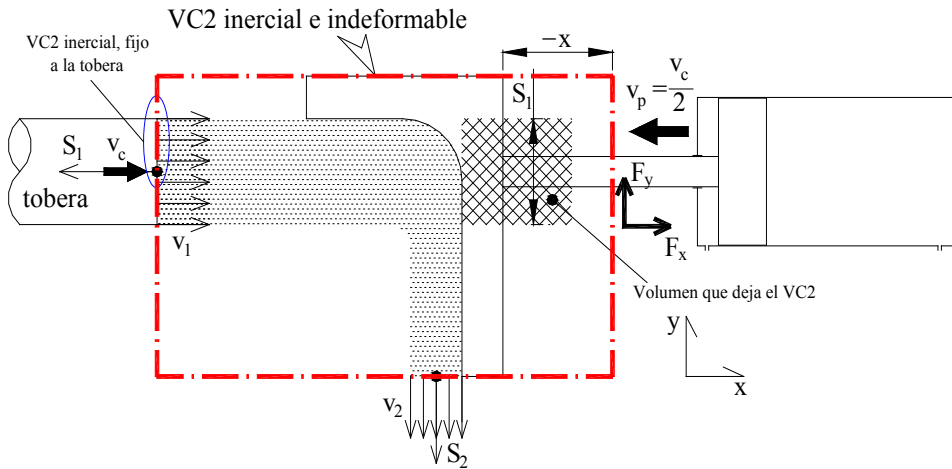


Figura 3. Detalle del volumen de control inercial e indeformable

Se estudiarán al detalle cada uno de los dos términos del principio de conservación de la masa.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV \neq 0, \text{ variación de la masa} = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0, \text{Hip.}} V + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{\neq 0} \rho \quad (18)$$

El volumen de control VC2 es constante, inercial e indeformable. Sin embargo, la masa de fluido en el interior del VC2 varía con el tiempo debido al movimiento del álabe. Su desplazamiento hacia la tobera provoca que desaparezca un volumen de fluido que deja de estar en el interior del VC2 (v. volumen rayado de la figura 3). El volumen que deja el VC2 es:

$$V = -xS_1 \quad (19)$$

Por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = \rho \frac{\partial V}{\partial t} = \rho \frac{\partial}{\partial t} (-xS_1) = -\rho S_1 \frac{\partial x}{\partial t} = -\rho S_1 v_p \quad (20)$$

donde  $v_p$  es la velocidad de desplazamiento constante del álabe. Las superficies de control son:



$$\int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \underset{\text{Hip.}}{\rho} \int_{SC} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \rho \int_{SC1} (-v_1 dS_1) + \rho \int_{SC2} (v_2 dS_2) =$$

$$= \rho \underset{\text{Hip.}}{v_1} \int_{SC1} (-dS_1) + \rho \underset{\text{Hip.}}{v_2} \int_{SC2} (dS_2) = -\rho v_1 S_1 + \rho v_2 S_2$$
(21)

Reuniendo todos los términos,

$$-\rho S_1 v_p - \rho v_1 S_1 + \rho v_2 S_2 = 0$$
(22)

donde es conocido que

$$v_1 = v_c$$
(23)

Y, como hipótesis,

$$S_1 = S_2 = S_{tobera}$$
(24)

Entonces,

$$v_2 = v_c + v_p$$
(25)

Para evaluar la fuerza ejercida por el chorro de fluido sobre el álabe, es necesario aplicar el *principio de conservación de la cantidad de movimiento* en su análisis integral. Se elige un volumen de control **indeformable** e **inercial**, igual al utilizado anteriormente, representado en la figura 3.

El *principio de cantidad de movimiento* en análisis integral es:

$$\vec{F}_{ext,VC} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S})$$
(26)

Se estudiarán al detalle cada uno de los tres términos del principio de cantidad de movimiento.

**Fuerzas externas que actúan sobre el VC:**  $\vec{F}_{ext,VC}$

$$\vec{F}_{ext,VC} = \vec{F}_{másicas,VC} + \vec{F}_{normales,SC} + \vec{F}_{tangenciales,SC}$$
(27)

– *Fuerzas másicas:*  $\vec{F}_{másicas,VC} = 0$  despreciables desde las hipótesis y no actúan en la dirección X.

– Fuerzas superficiales

– *Fuerzas normales:*  $\vec{F}_{normales,SC} = \underset{=P_{atm}=0(rel)}{p_1} S_1 \hat{i} + \underset{=P_{atm}=0(rel)}{p_2} S_2 \hat{j} = 0$ , ya que se tra-

bajará en términos de presiones relativas.



- *Fuerzas tangenciales.* En las superficies de control del volumen de control escogido, no se presentan esfuerzos cortantes. Se elige tomar la *fuerza mecánica*, que además será la incógnita del problema:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{tangenciales,SC}} &\leftrightarrow \vec{F}_{\text{mecánica,SC}} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} \\ \vec{F}_{\text{ext,VC}} &= \vec{F}_{\text{máscas,VC}} + \vec{F}_{\text{normales,SC}} + \vec{F}_{\text{tangenciales,SC}} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}\end{aligned}\quad (28)$$

### Variación temporal de la cantidad de movimiento en el interior del VC:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV$$

Existe variación de la cantidad de movimiento en el interior del VC2 debido a que el álabe se desplaza en su interior hacia la tobera (v. volumen rayado de la figura 3). El término temporal es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV &= \underset{\text{Hip.}}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v} dV \neq 0, \text{ variación de la masa} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{VCx} v_1 dV = \rho \underset{\text{no varía en el tiempo}}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} \int_{VCx} dV = \\ &= \rho v_1 \frac{\partial V}{\partial t} = \rho v_1 \frac{\partial}{\partial t} (-xS_1) = -\rho v_1 S_1 \frac{\partial x}{\partial t} = \rho v_1 S_1 v_p (-\hat{i})\end{aligned}\quad (29)$$

### Variación de la cantidad de movimiento en las SC:

$$\int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S})$$

Teniendo presente la figura 3,

$$\begin{aligned}\int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) &= \int_{SC1} \rho \vec{v}_1 (\vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1) + \int_{SC2} \rho \vec{v}_2 (\vec{v}_2 \cdot d\vec{S}_2) = \underset{\text{Hip.}}{\rho} \int_{SC1} \vec{v}_1 (\vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1) + \underset{\text{Hip.}}{\rho} \int_{SC2} \vec{v}_2 (\vec{v}_2 \cdot d\vec{S}_2) = \\ &= \rho \int_{SC1} (v_1, 0, 0) ((v_1, 0, 0) \cdot (-dS_1, 0, 0)) + \rho \int_{SC2} (-v_p, -v_2, 0) ((-v_p, -v_2, 0) \cdot (0, -dS_2, 0)) = \\ &= \rho \int_{SC1} (v_1, 0, 0) (-v_1 dS_1) + \rho \int_{SC2} (-v_p, -v_2, 0) (v_2 dS_2) = \quad (30) \\ &= \rho \int_{SC1} (-v_1^2 dS_1, 0, 0) + \rho \int_{SC2} (-v_p v_2 dS_2, -v_2^2 dS_2, 0) = \\ &= \rho \underset{\text{Hip.}}{v_1^2} \int_{SC1} (-dS_1, 0, 0) + \rho \underset{\text{Hip.}}{v_p v_2} \int_{SC2} (0, -dS_2, 0) + \rho \underset{\text{Hip.}}{v_2^2} \int_{SC2} (0, -dS_2, 0) = \\ &= \rho v_1^2 S_1 (-\hat{i}) + \rho v_p v_2 S_2 (-\hat{i}) + \rho v_2^2 S_2 (-\hat{j})\end{aligned}$$



Reordenando la expresión anterior,

$$\int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \rho v_1^2 S_1 (-\hat{i}) + \rho v_p v_2 S_2 (-\hat{i}) + \rho v_2^2 S_2 (-\hat{j}) \quad (31)$$

### Fuerza del álabe contra el chorro de fluido en X $\vec{F}$

Finalmente, reuniendo las expresiones determinadas, ecuaciones (28), (29) y (31), en la ecuación (26),

$$\vec{F}_{ext,VC} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) \quad (32)$$

$$F_x \hat{i} + F_y \hat{j} = \rho v_1 S_1 v_p (-\hat{i}) + \rho v_1^2 S_1 (-\hat{i}) + \rho v_p v_2 S_2 (-\hat{i}) + \rho v_2^2 S_2 (-\hat{j}) \quad (33)$$

$$X: F_x = -\rho v_1 S_1 v_p - \rho v_1^2 S_1 - \rho v_p v_2 S_2 \quad (34)$$

$$Y: F_y = -\rho v_2^2 S_2$$

Teniendo presente las expresiones (23), (24) y (25),

$$X: F_x = -\rho v_c S_{tobera} v_p - \rho v_c^2 S_{tobera} - \rho v_p (v_c + v_p) S_{tobera} = -\rho S_{tobera} (v_c + v_p)^2 \quad (35)$$

$$Y: F_y = -\rho S_{tobera} (v_c + v_p)^2$$

### Fuerza realizada por el chorro del fluido contra el álabe en X: $\vec{R}$

La fuerza que ejerce el chorro de fluido contra el álabe debida a la cantidad de movimiento es:

$$X: R_x = \rho S_{tobera} (v_c + v_p)^2 = \rho S_{tobera} \left( v_c + \frac{v_c}{2} \right)^2 = \frac{9}{4} \rho S_{tobera} v_c^2 \quad (36)$$

$$Y: R_y = \rho S_{tobera} (v_c + v_p)^2 = \rho S_{tobera} \left( v_c + \frac{v_c}{2} \right)^2 = \frac{9}{4} \rho S_{tobera} v_c^2$$



→ 8





## Estudio de un helicóptero

En la figura 1, se presenta la fotografía de un helicóptero para dos personas y, en las figuras 2 y 3, se muestran esquemas con sus dimensiones generales.



Figura 1. Fotografía de un helicóptero

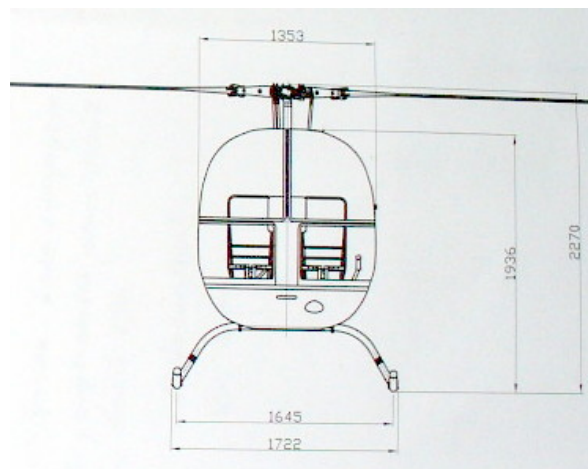
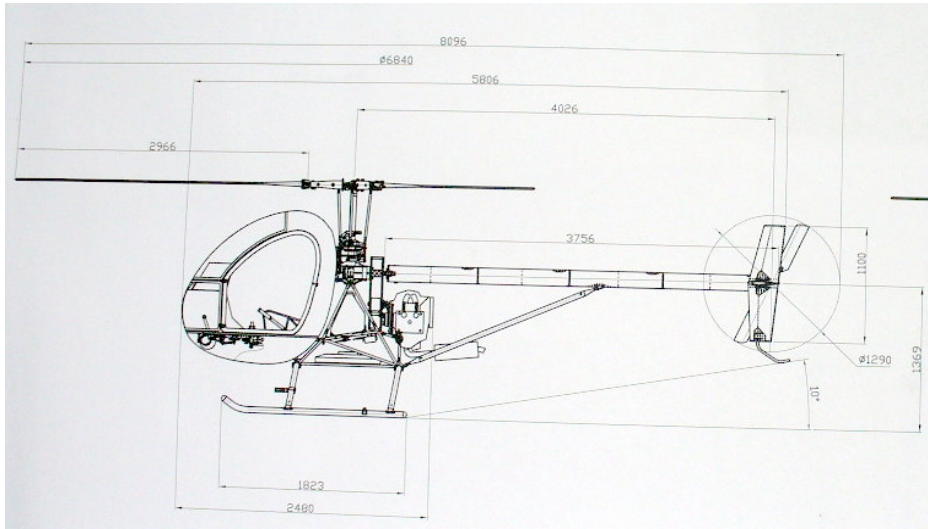


Figura 2. Esquema de un helicóptero

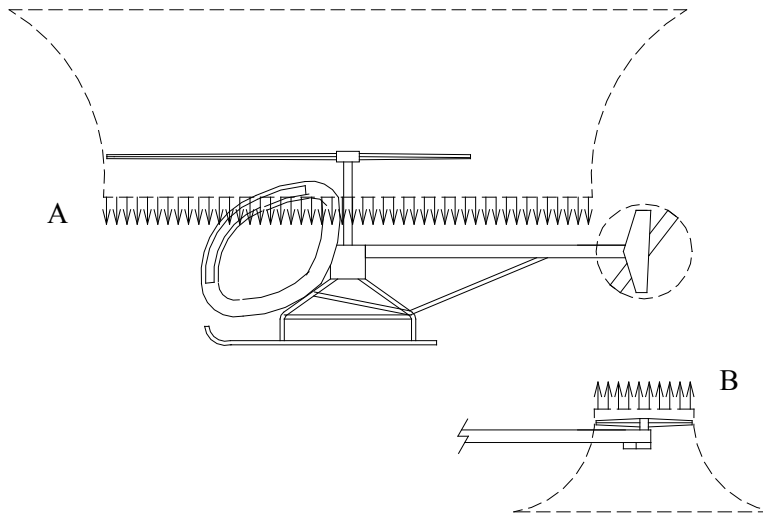


Figura 3. Esquema de un helicóptero



El rotor principal tiene tres aspas, mientras que el rotor de cola tiene solo dos. En la tabla de datos, se indican las dimensiones principales de más interés de los esquemas del helicóptero.

Figura 4. Esquema del flujo en el rotor principal y en el rotor trasero (no a escala)



Se pide:

1. Dada la potencia  $N$  del motor del rotor principal y su rendimiento  $\eta$ , calcular el caudal de aire que mueven las aspas del rotor principal, admitiendo que el flujo producido en la sección  $A$  se caracteriza por que solo tiene un componente vertical. Hipótesis: flujo uniforme (v. figura 4-A).
2. Calcular el peso máximo que puede elevar el helicóptero.
3. Para contrarrestar el efecto del par de giro producido por el rotor principal, se instala un rotor trasero que mueve un caudal  $Q_t$ . En estas condiciones, calcular la velocidad de giro  $\omega$  a la cual gira el rotor principal (v. figura 4-B).

Hipótesis:

No considerar la interacción del flujo con la estructura del helicóptero.

Datos:

$$\rho_{\text{aire}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$$

$$N = 73,5 \text{ kW}$$

Diámetro del rotor principal:

$$D_p = 6.840 \text{ mm}$$

$$\eta = 0,3$$

$$Q_t = 20 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Diámetro del rotor trasero:

$$D_t = 1.280 \text{ mm}$$

Distancia entre eje de giro del rotor principal y el eje de giro del rotor trasero:

$$L = 4.026 \text{ mm}$$

## Estrategia para resolver el problema

### Comprender el problema

Como acción previa, le aconsejamos leer detenidamente el enunciado. Presuponemos que usted tiene unos conocimientos básicos de helicópteros y que puede explicar con pocas palabras los fenómenos que justifican su funcionamiento. Si no es el caso, tranquilo/a: ¡Solo es un problema, no es el fin del mundo!

Se sabe que el rotor de un helicóptero tiene normalmente dos o más palas dispuestas simétricamente alrededor de un buje o eje central que las sujeta durante el giro (rotor principal). El rotor está impulsado por un motor, por lo general situado en el fuselaje, a través de unos engranajes que reducen la velocidad de rotación por debajo de la velocidad del motor.

Se sabe que una característica importante del diseño de los helicópteros es el desarrollo de sistemas para contrarrestar el par de fuerzas o fuerza de reacción que se produce cuando la rotación del rotor en un sentido tiende a girar el fuselaje en el sentido contrario (rotor de cola). La forma más común de sistema antipar es un pequeño rotor, similar a la hélice de un aeroplano, colocado en la cola del helicóptero sobre un eje lateral, en una posición tal que empuja la cola hacia un lado.

Si quiere profundizar en este tema, le invitamos a consultar el libro siguiente: *Helicopter Flying Handbook*, FAA-H8083-21A, US Department of Transportation.

Con la intención de esquivar la complejidad de la fluidodinámica del flujo de aire a través de las palas (álabes) que configuran los rotores, le sugerimos utilizar un modelo muy simplista. Por ejemplo, para el rotor principal, imagine que el rotor actúa como un ventilador que aspira aire de la atmósfera (considerada como un recinto de tamaño infinito y donde el aire se encuentra en reposo) y lo impulsa hacia abajo a una velocidad  $v$  (configurando un chorro de aire), de tal manera que la variación de cantidad de movimiento del chorro de aire generado es equivalente a una fuerza vertical que contrarresta el peso del vehículo.

Admitiendo que usted ya ha conseguido un cierto dominio en la interpretación del problema, ahora hemos de empezar a cuantificar algunas particularidades: ¿Puede definir la naturaleza (las propiedades) del fluido? ¿Qué hipótesis necesita formular?



¿Ve factible que este problema se resuelva planteando un balance integral del principio de conservación de la cantidad de movimiento sobre un volumen de control previamente definido? ¿Puede encontrar la relación entre los datos y las incógnitas? ¿Puede calcular los vectores que representan las velocidades del fluido con respecto a las superficies de control? ¿Está seguro de ello? Quizás necesite leer el enunciado de nuevo. Tómese su tiempo para repensar, una y otra vez, los conceptos que intervienen en ello.

Se sabe que, en general, antes de plantear un balance integral sobre la cantidad de movimiento, es imprescindible cuantificar la cinemática del movimiento del fluido (balance integral de masa) y que, en muchas ocasiones, también hay que formular un balance integral de la conservación de energía.

En los exámenes, se valora muy positivamente y se suelen dar puntos por dibujar (a mano alzada) de manera clara, correcta y precisa. Así pues, no sea rácano/a. Haga todos los dibujos que considere oportunos. No condicione su creatividad e imaginación. No ponga barreras a sus esfuerzos y recursos.

Con la ayuda de algunos dibujos, le invitamos a visualizar y a esbozar el movimiento del fluido a través del rotor (chorro de aire). Y lo mismo sobre los posibles volúmenes de control. Recuerde que, si se utiliza un volumen de control inercial, se visualiza el movimiento del fluido desde el exterior del volumen de control y, al contrario, si utilizamos un volumen de control no inercial, nos movemos con el volumen de control.

Habida cuenta de que el helicóptero es un aparato capaz de sustentarse y mantenerse en una misma posición durante un cierto período de tiempo, ¿puede justificar que una opción excelente es utilizar un volumen de control fijo, arbitrario e inercial?

Insistimos en que usted debe formularse las preguntas siguientes: ¿Qué voy a resolver? ¿Cuáles son las variables desconocidas en este problema? ¿Qué principios puedo aplicar?

Le invitamos a elaborar una lista de todas las variables y agruparlas por categorías (naturaleza del fluido, geometría, prestaciones, etc.). Y lo mismo sobre las hipótesis. Aproveche para indicar qué variables son datos y cuáles son incógnitas. Ello no es realmente necesario, pero le ayudará a crear una imagen panorámica del mismo.

### **Trazar un plan para resolverlo**

Lea el enunciado del problema otra vez. Si considera que es largo, puede optar por fragmentarlo y analizarlo por partes hasta que lo entienda todo.

¿Cuáles son las variables de partida? (¿Qué es lo que conocemos?)

Del enunciado, cabe colegir que podemos extraer fácilmente los parámetros que definen el entorno físico, pero ¿qué se puede decir con relación a las propiedades del fluido (densidad, viscosidad, etc.)?

Obviamente, el aire es un fluido en estado gaseoso cuya densidad en cada punto se puede definir por su presión y su temperatura. Pero ¿puede explicar qué tipo de proceso termodinámico sigue el aire, desde que es aspirado (superficie de control de entrada) hasta que es impulsado (superficie de control de salida)?



Ahora, debería estar en condiciones de concretar una estrategia o plan de resolución. No tenga miedo. La mejor forma de perderle el miedo a algo es enfrentándose. Así que tome un papel y, utilizando como punto de partida el movimiento del aire a través de un volumen de control fijo e inercial, empiece a dibujar un primer esbozo del diagrama de flujo conforme a la secuencia siguiente:

1. Dibuje un primer recuadro que identifique el balance integral de masa (ecuación de continuidad). Analice cada término de tal manera que pueda visualizar las variables que intervienen.
2. Inserte líneas, junto al recuadro, que representen las variables (las supuestamente conocidas o “datos” y las que son incógnitas). Es aconsejable añadir pequeños comentarios y leyendas sobre cómo resolver cada término de la ecuación de continuidad e incluir una referencia a las hipótesis utilizadas.
3. Dibuje un segundo recuadro. Este debe identificar el balance integral relativo a la conservación de energía.
4. Proceda de forma análoga al punto 2. En este caso, la ecuación simplificada debería tener una estructura similar a la ecuación de Bernoulli generalizada.
5. Inspeccione si existe alguna variable compartida entre ambos balances. En caso afirmativo, proceda a unir todas las líneas que representan las mismas variables.
6. Dibuje el tercer recuadro. Este debe identificar el último balance integral posible (conservación de la cantidad de movimiento). Recuerde que los balances integrales de masa y energía son ecuaciones que tienen carácter escalar y que el balance integral de cantidad de movimiento tiene carácter vectorial.
7. Proceda de forma análoga al punto 2.
8. Vuelva a inspeccionar si existe alguna variable compartida entre los tres balances. En caso afirmativo, proceda a unir las líneas que representan las mismas variables.

¿Ve factible ahora que la resolución conjunta de los tres balances integrales sobre el mismo volumen de control le permite encontrar las ecuaciones necesarias para explicitar las variables incógnitas en función de los datos? Si la respuesta es afirmativa, intente completar y ultimar el diagrama de flujo con suficientes leyendas y símbolos para ratificar así los procesos mentales y lograr que este sea un actor principal en la construcción de su propio aprendizaje. En caso negativo, vuelva a repasar la secuencia anterior. Examine si existe algún desacierto y/o si ha cometido involuntariamente algún error.

En cualquier caso, recuerde que siempre tiene la opción de pedir ayuda a sus profesores y aprovechar al máximo todos los recursos que la universidad pone a su disposición.

Es importante que se vea alcanzando sus objetivos e imagine cómo se sentirá. Esto no solo le mantendrá motivado, sino que además le llenará de energía positiva.



## Ejecutar el plan

Visualice. Insistimos en que hay que adquirir el hábito de visualizar, en primera instancia, la forma de solucionar el problema antes de comenzar a realizarlo. Lo normal es que, al principio de la resolución del problema, no se vean todas las implicaciones del mismo y solo se logre una total comprensión después de haber “jugado” con las ideas algún tiempo.

Se sabe que, para enfrentarse a un problema, se enunciado debe trasladarse a una representación mental de relaciones definidas por el propio problema, y que es necesario reflexionar sobre los conocimientos que se van a utilizar y por qué se va a hacer así.

Recuerde: al ejecutar el plan, se deben comprobar cada uno de los pasos y es muy aconsejable acompañar cada operación matemática con una explicación de lo que se hace y para qué.

Atención: Si no lo puede hacer de una forma simple y clara, es que no ha completado adecuadamente el proceso de aprendizaje. Anote en un papel aquellos pasos que le resultan más difíciles de explicar o documentar. Le servirá de recordatorio para solicitar una explicación complementaria a su profesor.

## Comprobar los resultados

Lea de nuevo el enunciado y compruebe que lo que se pedía es lo que ha averiguado. Si la comprobación ha sido positiva, debemos felicitarle por tu trabajo.

Pero todavía no ha terminado todo el proceso de aprendizaje. Ahora le invitamos a analizar el resultado para determinar si la respuesta es razonable y sensata. Siempre es conveniente comprobar el resultado para observar si se encuentra dentro de un orden de magnitud correcto y si las unidades obtenidas son realmente correctas. Se aconseja acompañar la solución de una explicación que indique claramente lo que se ha hallado.

Se sabe que los resultados de este problema son independientes del volumen de control elegido. Le invitamos a evidenciarlo.

Y, por último, ¿se ve en condiciones de repetir el proceso para el rotor de cola? Entonces, ¿a qué espera para ponerse a trabajar? Recuerde que la forma más segura de tener éxito es intentarlo una y otra vez.

## Estudio

### Breve descripción

Se trata de determinar el caudal volumétrico de aire de las aspas del rotor de un helicóptero en determinadas condiciones operativas de potencia-rendimiento del motor. Este caudal está asociado a una fuerza de cantidad de movimiento que permite calcular el peso máximo que podrá elevar.



## Análisis

<b>Análisis INTEGRAL</b>	
<b>Volumen de control (VC)</b>	
<b>Indeformable</b>	<b>Inercial (fijo)</b>
Deformable	No inercial (móvil)

## Hipótesis que se plantean

<b>PROPIEDADES del fluido</b>			
<b>Densidad</b>	<b>Constante</b>	<b>Incompresible</b>	<b>Homogéneo</b>
	Variable: Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		Gas ideal	Adiabático
			Isotérmico
<b>COMPORTAMIENTO del fluido</b>			
En reposo	Equilibrio	Absoluto	
		Relativo	
En movimiento	Régimen	<b>Estacionario</b>	
		Transitorio	
<b>PRESTACIONES del fluido</b>			
- Caudal volumétrico y fuerza por cantidad de movimiento			
<b>Otras hipótesis de TRABAJO</b>			
- La variación de la temperatura es despreciable. - Las propiedades físicas y los perfiles de las velocidades son constantes y uniformes en las secciones de control. - Son despreciables las pérdidas en el fluido por rozamiento que no se hayan especificado en el enunciado. - No se considera la interacción del flujo con la estructura del helicóptero. - El efecto de la gravedad en el fluido es despreciable.			

## Principios básicos y leyes fundamentales

- Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Principio de conservación de la cantidad de movimiento
- Principio de conservación de la energía



### Resolución

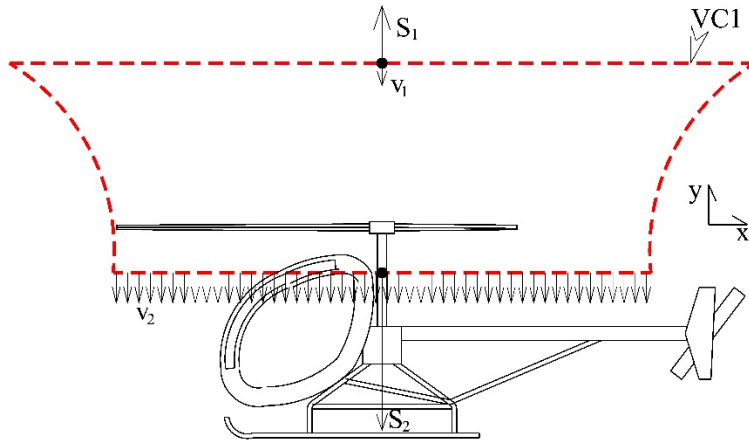
1. Datos: la potencia  $N$  del motor del rotor principal y su rendimiento  $\eta$ , calcule el caudal de aire que mueven las aspas del rotor principal admitiendo que el flujo producido en la sección  $A$  se caracteriza por tener solo componente vertical. Hipótesis: flujo uniforme (v. figura 4-A)

En primer lugar, y estudiadas las condiciones del fluido en que actúan el helicóptero, el aire, y lo que se puede en este apartado, hay que llevar a cabo un análisis integral en el volumen de control VC1 inercial e indeformable, como el que se presenta en la figura 5. Aplicando el principio de conservación de la masa en el análisis integral, se obtiene:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV}_{=0; \text{Hip.}} + \int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{A}) = 0 \quad (1)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} V}_{=0; \text{Hip.}} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t} \rho}_{=0; \text{indeformable}} + \underbrace{\rho}_{\text{Hip.}} \int_{SC} (\vec{v} \cdot d\vec{A}) = 0$$

Figura 5. Detalle del volumen de control inercial e indeformable



de donde las superficies de control son:

$$\int_{SC} (\vec{v} \cdot d\vec{A}) = \int_{SC1} (-v_1 dA_1) + \int_{SC2} (v_2 dA_2) = \underbrace{v_1}_{\text{Hip.}} \int_{SC1} (-dA_1) + \underbrace{v_2}_{\text{Hip.}} \int_{SC2} (dA_2) = 0 \quad (2)$$

y se obtiene:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \rightarrow v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1} \quad (3)$$



Si el volumen de control adoptado en la figura 5 tiene su superficie de control 2 suficientemente alejada del rotor principal y su área es muy grande en comparación con el área de la superficie de control 1,

$$A_1 \gg A_2 \rightarrow v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1} \rightarrow v_1 \ll v_2 \quad (4)$$

El principio básico para resolver este apartado del problema es el de *conservación de la energía* en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho e dV + \int_{SC} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} \right) (\vec{v} \cdot \hat{n} dA) = \dot{Q} - \dot{W}_e - \dot{W}_t \quad (5)$$

Partiendo de las hipótesis propuestas, donde en el volumen de control escogido sí hay trabajo de eje,

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho e dV}_{=0, \text{Hip.}} + \int_{SC} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} \right) (\vec{v} \cdot \hat{n} dA) = \underbrace{\dot{Q}}_{=0, \text{Hip.}} - \underbrace{\dot{W}_e}_{\text{trabajo eje}} - \underbrace{\dot{W}_t}_{=0, \text{Hip.}} \quad (6)$$

y queda:

$$\int_{SC} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} \right) (\vec{v} \cdot \hat{n} dA) = -\dot{W}_e \quad (7)$$

Teniendo presente que el volumen de control es no inercial, la energía por unidad de masa  $e$  está formada por:

$$e = \underbrace{\tilde{u}}_{\text{energía interna}} + \underbrace{\frac{v^2}{2}}_{\text{energía cinética}} + \underbrace{gz}_{\text{energía potencial}} \quad (8)$$

Así, aplicando ecuación (7) en las dos superficies de control,

$$\int_{SC_1} \rho \left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) (\vec{v}_1 \cdot \hat{n} dA_1) + \int_{SC_2} \rho \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) (\vec{v}_2 \cdot \hat{n} dA_2) = -\dot{W}_e \quad (9)$$

donde todos los términos de la energía y la densidad son constantes y uniformes en las superficies de control, según las hipótesis propuestas, de modo que

$$\underbrace{\rho \left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} \right)}_{\text{Hip.}} \int_{SC_1} \left( \underbrace{\vec{v}_1}_{\text{Hip.}}, 0, 0 \right) \cdot (-dA_1, 0, 0) + \underbrace{\rho \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \right)}_{\text{Hip. c}} \int_{SC_2} \left( \underbrace{\vec{v}_2}_{\text{Hip.}}, 0, 0 \right) \cdot (dA_2, 0, 0) = -\dot{W}_e \quad (10)$$

Tomando  $\vec{v}_i \equiv v_i$ ,



$$\rho \left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) \int_{SC_1} -v_1 dA_1 + \rho \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) \int_{SC_2} v_2 dA_2 = -\dot{W}_e \quad (11)$$

$$\rho \left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) \left( \underbrace{v_1}_{\text{Hip.}} \right) \int_{SC_1} -dA_1 + \rho \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) \left( \underbrace{v_2}_{\text{Hip.}} \right) \int_{SC_2} dA_2 = -\dot{W}_e \quad (12)$$

Finalmente,

$$\rho \left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) (-v_1 A_1) + \rho \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) (v_2 A_2) = -\dot{W}_e \quad (13)$$

A partir del resultado obtenido anteriormente como resultado de aplicar el *principio de conservación de la masa*:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \Rightarrow -\underbrace{\rho v_1 A_1}_{\dot{m}_1} = \underbrace{\rho v_2 A_2}_{\dot{m}_2} \Rightarrow \dot{m}_1 = \dot{m}_2 \equiv \dot{m} \quad (14)$$

Aplicando la ecuación (14) en la ecuación (13),

$$\left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) (-\dot{m}_1) + \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) (\dot{m}_2) = -\dot{W}_e \quad (15)$$

$$-\left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) + \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) = \frac{-\dot{W}_e}{\dot{m}} \quad (16)$$

De nuevo, tomando las hipótesis propuestas:

$$\Delta \tilde{u} = \tilde{u}_2 - \tilde{u}_1 \cong 0 \quad (\text{Hip.})$$

$$\Delta gz = gz_2 - gz_1 \cong 0 \quad (\text{Hip.}) \quad (17)$$

se obtiene:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + \frac{\dot{W}_e}{\dot{m}} \quad (18)$$

Teniendo presente la figura 5,

$$\underbrace{\frac{p_1}{\rho}}_{P_1 = P_{atm} = 0(\text{rel})} + \underbrace{\frac{v_1^2}{2}}_{=0, v_1^2 \approx 0} = \underbrace{\frac{p_2}{\rho}}_{P_2 = P_{atm} = 0(\text{rel})} + \frac{v_2^2}{2} + \frac{\dot{W}_e}{\dot{m}} \quad (19)$$

$$\frac{v_2^2}{2} = -\frac{\dot{W}_e}{\dot{m}}$$

El término de la derecha corresponde al trabajo de eje introducido por el rotor principal en el VC. Analizándolo considerando el criterio de signos, en que el trabajo entregado en el interior del VC es negativo,

$$\frac{\dot{W}_e}{\dot{m}} = \frac{-N\eta}{\dot{m}} \quad (20)$$

Teniendo presente el principio de continuidad para el flujo incompresible, se obtiene la velocidad de salida en la sección de control 2:

$$\frac{v_2^2}{2} = -\frac{-N\eta}{\rho v_2 A_2} \rightarrow v_2 = \left[ \frac{2N\eta}{\rho A_2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (21)$$

Finalmente, el caudal de aire  $Q_{rp}$  que mueven las aspas del rotor principal, admitiendo que el flujo producido en la sección de control se caracteriza por tener solo componente vertical e uniforme, es:

$$Q_{rp} = v_2 A_2 = \left[ \frac{2N\eta}{\rho A_2} \right]^{\frac{1}{3}} A_2 = \left[ \frac{2N\eta}{\rho \frac{\pi}{4} D_p^2} \right]^{\frac{1}{3}} \frac{\pi}{4} D_p^2 \quad (22)$$

Tomando los datos del enunciado,

$$\begin{aligned} N &= 73,5 \text{ kW} = 73500 \text{ W} \\ \rho &= 1,2 \text{ kg/m}^3 \\ D_p &= 6840 \text{ mm} = 6,84 \text{ m} \\ \eta &= 0,3 \end{aligned} \quad (23)$$

Y se obtiene:

$$v_2 = 10 \text{ m/s} \rightarrow Q_{rp} = 367,5 \text{ m}^3/\text{s} \quad (24)$$

### Calcule el peso máximo que puede elevar el helicóptero

Para calcular el peso máximo  $W$  que puede elevar el helicóptero, es necesario aplicar el *principio de conservación de la cantidad de movimiento* en su análisis integral. Se elige un volumen de control **indeformable e inercial**, igual al utilizado anteriormente, representado en la figura 5.

El *principio de cantidad de movimiento* en análisis integral es:

$$\vec{F}_{ext,VC} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) \quad (25)$$

Se estudian al detalle cada uno de los cuatro términos del principio de cantidad de movimiento.



### Fuerzas externas que actúan sobre el VC $\vec{F}_{ext,VC}$

$$\vec{F}_{ext,VC} = \vec{F}_{másicas,VC} + \vec{F}_{normales,SC} + \vec{F}_{tangenciales,SC} \quad (26)$$

– *Fuerzas másicas:*  $\vec{F}_{másicas,VC} = 0$  despreciable el peso del fluido por las hipótesis realizadas

– Fuerzas superficiales

– *Fuerzas normales:*  $\vec{F}_{normales,SC} = \underbrace{p_1}_{=P_{atm}=0(rel)} A_1 \hat{j} + \underbrace{p_2}_{=P_{atm}=0(rel)} A_2 (-\hat{j}) = 0$  ya que se trabaja en términos de presiones relativas.

– *Fuerzas tangenciales.* En las superficies de control del volumen de control escogido, no se presentan esfuerzos cortantes. Se elige tomar la *fuerza mecánica*, que además será la incógnita del problema:  $\vec{F}_{tangenciales,SC} \leftrightarrow \vec{F}_{mecánica,SC} = F_y \hat{j}$

$$\vec{F}_{ext,VC} = \vec{F}_{másicas,VC} + \vec{F}_{normales,SC} + \vec{F}_{tangenciales,SC} = F_y \hat{j} \quad (27)$$

### Variación temporal de la cantidad de movimiento en el interior del VC

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV$$

El término temporal

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV = \underbrace{\rho}_{Hip.} \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v} dV = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \underbrace{\vec{v} dV}_{no \text{ varía en función del tiempo}} = 0 \quad (28)$$

Variación de la cantidad de movimiento en las SC  $\int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S})$

Teniendo presente la figura 5,

$$\begin{aligned} \int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) &= \int_{SC1} \rho \vec{v}_1 (\vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1) + \int_{SC2} \rho \vec{v}_2 (\vec{v}_2 \cdot d\vec{S}_2) = \underbrace{\rho}_{Hip.} \int_{SC1} \vec{v}_1 (\vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1) + \underbrace{\rho}_{Hip.} \int_{SC2} \vec{v}_2 (\vec{v}_2 \cdot d\vec{S}_2) = \\ &= \rho \int_{SC1} (0, -v_1, 0) ((0, -v_1, 0) \cdot (0, dS_1, 0)) + \rho \int_{SC2} (0, -v_2, 0) ((0, -v_2, 0) \cdot (0, -dS_2, 0)) = \\ &= \rho \int_{SC1} (0, -v_1, 0) (0, -v_1 dS_1, 0) + \rho \int_{SC2} (0, -v_2, 0) (0, v_2 dS_2, 0) = \quad (29) \\ &= \rho \int_{SC1} (0, v_1^2 dS_1, 0) + \rho \int_{SC2} (0, -v_2^2 dS_2, 0) = \rho \underbrace{v_1^2}_{Hip.} \int_{SC1} (0, dS_1, 0) + \rho \underbrace{v_2^2}_{Hip.} \int_{SC2} (0, -dS_2, 0) = \\ &= \rho v_1^2 S_1 \hat{j} + \rho v_2^2 S_2 (-\hat{j}) \end{aligned}$$



Y, reordenando la expresión anterior,

$$\int_{SC} \rho \bar{v} (\bar{v} \cdot d\bar{S}) = \underbrace{\rho v_1^2 S_1 \hat{j}}_{=0, v_1^2 \approx 0} + \rho v_2^2 S_2 (-\hat{j}) = \rho v_2^2 S_2 (-\hat{j}) \quad (30)$$

### Fuerza exterior realizada contra el fluido $F_y \hat{j}$

Finalmente, reuniendo las expresiones determinadas y sustituyendo las ecuaciones (25), (28) y (30) en la ecuación (27),

$$\bar{F}_{ext, VC} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \bar{v} dV + \int_{SC} \rho \bar{v} (\bar{v} \cdot d\bar{S}) \quad (31)$$

$$F_y \hat{j} = \rho v_2^2 S_2 (-\hat{j}) \quad (32)$$

$$Y: F_y = -\rho v_2^2 A_2 \quad (33)$$

### Fuerza realizada por el fluido contra el exterior $R_y \hat{j}$

La fuerza que realiza el fluido contra el exterior es exactamente el peso máximo  $W$  que puede elevar el helicóptero,

$$Y: W \equiv R_y = -F_y = \rho v_2^2 \frac{\pi}{4} D_p^2 \quad (34)$$

Tomando los datos del enunciado y los resultados obtenidos anteriormente,

$$W = 4409,4 \text{ N} \cong 450 \text{ kgf} \quad (35)$$

**Para contrarrestar el efecto del par de giro producido por el rotor principal, se instala un rotor trasero que mueve un caudal  $Q_t$ . En estas condiciones, calcule la velocidad de giro  $\omega$  a la cual gira el rotor principal (v. figura 4-B).**

El estudio en este apartado es el mismo que se ha llevado a cabo en el apartado 2. Se aplica el *principio de conservación de la cantidad de movimiento* en su análisis integral en el volumen de control VC2 **indeformable** e **inercial**, representado en la figura 6.

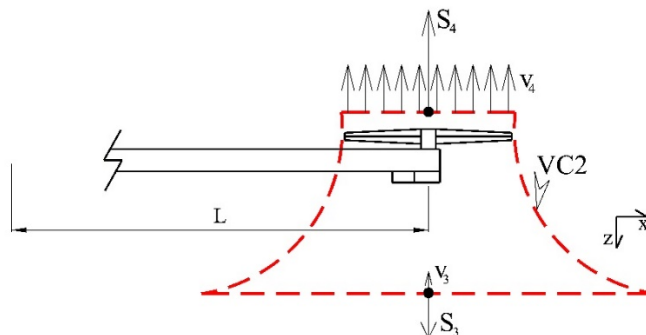


Figura 6. Detalle del volumen de control inercial e indeformable



Si el volumen de control adoptado en la figura 6 tiene su superficie de control 3 suficientemente alejada del rotor trasero, y su área es muy grande en comparación con el área de la superficie de control 4,

$$A_{31} \gg A_4 \rightarrow v_3 = v_4 \frac{A_4}{A_3} \approx 0 \rightarrow v_3 \ll v_4 \quad (36)$$

Al aplicar el principio de conservación de la cantidad de movimiento al igual que en el aparato 2 pero en el VC2, se obtiene:

**Fuerza exterior realizada contra el fluido .**

$$Z: F_z = -\rho v_4^2 A_4 \quad (37)$$

**Fuerza realizada por el fluido contra el exterior  $R_z \hat{k}$**

La fuerza que ejerce el fluido contra el exterior en el rotor trasero será:

$$Z: R_z = -F_z = \rho v_4^2 \frac{\pi}{4} D_t^2 \quad (38)$$

Una vez conocida esta fuerza, se puede evaluar el momento que realiza esta fuerza con respecto al eje de giro del rotor principal:

$$M_{rp} = R_z L (-\hat{j}) = \rho v_4^2 \frac{\pi}{4} D_t^2 L (-\hat{j}) \quad (39)$$

Y la potencia necesaria que debe desarrollar el rotor principal  $N$  para contrarrestar el momento producido por el rotor trasero:

$$N = M_{rp} \omega = \rho v_4^2 \frac{\pi}{4} D_t^2 L \omega (-\hat{j}) \quad (40)$$

Por tanto, la velocidad de giro  $\omega$  a la cual gira el rotor principal es:

$$\omega = \frac{N}{\rho v_4^2 \frac{\pi}{4} D_t^2 L} (-\hat{j}) \quad (41)$$

La velocidad de salida en la superficie de control 4 es:

$$= v_4 A_4 = v_4 \frac{\pi}{4} D_t^2 \rightarrow v_4 = \frac{Q_{rt}}{\frac{\pi}{4} D_t^2} \quad (42)$$

De ahí,

$$\omega = \frac{N}{\rho \left( \frac{Q_{rt}}{\frac{\pi}{4} D_t^2} \right)^2 \frac{\pi}{4} D_t^2 L} (-\hat{j})$$

$$\omega = \frac{N \frac{\pi}{4} D_t^2}{\rho Q_n^2 L} (-\hat{j}) \quad (43)$$

Tomando los datos del enunciado,

$$\omega = 48,9 \text{ rad/s}(-\hat{j}) \cong 467 \text{ rpm}(-\hat{j}) \quad (44)$$

→ 9





## Accionamiento de un ventilador axial sujeto mediante cables

Un ventilador axial que impulsa  $15 \text{ m}^3/\text{s}$  de aire pende de un techo mediante cuatro cables, tal como se muestra en la figura 1. El conjunto tiene una masa de  $100 \text{ kg}$ .

Se pregunta:

- 1- Calcular el desplazamiento que se produce al poner en marcha el ventilador cuando su motor gira hacia la derecha (flujo hacia la derecha, como se representa en la figura 2) y la tensión que debe soportar cada cable.
- 2- Que ocurre si, por error, se hace girar el motor en sentido contrario. Supóngase que, en esta situación, el caudal impulsado disminuye hasta un 80 % con respecto al del caso anterior

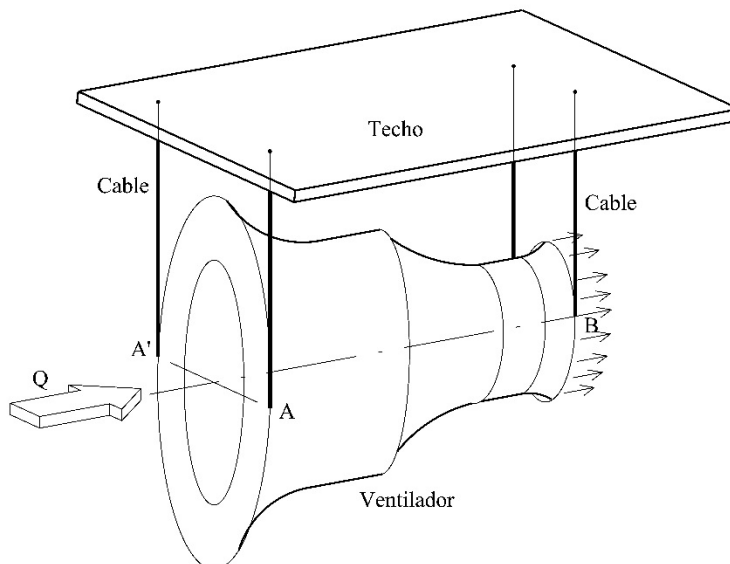
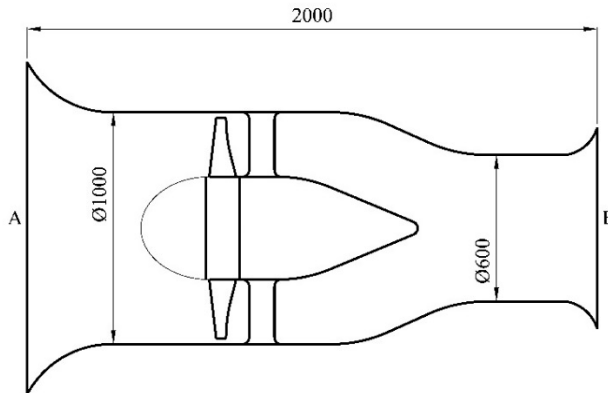


Figura 1. Esquema del conjunto (no a escala)



Figura 2.  
Esquema de las dimensiones principales del ventilador (no a escala)



**Nota:** Se considera que el centro de gravedad del conjunto se encuentra centrado longitudinalmente y sobre el eje axial (eje de simetría).

### Estrategia para resolver el problema

Se sabe que las actividades de aprendizaje son como un interfaz entre los estudiantes, el profesor y los recursos que facilitan la retención de la información y la construcción conjunta del conocimiento.

Se sabe que las actividades de aprendizaje pueden ser de dos tipos: reproductivas y comprensivas.

Se sabe que las actividades memorísticas o reproductivas pretenden la memorización y el recuerdo de una información determinada. Por ejemplo: memorizar una definición, identificar elementos en un conjunto, recordar (sin exigencia de comprender) una fórmula, aplicar mecánicamente fórmulas y reglas para la resolución de problemas, etc.

Se sabe que las actividades comprensivas pretenden construir o reconstruir el significado de la información con la cual se trabaja. Por ejemplo:

- Resumir, interpretar, generalizar...: requieren comprender una información previa y reconstruirla.
- Explorar, comparar, organizar, clasificar datos...: exigen situar la información con la cual se trabaja en el marco general de su ámbito de conocimiento, y realizar una reconstrucción global de la información de partida.
- Planificar, opinar, argumentar, aplicar a nuevas situaciones, construir, crear...: exigen construir nuevos significados, construir nueva información.

En el problema siguiente, tendrá ocasión de autoevaluar si las actividades comprensivas realizadas durante la resolución del problema anterior han sido provechosas y si ha revivido la adquisición de conocimientos que pretendía.

Veámoslo.



## Comprender el problema

Lea detenidamente el enunciado. Hágalo muy despacio, intentando interpretarlo todo, incluidas las preguntas. Utilice los dibujos y los esquemas que estime necesarios. Los dibujos contribuyen a una rápida interpretación.

Empiece por preguntarse: ¿De qué datos disponemos? Fácilmente, del enunciado se puede extraer la geometría que define el entorno físico (ventilador) y cómo este está colgado.

Dedique un cierto tiempo a imaginarse cómo se moverá el sistema colgante. Por unos momentos, olvídense de la mecánica de fluidos y concéntrese en pensar que el ventilador es un sistema "mecánico" (por ejemplo, un péndulo) que se ve empujado hacia un lado. En su razonamiento, puede ayudarle pensar en la tercera ley de Newton (principio de acción y reacción).

Admitiendo que usted ya ha conseguido un cierto dominio del movimiento del sistema, desde el punto de vista "mecánico", ahora debe preguntarse: ¿De qué forma el chorro de aire que sale del ventilador perturba el sistema?

Se sabe que, para evaluar la interacción entre el movimiento de un fluido (chorro aire) y un objeto (ventilador), le puede ayudar mucho seguir la estrategia siguiente:

1. Establecer la condición de equilibrio de fuerzas sobre el objeto (diagrama del sólido libre), teniendo en cuenta que una de las fuerzas por considerar es la acción del fluido sobre el objeto (condición de equilibrio mecánico).
2. Establecer la ecuación que describe el principio de conservación de la cantidad de movimiento sobre un volumen de control que delimita el fluido que está en contacto con el objeto (punto de vista del fluido mecánico).

A continuación, le aconsejamos dedicar unos minutos de su tiempo a imaginar distintas situaciones del problema y a definir distintos volúmenes de control: unos fijos (inerciales) y otros móviles (no inerciales).

¿Cuál le parece más adecuado? ¿Puede hacer una lista de ventajas e inconvenientes sobre el empleo del volumen de control elegido?

Ahora debe concretar algunas cosas: con la ayuda de distintos dibujos, intente esquematizar el movimiento del fluido que pasa a través del ventilador y la posición de equilibrio de este para un caso concreto. Aproveche estos dibujos para insertar los vectores que representan las velocidades del fluido con respecto a las superficies de control correspondientes a los distintos volúmenes de control planteados.

¿Puede definir la naturaleza (propiedades) del fluido? ¿Qué hipótesis necesita formular?  
¿Puede cuantificar las velocidades del fluido (cinemática) con relación a las superficies de control?

Se sabe que, para cuantificar correctamente el movimiento del fluido a través del volumen de control, debe plantear un balance integral de masa. ¿Recuerda cómo se había aplicado en problemas anteriores?



### **Trazar un plan para resolverlo**

¿Este problema es similar a otros que ya hemos planteado? ¿Tiene claro el esquema o plan que seguir para resolverlo?

Entonces, manos a la obra. Empiece por dibujar un diagrama de flujo que le permita visualizar los pasos que debe seguir para resolver el problema. Tome como punto de partida los dibujos y las reflexiones que ha realizado en el apartado anterior.

No se olvide de empezar el diagrama indicando aquellas tareas que corresponden a la interpretación de su ventilador como si fuera simplemente un “sólido libre”. Ahora, en el diagrama debería incluir otra tarea: hacer una lista de las fuerzas que actúan sobre el sistema y plantear la ecuación que define el equilibrio del sólido libre.

¿Se ha dado cuenta de que, en la citada lista, solo tiene una incógnita? La incógnita es la fuerza de reacción que hace el chorro de aire sobre el ventilador (fuerza del fluido/sólido). Perfecto.

Le aconsejamos que haga otro dibujo junto al dibujo del sólido libre. Intente esbozar el volumen de control e inserte la fuerza que por acción/reacción es equivalente al chorro de aire (es lo que interpretamos como las fuerzas exteriores que actúan sobre el fluido encerrado dentro del volumen de control (sólido-fluido).

Ahora, le invitamos a completar la lista de todas las fuerzas externas que actúan sobre el fluido encerrado dentro del volumen de control (máscas y superficiales).

Para continuar con el diagrama de flujo, recuerde que tiene que incluir los recuadros correspondientes a los balances integrales y que las ecuaciones de los balances integrales de masa y de energía tienen carácter escalar, mientras que el balance integral de cantidad de movimiento tiene carácter vectorial.

¿Es consciente de que primero necesita los resultados del balance integral de masa antes de aplicar el principio de conservación de la cantidad de movimiento?

A continuación, inserte las líneas, junto a los recuadros, que representen las variables (las supuestamente conocidas o “datos” y las que son incógnitas). Es aconsejable añadir pequeños comentarios y leyendas sobre cómo resolver cada término de los balances integrales e incluir una referencia a las hipótesis utilizadas.

Inspeccione las variables compartidas entre ambos balances y proceda a unir todas las líneas que representan las mismas variables. Si tiene dudas, le invitamos a revisar cómo se planificó la resolución del problema del helicóptero.

Se sabe que la comprensión profunda de cualquier concepto requiere utilizar varias representaciones; aunque muchas veces los estudiantes creen que una representación (la algebraica) es suficiente.

Se sabe que los estudiantes, en general, tampoco tienden a interrelacionar representaciones, lo cual a menudo significa que sus ideas físicas abstractas no están bien conectadas con experiencias del mundo real.



Le invitamos a excederse en el empleo de las representaciones (esquemas, diagramas, etc.). Si no lo puede explicar gráficamente de forma simple es que no lo entendió bien.

Supongamos que ya lo ha conseguido. Le invitamos a revisar y a completar, en su caso, el esquema de los pasos que seguir. ¿Ha verificado qué se consigue con cada paso?

### **Ejecutar el plan**

Primero “visualice”. Lo normal es que, al principio de la resolución del problema, no se vean todas sus implicaciones y que solo se logre una total comprensión de este tras haber “jugado” con las ideas algún tiempo.

Si surge alguna dificultad que le deja bloqueado, debe volver al principio, reordenar las ideas y revisar el plan previsto. No desfallezca. Vuelva a probarlo de nuevo, pero... ¡no se agobie! A veces, nos empeñamos en que hay que cambiar de libro cuando sólo hay que pasar página. Distráigase un poco. Deje que su cuerpo genere un poco de adrenalina saliendo a caminar. Ya verá como después se siente mejor.

Ahora vuelva a retomar el problema con confianza. Estamos seguros de que las dificultades prácticamente han desaparecido y que usted no solo descubrirá lo que debe hacer, sino que –y eso es aún más importante– verá exactamente cómo aplicar cada principio.

### **Comprobar los resultados**

Antes de comprobar los resultados, asegúrese de que ha representado los resultados obtenidos de la forma más oportuna.

Parafraseando la cita de César (“La esposa del César no solo debe ser honesta, sino parecerlo”), queremos trasladarle el mensaje siguiente: En la vida profesional, la ingeniera y el ingeniero no solo deben saber hacer cálculos, sino que deben saber exponerlos de forma resumida y convencer a los demás de que son correctos. La finalidad es exponer, de forma condensada, esta información y mostrar su significado e importancia.

Se sabe que la valoración de la solución es fundamental para mejorar el aprendizaje en la resolución del problema. Debe utilizar su capacidad crítica para examinar el resultado obtenido y valorar el procedimiento que ha seguido.

Invierta un poco más de tiempo en responder a las preguntas siguientes.

¿Puede comprobar el resultado? ¿Es razonable? ¿Satisface las condiciones establecidas en el problema? ¿Advierte una solución más sencilla? ¿Puede comprobar que su procedimiento es correcto? ¿En qué se podría haber mejorado? ¿Puede ver cómo extender la solución obtenida a un caso más general?

Consideramos oportuno comentarle que los párrafos anteriores tienen como objetivo ayudarle en su formación. Y que todo lo expuesto requiere mucho tiempo y esfuerzo. No se limite a recurrir solo a las actividades memorísticas o reproductivas (aplicar mecánicamente fórmulas y reglas para la resolución de problemas, etc.).



Se sabe que los resultados que se consiguen guardan una proporción directa con los esfuerzos realizados.

**Nota:** Como ha podido constatar en cada problema, después del apartado “Estrategia para resolver el problema” viene un apartado que contiene una resolución escueta del mismo. También ha comprobado que no hay respuestas a algunas de las cuestiones planteadas, ni diagramas de flujo, ni tampoco un análisis crítico de los resultados obtenidos. Queremos evitar, a toda costa, que la resolución del problema represente para usted una actividad memorística o reproductiva.

¿Es intencionada esta forma de proceder? Sí, la vemos como una oportunidad. Y creemos que es una oportunidad porque está en línea con su aprendizaje y le ofrece lo que necesita para mejorar. Queremos extraer lo mejor de usted: imaginación, creatividad, seguridad, autoestima, etc.

Se sabe que, cuando los retos están por encima de las habilidades, sentimos ansiedad y, cuando ocurre lo contrario, eso es, cuando nuestras habilidades están por encima de los retos, nos aburrirnos.

## Estudio

### Breve descripción

El ventilador axial genera un flujo de aire que, junto con la diferencia entre las áreas de las secciones de entrada y salida del aire, genera una fuerza de cantidad de movimiento que contrarresta una parte del peso sobre los cables y provoca una nueva situación de equilibrio

### Análisis

<b>Análisis INTEGRAL</b>	
<b>Volumen de control (VC)</b>	
<b>Indeformable</b>	<b>Inercial (fijo)</b>
Deformable	No inercial (móvil)



## Hipótesis que se plantean

<b>PROPIEDADES del fluido</b>			
<b>Densidad</b>	<b>Constante</b>	<b>Incompresible</b>	<b>Homogéneo</b>
	Variable: Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		Gas ideal	Adiabático
			Isotérmico
<b>COMPORTAMIENTO del fluido</b>			
En reposo	Equilibrio	Absoluto	
		Relativo	
En movimiento	Régimen	<b>Estacionario</b>	
		Transitorio	
<b>PRESTACIONES del fluido</b>			
- Situación de equilibrio por desplazamiento de un ventilador axial debido a la fuerza de la cantidad de movimiento del flujo producido			
<b>Otras hipótesis de TRABAJO</b>			
<ul style="list-style-type: none"> <li>- La variación de la temperatura es despreciable.</li> <li>- Las propiedades físicas y los perfiles de las velocidades son constantes y uniformes en las secciones de control.</li> <li>- Los sólidos son indeformables.</li> <li>- Se considera despreciable cualquier tipo de pérdida de energía.</li> <li>- Se considera que el centro de gravedad del conjunto se encuentra centrado longitudinalmente y sobre el eje axial (eje de simetría).</li> <li>- Es despreciable el efecto de la gravedad en el fluido.</li> </ul>			

## Principios básicos y leyes fundamentales

- 2ª ley de Newton
- Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Principio de conservación de la cantidad de movimiento

## Resolución

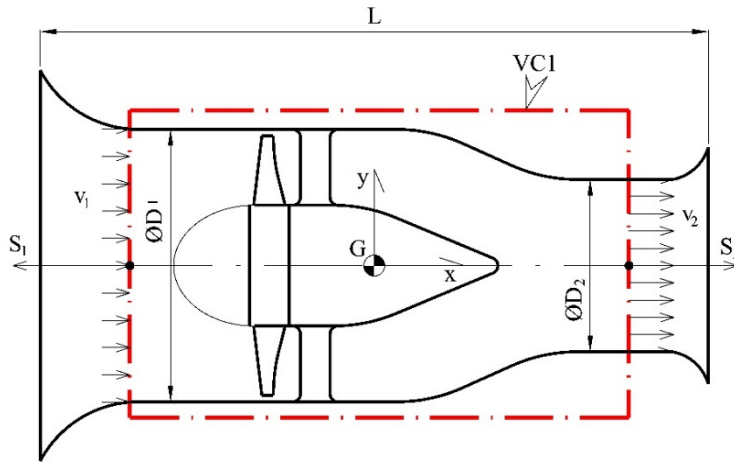
**Calcule el desplazamiento que se produce al poner en marcha el ventilador cuando su motor gira hacia la derecha (flujo hacia la derecha representado en la figura 2) y la tensión que debe soportar cada cable.**

Para calcular la tensión que deben soportar los cables, se debe llevar a cabo un análisis integral en el volumen de control VCI **inercial e indeformable**, como el que se presenta en la figura 3. Aplicando el *principio de conservación de la masa* en el análisis integral, se obtiene:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV}_{=0; \text{Hip.}} + \int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{A}) = 0 \quad (1)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} V}_{=0; \text{Hip.}} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t} \rho}_{=0; \text{indeformable}} + \underbrace{\rho}_{\text{Hip.}} \int_{SC} (\vec{v} \cdot d\vec{A}) = 0$$

Figura 3.  
Detalle del volumen  
de control inercial e  
indeformable



de donde las superficies de control son:

$$\int_{SC} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \int_{SC1} (-v_1 dS_1) + \int_{SC2} (v_2 dS_2) = \underbrace{v_1}_{\text{Hip.}} \int_{SC1} (-dS_1) + \underbrace{v_2}_{\text{Hip.}} \int_{SC2} (dS_2) = 0 \quad (2)$$

y se obtiene:

$$Q_A = v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad (3)$$

Para calcular la tensión que deben soportar los cables, es necesario conocer la fuerza asociada al movimiento del fluido y así aplicar el *principio de conservación de la cantidad de movimiento* en su análisis integral. Se elige un volumen de control **indeformable** e **inercial**, igual al utilizado anteriormente, representado en la figura 3.

El *principio de cantidad de movimiento* en análisis integral es:

$$\vec{F}_{ext, VC} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) \quad (4)$$

Se estudian al detalle cada uno de los tres términos del principio de cantidad de movimiento.





**Fuerzas externas que actúan sobre el VC**  $\vec{F}_{ext,VC}$

$$\vec{F}_{ext,VC} = \vec{F}_{másicas,VC} + \vec{F}_{normales,SC} + \vec{F}_{tangenciales,SC} \quad (5)$$

- *Fuerzas másicas:*  $\vec{F}_{másicas,VC} = 0$  despreciables desde las hipótesis propuestas.
- *Fuerzas superficiales*
  - *Fuerzas normales:*  $\vec{F}_{normales,SC} = \underbrace{p_1}_{=P_{am}=0(rel)} S_1 \hat{i} + \underbrace{p_2}_{=P_{am}=0(rel)} S_2 (-\hat{i}) = 0$  ya que se trabaja en términos de presiones relativas.
  - *Fuerzas tangenciales.* En las superficies de control del volumen de control escogido, no se presentan esfuerzos cortantes. Se elige tomar la *fuerza mecánica*, que además será la incógnita del problema:  $\vec{F}_{tangenciales,SC} \leftrightarrow \vec{F}_{mecánica,SC} = F_x \hat{i}$

$$\vec{F}_{ext,VC} = \vec{F}_{másicas,VC} + \vec{F}_{normales,SC} + \vec{F}_{tangenciales,SC} = F_x \hat{i} \quad (6)$$

**Variación temporal de la cantidad de movimiento en el interior del VC**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV$$

El término temporal es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV = \underbrace{\rho}_{Hip} \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v} dV = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \underbrace{\vec{v} dV}_{no \text{ varía en función del tiempo}} = 0 \quad (7)$$

**Variación de la cantidad de movimiento en las SC**

$$\int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S})$$

Teniendo presente la figura 3,

$$\begin{aligned} \int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) &= \int_{SC1} \rho \vec{v}_1 (\vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1) + \int_{SC2} \rho \vec{v}_2 (\vec{v}_2 \cdot d\vec{S}_2) = \underbrace{\rho}_{Hip} \int_{SC1} \vec{v}_1 (\vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1) + \underbrace{\rho}_{Hip} \int_{SC2} \vec{v}_2 (\vec{v}_2 \cdot d\vec{S}_2) = \\ &= \rho \int_{SC1} (v_1, 0, 0) ((v_1, 0, 0) \cdot (-dS_1, 0, 0)) + \rho \int_{SC2} (v_2, 0, 0) ((v_2, 0, 0) \cdot (dS_2, 0, 0)) = \\ &= \rho \int_{SC1} (v_1, 0, 0) (-v_1 dS_1, 0, 0) + \rho \int_{SC2} (v_2, 0, 0) (v_2 dS_2, 0, 0) = \\ &= \rho \int_{SC1} (-v_1^2 dS_1, 0, 0) + \rho \int_{SC2} (v_2^2 dS_2, 0, 0) = \rho \underbrace{v_1^2}_{Hip} \int_{SC1} (-dS_1, 0, 0) + \rho \underbrace{v_2^2}_{Hip} \int_{SC2} (dS_2, 0, 0) = \\ &= \rho v_1^2 S_1 (-\hat{i}) + \rho v_2^2 S_2 \hat{i} \end{aligned} \quad (8)$$



Reordenando la expresión anterior,

$$\int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \rho v_1^2 S_1 (-\hat{i}) + \rho v_2^2 S_2 \hat{i} = \rho v_1 \underbrace{v_1 S_1}_{=Q_A} (-\hat{i}) + \rho v_2 \underbrace{v_2 S_2}_{=Q_A} \hat{i} = \rho Q_A (v_2 - v_1) \hat{i} \quad (9)$$

### Fuerza exterior ejercida contra el fluido $F_x \hat{i}$

Finalmente, reuniendo las expresiones determinadas y sustituyendo las ecuaciones (6), (7) y (9) en la ecuación (4),

$$\vec{F}_{ext,VC} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) \quad (10)$$

$$F_x \hat{i} = \rho Q_A (v_2 - v_1) \hat{i} \quad (11)$$

$$X: F_x = \rho Q_A (v_2 - v_1) = \rho Q_A \left( \frac{Q_A}{S_2} - \frac{Q_A}{S_1} \right) = \rho Q_A^2 \left( \frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1} \right) \quad (12)$$

### Fuerza ejercida por el fluido contra el exterior $R_x \hat{i}$

La fuerza que ejerce el fluido contra el sólido será exactamente la tensión que deberán soportar los cables debida a la cantidad de movimiento:

$$X: R_x = -F_x = \rho Q_A^2 \left( \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} \right) \quad (13)$$

Tomando los datos del enunciado,

$$Q_A = 15 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$$

$$S_1 = \frac{\pi}{4} D_1^2 = \frac{\pi}{4} (1 \text{ m})^2 = 0,79 \text{ m}^2 \quad (14)$$

$$S_2 = \frac{\pi}{4} D_2^2 = \frac{\pi}{4} (0,6 \text{ m})^2 = 0,28 \text{ m}^2$$

y se obtiene:

$$X: R_x = -622,51 \text{ N} \quad (15)$$

En el equilibrio, el sumatorio de fuerzas en el ventilador (v. figura 4) es:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (16)$$

$$R_T = T_T \quad (17)$$

donde

$$R_T = \sqrt{|R_x|^2 + |W|^2} = \sqrt{|R_x|^2 + |Mg|^2} \quad (18)$$

y  $T_T$  es la fuerza total que los cables deberán soportar.

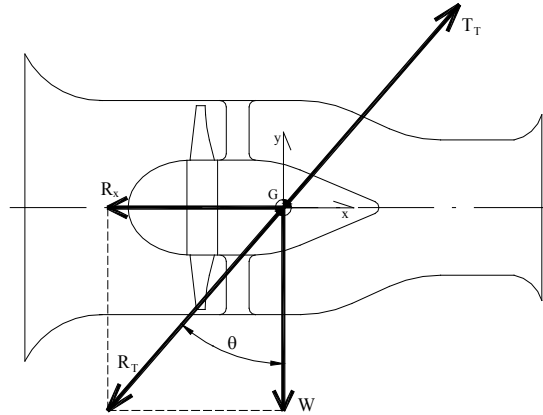


Figura 4. Detalle del equilibrio de fuerzas con los cables

Sustituyendo los datos del enunciado y tomando los resultados ya obtenidos,

$$R_T = \sqrt{|-622,51 \text{ N}|^2 + |-9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 100 \text{ kg}|^2} = 1161,84 \text{ N} = T_T \quad (19)$$

La tensión total  $T_T$  es soportada por cuatro cables; por tanto, la tensión  $T$  que soportará cada cable será:

$$T = \frac{T_T}{4} = 290,46 \text{ N} \quad (20)$$

**Qué ocurre si, por error, se hace girar el motor en sentido contrario. Supóngase que en esta situación el caudal impulsado disminuye hasta un 80 % con respecto al del caso anterior.**

En este apartado, el caudal circula en dirección contraria al caso anterior y su valor será:

$$Q_B = 80\%Q_A = 0,8Q_A = 12 \text{ m}^3/\text{s} \quad (21)$$

En primer lugar, una vez estudiadas las condiciones de flujo en el ventilador axial, las hipótesis que se plantean son:

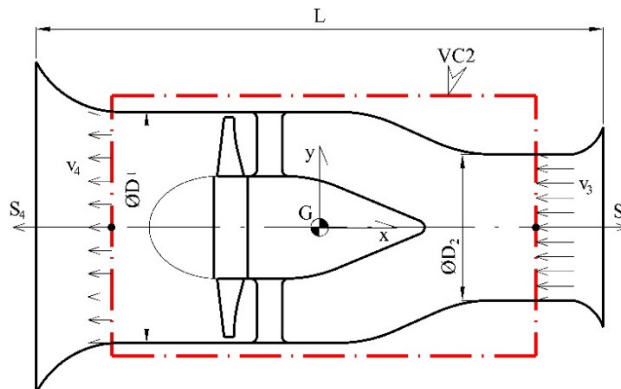


Figura 5. Detalle del volumen de control inercial e indeformable



Para calcular la tensión que deben soportar los cables, se lleva a cabo un análisis integral en el volumen de control VC2 **inercial e indeformable**, como el que se presenta en la figura 5. Aplicando el *principio de conservación de la masa* en análisis integral, se obtiene, siguiendo el mismo procedimiento y bajo las mismas hipótesis:

$$Q_B = v_3 S_3 = v_4 S_4 \quad (22)$$

Para calcular la tensión que deben soportar los cables, es necesario aplicar el *principio de conservación cantidad de movimiento* en su análisis integral. Se elige un volumen de control **indeformable e inercial**, igual al utilizado anteriormente, representado en la figura 5. Siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado anterior:

**Fuerzas externas que actúan sobre el VC**  $\vec{F}_{ext,VC}$

$$\vec{F}_{ext,VC} = \vec{F}_{máscas,VC} + \vec{F}_{normales,SC} + \vec{F}_{tangenciales,SC} = F_{xB} \hat{i} \quad (23)$$

**Variación temporal de la cantidad de movimiento en el interior del VC**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV$$

El término temporal es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV = \underbrace{\rho}_{Hip. b} \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v} dV = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \underbrace{\vec{v} dV}_{\text{no varía en función del tiempo}} = 0 \quad (24)$$

**Variación de la cantidad de movimiento en las SC**

$$\int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S})$$

Teniendo presente la figura 5,

$$\begin{aligned} \int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) &= \int_{SC3} \rho \vec{v}_3 (\vec{v}_3 \cdot d\vec{S}_3) + \int_{SC4} \rho \vec{v}_4 (\vec{v}_4 \cdot d\vec{S}_4) = \underbrace{\rho}_{Hip. SC3} \int_{SC3} \vec{v}_3 (\vec{v}_3 \cdot d\vec{S}_3) + \underbrace{\rho}_{Hip. SC4} \int_{SC4} \vec{v}_4 (\vec{v}_4 \cdot d\vec{S}_4) = \\ &= \rho \int_{SC3} (-v_3, 0, 0) ((-v_3, 0, 0) \cdot (-dS_3, 0, 0)) + \rho \int_{SC4} (0, 0, 0) ((-v_4, 0, 0) \cdot (dS_4, 0, 0)) = \\ &= \rho \int_{SC3} (-v_3, 0, 0) (v_3 dS_3, 0, 0) + \rho \int_{SC4} (-v_4, 0, 0) (-v_4 dS_4, 0, 0) = \\ &= \rho \int_{SC3} (-v_3^2 dS_3, 0, 0) + \rho \int_{SC4} (v_4^2 dS_4, 0, 0) = \rho \underbrace{v_3^2}_{Hip. SC3} \int_{SC3} (-dS_3, 0, 0) + \rho \underbrace{v_4^2}_{Hip. SC4} \int_{SC4} (dS_4, 0, 0) = \\ &= \rho v_3^2 S_3 (-\hat{i}) + \rho v_4^2 S_4 \hat{i} \end{aligned} \quad (25)$$

Reordenando la expresión anterior,



$$\int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \rho v_3^2 S_3 (-\hat{i}) + \rho v_4^2 S_4 \hat{i} = \rho v_3 v_3 S_3 \underbrace{(-\hat{i})}_{=Q_B} + \rho v_4 v_4 S_4 \underbrace{\hat{i}}_{=Q_B} = \rho Q_B (v_4 - v_3) \hat{i} \quad (26)$$

**Fuerza exterior ejercida contra el fluido**  $F_{xB} \hat{i}$

Finalmente, reuniendo las expresiones determinadas y sustituyendo las ecuaciones (23), (24) y (25) en la ecuación (4),

$$\vec{F}_{ext,VC} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) \quad (27)$$

$$F_{xB} \hat{i} = \rho Q_B (v_4 - v_3) \hat{i} \quad (28)$$

$$X: F_{xB} = \rho Q_B (v_4 - v_3) = \rho Q_B \left( \frac{Q_B}{S_4} - \frac{Q_B}{S_3} \right) = \rho Q_B^2 \left( \frac{1}{S_4} - \frac{1}{S_3} \right) \quad (29)$$

**Fuerza ejercida por el fluido contra el exterior**  $R_{xB} \hat{i}$

La fuerza que ejerce el fluido contra el sólido será exactamente la tensión que deberán soportar los cables debida a la cantidad de movimiento,

$$X: R_{xB} = -F_{xB} = \rho Q_B^2 \left( \frac{1}{S_3} - \frac{1}{S_4} \right) \quad (30)$$

Tomando los datos del enunciado,

$$\begin{aligned} S_3 &= S_1 = 0,79 \text{ m}^2 \\ S_4 &= S_2 = 0,28 \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (31)$$

y se obtiene:

$$X: R_{xB} = -398,41 \text{ N} \quad (32)$$

Y, en el equilibrio, el sumatorio de fuerzas en el ventilador (v. figura 4) es:

$$R_{TB} = T_{TB} \quad (33)$$

Sustituyendo los datos del enunciado y tomando los resultados ya obtenidos,

$$R_{TB} = \sqrt{|-398,41 \text{ N}|^2 + |-9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 100 \text{ kg}|^2} = 1058,82 \text{ N} = T_{TB} \quad (34)$$

La tensión total  $T_{TB}$  es soportada por cuatro cables; por tanto, la tensión  $T_B$  que deberá soportar cada cable será:

$$T_B = \frac{T_{TB}}{4} = 264,7 \text{ N} \quad (35)$$

→ 10



## Descarga de un depósito con aireador

En la figura 1, se presenta un depósito de base circular ( $D_3$ ) y completamente estanco excepto en su parte superior, que es atravesada por una tubería de diámetro interior ( $d_1$ ) y un orificio lateral de diámetro ( $d_2$ ).

En un instante inicial, el depósito se encuentra completamente lleno de fluido y la válvula A cerrada, y el nivel de la superficie libre por el interior de la tubería llega a la altura ( $z_1$ ) con respecto al eje del centro del orificio. La parte inferior de la tubería se encuentra a una altura ( $z_4$ ) del eje del centro del orificio.

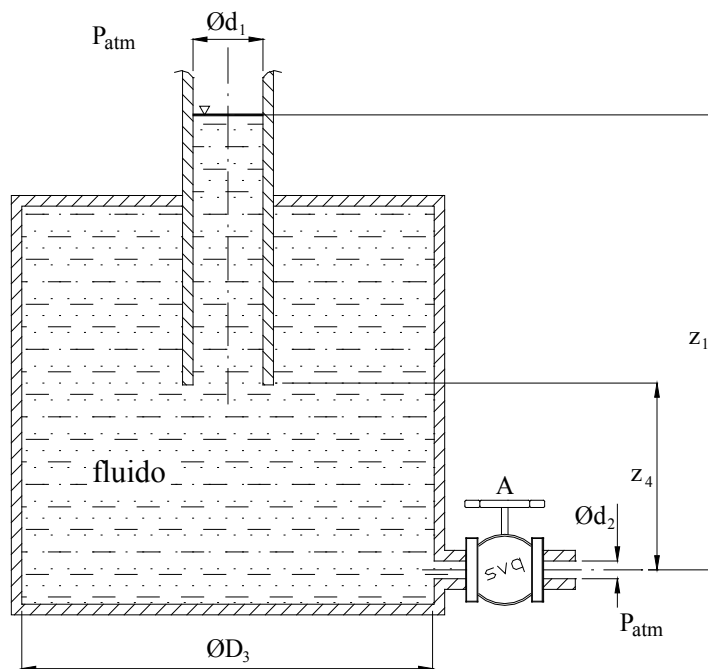


Figura 1.  
Esquema del depósito (no a escala)



Se pide:

1. Determinar la expresión la velocidad del vaciado del depósito a través del orificio cuando se abre la válvula A.
2. Representar gráficamente la velocidad de vaciado.

Hipótesis:

- Tomar como coeficiente de descarga la unidad.
- Suponer que la apertura de la válvula es instantánea (despreciar el transitorio).
- Despreciar las pérdidas de carga.

### **Estrategia para resolver el problema**

Se sabe que asimilar el contenido de una asignatura “con un marcado carácter tecnológico” es como subir una escalera. Para llegar arriba, es necesario que ambas piernas trabajen juntas. Una pierna nos sostiene mientras que la otra nos sube al siguiente escalón. De la misma manera, el conocimiento tecnológico y el científico (conceptual) deben trabajar juntos, apoyándose y mejorándose mutuamente.

Ahora se enfrenta a un problema muy simple, pero que requiere un “saber hacer” especial para entender la singularidad del problema.

Se sabe que a los ingenieros se les suelen exigir habilidades como el liderazgo, la gestión de equipos, la motivación, la implementación de recursos y la capacidad de análisis, entre otras herramientas indispensables para su labor. Aunque no figura entre las más habilidades más comentadas, esta última –la capacidad de análisis– constituye una de las más importantes en la labor, toda vez que supone el desarrollo de una mirada crítica, minuciosa, previsor y proactiva, que no todos despliegan como es debido.

### **Comprender el problema**

Lea detenidamente todo el enunciado del problema, incluidas todas las preguntas, y exhiba su capacidad de análisis.

¿Cuáles son los datos de partida?

El enunciado es tan simple que podemos reconocer fácilmente todos los parámetros que definen el entorno físico y la naturaleza del fluido con una rápida inspección.

¿Este problema es similar a otros ya conocidos? ¿Puede describir las diferencias más significativas que existen entre este problema y el típico problema de llenado/vaciado de un simple depósito? ¿Cómo podemos estimar el flujo másico de fluido que sale del depósito?

¿Ha advertido que toda la dificultad se centra en realizar un análisis minucioso del proceso de descarga y, específicamente, la visualización de una secuencia detallada de imágenes, y del correspondiente balance integral de energía para cada una de ellas?





La habilidad para investigar la sucesión de imágenes en el tiempo le permitirá descubrir los detalles que determinan la función específica del tubo instalado en la parte superior del depósito. ¿Lo tiene claro? ¿Se ha percatado de que, mientras el depósito se va vaciando, la superficie libre del agua en el interior del tubo se mantiene en una misma situación durante mucho tiempo (extremo inferior del tubo)?

Observe que, mientras se mantiene esta situación singular, el proceso de descarga tiene lugar en régimen permanente y, en consecuencia, el balance de energía (ecuación de Bernoulli) predice que el caudal descargado es constante.

### **Trazar un plan para resolverlo**

Recuerde que, para plantear balances integrales, un requisito previo es definir un volumen de control. ¿Qué particularidad tiene el volumen de control propuesto?

¿Ve factible ahora que la resolución conjunta de los balances integrales (de masa y energía) sobre el mismo volumen de control le debe permitir deducir las ecuaciones necesarias para explicitar las variables incógnitas en función de los datos? Si la respuesta es afirmativa, ordene sus ideas y proyéctelas en un diagrama de flujo.

En caso negativo, vuelva a repasar los párrafos anteriores. Examine si hay algún descuido y/o ha cometido involuntariamente algún error.

### **Ejecutar el plan**

Recuerde que, antes de hacer cualquier cosa, hay que pensar: ¿Qué se consigue con ello?

Ayúdese de unos dibujos para identificar el sistema y el volumen de control. Haga lo propio con las superficies de control. Dibuje los vectores que definen la superficie de control (superficies de flujo) y los vectores que definen las correspondientes velocidades del fluido.

¿Puede razonar cuál es el perfil de velocidades en cada una de las superficies de control?  
¿Necesita plantear alguna hipótesis?

Se aconseja acompañar los desarrollos y los cálculos con una explicación clara de lo que se pretende y lo que se ha hallado.

### **Comprobar los resultados**

Vuelva a leer el enunciado y compruebe que lo que se pedía es lo que ha averiguado.

En este punto, se aconseja representar los resultados obtenidos en función del tiempo. Recuerde que una forma de sintetizar y visualizar los resultados es mediante gráficos. ¿Le parecen razonables los resultados obtenidos?

Supóngase que se han obtenido unos resultados correctos. ¿Puede corroborar y/o justificar adecuadamente las hipótesis seguidas?



Para consolidar todo lo realizado en este problema, le invitamos a hacer una lista exhaustiva de los conceptos utilizados y una síntesis del plan que le ha permitido resolver el problema.

## Estudio

### Breve descripción

Se trata del vaciado de un depósito por su parte superior que tiene una tubería conectada con su interior y el exterior. El vaciado se producirá por etapas, cada una definida por la posición de la superficie libre en el interior del tubo y el interior del depósito hasta que llegue a su vaciado completo.

### Análisis

<b>Análisis INTEGRAL</b>	
<b>Volumen de control (VC)</b>	
<b>Indeformable</b>	<b>Inercial (fijo)</b>
Deformable	No inercial (móvil)

### Hipótesis que se plantean

<b>PROPIEDADES del fluido</b>			
<b>Densidad</b>	<b>Constante</b>	<b>Incompresible</b>	<b>Homogéneo</b>
	Variable: Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		Gas ideal	Adiabático Isotérmico
<b>COMPORTAMIENTO del fluido</b>			
En reposo	Equilibrio	Absoluto	
		Relativo	
<b>En movimiento</b>	<b>Régimen</b>	Estacionario	
		<b>Transitorio</b>	
<b>PRESTACIONES del fluido</b>			
- Velocidad de vaciado del depósito			
<b>Otras hipótesis de TRABAJO</b>			
- La variación de la temperatura es despreciable. - Las propiedades físicas y los perfiles de velocidades son constantes y uniformes en las secciones de control. - Los sólidos son indeformables. - Se considera despreciable cualquier tipo de pérdida de energía. - Se toma como coeficiente de descarga la unidad. - Se supone instantánea la apertura de la válvula (se desprecia el transitorio).			



## Principios básicos y leyes fundamentales

- Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Principio de conservación de la energía. Ecuación de Bernoulli

## Resolución

### Determine la expresión la velocidad del vaciado del depósito a través del orificio cuando se abre la válvula A.

Para resolver el problema, se utilizará un análisis integral mediante volúmenes de control. Seguidamente, se estudiará el problema en etapas, cada una definida por la posición de la superficie libre en el interior del tubo e interior del depósito hasta que llegue a su vaciado completo. Así:

**Etapa 1.** La superficie libre se encuentra en el punto 1 y desciende desde el punto 1 hasta el punto 4, es decir, desde la altura  $z_1$  hasta la altura  $z_4$  (v. figura 2).

**Etapa 2.** La superficie libre se encuentra en el punto 4 y permanece sin moverse en este punto, mientras que el agua desciende desde el punto 3 hasta el punto 4, es decir, desde la altura  $z_3$  hasta la altura  $z_4$  (v. figura 3).

**Etapa 3.** La superficie libre se encuentra en el punto 4 y desciende desde el punto 4 hasta el punto 2, es decir, desde la altura  $z_4$  hasta la altura  $z_2$  (v. figura 4).

### Etapa 1. Velocidad en el orificio debida al vaciado de la tubería desde $z_1$ a $z_4$

Para encontrar la velocidad en el orificio debido al vaciado de la tubería desde  $z_1$  hasta  $z_4$ , se debe llevar a cabo un análisis integral en el volumen de control VC1 **inercial e indeformable**, como el que se presenta en la figura 2. Aplicando el *principio de conservación de la masa* en análisis integral, se obtiene:

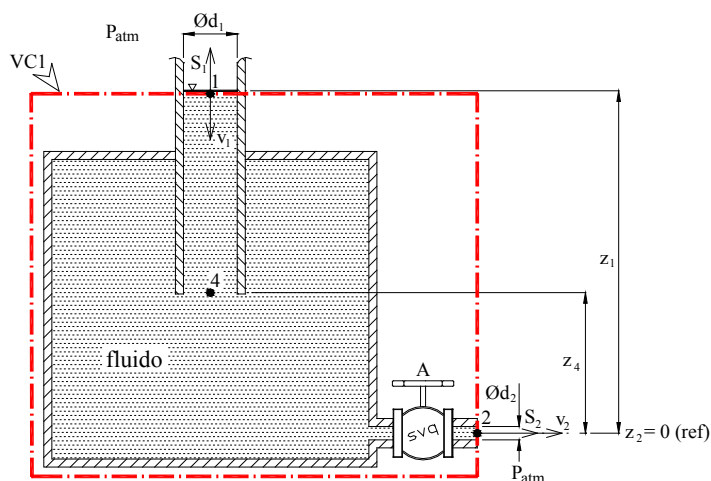


Figura 2. Detalle del volumen de control 1 y primera etapa



$$\underbrace{\int_{VC} \rho dV}_{=0; \text{Hip}} + \int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0 \quad (1)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} V}_{=0; \text{Hip}} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t} \rho}_{=0; \text{indeformable}} + \underbrace{\rho}_{\text{Hip}} \int_{SC} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0$$

de donde las superficies de control son:

$$\int_{SC} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \int_{SC1} (-v_1 dS_1) + \int_{SC2} (v_2 dS_2) = 0 \quad (2)$$

$$\underbrace{v_1}_{\text{Hip. } SC1} \int (-dS_1) + \underbrace{v_2}_{\text{Hip. } SC2} \int (dS_2) = 0$$

y se obtiene:

$$-v_1 S_1 + v_2 S_2 = 0 \rightarrow v_1 \frac{\pi}{4} d_1^2 = v_2 \frac{\pi}{4} d_2^2 \quad (3)$$

Las incógnitas que aparecen en la expresión anterior son las velocidades en las secciones de control 1 y 2. La velocidad de la superficie libre en el interior de la tubería en función del tiempo es:

$$v_1 = -\frac{dz_1}{dt} \quad (4)$$

La velocidad a la salida del orificio se halla aplicando el principio de conservación de la energía, que, mediante las hipótesis convenientes, deriva en la conocida ecuación de Bernoulli:

$$H_1 = H_2 + \underbrace{\Delta H_{1-2}}_{=0, \text{Hip.}} \quad (5)$$

Aplicándola entre los puntos 1 y 2 representados en la figura 2:

$$\underbrace{\frac{P_1}{\rho g}}_{=0, \text{rel}} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \underbrace{\frac{P_2}{\rho g}}_{=0, \text{rel}} + \underbrace{z_2}_{=0, \text{ref}} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (6)$$

y se obtiene:

$$v_2 = \sqrt{2gz_1 + v_1^2} \quad (7)$$

Sustituyendo ahora las ecuaciones (4) y (7) en la ecuación (3):

$$-\frac{dz_1}{dt} d_1^2 = \sqrt{2gz_1 + \left(-\frac{dz_1}{dt}\right)^2} d_2^2 \quad (8)$$



Tras una serie de operaciones matemáticas,

$$-\frac{dz_1}{\sqrt{2gz_1}} = \frac{dt}{\left[\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (9)$$

e integrando,

$$\int_{z_1}^{z_4} -\frac{dz_1}{\sqrt{2gz_1}} = \int_{t_1}^{t_4} \frac{dt}{\left[\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2g}} \sqrt{(z_1 - z_4)} = \frac{t_4 - t_1}{\left[\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (11)$$

Se obtiene el tiempo de vaciado de la tubería,

$$t_4 = t_1 + \frac{2 \left[\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1\right]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2g}} \sqrt{(z_1 - z_4)} \quad (12)$$

O la altura en función del tiempo,

$$z_4 = z_1 - \frac{g}{2 \left[\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1\right]^{\frac{1}{2}}} (t_4 - t_1)^2 \quad (13)$$

Para encontrar la velocidad de vaciado de la tubería, se parte de la ecuación (6):

$$v_1 = \sqrt{v_2^2 - 2gz_1} \quad (14)$$

Sustituyendo ahora en la ecuación (3),

$$\sqrt{v_2^2 - 2gz_1} d_1^2 = v_2 d_2^2 \quad (15)$$

Tras una serie de operaciones matemáticas, se obtiene la velocidad en el orificio debida al vaciado en la tubería desde la altura máxima de la superficie libre en el punto 1  $z_1$  hasta el final punto 4  $z_4$ .



$$v_2 \text{ (de 1 a 4)} = \sqrt{\frac{-2gz_4}{\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 - 1}} \quad \text{desde } z_4(t_1) = z_{1,\max} = Cte \rightarrow z_4 = f(t_4) \quad (16)$$

También puede obtenerse esta velocidad en función del tiempo. Derivando la expresión (13) en función del tiempo,

$$\frac{dz_4}{dt} = \underbrace{\frac{dz_1}{dt}}_{=0, z_{1,\max}=Cte} - \frac{g}{2 \left[ \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}} 2 \left( \frac{dt_4}{dt} - \underbrace{\frac{dt_1}{dt}}_{=0, t_1=Cte} \right) \quad (17)$$

$$\frac{dz_4}{dt} = - \frac{g}{\left[ \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}} \frac{dt_4}{dt} \quad (18)$$

Sustituyendo ahora en la ecuación (3),

$$v_4 = v_2 \frac{d_2^2}{d_1^2}$$

$$- \frac{dz_4}{dt} = v_2 \frac{d_2^2}{d_1^2} \quad (19)$$

$$- \left( - \frac{g}{\left[ \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}} \frac{dt_4}{dt} \right) = v_2 \frac{d_2^2}{d_1^2}$$

y se obtiene:

$$v_2 \text{ (de 1 a 4)} = \frac{g}{\left[ \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 t_4 \quad \text{desde } z_{1,\max} = Cte \rightarrow z_4 = f(t_4) \quad (20)$$

## **Etapla 2. Velocidad en el orificio debida al vaciado del depósito desde $z_3$ hasta $z_4$**

Para determinar la velocidad en el orificio debida al vaciado del depósito desde  $z_3$  hasta  $z_4$ , se aplicará la ecuación de Bernoulli entre los puntos 3 y 2 (v. figura 3):



$$H_3 = H_2 + \underbrace{\Delta H_{3-2}}_{=0, \text{Hip.}} \quad (21)$$

$$\frac{P_3}{\rho g} + z_3 + \frac{v_3^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \underbrace{z_2}_{=0, \text{ref}} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (22)$$

$\underbrace{=0, v_3^2 \approx 0}$        $\underbrace{=0, \text{rel}}$

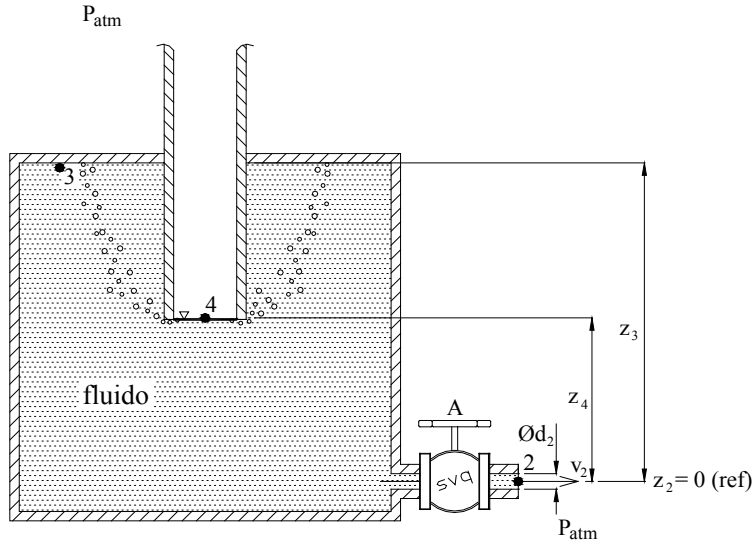


Figura 3. Detalle del vaciado de la segunda etapa

y se obtiene:

$$P_3 = -\rho g z_3 + \rho \frac{v_2^2}{2} \quad (23)$$

Aplicando ahora *fluideoestática* entre el punto 3 (velocidad despreciable) y el punto 4 (que permanecerá estático hasta que la cota de la superficie del punto 3 alcance el punto 4),

$$\underbrace{P_4}_{=P_{atm}=0, \text{rel}} = P_3 + \rho g (z_3 - z_4) \quad (24)$$

Igualando las dos últimas expresiones,

$$-\rho g (z_3 - z_4) = -\rho g z_3 + \rho \frac{v_2^2}{2} \quad (25)$$

Y se obtiene:

$$v_2 \text{ (de 3 a 4)} = \sqrt{2gz_4} \text{ donde } z_4 \text{ es constante desde } z_3 \rightarrow z_4 \quad (26)$$

donde se observa que no es función del tiempo y es una velocidad constante, ya que la altura  $z_4$  permanecerá constante en el vaciado del depósito desde la altura  $z_3$  hasta alcanzar la altura  $z_4$ . El tiempo de vaciado correspondiente a esta segunda etapa puede estimarse mediante la ecuación de continuidad:



$$Q_{3-4} = v_2 S_2$$

$$\frac{V_{3-4}}{t_{3-4}} = \sqrt{2gz_4} \frac{\pi}{4} d_2^2 \quad (27)$$

El volumen desalojado es:

$$V_{3-4} = \frac{\pi}{4} (D_3^4 - d_1^2) (z_3 - z_4) \quad (28)$$

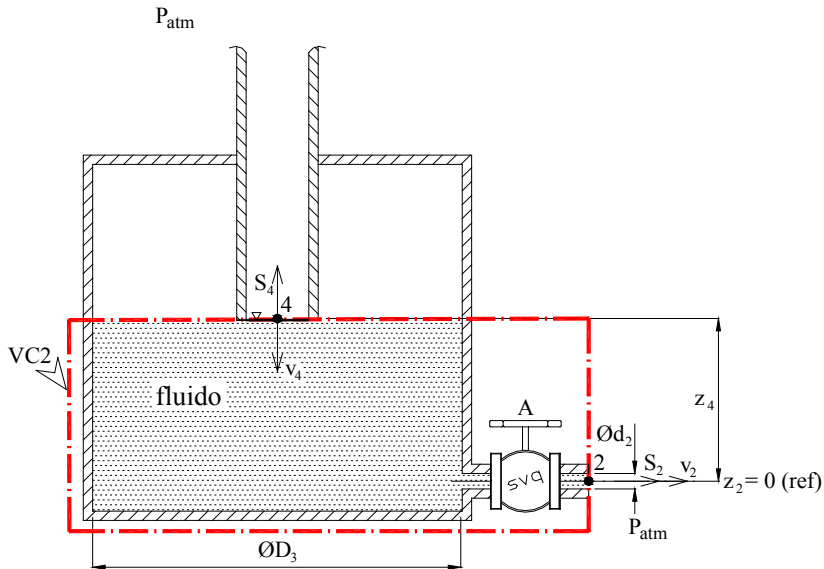
Así pues, la estimación del tiempo de vaciado correspondiente a esta segunda etapa es:

$$t_{3-4} = \frac{(D_3^4 - d_1^2) (z_3 - z_4)}{\sqrt{2gz_4} d_2^2} \quad (29)$$

### Etapa 3. Velocidad en el orificio debido al vaciado del depósito desde $z_4$ hasta $z_2$

El planteamiento es el mismo que el que se ha desarrollado en la etapa 1, pero ahora en el volumen de control 2 (v. figura 4). Por tanto, la velocidad en el orificio debido al vaciado en el depósito desde la altura final de la tubería, superficie libre en el punto 4  $z_4$ , hasta el final, punto 2  $z_2$  (v. figura 4), será:

Figura 4.  
Detalle del vaciado  
de la tercera etapa



Tiempo empleado:





$$t_2 = t_4 + \frac{2 \left[ \left( \frac{D_3}{d_2} \right)^4 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2g}} \sqrt{(z_4 - z_2)} \quad (30)$$

Velocidad:  $v_2$  (de 4 a 2) =  $\frac{\sqrt{-2gz_4}}{\sqrt{\left( \frac{D_3}{d_2} \right)^4 - 1}}$  donde  $z_4 = f(t_4)$  (31)

Y la velocidad en función del tiempo:

$$v_2$$
 (de 4 a 2) =  $\frac{g}{\left[ \left( \frac{D_3}{d_2} \right)^4 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{D_3}{d_2} \right)^2 t_4$  donde  $z_4 = f(t_4)$  (32)

**Represente gráficamente la velocidad de vaciado.**

Para representar la velocidad de vaciado por el orificio en el punto 2, se deben tomar algunos valores iniciales como:

- $d_1 = 300 \text{ mm} = 0,3 \text{ m}$
  - $d_2 = 50 \text{ mm} = 0,05 \text{ m}$
  - $D_3 = 1000 \text{ mm} = 1 \text{ m}$
  - $z_1 = 2 \text{ m}$  (altura inicial)
  - $z_3 = 1 \text{ m}$
  - $z_4 = 0,5 \text{ m}$
- (33)

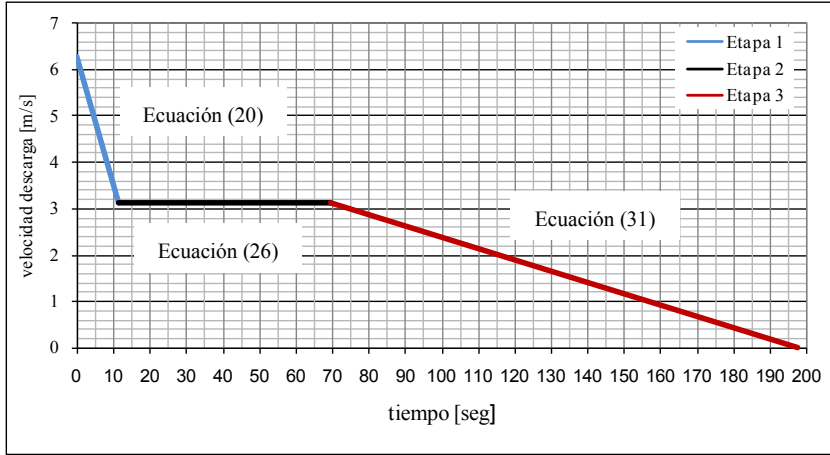
y se obtiene:

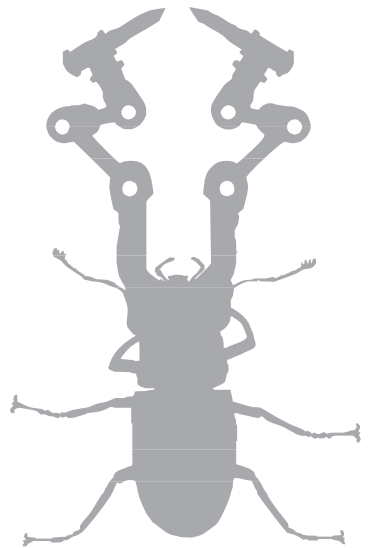
- *Etapa 1.* Tiempo de descarga de la tubería (desde el punto 1 hasta el 4) [ecuación (20)]:  $t_{etapa 1} = 11,5 \text{ s}$
- *Etapa 2.* Tiempo de descarga del depósito a la altura de la superficie libre  $z_4$  constante (desde el punto 3 hasta el 4) [ecuación (26)]:  $t_{etapa 2} = 58,1 \text{ s}$
- *Etapa 3.* Tiempo descarga del depósito (desde el punto 4 hasta el 2) [ecuación (31)]:  $t_{etapa 3} = 127,7 \text{ s}$
- *Tiempo total:*  $t_{total} = 197,3 \text{ s}$

El gráfico de la velocidad de descarga en función del tiempo se muestra en la figura 5.



Figura 5.  
Velocidad de  
vaciado vs.  
tiempo para  
las tres etapas





→ 11



## Fuente de agua de Herón de Alejandría

En la figura 1, se presenta el esquema de la fuente de agua de Herón de Alejandría, formada por tres depósitos. En un primer instante, no sale agua por la fuente de agua y la situación de las superficies de agua en los depósitos es la que se presenta. A partir de ese momento, el agua fluye desde el depósito superior por la tubería A hasta entrar por la parte inferior del depósito de la derecha (v. figura 1). La cámara de aire del depósito de la derecha está conectada a la cámara de aire del depósito de la izquierda mediante la tubería C. Finalmente, la tubería B sale del fondo del depósito de la izquierda y conduce el agua hasta la parte exterior del depósito superior formando la fuente de agua.

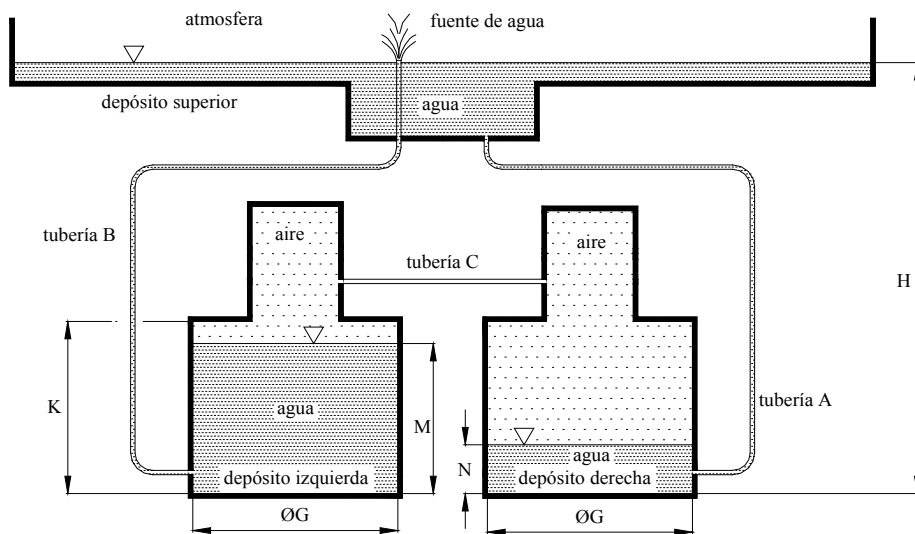


Figura 1. Esquema de los depósitos y la fuente de agua (no a escala)



Se pide:

1. Calcular la velocidad del fluido en la tubería.
2. Determinar la expresión del tiempo en que la fuente de agua está en funcionamiento
3. Determinar cuánto tiempo permanecerá en funcionamiento la fuente de agua tomando los datos de la tabla 1.

Hipótesis:

No considerar las pérdidas secundarias en codos, etc.

Datos:

Factor de fricción:	$f = 0,02$
Longitud de A:	$L_A = 5 \text{ m}$
Longitud de B:	$L_B = 5 \text{ m}$
Diámetros de las tuberías A y B:	$D = 20 \text{ mm}$
Diámetros de la base de los depósitos:	$G = 1 \text{ m}$
Altura de los depósitos:	$K = 1,5 \text{ m}$
Altura de la superficie del depósito de la izquierda:	$M = 1,2 \text{ m}$
Altura de la superficie del depósito de la derecha:	$N = 0,2 \text{ m}$
Altura total:	$H = 4 \text{ m}$
Densidad del agua:	$\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$

### Estrategia para resolver el problema

Se sabe que Herón de Alejandría es considerado uno de los mayores científicos e inventores de la Antigüedad (un gran tecnólogo). Le sugerimos ojear alguna monografía sobre sus alucinantes inventos.

Se sabe que la fuente de Herón fue creada con una finalidad didáctica. Según algunos historiadores, Herón enseñó física y matemática en la Universidad de Alejandría, y utilizó algunos de sus inventos como una manera de complementar la enseñanza.

### Comprender el problema

Lea detenidamente todo el problema, incluidas todas las preguntas, y exhiba su capacidad de análisis.

Se sabe que la capacidad de análisis es una de las cualidades que más identifica a los ingenieros y acaso una de las que más utilizan en su vida profesional.

Póngase a prueba: ¿Cómo funciona la fuente de Herón? Le sugerimos que haga tantos dibujos como estime oportuno. No condicione su creatividad e imaginación.



¿Ha identificado los parámetros que definen el entorno físico y la naturaleza de los fluidos implicados? ¿Puede explicar qué tipo de proceso termodinámico seguirá el aire acumulado en el interior de los depósitos, cuando haya transferencia de agua a través de las conducciones de entrada y salida?

Se sabe que la gran razón por la cual los estudiantes encuentran ciertas dificultades<sup>1</sup> en la resolución de los problemas es el desacierto en transformar el soporte tecnológico del problema (la máquina o el proceso real) en un modelo virtual simple que ponga de relieve la comprensión exacta de los principios físicos implicados y margine aspectos secundarios implícitos del soporte material.

¿Se ha percatado de que la fuente está constituida por tres sencillos depósitos? ¿y que las únicas diferencias significativas entre los depósitos citados son sus condiciones de contorno?

Se sabe que, en la cultura popular, la expresión “divide y vencerás” hace referencia a un refrán que sugiere, para resolver un problema difícil, dividirlo en partes más simples tantas veces como sea necesario, hasta que la resolución de las partes resulte obvia. La solución del problema principal se construye, pues, a partir de las soluciones encontradas.

### **Trazar un plan para resolverlo**

De acuerdo con los razonamientos anteriores, ¿es este un problema similar a otros que ya conocemos? Le invitamos a revisar el diagrama de flujo implementado para resolver problemas relacionados con el llenado/vaciado de los depósitos.

Recuerde que, para plantear balances integrales (de masa y energía), un requisito previo es definir un volumen de control. Intente ahora esquematizar los balances integrales (de masa y energía) para los tres depósitos. Represente cada balance con un recuadro.

Inserte líneas, junto al recuadro, que representen las variables (las supuestamente conocidas o “datos” y las que son incógnitas). Es aconsejable añadir pequeños comentarios y leyendas sobre cómo resolver cada término de las ecuaciones de continuidad e incluir una referencia a las hipótesis utilizadas.

Inspeccione si existe alguna variable compartida entre ambos balances, y reflexione sobre cada una de las condiciones de contorno y cómo implementarla sobre el diagrama. Proceda a unir todas las líneas que representan las mismas variables.

¿Ve factible ahora que la resolución conjunta de los balances integrales le permite encontrar las ecuaciones necesarias para explicitar las variables incógnitas en función de los datos? Si la respuesta es afirmativa, intente completar y ultimar el diagrama de flujo con suficientes leyendas y símbolos. En caso negativo, vuelva a repasar la secuencia anterior. Examine si hay algún desacierto y/o ha cometido involuntariamente algún error.

---

<sup>1</sup> Consideramos oportuno señalar que algunas dificultades están en concomitancia con una falta de dominio (conocimiento y madurez cognitiva) de los conceptos propedéuticos y la utilización de unidades del SI.



### Ejecutar el plan

Recuerde que, antes de hacer cualquier cosa, hay que pensar: ¿Qué se consigue con ello?

Se aconseja acompañar los desarrollos y los cálculos con una explicación que indique claramente lo que se pretende y lo que ha hallado.

### Comprobar los resultados

Vuelva a leer el enunciado y compruebe si lo que se pedía es lo que ha averiguado.

Supóngase que ha terminado todos los cálculos y ha obtenido unos resultados. ¿Puede corroborar y/o justificar adecuadamente las hipótesis utilizadas?

Para consolidar todo lo realizado en este problema, le invitamos a que haga una lista exhaustiva de todos los conceptos utilizados. ¿Puede representar con un gráfico la evolución temporal del nivel de la superficie libre de agua para cada uno de los depósitos? ¿Son razonables? ¿En qué se podría mejorar el diagrama de flujo implementado?

### Estudio

#### Breve descripción

En esta peculiar configuración, la disposición de los depósitos y su geometría presentan un sistema que permite un período característico de funcionamiento de la fuente de agua.

#### Análisis

<b>Análisis INTEGRAL</b>	
<b>Volumen de control (VC)</b>	
<b>Indeformable</b>	<b>Inercial (fijo)</b>
Deformable	No inercial (móvil)





## Hipótesis que se plantean

PROPIEDADES del fluido			
Densidad	Constante	Incompresible	Homogéneo
	Variable: Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		Gas ideal	Adiabático
			Isotérmico
COMPORTAMIENTO del fluido			
En reposo	Equilibrio	Absoluto	
		Relativo	
En movimiento	Régimen	Estacionario	
		Transitorio	
PRESTACIONES del fluido			
- Velocidad máxima en la fuente y tiempo de funcionamiento			
Otras hipótesis de TRABAJO			
- La variación de la temperatura es despreciable. - Las propiedades físicas y los perfiles de velocidades son constantes y uniformes en las secciones de control. - Las variaciones de densidad del aire encerrado en ambos depósitos y en la tubería C son despreciables. - No se consideran las pérdidas secundarias en codos, etc. - No hay transferencia de calor.			

## Principios básicos y leyes fundamentales

- Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Principio de conservación de la energía. Ecuación de Bernoulli

## Resolución

### Velocidad del fluido en la tubería

En primer lugar, se puede examinar cuál es el potencial máximo de la fuente, así como su velocidad máxima, justo antes de empezar a funcionar. El principio básico para resolver el problema es el de *conservación de la energía* para un volumen de control **indefinible e inercial**:

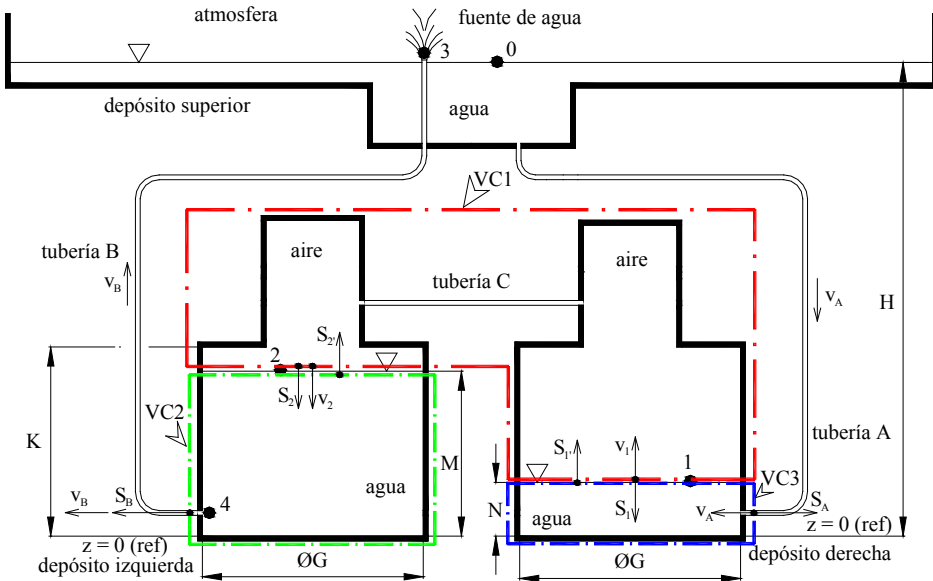
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho e dV + \int_{SC} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} \right) (\vec{v} \cdot \hat{n} dA) = \dot{Q} - \dot{W}_e - \dot{W}_i \quad (1)$$

Partiendo de las hipótesis propuestas, se llega a la conocida ecuación de *Bernoulli generalizada*:

$$H_1 = H_2 + \Delta H_{1-2} \quad (2)$$



Figura 2.  
Detalle de los volúmenes de control y puntos de energía



Aplicándola entre los puntos 0 y 1 representados en la figura 2:

$$\underbrace{\frac{P_0}{\rho g}}_{=0, \text{rel}} + \underbrace{z_0}_{=H} + \underbrace{\frac{v_0^2}{2g}}_{=0, v_0^2 \approx 0} = \underbrace{\frac{P_1}{\rho g}}_{=N} + \underbrace{z_1}_{=N} + \underbrace{\frac{v_1^2}{2g}}_{=0, v_1^2 \approx 0} + f_A \frac{L_A}{D_A} \frac{v_A^2}{2g} \quad (3)$$

$$H = \frac{P_1}{\rho g} + N + f_A \frac{L_A}{D_A} \frac{v_A^2}{2g}$$

Aplicándola ahora entre los puntos 2 y 3 representados en la figura 2:

$$\frac{P_2}{\rho g} + \underbrace{z_2}_{=M} + \underbrace{\frac{v_2^2}{2g}}_{=0, v_2^2 \approx 0} = \underbrace{\frac{P_3}{\rho g}}_{=0, \text{rel}} + \underbrace{z_3}_{=H} + \frac{v_3^2}{2g} + f_B \frac{L_B}{D_B} \frac{v_B^2}{2g} \quad (4)$$

$$H = \frac{P_2}{\rho g} + M - \frac{v_3^2}{2g} - f_B \frac{L_B}{D_B} \frac{v_B^2}{2g}$$

E igualando las dos expresiones (3) y (4),

$$\frac{P_1}{\rho g} + N + f_A \frac{L_A}{D_A} \frac{v_A^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + M - \frac{v_3^2}{2g} - f_B \frac{L_B}{D_B} \frac{v_B^2}{2g} \quad (5)$$

Teniendo presente la hipótesis de que la variación de densidad del aire encerrado en ambos depósitos y en la tubería C es despreciable, así como los datos del enunciado,



$$\text{Hipótesis} \Rightarrow \frac{P_1}{\rho g} \cong \frac{P_2}{\rho g}$$

$$\text{Factor de fricción.} \Rightarrow f_A = f_B = f \quad (6)$$

$$\text{Diámetro tuberías} \Rightarrow D_A = D_B = D \rightarrow \text{Por continuidad} \Rightarrow v_A = v_B = v_3$$

Por tanto,

$$M - N = f \frac{L_A}{D} \frac{v_3^2}{2g} + \frac{v_3^2}{2g} + f \frac{L_B}{D} \frac{v_3^2}{2g} \quad (7)$$

$$M - N = \frac{fv_3^2}{2gD} (L_A + 1 + L_B)$$

donde

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2gD(M - N)}{f(L_A + L_B + 1)}} \quad (8)$$

y, tomando los datos de la tabla 1, se obtiene:

$$v_{\max} \cong 1,34 \text{ m/s} \quad (9)$$

La fuente dejará de funcionar cuando la altura de las superficies libres de ambos depósitos se igualen. Es decir,

$$z_{\text{final}} = N + \frac{M - N}{2} = 0,7 \text{ m} \quad (10)$$

**Determine la expresión del tiempo en que la fuente de agua está en funcionamiento.**

Se aplica de nuevo la ecuación de Bernoulli entre los puntos 0 y 1:

$$H = \frac{P_1}{\rho g} + z_1 + f \frac{L_A}{D} \frac{v_A^2}{2g} \quad (11)$$

Aplicándola ahora entre los puntos 2 y 3 representados en la figura 2:

$$H = \frac{P_2}{\rho g} + z_2 - \frac{v_3^2}{2g} - f \frac{L_B}{D} \frac{v_3^2}{2g} \quad (12)$$

Derivando la ecuación (11) con respecto al tiempo,

$$0 = \underbrace{\frac{1}{\rho g} \frac{dP_1}{dt}}_{=0, \text{Hip.}} + \frac{dz_1}{dt} + f \frac{L_A v_A}{Dg} \frac{dv_A}{dt} \rightarrow \frac{dz_1}{dt} = -f \frac{L_A v_A}{Dg} \frac{dv_A}{dt} \quad (13)$$

Derivando ahora la ecuación (12) con respecto al tiempo,



$$0 = \underbrace{\frac{1}{\rho g} \frac{dP_2}{dt}}_{=0, \text{Hip.}} + \frac{dz_2}{dt} + \frac{v_3}{g} \frac{dv_3}{dt} + f \frac{L_B v_3}{Dg} \frac{dv_3}{dt} \rightarrow \frac{dz_2}{dt} = -\frac{v_3}{g} \frac{dv_3}{dt} - f \frac{L_B v_3}{Dg} \frac{dv_3}{dt} \quad (14)$$

Para encontrar la relación de alturas de los depósitos en el tiempo, se debe llevar a cabo un análisis integral en el volumen de control VC1 **inercial e indeformable**, como el que se presenta en la figura 2. Aplicando el *principio de conservación de la masa* en análisis integral, se obtiene:

$$\underbrace{\int_{VC} \rho dV}_{=0, \text{Hip.}} + \int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0 \quad (15)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} V}_{=0, \text{Hip.}} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t} \rho}_{=0, \text{indeformable}} + \underbrace{\rho}_{\text{Hip.}} \int_{SC} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0$$

de donde las superficies de control son:

$$\int_{SC} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \int_{SC1} (-v_1 dS_1) + \int_{SC2} (v_2 dS_2) = 0$$

$$\underbrace{v_1}_{\text{Hip.}} \int_{SC1} (-dS_1) + \underbrace{v_2}_{\text{Hip.}} \int_{SC2} (dS_2) = 0 \quad (16)$$

$$-v_1 S_1 + v_2 S_2 = 0$$

Y, como los dos depósitos tienen la misma área,  $S_1 = S_2 \Rightarrow v_1 = v_2$  (17)

La velocidad de ascenso de la superficie libre del depósito de la derecha y la velocidad de descenso de la superficie libre del depósito de la izquierda son:

$$v_1 = +\frac{dz_1}{dt} \quad \text{y} \quad v_2 = -\frac{dz_2}{dt} \quad (18)$$

y se obtiene:

$$\frac{dz_1}{dt} = -\frac{dz_2}{dt} \quad (19)$$

Sustituyendo la ecuación (14) en la ecuación (19), se obtiene:

$$-\frac{dz_2}{dt} = \frac{v_3}{g} \frac{dv_3}{dt} + f \frac{L_B v_3}{Dg} \frac{dv_3}{dt} = \frac{dz_1}{dt} \quad (20)$$

Sumando ahora la ecuación (20) y la ecuación (13),

$$2 \frac{dz_1}{dt} = -\frac{v_3}{g} \frac{dv_3}{dt} - f \frac{L_B v_3}{Dg} \frac{dv_3}{dt} - f \frac{L_A v_A}{Dg} \frac{dv_A}{dt} \quad (21)$$

$$2 \frac{dz_1}{dt} = -\left(1 + f \frac{L_B}{D}\right) \frac{v_3}{g} \frac{dv_3}{dt} - f \frac{L_A v_A}{Dg} \frac{dv_A}{dt}$$



De nuevo, se debe llevar a cabo un análisis integral en el volumen de control VC2 y VC3 **inercial e indeformable**, como los que se presentan en la figura 2. Aplicando el *principio de conservación de la masa* en análisis integral, se obtiene (con el mismo procedimiento anterior) en el volumen de control VC2:

$$\text{VC2: } v_B S_B = v_2 S_2 \rightarrow v_3 \equiv v_B = -\frac{dz_2}{dt} \frac{S_2}{S_B} \quad (22)$$

que, mediante la ecuación (19), queda:

$$\text{VC2: } v_3 = \frac{dz_1}{dt} \frac{S_2}{S_B} \quad (23)$$

En el volumen de control VC3:

$$\text{VC3: } v_A S_A = v_1 S_1 \rightarrow v_A = \frac{dz_1}{dt} \frac{S_1}{S_A} \quad (24)$$

Sustituyendo las ecuaciones (23) y (24) en la ecuación (21), se obtiene:

$$\begin{aligned} 2 \frac{dz_1}{dt} &= -\left(1 + f \frac{L_B}{D}\right) \frac{1}{g} \frac{dz_1}{dt} \frac{S_2}{S_B} \frac{dv_3}{dt} - f \frac{L_A}{Dg} \frac{dz_1}{dt} \frac{S_1}{S_A} \frac{dv_A}{dt} \\ 2 &= -\left(1 + f \frac{L_B}{D}\right) \frac{1}{g} \frac{S_2}{S_B} \frac{dv_3}{dt} - f \frac{L_A}{Dg} \frac{S_1}{S_A} \frac{dv_A}{dt} \end{aligned} \quad (25)$$

Como es conocido,

$$S_1 = S_2 \equiv S_G \quad S_A = S_B \equiv S_t \quad v_A = v_3 \equiv v \quad (26)$$

$$\begin{aligned} 2 &= \left[ -\left(1 + f \frac{L_B}{D}\right) \frac{1}{g} \frac{S_G}{S_t} - f \frac{L_A}{Dg} \frac{S_G}{S_t} \right] \frac{dv}{dt} \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{2g}{\left[1 + \frac{f}{D}(L_B + L_A)\right] \frac{S_G}{S_t}} \equiv K^* \end{aligned} \quad (27)$$

donde:

$$K^* = -\frac{2g}{\left[1 + \frac{f}{D}(L_B + L_A)\right] \frac{S_G}{S_t}} \quad (28)$$

Finalmente, integrando,

$$\int_{v_{inicial}}^{v_{final}} dv = \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} \frac{2g}{K^*} dt \rightarrow v_{final} - v_{inicial} = K^* (t_{final} - t_{inicial}) \quad (29)$$



El tiempo será:

$$t_{final} = t_{inicial} + \frac{v_{final} - v_{inicial}}{K^*} \quad (30)$$

**Determine cuánto tiempo permanecerá en funcionamiento la fuente de agua tomando los datos de la tabla 1.**

Tomando los valores de la tabla 1 y teniendo presente la figura 1, a partir de la ecuación (28), se obtiene:

$$K^* = -0,0007135 \text{ m/s}^2 \quad (31)$$

Y para

$$\begin{aligned} t_{inicial} = 0 &\rightarrow v_{inicial} = v_{max} = 1,34 \text{ m/s} \\ t_{final} = t &\rightarrow v_{final} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

donde  $v_{max}$  ya fue evaluada y dio como resultado la ecuación (8). Sustituyendo, el tiempo de funcionamiento de la fuente será:

$$t = 1872 \text{ s} = 31,2 \text{ min} = 0,52 \text{ h} \quad (33)$$



→ 12





## Flujo a través de una plataforma giratoria

En la figura 1, se presenta el esquema de una plataforma circular donde se ha instalado un conducto de sección variable. El conjunto se hace girar a una velocidad de rotación constante. Por el conducto de entrada cuyo eje coincide con el eje de giro, se hace entrar un caudal de agua a presión. Las dimensiones principales del conjunto se muestran en el esquema de la figura 1, donde la sección en el punto 1 del conducto de sección variable es el doble de la sección en el punto 2.

Tomando las hipótesis apropiadas y los datos de la tabla 1, se pide:

- 1- Calcular el caudal que debe circular para que la diferencia de presiones medida por dos transductores de presión situados en los puntos 1 y 2 sea nula.
- 2- Calcular el trabajo necesario para mantener la plataforma girando a una velocidad de rotación constante.

Datos

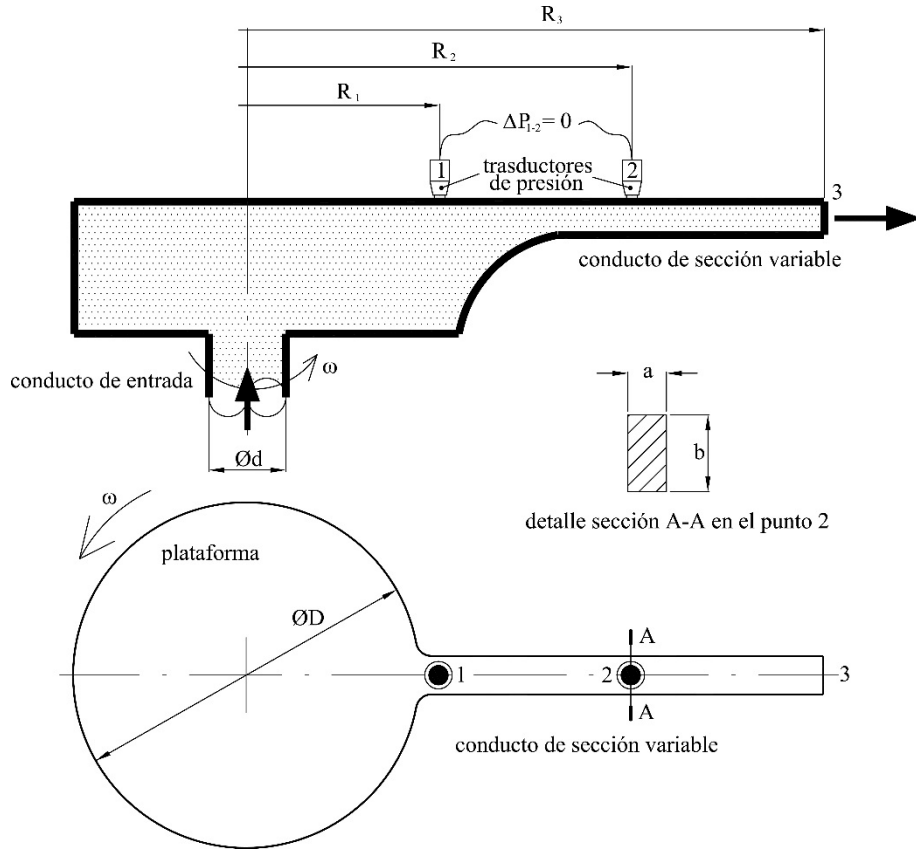
$R_1 = 250 \text{ mm}$	$R_2 = 500 \text{ mm}$	$R_3 = 750 \text{ mm}$
$D = 450 \text{ mm}$	$d = 10 \text{ cm}$	$a = 50 \text{ mm}$
$\omega = 20 \text{ rpm}$	$\rho = 1.000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$b = 100 \text{ mm}$
$S_2 / S_1 = 0,5$		

Hipótesis:

- No considerar las pérdidas de carga.



Figura 1.  
Esquema de la plataforma giratoria (no a escala)



## Estrategia para resolver el problema

### Comprender el problema

Antes de empezar con este apartado, le aconsejamos que lea detenidamente el enunciado. Hágalo muy despacio, intentando interpretar todo el enunciado, incluidas las preguntas. Utilice los dibujos y los esquemas que estime necesarios.

¿Ha identificado los parámetros que definen el entorno físico (plataforma recipiente) y la naturaleza del fluido implicado?

Le invitamos a que dedique un cierto tiempo a pensar. Analice las ventajas o las desventajas que comportaría utilizar distintos volúmenes de control: unos fijos (inerciales) y otros móviles (no inerciales). Recuerde que, si utiliza un volumen de control inercial, visualiza el movimiento del fluido desde el exterior del volumen de control y, al contrario, si se utiliza un volumen de control no inercial, usted se mueve con el volumen de control.

Definitivamente, ¿cuál es su opción? ¿Puede sintetizar sus razonamientos?



## Trazar un plan para resolverlo

¿Considera que este problema es análogo al proceso de llenado/vaciado de un depósito? Si la respuesta es afirmativa, significa que usted tiene muy claro que debe plantear los balances integrales de masa y energía.

Queremos llamar su atención sobre el hecho diferencial de que el dispositivo gira sobre su propio eje y que, para plantear balances integrales (de masa y energía), un requisito previo es definir un volumen de control.

Antes de continuar, le invitamos a consultar sus apuntes o libros de texto con relación al principio de conservación de la energía sobre un volumen de control no inercial. No se limite a la simple actividad rutinaria de buscar y aplicar mecánicamente la ecuación requerida. Dedíquese un poco más de tiempo. Intente profundizar en los conceptos que están implícitos en este principio.

Presuponemos que ahora usted está en condiciones de hacer una primera versión del diagrama de flujo, que le debe permitir esbozar el proceso de resolución de este problema. En caso contrario, vuelva a repasar los conceptos, y le recomendamos que solicite a su profesor una explicación adicional.

## Ejecutar el plan

Recuerde que, antes de hacer cualquier cosa, hay que pensar: ¿Qué se consigue con ello?

Se aconseja acompañar los desarrollos y los cálculos con una explicación que indique claramente lo que se pretende y lo que ha hallado.

## Comprobar los resultados

Vuelva a leer el enunciado y compruebe que lo que se pedía es lo que ha averiguado.

Supóngase que ha terminado todos los cálculos y ha obtenido unos resultados. ¿Puede corroborar y/o justificar adecuadamente las hipótesis utilizadas?

Para consolidar todo lo realizado en este problema, le invitamos a que haga una lista exhaustiva de conceptos utilizados y de los resultados obtenidos. ¿Son razonables? ¿En qué se podría mejorar el diagrama de flujo implementado?

## Estudio

### Breve descripción

El conducto de sección variable gira a velocidad constante, de forma que se produce una distribución de presiones radial que incluye la energía centrífuga.



### Análisis

<b>Análisis INTEGRAL</b>	
<b>Volumen de control (VC)</b>	
<b>Indeformable</b>	Inercial (fijo)
Deformable	<b>No inercial (móvil)</b>

### Hipótesis que se plantean

<b>PROPIEDADES del fluido</b>			
<b>Densidad</b>	<b>Constante</b>	<b>Incompresible</b>	<b>Homogéneo</b>
	Variable: Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		Gas ideal	Adiabático Isotérmico
<b>COMPORTAMIENTO del fluido</b>			
En reposo	Equilibrio	Absoluto Relativo	
<b>En movimiento</b>	<b>Régimen</b>	<b>Estacionario</b> Transitorio	
<b>PRESTACIONES del fluido</b>			
- Caudal para una determinada presión y energía de rotación			
<b>Otras hipótesis de TRABAJO</b>			
- La variación de la temperatura es despreciable. - Las propiedades físicas y los perfiles de velocidades son constantes y uniformes en las secciones de control. - Los sólidos son indeformables. - Se considera despreciable cualquier tipo de pérdida de energía. - No existe transferencia de calor. - El efecto de la gravedad en el fluido es despreciable.			

### Principios básicos y leyes fundamentales

- Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Principio de conservación de la energía

### Resolución

**Calcule el caudal que debe circular para que la diferencia de presiones medida por dos transductores de presión situados en los puntos 1 y 2 sea nula.**



Para determinar el caudal  $Q$  que circulará por la plataforma circular, se realizará un análisis integral mediante volúmenes de control. El volumen de control se tomará **indefor-mable** y **no inercial**, y situará las superficies de control en los puntos 1 y 2, donde están situados los transductores. De esta forma, la sección de control 1 se sitúa en la plataforma de radio  $R_1$ . La sección de control 2 se sitúa en el conducto de salida de radio  $R_2$ .

El principio básico para resolver el problema es el de *conservación de la energía* de forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho e dV + \int_{SC} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} \right) (\vec{v} \cdot \hat{n} dA) = \dot{Q} - \dot{W}_e - \dot{W}_t \quad (1)$$

Partiendo de las hipótesis propuestas, donde en el volumen de control escogido no hay trabajo de eje,

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho e dV}_{=0, \text{Hip.}} + \int_{SC} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} \right) (\vec{v} \cdot \hat{n} dA) = \underbrace{\dot{Q}}_{=0, \text{Hip.}} - \underbrace{\dot{W}_e}_{=0, \text{no eje}} - \underbrace{\dot{W}_t}_{=0, \text{Hip.}} \quad (2)$$

y queda:

$$\int_{SC} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} \right) (\vec{v} \cdot \hat{n} dA) = 0 \quad (3)$$

Teniendo presente que el volumen de control es no inercial, la energía por unidad de masa  $e$  está formada por:

$$e = \underbrace{\tilde{u}}_{\text{energía interna}} + \underbrace{\frac{v^2}{2}}_{\text{energía cinética}} + \underbrace{gz}_{\text{energía potencial}} - \underbrace{\frac{\omega^2 r^2}{2}}_{\text{energía centrífuga}} \quad (4)$$

Así, aplicando la ecuación (3) en las dos superficies de control,

$$\begin{aligned} & \int_{SC_1} \rho \left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 - \frac{\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} \right) (\vec{v}_1 \cdot \hat{n} dA_1) + \\ & + \int_{SC_2} \rho \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 - \frac{\omega^2 r_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \right) (\vec{v}_2 \cdot \hat{n} dA_2) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

donde todos los términos de la energía y la densidad son constantes y uniformes en las superficies de control según las hipótesis propuestas, de modo que

$$\begin{aligned} & \underbrace{\rho \left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 - \frac{\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} \right)}_{\text{Hip.}} \int_{SC_1} \left( \frac{\vec{v}_1}{v_1}, 0, 0 \right) \cdot (-dA_1, 0, 0) + \\ & + \underbrace{\rho \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 - \frac{\omega^2 r_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \right)}_{\text{Hip.}} \int_{SC_2} \left( \frac{\vec{v}_2}{v_2}, 0, 0 \right) \cdot (dA_2, 0, 0) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Tomando  $\vec{v}_i \equiv v_i$ ,

$$\rho \left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 - \frac{\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} \right) \int_{SC_1} -v_1 dA_1 + \rho \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 - \frac{\omega^2 r_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \right) \int_{SC_2} v_2 dA_2 = 0 \quad (7)$$



$$\begin{aligned} & \rho \left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 - \frac{\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} \right) \left( \frac{v_1}{\underbrace{\quad}_{\text{Hip.}}} \right) \int_{SC_1} -dA_1 + \\ & + \rho \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 - \frac{\omega^2 r_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \right) \left( \frac{v_2}{\underbrace{\quad}_{\text{Hip.}}} \right) \int_{SC_2} dA_2 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Finalmente,

$$\rho \left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 - \frac{\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} \right) (-v_1 A_1) + \rho \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 - \frac{\omega^2 r_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \right) (v_2 A_2) = 0 \quad (9)$$

Aplicando ahora el principio de conservación de *la masa* bajo las mismas hipótesis propuestas:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV}_{=0, \text{Hip.}} + \int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot \hat{n} dA) = 0 \quad (10)$$

$$\int_{SC_1} \rho (\vec{v}_1 \cdot \hat{n} dA_1) + \int_{SC_2} \rho (\vec{v}_2 \cdot \hat{n} dA_2) = 0 \quad (11)$$

$$\underbrace{\rho v_1}_{\text{Hip.}} \int_{SC_1} (-dA_1) + \underbrace{\rho v_2}_{\text{Hip.}} \int_{SC_2} (dA_2) = 0 \quad (12)$$

$$-\underbrace{\rho v_1 A_1}_{\dot{m}_1} + \underbrace{\rho v_2 A_2}_{\dot{m}_2} = 0 \Rightarrow \dot{m}_1 = \dot{m}_2 \quad (13)$$

Aplicando la ecuación (13) en la ecuación (9),

$$\left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 - \frac{\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} \right) (-\dot{m}_1) + \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 - \frac{\omega^2 r_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \right) (\dot{m}_2) = 0 \quad (14)$$

$$\left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 - \frac{\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} \right) = \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 - \frac{\omega^2 r_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \right) \quad (15)$$

De nuevo, tomando las hipótesis propuestas:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} &= \tilde{u}_2 - \tilde{u}_1 \cong 0 \quad (\text{Hip.}) \\ \Delta gz &= gz_2 - gz_1 \cong 0 \quad (\text{Hip.}) \end{aligned} \quad (16)$$

y se obtiene:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{\omega^2 (r_1^2 - r_2^2)}{2} = 0 \quad (17)$$

Tomando ahora la condición del enunciado del problema:

$$\Delta p_{2-1} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0 \quad \text{para } r_1 = R_1 \text{ y } r_2 = R_2 \quad (18)$$



y se obtiene:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{\omega^2 (R_1^2 - R_2^2)}{2} = 0 \quad (19)$$

donde las velocidades son incógnitas. Sin embargo, se puede obtener una relación entre las mismas mediante *continuidad*. Retomando la ecuación (13),

$$Q = v_1 A_1 = v_2 A_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1} = 0,5 \quad (\text{relación conocida del enunciado}) \quad (20)$$

Sustituyendo la ecuación (20) en la ecuación (19),

$$\frac{v_2^2 - \left(\frac{1}{4}v_2^2\right)}{2} + \frac{\omega^2 (R_1^2 - R_2^2)}{2} = 0 \quad (21)$$

y, tras varias operaciones matemáticas, se obtiene:

$$v_2 = \sqrt{\frac{4\omega^2 (R_2^2 - R_1^2)}{3}} \quad (22)$$

de forma que el caudal  $Q$  que debe circular para que la diferencia de presiones medida por dos transductores de presión situados en los puntos 1 y 2 sea nula es:

$$Q = v_2 A_2 = A_2 \sqrt{\frac{4\omega^2 (R_2^2 - R_1^2)}{3}} \quad (23)$$

Sustituyendo los valores del enunciado,

$$\begin{aligned} A_2 &= a \cdot b = (50 \cdot 10^{-3} \text{ m})(100 \cdot 10^{-3} \text{ m}) = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \\ \omega &= 20 \text{ rpm} \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \cong 2,1 \text{ rad/s} \\ Q &= (5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2) \sqrt{\frac{4(2,1 \text{ rad/s})^2 [(0,5 \text{ m})^2 - (0,25 \text{ m})^2]}{3}} \cong 5,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 5,25 \text{ l/s} \end{aligned} \quad (24)$$

### Calcula el trabajo necesario para mantener la plataforma girando a una velocidad de rotación constante.

Para determinar el trabajo  $W$  necesario para mantener la plataforma girando a una velocidad de rotación constante, se empleará de nuevo un análisis integral mediante volúmenes de control. El volumen de control se toma de nuevo **indeformable** y **no inercial**, y sitúa las superficies de control en los puntos 0 (conducto de entrada) y 3 (salida del conducto de sección variable). De esta forma, la sección de control 0 se sitúa en el conducto de entrada a la plataforma de diámetro  $d$ . La sección de control 3 se sitúa a la salida del conducto de sección variable de radio  $R_3$ .



El principio básico para resolver este apartado será, de nuevo, el de *conservación de la energía* en forma integral (ecuación (1)). Tomando las mismas hipótesis propuestas, llegaremos de nuevo a la ecuación (15) en la forma:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} - \frac{\omega^2 r_0^2}{2} = \frac{p_3}{\rho} + \frac{v_3^2}{2} - \frac{\omega^2 r_3^2}{2} \quad (25)$$

ya que  $\Delta gz = gz_3 - gz_0 \cong 0$  (Hip.)

Trabajando con presiones relativas y los radios correspondientes,

$$p_3 = p_{atm} = 0 \text{ (rel) donde } r_0 = 0 \text{ y } r_3 = R_3 \quad (26)$$

y se obtiene:

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{v_3^2 - v_0^2}{2} - \frac{\omega^2 R_3^2}{2} \quad (27)$$

Ahora de nuevo, con la ecuación de *continuidad*,

$$Q = v_0 A_0 = v_3 A_3 \Rightarrow \begin{cases} v_0 = \frac{Q}{A_0} \\ v_3 = \frac{Q}{A_3} \end{cases} \text{ donde } A_3 = A_2 \quad (28)$$

Sustituyendo la ecuación (28) en la ecuación (27), y tras varias operaciones matemáticas:

$$p_0 = \frac{\rho Q^2}{2} \left( \frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_0^2} \right) - \frac{\rho \omega^2 R_3^2}{2} \quad (29)$$

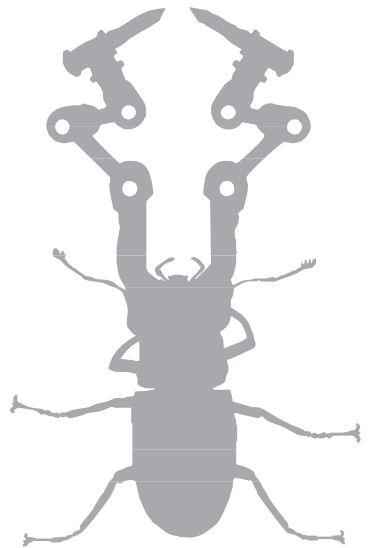
Finalmente, el trabajo  $W$  por unidad de masa será:

$$W = \frac{p_0 Q}{\dot{m}} = \frac{p_0 Q}{\rho Q} = \frac{p_0}{\rho} = \frac{Q^2}{2} \left( \frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_0^2} \right) - \frac{\omega^2 R_3^2}{2} \quad (30)$$

Por último, sustituyendo los valores del enunciado,

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (10 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 \cong 7,85 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \\ W &= \frac{(5,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s})^2}{2} \left( \frac{1}{(5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2)^2} - \frac{1}{(7,85 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2)^2} \right) - \frac{(2,1 \text{ rad/s})^2 (0,75 \text{ m})^2}{2} = \quad (31) \\ &= -0,91 \text{ J/kg} \end{aligned}$$





→ 13



## Tubería en U unida a un disco giratorio

En la tubería que se presenta en la figura 1 circula un fluido de viscosidad dinámica 100 cP y densidad  $900 \text{ kg/m}^3$ . La tubería está sujeta a un disco giratorio. Sabiendo que el caudal que circula por la tubería es de 120 l/min y que las pérdidas de carga en los codos son equivalentes al 10 % de las pérdidas de carga en los tramos rectos, se pregunta:

- Cuál es el régimen de flujo por el interior de la tubería.
- Cuál es la presión P que marcará el manómetro (v. figura 2).
- Cuál es la fuerza que realiza el fluido contra la tubería entre los límites definidos por las secciones de entrada E y de salida S cuando el conjunto gira a 150 rpm (v. figura 2).

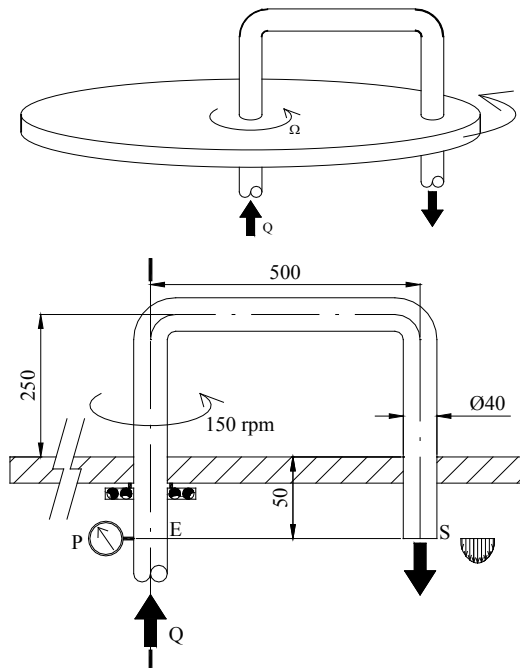


Figura 1.  
Tubería y disco giratorio

Figura 2.  
Esquema de la tubería y el disco giratorio (no a escala)



## Estrategia para resolver el problema

### Comprender el problema

Tras leer detenidamente el enunciado, le animamos a identificar los parámetros que definen el entorno físico (tubería/disco) y la naturaleza (propiedades) del fluido implicado.

Trate de indagar el movimiento del fluido por el interior de la tubería cuando el disco está parado. Haga lo propio para cuando esté girando alrededor de su eje de simetría. ¿Cómo lo visualizarían dos observadores, uno externo a posibles volúmenes de control y otro situado en su interior?

Con la ayuda de distintos dibujos, intente esquematizar el movimiento del fluido que pasa a través del dispositivo. Aproveche estos dibujos para insertar los vectores que representan las velocidades del fluido con respecto a las superficies de control correspondientes a los posibles volúmenes de control planteados.

¿Cree que haciendo un balance integral (conservación de la cantidad de movimiento y/o del momento cinético) sobre un volumen de control previamente definido puede encontrar la relación explícita entre los datos y las incógnitas? ¿Está seguro?

Recuerde: El principio de la conservación de la cantidad de movimiento requiere un conocimiento previo de la cinemática del fluido a través del dispositivo.

Recuerde: Una posible aproximación a la cinemática del movimiento de un fluido por el interior del dispositivo (en este caso: tubería en forma de U) se puede deducir de la resolución simultánea de los balances integrales de masa y energía.

Admitiendo que usted ya ha conseguido un cierto dominio en la interpretación del problema, ahora debemos empezar a trazar un plan o estrategia de resolución.

### Trazar un plan para resolverlo

Queremos llamar su atención sobre el hecho diferencial de que el dispositivo gira sobre su propio eje y que, para plantear balances integrales (de masa, energía y cantidad de movimiento), un requisito previo es definir un volumen de control.

¿Qué características tiene su volumen de control?

Antes de continuar, le invitamos a consultar sus apuntes o libros de texto con relación a la formulación específica de las ecuaciones que rigen los balances integrales cuando el volumen de control seleccionado es “no inercial”. No se limite a la simple actividad rutinaria de buscar y aplicar mecánicamente la ecuación requerida. Dedíquese un poco más de tiempo. Intente profundizar en los conceptos implícitos en estas ecuaciones. Ahora intente hacer un primer esbozo del diagrama de flujo con relación a la secuencia de pasos que debe seguir para resolver el problema.

Lo normal es que al principio no le sea fácil y que solo se logre un diagrama asimilable tras haber “jugado” con las ideas durante algún tiempo.



¿Ve viable la resolución conjunta de los tres balances integrales sobre el mismo volumen de control “no inercial”? Dedíquese un poco más de tiempo para reexaminar el diagrama a fondo. Aproveche para complementarlo con leyendas y notas aclaratorias.

### Ejecutar el plan

Recuerde que, antes de hacer cualquier cosa, hay que pensar: ¿Qué se consigue con ello?

Atención: Tenga presente que, al ejecutar el plan, hay que comprobar cada uno de los pasos, y que la ecuación del balance integral de cantidad de movimiento tiene carácter vectorial.

Le recomendamos que considere la tubería en U como la unión de tres tramos rectos. Sugerimos que utilice los dibujos que sean necesarios (p. ej., un dibujo por tramo) para que pueda insertar y visualizar al detalle los vectores correspondientes a todas las fuerzas implicadas (incluidas las ficticias o inerciales).

También se aconseja acompañar los desarrollos y los cálculos con una explicación que indique claramente lo que se pretende y lo que ha hallado (ello le facilitará revisiones futuras).

### Comprobar los resultados

Vuelva a leer el enunciado y compruebe que lo que se pedía es lo que ha averiguado. Supóngase que ha terminado todos los cálculos y ha obtenido unos resultados. ¿Puede corroborar y/o justificar adecuadamente las hipótesis utilizadas?

Para consolidar todo lo realizado en este problema, le invitamos a que haga una lista exhaustiva de los conceptos utilizados y los resultados obtenidos. ¿Son razonables? ¿En qué se podría mejorar el diagrama de flujo implementado?

## Estudio

### Breve descripción

Se trata del estudio del flujo a través de una tubería en forma de U en régimen laminar con la característica de que la tubería está unida a un disco que gira a velocidad constante. Los principios básicos se aplican sobre un volumen de control no inercial (móvil) y su correspondiente adecuación al mismo.

### Análisis

Análisis INTEGRAL	
Volumen de control (VC)	
Indeformable	Inercial (fijo)
Deformable	No inercial (móvil)



### Hipótesis que se plantean

<b>PROPIEDADES del fluido</b>			
<b>Densidad</b>	<b>Constante</b>	<b>Incompresible</b>	<b>Homogéneo</b>
	Variable: Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		Gas ideal	Adiabático
			Isotérmico
<b>COMPORTAMIENTO del fluido</b>			
En reposo	Equilibrio	Absoluto	
		Relativo	
En movimiento	Régimen	<b>Estacionario</b>	
		Transitorio	
<b>PRESTACIONES del fluido</b>			
- Presión y fuerza debidas a la cantidad de movimiento			
Otras hipótesis de <b>TRABAJO</b>			
- La variación de la temperatura es despreciable. - Las propiedades físicas y los perfiles de velocidades son constantes y uniformes en las secciones de control. - Los sólidos son indeformables. - El efecto de la gravedad en el fluido es despreciable. - No hay transferencia de calor.			

### Principios básicos y leyes fundamentales

- Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Principio de conservación de la cantidad de movimiento
- Principio de conservación de la energía

### Resolución

#### Régimen de flujo por el interior de la tubería

Para determinar el régimen del flujo en el interior de la tubería se debe determinar el número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} \quad (1)$$

De los datos del problema, la velocidad relativa por el interior de la tubería es:



$$v \equiv v_{rel} = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\frac{\pi}{4} D^2} = \frac{120 \frac{l}{min} \frac{m^3}{1000 l}}{\frac{\pi}{4} (0,04 m)^2} \cong 1,6 \text{ m/s} \quad (2)$$

Luego, las propiedades del fluido son:

$$\begin{aligned} \mu &= 100 \text{ cP} \frac{1 \text{ P}}{100 \text{ cP}} \frac{0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s}}{1 \text{ P}} = 0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s} \\ \rho &= 900 \text{ kg/m}^3 \end{aligned} \quad (3)$$

de forma que

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{900 \text{ kg/m}^3 \cdot 1,6 \text{ m/s} \cdot 0,04 \text{ m}}{0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s}} \cong 573 < 2300 \Rightarrow \text{Flujo laminar} \quad (4)$$

### Calcule la presión $P$ que marcará el manómetro

Para determinar la presión que marcará el manómetro, se realizará un análisis integral mediante volúmenes de control. Para el análisis del problema, el volumen de control más adecuado será indeformable y no inercial, y situará las superficies de control en los puntos 1 y 2, tal como se representa en la figura 3. El principio básico para resolver el problema es el de conservación de la energía en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho e dV + \int_{SC} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} \right) (\vec{v} \cdot \hat{n} dA) = \dot{Q} - \dot{W}_e - \dot{W}_i \quad (5)$$

Partiendo de las hipótesis propuestas y donde en el volumen de control escogido no hay trabajo de eje,

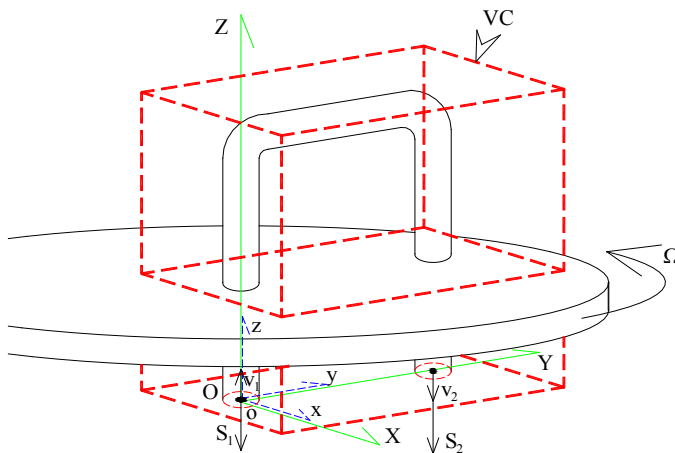


Figura 3. detalle del volumen de control no inercial e indeformable



$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho e dV}_{=0, \text{Hip.}} + \int_{SC} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} \right) (\vec{v} \cdot \hat{n} dA) = \underbrace{\dot{Q}}_{=0, \text{Hip.}} - \underbrace{\dot{W}_e}_{=0, \text{no eje}} - \underbrace{\dot{W}_f}_{\text{pérdida por fricción}} \quad (6)$$

y queda:

$$\int_{SC} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} \right) (\vec{v} \cdot \hat{n} dA) = 0 \quad (7)$$

Teniendo presente que el volumen de control es no inercial, la energía por unidad de masa  $e$  está formada por

$$e = \underbrace{\tilde{u}}_{\text{energía interna}} + \underbrace{\frac{v^2}{2}}_{\text{energía cinética}} + \underbrace{gz}_{\text{energía potencial}} - \underbrace{\frac{\omega^2 r^2}{2}}_{\text{energía centrífuga}} \quad (8)$$

Así, aplicando la ecuación (7) en las dos superficies de control,

$$\int_{SC_1} \rho \left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 - \frac{\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} \right) (\vec{v}_1 \cdot \hat{n} dA_1) + \int_{SC_2} \rho \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 - \frac{\omega^2 r_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \right) (\vec{v}_2 \cdot \hat{n} dA_2) = -\dot{W}_t \quad (9)$$

donde todos los términos de la energía y la densidad son constantes y uniformes en las superficies de control, según las hipótesis propuestas, por lo cual:

$$\underbrace{\rho \left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 - \frac{\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} \right)}_{\text{Hip.}} \int_{SC_1} \left( \underbrace{\vec{v}_1}_{\text{Hip.}}, 0, 0 \right) \cdot (-dA_1, 0, 0) + \underbrace{\rho \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 - \frac{\omega^2 r_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \right)}_{\text{Hip.}} \int_{SC_2} \left( \underbrace{\vec{v}_2}_{\text{Hip.}}, 0, 0 \right) \cdot (dA_2, 0, 0) = -\dot{W}_t \quad (10)$$

Tomando  $\vec{v}_i \equiv v_i$ ,

$$\rho \left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 - \frac{\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} \right) \int_{SC_1} -v_1 dA_1 + \rho \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 - \frac{\omega^2 r_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \right) \int_{SC_2} v_2 dA_2 = -\dot{W}_t \quad (11)$$

$$\rho \left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 - \frac{\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} \right) \left( \underbrace{v_1}_{\text{Hip.}} \right) \int_{SC_1} -dA_1 + \rho \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 - \frac{\omega^2 r_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \right) \left( \underbrace{v_2}_{\text{Hip.}} \right) \int_{SC_2} dA_2 = -\dot{W}_t \quad (12)$$

Finalmente,

$$\rho \left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 - \frac{\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} \right) (-v_1 A_1) + \rho \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 - \frac{\omega^2 r_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \right) (v_2 A_2) = -\dot{W}_t \quad (13)$$





Aplicando ahora el *principio de conservación de la masa* siguiendo las mismas hipótesis propuestas,

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_{VC} \rho dV}_{=0, \text{Hip.}} + \int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot \hat{n} dA) = 0 \quad (14)$$

$$\int_{SC_1} \rho (\vec{v}_1 \cdot \hat{n} dA_1) + \int_{SC_2} \rho (\vec{v}_2 \cdot \hat{n} dA_2) = 0 \quad (15)$$

$$\underbrace{\rho v_1}_{\text{Hip.}} \int_{SC_1} (-dA_1) + \underbrace{\rho v_2}_{\text{Hip.}} \int_{SC_2} (dA_2) = 0 \quad (16)$$

$$-\underbrace{\rho v_1 A_1}_{\dot{m}_1} + \underbrace{\rho v_2 A_2}_{\dot{m}_2} = 0 \Rightarrow \dot{m}_1 = \dot{m}_2 \equiv \dot{m} \quad (17)$$

Aplicando la ecuación (17) en la ecuación (13),

$$\left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 - \frac{\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} \right) (-\dot{m}_1) + \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 - \frac{\omega^2 r_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \right) (\dot{m}_2) = -\dot{W}_t \quad (18)$$

$$-\left( \tilde{u}_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 - \frac{\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} \right) + \left( \tilde{u}_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 - \frac{\omega^2 r_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \right) = \frac{-\dot{W}_t}{\dot{m}} \quad (19)$$

De nuevo, tomando las hipótesis propuestas,

$$\Delta \tilde{u} = \tilde{u}_2 - \tilde{u}_1 \cong 0 \quad (\text{Hip.}) \quad (20)$$

y se obtiene:

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} - \frac{\omega^2 r_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2} - \frac{\omega^2 r_2^2}{2} + \frac{\dot{W}_t}{\dot{m}} \quad (21)$$

Teniendo presente la figura 4 y  $\omega \equiv \Omega$ ,

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\rho} + \underbrace{gz_1}_{z_1=0, \text{ref}} + \frac{v_1^2}{2} - \underbrace{\frac{\Omega^2 r_1^2}{2}}_{r_1=0, \text{ref}} &= \frac{p_2}{\rho} + \underbrace{gz_2}_{z_2=0, \text{ref}} + \frac{v_2^2}{2} - \underbrace{\frac{\Omega^2 r_2^2}{2}}_{P_2=P_{\text{atm}}=0(\text{rel})} + \frac{\dot{W}_t}{\dot{m}} \\ \frac{p_1}{\rho} &= + \underbrace{\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}}_{v_1=v_2, \text{continuidad}} - \frac{\Omega^2 r_2^2}{2} + \frac{\dot{W}_t}{\dot{m}} \\ \frac{p_1}{\rho} &= - \frac{\Omega^2 r_2^2}{2} + \frac{\dot{W}_t}{\dot{m}} \end{aligned} \quad (22)$$

El último término corresponde a las pérdidas por fricción en el interior de la tubería. Analizándolo,

$$\frac{\dot{W}_t}{\dot{m}} \equiv \Delta E_{1-2} = \Delta E_{\text{primarias}, 1-2} + \Delta E_{\text{secundarias}, 1-2} = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2} + (\sum K) \frac{v^2}{2} \quad (23)$$



Del enunciado (v. figura 4), la pérdida de carga secundaria equivalente en los codos es el 10 % de la pérdida de carga primaria en los tramos rectos. Por tanto,

$$\frac{\dot{W}_t}{\dot{m}} \equiv \Delta E_{1-2} = \Delta E_{\text{primarias},1-2} + 10\% \Delta E_{\text{primarias},1-2} = 1,1 \Delta E_{\text{primarias},1-2} = 1,1 f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2} \quad (24)$$

Así pues,

$$\frac{p_1}{\rho} = -\frac{\Omega^2 r_2^2}{2} + 1,1 f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2} \quad (25)$$

Para flujo laminar, el coeficiente de fricción  $f$  se define como:

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \quad (26)$$

Sustituyendo,

$$p_1 = -\rho \frac{\Omega^2 r_2^2}{2} + 1,1 \frac{64}{\text{Re}} \frac{L}{D} \frac{v^2}{2} \rho \quad (27)$$

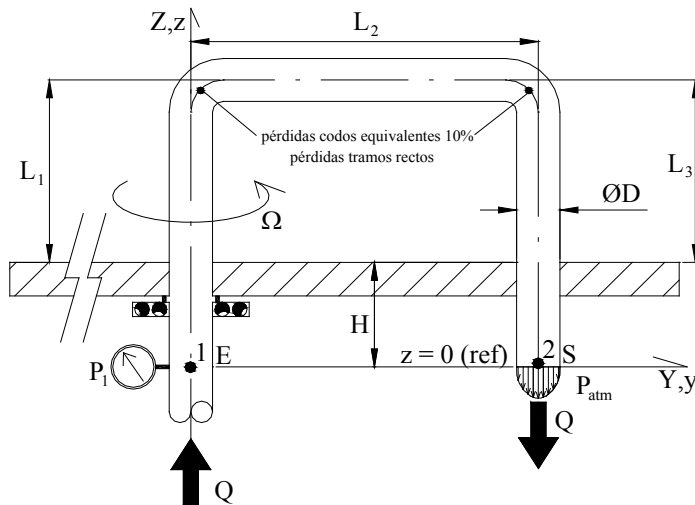
Tomando los datos del enunciado (v. figura 4),

$$\begin{aligned} \Omega &= 150 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \frac{\text{min}}{60 \text{ s}} \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} = 15,71 \text{ rad/s} \\ r_2 &= L_2 = 0,5 \text{ m} \\ L &= H + L_1 + L_2 + L_3 + H = 1,1 \text{ m} \end{aligned} \quad (28)$$

Y, de los resultados ya obtenidos, se determina la presión en el manómetro:

$$p_1 = -27730,13 + 3892,27 = -23837,86 \text{ Pa (rel)} \cong -0,24 \text{ bar (rel)} = 0,76 \text{ bar (abs)} \quad (29)$$

Figura 4.  
Detalle de la tubería





**Calcule la fuerza realizada por el fluido contra la tubería entre los límites definidos por las secciones de entrada  $E$  y de salida  $S$  cuando el conjunto gira a 150 rpm (v. figura 2).**

Se trata de aplicar el principio de conservación del momento cinético o de cantidad de movimiento. Como el enunciado pide calcular las fuerzas, se aplica el principio de cantidad de movimiento en su análisis integral. Se elige un volumen de control indeformable y no inercial, igual al utilizado anteriormente, representado en la figura 3. Las superficies de control se hallan en los puntos 1 y 2. Los sistemas de referencia serán (v. figura 3):

Mayúsculas  $X, Y, Z \rightarrow$  Sistema de referencia inercial (fijo) con origen  $O$

Minúsculas  $x, y, z \rightarrow$  Sistema de referencia no inercial (móvil) con origen  $o$  (30)

El principio de cantidad de movimiento en análisis integral es:

$$\vec{F}_{ext,VC} - \vec{F}_{fict,VC} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \int_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) \quad (31)$$

Se estudian al detalle cada uno de los cuatro términos del principio de cantidad de movimiento.

**Fuerzas externas que actúan sobre el VC  $F_{ext,VC}$**

$$\vec{F}_{ext,VC} = \vec{F}_{másicas,VC} + \vec{F}_{normales,SC} + \vec{F}_{tangenciales,SC} \quad (32)$$

– *Fuerzas másicas:*

$$\vec{F}_{másicas,VC} = \rho g \frac{\pi}{4} D^2 L (-\hat{k}) = \rho g \frac{\pi}{4} D^2 (H + L_1 + L_2 + L_3 + H) (-\hat{k})$$

– *Fuerzas superficiales*

$$\text{– Fuerzas normales: } \vec{F}_{normales,SC} = p_1 S_1 \hat{k} + \underbrace{p_2}_{=P_{atm}=0(rel)} S_2 \hat{k} = p_1 S_1 \hat{k}$$

– *Fuerzas tangenciales.* Se elige tomar la fuerza equivalente, que además son las incógnitas del problema:  $\vec{F}_{tangenciales,SC} \leftrightarrow \vec{F}_{equivalente,SC} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ext,VC} &= \vec{F}_{másicas,VC} + \vec{F}_{normales,SC} + \vec{F}_{tangenciales,SC} = \\ &= \rho g \frac{\pi}{4} D^2 (H + L_1 + L_2 + L_3 + H) (-\hat{k}) + p_1 \frac{\pi}{4} D^2 \hat{k} + F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \end{aligned} \quad (33)$$

**Fuerzas ficticias que actúan sobre el VC  $\vec{F}_{fict,VC}$**

$$\vec{F}_{fict,VC} = \int_{VC} \rho \left( \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel} \right) dV \quad (34)$$



Aceleración lineal:  $\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = 0$ , debido a que los sistemas de referencia inercial y no inercial no se aceleran.

Aceleración angular:  $\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} = 0$ , debido a que la velocidad angular es constante.

Aceleración centrípeta:  $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \neq 0$  y estudiarse.

Aceleración de Coriolis:  $2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel} \neq 0$  y debe estudiarse.

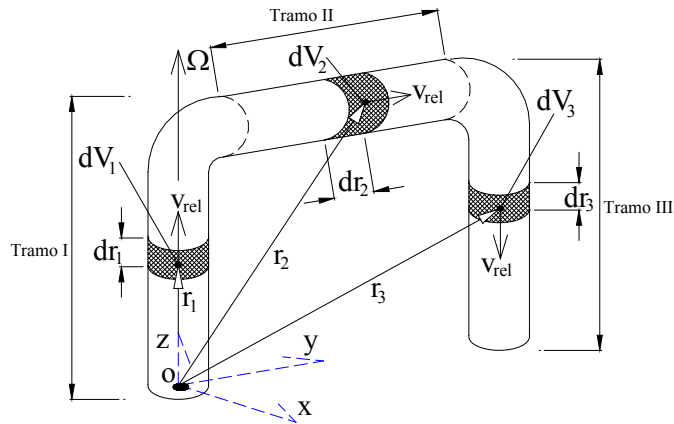
Así,

$$\vec{F}_{fict,VC} = \int_{VC} \rho \left( \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel} \right) dV \quad (35)$$

Para determinar las fuerzas ficticias diferentes de cero, se llevará a cabo un estudio detallado por tramos, tal como se ilustra en la figura 5.

$$\vec{F}_{fict,VC} = \vec{F}_{fict,VC,I} + \vec{F}_{fict,VC,II} + \vec{F}_{fict,VC,III} \quad (36)$$

Figura 5.  
Detalle del estudio por tramos de las fuerzas ficticias



### Tramo I $\vec{F}_{fict,VC,I}$

Para estudiar el tramo I, hay que observar las figuras 5 y 6.

Tramo I. Aceleración centrípeta I:  $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_1) = 0$ , debido a que el vector de la velocidad angular  $\vec{\Omega}$  y el vector de posición  $\vec{r}_1$  son paralelos.

Tramo I. Aceleración de Coriolis I:  $2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel} = 0$ , debido a que el vector de la velocidad angular  $\vec{\Omega}$  y el de la velocidad relativa  $\vec{v}_{rel}$  son paralelos.

De aquí que, para el tramo I,

$$\vec{F}_{fict,VC,I} = 0 \quad (37)$$

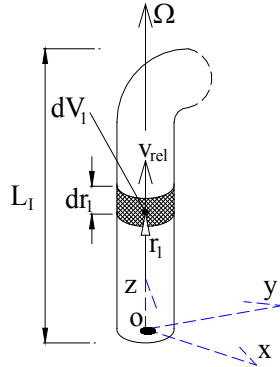


Figura 6. Detalle del estudio de las fuerzas ficticias en el tramo I

**Tramo II**  $\vec{F}_{fict,VC,II}$

Para estudiar el tramo II, hay que observar las figuras 5 y 7.

Tramo II. Aceleración centrípeta II:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{fict,VC,II,Centripeta} &= \int_{VC} \rho (\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_2)) dV_2 = \int_{VC} \rho (\Omega^2 r_{2y} (-\hat{j})) \frac{\pi}{4} D^2 dr_2 = \\ &= \rho \Omega^2 \frac{\pi}{4} D^2 \int_0^{L_{II}} r_{2y} dr_2 (-\hat{j}) = \rho \Omega^2 \frac{\pi}{4} D^2 \frac{L_2^2}{2} (-\hat{j}) \end{aligned} \quad (38)$$

Tramo II. Aceleración de Coriolis II:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{fict,VC,II,Coriolis} &= \int_{VC} \rho (\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel}) dV_2 = \int_{VC} \rho (2\Omega v_{rel} (-\hat{i})) \frac{\pi}{4} D^2 dr_2 = \\ &= \rho 2\Omega v_{rel} \frac{\pi}{4} D^2 (-\hat{i}) \int_0^{L_{II}} dr_2 = \rho 2\Omega v_{rel} \frac{\pi}{4} D^2 L_2 (-\hat{i}) \end{aligned} \quad (39)$$

De aquí que, para el tramo II,

$$\vec{F}_{fict,VC,II} = \vec{F}_{fict,VC,II,Centripeta} + \vec{F}_{fict,VC,II,Coriolis} = \rho \Omega^2 \frac{\pi}{4} D^2 \frac{L_2^2}{2} (-\hat{j}) + \rho 2\Omega v_{rel} \frac{\pi}{4} D^2 L_2 (-\hat{i}) \quad (40)$$

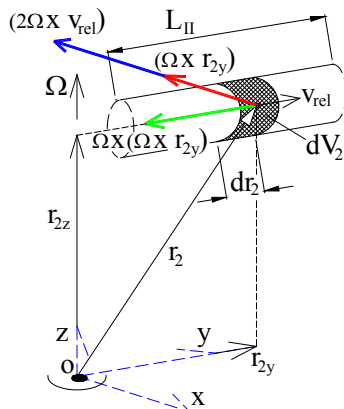


Figura 7. Detalle del estudio de las fuerzas ficticias en el tramo II



**Tramo III**  $\vec{F}_{fict,VC,III}$

Para estudiar el tramo III, hay que observar las figuras 5 y 8.

Tramo III. Aceleración centrípeta III:

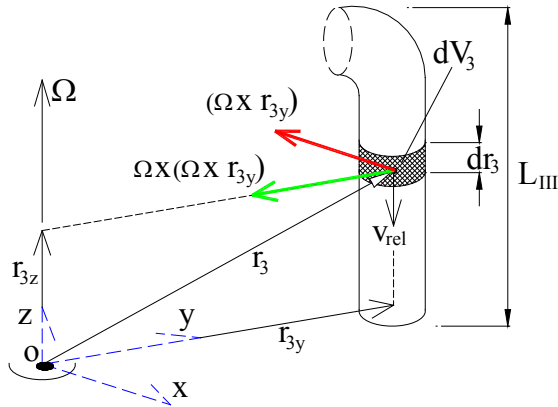
$$\begin{aligned} \vec{F}_{fict,VC,III,Centrípeta} &= \int_{VC} \rho (\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_3)) dV_3 = \int_{VC} \rho (\Omega^2 r_{3y} (-\hat{j})) \frac{\pi}{4} D^2 dr_3 = \\ &= \rho \Omega^2 \frac{\pi}{4} D^2 \int_0^{L_{III}} \underbrace{r_{3y}}_{=L_2=Cte} dr_3 (-\hat{j}) = \rho \Omega^2 \frac{\pi}{4} D^2 L_2 (L_3 + H) (-\hat{j}) \end{aligned} \quad (41)$$

Tramo III. Aceleración de Coriolis III:  $2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel} = 0$ , debido a que el vector de la velocidad angular  $\vec{\Omega}$  y la velocidad relativa  $\vec{v}_{rel}$  son paralelos.

De aquí que, para el tramo III,

$$\vec{F}_{fict,VC,III} = \vec{F}_{fict,VC,III,Centrípeta} + \vec{F}_{fict,VC,III,Coriolis} = \rho \Omega^2 \frac{\pi}{4} D^2 L_2 (L_3 + H) (-\hat{j}) \quad (42)$$

Figura 8.  
Detalle del estudio de las fuerzas ficticias en el tramo III



Finalmente, las fuerzas ficticias que actúan sobre el VC  $\vec{F}_{fict,VC}$  se determinan sustituyendo las ecuaciones (37), (40) y (42) en la ecuación (36).

$$\begin{aligned} \vec{F}_{fict,VC} &= \vec{F}_{fict,VC,I} + \vec{F}_{fict,VC,II} + \vec{F}_{fict,VC,III} = \\ &= \rho \Omega^2 \frac{\pi}{4} D^2 \frac{L_2^2}{2} (-\hat{j}) + \rho 2\Omega v_{rel} \frac{\pi}{4} D^2 L_2 (-\hat{i}) + \rho \Omega^2 \frac{\pi}{4} D^2 L_2 (L_3 + H) (-\hat{j}) \end{aligned} \quad (43)$$



### Variación temporal de la cantidad de movimiento en el interior del VC

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \bar{v} dV$$

El término temporal es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \bar{v} dV = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \bar{v} dV = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \underbrace{\bar{v} dV}_{\text{no varía en función del tiempo}} = 0 \quad (44)$$

### Variación de la cantidad de movimiento en las SC

$$\int_{SC} \rho \bar{v} (\bar{v} \cdot d\vec{S})$$

Teniendo presente la figura 3,

$$\begin{aligned} \int_{SC} \rho \bar{v} (\bar{v} \cdot d\vec{S}) &= \int_{SC1} \rho \bar{v}_1 (\bar{v}_1 \cdot d\vec{S}_1) + \int_{SC2} \rho \bar{v}_2 (\bar{v}_2 \cdot d\vec{S}_2) = \rho \int_{\text{Hip. } SC1} \bar{v}_1 (\bar{v}_1 \cdot d\vec{S}_1) + \rho \int_{\text{Hip. } SC2} \bar{v}_2 (\bar{v}_2 \cdot d\vec{S}_2) = \\ &= \rho \int_{SC1} (0, 0, +v_1) ((0, 0, +v_1) \cdot (0, 0, -dS_1)) + \rho \int_{SC2} (0, 0, -v_2) ((0, 0, -v_2) \cdot (0, 0, -dS_2)) = \\ &= \rho \int_{SC1} (0, 0, +v_1) (0, 0, -v_1 dS_1) + \rho \int_{SC2} (0, 0, -v_2) (0, 0, +v_2 dS_2) = \\ &= \rho \int_{SC1} (0, 0, -v_1^2 dS_1) + \rho \int_{SC2} (0, 0, -v_2^2 dS_2) = \\ &= \rho \underbrace{v_1^2}_{\text{Hip. } SC1} \int (0, 0, -dS_1) + \rho \underbrace{v_2^2}_{\text{Hip. } SC2} \int (0, 0, -dS_2) = \\ &= \rho v_1^2 S_1 (-\hat{k}) + \rho v_2^2 S_2 (-\hat{k}) = \rho v_1^2 \frac{\pi}{4} D^2 (-\hat{k}) + \rho v_2^2 \frac{\pi}{4} D^2 (-\hat{k}) \end{aligned} \quad (45)$$

Fuerza realizada por el fluido contra la tubería

Finalmente, reuniendo las expresiones determinadas y sustituyendo las ecuaciones (33), (43), (44) y (45) en la ecuación (31),

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ext,VC} - \vec{F}_{fict,VC} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \bar{v} dV + \int_{SC} \rho \bar{v} (\bar{v} \cdot d\vec{S}) \\ &= \rho g \frac{\pi}{4} D^2 (H + L_1 + L_2 + L_3 + H) (-\hat{k}) + p_1 \frac{\pi}{4} D^2 \hat{k} + F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} + \\ &= \left\{ \rho \Omega^2 \frac{\pi}{4} D^2 \frac{L_2^2}{2} (-\hat{j}) + \rho 2\Omega v_{rel} \frac{\pi}{4} D^2 L_2 (-\hat{i}) + \rho \Omega^2 \frac{\pi}{4} D^2 L_2 (L_3 + H) (-\hat{j}) \right\} = \\ &= \rho v_1^2 \frac{\pi}{4} D^2 (-\hat{k}) + \rho v_2^2 \frac{\pi}{4} D^2 (-\hat{k}) \end{aligned} \quad (46)$$

Reordenando por direcciones:



$$\begin{aligned}
 X : F_x + \rho 2\Omega v_{rel} \frac{\pi}{4} D^2 L_2 &= 0 \\
 Y : F_y + \rho \Omega^2 \frac{\pi}{4} D^2 \frac{L_2^2}{2} + \rho \Omega^2 \frac{\pi}{4} D^2 L_2 (L_3 + H) &= 0 \\
 Z : F_z - \rho g \frac{\pi}{4} D^2 (H + L_1 + L_2 + L_3 + H) + p_1 \frac{\pi}{4} D^2 &= -\rho v_1^2 \frac{\pi}{4} D^2 - \rho v_2^2 \frac{\pi}{4} D^2
 \end{aligned}
 \tag{47}$$

Y las fuerzas externas que actúan contra el volumen de control, como la fuerza de la tubería sobre el fluido:

$$\begin{aligned}
 X : F_x &= -\rho 2\Omega v_{rel} \frac{\pi}{4} D^2 L_2 \\
 Y : F_y &= -\rho \Omega^2 \frac{\pi}{4} D^2 \frac{L_2^2}{2} - \rho \Omega^2 \frac{\pi}{4} D^2 L_2 (L_3 + H) \\
 Z : F_z &= \rho g \frac{\pi}{4} D^2 (H + L_1 + L_2 + L_3 + H) - p_1 \frac{\pi}{4} D^2 + 2\rho v_{rel}^2 \frac{\pi}{4} D^2
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

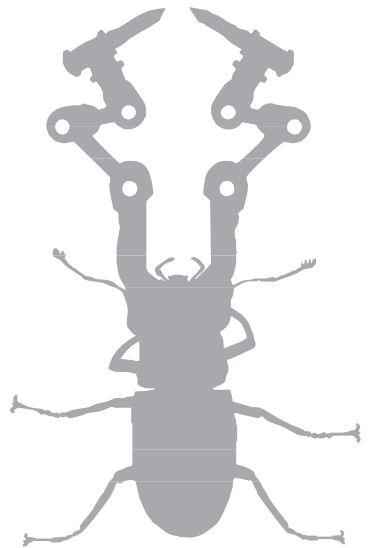
donde se ha sustituido  $v_1 = v_2 \equiv v \equiv v_{rel}$ . La fuerza que ejerce el fluido contra la tubería es:

$$\begin{aligned}
 X : R_x &= -F_x \\
 Y : R_y &= -F_y \\
 Z : R_z &= -F_z
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

Por último, sustituyendo los datos del enunciado y los resultados (2), (28) y (29), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 X : R_x &= 28,43 \text{ N} \\
 Y : R_y &= 76,76 \text{ N} \\
 Z : R_z &= -44,47 \text{ N}
 \end{aligned}
 \tag{50}$$





→ 14



## Dispositivo similar a un viscosímetro capilar

A semejanza de un viscosímetro capilar, se construye un dispositivo tal como se muestra en la figura 1. Dicho dispositivo consta de un recipiente cilíndrico de 100 mm de diámetro y 150 mm de altura, que dispone de un orificio que permite acoplar un tubo capilar de acero inoxidable con una longitud de 500 mm y 1 mm de diámetro interior.

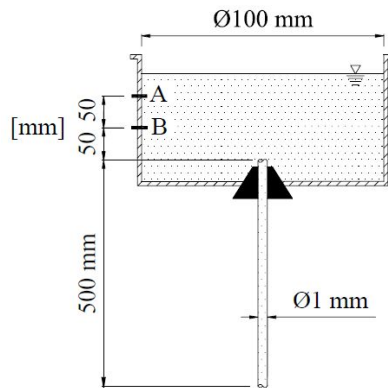


Figura 1.  
Dispositivo de viscosímetro capilar (no a escala)

Se pide:

- Demostrar que la descarga del depósito sigue una ley del tipo:

$$H = K_1 \exp(K_2 t) \quad [\text{m}]$$

- Determinar la viscosidad del fluido sabiendo que la superficie libre del fluido en el depósito, al pasar de A a B, tarda 2,5 horas.

Hipótesis:

Con el objetivo de simplificar la ecuación diferencial, se desprecian los términos de segundo orden.



## Estrategia para resolver el problema

### Comprender el problema

Lea detenidamente todo el problema, incluidas todas las preguntas, y exhiba su capacidad de análisis.

¿Cuáles son los datos de partida?

El enunciado es tan simple que podemos reconocer fácilmente todos los parámetros que definen el entorno físico y la naturaleza del fluido con una rápida inspección.

Este problema ¿es similar a otros que ya conocemos? ¿Puede describir las diferencias más significativas que existen entre este problema y el típico problema de llenado/vaciado de un simple depósito? ¿Cómo podemos estimar el flujo másico de fluido que sale del depósito?

¿Ha advertido que toda la dificultad está en que el depósito descarga a través de un tubo capilar?

Se sabe que ley de Poiseuille (también conocida como ley de Hagen-Poiseuille) es la ley que permite determinar el flujo laminar estacionario de un líquido incompresible y uniformemente viscoso (también denominado *fluido newtoniano*) a través de un tubo cilíndrico de sección circular constante. Esta ecuación fue derivada experimentalmente en 1838 por Jean L. M. Poiseuille (1797-1869).

La ley expresa que el caudal crece a medida que aumentan la diferencia de presiones y el radio del tubo, pero disminuye al aumentar la viscosidad del fluido y la longitud del tubo.

Se sabe que, para un flujo laminar completamente desarrollado de un fluido newtoniano a través de un tubo de sección circular, el perfil de la velocidad es parabólico. Le invitamos a revisar estos conceptos en un libro de texto de referencia.

### Trazar un plan para resolverlo

Actuando de forma análoga a otros problemas (relacionados con la descarga de depósitos), ¿ve factible ahora que la resolución conjunta de los balances integrales (de masa y energía) sobre el mismo volumen de control le debe permitir deducir las ecuaciones necesarias para explicitar las variables incógnitas en función de los datos? Ordene sus ideas y refléjelas en un diagrama de flujo.

### Ejecutar el plan

Recuerde que, antes de hacer cualquier cosa, hay que pensar: ¿Qué se consigue con ello?

Ayúdese con unos dibujos para identificar el sistema y el volumen de control. Haga lo propio con las superficies de control. Dibuje los vectores que definen la superficie de



control (superficies de flujo) y los vectores que definen las correspondientes velocidades del fluido.

Se aconseja acompañar los desarrollos y los cálculos con una explicación clara de lo que se pretende y lo que ha hallado.

### Comprobar los resultados

Vuelva a leer el enunciado y compruebe que lo que se pedía es lo que ha averiguado.

En este punto, se aconseja representar los resultados obtenidos en función del tiempo. Recuerde que una forma de sintetizar y visualizar los resultados es mediante gráficos. ¿Le parecen razonables los resultados obtenidos?

Supóngase que ha llegado a unos resultados correctos. ¿Puede corroborar y/o justificar adecuadamente las hipótesis utilizadas?

¿Es capaz de resolver este problema, suponiendo que el fluido es no newtoniano (p. ej., un pseudoplástico)?

Para consolidar todo lo realizado en este problema, le invitamos a que haga una lista exhaustiva de los conceptos utilizados y una síntesis del plan que le ha permitido resolver el problema.

## Estudio

### Breve descripción

Para estimar la viscosidad de un fluido newtoniano, se procede a controlar el vaciado de un depósito a través de un tubo capilar, donde se podrá asegurar un régimen laminar.

### Análisis

<b>Análisis INTEGRAL</b>	
<b>Volumen de control (VC)</b>	
<b>Indeformable</b>	<b>Inercial (fijo)</b>
Deformable	No inercial (móvil)

**Hipótesis que se plantean**

<b>PROPIEDADES del fluido</b>			
<b>Viscosidad</b>	<b>Constante</b>	<b>Newtoniano</b>	<b>Homogénea</b>
<b>Densidad</b>	<b>Constante</b>	<b>Incompresible</b>	<b>Homogéneo</b>
	Variable: Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		Gas ideal	Adiabático
			Isotérmico
<b>COMPORTAMIENTO del fluido</b>			
En reposo	Equilibrio	Absoluto	
		Relativo	
En movimiento	Régimen	Estacionario	
		Transitorio	
<b>PRESTACIONES del fluido</b>			
- Viscosidad de un fluido newtoniano			
<b>Otras hipótesis de TRABAJO</b>			
<ul style="list-style-type: none"> <li>- La variación de la temperatura es despreciable.</li> <li>- Las propiedades físicas y los perfiles de las velocidades son constantes y uniformes en las secciones de control.</li> <li>- Los sólidos son indeformables.</li> <li>- No hay transferencia de calor ni de trabajo.</li> <li>- Se desprecian los términos de segundo orden.</li> </ul>			

**Principios básicos y leyes fundamentales**

- Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Principio de conservación de la energía. Ecuación de Bernoulli

**Resolución****Demuestre que la descarga del depósito sigue una ley del tipo**

$$H = K_1 \exp(K_2 t) \quad [\text{m}]$$

Aplicando la ecuación de *conservación de la energía* en la versión *ecuación de Bernoulli generalizada* entre los puntos en que se dispone de más información (v. figura 2),

$$E_A = E_C + \Delta E_{AC} \quad (1)$$

donde



$$E_A = \frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A \quad (2)$$

$$E_B = \frac{P_C}{\rho} + \frac{v_C^2}{2} + gz_C$$

y  $\Delta E_{AC}$  es la pérdida de energía del flujo de fluido al pasar por el tubo capilar de 1 mm de diámetro.

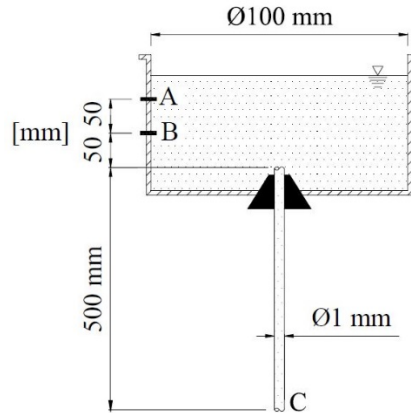


Figura 2.  
Dispositivo de viscosímetro capilar

Tomando como referencia la cota cero en el punto C,

$$\underbrace{\frac{P_A}{\rho}}_{=0; P_A=0(rel)} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A = \underbrace{\frac{P_C}{\rho}}_{=0; P_C=0(rel)} + \frac{v_C^2}{2} + \underbrace{gz_C}_{=0; z_C=0} + \Delta E_{AC} \quad (3)$$

La pérdida de energía en el capilar (pérdidas de carga primarias), despreciando las pérdidas de energía en accesorios (pérdidas de carga secundarias), se puede obtener directamente aplicando la ecuación de Hagen-Poiseuille, la cual se puede deducir mediante un análisis diferencial de la ecuación de Navier-Stokes aplicada a un tubo con un perfil de velocidad parabólico (flujo laminar).

Alternativamente, también se puede obtener directamente aplicando la ecuación de Darcy-Weisbach, donde en el tubo capilar de longitud  $L$  y diámetro  $D$  se define como:

$$\Delta E_{AC} = f \frac{L}{D} \frac{v_c^2}{2} \quad (4)$$

Para calcular el coeficiente de pérdidas primarias  $f$ , factor de fricción de Darcy, hay que determinar el régimen del flujo. Como primera aproximación, se puede considerar una velocidad media,<sup>2</sup> definida como

<sup>2</sup> En el enunciado, se indica que la descarga sigue una función exponencial. Luego, el valor medio indicado es solo una burda aproximación.



$$\bar{v}_{AB} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2,5 \text{ h} \times \frac{3600 \text{ s}}{\text{h}}} = 5,6 \cdot 10^{-6} \text{ m/s} \quad (5)$$

y suponer que el fluido tiene, como mínimo, una viscosidad cinemática igual a la del agua. Luego,

$$\text{Re} = \frac{\bar{v}_{AB} D}{\nu_{\text{agua}}} = \frac{5,6 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-6}} = 5,6 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \text{Régimen laminar} \quad (6)$$

Así, tomando el régimen laminar y la tubería (capilar) lisa (sin rugosidad), para el cálculo del coeficiente de pérdidas primarias  $f$  resulta:

$$\left. \begin{array}{l} f = \frac{64}{\text{Re}} \\ \text{Re} = \frac{\bar{v}_c D}{\nu_{\text{fluido}}} \end{array} \right\} \rightarrow f = \frac{64 \nu_{\text{fluido}}}{v_c D} \quad (7)$$

Ahora, sustituyendo la ecuación (7) en la ecuación (4):

$$\Delta E_{AC} = \frac{64 \nu_{\text{fluido}}}{v_c D} \frac{L}{D} \frac{v_c^2}{2} = \frac{32 \nu_{\text{fluido}} L v_c}{D^2} \quad (8)$$

Si en la ecuación anterior se sustituye la velocidad media del fluido en el capilar por el caudal volumétrico,

$$Q = v_c \frac{\pi}{4} D^2 \quad (9)$$

$$\Delta E_{AC} = \frac{32 \nu_{\text{fluido}} L}{D^2} \frac{Q}{\frac{\pi}{4} D^2} = \frac{128 \mu_{\text{fluido}} L}{\rho_{\text{fluido}} \pi D^4} Q \quad (10)$$

se obtiene la conocida ecuación de Hagen-Poiseuille.

Aplicando ahora un volumen de control **indeformable** e **inercial** con superficies de control situadas en los puntos A y C, se aplica la ecuación de *continuidad*:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV}_{=0} + \int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0$$

$$\int_{SC,A} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{S}) + \int_{SC,C} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0$$

$\underbrace{\int_{SC,A} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{S})}_{-Q_A} \quad \underbrace{\int_{SC,C} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{S})}_{+Q_C}$





$$\begin{aligned}
 Q_A &= Q_C \\
 v_A S_A &= v_C S_C \\
 v_C &= v_A \frac{\frac{\pi}{4} D_A^2}{\frac{\pi}{4} D_C^2} = v_A \frac{D_A^2}{D_C^2}
 \end{aligned} \tag{11}$$

donde la velocidad del punto A se define como:

$$v_A = -\frac{dH}{dt} \tag{12}$$

Y el signo negativo define el sentido de la descarga, tomada la referencia de la altura positiva en dirección vertical hacia arriba. Así, la velocidad en el capilar es:

$$v_C = -\frac{dH}{dt} \frac{D_A^2}{D_C^2} \tag{13}$$

Y, sustituyendo ahora todas las variables en la ecuación (3),

$$\begin{aligned}
 gz_A &= -\frac{v_A^2}{2} + \frac{v_C^2}{2} + \Delta E_{AC} \\
 \underbrace{gz_A}_{z_A=H} &= -\frac{1}{2} \left( -\frac{dH}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( -\frac{dH}{dt} \frac{D_A^2}{D_C^2} \right)^2 + \frac{32\nu_{\text{fluido}} L}{D_C^2} \left( -\frac{dH}{dt} \frac{D_A^2}{D_C^2} \right)
 \end{aligned} \tag{14}$$

Tomando la hipótesis de despreciar los términos de segundo orden, ya que

$$\begin{aligned}
 \left( -\frac{dH}{dt} \right) &\text{ es pequeño} \\
 \left( -\frac{dH}{dt} \right)^2 &\ll \left( -\frac{dH}{dt} \right)
 \end{aligned} \tag{15}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 gH &\cong \underbrace{\frac{32\nu_{\text{fluido}} L D_A^2}{D_C^4}}_{A=Cte} \left( -\frac{dH}{dt} \right) = A \left( -\frac{dH}{dt} \right) \\
 \frac{gH}{A} &= \left( -\frac{dH}{dt} \right) \rightarrow \frac{g}{A} dt = -\frac{dH}{H}
 \end{aligned} \tag{16}$$

E, integrando la ecuación diferencial,

$$\frac{g}{A} t \Big|_0^t = -\ln H \Big|_{H_0}^H \tag{17}$$

se obtiene la ecuación que corresponde a la ley de descarga del depósito por el capilar:

$$H = H_0 \exp\left(-\frac{g}{A} t\right) \tag{18}$$

y se cumple, pues, la ley del enunciado:  $H = K_1 \exp(K_2 t)$  [m]



**Determine la viscosidad del fluido sabiendo que la superficie libre del fluido en el depósito al pasar de A a B tarda 2,5 horas.**

Trabajando con la ecuación anterior,

$$\begin{aligned}
 H_B &= H_A \exp\left(-\frac{g}{A}t\right) \\
 -H_B &= -H_A \exp\left(-\frac{g}{A}t\right) \\
 H_A - H_B &= H_A - H_A \exp\left(-\frac{g}{A}t\right) \\
 (H_A - H_B) &= H_A \left[1 - \exp\left(-\frac{g}{A}t\right)\right]
 \end{aligned} \tag{19}$$

y, tomando los valores,

$$\begin{aligned}
 H_0 &= H_A \rightarrow t = 0 \\
 H &= H_B \rightarrow t = 2,5 \text{ h} \times \frac{3600 \text{ s}}{\text{h}} = 9000 \text{ s} \\
 (H_A - H_B) &= 50 \cdot 10^{-3} \text{ m}
 \end{aligned} \tag{20}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}
 50 \cdot 10^{-3} &= 600 \cdot 10^{-3} \left[1 - \exp\left(-\frac{9.81}{A}9000\right)\right] \\
 A &= 1014695 \text{ [m/s]}
 \end{aligned} \tag{21}$$

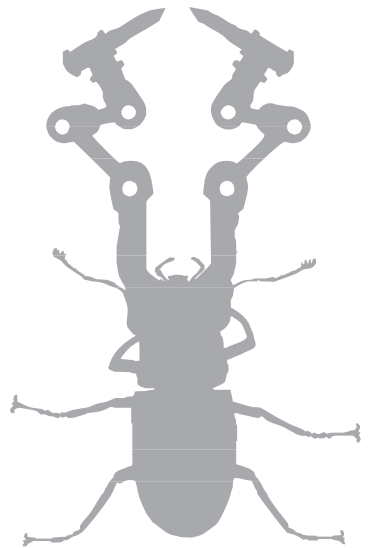
Conocido el valor de la constante A, a partir de su definición anterior:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{32\nu_{\text{fluido}}LD_A^2}{D_C^4} \\
 1014695 &= \frac{32\nu_{\text{fluido}}500 \cdot 10^{-3} (100 \cdot 10^{-3})^2}{(1 \cdot 10^{-3})^4}
 \end{aligned} \tag{22}$$

de donde se obtiene la viscosidad cinemática del fluido:

$$\nu_{\text{fluido}} = 6,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \tag{23}$$

Por último, solo resta comprobar el régimen del fluido. Sin embargo, parece obvio que será régimen laminar, ya que la viscosidad cinemática del fluido resulta ser 6,34 veces la del agua.



→ 15



## Suministro de agua con una noria hidráulica

Una noria hidráulica trasvasa un caudal de agua pulsante. De forma simplificada, la noria se puede esquematizar tal como se muestra en la figura 1. Se pide:

- 1) Calcular el caudal medio teórico impulsado.
- 2) Calcular la fuga máxima entre el pistón obturador y la tubería durante un desplazamiento a lo largo de la tubería vertical.

Datos:

$$H = 4,2 \text{ m}$$

$$D = 3,2 \text{ m}$$

$$\mu_{\text{agua}} = 0,001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$T = 0,6 \text{ m}$$

$$h = 0,554 \text{ m}$$

$$L = 0,1 \text{ m}$$

$$\omega = 25 \text{ rev/hora}$$

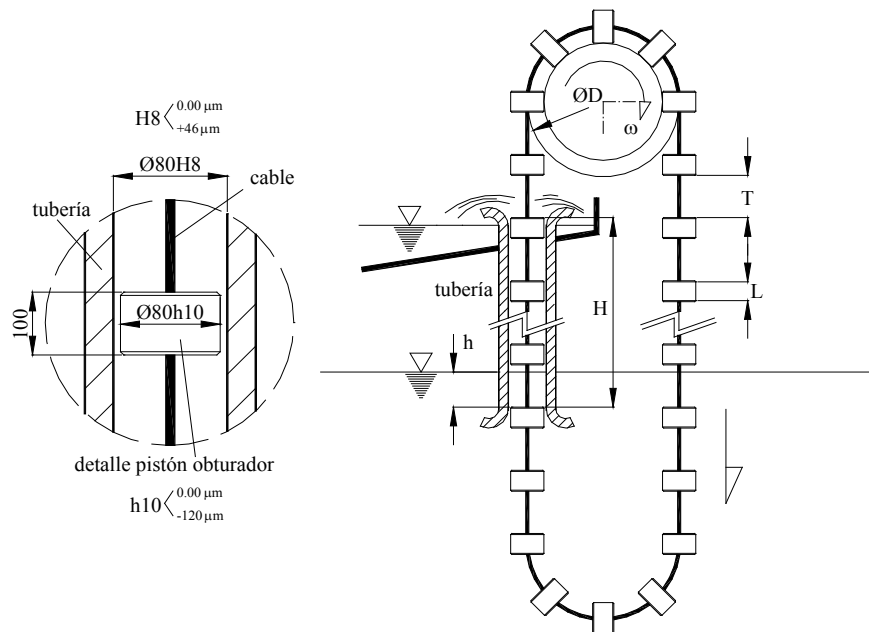


Figura 1.  
Esquema de la noria  
(no a escala)



## Estrategia para resolver el problema

Se sabe que la noria es una máquina hidráulica que se empleaba en la Antigüedad para elevar el agua contenida en los pozos utilizando la fuerza humana o animal (necesaria para girar una rueda).

Se sabe que un tipo especial de noria es la denominada *bomba de cuerda* (o cadena). Este diseño permite establecer un circuito cerrado entre la fuente de agua (pozo) y la superficie o nivel deseado, mediante una tubería, y una cadena sin fin en la cual se disponen pistones de goma u otro material, a intervalos determinados.

El rendimiento volumétrico de la unidad depende de las fugas (flujo de agua) a través de la holgura existente entre los pistones de goma y la pared interior de la tubería vertical.

## Comprender el problema

Basándose en la breve descripción anterior, lea detenidamente el enunciado del problema, incluidas todas las preguntas. Utilice todo el potencial de su imaginación para interpretar el funcionamiento real de la noria de cadena.

Se sabe que, para resolver este problema, debemos introducirnos en el estudio de los flujos reales (viscosos) en el interior de los conductos, ya sean circulares o de otras formas (placas). Cuando se trata con flujos reales, las fuerzas viscosas suelen tener una gran importancia.

Se sabe que el movimiento del fluido (flujo) entre superficies sólidas puede ser debido a una diferencia de presión, a la presencia de un campo exterior (p. ej., el gravitatorio) o al movimiento relativo de las mismas superficies que lo delimitan (es el caso del flujo de Couette).

¿Es capaz de simplificar el soporte tecnológico del problema (noria) en un modelo virtual simple (tubería/tapón) que le permita mostrar los fenómenos fluidodinámicos que explican la presencia de fugas de agua?

¿Se ha dado cuenta de que debe analizar el flujo real de agua por el interior del conducto anular delimitado por la tubería y un tapón?

Antes de continuar, le invitamos a consultar sus apuntes o libros de texto relacionados con las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido, que denominamos *ecuaciones de Navier-Stokes*. No se limite a la simple actividad rutinaria de buscar y aplicar mecánicamente la ecuación requerida y su solución. Dedíquese un poco más de tiempo. Intente profundizar en los conceptos que están implícitos en esta ecuación (ecuación diferencial que expresa el principio de la conservación de la cantidad de movimiento).

Se sabe que las soluciones exactas de las ecuaciones de Navier-Stokes existen solamente en casos muy particulares. El flujo de fluido newtoniano a través de un conducto anular es uno de ellos.



Atención: No se olvide de formular la ecuación diferencial que expresa la conservación de la masa (ecuación de continuidad). La necesitará para simplificar algunos términos de la ecuación de Navier-Stokes.

### Trazar un plan para resolverlo

Le invitamos a que ordene sus ideas y las organice en un diagrama de flujo o plan de acción.

### Ejecutar el plan

Recuerde que, antes de hacer cualquier cosa, debe pensar: ¿Qué sistema de coordenadas ha elegido? Habida cuenta de que la ecuación de Navier-Stokes es una ecuación vectorial, ¿en qué componente de la velocidad del fluido ha centrado su atención?

Se sabe que, cuando se reduce el problema a un dominio espacial concreto, es fundamental especificar las condiciones de contorno que informen del comportamiento del fluido en las fronteras. Aquí, deberá recurrir a su capacidad de análisis.

Recuerde acompañar los desarrollos y los cálculos con una explicación clara de lo que pretende y lo que ha hallado.

### Comprobar los resultados

Vuelva a leer el enunciado y compruebe que lo que se pedía es lo que ha averiguado.

¿Le parecen razonables los resultados obtenidos? ¿Puede corroborar y/o justificar adecuadamente las hipótesis utilizadas?

Si ha llegado hasta aquí, ¡Enhorabuena! ¡Bravo!

## Estudio

### Breve descripción

La noria hidráulica se comporta como una bomba de desplazamiento volumétrico positivo con un caudal pulsante. Mediante un análisis diferencial, se puede determinar el caudal de fugas por la holgura (necesario para su propio funcionamiento) y así obtener la eficiencia volumétrica al compararlo con el caudal medio teórico impulsado.

### Análisis

<b>Análisis DIFERENCIAL</b>	
<b>Viscosidad</b>	
<b>Dominante</b>	Despreciable
<b>Fluido</b>	Ecuación de Euler
<b>Newtoniano</b>	No newtoniano
<b>Ecuación de Reynolds</b>	VER

**Hipótesis que se plantean**

<b>PROPIEDADES del fluido</b>			
<b>Viscosidad</b>	<b>Constante</b>	<b>Newtoniano</b>	<b>Homogénea</b>
<b>Densidad</b>	<b>Constante</b>	<b>Incompresible</b>	<b>Homogénea</b>
	Variable: Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		Gas ideal	Adiabático
			Isotérmico
<b>COMPORTAMIENTO del fluido</b>			
En reposo	Equilibrio	Absoluto	
		Relativo	
En movimiento	Régimen	<b>Estacionario</b>	
		Transitorio	
<b>PRESTACIONES del fluido</b>			
- Caudal impulsado y caudal de fugas			
<b>Otras hipótesis de TRABAJO</b>			
- La variación de la temperatura es despreciable. - La simetría es axial. - Las propiedades físicas son uniformes en las secciones de control. - Los sólidos son indeformables. - El efecto de la gravedad en el fluido es despreciable.			

**Principios básicos y leyes fundamentales**

- Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Ecuación de Navier-Stokes para la viscosidad dominante.
- Ecuación de Reynolds

**Resolución****Calcule el caudal medio teórico impulsado.**

El caudal de la noria es un caudal pulsante. La velocidad lineal de ascensión o arrastre  $v_a$  que producirá cada pistón obturador está relacionada con la velocidad de giro  $\omega$  de la noria:

$$v_a = \omega \frac{D}{2} = 25 \frac{\text{rev}}{\text{h}} \frac{2\pi}{\text{rev}} \frac{\text{h}}{3600 \text{ s}} \frac{3,2 \text{ m}}{2} \cong 0,07 \text{ m/s} \quad (1)$$





El volumen atrapado teórico entre dos pistones obturadores consecutivos se muestra en la figura 2. La altura del agua atrapada es consecuencia de la distancia  $h$  desde la superficie libre hasta la entrada de la tubería (v. figura 1).

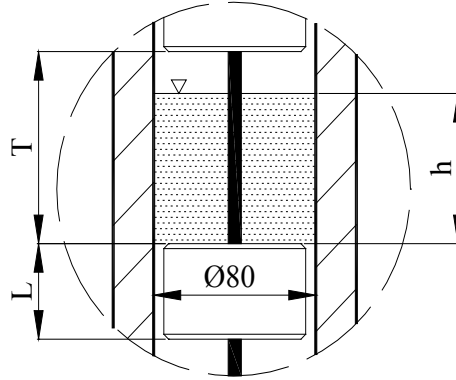


Figura 2  
Volumen atrapado  
entre dos pistones  
obturadores conse-  
cutivos

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 h = \frac{\pi}{4} (80 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \cdot 0,554 \text{ m} \cong 2,79 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \quad (2)$$

El tiempo de descarga de cada volumen atrapado será, entonces:

$$t = \frac{T + L}{v_a} = \frac{0,6 + 0,1 \text{ m}}{0,07 \text{ m/s}} = 10 \text{ s} \quad (3)$$

Finalmente, el caudal medio teórico impulsado será:

$$Q_{mt} = \frac{V}{t} = \frac{2,79 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{10 \text{ s}} = 2,79 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} \cong 1000 \text{ l/h} \quad (4)$$

**Calcule la fuga máxima entre pistón obturador y tubería durante un desplazamiento a lo largo de la tubería vertical.**

El caudal de fugas máximo se producirá cuando la tolerancia entre el pistón obturador y la tubería sea máxima (v. figuras 1 y 3). Así,

Diámetro máximo de la tubería:

$$D_2 = 80H8 \text{ mm (máx)} = 80 + 0,046 = 80,046 \text{ mm} = 80,046 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Diámetro mínimo del pistón:

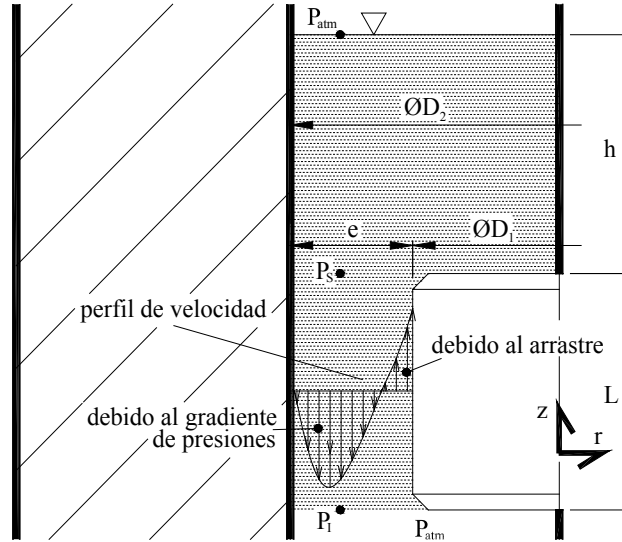
$$D_1 = 80h10 \text{ mm (mín)} = 80 - 0,120 = 79,880 \text{ mm} = 79,880 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Holgura máxima:

$$e = e_{\max} = \frac{D_2 - D_1}{2} = \frac{80,046 - 79,880}{2} = 0,083 \text{ mm} = 0,083 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$



Figura 3  
Detalle del flujo en la holgura



Para solucionar el problema, se lleva a cabo un análisis diferencial, ya que se puede tratar el agua como flujo viscoso, con número de Reynolds bajo, de modo que las fuerzas viscosas son de mayor importancia que las fuerzas de inercia. Además de la simetría axial, la geometría de la holgura permite una dirección de flujo predominante.

En la holgura máxima  $e$  (v. figura 3), se lleva a cabo un análisis diferencial en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ . Las componentes de una partícula de fluido en el flujo de fugas, teniendo en cuenta las hipótesis propuestas, son:

$$\begin{aligned} v_r &\cong 0 \\ v_\theta &= 0 \\ v_z &= f(r, z) \end{aligned} \tag{5}$$

De acuerdo con la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{6}$$

Si el flujo es permanente e incompresible,

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{7}$$

que, en coordenadas cilíndricas,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \tag{8}$$

De ahí, y tomando las hipótesis propuestas más (5), se deduce:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{9}$$



Luego,  $v_z$  es función de  $r$  y constante para  $z$ . Si se pretende analizar el movimiento del fluido, se debe evaluar el perfil de velocidades del flujo en la holgura. Para ello, se plantea la *ecuación de Navier-Stokes*, en su forma más genérica:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \rho \vec{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \quad (10)$$

cuyo último término es nulo, como resultado de la ecuación de continuidad, ecuación (7), si se admite un régimen permanente e incompresible. Las *ecuaciones de Navier-Stokes* en coordenadas cilíndricas, centrando la atención en la componente  $\hat{z}$ , son:

$$\begin{aligned} \hat{z}: \quad \rho \left[ \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial t}}_{=0, \text{Hip.}} + v_r \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial r}}_{=0, \text{Hip.}} + \frac{1}{r} v_\theta \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial \theta}}_{=0, \text{Hip.}} + \underbrace{v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}}_{=0, \text{Continuidad}} \right] = \\ = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}}_{=0, \text{Hip.}} + \underbrace{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}_{=0, \text{Continuidad}} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

y resulta:

$$\hat{z}: \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (12)$$

Analizando las otras dos direcciones,  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$ , debido a las hipótesis adoptadas, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \hat{r}: \quad 0 &= \frac{\partial P}{\partial r} \\ \hat{\theta}: \quad 0 &= \frac{\partial P}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = f(z) \quad (13)$$

De esta forma, tomando  $\hat{z}$ :  $g_z = -g$ , resulta:

$$\hat{z}: \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} (P + \rho g z) \equiv \frac{1}{\mu} \frac{\partial P^*}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (14)$$

Para obtener un perfil de velocidades, es conocido que la variación de la presión reducida  $P^*$  en la dirección  $\hat{r}$  se mantiene constante,

$$A = \frac{1}{\mu} \frac{dP^*}{dz} \quad \text{donde } A = Cte \quad (15)$$

y resulta:

$$\hat{z}: \quad A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (16)$$

Integrando por dos veces la ecuación anterior para obtener el perfil de velocidades,



$$C_1 + A \frac{r^2}{2} = r \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (17)$$

$$v_z(r, z) = \frac{Ar^2}{4} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (18)$$

Atendiendo ahora las condiciones de contorno:

$$r = R_1 = \frac{D_1}{2} \rightarrow v_z = v_a \quad (19)$$

$$r = R_2 = \frac{D_2}{2} \rightarrow v_z = 0$$

Sustituyendo las condiciones de contorno en la ecuación (18), se obtienen las expresiones de las constantes de integración del perfil de velocidad  $C_1$  y  $C_2$ ,

$$\left. \begin{aligned} v_a &= \frac{AR_1^2}{4} + C_1 \ln(R_1) + C_2 \\ 0 &= \frac{AR_2^2}{4} + C_1 \ln(R_2) + C_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{4} \frac{AR_1^2 - 4v_a - AR_2^2}{\ln(R_1) - \ln(R_2)} \\ C_2 &= \frac{1}{4} \frac{-AR_2^2 \ln(R_1) + AR_1^2 \ln(R_2) - 4v_a \ln(R_2)}{\ln(R_1) - \ln(R_2)} \end{aligned} \right. \quad (20)$$

El perfil de velocidades en la holgura máxima es:

$$\begin{aligned} v_z(r, z) &= \frac{Ar^2}{4} + \left[ -\frac{1}{4} \frac{AR_1^2 - 4v_a - AR_2^2}{\ln(R_1) - \ln(R_2)} \right] \ln(r) + \\ &+ \left[ \frac{1 - AR_2^2 \ln(R_1) + AR_1^2 \ln(R_2) - 4v_a \ln(R_2)}{4 \ln(R_1) - \ln(R_2)} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

El caudal volumétrico de fugas máximo  $Q_f$  se obtiene ahora mediante

$$Q_f = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{R_1}^{R_2} v_z \cdot 2\pi r dr \quad (22)$$

Integrando, teniendo en cuenta  $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$ , se obtiene la expresión del caudal de fugas máximo:

$$\begin{aligned} Q_f &= \frac{\pi^2}{45} \left\{ \frac{-5R_1^5 + 5R_1^3 AR_2^2 + 6R_1^5 A \ln(R_1) + 60R_1^3 \ln(R_2) v_a - 6R_1^5 A \ln(R_2) + 20R_1^3 v_a}{\ln(R_1) - \ln(R_2)} + \right. \\ &\left. + \frac{-60R_1^3 \ln(R_1) v_a + 5R_2^3 AR_1^2 - 5R_2^5 A - 6R_2^5 A \ln(R_1) + 6R_2^5 A \ln(R_2) - 20R_2^3 v_a}{\ln(R_1) - \ln(R_2)} \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

Por último, integrando la variación de la presión reducida en la dirección  $\hat{z}$ ,



$$A = \frac{1}{\mu} \frac{dP^*}{dz} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta P^*}{\Delta z} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta P + \rho g \Delta z}{\Delta z} \quad (24)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta P &= P_S - P_I = (P_{atm} + \rho gh) - P_{atm} = \rho gh \\ \Delta z &= z_S - z_I = L \end{aligned} \quad (25)$$

$$A = \frac{1}{\mu} \frac{\rho gh + \rho gL}{L} = \frac{1}{\mu} \frac{\rho g(h+L)}{L} \quad (26)$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación (26) los valores numéricos del enunciado y los radios de holgura máxima en la ecuación (23), se obtiene el caudal de fugas máximo:

$$Q_f = 0,41 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s} = 0,15 \text{ l/h} \quad (27)$$

→ 16



## Flujo a través de un anillo guía

El eje de un mecanismo deslizador lleva incorporado un anillo guía para evitar el contacto metal-metal, tal como se muestra en las figuras adjuntas. Entre el eje, el anillo guía y la carcasa, hay una película de aceite de 50 mPa·s de viscosidad dinámica y 850 kg/m<sup>3</sup> de densidad.

- 1- Evalúe el esfuerzo máximo para mover el eje a una velocidad de 5 cm/s (v. figura 1).

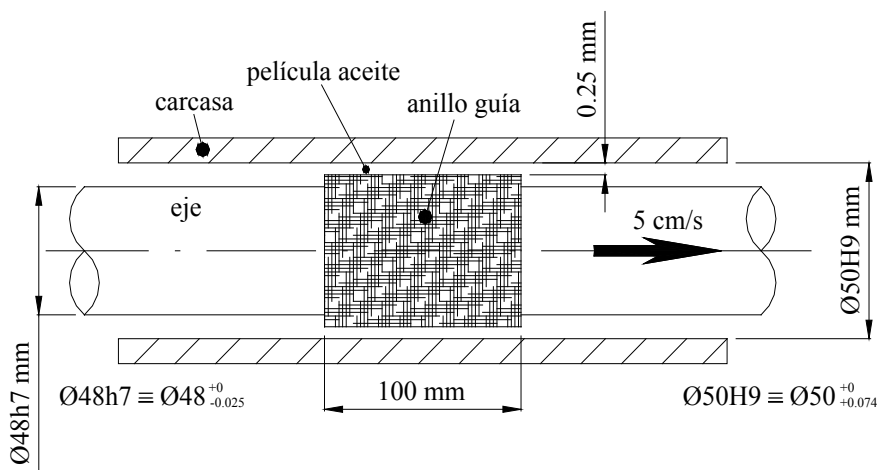


Figura 1.  
Esquema del eje y el anillo guía sin rascador (no a escala)

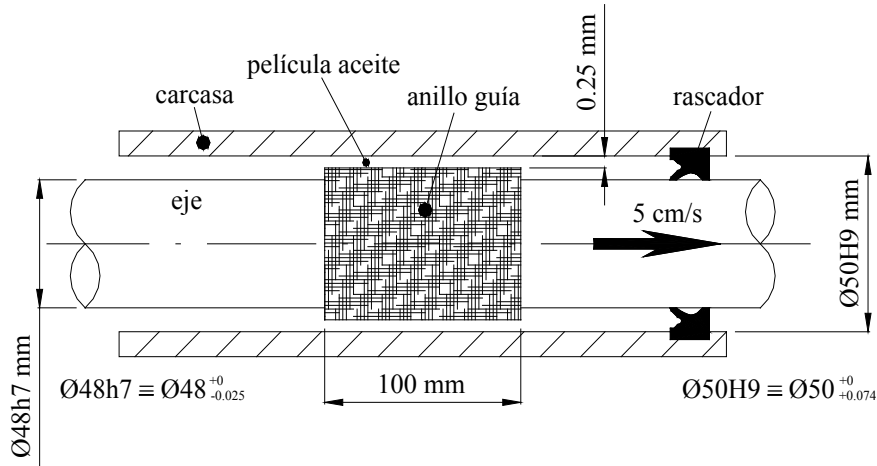
Haga lo propio para el caso de que exista un rascador que impida la salida de aceite (v. figura 2).

Hipótesis:

En el apartado 2, no considere los efectos de compresibilidad del aceite.



Figura 2.  
Esquema eje y anillo guía con rascador  
(no a escala)



### Estrategia para resolver el problema

Se sabe que, en general, hay tres formas de reducir las fuerzas de rozamiento entre dos superficies con movimiento relativo:

1. El uso de superficies de apoyo, tales como materiales de baja fricción, entre ellos anillos guía de materiales como el teflón, la poliamida, etc.
2. Usar elementos rodantes, como rodamientos de bolas o agujas.
3. Mejorar la lubricación mediante el uso de lubricantes especiales.

Se sabe que el uso de superficies de apoyo es una solución muy relevante en el diseño de actuadores lineales hidráulicos (cilindros). En concreto, se aplica en dos zonas: *a*) entre el pistón y la superficie interior de la carcasa y *b*) entre la superficie interior del tapón guía y el vástago.

Se sabe que los cilindros hidráulicos se utilizan, entre otras opciones, para accionar mecanismos de un gran número de máquinas (excavadoras, prensas, brazos elevadores, etc.).

### Comprender el problema

Basándose en la figura del enunciado, lea detenidamente el enunciado, incluidas todas las preguntas. Céntrese en el comportamiento real del “sándwich”: superficie de apoyo/aceite/carcasa.

¿Se ha dado cuenta de que usted debe analizar el flujo real de aceite por el interior del conducto anular delimitado por la carcasa y la superficie de apoyo?





¿Se ha dado cuenta de que el flujo de aceite entre dichas superficies sólidas puede ser debido al movimiento relativo de estas y por una diferencia de presión (esta última puede estar generada por la presencia de un anillo obturador (la junta el rascador) que impide la salida de aceite al exterior?

Recuerde que el movimiento del flujo de un fluido real a través de superficies sólidas se puede modelizar con la ayuda de las ecuaciones diferenciales correspondientes a los principios de conservación de masa y de cantidad de movimiento (Navier-Stokes).

Este problema ¿es similar a otros que ya hemos planteado? ¿Tiene claro el esquema o plan que debe seguir para resolverlo? Si tiene dudas, le invitamos a revisar algún problema que haya resuelto con relación al flujo laminar de un fluido viscoso a través de superficies sólidas planas, paralelas y deslizantes.

### **Trazar un plan para resolverlo**

¿Ya lo ha revisado? Le invitamos a que ordene sus ideas y las organice en un diagrama de flujo o plan de acción.

Preste atención. Cuando estamos en presencia de un anillo obturador (junta rascador) que impide la salida de aceite al exterior, ¿cómo podemos implementar esta cláusula o condición de contorno adicional? ¿Podemos recurrir a establecer un balance integral de masa? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuál sería el volumen de control elegido?

### **Ejecutar el plan**

Recuerde que, antes de hacer cualquier cosa, debe pensar en qué sistema de coordenadas ha elegido. Habida cuenta de que la ecuación de Navier-Stokes es una ecuación vectorial, ¿en qué componente de la velocidad del fluido ha centrado su atención?

Se sabe que, cuando se reduce el problema a un dominio espacial concreto, es fundamental especificar las condiciones de contorno que informan del comportamiento del fluido en las fronteras. Aquí, necesita recurrir a su capacidad de análisis.

Recuerde acompañar su desarrollos y cálculos con una explicación clara de lo que pretende y lo que ha hallado.

### **Comprobar los resultados**

Vuelva a leer el enunciado y compruebe que lo que se pedía es lo que ha averiguado.

Supóngase que ha llegado a unos resultados correctos. ¿Puede comprobar y justificar adecuadamente las hipótesis propuestas?

Por último, suponiendo que ha resuelto correctamente el problema, le invitamos a realizar un ejercicio de autocontrol. ¿Puede hacer un esquema de todo el proceso de cálculo y de las hipótesis utilizadas? ¿Cree que algunos de los cálculos realizados se podrían simplificar?



## Estudio

### Breve descripción

En términos genéricos, se trata de analizar el movimiento de una película anular de fluido que es arrastrada por la guía y que, debido a la presencia de un rascador (2.º apartado), genera una contrapresión que induce un flujo en sentido contrario al movimiento.

### Análisis

<b>Análisis DIFERENCIAL</b>		
<b>Viscosidad</b>		
Dominante		Despreciable
<b>Fluido</b>		Ecuación de Euler
Newtoniano	No newtoniano	
<b>Ecuación de Reynolds</b>	VER	

### Hipótesis que se plantean

<b>PROPIEDADES del fluido</b>			
<b>Viscosidad</b>	<b>Constante</b>	<b>Newtoniano</b>	<b>Homogénea</b>
<b>Densidad</b>	<b>Constante</b>	<b>Incompresible</b>	<b>Homogénea</b>
	Variable: Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		Gas ideal	Adiabático Isotérmico
<b>COMPORTAMIENTO del fluido</b>			
En reposo	Equilibrio	Absoluto Relativo	
<b>En movimiento</b>	<b>Régimen</b>	<b>Estacionario</b> Transitorio	
<b>PRESTACIONES del fluido</b>			
- Fuerzas debida al rozamiento viscoso y a presión			
Otras hipótesis de <b>TRABAJO</b>			
- La variación de la temperatura es despreciable. - La simetría es axial. - Las propiedades físicas son uniformes en las secciones de control. - Los sólidos son indeformables. - No se consideran los efectos de compresibilidad del aceite. - Las fuerzas máscas son despreciables.			

### Principios básicos y leyes fundamentales

- Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Ecuación de Navier-Stokes para la viscosidad dominante.
- Ecuación de Reynolds



## Resolución

### Estudio genérico

En general, se trata de analizar el movimiento de una película anular de fluido que es arrastrada por la guía y que, debido a la presencia de un rascador (2.º apartado), genera una contrapresión que induce un flujo en sentido contrario al movimiento.

Se trata, pues, de la combinación de dos flujos cuyos perfiles de velocidad son como se muestran en las figuras 3 y 4.

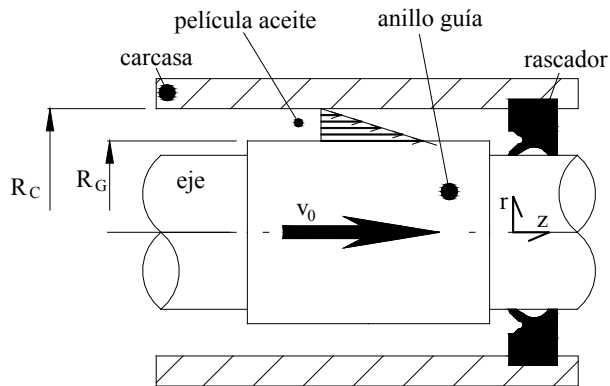


Figura 3  
Flujo debido al arrastre del anillo guía

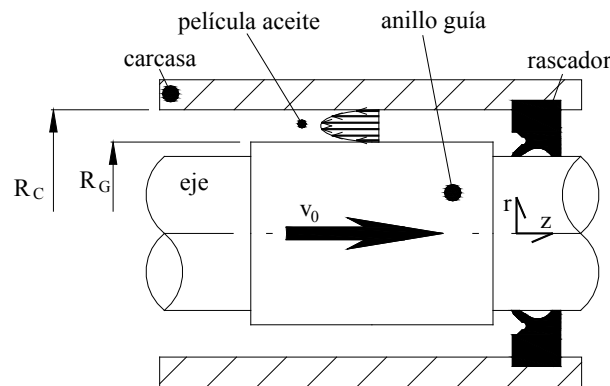


Figura 4.  
Flujo debido a la contrapresión generada por el rascador

Para solucionar el problema, se lleva a cabo un análisis diferencial, ya que se puede tratar el aceite como flujo viscoso, con un número de Reynolds bajo, por lo cual las fuerzas viscosas son de mayor importancia que las fuerzas de inercia. Además de la simetría axial, la geometría de la holgura permite una dirección de flujo predominante. Las componentes de la velocidad de una partícula de fluido son:

$$\begin{aligned} v_{\theta} &= 0 \\ v_r &= 0 \\ v_z &= f(z, r) \end{aligned} \quad (1)$$



De acuerdo con la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (2)$$

Si el flujo es permanente, se deduce:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (3)$$

Luego,  $v_z$  es solo función de la dirección  $\hat{r}$  y constante para la dirección  $\hat{z}$ .

Para analizar el movimiento de fluido, se debe evaluar el perfil de velocidades en la película anular. Para ello, se plantean las *ecuaciones de Navier-Stokes*:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \rho \vec{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) \quad (4)$$

Centrando la atención en la componente  $\hat{z}$ :

$$\begin{aligned} \hat{z}: \quad & \rho \left[ \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial t}}_{=0, \text{Hip.}} + v_r \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial r}}_{=0, \text{Hip.}} + \frac{1}{r} v_\theta \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial \theta}}_{=0, \text{Hip.}} + v_z \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial z}}_{=0, \text{Continuidad}} \right] = \\ & = -\frac{\partial P}{\partial z} + \underbrace{\rho g_z}_{=0, \text{direc. } z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}_{=0, \text{Continuidad}} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

resulta

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] \quad (6)$$

Analizando las otras dos direcciones  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$ , y debido a las hipótesis adoptadas:

$$\left. \begin{aligned} \hat{r}: \quad & 0 \cong \frac{\partial P}{\partial r} \\ \hat{\theta}: \quad & 0 = \frac{\partial P}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = f(z) \quad (7)$$

Para obtener un perfil de velocidades genérico que se pueda aplicar a ambos apartados, vamos a llamar

$$A = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} \quad (8)$$

y resulta:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = A \quad (9)$$



En esta ecuación, aparece el gradiente de presión en el término  $A$ , que será nulo para resolver el 1.º apartado y será un valor constante y diferente de cero para el 2.º apartado. Esta ecuación se puede integrar para obtener el perfil de velocidades:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) &= Ar \\ r \frac{\partial v_z}{\partial r} &= A \frac{r^2}{2} + K_1 \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} &= \frac{A}{2} r + \frac{K_1}{r} \\ v_z(r, z) &= \frac{A}{4} r^2 + K_1 \ln r + K_2\end{aligned}\quad (10)$$

Para evaluar las constantes de integración, debemos formular las condiciones de contorno, que son:

$$\begin{aligned}r = R_C &\rightarrow v_z = 0 \\ r = R_G &\rightarrow v_z = v_0\end{aligned}\quad (11)$$

Sustituyendo, resulta:  $0 = \frac{A}{4} R_C^2 + K_1 \ln R_C + K_2$

$$v_0 = \frac{A}{4} R_G^2 + K_1 \ln R_G + K_2\quad (12)$$

Ahora, restando ambas expresiones, se deduce:

$$\begin{aligned}K_1 [\ln R_C - \ln R_G] + \frac{A}{4} [R_C^2 - R_G^2] &= -v_0 \\ K_1 &= \frac{-\frac{A}{4} R_C^2 \left[ 1 - \left( \frac{R_G}{R_C} \right)^2 \right] - v_0}{\ln \left( \frac{R_C}{R_G} \right)}\end{aligned}\quad (13)$$

Y, para la constante  $K_2$ :

$$0 = \frac{A}{4} R_C^2 + \left\{ \frac{-\frac{A}{4} R_C^2 \left[ 1 - \left( \frac{R_G}{R_C} \right)^2 \right] - v_0}{\ln \left( \frac{R_C}{R_G} \right)} \right\} \ln R_C + K_2$$



$$K_2 = \left\{ \frac{\frac{A}{4} R_C^2 \left[ 1 - \left( \frac{R_G}{R_C} \right)^2 \right] + v_0}{\ln \left( \frac{R_C}{R_G} \right)} \right\} \ln R_C - \frac{A}{4} R_C^2 \quad (14)$$

Numéricamente, con los datos del enunciado:

$$\begin{aligned} R_C &= 0,025 \text{ m} \\ R_G &= 0,02475 \text{ m} \\ v_0 &= 0,05 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (15)$$

En las ecuaciones de las constantes  $K_1$  y  $K_2$ :

$$\begin{aligned} K_1 &= -0,4974958051 - 0,0003093802038A \\ K_2 &= -18,35202054 - 0,001297516277A \quad [\text{S.I.}] \end{aligned} \quad (16)$$

de forma que el perfil de velocidades resulta:

$$\begin{aligned} v_z(r, z) &= \frac{Ar^2}{4} + (-0,4974958051 - 0,0003093802038A) \ln(r) \\ &\quad - 0,001297516277A - 18,35202054 \quad [\text{m/s}] \end{aligned} \quad (17)$$

El esfuerzo cortante máximo se producirá en la carcasa de radio  $R_C$ ,

$$\tau|_{R_C} = \mu \left. \frac{dv_z}{dr} \right|_{R_C} \quad (18)$$

donde

$$\frac{dv_z}{dr} = \frac{Ar}{2} + \frac{-0,4974958051 - 0,0003093802038A}{r} \quad [\text{s}^{-1}] \quad (19)$$

**Evalúe el esfuerzo máximo para mover el eje a una velocidad de 5 cm/s (v. figura 1).**

En este caso, la no existencia de rascador provoca que no exista gradiente de presión y, por tanto:

$$A = 0 \quad (20)$$

Y el perfil de velocidades debido tan solo al arrastre del eje  $v_{z,a}$  será:

$$v_{z,a}(r, z) = -18,35202054 - 0,4974958051 \ln(r) \quad [\text{m/s}] \quad (21)$$

y la fuerza,



$$F = 2\pi R_C L \tau|_{R_C} = 2\pi R_C L \mu \left. \frac{\partial v_{z,a}}{\partial r} \right|_{R_C} \quad (22)$$

$$F = 2\pi(0,025 \text{ m})(0,1 \text{ m})(0,05 \text{ Pa}\cdot\text{s}) \left( \frac{-0,4974958051}{0,025} \text{ s}^{-1} \right) = -0,156 \text{ N} \quad (23)$$

donde el signo negativo indica su oposición al movimiento del eje.

**Haga lo propio para el caso de que exista un rascador que impida la salida de aceite (v. figura 2).**

En este caso, la existencia de un rascador provoca que exista un gradiente de presión y, por tanto:

$$A \neq 0 \quad (24)$$

Hay que buscar una condición que permita evaluar  $A$ . Esta condición consiste en que la presencia del rascador condiciona el flujo de aceite mediante la ecuación de *continuidad* para flujo incompresible, como  $\sum Q_{VC} = 0$  (v. figura 5).

$$\int_{S_2} v_z dS = \int_{S_1} v_0 dS \quad (25)$$

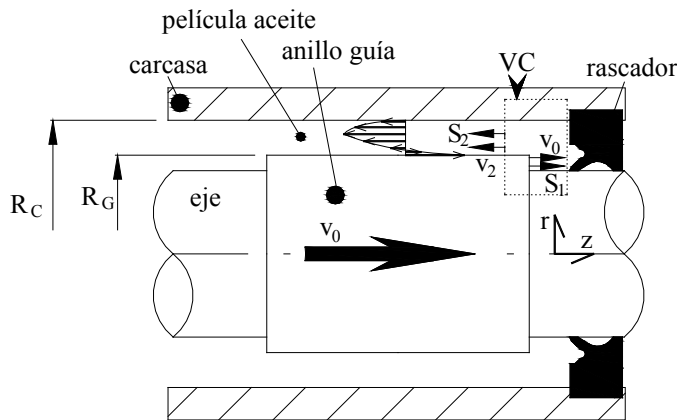


Figura 5. Volumen de control

Teniendo presentes las hipótesis propuestas,

$$\underbrace{\int_{R_G}^{R_C} v_z 2\pi r dr}_{Q_2} = v_0 \underbrace{\frac{\pi}{4} [D_G^2 - D_E^2]}_{Q_1} \quad (26)$$



El perfil de velocidades que tiene en cuenta el gradiente de presiones deducido anteriormente es:

$$v_z(r, z) = \frac{Ar^2}{4} + (-0,4974958051 - 0,0003093802038A)\ln(r) - 0,001297516277A - 18,35202054 \quad [\text{m/s}] \quad (27)$$

e, integrando, se obtiene la expresión del caudal en la película de aceite  $Q_2$ :

$$Q_2 = -0,203498 \cdot 10^{-12} A + 0,9735664297 \cdot 10^{-6} \quad [\text{m}^3/\text{s}] \quad (28)$$

Y el caudal que aporta la sección entre el anillo guía y el eje  $Q_1$  (v. figura 5) es:

$$Q_1 = v_0 \frac{\pi}{4} [D_G^2 - D_E^2] = v_0 \pi [R_G^2 - R_E^2] = 0,05\pi [(0,02475)^2 - (0,024)^2] = 5,74322407 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s} \quad (29)$$

De forma que, igualando los dos caudales, se obtiene el valor de la constante  $A$ :

$$A = -0,2343835143 \cdot 10^8 \quad [\text{m}^{-1}\text{s}^{-1}] \quad (30)$$

Finalmente, el gradiente de presiones será

$$A = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} \cong \frac{1}{\mu} \frac{\Delta P}{\Delta z}$$

$$-0,2343835143 \cdot 10^8 = \frac{1}{50 \cdot 10^{-3}} \frac{\Delta P}{0,1}$$

$$\Delta P = -117191,76 \text{ Pa} \quad (31)$$

La fuerza total  $F$  será debida a dos fenómenos:  $F_1$  por el esfuerzo tangencial y  $F_2$  por el gradiente de presiones:

$$F = \underbrace{F_1}_{\text{debida a } \tau} + \underbrace{F_2}_{\text{debida a } \Delta P} \quad (32)$$

$$F_1 = 2\pi R_C L \tau = 2\pi R_C L \mu \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{R_C=0,025} \quad (33)$$

$$F_1 = 2\pi (0,025 \text{ m})(0,1 \text{ m})(50 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s})[-3123,91 \text{ s}^{-1}] = -2,45 \text{ N}$$

$$F_2 = \pi (R_G^2 - R_E^2) \Delta P \quad (34)$$

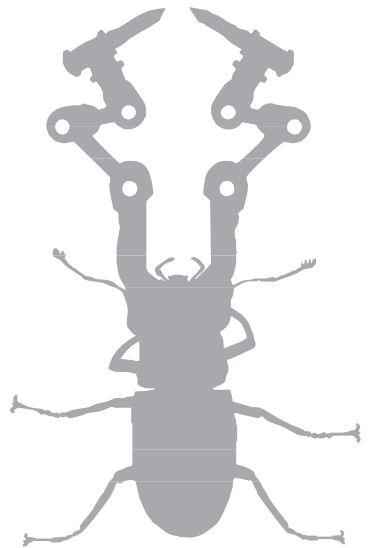
$$F_2 = \pi [(0,02475 \text{ m})^2 - (0,024 \text{ m})^2](-117191,76 \text{ Pa}) = -13,46 \text{ N}$$

Finalmente, la fuerza total será:

$$F = \underbrace{-2,45}_{\text{debida a } \tau} + \underbrace{-13,46}_{\text{debida a } \Delta P} = -15,91 \text{ N} \quad (35)$$

donde el signo negativo indica que la fuerza se opone al movimiento.





→ 17



## Fluidodinámica de una bomba de pistones

En la figura 1, se muestra una bomba de desplazamiento volumétrico positivo de pistones axiales. En un instante determinado, el pistón y el plato inclinado son ortogonales y la presión en la cámara A es de 20 bar (v. figura 2). El fluido tiene una viscosidad dinámica de  $28 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$  y su densidad es de  $875 \text{ kg/m}^3$ .

Para esta posición, se pide calcular:

1. La fuerza  $F_A$  que soporta el patín.
2. La presión  $P_B$  en la cámara B del patín.
3. El caudal  $Q$  que fluye entre el patín y el plato inclinado.
4. La holgura  $h$  entre el patín y el plato inclinado.

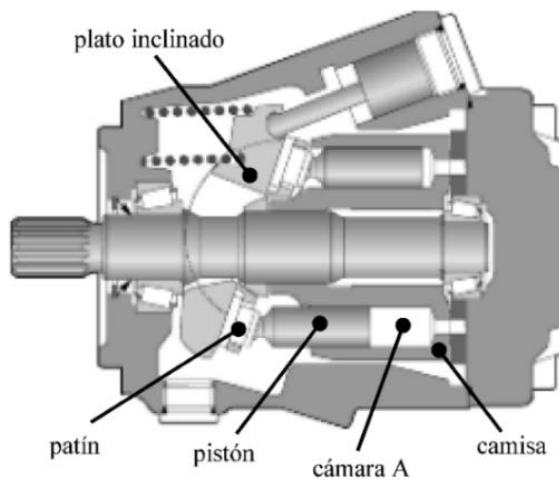
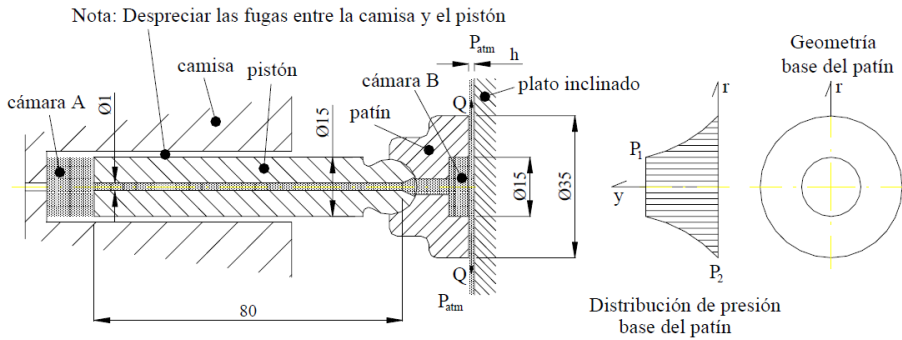


Figura 1.  
Bomba de pistones  
axiales (cortesía de  
Bosch Rexroth)



Figura 2.  
Esquema del pistón y del plato inclinado en el instante determinado en que son ortogonales entre sí ( $P_{atm}$   $\equiv$  presión atmosférica) (no a escala)



## Estrategia para resolver el problema

Tras la relación de problemas que le hemos propuesto, usted está experimentando un progreso en sus destrezas y/o habilidades, y puede aprovechar las virtudes de los distintos tipos de análisis utilizados: básicamente el integral y el diferencial.

En este problema, pretendemos que utilice conjuntamente los dos tipos de análisis. El soporte físico es una bomba de pistones axiales. Le invitamos a visualizar el funcionamiento de esta máquina a través de algunos videos de YouTube: <https://www.youtube.com/watch?v=CksSdoG0w44>

## Comprender el problema

Apoyándose en el vídeo y en la figura del enunciado, lea detenidamente el enunciado, incluidas todas las preguntas. Céntrese en el comportamiento real del pistón y en el patín de apoyo.

Preste atención a los siguientes fenómenos, que se manifiestan mientras el barrilete de la bomba gira a velocidad constante:

- Para reducir la fricción entre las superficies sólidas del patín y el plato inclinado, se obliga a pasar un flujo de aceite (que actúa de lubricante).
- Dicho flujo de aceite proviene de la cámara del pistón y pasa a través de un conducto de sección circular mecanizado en el interior del pistón.

Como podrá constatar en sus apuntes o en un libro de texto de referencia, entre las soluciones exactas de la ecuación diferencial de Navier-Stokes figuran como ejemplos típicos:

- El movimiento del flujo de un fluido real a través de un capilar.
- El movimiento del flujo de aceite a través de un cojinete fluidoestático plano.

Le invitamos a revisar estos temas y a responder a las preguntas siguientes:

¿Cómo justifica que el caudal que fluye a través del tubo capilar es igual al caudal que entra en el patín?



¿Cómo justifica que la fuerza generada por la presión de aceite en la cámara del pistón es soportada por la fuerza equivalente a la distribución de presiones sobre el plato inclinado?

¿Ve admisible ahora que, para acoplar los dos flujos descritos en el párrafo anterior, se necesita la ayuda del análisis integral? En caso afirmativo, elogiamos su esfuerzo intelectual. En caso contrario, queremos recordarle que lo normal es que al principio no le sea fácil y que solo después de haber “jugado” con las ideas algún tiempo logrará digerir estos razonamientos. ¡No se rinda! ¡Usted puede!

Vuelva a probarlo de nuevo..., pero no se agobie. Distráigase un poco o quédese sentado con los ojos cerrados y descansando las manos sobre sus piernas, con los pies bien apoyados en el suelo. Y deje ir a la mente libre por donde quiera. Hágalo ahora; no hay prisa...

### **Trazar un plan para resolverlo**

Ahora vuelva a leer el enunciado, ordene sus ideas y proyéctelas en un diagrama de flujo. Le sugerimos que haga tantos dibujos y esquemas como estime oportuno. No condicione su creatividad e imaginación. Se trata de empezar por donde hay que empezar e ir avanzando paulatinamente.

Se aconseja acompañar los desarrollos y los cálculos con una explicación clara de lo que pretende y lo que ha hallado.

Atención: Lo normal es que, transcurrido un tiempo prudencial, usted vuelva a examinar este problema. Todo el tiempo empleado ahora en plasmar estas ideas y razonamientos de la forma más clara y concisa posible es, pues, una inversión muy rentable, y no solo desde el punto de vista del ahorro (podrá hacer la revisión mucha más rápidamente), sino también desde el punto de vista educativo. El esfuerzo mental que requiere esta actividad adicional incide directamente sobre su capacidad de aprendizaje.

### **Ejecutar el plan**

Recuerde que, antes de hacer cualquier cosa, deberá pensar en qué sistema de coordenadas ha elegido. Habida cuenta de que la ecuación de Navier-Stokes es una ecuación vectorial, ¿en qué componente de la velocidad del fluido ha centrado su atención en cada caso?

Se sabe que, cuando el problema se reduce a un dominio espacial concreto, resulta fundamental especificar las condiciones de contorno que informan del comportamiento del fluido en las fronteras. Aquí necesitará recurrir a su capacidad de análisis.

Este problema contiene varias situaciones que requieren definir correctamente las condiciones de contorno. No las considere como una rutina más. Intente sacar provecho de su significado.

Recuerde acompañar sus desarrollos y cálculos con una explicación clara de lo que pretende y lo que ha hallado.



### Comprobar los resultados

Vuelva a leer el enunciado y compruebe que lo que se pedía es lo que ha averiguado.

Supóngase que ha llegado a unos resultados correctos. ¿Puede comprobar y justificar adecuadamente las hipótesis propuestas?

Por último, suponiendo que ha resuelto correctamente el problema, le invitamos a realizar un ejercicio de autocontrol. ¿Puede hacer un esquema de todo el proceso de cálculo y de las hipótesis utilizadas? ¿Cree que algunos de los cálculos realizados se podrían simplificar?

### Estudio

#### Breve descripción

La simetría axial, la geometría reducida de la holgura y la condición de viscosidad dominante son la base que permite evaluar el perfil de velocidades mediante un análisis diferencial.

#### Análisis

Análisis <b>DIFERENCIAL</b>	
<b>Viscosidad</b>	
<b>Dominante</b>	Despreciable
<b>Fluido</b>	Ecuación de Euler
<b>Newtoniano</b>	No newtoniano
<b>Ecuación de Reynolds</b>	VER



## Hipótesis que se plantean

<b>PROPIEDADES del fluido</b>			
<b>Viscosidad</b>	<b>Constante</b>	<b>Newtoniano</b>	<b>Homogénea</b>
<b>Densidad</b>	<b>Constante</b>	<b>Incompresible</b>	<b>Homogénea</b>
	Variable: Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		Gas ideal	Adiabático
			Isotérmico
<b>COMPORTAMIENTO del fluido</b>			
En reposo	Equilibrio	Absoluto	
		Relativo	
En movimiento	Régimen	<b>Estacionario</b>	
		Transitorio	
<b>PRESTACIONES del fluido</b>			
- Presión y flujo de fugas por una geometría que se puede considerar bidimensional, con una dirección de flujo dominante			
<b>Otras hipótesis de TRABAJO</b>			
- La variación de la temperatura es despreciable. - La simetría es axial. - Las propiedades físicas son uniformes en las secciones de control. - Los sólidos son indeformables. - El efecto de la gravedad en el fluido es despreciable.			

## Principios básicos y leyes fundamentales

- 2.<sup>a</sup> ley de Newton
- Conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Ecuación de Navier-Stokes para la viscosidad dominante. Ecuación de Reynolds

## Resolución

### La fuerza $F_A$ que soporta el patín

La presión en la cámara A es de  $P_0 = 20 \text{ bar} = 20 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . Así, la fuerza ejercida sobre el patín que le transmite el pistón en dirección horizontal (dirección  $y$  en la figura 2) es:

$$y: F_A = \frac{\pi}{4} d^2 P_0 = \frac{\pi}{4} (15 \cdot 10^{-3})^2 20 \cdot 10^5 = 353,4 \text{ N} \quad (1)$$



### La presión $P_B$ en la cámara B del patín

En la base del patín, se crea una distribución de presiones como la que se muestra en la figura 2. El patín puede soportar la fuerza  $F_A$  ejercida por la presión de la cámara A gracias a la distribución de presiones que se genera en la holgura  $h$  del patín. Así, la fuerza  $F_{\text{patín}}$  producida por la distribución de presiones sobre la base del patín generará un equilibrio de fuerzas tal que

$$y : F_A \equiv F_{\text{patín}} = \underbrace{\int_0^{R_1} P_1 dS_1}_{\text{presión cámara B}} + \underbrace{\int_{R_2}^{R_2} P dS_2}_{\text{distribución de presiones en el patín}} \quad (2)$$

donde se asume que la presión  $P_I = P_B$  en la cámara B permanece constante;  $P$  es la distribución de presiones en el patín, y  $R_1 = 15/2 = 7,5$  mm y  $R_2 = 35/2 = 17,5$  mm (v. figura 2).

Al principio, la distribución de presiones  $P$  en el patín no es conocida, pero se puede intuir que será función de

$$p = f(r, h, \mu, Q) \quad (3)$$

es decir, de la geometría de la holgura ( $r, h$ ), el fluido ( $\mu$ ) y el caudal volumétrico a través de la holgura del patín ( $Q$ ). Si bien el caudal volumétrico es otra incógnita, se sabe que se define como

$$Q = \int_S \vec{v} \cdot dS_{\text{huelgo}} \quad (4)$$

perfil velocidades

Así, es necesario determinar el perfil de velocidades la holgura del patín, que permitirá obtener el caudal volumétrico, la distribución de presiones y, finalmente, con el equilibrio de fuerzas de la ecuación (2), determinar la holgura  $h$ .

Y, en el patín, el perfil de velocidades se producirá en la holgura y, gracias a su geometría y a la viscosidad dominante del fluido, se puede intuir que será función de

$$v_{\text{huelgo}} = f(y, r, h, \mu, P) \quad (5)$$

Estas deducciones permitirán llevar a cabo un **análisis diferencial** en que las hipótesis llevarán a determinar una dirección de flujo dominante. Las componentes de una partícula de la película de fluido en la película de aceite son:

$$\begin{aligned} v_r &= f(r, y) \\ v_\theta &\approx 0 \\ v_y &\approx 0 \end{aligned} \quad (6)$$

donde la coordenada  $z$  es denominada  $y$  por conveniencia de la geometría y la figura del enunciado. De acuerdo con la *ecuación de continuidad*,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (7)$$





Si el flujo es estacionario,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

que, en coordenadas cilíndricas,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \rho \underbrace{v_\theta}_{\approx 0} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \underbrace{v_y}_{\approx 0} \right) = 0 \quad (9)$$

donde la coordenada  $z$  es denominada  $y$  por conveniencia de las coordenadas tomadas en la figura del enunciado. De ahí se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) = 0 &\Rightarrow \text{Hip.} \Rightarrow \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{v_r}{r} \\ \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Si se pretende analizar el movimiento del fluido, hay que evaluar el perfil de velocidades en la película anular. Para ello, se plantea la *ecuación de Navier-Stokes* en su forma más genérica:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \rho \vec{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \quad (11)$$

cuyo último término es nulo y resulta de la ecuación de continuidad, ecuación (7), si se admite régimen permanente. Las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas, centrando la atención en la componente dominante  $r$ , son:

$$\begin{aligned} \rho \left[ \underbrace{\frac{\partial v_r}{\partial t}}_{=0, \text{Hip.}} + \underbrace{v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}}_{=0, \text{Orden de magnitud.}} + \underbrace{\frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}}_{=0, \text{Hip.}} - \underbrace{\frac{v_\theta^2}{r}}_{=0, \text{Hip.}} + \underbrace{v_y \frac{\partial v_r}{\partial y}}_{=0, \text{Hip.}} \right] = \\ = \underbrace{\rho g_r}_{=0} - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[ \underbrace{\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2}}_{=0, \text{Ec. Continuidad, Ec. (10)}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}}_{=0, \text{Hip.}} - \underbrace{\frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}}_{=0, \text{Hip.}} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

Si se admiten las hipótesis planteadas y que la dirección dominante del flujo bidimensional es  $r$ , resulta:

$$\rho \left[ v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] \cong -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial y^2} \quad (13)$$

donde parece que ya no es posible simplificar más. Para ello, hay que llevar a cabo un análisis de los órdenes de magnitud de los términos. Así,



$$\left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \ll \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial y^2} \right) \text{ ya que } y = h \ll r = R_2 \text{ en el patín} \quad (14)$$

De esta forma, resulta:

$$\frac{1}{\mu} \frac{dP}{dr} \cong \frac{d^2 v_r}{dy^2} \quad (15)$$

Para obtener un perfil de velocidades, se sabe que el gradiente de presión en la dirección  $r$  no es función de la coordenada  $y$ , y que la velocidad es función de  $r$  y  $y$ :

$$\frac{1}{\mu} \underbrace{\frac{dP}{dr}}_{f(r)} \cong \underbrace{\frac{d^2 v_r}{dy^2}}_{f(r,y)} \quad (16)$$

Para poder integrar de forma independiente, se parte de la Ecuación de Continuidad simplificada, ecuación (10), donde

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = 0 \rightarrow \begin{cases} rv_r \neq f(r) \\ rv_r = f(y) \\ v_r = \frac{f(y)}{r} \end{cases} \quad (17)$$

de forma que

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{f(y)}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} \quad (18)$$

Retomando la ecuación de Navier-Stokes simplificada, ecuación (15),

$$\frac{r}{\mu} \underbrace{\frac{dP}{dr}}_{f(r)} = \underbrace{\frac{d^2 f(y)}{dy^2}}_{f(y)} \quad (19)$$

Ahora se puede integrar a cada lado del igual de forma independiente.

$$\frac{d^2 f(y)}{dy^2} = A, \text{ siendo } A \equiv \frac{r}{\mu} \frac{dP}{dr} \quad (20)$$

Integrando por dos veces la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} \frac{df(y)}{dy} &= Ay + C_1 \\ f(y) &= A \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 \end{aligned} \quad (21)$$

Conocida la ecuación (17),  $v_r = \frac{f(y)}{r}$ , el perfil de velocidades queda:



$$v_r = \frac{A}{r} \frac{y^2}{2} + \frac{C_1}{r} y + \frac{C_2}{r} \quad (22)$$

Atendiendo ahora las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} y = 0 &\rightarrow v_r = 0 \\ y = h &\rightarrow v_r = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

donde  $h$  es la holgura del patín con el plato inclinado de valor constante. Sustituyéndolas en el perfil de velocidades anterior, se obtienen las expresiones de las constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{A}{r} \frac{0^2}{2} + \frac{C_1}{r} 0 + \frac{C_2}{r} \Rightarrow C_2 = 0 \\ 0 &= \frac{A}{r} \frac{h^2}{2} + \frac{C_1}{r} h + \frac{C_2}{r} \Rightarrow C_1 = -\frac{Ah}{2} = -\frac{r}{\mu} \frac{dP}{dr} \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (24)$$

Finalmente, el perfil de velocidades en la base del patín es:

$$v_r = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dr} (y^2 - hy) \quad (25)$$

que es función de  $y$  por la viscosidad del fluido y función de  $r$  por la distribución de presiones.

El caudal volumétrico  $Q$  que fluye entre el patín y el plato inclinado se puede obtener ahora a partir de la ecuación (4):

$$\begin{aligned} Q &= \int_S \vec{v}_{\text{perfil velocidades}} \cdot dS_{\text{holgura}} = \int_S v_r \cdot dS_{\text{holgura}} \\ Q &= \int_0^h \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dr} (y^2 - hy) 2\pi r dy = \frac{\pi r}{\mu} \frac{dP}{dr} \left[ \frac{y^3}{3} - \frac{hy^3}{3} \right]_0^h \\ Q &= -\frac{\pi r h^3}{6\mu} \frac{dP}{dr} \end{aligned} \quad (26)$$

donde la variación de la presión es negativa a medida que  $r$  aumenta y es una constante para la sección determinada, con lo cual se obtiene un caudal positivo en la dirección  $r$  positiva.

También cabe destacar que el diferencial de superficie en la holgura se toma de forma genérica con un radio  $r$ , ya que el caudal volumétrico es constante para cualquier radio entre  $R_1$  y  $R_2$ :

$$dS_{\text{holgura}} = 2\pi r dy \quad \text{donde} \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad (27)$$

El gradiente de presión en la dirección  $r$  es:



$$\frac{dP}{dr} = -\frac{6\mu}{\pi r h^3} Q \quad (28)$$

e integrando,

$$\int_{P_1}^P dP = \int_{R_1}^r -\frac{6\mu}{\pi r h^3} Q dr \quad (29)$$

$$P = P_1 - \frac{6\mu}{\pi h^3} Q \ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$$

donde la presión  $P_1$  es la presión en la cámara B. De esta forma, se obtiene la distribución de presión en la base del patín para una  $r$  genérica. La condición de contorno para la presión es:

$$r = R_2 \rightarrow P = P_2 \quad \text{donde} \quad P_2 = P_{\text{atm}} = 0(\text{rel}) \quad (30)$$

Y la presión  $P_1$  queda definida como

$$P_1 = \frac{6\mu}{\pi h^3} Q \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (31)$$

La fuerza producida por la distribución de presiones sobre la base del patín es:

$$y : F_{\text{patín}} = \underbrace{\int_0^{R_1} P_1 dS_1}_{\text{presión cámara B}} + \underbrace{\int_{R_2}^{R_2} P dS_2}_{\text{distribución de presiones en el patín}} \quad (32)$$

$$F_{\text{patín}} = \int_0^{R_1} P_1 2\pi r dr + \int_{R_1}^{R_2} \left[ P_1 - \frac{6\mu}{\pi h^3} Q \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \right] 2\pi r dr$$

E, integrando se obtiene:

$$F_{\text{patín}} = P_1 \pi R_1^2 + P_1 \pi (R_2^2 - R_1^2) - \frac{12\mu}{h^3} Q \left[ \frac{1}{2} R_2^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{1}{4} (R_2^2 - R_1^2) \right] \quad (33)$$

donde  $P_1$ ,  $Q$  y  $h$  son incógnitas, aunque se sabe que son constantes.

Finalmente, tomando las ecuaciones (2), (26) y (28), se puede determinar el valor de las tres incógnitas. Para la presión en la cámara B:

$$P_1 = \frac{2F_A \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{\pi (R_2^2 - R_1^2)} \quad (34)$$

Tomando los valores numéricos ya conocidos:



$$\begin{aligned} R_1 &= 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ R_2 &= 17,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ F_A &= 353,4 \text{ N} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\text{Y la presión en la cámara B es: } P_1 \cong 762505 \text{ Pa} \cong 7,6 \text{ bar} \quad (36)$$

### El caudal $Q$ que fluye entre el patín y el plato inclinado

Tomando las hipótesis ya expuestas en el problema, entre otras, de régimen laminar (a comprobar a posteriori), régimen permanente, tubería horizontal y lisa, se puede obtener el caudal  $Q$  que fluye por el interior del pistón de 1 mm de diámetro, y que finalmente saldrá entre el patín y el plato inclinado. En las condiciones expuestas, se obtiene la ecuación del flujo de Hagen-Poiseuille:

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8 \mu L} = \frac{\pi R^4 (P_0 - P_1)}{8 \mu L} \quad (37)$$

donde  $R = d/2$  es el radio del agujero que pasa por el interior del pistón y  $L$ , su longitud. Sustituyendo valores, se obtiene el caudal  $Q$  que fluye entre el patín y el plato inclinado:

$$Q = \frac{\pi (0,5 \cdot 10^{-3})^4 (20 \cdot 10^5 - 7,6 \cdot 10^5)}{8 \cdot 28 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \cdot 10^{-3}} = 1,36 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s} \cong 0,82 \text{ l/min} \quad (38)$$

La comprobación de la hipótesis de régimen laminar es:

$$\text{Re} = \frac{4 \rho Q}{\pi \mu d} = \frac{4 \cdot 875 \cdot 1,36 \cdot 10^{-5}}{\pi \cdot 28 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-3}} \approx 541 \Rightarrow \text{Régimen laminar} \quad (39)$$

### La holgura $h$ entre el patín y el plato inclinado

Finalmente, tomando la distribución de presiones desarrollada anteriormente, se puede evaluar la holgura  $h$  entre el patín y el plato inclinado:

$$h = \sqrt[3]{\frac{6 \mu}{\pi P_1} Q \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)} \quad (40)$$

Y, sustituyendo valores,

$$h = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 7,6 \cdot 10^5} 1,36 \cdot 10^{-5} \ln \left( \frac{17,5 \cdot 10^{-3}}{7,5 \cdot 10^{-3}} \right)} \cong 9,3 \cdot 10^{-5} \text{ m} \quad (41)$$

La holgura  $h$  entre el patín y el plato inclinado es de 93  $\mu\text{m}$ .

→ 18



## Fluidodinámica de una corredera

El cilindro hidráulico (v. figura 1) de una instalación oleohidráulica se acciona mediante una válvula de control direccional (distribuidor, v. Fotografía 1). Se observa que, en la situación de la figura 1, el pistón del cilindro descende a una velocidad de 1 cm/día. Sabiendo que la presión en la vía de alimentación P es de 100 bar, se pide:

- 1- Determinar la expresión para calcular la presión en B.
- 2- Aplicar los datos siguientes:

$$\rho = 850 \text{ kg/m}^3$$

$$\nu = 32 \text{ cSt}$$

$$S_{\text{área}} = 100 \text{ cm}^2$$

Hipótesis:

Despreciar las pérdidas de carga en los conductos y considerar solo las pérdidas en los juegos de la corredera y la carcasa. Despreciar los efectos de compresibilidad del aceite.

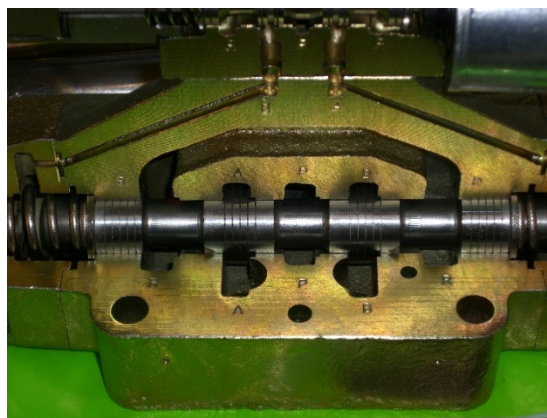
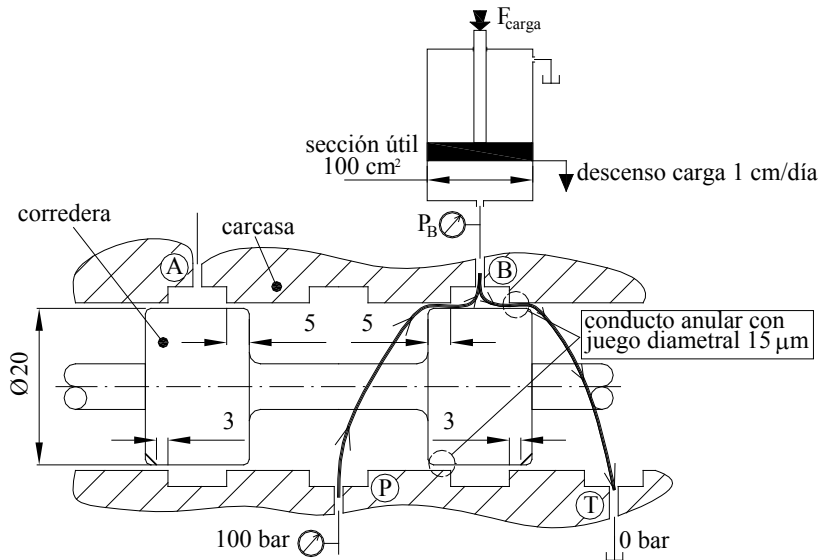


Figura 1.  
Sección de la válvula de control direccional



Figura 2.  
Esquema de la instalación oleohidráulica



## Estrategia para resolver el problema

Tras la relación de problemas que le hemos propuesto, usted está experimentando un progreso en sus destrezas y/o habilidades, y puede aprovechar las virtudes de los distintos tipos de análisis utilizados: básicamente el integral y el diferencial.

En este problema, pretendemos que utilice conjuntamente los dos tipos de análisis. El soporte físico es una válvula de control direccional oleohidráulica. Le invitamos a visualizar el funcionamiento de esta máquina a través de algunos vídeos de YouTube: <https://www.youtube.com/watch?v=bakUHR39K1U>

## Comprender el problema

Basándose en el vídeo y en la figura del enunciado, lea detenidamente todo el texto, incluidas todas las preguntas. Céntrese en el comportamiento real de la corredera y el cuerpo de la válvula.

Preste atención a los fenómenos fluidodinámicos que se manifiestan mientras la corredera se mantiene en la posición neutra, es decir, bloqueando las vías A y B.

Observe que existe un juego mecánico entre la corredera y el cuerpo de la válvula, para que la corredera pueda desplazarse por su interior. Observe que la presencia de este juego permite un flujo de aceite forzado desde la vía P (presión) hasta la vía B (actuador) y, por la misma razón, desde la vía B hasta la vía T (tanque).

Presuponemos que usted es capaz de intuir o visualizar el movimiento del aceite por el interior de estas holguras. ¿Cómo puede estimar la magnitud de estas fugas? ¿Cómo justifica el sentido del flujo de dichas fugas?





Le dejamos en sus manos responder a estas preguntas, pero tenga presente que el análisis diferencial le permite estimar el perfil de velocidad del aceite a través de superficies sólidas y el análisis integral le permite hacer balances de masa.

Este problema ¿es similar a otros que ya hemos planteado? ¿Tiene claro el esquema o plan que va a seguir para resolverlo? Si tiene dudas, le invitamos a revisar algún problema que haya resuelto relacionado con el flujo laminar de un fluido viscoso a través de superficies sólidas planas, paralelas.

### **Trazar un plan para resolverlo**

Ahora, vuelva a leer el enunciado, ordene sus ideas y proyéctelas en un diagrama de flujo. Le sugerimos que haga tantos dibujos y esquemas como estime oportuno. No condicione su creatividad e imaginación. No escatime recursos.

Ahora tiene una nueva oportunidad para adiestrarse en el análisis diferencial, concretamente en la resolución de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento (Navier-Stokes) para determinar el flujo real de aceite que fluye entre dos superficies sólidas. Tenga presente que la geometría del entorno físico condiciona la elección del sistema de coordenadas. En este caso, está obligado a expresar las ecuaciones en coordenadas cilíndricas.

Se aconseja acompañar sus desarrollos y cálculos con una explicación clara de lo que pretende y lo que ha hallado.

### **Ejecutar el plan**

Recuerde que, antes de hacer cualquier cosa, debe pensar en qué sistema de coordenadas ha elegido. Habida cuenta de que la ecuación de Navier-Stokes es una ecuación vectorial, ¿en qué componentes de la velocidad del fluido ha centrado su atención?

Se sabe que, cuando el problema se reduce a un dominio espacial concreto, resulta fundamental especificar las condiciones de contorno que informen del comportamiento del fluido en las fronteras. Aquí necesitará recurrir a su capacidad de análisis.

Recuerde acompañar sus desarrollos y cálculos con una explicación clara de lo que pretende y lo que ha hallado.

## **Estudio**

### **Breve descripción**

La evaluación del caudal de fugas en las correderas de las válvulas de control direccional en altas presiones de trabajo es fundamental. Para la resolución de este problema, una vez interpretado su funcionamiento, se propone utilizar expresiones fluidodinámicas disponibles en la literatura.



### Análisis

<b>Análisis DIFERENCIAL</b>	
<b>Viscosidad</b>	
<b>Dominante</b>	Despreciable
<b>Fluido</b>	Ecuación de Euler
<b>Newtoniano</b>	No newtoniano
<b>Ecuación de Reynolds</b>	VER

### Hipótesis que se plantean

<b>PROPIEDADES del fluido</b>			
<b>Viscosidad</b>	<b>Constante</b>	<b>Newtoniano</b>	<b>Homogénea</b>
	<b>Constante</b>	<b>Incompresible</b>	<b>Homogénea</b>
<b>Densidad</b>	Variable: Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		Gas ideal	Adiabático Isotérmico
<b>COMPORTAMIENTO del fluido</b>			
En reposo	Equilibrio	Absoluto	
		Relativo	
<b>En movimiento</b>	<b>Régimen</b>	<b>Estacionario</b>	
		Transitorio	
<b>PRESTACIONES del fluido</b>			
- Caudal de fugas y presión de trabajo			
<b>Otras hipótesis de TRABAJO</b>			
- La variación de la temperatura es despreciable. - La simetría es axial. - Las propiedades físicas son uniformes en las secciones de control. - Los sólidos son indeformables. - Las pérdidas de carga en los conductos son despreciables. Solo se consideran las pérdidas en los juegos de la corredera y la carcasa. - No se consideran los efectos de compresibilidad del aceite. - Los fenómenos de contracción de vena son despreciables. - Las fuerzas másicas son despreciables.			

### Principios básicos y leyes fundamentales

- Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Ecuación de Navier-Stokes para viscosidad dominante. Ecuación de Reynolds



## Comprobar los resultados

Vuelva a leer el enunciado y compruebe que lo que se pedía es lo que ha averiguado.

Supóngase que ha llegado a unos resultados correctos. ¿Puede comprobar y justificar adecuadamente las hipótesis propuestas? ¿Ha pensado en la posibilidad de hacer alguna hipótesis que le permitan plantear las ecuaciones diferenciales utilizando un sistema de coordenadas que haga que la resolución resulte menos laboriosa y más fácil?

Pero todavía no hemos terminado el proceso de aprendizaje. Ahora le invitamos a analizar el resultado para determinar si la respuesta es razonable y sensata. Siempre es conveniente comprobar el resultado para observar si este se encuentra dentro de un orden de magnitud correcto y si las unidades obtenidas son realmente correctas. Se aconseja acompañar la solución con una explicación clara de lo que se ha hallado.

A continuación, al igual que en los problemas anteriores, le presentamos la solución de este problema. Observe que es una resolución muy sobria y desnuda. El propósito es que los estudiantes tengan una pauta sobre cómo resolverlo (a modo de referencia) que les inste a razonar y desarrollar sus propios modelos matemáticos y cálculos. Queremos evitar que los alumnos adquieran una habilidad rutinaria, también denominada *metodología de la superficialidad*, que los lleve a resolver los problemas de forma mecánica y acrítica.

## Resolución

### Determine la expresión para calcular la presión en B

Para determinar la presión en B y los caudales de fugas, se debe hacer una interpretación de los fenómenos que suceden en el interior de la válvula:

- $Q_c$ : caudal proveniente del pistón, que entra en la válvula por el puerto B
- $Q_{PB}$ : caudal proveniente del grupo de presión, que entran por el puerto P de la válvula hasta alcanzar el puerto B. Este es un caudal que circula por la sección anular que se genera entre la corredera y el cuerpo de la válvula
- $Q_{BT}$ : caudal proveniente del puerto B de la válvula hasta alcanzar el puerto T, conectado a tanque a presión atmosférica. Este es un caudal que circula por la sección anular que se genera entre la corredera y el cuerpo de la válvula.

Para determinar el perfil de velocidades en la sección anular entre la corredera y el cuerpo/carcasa, y posteriormente el caudal anular, se puede tratar el aceite como flujo viscoso, con un número de Reynolds bajo, de modo que las fuerzas viscosas son de mayor importancia que las fuerzas de inercia. Además de la simetría axial, la geometría de la huelga permite una dirección de flujo predominante. Así, se lleva a cabo un análisis diferencial en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  donde las componentes de una partícula de fluido en el flujo de fuga, teniendo en cuenta las hipótesis propuestas, son:

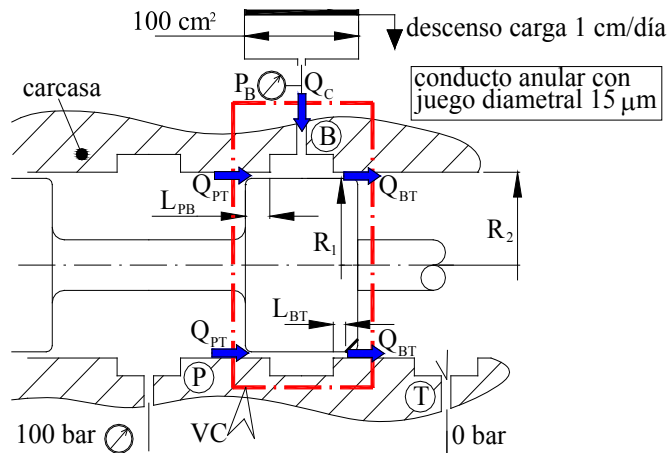
$$\begin{aligned} v_r &\cong 0 \\ v_\theta &= 0 \\ v_z &= f(r, z) \end{aligned} \quad (1)$$

En análisis diferencial, la *ecuación de continuidad* y la *ecuación de Navier-Stokes*, aplicadas a un flujo viscoso a través de una sección de corona circular, permiten calcular el caudal volumétrico. Se tomará aquí la expresión a partir de la literatura ya conocida sobre este tipo de flujo:

$$Q = \frac{\pi \Delta P R^4}{8 \mu L} \left[ (1 - \kappa^4) - \frac{(1 - \kappa^2)^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right] \quad (2)$$

donde  $R$  es el radio interno del tubo/conducto exterior y  $\kappa R$  es el radio exterior del tubo/conducto interior que forma la corona circular, donde  $\kappa < 1$ .

Figura 3. Detalle del volumen de control y balance de caudales



Primero, se debe llevar a cabo un análisis integral con un volumen de control inercial e indeformable, como el que se presenta en la figura 3. Aplicando el *principio de conservación de la masa* en análisis integral, se obtiene:

$$\underbrace{\int_{VC} \rho dV}_{=0; \text{Hip.}} + \int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0 \rightarrow \underbrace{\rho}_{=0; \text{Hip.}} \int_{SC} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0 \quad (3)$$

de donde las superficies de control, teniendo en cuenta las entradas y salidas, son:

$$\int_{SC} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = - \underbrace{\int_{SC,C} (u \cdot d\vec{S}_c)}_{\text{Hip. perfil uniforme}} - \int_{SC,PB} (v_z \cdot d\vec{S}_{corona}) + \int_{SC,BT} (v_z \cdot d\vec{S}_{corona}) = 0 \quad (4)$$

y resulta:

$$Q_C + Q_{PB} = Q_{BT} \quad (5)$$

Así, cada caudal corresponderá a:



$$\text{Caudal proveniente del pistón: } Q_C = v_C S_{\text{útil}} \quad (6)$$

Caudal entre puertos P-B (teniendo presente la figura 2 y la ecuación (2)):

$$Q_{PB} = \frac{\pi (P_P - P_B) R_2^4}{8\mu L_{PB}} K, \text{ donde } K = \left[ (1 - \kappa^4) - \frac{(1 - \kappa^2)^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right] = Cte \quad (7)$$

Caudal entre puertos B-T (teniendo presente la figura 2 y la ecuación (2)):

$$Q_{BT} = \frac{\pi (P_B - P_T) R_2^4}{8\mu L_{BT}} K, \text{ donde } K = \left[ (1 - \kappa^4) - \frac{(1 - \kappa^2)^2}{\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right)} \right] = Cte \quad (8)$$

Por tanto, sustituyendo en la ecuación (5),

$$v_C S_{\text{útil}} + \frac{\pi (P_P - P_B) R_2^4}{8\mu L_{PB}} K = \frac{\pi (P_B - P_T) R_2^4}{8\mu L_{BT}} K \quad (9)$$

donde todas las variables son conocidas excepto la presión  $P_B$ . Teniendo en cuenta la figura 1 y los datos de la tabla 1:

$$\begin{aligned} v_C &= 1 \frac{\text{cm}}{\text{día}} \frac{\text{m}}{86400 \text{ s}} \frac{1}{100 \text{ cm}} = 1,16 \cdot 10^{-7} \text{ m/s} \\ S_{\text{útil}} &= 100 \text{ cm}^2 \frac{\text{m}^2}{10^4 \text{ cm}^2} = 0,01 \text{ m}^2 \\ \nu &= 32 \text{ cSt} = 32 \cdot 10^{-2} \text{ St} = 32 \cdot 10^{-2} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \frac{\text{m}^2}{10^4 \text{ cm}^2} = 32 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \\ \mu &= \rho \nu = 850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 32 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 0,0272 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} = 0,0272 \text{ Pa} \cdot \text{s} \\ L_{PB} &= 5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ L_{BT} &= 3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ P_P &= 100 \text{ bar (rel)} \cong 100 \cdot 10^5 \text{ Pa (rel)} \\ P_T &= P_{\text{atm}} = 0 \text{ bar (rel)} \cong 0 \text{ Pa (rel)} \end{aligned} \quad (10)$$

El conducto anular tiene un juego diametral de 15  $\mu\text{m}$ ; por tanto:

$$\begin{aligned} \text{Juego diametral: } 2e &= 15 \mu\text{m} = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ \text{Juego radial: } e &= 7,5 \mu\text{m} = 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ m} \end{aligned} \quad (11)$$

En la corona circular:



$$\begin{aligned}R &\equiv R_2 = \frac{D}{2} + e = \frac{20 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2} + 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 0,0100075 \text{ m} \\ \kappa R &\equiv R_1 = \frac{D}{2} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2} = 0,01 \text{ m} \\ \kappa &= \frac{R_1}{R} \equiv \frac{R_1}{R_2} = \frac{0,01 \text{ m}}{0,0100075 \text{ m}} \cong 0,9992501\end{aligned}\tag{12}$$

De esta forma, la constante  $K$  tendrá el valor:

$$K = \left[ \left(1 - (0,9992501)^4\right) - \frac{\left(1 - (0,9992501)^2\right)^2}{\ln\left(\frac{1}{0,9992501}\right)} \right] = 2,477 \cdot 10^{-9}\tag{13}$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación (9), se obtiene el valor de la presión en el puerto B:

$$P_B = 3,76 \cdot 10^6 \text{ Pa (rel)} \cong 37,6 \text{ bar (rel)}\tag{14}$$



→ 19





## Estudio de un amortiguador de pequeñas dimensiones

Se está trabajando en el diseño de un pequeño amortiguador, cuyo esquema básico está representado en la figura 1. El amortiguador consta de un pistón fijo concéntrico en el interior de una camisa móvil. El volumen superior que crea el pistón y la camisa está lleno de aceite. El pistón y la camisa presentan una holgura  $e$  debida a la tolerancia de fabricación.

En el pistón, se ha mecanizado un tubo capilar de diámetro muy pequeño, que conecta la cámara con la parte inferior del pistón. La geometría principal del amortiguador está representada en la figura 1.

Cuando la camisa se mueve concéntricamente hacia el pistón a velocidad  $U$  constante, tomando las hipótesis apropiadas y en el instante que se representa en la figura 1, se pide:

- 1- Determinar la expresión del perfil de velocidades del caudal de fuga que se puede producir en la holgura  $e$  entre el pistón y la camisa en función de la presión en la cámara.
- 2- Determinar la expresión del caudal de fuga que se puede producir en la holgura  $e$  entre el pistón y la camisa en función de la presión en la cámara.
- 3- Determinar la expresión del caudal de fuga que se puede producir en el tubo capilar de diámetro  $d$  en función de la presión en la cámara.
- 4- Si la camisa tiene una masa  $M$ , determinar la expresión de la fuerza  $F$  que se debe realizar sobre la camisa para mantener su velocidad constante  $U$ .
- 5- Tomando los datos de la tabla 1, calcular el valor de la magnitud de la fuerza  $F$ .

**Nota importante:** Dado que la holgura  $e$  entre el pistón y el interior de la camisa es mucho más pequeña que el diámetro del pistón, supóngase que la superficie del pistón y la del interior de la camisa son planas y paralelas entre sí.

Datos:

$$\begin{array}{llll} \rho_{\text{aceite}} = 900 \text{ kg/m}^3 & U = 1 \text{ mm/s} & L = 10 \text{ mm} & D = 60 \text{ mm} \\ \mu_{\text{aceite}} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s} & d = 0,5 \text{ mm} & M = 1 \text{ kg} & \end{array}$$





### Trazar un plan para resolverlo

Ahora, vuelva a leer el enunciado, ordene sus ideas y proyéctelas en un diagrama de flujo. Le sugerimos que haga tantos dibujos y esquemas como estime oportuno.

Tenga presente que la geometría del entorno físico condiciona la elección del sistema de coordenadas. En este caso, usted está obligado a expresar las ecuaciones en coordenadas cilíndricas.

¿Ha pensado en la posibilidad de hacer alguna hipótesis que le permita plantear las ecuaciones diferenciales utilizando un sistema de coordenadas que haga que la resolución resulte menos laboriosa y más fácil?

Le invitamos a razonar acerca del comentario siguiente: Habida cuenta de que las tolerancias mecánicas son muy pequeñas en comparación con el diámetro del pistón, las superficies laterales del pistón y el interior de la camisa pueden asimilarse a dos superficies sólidas, planas, paralelas y deslizantes. En este entorno virtual, sería viable expresar las ecuaciones diferenciales del movimiento de fluido en un sistema de coordenadas cartesianas. ¿Lo ve oportuno y adecuado?

Se aconseja acompañar los desarrollos y los cálculos con una explicación clara de lo que se pretende y lo que se ha hallado.

### Ejecutar el plan

Recuerde que, antes de hacer cualquier cosa, debe pensar en qué sistema de coordenadas ha elegido. Habida cuenta de que la ecuación de Navier-Stokes es una ecuación vectorial, ¿en qué componentes de la velocidad del fluido ha centrado su atención?

Se sabe que, cuando se reduce el problema a un dominio espacial concreto, resulta fundamental especificar las condiciones de contorno que informen del comportamiento del fluido en las fronteras. Aquí necesitará recurrir a su capacidad de análisis.

Recuerde acompañar sus desarrollos y cálculos con una explicación clara de lo que pretende y lo que ha hallado.

### Comprobar los resultados

Vuelva a leer el enunciado y compruebe que lo que se pedía es lo que ha averiguado.

Supóngase que ha llegado a unos resultados correctos. ¿Puede comprobar y justificar adecuadamente las hipótesis propuestas? ¿Qué error numérico se genera al cambiar de sistema de coordenadas cilíndricas a cartesianas?



## Estudio

### Breve descripción

Se presenta el estudio del descenso de la camisa por un pistón fijo. La fuerza que es capaz de soportar la camisa viene determinada por la presión que se genera en la cámara. A su vez, esta presión del fluido en la cámara es debida a la “dificultad” que encuentra el fluido al fluir por geometrías muy estrechas y pequeñas, como son el diámetro del tubo mecanizado y la holgura entre la camisa y el pistón. Así, sabiendo que el caudal volumétrico que se genera por la velocidad constante de descenso de la camisa ha de salir por la holgura entre la camisa y el pistón y el tubo mecanizado, la presión en la cámara estará impuesta por esta condición.

### Análisis

Análisis <b>DIFERENCIAL</b>		
<b>Viscosidad</b>		
<b>Dominante</b>		Despreciable
<b>Fluido</b>		Ecuación de Euler
<b>Newtoniano</b>	No newtoniano	
<b>Ecuación de Reynolds</b>	VER	

### Hipótesis que se plantean

<b>PROPIEDADES</b> del fluido			
<b>Viscosidad</b>	<b>Constante</b>	<b>Newtoniano</b>	<b>Homogénea</b>
<b>Densidad</b>	<b>Constante</b>	<b>Incompresible</b>	<b>Homogénea</b>
	Variable: Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		Gas ideal	Adiabático
		Isotérmico	
<b>COMPORTAMIENTO</b> del fluido			
En reposo	Equilibrio	Absoluto	
		Relativo	
En movimiento	Régimen	<b>Estacionario</b>	
		Transitorio	
<b>PRESTACIONES</b> del fluido			
- Caudales de fugas y fuerza de trabajo			
Otras hipótesis de <b>TRABAJO</b>			
<ul style="list-style-type: none"> <li>- La variación de la temperatura es despreciable.</li> <li>- La simetría es axial.</li> <li>- Las propiedades físicas son uniformes en las secciones de control.</li> <li>- Los sólidos son indeformables.</li> <li>- No se consideran los efectos de compresibilidad del aceite.</li> <li>- Los fenómenos de contracción de vena son despreciables en la entrada y la salida de la holgura entre la camisa y el pistón, así como en el tupo capilar mecanizado.</li> <li>- Dado que la holgura <math>e</math> entre el pistón y el interior de la camisa es mucho más pequeña que el diámetro del pistón, se supondrá que la superficie del pistón y la del interior de la camisa son planas y paralelas entre sí.</li> <li>- Las fuerzas másicas son despreciables.</li> </ul>			



## Principios básicos y leyes fundamentales

- Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Ecuación de Navier-Stokes para la viscosidad dominante. Ecuación de Reynolds

## Resolución

**Determine la expresión del perfil de velocidades del caudal de fuga que se puede producir en la holgura  $e$  entre el pistón y la camisa en función de la presión en la cámara.**

Para determinar la expresión del perfil de velocidades, se tomarán las siguientes hipótesis de flujo viscoso, con un número de Reynolds bajo: las fuerzas viscosas son de mayor importancia que las fuerzas de inercia.

### Estudio del caudal de fugas en la holgura $e$

En primer lugar, se estudia la holgura  $e$  (v. figura 2). Dado que la holgura  $e$  entre el pistón y el interior de la camisa es mucho más pequeña que el diámetro del pistón,  $e \ll D$ , se supondrá que la superficie del pistón y la del interior de la camisa son planas y paralelas entre sí. Así, se llevará a cabo un análisis diferencial en coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$

. Las componentes de una partícula de fluido en el flujo de fuga, teniendo en cuenta las hipótesis propuestas, son:

$$\begin{aligned} v_x &\equiv u = f(x, y) \\ v_y &\equiv v = 0 \\ v_z &\equiv w = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

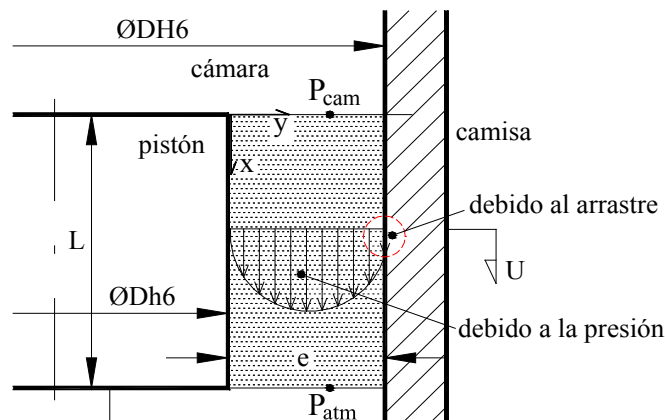


Figura 2. Detalle del flujo en la holgura

De acuerdo con la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{2}$$



Si el flujo es permanente e incompresible,

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3)$$

que, en coordenadas cartesianas,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

De aquí, y tomando las hipótesis propuestas, se deduce:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

Luego  $u$  es función de  $y$  y constante para  $x$ . Si se pretende analizar el movimiento del fluido, se debe evaluar el perfil de velocidades del flujo en la holgura. Para ello, se plantea la ecuación de Navier-Stokes en su forma más genérica:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \rho \vec{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \quad (6)$$

en que el último término es nulo, ya que  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ , si se admite fluido incompresible. Las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cartesianas, centrado la atención en la componente  $\hat{x}$ , son:

$$\begin{aligned} \hat{x}: \quad \rho \left[ \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{=0, \text{Hip.}} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{=0, \text{Continuidad}} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y}}_{=0, \text{Hip.}} + \underbrace{w \frac{\partial u}{\partial z}}_{=0, \text{Hip.}} \right] = \\ = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[ \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{=0, \text{Continuidad}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{=0, \text{Hip.}} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

y resulta:

$$\hat{x}: \quad 0 = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (8)$$

Analizando las otras dos direcciones  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$ , y considerando las hipótesis adoptadas:

$$\left. \begin{aligned} \hat{y}: \quad 0 &= \frac{\partial P}{\partial y} \\ \hat{z}: \quad 0 &= \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = f(x) \quad (9)$$

De esta forma, según los ejes de coordenadas tomados en la figura 2,  $\hat{x}: \quad g_x = +g$ ,

$$\hat{x}: \quad \frac{1}{\mu} \frac{d}{dx} (P - \rho g x) \equiv \frac{1}{\mu} \frac{dP^*}{dx} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (10)$$

Para obtener un perfil de velocidades, se sabe que la variación de la presión reducida  $P^*$  en la dirección  $\hat{x}$  se mantiene constante:



$$A = \frac{1}{\mu} \frac{dP^*}{dx} \quad \text{donde } A = Cte < 0 \quad (11)$$

ya que la presión va disminuyendo a medida que se avanza en la dirección  $\hat{x}$ , y resulta:

$$\hat{x}: \quad A = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (12)$$

Integrando por dos veces la ecuación anterior para obtener el perfil de velocidades,

$$u(x, y) = A \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 \quad (13)$$

Atendiendo ahora a las condiciones de contorno,

$$\begin{aligned} y=0 &\rightarrow u=0 \\ y=e &\rightarrow u=U \end{aligned} \quad (14)$$

Sustituyendo las condiciones de contorno en la ecuación (13), se obtienen las expresiones de las constantes de integración del perfil de velocidad  $C_1$  y  $C_2$ ,

$$\left. \begin{aligned} 0 &= A \frac{0}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 \\ U &= A \frac{e^2}{2} + C_1 e + C_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{U}{e} - A \frac{e}{2} \\ C_2 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Finalmente, el perfil de velocidades en la holgura es:

$$u(x, y) = \frac{A}{2} (y^2 - ey) + \frac{U}{e} y \quad (16)$$

que resulta de la combinación de un flujo de Couette y un flujo bidimensional de Hagen-Poiseuille, como se representa en la figura 3.

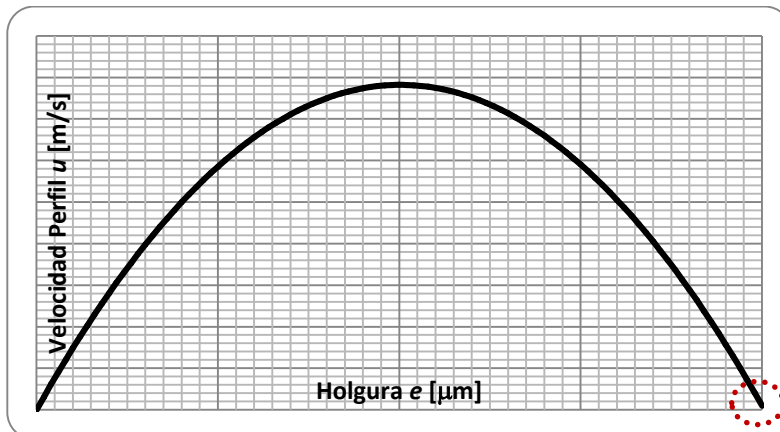


Figura 3.  
Perfil de velocidades en la holgura  $e$

Flujo de Couette



**Determine la expresión del caudal de fuga que se puede producir en la holgura  $e$  entre el pistón y la camisa, en función de la presión en la cámara.**

El caudal volumétrico de fugas en la holgura  $Q_e$  se obtiene ahora mediante:

$$Q_e = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^e u \cdot \pi D dy = \pi D \int_0^e \left[ \frac{A}{2} (y^2 - ey) + \frac{U}{e} y \right] \cdot dy = \frac{\pi D}{2} \left( -\frac{Ae^3}{6} + Ue \right) \quad (17)$$

3. Determine la expresión del caudal de fuga que se puede producir en el tubo capilar de diámetro  $d$  en función de la presión en la cámara.

### Estudio del caudal de fugas en el tubo capilar mecanizado de diámetro $d$

En segundo lugar, se estudia el tubo capilar de diámetro  $d$  (v. figura 4). Se llevará a cabo un análisis diferencial en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ . Las componentes de una partícula de fluido en el flujo de fuga son, teniendo en cuenta las hipótesis propuestas:  
Hipótesis:

Simetría axial en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z) : \frac{\partial}{\partial \theta} \approx 0$

$$\begin{aligned} v_r &\cong 0 \\ v_\theta &= 0 \\ v_z &= f(r, z) \end{aligned} \quad (18)$$

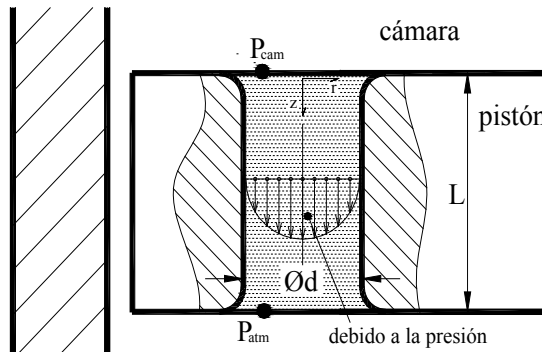


Figura 4. Detalle del flujo en el tubo capilar mecanizado

De acuerdo con la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (19)$$

Si el fluido es incompresible,

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (20)$$

que, en coordenadas cilíndricas,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (21)$$





De ahí se deduce, tomando las hipótesis propuestas:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (22)$$

Luego,  $v_z$  es función de  $r$  y constante para  $z$ . Si se pretende analizar el movimiento del fluido, se debe evaluar el perfil de velocidades del flujo en la holgura. Para ello, se plantea la ecuación de Navier-Stokes en su forma más genérica:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \rho \vec{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \quad (23)$$

cuyo último término es nulo, como resultado de la ecuación de continuidad, ecuación (20), si se admite fluido incompresible. Las *ecuaciones de Navier-Stokes* en coordenadas cilíndricas, centrando la atención en la componente  $\hat{z}$ , son:

$$\begin{aligned} \hat{z}: \quad & \rho \left[ \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial t}}_{=0, \text{Hip.}} + v_r \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial r}}_{=0, \text{Hip.}} + \frac{1}{r} v_\theta \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial \theta}}_{=0, \text{Hip.}} + v_z \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial z}}_{=0, \text{Continuidad}} \right] = \\ & = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \underbrace{\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}}_{=0, \text{Hip.}} + \underbrace{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}_{=0, \text{Continuidad}} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

y resulta:

$$\hat{z}: \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (25)$$

Analizando las otras dos direcciones  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$ , considerando las hipótesis adoptadas, son:

$$\left. \begin{aligned} \hat{r}: \quad 0 &= \frac{\partial P}{\partial r} \\ \hat{\theta}: \quad 0 &= \frac{\partial P}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = f(z) \quad (26)$$

De esta forma, según los ejes de coordenadas tomados en la figura 3,  $\hat{z}: g_z = +g$ , resulta:

$$\hat{z}: \quad \frac{1}{\mu} \frac{d}{dz} (P - \rho g z) \equiv \frac{1}{\mu} \frac{dP^*}{dz} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (27)$$

Para obtener un perfil de velocidades, se sabe que la variación de la presión reducida  $P^*$  en la dirección  $\hat{r}$  se mantiene constante:

$$A = \frac{1}{\mu} \frac{dP^*}{dr} \quad \text{donde } A = Cte < 0 \quad (28)$$



donde  $A$  es la misma constante, de igual valor y significado que la definida en la ecuación (11). De esta forma,

$$\hat{z}: A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (29)$$

Integrando por dos veces la ecuación anterior para obtener el perfil de velocidades,

$$C_1 + A \frac{r^2}{2} = r \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (30)$$

$$v_z(r, z) = \frac{Ar^2}{4} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (31)$$

Admitiendo que la velocidad para  $r=0$  es finita –de hecho, será la velocidad máxima– y que  $\ln(0)$  es una indeterminación, la constante de integración  $C_1$  debe ser nula. Atendiendo ahora las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} r=0 &\rightarrow C_1 = 0 \\ r = \frac{d}{2} &\rightarrow v_z = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Y, sustituyendo las condiciones de contorno en el perfil de velocidades,

$$0 = \frac{Ad^2}{16} + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{Ad^2}{16} \quad (33)$$

Finalmente,

$$v_z(r, z) = \frac{Ar^2}{4} - \frac{Ad^2}{16} = \frac{A}{4} \left( r^2 - \frac{d^2}{4} \right) \quad (34)$$

El caudal volumétrico de fugas en el tubo capilar mecanizado  $Q_d$  se obtiene ahora mediante:

$$Q_d = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^{\frac{d}{2}} v_z \cdot 2\pi r dr = \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{A}{4} \left( r^2 - \frac{d^2}{4} \right) 2\pi r dr = -\frac{\pi Ad^4}{128} \quad (35)$$

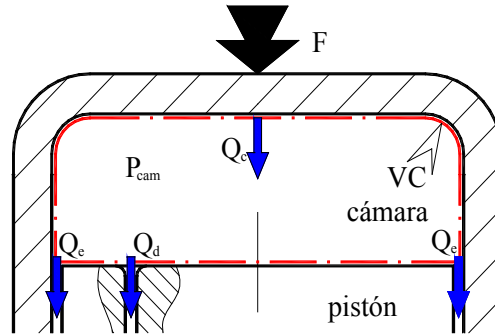
que resulta ser un flujo laminar en un conducto de sección recta circular de Hagen-Poiseuille.

**Si la camisa tiene una masa  $M$ , determina la expresión de la fuerza  $F$  que se debe realizar sobre la camisa para mantener su velocidad constante  $U$ .**

En primer lugar, se debe llevar a cabo un análisis integral con un volumen de control inercial e indeformable, como el que se presenta en la figura 5. Aplicando el *principio de conservación de la masa* en análisis integral, se obtiene:



Figura 5.  
Detalle de los caudales que intervienen en el amortiguador



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0 \rightarrow \underbrace{\rho}_{=0; \text{Hip.}} \int_{\text{Hip. } SC} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0 \quad (36)$$

de donde las superficies de control son:

$$\begin{aligned} \int_{SC} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) &= \int_{SC_c} (U \cdot d\vec{S}_c) + \int_{SC_e} (u \cdot d\vec{S}_e) + \int_{SC_d} (v_z \cdot d\vec{S}_d) = 0 \\ -U \frac{\pi(D+e)^2}{4} + \int_0^e (u \cdot \pi D dy) + \int_0^{\frac{d}{2}} (v_z \cdot 2\pi r dr) &= 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Y resulta:  $Q_c = Q_e + Q_d$  (38)

Finalmente, sustituyendo las expresiones de los caudales de fugas,

$$U \frac{\pi(D+e)^2}{4} = \frac{\pi D}{2} \left( -\frac{Ae^3}{6} + Ue \right) - \frac{\pi Ad^4}{128} \quad (39)$$

donde la única incógnita es la constante  $A$ . Integrando la variación de la presión reducida en la dirección  $\hat{z} \equiv \hat{x}$ :

$$A = \frac{1}{\mu} \frac{dP^*}{dx} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta P^*}{\Delta x} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta P - \rho g \Delta z}{\Delta x} \quad (40)$$

donde

$$\Delta P = P_{cam} - \underbrace{P_{atm}}_{=0, \text{rel}} = P_{cam} \quad (41)$$

$$\Delta x = 0 - L = -L$$

$$A = \frac{1}{\mu} \frac{P_{cam} - \rho g(-L)}{-L} = -\frac{1}{\mu} \frac{P_{cam} + \rho g L}{L} = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{P_{cam}}{L} + \rho g \right) \quad (42)$$

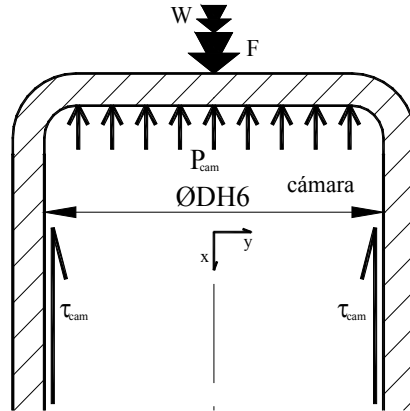


$$P_{cam} = -L(A\mu + \rho g) \quad (43)$$

Se obtiene definitivamente la presión relativa en la cámara  $P_{cam}$ .

El equilibrio de fuerzas que se produce en el amortiguador (teniendo presente que se trabaja a presiones relativas) se muestra en el esquema de sólido libre de la cámara de la figura 6:

Figura 6.  
Detalle del equilibrio  
de fuerzas en el sólido  
libre de la cámara



$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad (44)$$

=0, U Cte

$$F + W = P_{cam} \frac{\pi}{4} (D + e)^2 + \tau_{cam} \pi (D + e) L$$

$$\tau_{camisa} = \mu \frac{du}{dy} \Big|_{y=e} = \mu \left[ \frac{A}{2} (y^2 - ey) + \frac{U}{e} y \right] \Big|_{y=e} = \mu \left[ \frac{A}{2} e + \frac{U}{e} \right] \quad (45)$$

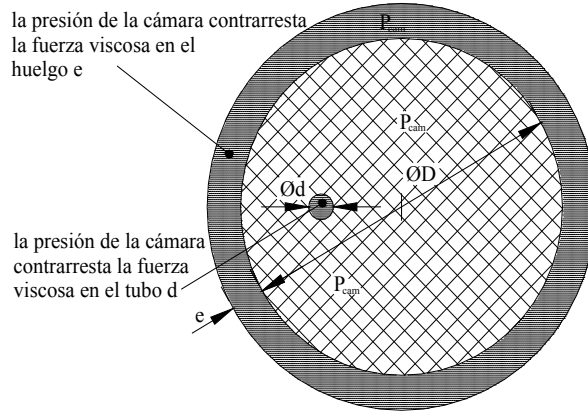
Finalmente, 
$$F = P_{cam} \frac{\pi}{4} (D + e)^2 + \mu \left[ \frac{A}{2} e + \frac{U}{e} \right] \pi (D + e) L - Mg \quad (46)$$

### Relación entre la presión en la cámara y los esfuerzos cortantes en la camisa y en el pistón

La presión relativa en la cámara  $P_{cam}$  sobre el área correspondiente actúa en contra de las correspondientes fuerzas viscosas. Así, como se muestra en la figura 7:



Figura 7.  
Detalle de la actuación de la presión relativa en la cámara



Para la holgura  $e$ , se tiene:

$$\tau_{camisa} = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=e} = \mu \left[ \frac{A}{2} (y^2 - ey) + \frac{U}{e} y \right]_{y=e} = \mu \left[ \frac{A}{2} e + \frac{U}{e} \right] \quad (47)$$

$$\tau_{piston} = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \mu \left[ \frac{A}{2} (y^2 - ey) + \frac{U}{e} y \right]_{y=0} = \mu \left[ -\frac{A}{2} e + \frac{U}{e} \right] \quad (48)$$

Para la tubería capilar  $d$ , se tiene:

$$\tau_{capilar} = \mu \left. \frac{dv_z}{dr} \right|_{r=\frac{d}{2}} = \mu \left[ \frac{A}{4} \left( r^2 - \frac{d^2}{4} \right) \right]_{r=\frac{d}{2}} = \mu \frac{Ad}{4} \quad (49)$$

Por tanto, las fuerzas viscosas serán:

$$\begin{aligned} F_{\mu,camisa} &= \tau_{camisa} S_{camisa} = \mu \left[ \frac{A}{2} e + \frac{U}{e} \right] \pi (D+e) L \\ F_{\mu,piston} &= \tau_{piston} S_{piston} = \mu \left[ -\frac{A}{2} e + \frac{U}{e} \right] \pi (D-e) L \\ F_{\mu,capilar} &= \tau_{capilar} S_{capilar} = \mu \frac{Ad}{4} \pi dL \end{aligned} \quad (50)$$

Y las fuerzas de presión:

$$\begin{aligned} F_{P,camisa-piston} &= (P_{cam} + \rho gL) S_{camisa-piston} = -\mu AL \frac{\pi}{4} \left[ (D+e)^2 - (D-e)^2 \right] \\ F_{P,capilar} &= (P_{cam} + \rho gL) S_d = -\mu AL \frac{\pi}{4} d^2 \end{aligned} \quad (51)$$

de donde se puede comprobar que

$$F_{P,capilar} + F_{\mu,capilar} = -\mu AL \frac{\pi}{4} d^2 + \mu \frac{Ad}{4} \pi dL = 0 \quad (52)$$



$$\begin{aligned}
 & F_{P, \text{camisa-piston}} + F_{\mu, \text{camisa}} - F_{\mu, \text{piston}} = \\
 & = -\mu AL \frac{\pi}{4} \left[ (D+e)^2 - (D-e)^2 \right] + \mu \left[ \frac{A}{2} e + \frac{U}{e} \right] \pi (D+e) L \\
 & \quad - \mu \left[ -\frac{A}{2} e + \frac{U}{e} \right] \pi (D-e) L = \dots \approx 0
 \end{aligned} \tag{53}$$

donde  $F_{\mu, \text{piston}}$  ha de cambiar de signo debido al criterio de signos del esfuerzo tangencial.

### Tomando los datos de la tabla 1, calcule el valor de la magnitud de la fuerza $F$ .

El caso más desfavorable será aquel en que la fuerza de carga  $F$  sea la mínima. Ello ocurrirá cuando el caudal de fugas sea el máximo, y este se producirá cuando la tolerancia entre el pistón y la camisa sea la máxima. Así:

– Diámetro máximo del pistón:

$$D_1 = 60h6 \text{ mm (mín)} = 60 - 0,019 = 59,981 \text{ mm} = 59,981 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

– Diámetro mínimo de la camisa:

$$D_2 = 60H6 \text{ mm (máx)} = 60 + 0,019 = 60,019 \text{ mm} = 60,019 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

– Holgura máxima:

$$e = e_{\text{máx}} = \frac{D_2 - D_1}{2} = \frac{60,019 - 59,981}{2} = 0,019 \text{ mm} = 0,019 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Así, tomando los datos de la tabla 1 y la holgura máxima en la ecuación (39), se obtiene el valor de la constante  $A$ :

$$A = -1\,722\,200\,744 \text{ s}^{-1} \text{m}^{-1} \tag{54}$$

Y, mediante la ecuación (43),

$$P_{\text{cam}} = 516571,933 \text{ Pa} \approx 5,2 \text{ bar} \tag{55}$$

Finalmente, con la ecuación (46),

$$F = 1450,77 \text{ N} \approx 1500 \text{ N} \tag{56}$$

Por último, comprobando un número de Reynolds,

$$\left. \begin{aligned}
 \text{holgura } e \rightarrow \text{Re} &= \frac{\rho UL}{\mu} \cong 0,3 < 1 \\
 \text{tubería } d \rightarrow \text{Re} &= \frac{4\rho Q_d}{\pi\mu d} \cong 202 < 2300
 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Flujo laminar} \tag{57}$$



→ 20





## Fluidodinámica del modelo de un vertedero

En la figura 1, se presenta el esquema de un modelo de vertedero situado a nivel de mar y se indican sus dimensiones básicas. Por encima del vertedero, se desliza una lámina de agua de espesor prácticamente constante de 20 mm. Los puntos 1 y 2 están situados sobre la superficie libre de la lámina de agua, de forma que el punto 1 se halla a 600 mm de la línea de referencia trazo-punto. El punto 2 se encuentra a 150 mm por debajo del punto 1. La solera del vertedero, en la zona del punto 2, tiene una curvatura de 300 mm de radio.

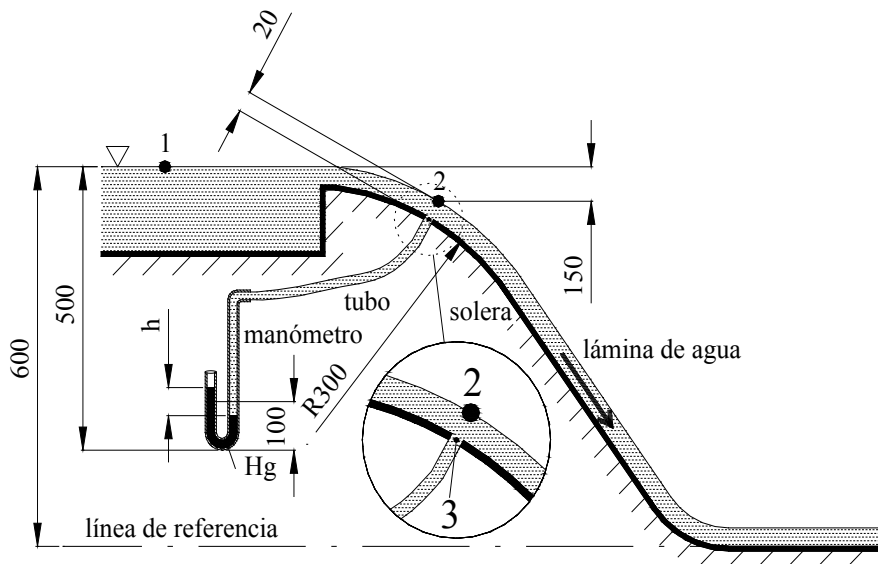


Figura 1.  
Esquema de un ver-  
tedero (no a escala)

En la solera del vertedero por debajo del punto 2, se ha instalado un manómetro de mercurio ( $13.600 \text{ kg/m}^3$ ) de tipo “U”, de forma que se pueda medir la presión  $h$  que se produce en este punto, denominado punto 3.

Se pregunta:



1. Calcular la velocidad del punto 2.
2. Calcular el perfil de velocidades en las secciones 2-3.
3. Calcular la distribución de presiones en las secciones 2-3 debidas exclusivamente a la curvatura de la lámina de agua.
4. ¿Qué marcará el manómetro en la columna de agua?

Si se desea llevar a cabo un prototipo del vertedero a una escala 10 veces mayor que el modelo, se pregunta:

- 1- Calcular el caudal por unidad de anchura en el prototipo.

Hipótesis:

Supóngase que el punto 1 está suficientemente alejado del vertedero para suponer que la velocidad en este punto es cero.

### **Estrategia para resolver el problema**

Se sabe que la resolución de un problema, desde el punto de vista fluidodinámico, implica la determinación de seis incógnitas, a saber: las tres componentes de la velocidad, la presión, la densidad y la temperatura. Para ello, se dispone de seis ecuaciones: la ecuación de continuidad, obtenida del principio de conservación de la masa; las tres ecuaciones del movimiento, derivadas del principio vectorial de conservación de la cantidad de movimiento; la ecuación de conservación de la energía, como resultado de aplicar el primer principio de la termodinámica, y la ecuación de estado termodinámico.

Se sabe que hay situaciones reales en que el comportamiento del fluido se ve mucho más afectado por las fuerzas de inercia que por las fuerzas viscosas, de tal manera que podemos extrapolar su comportamiento a considerar que el fluido es “ideal”.

Se sabe que la aproximación de flujo ideal introduce un cambio muy importante en la formulación matemática con respecto a la correspondiente a flujos de fluidos viscosos (ecuación de Navier-Stokes). Las ecuaciones resultantes que describen el flujo de un fluido ideal son las denominadas *ecuaciones de Euler*.

### **Comprender el problema**

Apoyándose en la figura del enunciado, proceda a leer detenidamente todo el texto, incluidas todas las preguntas.

¿Podemos definir la naturaleza del fluido y entrever su comportamiento?

Obviamente, el agua es un fluido en estado líquido cuya densidad se puede considerar constante en este entorno y es un fluido newtoniano. Pero ¿puede razonar si, en este entorno, el comportamiento de este fluido se puede asimilar al comportamiento de un fluido ideal (viscosidad nula)?



Céntrese en analizar la importancia relativa que pueden tener los aspectos siguientes sobre el modelo de flujo (perfil de velocidades en una sección concreta del flujo): 1) el efecto de la curvatura de la lámina de agua, 2) la influencia de la viscosidad.

Intente imaginarse o visualizar el flujo de agua. ¿Se ha dado cuenta de que, en presencia de la curvatura de la lámina de agua (impuesta por la forma de la solera del vertedero), las partículas de agua se trasladan en trayectorias concéntricas a velocidades inversamente proporcionales a sus radios de curvatura?

Se sabe que este modelo de flujo se denomina *vórtice libre* y es irrotacional.

Antes de continuar, le invitamos a consultar sus apuntes o libros de texto de referencia relacionados con las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido ideal y que denominamos *ecuaciones de Euler en coordenadas intrínsecas*. No se limite a la simple actividad rutinaria de buscar y aplicar mecánicamente la ecuación requerida y su solución. Dedíquele un poco más de tiempo. Intente profundizar en los conceptos que están implícitos en esta ecuación.

### Trazar un plan para resolverlo

¿Ya lo ha revisado? Le invitamos a que ordene sus ideas y las organice en un diagrama de flujo o plan de acción.

Preste atención. Las ecuaciones de Euler se deducen del principio vectorial de conservación de la cantidad de movimiento de un fluido ideal; por tanto, tienen carácter vectorial. Usted debe considerar sus tres componentes. Le recomendamos utilizar coordenadas intrínsecas.

Se sabe que el sistema de referencia propio o intrínseco de cada punto de la trayectoria está constituido por un sistema de coordenadas formado por tres ejes:

- Eje tangente: Su dirección es tangente a la trayectoria y el sentido positivo será el de la velocidad del fluido en ese punto.
- Eje normal: Su dirección es perpendicular a la trayectoria y el sentido positivo será el que se dirige al centro de curvatura de la trayectoria.
- Eje binormal: su dirección es ortogonal a los otros dos.

### Ejecutar el plan

Recuerde que, antes de hacer cualquier cosa, hay que pensar. Y que, cuando se reduce el problema a un dominio espacial concreto, resulta fundamental especificar las condiciones de contorno que informen del comportamiento del fluido en las fronteras.



### Comprobar los resultados

Vuelva a leer el enunciado y compruebe que lo que se pedía es lo que ha averiguado.

Supóngase que ha llegado a unos resultados correctos. ¿Puede comprobar y justificar adecuadamente las hipótesis propuestas?

Por último, suponiendo que ha resuelto correctamente este problema, le invitamos a realizar un ejercicio de autocontrol. ¿Puede hacer un esquema de todo el proceso de cálculo y de las hipótesis utilizadas?

En cuanto a los resultados obtenidos, ¿le parecen razonablemente posibles? ¿Puede comprobar la solución (para alguna situación singular)?

### Estudio

#### Breve descripción

Se propone estudiar el flujo de una lámina de agua por la superficie curvada de un vertedero. Considerando despreciable la viscosidad, fluido ideal, se puede evaluar la distribución de presiones normal en la curvatura del vertedero si se supone un perfil de velocidad de vórtice libre, es decir, flujo irrotacional.

#### Análisis

Análisis <b>DIFERENCIAL</b>		
<b>Viscosidad</b>		
Dominante		<b>Despreciable</b>
Fluido		<b>Ecuación de Euler</b>
Newtoniano	No newtoniano	
Ecuación de Reynolds	VER	



## Hipótesis que se plantean

<b>PROPIEDADES del fluido</b>			
<b>Densidad</b>	<b>Constante</b>	<b>Incompresible</b>	<b>Homogéneo</b>
	Variable: Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		Gas ideal	Adiabático
			Isotérmico
<b>COMPORTAMIENTO del fluido</b>			
En reposo	Equilibrio	Absoluto	
		Relativo	
En movimiento	Régimen	<b>Estacionario</b>	
		Transitorio	
<b>PRESTACIONES del fluido</b>			
- Distribución de presiones radial			
<b>Otras hipótesis de TRABAJO</b>			
- La variación de la temperatura es despreciable. - Las propiedades físicas son uniformes en las secciones de control. - Los sólidos son indeformables. - El flujo es ideal, no viscoso, a un número de Reynolds bajo. - El flujo es irrotacional. - Se considera despreciable cualquier tipo de pérdida de energía.			

## Principios básicos y leyes fundamentales

- Fluidoestática
- Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Ecuación de Navier-Stokes para fluido ideal. Ecuación de Euler
- Principio de conservación de la energía. Ecuación de Bernoulli

## Resolución

### Calcule la velocidad en el punto 2.

Para determinar la velocidad en el punto 2 de la solera, se procede a aplicar la ecuación de Euler ya que se considera flujo ideal, no viscoso, con un número de Reynolds alto, en que las fuerzas viscosas son muy inferiores a las fuerzas inerciales. Tomando la ecuación de Navier-Stokes bajo las hipótesis de flujo ideal no viscoso, se obtiene la ecuación de Euler:



$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \equiv \rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \rho \vec{g} \quad (1)$$

Suponiendo que la línea entre los puntos 1 y 2 sea una línea de corriente definida sobre la superficie libre del agua, se puede integrar la componente  $\hat{s}$  de la ecuación de Euler bajo las hipótesis expuestas y se obtiene la conocida ecuación de Bernoulli:

$$E_1 = E_2 + \underbrace{\Delta E_{1-2}}_{=0, \text{Hip.}} \quad (2)$$

es decir,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = Cte \quad (3)$$

Aplicando Bernoulli entre los puntos 1 (superficie libre del depósito supuesto que está suficientemente alejado del vertedero) y 2 (salida del chorro de agua después del sifón) en términos de altura:

$$\underbrace{\frac{p_1}{\rho}}_{P_1 = P_{atm} = 0(\text{rel})} + \underbrace{\frac{v_1^2}{2}}_{v_1^2 \approx 0} + gz_1 = \underbrace{\frac{p_2}{\rho}}_{P_2 = P_{atm} = 0(\text{rel})} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 \quad (4)$$

Por tanto,

$$v_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (0,6 - 0,45)} \text{ m} \cong 1,72 \text{ m/s} \quad (5)$$

### Calcule el perfil de velocidades en las secciones 2-3.

Si se admite que el flujo de la lámina de agua es un flujo irrotacional, tipo vórtice libre, entonces se debe cumplir:

$$\text{Flujo irrotacional} \Rightarrow \text{Vórtice libre} \Rightarrow \text{Perfil de velocidad: } vr = K (Cte) \quad (6)$$

Para determinar el valor de la constante  $K$ , se conoce:

$$r_2 = 0,3 + 0,02 = 0,32 \text{ m} \Rightarrow v_2 = 1,72 \text{ m/s} \quad (7)$$

de forma que

$$K = v_2 r_2 = (1,72 \text{ m/s})(0,32 \text{ m}) = 0,55 \text{ m}^2/\text{s} \quad (8)$$

Y el perfil de velocidades en la lámina será:

$$v = \frac{0,55 \text{ m}^2/\text{s}}{r} \quad [\text{m/s}] \quad (9)$$



**Calcule la distribución de presiones en las secciones 2-3, debida exclusivamente a la curvatura de la lámina de agua.**

De acuerdo con la componente normal  $\hat{n}$  de la ecuación de Euler,

$$-\rho g \frac{dz}{dn} - \frac{\partial p}{\partial n} = \rho \left( \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v^2}{\mathfrak{R}} \right) \quad (10)$$

donde  $\mathfrak{R}$  es el radio de curvatura y  $dn$  apunta en dirección al centro del radio de curvatura. Así, un cambio en la dirección del flujo de la velocidad de una partícula va acompañado de la combinación apropiada del gradiente de presión y el peso de la partícula en la dirección normal a la línea de corriente.

Tomando, en nuestro caso,  $\mathfrak{R} = r$  y  $dn = -dr$ , se obtiene:

$$\rho g \frac{dz}{dr} + \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \left( \underbrace{\frac{\partial v_n}{\partial t}}_{=0, \text{Hip.}} + \frac{v^2}{r} \right) \quad (11)$$

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{p}{\rho} + \underbrace{gz}_{\text{despreciable}} \right) = \frac{v^2}{r} \quad (12)$$

donde, en una primera aproximación, el término de la gravedad puede despreciarse para la lámina delgada.

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{p}{\rho} + \underbrace{gz}_{\text{despreciable}} \right) = \frac{v^2}{r} \quad (13)$$

Sustituyendo la expresión del perfil de velocidad de la ecuación (9),

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{K^2}{r^3} \quad (14)$$

e integrando,

$$p = \rho K^2 \left[ -\frac{1}{2r^2} \right] + C_1 \quad (15)$$

Para determinar el valor de la constante de integración  $C_1$ , se aplican las condiciones de contorno:

Así,

$$r_2 = 0,32 \text{ m} \Rightarrow p_2 = p_{atm} = 0 \text{ (rel)} \quad (16)$$

$$0 = \rho K^2 \left[ -\frac{1}{2r_2^2} \right] + C_1 \quad (17)$$

$$C_1 = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \left( 0,55 \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right)^2 \left( \frac{1}{2(0,32 \text{ m})^2} \right) = 1470 \text{ Pa}$$

Por tanto, la distribución de presiones será:



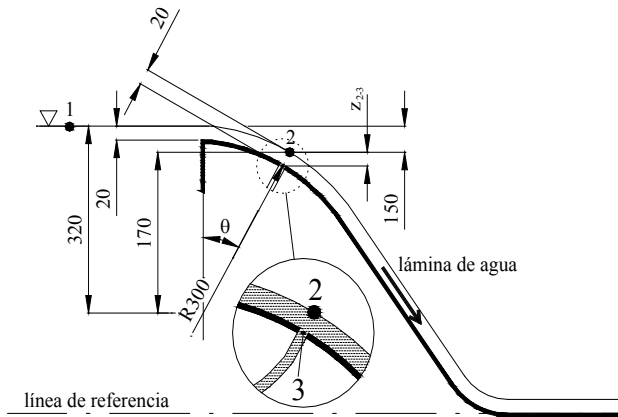
$$p = 1470 - 150,53 \frac{1}{r^2} \quad [\text{Pa}] \quad (18)$$

**¿Qué marcará el manómetro en la columna de agua?**

Para ello, primero hay que conocer la distancia vertical  $z_{2-3}$  entre los puntos 2 y 3. Observando la figura 2, se obtiene la relación:

$$\frac{170 \text{ mm}}{320 \text{ mm}} = \frac{z_{2-3}}{20 \text{ mm}} \Rightarrow z_{2-3} = 10,6 \text{ mm} \quad (19)$$

Figura 2.  
Alturas de referencia



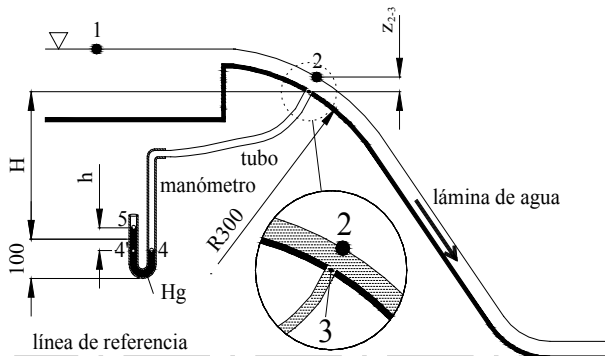
Así, aplicando la condición *fluidoestática* (v. figura 3), la presión en el punto 3 será:

$$p_3 = p_2 + \rho g z_{2-3} = -200 \text{ Pa} + 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 0,0106 \text{ m} = -96 \text{ Pa (rel)} \quad (20)$$

Ahora, aplicando *fluidoestática* en el manómetro (v. figura 3):

$$\begin{aligned} p_4 &= p_3 + \rho g \left( H + \frac{h}{2} \right) \\ p_{4'} &= p_5 + \rho_{\text{Hg}} g h \\ p_4 &= p_{4'} \end{aligned} \quad (21)$$

Figura 3.  
Manómetro







$$p_3 + \rho g \left( H + \frac{h}{2} \right) = p_5 + \rho_{Hg} g h \quad (22)$$

$$h = \frac{p_3 - p_5 + \rho g H}{g \left( \rho_{Hg} - \frac{\rho}{2} \right)} = \frac{-96 \text{ Pa} - 0 \text{ Pa} + 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 0,2394 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \left( 13600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{2} \right)} = 0,0175 \text{ m} = 17,5 \text{ mm} \quad (23)$$

### Calcule el caudal por unidad de anchura en el prototipo.

Para evaluar el caudal por unidad de anchura en el prototipo  $q_P$ , llevaremos a cabo un *análisis dimensional*. La teoría de modelos indica que se ha de cumplir la igualdad de los números adimensionales entre el modelo y el prototipo. El número adimensional relacionado con el caudal y el tipo de fluido es el número de Reynolds, de forma que

$$\text{Re}_{\text{Modelo}} = \text{Re}_{\text{Prototipo}} \quad (24)$$

$$\frac{4q\rho}{\pi L\mu} \Big|_M = \frac{4q\rho}{\pi L\mu} \Big|_P$$

Puesto que el modelo y el prototipo trabajan con el mismo fluido, y el factor de escala es 1:10,

$$\rho_M = \rho_P \quad ; \quad \mu_M = \mu_P \quad ; \quad L_P = 10L_M \quad (25)$$

$$\frac{q_M}{L_M} = \frac{q_P}{10L_M} \Rightarrow q_P = 10q_M \quad (26)$$

Para determinar el caudal del modelo  $q_M$ , debemos utilizar el principio de conservación de la masa, teniendo presente la ecuación (9):

$$q_M = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{r_3}^{r_2} \frac{K}{r} dr = K \ln \left( \frac{r_2}{r_3} \right) \quad (27)$$

Aplicando valores,

$$q_M = 0,55 \text{ m}^2/\text{s} \ln \left( \frac{0,32 \text{ m}}{0,3 \text{ m}} \right) = 0,036 \text{ m}^3/(\text{s}\cdot\text{m}) \quad (28)$$

Y, por tanto, el prototipo:

$$q_P = 10q_M = 10 \cdot 0,036 \text{ m}^3/(\text{s}\cdot\text{m}) = 0,36 \text{ m}^3/(\text{s}\cdot\text{m}) \quad (29)$$

→ 21



## Caudal y presiones en un sifón

En una obra hidráulica, se ha convenido instalar un sifón de sección transversal cuadrada por donde circula agua, tal como se muestra en la figura 1. Suponiendo que las pérdidas por rozamiento son despreciables, se pide:

1. Calcular el caudal desalojado por el sifón.
2. Determinar la expresión de la energía piezométrica en el punto  $M$  en función del  $R_1$ .
3. La condición que debe cumplirse con la relación  $\frac{a}{R_1}$  máxima necesaria para evitar que en el punto  $B$  aparezcan síntomas de cavitación.
- 4.

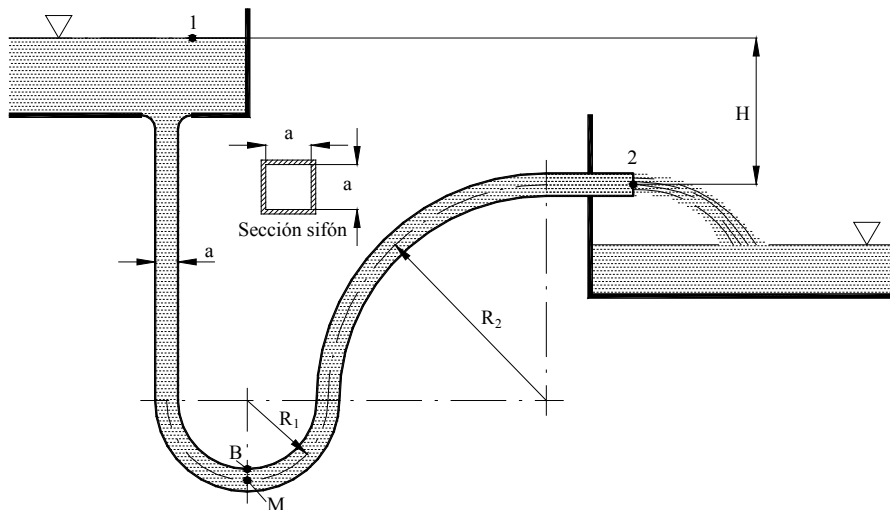


Figura 1.  
Esquema de  
la obra hid-  
ráulica (no a  
escala

Datos:

$$a = 0,5 \text{ m}$$

$$R_2 = 1,9 \text{ m}$$

$$H = 5,1 \text{ m}$$

$$P_{\text{vapor agua}} = 17,5 \text{ mmcHg (abs.)}$$

$$\rho_{\text{Hg}} = 13.600 \text{ kg/m}^3$$



Hipótesis:

- Supóngase que el flujo es irrotacional.

### **Estrategia para resolver el problema**

Tras la relación de problemas que le hemos propuesto, usted está experimentando un progreso en sus destrezas y/o habilidades, y puede aprovechar las virtudes de los distintos tipos de análisis.

Recuerde que la hipótesis de flujo ideal introduce un cambio muy importante en la formulación matemática con respecto a la correspondiente a flujos de fluidos viscosos (ecuación de Navier-Stokes). Las ecuaciones resultantes que describen el flujo de un fluido ideal son las denominadas *ecuaciones de Euler*.

### **Comprender el problema**

Basándose en la figura del enunciado, lea detenidamente el enunciado, incluidas todas las preguntas.

Este problema ¿es similar a otros que ya hemos planteado? ¿Tiene claro el esquema o plan que va a seguir para resolverlo? Si tiene dudas al respecto, le invitamos a revisar algún problema que haya resuelto y/o a consultar sus apuntes o libros de texto de referencia relacionados con las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido ideal en coordenadas intrínsecas.

### **Trazar un plan para resolverlo**

¿Ya lo ha revisado? Le invitamos a que ordene sus ideas y las organice en un diagrama de flujo o plan de acción.

Preste atención. Las ecuaciones de Euler se deducen del principio vectorial de conservación de la cantidad de movimiento de un fluido ideal; por tanto, tienen carácter vectorial.

### **Ejecutar el plan**

Insistimos en que, antes de hacer cualquier cosa, se debe pensar. Recuerde que, cuando el problema se reduce a un dominio espacial concreto, resulta fundamental especificar las condiciones de contorno que informen del comportamiento del fluido en las fronteras.

### **Comprobar los resultados**

Vuelva a leer el enunciado y compruebe que lo que se pedía es lo que ha averiguado.

Supóngase que ha llegado a unos resultados correctos. ¿Puede comprobar y justificar adecuadamente las hipótesis propuestas?



Por último, suponiendo que ha resuelto correctamente este problema, le invitamos a realizar un ejercicio de autocontrol. ¿Puede hacer un esquema de todo el proceso de cálculo y de las hipótesis utilizadas?

Atención: Lo normal es que, transcurrido un tiempo prudencial, usted vuelva a examinar el problema. Todo el tiempo empleado ahora en plasmar estas ideas y razonamientos de la forma más clara y concisa posible será una inversión muy rentable, no solo desde el punto de vista de la eficacia (podrá hacer la revisión mucha más rápidamente), sino también desde el punto de vista educativo. El esfuerzo mental que requiere esta actividad adicional tendrá consecuencias directas sobre su capacidad de aprendizaje.

En cuanto a los resultados obtenidos, ¿le parecen razonablemente posibles? ¿Puede comprobar la solución (para alguna situación singular)?

## Estudio

### Breve descripción

Se propone el estudio del flujo en un sifón. Debido a la propia curvatura del sifón y a sus grandes dimensiones, se puede considerar la distribución de presiones normal en la curvatura de este si se supone un perfil de velocidad de vórtice libre, es decir, flujo irrotacional.

### Análisis

Análisis <b>DIFERENCIAL</b>		
<b>Viscosidad</b>		
Dominante		<b>Despreciable</b>
Fluido		<b>Ecuación de Euler</b>
Newtoniano	No newtoniano	
Ecuación de Reynolds	VER	



### Hipótesis que se plantean

PROPIEDADES del fluido			
Densidad	Constante	Incompresible	Homogéneo
	Variable: Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		Gas ideal	Adiabático
			Isotérmico
COMPORTAMIENTO del fluido			
En reposo	Equilibrio	Absoluto	
		Relativo	
En movimiento	Régimen	Estacionario	
		Transitorio	
PRESTACIONES del fluido			
- Caudal y energía piezométrica			
Otras hipótesis de TRABAJO			
- La variación de la temperatura es despreciable. - las propiedades físicas son uniformes en las secciones de control. - Los sólidos son indeformables. - El flujo es ideal, no viscoso, con un número de Reynolds bajo. - El flujo es irrotacional. - Se considera despreciable cualquier tipo de pérdida de energía.			

### Principios básicos y leyes fundamentales

- Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)
- Ecuación de Navier-Stokes para fluido ideal. Ecuación de Euler
- Principio de conservación de la energía. Ecuación de Bernoulli

### Resolución

#### Calcule el caudal desalojado por el sifón.

Para determinar el caudal  $Q$  desalojado por el sifón, se procederá a aplicar la *ecuación de Euler*. Tomando la ecuación de Navier-Stokes en las hipótesis de flujo ideal no viscoso, se obtiene la ecuación de Euler:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \equiv \rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \rho \vec{g} \quad (1)$$

Y, con las demás hipótesis, se obtiene la conocida ecuación de Bernoulli:



$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = Cte \quad (2)$$

Aplicando Bernoulli entre los puntos 1 (superficie libre del depósito) y 2 (salida del chorro de agua después del sifón) en términos de altura:

$$H_1 = H_2 + \Delta H_{1-2} \quad (3)$$

$$\underbrace{\frac{p_1}{\rho g}}_{P_1=P_{atm}=0(rel)} + \underbrace{\frac{v_1^2}{2g}}_{v_1^2 \approx 0} + z_1 = \underbrace{\frac{p_2}{\rho g}}_{P_2=P_{atm}=0(rel)} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \underbrace{\Delta h_f}_{=0, Hip} \quad (4)$$

Por tanto,

$$v_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)} = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 5,1 m} \cong 10 \text{ m/s} \quad (5)$$

y el caudal volumétrico  $Q$  desalojado por el sifón será:

$$Q = v_2 S_2 = \sqrt{2gH} a^2 = 10 \frac{m}{s} (0,5 m)^2 = 2,5 m^3/s \Rightarrow Q = 2,5 m^3/s \quad (6)$$

**Determine la expresión de la energía piezométrica en el punto M en función del R1.**

La energía piezométrica se define como  $E_{piezo} = \frac{p}{\rho} + gz$  y en el punto M:

$$E_{piezo, M} = \left[ \frac{p}{\rho} + gz \right]_M \quad (7)$$

Aplicando de nuevo Bernoulli entre los puntos 1 (superficie libre del depósito) y M (línea central del codo  $R_1$ ) en términos de energía:

$$E_1 = E_2 + \Delta E_{1-2} \quad (8)$$

$$\underbrace{\frac{p_1}{\rho}}_{P_1=P_{atm}=0(rel)} + \underbrace{\frac{v_1^2}{2}}_{v_1^2 \approx 0} + gz_1 = \frac{p_M}{\rho} + \frac{v_M^2}{2} + gz_M + \underbrace{\Delta e_f}_{=0, Hip} \quad (9)$$

$$\left[ \frac{p}{\rho} + gz \right]_M = gz_1 - \frac{v_M^2}{2} \quad (10)$$

Tomando la referencia de altura en el punto M  $z_M = 0$ , se obtiene:

$$\left[ \frac{p}{\rho} \right]_M = g(H + R_1 + R_2) - \frac{v_M^2}{2} \quad (11)$$



Sin embargo, el término de la energía cinética en el punto M aún es desconocido. Para evaluarlo, hay que tener presente la hipótesis de flujo irrotacional en el codo:

– Flujo irrotacional  $\Rightarrow$  Vórtice libre  $\Rightarrow$  Perfil de velocidad:

$$vr = K (\text{Cte}) \quad (12)$$

Así, en el punto M, la velocidad será:

$$v_M = \frac{K_1}{R_1} \quad (13)$$

Para determinar el valor de la constante  $K_1$ , debemos utilizar el *principio de conservación de la masa*, para asegurar que el perfil de velocidad cumplirá en todo momento con la conservación de la masa, y se obtendrá el conocido caudal volumétrico:

$$Q = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{R_1 - \frac{a}{2}}^{R_1 + \frac{a}{2}} \frac{K_1}{r} a dr = K_1 a \ln \left( \frac{R_1 + \frac{a}{2}}{R_1 - \frac{a}{2}} \right) \quad (14)$$

Por tanto, la constante del vórtice libre es:

$$K_1 = \frac{Q}{a \ln \left( \frac{R_1 + \frac{a}{2}}{R_1 - \frac{a}{2}} \right)} \quad (15)$$

y la velocidad en el punto M es:

$$v_M = \frac{Q}{R_1 a \ln \left( \frac{R_1 + \frac{a}{2}}{R_1 - \frac{a}{2}} \right)} \quad (16)$$

Finalmente, la energía piezométrica en el punto M en función de  $R_1$ :

$$\left[ \frac{p}{\rho} \right]_M = g(H + R_1 + R_2) - \frac{1}{2} \left( \frac{Q}{R_1 a \ln \left( \frac{R_1 + \frac{a}{2}}{R_1 - \frac{a}{2}} \right)} \right)^2 \quad (17)$$

Sustituyendo valores,

$$\left[ \frac{p}{\rho} \right]_M = 68,67 + 9,81R_1 - \left( \frac{12,51}{R_1^2 \ln \left( \frac{R_1 + 0,25}{R_1 - 0,25} \right)} \right)^2 \quad (18)$$





**La condición que debe cumplirse con la relación  $a/R_1$  máxima necesaria para evitar que en el punto B aparezcan síntomas de cavitación.**

Para evitar la cavitación en el punto B, se debe dar la condición de que la presión en B no sea nunca igual o inferior a la presión de vapor del agua en esas condiciones. Debido a que el flujo es irrotacional en el codo, la velocidad aumenta a medida que disminuye el radio, ya que el perfil de velocidades se ha supuesto para un vórtice libre. En consecuencia, la presión disminuirá a medida que disminuya el radio.

Conocida la energía piezométrica en el punto M, se puede aplicar la ecuación de Euler, bajo las mismas hipótesis adoptadas anteriormente, en la dirección normal a la línea de corriente  $\hat{n}$ :

$$-\rho g \frac{dz}{dn} - \frac{\partial p}{\partial n} = \rho \left( \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v^2}{\mathfrak{R}} \right) \quad (19)$$

donde  $\mathfrak{R}$  es el radio de curvatura y  $dn$  apunta en dirección al centro del radio de curvatura. Así, un cambio en la dirección del flujo de la velocidad de una partícula va acompañado de la combinación apropiada del gradiente de presión y el peso de la partícula en la dirección normal a la línea de corriente.

En nuestro caso, tomando  $\mathfrak{R} = r$  y  $dn = -dr$ , se obtiene:

$$\rho g \frac{dz}{dr} + \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \left( \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v^2}{r} \right) \quad (20)$$

=0, Hip.

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{P}{\rho} + gz \right) = \frac{v^2}{r} \quad (21)$$

Teniendo presente el flujo irrotacional de vórtice libre de la ecuación (12), se integra entre los puntos M y B,

$$\int_M^B d \left( \frac{P}{\rho} + gz \right) = \int_{R_M}^{R_B} \frac{K_1^2}{r^3} dr \quad (22)$$

Y resulta:

$$\left[ \frac{P}{\rho} + gz \right]_B - \left[ \frac{P}{\rho} + gz \right]_M = \frac{K_1^2}{2} \left( \frac{1}{R_M^2} - \frac{1}{R_B^2} \right) \quad (23)$$

Ahora, tomando como referencia de altura de nuevo el punto M  $z_M = 0$ ,

$$\begin{aligned} z_B &= \frac{a}{2} = \frac{0,5 \text{ m}}{2} = 0,25 \text{ m} \\ R_M &\equiv R_1 \\ R_B &= R_1 - \frac{a}{2} = (R_1 - 0,25) \text{ m} \end{aligned} \quad (24)$$



Finalmente, para evitar la cavitación, se expresa la condición más extrema, que es que la presión en B sea igual a la presión de vapor del agua en esas condiciones:

$$P_B \equiv P_{\text{vapor agua}} = 17,5 \text{ mmcHg} \cdot \frac{10^5 \text{ Pa}}{760 \text{ mmcHg}} \cong 2302,6 \text{ Pa (abs)} \quad (25)$$

Puesto que, en toda la resolución del problema y en la deducción de la energía piezométrica en el punto M, se ha trabajado con presiones relativas, la presión de vapor en B debe expresarse en relativas.

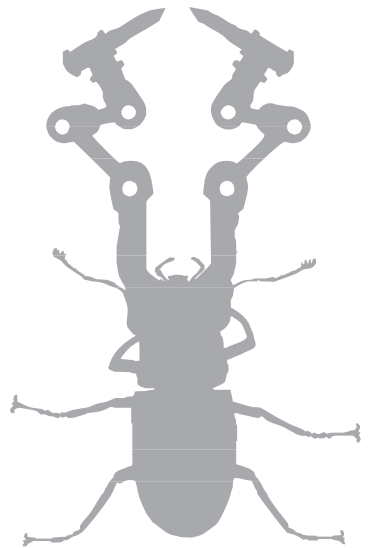
$$P_B \equiv P_B - P_{\text{atm}} = (2302,6 - 10^5) \text{ Pa} = -97697,4 \text{ Pa (rel)} \quad (26)$$

Sustituyendo las ecuaciones (15), (18), (24) y (26) en la ecuación (23),

$$-163,91 - 9,81R_1 + \frac{12,51}{R_1^2 \left[ \ln \left( \frac{R_1 + 0,25}{R_1 - 0,25} \right) \right]^2} = \frac{12,51 \left[ \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{(R_1 - 0,25)^2} \right]}{\left[ \ln \left( \frac{R_1 + 0,25}{R_1 - 0,25} \right) \right]^2} \quad (27)$$

La ecuación resultante es implícita, con la única incógnita  $R_1$ . Resolviéndola con la ayuda de un programa de resolución de problemas matemáticos, se obtienen las soluciones buscadas:

$$\begin{aligned} R_1 &= 0,49 \text{ m} \\ \frac{a}{R_1} &= 1,011 \\ v_M &= 9,08 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (28)$$



→ 22



## Evolución del flujo por el interior de un tubo troncocónico

En la figura 1, se ha representado el enlace de dos tubos de sección recta circular mediante un tronco de cono. El caudal de agua  $Q$  a través de la sección I-I viene dado por la expresión:

$$Q = 100(1 + 0,02t) \text{ [l/s]}$$

donde  $t$  es el tiempo en segundos transcurrido desde el instante en que  $Q$  valía 100 l/s.

Tomando un proceso isotérmico, se pide:

1. Calcular la aceleración total, local y convectiva a lo largo del tronco de cono.
2. Calcular qué mide la sonda de Pitot ( $\Delta h$ ) en el punto A.

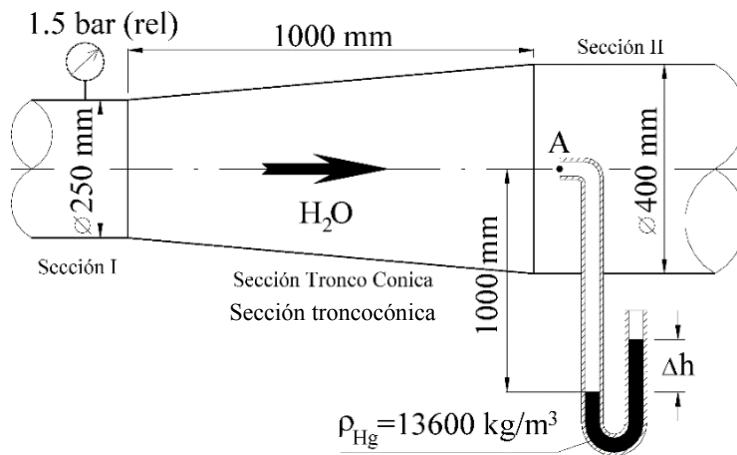


Figura 1. Esquema y dimensiones del enlace troncocónico y la sonda Pitot (no a escala)



## Estudio

### Breve descripción

En la primera parte del problema, se presenta una resolución de cinemática de fluidos. En la segunda parte, la medición del tubo Pitot de la energía total en el punto A combinando la dinámica de fluidos en el tronco de cono mediante la conservación de la energía, mientras que, por el interior del tubo Pitot y del manómetro en U, la lectura será en función del tiempo.

### Análisis

Análisis INTEGRAL	
Volumen de control (VC)	
<b>Indeformable</b>	<b>Inercial (fijo)</b>
Deformable	No inercial (móvil)

### Hipótesis que se plantean

PROPIEDADES del fluido			
<b>Densidad</b>	<b>Constante</b>	<b>Incompresible</b>	<b>Homogénea</b>
	Variable: Proceso de compresión/expansión	Líquido	Módulo de compresibilidad
		Gas ideal	Adiabático Isotérmico
COMPORTAMIENTO del fluido			
En reposo	Equilibrio	Absoluto	
		Relativo	
<b>En movimiento</b>	<b>Régimen</b>	Estacionario	
		<b>Transitorio</b>	
PRESTACIONES del fluido			
- Aceleración total y medición en el manómetro en U			
Otras hipótesis de TRABAJO			
- La variación de la temperatura es despreciable. - Las propiedades físicas y los perfiles de velocidades son constantes y uniformes en las secciones de control. - Se considera despreciable cualquier tipo de pérdida de energía. - La disposición es horizontal.			

### Principios básicos y leyes fundamentales

Principio de conservación de la masa (ecuación de continuidad)

Principio de conservación de la energía



## Resolución

### Aceleración total, local y convectiva a lo largo del tronco de cono

En primer lugar, hay que calcular cómo varía la velocidad en función del tiempo y de la posición en la sección troncocónica. Habida cuenta de que la sección es función de la posición en la sección troncocónica, resulta:

$$v(x,t) = \frac{Q(t)}{S(x)} \quad (1)$$

donde la superficie de la sección en la parte troncocónica será función de la posición

$$S(x) = \frac{\pi}{4} D^2(x) \quad (2)$$

siendo

$$D(x) = 0,25 + 2 \left( \frac{0,4 - 0,25}{2} \cdot 1 \right) = 0,25 + 0,15x \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1 \text{ m} \quad (3)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (2), y posteriormente en la ecuación (1), resulta:

$$v(x,t) = \frac{0,1(1 + 0,02t)}{\frac{\pi}{4}(0,25 + 0,15x)^2} \quad (4)$$

En el caso del flujo a lo largo del tronco de cono, la aceleración total se define como

$$\underbrace{\frac{Dv(x,t)}{Dt}}_{\text{aceleración total}} = \underbrace{\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}}_{\text{aceleración local}} + \underbrace{v(x,t) \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}}_{\text{aceleración convectiva}} \quad (5)$$

y entonces

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}(0,25 + 0,15x)^2} \frac{\partial}{\partial t} (0,1(1 + 0,02t)) = \frac{0,002}{\frac{\pi}{4}(0,25 + 0,15x)^2} \left[ \text{m/s}^2 \right] \quad (6)$$

$$\begin{aligned} v(x,t) \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} &= \frac{0,1(1 + 0,02t)}{\frac{\pi}{4}(0,25 + 0,15x)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{0,1(1 + 0,02t)}{\frac{\pi}{4}(0,25 + 0,15x)^2} \right\} = \\ &= -\frac{0,048(1 + 0,02t)^2}{\pi^2 (0,25 + 0,15x)^5} \left[ \text{m/s}^2 \right] \end{aligned} \quad (7)$$

**Qué mide la sonda de Pitot ( $\Delta h$ ) en el punto A**

Si se acepta que no existen pérdidas a lo largo del conducto, entonces, en régimen transitorio:

$$\rho \frac{Dv(x,t)}{Dt} = -\frac{dP}{dx} - \rho \frac{d}{dx}(gz) \quad (8)$$

$$\frac{Dv(x,t)}{Dt} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{P}{\rho}\right) - \frac{d}{dx}(gz) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{P}{\rho} + gz\right) \stackrel{\text{Hip. Disposición horizontal}}{\equiv} -\frac{d}{dx}\left(\frac{P}{\rho}\right) \quad (9)$$

$$\frac{Dv(x,t)}{Dt} \equiv \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + v \frac{dv(x,t)}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{P}{\rho}\right) \quad (10)$$

$$\underbrace{\frac{dv(x,t)}{dx}}_{\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2}\right)}$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{d}{dx}\left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2(x,t)}{2}\right) = 0 \quad (11)$$

Sustituyendo la expresión de la velocidad local,

$$\frac{0,002}{\frac{\pi}{4}(0,25+0,15x)^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2(x,t)}{2}\right) \quad (12)$$

e integrando,

$$\int_{x_I=0}^{x_{II}=1} \frac{0,002}{\frac{\pi}{4}(0,25+0,15x)^2} dx = -\int_{E_I}^{E_{II}} d\left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2(x,t)}{2}\right) \quad (13)$$

Y se obtiene:

$$0,025465 = \left[\frac{P_I}{\rho} + \frac{v_I^2}{2}\right] - \left[\frac{P_{II}}{\rho} + \frac{v_{II}^2}{2}\right] \quad (14)$$

donde

$$\frac{P_I}{\rho} = \frac{1,5 \cdot 10^5}{10^3} = 150 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \quad (15)$$

$$\frac{v_I^2}{2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{0,1(1+0,02t)}{\frac{\pi}{4}(0,25+0,15x)^2} \right]^2 = 2,075(1+0,02t)^2 \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$$

$$E_{II} \equiv \left[ \frac{P_{II}}{\rho} + \frac{v_{II}^2}{2} \right] = 150 + 2,075(1+0,02t)^2 - 0,025465 \quad (16)$$





En el manómetro en U, entre los puntos B y C se define (v. figura 2):

$$\begin{aligned} P_A &= P_{0II} \\ P_B &= P_C \\ P_{0II} + \rho g H &= \rho_{Hg} g \Delta h + P_{atm} \end{aligned} \quad (17)$$

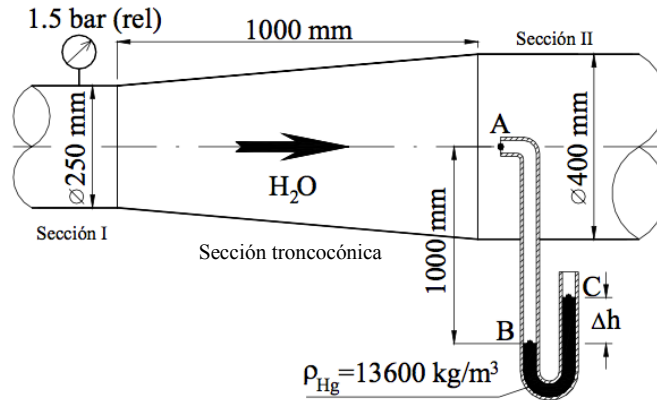


Figura 2. Puntos B y C en manómetro en U (no a escala)

donde

$$P_{0II} = P_{II} + \rho \frac{v_{II}^2}{2} = \rho E_{II} \quad (18)$$

La lectura en el manómetro será

$$\Delta h = \frac{P_{0II} + \rho g H}{\rho_{Hg} g} \quad (19)$$

$$\Delta h = \frac{(150 + 2,075(1 + 0,02t)^2 - 0,025465)1000 + 1000 \cdot 9,81 \cdot 1}{13600 \cdot 9,81} \quad (20)$$

$$\Delta h = 1,2 + 0,016(1 + 0,02t)^2 \quad (21)$$