

UNIVERSITÉ PAUL CÉZANNE AIX-MARSEILLE III
ÉCOLE DOCTORALE PHYSIQUE ET
SCIENCES DE LA MATIÈRE
INSTITUT FRESNEL, ÉQUIPE PHY-TI
ÉCOLE CENTRALE MARSEILLE

DÉTECTION SUR DONNÉES
FORTEMENT INHOMOGÈNES ET
APPLICATION AUX RADAR
AÉROPORTÉS

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Paul Cézanne Aix-Marseille III,
spécialité « Traitement des Images »

par

Éric Magraner

Thèse soutenue le 5 / 12 / 2008 devant le jury composé de :

Rapporteurs : LARZABAL PASCAL (Pr., IUT de Cachan)
TOURNERET JEAN-YVES (Pr., INP/ENSEEIH)
Examineurs : BECKER ALAIN (Correspondant Thalès)
BERTAUX NICOLAS (Co-encadrant, ECM)
BLANC-TALON JACQUES (Correspondant DGA)
JAUFFRET CLAUDE (Pr., Université du Sud Toulon-Var)
RÉFRÉGIER PHILIPPE (Pr., Directeur de thèse, ECM)

« La resignación es un suicidio permanente. »

Manu Chao

REMERCIEMENTS

LA soutenance de thèse est maintenant passée, elle clôture trois années de doctorat, au cours desquelles il y a eu des bons moments et des moments plus difficiles . . . De nombreuses personnes ont contribué à cette aventure, je souhaite à travers cette modeste page les remercier.

Tout d'abord je voudrais dire merci à Philippe Réfrégier pour m'avoir accueilli dans son équipe de recherche et m'avoir inculqué son sens de la rigueur et de l'honnêteté. Un grand merci à Nicolas Bertaux auprès duquel j'ai beaucoup appris, je souhaite le remercier pour sa disponibilité et lui témoigner ma reconnaissance. Je souhaite également dire merci aux membres de mon jury d'avoir accepté de participer à cette thèse. Merci à la DGA et au CNRS qui ont financé ces travaux de thèse. Merci à l'équipe RIM de l'ONERA pour la fourniture d'images RADAR ainsi qu'à Thalès Systèmes Aéroportés pour les informations fournies.

Cependant cette thèse n'aurait pas été la même sans tous les membres de l'équipe PhyTI, les permanents (Antoine, Arnaud, Frédéric, Marc, Muriel), les anciens doctorants (Cyrille, Gemma, Guillaume, Jérôme, Nicolas, Pascal) et les doctorants actuels (Arnaud, Émilie, Jean-François, Julien). Merci à tous, je souhaite beaucoup de réussite aux futurs docteurs. Merci aux membres de l'Institut Fresnel pour leur accueil.

Je n'oublie pas les personnes que j'ai rencontré lors de mon monitorat, merci à ceux qui m'ont donné ma chance pour réaliser mes premiers enseignements (Jean-Jacques, Marc).

Pour se détendre rien de tel qu'un peu de sport, alors merci à tous mes collègues d'entraînement (Anne, Anaïs, Julie, Sébastien), aux triathlètes (Jean-Jacques, Julien, Ludovic, Pierre) et à coach (Didier) . . . à très bientôt pour de nouvelles compétitions.

J'adresse un merci particulier à ma mère qui m'a donné la force de faire des études et je souhaite avoir ici une pensée pour mon pépé et faire une bise à ma mémé. Merci à mon frère et à toute ma famille pour leur soutien. Pour conclure, je souhaite à la nouvelle génération (Nathan, Mathilde, Evan, . . .) tout le bonheur du monde.

SOMMAIRE

SOMMAIRE	vi
LISTE DES FIGURES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xi
Préambule	1
1 INTRODUCTION	3
1.1 PRÉSENTATION DE LA PROBLÉMATIQUE	3
1.2 PRÉSENTATION DES RADAR AÉROPORTÉS	5
1.2.1 Historique	5
1.2.2 Les différents types de RADAR	5
1.2.3 Principes de fonctionnement d'un RADAR	7
1.3 PRÉSENTATION DES DONNÉES TRAITÉES	13
1.3.1 Formation d'une carte distance/vitesse	13
1.3.2 Modèle considéré	21
1.4 DÉTECTION À TAUX DE FAUSSE ALARME CONSTANT	24
1.4.1 Choix d'un test de détection	25
1.4.2 Principales techniques de détection	26
1.5 PLAN DU MANUSCRIT	28
CONCLUSION	29
2 DÉTECTION TFAC SUR FONDS INHOMOGÈNES	31
2.1 PERFORMANCES DU DÉTECTEUR IDÉAL	32
2.2 CA-CFAR ET FONDS HOMOGÈNES	34
2.3 PERFORMANCES EXACTES SUR FONDS INHOMOGÈNES	36
2.3.1 Expressions exactes des performances	37
2.3.2 Comportement de la statistique X_n/Z_n	39
2.4 PERFORMANCES APPROCHÉES SUR FOND INHOMOGÈNES	41
2.4.1 Propriétés de la moyenne arithmétique	41
2.4.2 Ddp de la moyenne arithmétique	43
2.4.3 Expressions approchées des performances	44
2.5 VALIDATIONS EXPÉRIMENTALES	45
2.5.1 Influence du biais	46
2.5.2 Influence de la variance d'estimation	47
2.5.3 Discussion	51
CONCLUSION	55
3 SÉLECTION DE RÉGION DE RÉFÉRENCE	57

3.1	SÉLECTION DE RÉGION DE RÉFÉRENCE	58
3.1.1	Estimation du fond	59
3.1.2	Détermination d'un ensemble de régions de référence	60
3.1.3	Contrôle du taux de fausse alarme	61
3.1.4	Analyse de l'évolution de la \mathcal{P}_d	64
3.1.5	Choix de la région de référence	66
3.2	EXEMPLES DE RÉSULTATS SUR FOND SYNTHÉTIQUE	69
3.3	EXEMPLES DE RÉSULTATS À FOND CONNU	72
	CONCLUSION	74
4	DÉTECTEUR LQ-CFAR ET SÉLECTION DE MODÈLE	77
4.1	DÉTECTEUR LQ-CFAR	78
4.1.1	Choix du modèle de fond	78
4.1.2	Estimateur de la valeur du fond	79
4.1.3	Test de détection et contrôle du taux de fausse alarme	83
4.1.4	Caractérisation du détecteur LQ-CFAR	84
4.1.5	Discussion	91
4.2	SÉLECTION DE MODÈLE	93
4.2.1	Choix du modèle	94
4.2.2	Simulations numériques	95
	CONCLUSION	101
5	SURFACE ACTIVE STATISTIQUE	103
5.1	PRÉSENTATION DE LA SURFACE ACTIVE STATISTIQUE	104
5.1.1	Représentation de données par des surfaces maillées	104
5.1.2	Principe de minimisation de la complexité stochastique	109
5.1.3	Critère de complexité stochastique pour la SAS	111
5.1.4	Simplification et déformation du maillage	113
5.1.5	Estimation des valeurs nodales	114
5.2	APPLICATION POUR LA DÉTECTION	118
5.2.1	Utilisation sur données perturbées par un bruit gamma	119
5.2.2	Exemples d'estimation de la valeur de fonds	119
5.2.3	Détecteur DSAS	123
5.2.4	Comparaison des techniques de détection	124
	CONCLUSION	136
	Conclusions et perspectives	137
A	ANNEXES	141
A.1	PERFORMANCES DU CA-CFAR : CAS GÉNÉRAL	142
A.2	CALCUL NUMÉRIQUE DES PERFORMANCES EXACTES DU CA-CFAR	149
A.2.1	Influence du nombre de termes	150
A.2.2	Calcul numérique	150
A.3	MOYENNE ET VARIANCE DU LOGARITHME D'UNE V.A. GAMMA	154
A.4	LQ-CFAR ET ESTIMATION NON-BIAISÉE DU FOND	155
A.5	CALCULS DES PERFORMANCES DU LQ-CFAR	157
A.6	TERME DE CODAGE DU MAILLAGE DE LA SAS	159
A.6.1	Description compacte du maillage	159
A.6.2	Détermination de la longueur de code	165

A.7 SAS : SIMPLIFICATION ET DÉFORMATION DE MAILLAGE	169
A.8 DÉTERMINATION DE LA LOG-VRAISEMBLANCE	173
A.9 SAS : BORNES DE CRAMER-RAO	174
A.10 PRINCIPE D'ALGORITHME RAPIDE	176
A.11 SAS ET ALGORITHME RAPIDE	177
BIBLIOGRAPHIE	179
NOTATIONS	191
ACRONYMES	193

LISTE DES FIGURES

1.1	Schéma de la liaison RADAR-opérateur	4
1.2	Exemples de RADAR à exploration conique	6
1.3	Illustration d'une acquisition RADAR	8
1.4	Schéma émission RADAR	8
1.5	Schéma réception RADAR	9
1.6	Exemple de simulation de SER	11
1.7	Phénomène d'interférence	11
1.8	Illustration acquisition des données	14
1.9	Exemple de filtrage adapté	15
1.10	Traitement temps-fréquence : organisation des données	16
1.11	Traitement temps-fréquence	17
1.12	Résolution du Doppler	18
1.13	Exemple de carte distance/vitesse	19
1.14	Échos de sol	19
1.15	Ambiguïté en distance	20
1.16	Schéma général d'un détecteur TFAC	26
2.1	Test du détecteur idéal	32
2.2	Détecteur idéal : \mathcal{P}_d en fct de S	34
2.3	CA-CFAR : \mathcal{P}_d en fct de N_n	36
2.4	Ddp du test de détection CA-CFAR	40
2.5	Ddp exacte/approchée de la moyenne arithmétique	44
2.6	Influence du biais : fond étudié	46
2.7	Technique CA-CFAR : influence du biais, $L = 1$	47
2.8	Technique CA-CFAR : influence du biais, $L = 4$	48
2.9	Influence du biais : fond étudié	48
2.10	Technique CA-CFAR : influence de la variance, $L = 1$	49
2.11	Technique CA-CFAR : influence de la variance, $L = 4$	50
2.12	Exemple de fond linéaire	51
2.13	Exemple de fond linéaire : pire cas	52
2.14	Exemple de fond quadratique	53
2.15	Évolution de B et N_{eq} sur un fond quadratique	53
2.16	\mathcal{P}_d et \mathcal{P}_{fa} du CA-CFAR sur fond quadratique	54
2.17	Courbes COR du CA-CFAR	55
3.1	Détermination d'une région de référence	60
3.2	Sélection des pixels de référence	61
3.3	Contrôle du taux de fausse alarme : expérience	63
3.4	Contrôle du taux de fausse alarme : résultats	64

3.5	Fond utilisé lors de l'expérience	64
3.6	Évolution de la \mathcal{P}_d sur fonds inhomogènes	65
3.7	Évolution de la \mathcal{P}_d sur fonds inhomogènes : 2 ^{ème} exemple	66
3.8	Évolution de la \mathcal{P}_d en fonction de N_n	68
3.9	Sélection de région et estimation du fond	69
3.10	Expérience : fond synthétique	70
3.11	Comparaison de performances à fond estimé	71
3.12	Régions de référence testées	73
3.13	Régions de référence sélectionnées	73
3.14	Comparaison de performances à fond connu	75
4.1	LQ-CFAR : \mathcal{P}_d en fct de S	85
4.2	LQ-CFAR : ρ en fct de \mathcal{P}_{fa}	86
4.3	Expérience : présentation du fond et des données	87
4.4	Comparaison CA-CFAR et LQ-CFAR : fond homogène	88
4.5	Comparaison CA-CFAR et LQ-CFAR : fond inhomogène	89
4.6	Performances à différentes tailles de région de référence	90
4.7	Région de référence du Matched CA-CFAR	91
4.8	Fond log-quadratique utilisé pour l'expérience	92
4.9	Ddp de $\hat{m}_{n,\omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}$ et $X_n/\hat{m}_{n,\omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}$	93
4.10	Ddp de $\hat{m}_{n,\omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}$ et $X_n/\hat{m}_{n,\omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}$	94
4.11	Exemples de fond générés	96
4.12	CA-CFAR : résultats sur fond synthétique	97
4.13	LQ-CFAR : résultats sur fond synthétique	97
4.14	SM : résultats sur fond synthétique	97
4.15	Sélection de modèle : résultats sur données réelles	99
4.16	Sélection de modèle : plans de détection	101
5.1	Exemple de maillage	105
5.2	Exemple de triangle	106
5.3	Exemple de plan générateur	107
5.4	Objectif de la SAS	108
5.5	Polygone de voisinage d'un nœud K	115
5.6	SAS : premier exemple	120
5.7	SAS : variance d'estimation	121
5.8	SAS : erreurs de modèle	122
5.9	SAS : deuxième exemple	122
5.10	SAS : exemple avec masquage	124
5.11	Indicateur ADT	125
5.12	Comparaison des techniques de détection : fond 1	127
5.13	Comparaison des techniques de détection : nb moyen de fa	127
5.14	Comparaison des techniques : plan $\langle \text{NFA} \rangle$, $\langle \text{ADT} \rangle$	130
5.15	Comparaison des techniques de détection : fond 2	132
5.16	Comparaison des techniques de détection : nb moyen de fa	132
5.17	Comparaison des techniques : plan $\langle \text{NFA} \rangle$, $\langle \text{ADT} \rangle$	134
5.18	Comparaison des techniques : plan $\langle \text{NFA} \rangle$, $\langle \text{ADT} \rangle$	135
A.1	Évolution de la \mathcal{P}_{fa} en fonction de K	150

A.2	Calculs exactes : évolution de la ddp du test de détection	152
A.3	Calculs exactes : importance des différents termes	153
A.4	Terme de codage du maillage	160
A.5	Reconstruction de maillage	161
A.6	Construction du codage du maillage	162
A.7	Reconstruction d'un nœud	163
A.8	Coordonnées relatives des nœuds du maillage	166
A.9	Déplacement de nœuds	169
A.10	Basculement d'arêtes	170
A.11	Suppression d'un nœud d'ordre 3	171
A.12	Suppression d'un nœud d'ordre 4	171
A.13	Suppression d'un nœud d'ordre 5	171
A.14	Suppression d'un nœud d'ordre 6	172

Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques d'un RADAR d'interception	7
4.1	LQ-CFAR : N_{eq} fct de la taille de ω_n	92
4.2	Sélection de modèle : résultats sur données réelles	99
5.1	Comparaison des techniques de détection : 1 ^{er} exemple	130
5.2	Comparaison des techniques de détection : 2 ^{ème} exemple	133
A.1	Exemple de tableau topologique	159

PRÉAMBULE

LES systèmes RADAR sont couramment utilisés pour la surveillance du domaine aérien ou pour des missions d'interception car ils sont opérationnels par tout temps, ils sont insensibles à la luminosité et permettent une surveillance à grande distance. Dans un souci d'efficacité, on souhaite que la capacité de détection d'un RADAR soit la plus élevée possible, mais la détection doit également être la moins sensible possible aux perturbations. Les émissions électromagnétiques adverses ou alliées peuvent, par exemple, nuire à la détection, pouvant même rendre inopérant le RADAR. Aussi, il est particulièrement important de pouvoir maîtriser le nombre de fausses alarmes qui surviennent quand une cible est détectée alors qu'il n'y en a pas. On parle alors de détection à taux de fausse alarme constant.

Les travaux réalisés dans cette thèse s'inscrivent dans la recherche d'amélioration de la capacité de détection des systèmes RADAR et en particulier sur une meilleure maîtrise du taux de fausse alarme lors de la détection de cibles ponctuelles en présence d'échos de sol qui génèrent un fond complexe inhomogène. Dans le premier chapitre, nous décrivons précisément le sujet de la thèse et les applications liées aux systèmes RADAR. Nous présenterons également le type de données traitées et nous expliquerons comment ces données sont obtenues. Nous établirons ensuite un état de l'art des principales techniques de détection existantes. Dans le deuxième chapitre, nous étudierons la technique de détection la plus couramment utilisée. Cette technique suppose que le bruit est homogène autour de la position présumée de la cible. Cependant, cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée et les performances de cette technique sont alors fortement dégradées. Nous nous attacherons donc à décrire précisément les raisons de cette dégradation. Les trois derniers chapitres sont consacrés à la présentation des techniques de détection proposées. Les différentes solutions développées sont caractérisées et comparées par des simulations numériques. Finalement nous concluons ce manuscrit et nous présenterons quelques perspectives.

INTRODUCTION



SOMMAIRE

1.1	PRÉSENTATION DE LA PROBLÉMATIQUE	3
1.2	PRÉSENTATION DES RADAR AÉROPORTÉS	5
1.2.1	Historique	5
1.2.2	Les différents types de RADAR	5
1.2.3	Principes de fonctionnement d'un RADAR	7
1.3	PRÉSENTATION DES DONNÉES TRAITÉES	13
1.3.1	Formation d'une carte distance/vitesse	13
1.3.2	Modèle considéré	21
1.4	DÉTECTION À TAUX DE FAUSSE ALARME CONSTANT	24
1.4.1	Choix d'un test de détection	25
1.4.2	Principales techniques de détection	26
1.5	PLAN DU MANUSCRIT	28
	CONCLUSION	29

CE chapitre introductif a pour but de présenter la problématique étudiée dans ce mémoire de thèse qui concerne la détection de cibles ponctuelles dans des données acquises par des RADAR aéroportés (carte distance/vitesse). Nous présenterons les principes de l'imagerie RADAR dans notre cadre applicatif. Nous verrons comment les données traitées sont obtenues, ce qui nous permettra d'expliquer le modèle d'étude qui a été envisagé. Nous effectuerons un état de l'art des techniques de détection existantes. Enfin nous dresserons un plan de ce manuscrit.

1.1 PRÉSENTATION DE LA PROBLÉMATIQUE

Les travaux qui sont présentés dans ce manuscrit sont liés à la problématique de la détection. Dans le dictionnaire *Le Petit Robert* la détection est définie comme l'action de déceler l'existence d'un corps ou d'un phénomène caché. On peut vouloir détecter des gaz toxiques, des mines de guerre, des nappes de pétrole ou encore mille autres choses.

Nous nous intéresserons à la détection à distance (télédétection) de cibles à l'aide d'un système RADAR aéroporté. Plus particulièrement, nous envisagerons le cas de cibles qui se déplacent à proximité du sol et qui peuvent potentiellement représenter une menace importante. Ces cibles sont difficiles à détecter car elles doivent être distinguées du sol.

On peut imaginer que la cible à détecter est un missile de croisière, un objet volant à faible altitude, un drone, *etc.* L'espace entre le sol et le plancher RADAR¹ est très utilisé pour approcher un adversaire au plus près sans être détecté par ses dispositifs de surveillance.

On comprend aisément l'intérêt de détecter de telles menaces. Cependant, les signaux que nous traiterons seront très bruités et il sera particulièrement difficile de distinguer les cibles du bruit. Nous devons à la fois obtenir un pouvoir de détection élevé mais également assurer que l'information de détection que nous fournissons est pertinente. L'opérateur RADAR (qui peut également être le pilote) de l'avion doit pouvoir disposer d'une information fiable afin de mener à bien sa mission.

Pour mieux comprendre les tenants et les aboutissants de notre problème, la figure FIG.1.1 schématise la chaîne qui va de l'acquisition des données par le RADAR jusqu'à l'affichage des informations dans le cockpit de l'avion. Le

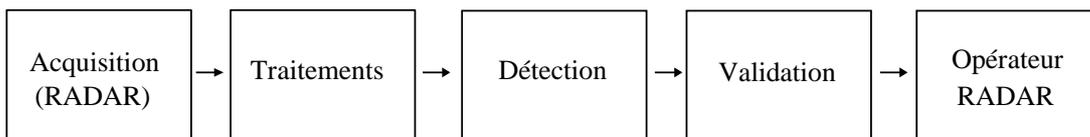


FIG. 1.1 – Transmission des informations collectées par le RADAR à l'opérateur RADAR.

RADAR effectue une mesure, les signaux récoltés sont exploités par l'étape "Traitements" qui fournit en sortie une image que l'on appelle carte distance/vitesse. Le principe du RADAR, les différents traitements réalisés ainsi que les cartes distance/vitesse seront présentés par la suite. L'étape de détection est l'objet des travaux, elle désigne un certain nombre de cibles potentielles à partir d'une unique mesure RADAR. L'étape de validation a pour but d'indiquer les cibles potentielles qui ont une forte probabilité de correspondre à une cible réelle afin de délivrer une information fiable à l'opérateur RADAR ou à d'autres systèmes électroniques. À cette fin, l'étape de validation utilise essentiellement les différentes informations fournies par l'étape de détection au cours du temps.

Ce qu'il est important de souligner, c'est la contrainte temps réel liée à notre application. L'information fournie doit être continuellement mise à jour et un blocage du système est inacceptable. Cependant la puissance de calcul que l'on peut embarquer sur un porteur est limitée. L'étape de validation qui est particulièrement gourmande en puissance de calcul doit donc être utilisée à bon escient. Il convient que l'information fournie par l'étape de détection soit pertinente, c'est-à-dire qu'elle ne désigne pas un nombre excessif de cibles potentielles.

¹Le plancher RADAR est l'altitude à laquelle un appareil peut être détecté par les RADAR de surveillance.

Pour contrôler le nombre de cibles potentielles, on souhaite définir un nombre de fausses alarmes à respecter. Une fausse alarme correspond à la détection d'une cible alors qu'il n'y a pas de cible. Nous nous attacherons donc à proposer des techniques de détection qui permettent de contrôler le nombre de fausses alarmes tout en assurant un fort pouvoir de détection. Pour cela nous devons prendre en compte les propriétés des signaux traités, qui sont étroitement liés aux phénomènes physiques mis en jeu lors de l'acquisition des signaux. La prochaine section a pour but de présenter le principe d'acquisition de données par un système RADAR.

1.2 PRÉSENTATION DES RADAR AÉROPORTÉS

1.2.1 Historique

À la fin du *XIX*^e siècle, Heinrich Hertz découvre les ondes électromagnétiques et montre qu'elles possèdent les mêmes propriétés que la lumière. Les premières applications de la radio-électricité sont les télécommunications puis la radio-navigation, mais dès le début du *XX*^e siècle des précurseurs envisagent la possibilité de détecter la présence d'objets métalliques par l'utilisation d'ondes électromagnétiques. Si le principe du RADAR est énoncé dans les années 1910, les premières applications n'apparaissent que dans les années 1930 : elles concernent la détection d'avions et d'icebergs. Puis le développement des systèmes RADAR s'accélère avec la seconde guerre mondiale. Après la guerre, le développement de systèmes militaires et civils se poursuit et les premiers RADAR imageurs aéroportés voient le jour. Au début des années 1950, le principe de la synthèse d'ouverture permet d'améliorer considérablement la résolution azimutale. Les applications aéroportées dans le domaine militaire suivent immédiatement. Depuis, les systèmes RADAR ne cessent de se perfectionner, tant au plan technologique, que par la variété des techniques mises en jeu pour exploiter les signaux RADAR.

1.2.2 Les différents types de RADAR

Les applications du RADAR sont très nombreuses, notamment dans les domaines suivants : contrôle aérien, atterrissage, trajectographie, mesure des vitesses, altimétrie, anticollision, météorologie, suivi de terrain, surveillance de sol, cartographie, navigation, conduite d'armes, guidage des missiles, autoguidage, ...

Pour chacune de ces applications, il existe un type de RADAR plus particulièrement adapté. La fréquence (porteuse) de l'onde RADAR utilisée est une caractéristique importante d'un RADAR, car elle détermine en partie la résolution de ce dernier. Plusieurs bandes de fréquence porteuses existent et correspondent à des applications RADAR différentes [116].

Nous nous intéresserons particulièrement aux RADAR actifs, c'est-à-dire les RADAR qui émettent un rayonnement électromagnétique et enregistrent le rayonnement rétro-diffusé. Les RADAR passifs enregistrent eux le rayonnement électromagnétique ambiant sans émettre de signal. Parmi les RA-

DAR actifs, il existe les RADAR continus, qui émettent continuellement un rayonnement électromagnétique et les RADAR à impulsions, qui émettent par intermittence un signal. Les impulsions émises par ces derniers peuvent l'être de manière cohérente ou non. Dans le cas d'un RADAR à impulsions cohérentes, la fréquence (de répétition) avec laquelle les impulsions sont répétées permet une nouvelle dissociation (basse, moyenne ou haute fréquence de répétition). On parlera de RADAR pulsé Doppler pour des RADAR à impulsions cohérentes qui permettent la détermination de la vitesse de la cible (grâce à l'effet Doppler).

Les différents types de RADAR se distinguent également suivant la manière dont ils explorent l'espace à l'aide de leur antenne.

Les RADAR à exploration conique (cf. figure FIG.1.2) utilisent une antenne circulaire et ils peuvent à la fois effectuer une rotation autour d'un axe vertical mais également changer leur inclinaison. Le faisceau RADAR, de forme conique, pointe vers une position particulière de l'espace, ce qui permet de déterminer simultanément les trois paramètres définissant la position d'une cible (distance, site, azimuth).

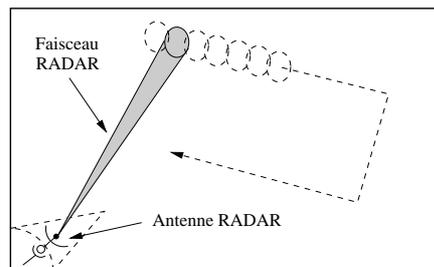


FIG. 1.2 – Exemple d'un RADAR à exploration conique.

Les RADAR aéroportés que nous considérerons sont des RADAR à exploration conique. Dans les nouvelles générations, le balayage de l'espace effectué par le RADAR n'est pas assuré par un mouvement mécanique de l'antenne, mais il est remplacé par un balayage électronique. Pour cela, on utilise la technologie des antennes actives, c'est-à-dire une antenne formée d'un réseau de modules électronique émetteur/récepteur.

Les RADAR aéroportés se distinguent des RADAR au sol par le fait qu'ils constituent des observatoires élevés, propres à la détection à grande distance des cibles de surface ou évoluant à très basse altitude. En contrepartie, ils sont beaucoup plus perturbés par les échos de sol du fait qu'ils regardent vers le bas et qu'ils sont eux-mêmes mobiles.

Nous nous intéresserons plus particulièrement aux RADAR d'interception qui sont installés dans la pointe avant des avions de combat (ou intercepteurs). Ils sont chargés d'acquiescer la ou les cibles désignées par les systèmes de surveillance, de les poursuivre et de délivrer toutes les informations nécessaires à la réalisation de l'interception. Les RADAR d'interception sont des systèmes très complexes compte tenu des mouvements du porteur et de l'exiguïté du volume disponible dans le porteur.

Les informations concernant les RADAR d'interception sont rares pour des raisons de sécurité que l'on peut aisément comprendre. Néanmoins, il

est possible de présenter plusieurs caractéristiques générales de ce type de RADAR, que l'on a rassemblées dans le tableau TAB.1.1.

Caractéristiques	Fréquence de répétition (FR)			
	Basse FR (BFR)	Moyenne FR (MFR)		Haute FR (HFR)
		Bas MFR	Haut MFR	
FR (kHz)	1 à 10	10 à 40	40 à 100	100 à 300
P_{moy} (kW)	0.1 à 0.5	0.5 à 1.5	0.5 à 2	1 à 5
$P_{\text{crête}}$ (kW)	50 à 200	20 à 100	10 à 40	3 à 10
Portée (km)	80 à 120			

TAB. 1.1 – Caractéristiques types de RADAR d'interception pulsé Doppler (Source : Techniques de l'Ingénieur [26]). La portée est donnée en espace libre pour une SER de 5 m^2 .

On notera que les RADAR d'interception peuvent être différenciés en fonction de la fréquence de répétition qu'ils utilisent. On remarquera les niveaux de puissance considérables atteints pour des systèmes embarqués. Concernant la fréquence de l'onde RADAR utilisée, les bandes de fréquences les plus couramment utilisées pour les RADAR d'interception sont les bandes X (8 – 12 GHz) et K_u (12 – 18 GHz) [116].

Pour mieux comprendre les spécificités des données traitées, décrivons maintenant les principes de fonctionnement de tels RADAR.

1.2.3 Principes de fonctionnement d'un RADAR

La présentation des principes de fonctionnement d'un RADAR ci-après résume celle de l'ouvrage de M. Le Chevalier [64]. Nous considérons le cas d'un RADAR actif, qui émet une onde électromagnétique et enregistre le signal rétro-diffusé.

La figure FIG.1.3 illustre une scène d'acquisition RADAR. L'avion de gauche émet une onde électromagnétique dans la direction de visée \vec{u} , cette onde est interceptée par un des deux avions placés à droite de la figure et est rétro-diffusée en partie vers le RADAR.

Émission du signal RADAR

Le signal émis est l'addition de deux signaux $I(t)$ et $Q(t)$ modulés en quadrature avec une porteuse de pulsation ω_0 (cf. figure FIG.1.4) :

$$I(t)\cos(\omega_0 t) + Q(t)\sin(\omega_0 t). \quad (1.1)$$

L'intérêt d'utiliser deux signaux va apparaître dans la suite.

Précisons que le signal émis peut être exprimé en utilisant la notation complexe par :

$$\underline{u}(t)e^{j\omega_0 t}, \quad (1.2)$$

où $\underline{u}(t) \triangleq I(t) + jQ(t)$ désigne l'enveloppe complexe du signal émis.

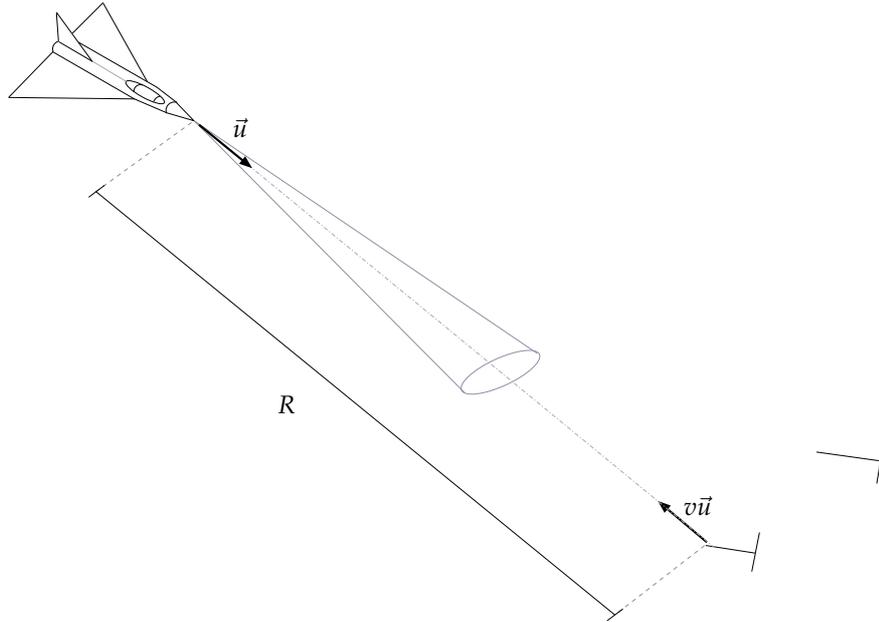


FIG. 1.3 – Illustration d'une acquisition RADAR : \vec{u} est la direction de visée de l'émission RADAR, R est la distance entre le RADAR et la cible et v est la vitesse radiale de la cible par rapport au RADAR.

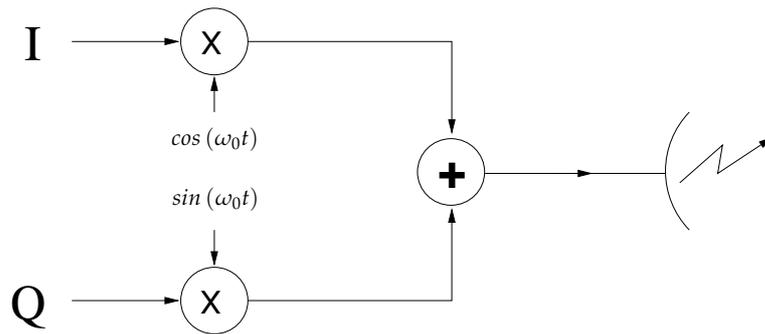


FIG. 1.4 – Schéma présentant le principe de l'émission d'une onde par un RADAR.

Propagation du signal RADAR

Supposons que l'onde émise est en partie rétro-diffusée par une cible ponctuelle qui effectue un mouvement de translation uniforme en direction du RADAR à la vitesse v . On va alors pouvoir capter l'onde rétro-diffusée par cette cible et nous noterons s le signal correspondant.

L'onde reçue a effectué l'allier-retour entre le porteur et la cible, ce qui nécessite un certain temps de propagation. De plus, la différence de vitesse entre le porteur et la cible a une incidence sur l'onde reçue à cause de l'effet Doppler. Dans le cas de vitesses v usuelles, l'effet Doppler se caractérise simplement par une variation de la pulsation de la porteuse de l'onde reçue par rapport à la pulsation ω_0 de la porteuse de l'onde émise.

Dans le cadre d'hypothèses classiques en RADAR, l'expression du signal reçu est exprimée par la formule suivante [64] :

$$\underline{s}(t, \tau, \Omega) = \alpha e^{j\phi} \underline{u}(t - \tau) e^{j\Omega(t-\tau)} e^{j\omega_0(t-\tau)}, \quad (1.3)$$

où $\alpha e^{j\phi}$ est un scalaire complexe inconnu de module α , qui est lié à l'atténuation du signal (pertes).

Le paramètre τ est lié au retard (propagation de l'onde) et sa valeur peut être déterminée par la relation suivante :

$$\tau \triangleq \frac{2R}{c}, \quad (1.4)$$

avec R la distance entre l'émetteur et la cible et c la célérité des ondes électromagnétiques dans le milieu considéré ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1}$ dans l'air)

Le paramètre Ω est défini comme étant la pulsation Doppler (ou plus simplement le Doppler) de la cible et son expression est la suivante :

$$\Omega \triangleq 2\omega_0 \frac{v}{c}. \quad (1.5)$$

Le paramètre Ω traduit le fait que la pulsation de la porteuse est approximativement décalée d'un facteur $2v/c$ (effet Doppler). Comme nous le verrons par la suite, ce phénomène, à peine perceptible sur une impulsion, sera utilisé pour mesurer la vitesse radiale v de la cible.

Réception du signal RADAR

Le signal reçu peut alors s'exprimer sous la forme suivante :

$$\underline{s}(t, \tau, \Omega) = \alpha \underline{u}(t - \tau) e^{j\Omega(t-\tau) + j\phi} e^{j\omega_0(t-\tau)}. \quad (1.6)$$

Le déphasage ϕ étant inconnu, on peut y intégrer le terme de phase inconnu $e^{j\omega_0\tau}$. On en déduit l'expression du signal physique (la partie réelle de $\underline{s}(t, \tau, \Omega)$) :

$$s(t, \tau, \Omega) = \alpha [I(t - \tau) \cos(\omega_0 t + \Omega(t - \tau) + \phi) + Q(t - \tau) \sin(\omega_0 t + \Omega(t - \tau) + \phi)]. \quad (1.7)$$

À la réception du signal (cf. figure FIG.1.5), on opère une démodulation du signal selon deux voies différentes : une démodulation en phase $s(t, \tau, \Omega) \cos(\omega_0 t)$ et une démodulation en quadrature $s(t, \tau, \Omega) \sin(\omega_0 t)$.

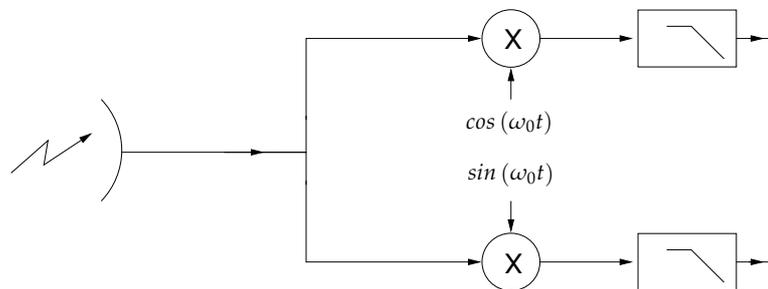


FIG. 1.5 – Schéma présentant le principe de la réception d'une onde par un RADAR.

Après démodulation, on obtient deux signaux $I_r(t, \tau, \Omega)$ et $Q_r(t, \tau, \Omega)$, dont l'un est donné par :

$$I_r(t, \tau, \Omega) \triangleq s(t, \tau, \Omega) \cos(\omega_0 t) = \frac{\alpha}{2} [I(t - \tau) \cos(\Omega(t - \tau) + \phi) + Q(t - \tau) \sin(\Omega(t - \tau) + \phi) + \text{termes}(2\omega_0)], \quad (1.8)$$

et l'autre par :

$$Q_r(t, \tau, \Omega) \triangleq s(t, \tau, \Omega) \sin(\omega_0 t) = \frac{\alpha}{2} \left[I(t - \tau) \cos \left(\Omega(t - \tau) + \frac{\pi}{2} + \phi \right) + Q(t - \tau) \sin \left(\Omega(t - \tau) + \frac{\pi}{2} + \phi \right) + \text{termes}(2\omega_0) \right], \quad (1.9)$$

où les termes en $2\omega_0$ sont supprimés par un filtrage passe-bas. On note alors I_r^F (resp. Q_r^F) le signal obtenu après filtrage de I_r (resp. Q_r).

L'intérêt d'avoir considéré les deux signaux $I(t)$ et $Q(t)$ apparaît maintenant. En effet, si on avait pris un seul signal, par exemple $I(t)$ et une seule démodulation $\cos(\omega_0 t)$, le signal démodulé pourrait s'annuler à cause du terme $\cos(\Omega(t - \tau) + \phi)$. Ainsi on verrait l'intensité de l'écho de la cible varier au cours du temps, avec pour conséquence que nous serions incapable de "voir" la cible à certains moments. Le fait d'utiliser les deux signaux $I(t)$ et $Q(t)$ permet de s'assurer que l'on sera toujours en capacité de "voir" la cible (encore faut-il que la cible nous ré-émette une quantité suffisante d'énergie).

Les deux signaux ainsi démodulés et filtrés, on crée alors le nombre complexe :

$$I_r^F(t, \tau, \Omega) - j Q_r^F(t, \tau, \Omega) = \alpha e^{j\phi} \underline{a}(t, \tau, \Omega), \quad (1.10)$$

avec $\underline{a}(t, \tau, \Omega) \triangleq \underline{u}(t - \tau) e^{j\Omega(t - \tau)}$.

La phase de ce nombre complexe (cf. équation 1.10) dépend de la pulsation Doppler Ω liée à la cible et du paramètre ϕ . Le paramètre ϕ n'étant pas connu (et non estimable), on ne peut pas connaître la pulsation Doppler Ω à partir d'une seule impulsion. On devra donc considérer plusieurs impulsions pour espérer connaître l'information Ω qui est liée à la vitesse radiale (relative) de la cible. De plus, on montrera par la suite qu'un nombre suffisamment grand d'impulsions doit être considéré pour que la pulsation Doppler Ω soit mesurée avec une précision satisfaisante.

Interactions du signal RADAR avec les cibles

L'atténuation du signal $\alpha e^{j\phi}$ correspond à une perte d'énergie. Ces pertes peuvent être dues au phénomène de diffusion dans les milieux traversés par l'onde (perte d'autant plus grande que la distance RADAR-cible est grande), ou liées au système d'acquisition (gain d'antenne par exemple). Une autre cause de l'atténuation du signal est la manière dont la cible interagit avec l'onde. On parle alors de réflectivité de la cible, que l'on exprime en terme de SER (Section Efficace Radar).

La SER d'une cible correspond à la surface équivalente d'un réflecteur qui rétro-diffuserait sans perte et de manière isotrope la même quantité d'énergie que la cible rétro-diffuse dans la direction du récepteur.

On peut présenter des exemples de valeurs moyennes de SER pour des avions vus par l'avant ou par l'arrière (Source : Techniques de l'ingénieur [27]) :

- avion discret : 0.1 à 0.5 m^2 ,
- avion mono-réacteur : 0.5 à 2 m^2 ,
- transport léger : 2 à 20 m^2 ,
- moyen courrier : 20 à 50 m^2 ,

– long courrier : 50 à 100 m^2 .

Cependant, il faut savoir que la SER varie considérablement suivant la présentation de la cible. Ainsi tout avion vu de dessous ou en plein travers présente une SER dépassant 100 m^2 . Au contraire, un avion furtif peut voir sa SER descendre en dessous de 0.01 m^2 .

Si le fait que la SER fluctue en fonction de l'orientation de la cible peut être facilement admis, il existe une autre source de fluctuation de la SER qui est moins évidente. Prenons la simulation de SER d'un avion présentée à la figure FIG.1.6. On remarque de fortes fluctuations de la SER en fonction de

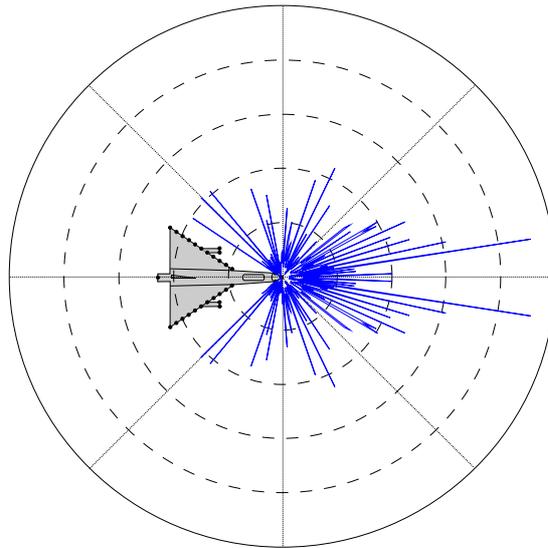


FIG. 1.6 – Exemple de simulation de SER en fonction de l'angle azimutal pour un avion à une longueur d'onde de 3 cm.

l'angle azimutal avec lequel l'avion est observé. Les fluctuations observées évoluent très rapidement en fonction de l'angle azimutal et ne peuvent pas s'expliquer par un changement de présentation de la cible.

Le phénomène observé est intrinsèquement lié à la façon dont les données sont acquises. En effet, un RADAR actif est un système d'émission temporellement cohérent. Il existe donc une cohérence entre l'onde émise à l'instant t et la même onde à l'instant $t + \delta t$. Cette cohérence rend alors possible le phénomène d'interférence [99].

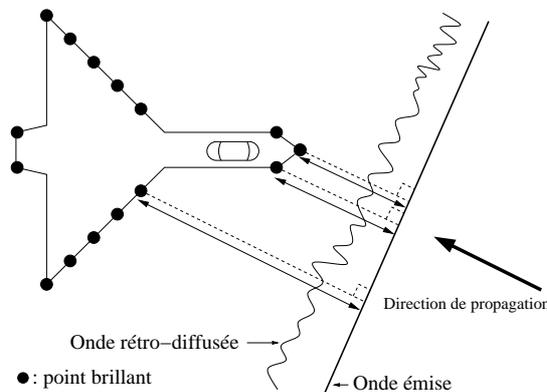


FIG. 1.7 – Cette figure illustre le phénomène d'interférence. Les ondes rétro-diffusées par les points brillants qui modélisent la cible interfèrent.

Ce phénomène peut s'expliquer en considérant la cible comme un ensemble de points brillants (cf. figure FIG.1.7). Une modélisation satisfaisante d'une cible de complexité moyenne peut être obtenue en considérant 5 à 10 points brillants principaux. L'onde électromagnétique est ré-émise par chacun des points brillants avec un retard différent. Ainsi les ondes rétro-diffusées par l'ensemble des points brillants le sont avec une phase propre à chacune d'elles et les ondes interfèrent alors entre elles.

L'onde totale rétro-diffusée, qui est captée par le récepteur, est la somme des différentes ondes rétro-diffusées par chacun des points brillants avec pour chacune une phase propre. On montre alors, par application du théorème central-limite, que l'amplitude de l'onde captée par le RADAR suit une distribution gaussienne. La SER de la cible apparaît alors comme fluctuante en fonction de la géométrie et des paramètres d'acquisition (ce phénomène d'interférence dépend notamment de la pulsation de la porteuse utilisée). Le paramètre lié à l'atténuation $\alpha e^{j\phi}$ que nous avons précédemment introduit peut alors être vu comme une variable aléatoire gaussienne complexe à l'échelle de plusieurs répétitions d'impulsions. En effet, à une échelle de temps suffisamment grande, les différents paramètres (orientation de la cible, ...) changent de façon suffisante pour obtenir une variation significative de $\alpha e^{j\phi}$.

Bruit lié à la chaîne de réception

Nous avons déjà souligné que l'énergie reçue E_r est très faible en comparaison de l'énergie émise E_e (typiquement $10^{-19} < E_r/E_e < 10^{-15}$). L'équation RADAR établit la relation entre ces deux grandeurs :

$$E_r = E_e \frac{G}{R^4}, \quad (1.11)$$

avec G un coefficient d'atténuation qui englobe la SER de la cible, le gain d'antenne, etc. Il est important de remarquer que l'énergie reçue varie en $1/R^4$, elle chute donc rapidement quand la distance R entre la cible et le RADAR augmente.

Exemple 1.1 *L'énergie reçue d'une cible située à 4 km est donc 16 fois plus faible que celle reçue d'une cible de même réflectivité située à 2 km.*

Le signal acquis est donc très faible et va devoir être fortement amplifié pour être exploité. Outre les problèmes liés à l'amplification d'un signal à de telles fréquences, la chaîne d'amplification va introduire du bruit qui s'ajoute au signal acquis. En effet, tout composant électronique résistif génère un bruit que l'on appelle bruit thermique car il est lié à l'agitation thermique des électrons. Ce bruit, également appelé bruit de Johnson-Nyquist [59, 86], est souvent négligeable en électronique. Cependant dans notre cas, comme le signal est fortement amplifié, le bruit thermique devient significatif et nous devons en tenir compte dans nos traitements. Les composants électroniques actifs produisent également leurs bruits propres, que nous associerons au bruit thermique.

Le signal reçu $r(t)$ prend alors la forme suivante :

$$\underline{r}(t) = \alpha e^{j\phi} \underline{a}(t, \tau, \Omega) + \underline{n}(t), \quad (1.12)$$

avec $n(t)$ le bruit thermique, que nous modéliserons par un bruit indépendant et identiquement distribué (i.i.d.) gaussien complexe circulaire de moyenne nulle.

En résumé, on distingue deux contributions de bruit différentes associées à deux échelles de temps différentes :

- le bruit thermique dû à la chaîne de réception du système RADAR, qui est différent d'un échantillon à l'autre,
- le bruit lié aux interférences des ondes rétro-diffusées (système actif cohérent), qui est observé en considérant plusieurs impulsions.

Il faut noter que deux cibles similaires et relativement proches conduiront à deux coefficients de réflexion $\alpha e^{j\phi}$ différents. Comme nous le verrons par la suite, c'est cette particularité qui donnera lieu au phénomène de Speckle sur les cartes distance/vitesse.

Une fois le signal acquis, les traitements qui seront effectués sur le signal reçu viseront à mesurer les paramètres α , τ et Ω . Ces paramètres nous sont utiles pour obtenir des informations sur la cible observée, notamment : la SER de la cible, la distance de la cible R et la vitesse de la cible v . Pour représenter ces informations de manière synthétique, une image (carte distance/vitesse) va être formée.

1.3 PRÉSENTATION DES DONNÉES TRAITÉES

Nous présenterons dans cette partie les données qui sont traitées et qui correspondent à des cartes distance/vitesse. Puis nous décrirons comment elles ont été obtenues ainsi que leurs principales caractéristiques.

1.3.1 Formation d'une carte distance/vitesse

Une carte distance/vitesse est une représentation temps/fréquence des signaux reçus par le RADAR. Concrètement une carte distance/vitesse est une image pour laquelle les coordonnées d'un point correspondent à une distance donnée (liée au retard τ) et une vitesse donnée (liée à la pulsation Doppler Ω), on parle alors de case distance/vitesse. Le niveau de gris correspond lui à l'intensité du signal reçu (lié à l'atténuation α). Cette représentation est utilisée car elle permet, entre autre, de séparer les objets lents (ex : le sol) des objets rapides (ex : des cibles) et ainsi d'observer l'écho retourné par les cibles avec un meilleur rapport signal à bruit (RSB).

Pour estimer les paramètres α , τ et Ω il faut disposer d'un grand nombre de données afin d'obtenir un rapport signal à bruit suffisant et également pour assurer une estimation suffisamment précise de ces paramètres. Ainsi, les RADAR de pointe avant sont des RADAR à impulsions, c'est-à-dire qu'ils envoient plusieurs impulsions lors d'une acquisition RADAR. Les impulsions sont envoyées de manière répétitive avec une période de répétition T_r . L'enveloppe complexe d'un train de $2n + 1$ impulsions est :

$$\underline{u}(t) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sum_{k=-n}^n \underline{u}_e(t - kT_r), \quad (1.13)$$

où \underline{u}_e est l'enveloppe complexe de l'impulsion élémentaire émise.

Le temps d'acquisition est alors décomposé en deux échelles de temps : le temps court et le temps long. Le temps long est composé d'un nombre M de rafales, chaque rafale étant elle-même constituée d'un nombre N d'impulsions (FIG.1.8). Le temps court est l'échelle de temps la plus fine et correspond à la durée d'écoute de plusieurs impulsions. Le temps court correspond à l'échelle de temps pendant laquelle la cohérence des signaux peut être exploitée lors des traitements. Le temps long correspond au contraire à une échelle de temps pour laquelle il n'est pas possible d'utiliser des traitements cohérents.

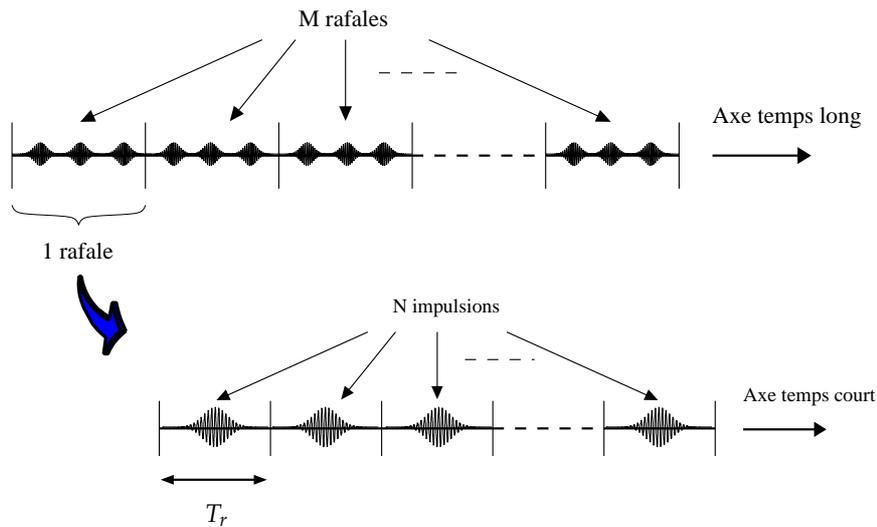


FIG. 1.8 – Illustration de la phase d'acquisition des données pour la création d'une carte distance/vitesse

Comme nous l'avons vu précédemment le signal reçu peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\underline{r}(t) = \alpha e^{j\phi} \underline{a}(t, \tau, \Omega) + \underline{n}(t), \quad (1.14)$$

avec $\underline{a}(t, \tau, \Omega) \triangleq \underline{u}(t - \tau) e^{j\Omega(t - \tau)}$.

Sur plusieurs impulsions (selon l'axe temps court), le terme inconnu $\alpha e^{j\phi}$ peut être considéré comme une constante car l'orientation apparente de la cible par rapport au RADAR est quasiment la même. De même, le terme Doppler $e^{j\Omega(t - \tau)}$ ne varie pas de façon significative sur la durée T_e d'une impulsion. Nous allons alors pouvoir mettre en œuvre des traitements cohérents selon l'axe temps court. À l'échelle d'une impulsion, on effectuera un filtrage adapté. À l'échelle de plusieurs impulsions, le terme $e^{j\Omega(t - \tau)}$ n'est pas constant, mais son évolution est déterministe (et dépend de la vitesse relative de la cible). Il sera alors réalisé un traitement Doppler.

Selon l'axe temps long, le terme $\alpha e^{j\phi}$ est par contre amené à fluctuer, aussi nous ne pourrons pas utiliser de traitement cohérent.

La première opération réalisée sur les données RADAR consiste à rechercher les répliques du signal émis dans le signal reçu.

Filtrage adapté

On considère que le terme $\alpha e^{j\phi} e^{j\Omega(t-\tau)}$ est constant pendant la durée d'une impulsion. On envisage alors de réaliser un filtrage adapté (traitement cohérent) du signal reçu pour estimer le paramètre de retard τ .

Le filtrage adapté consiste à appliquer le filtre qui maximise le rapport signal à bruit quand on souhaite détecter un signal connu $\underline{u}_e(t)$ dans un bruit de densité spectrale de puissance connue. Dans le cas d'un bruit blanc [94, 125], ce filtrage consiste en une inter-corrélation entre les données reçues $\underline{r}(t)$ et le signal de référence émis $\underline{u}_e(t)$:

$$\underline{z}(\tau) = \int \underline{r}(t) \underline{u}_e^+(t - \tau) dt, \quad (1.15)$$

où $\underline{u}_e^+(t - \tau)$ dénote le vecteur transposé conjugué de $\underline{u}_e(t - \tau)$. Le filtrage étant une opération linéaire, la nature gaussienne du bruit n'est pas modifiée par ce traitement.

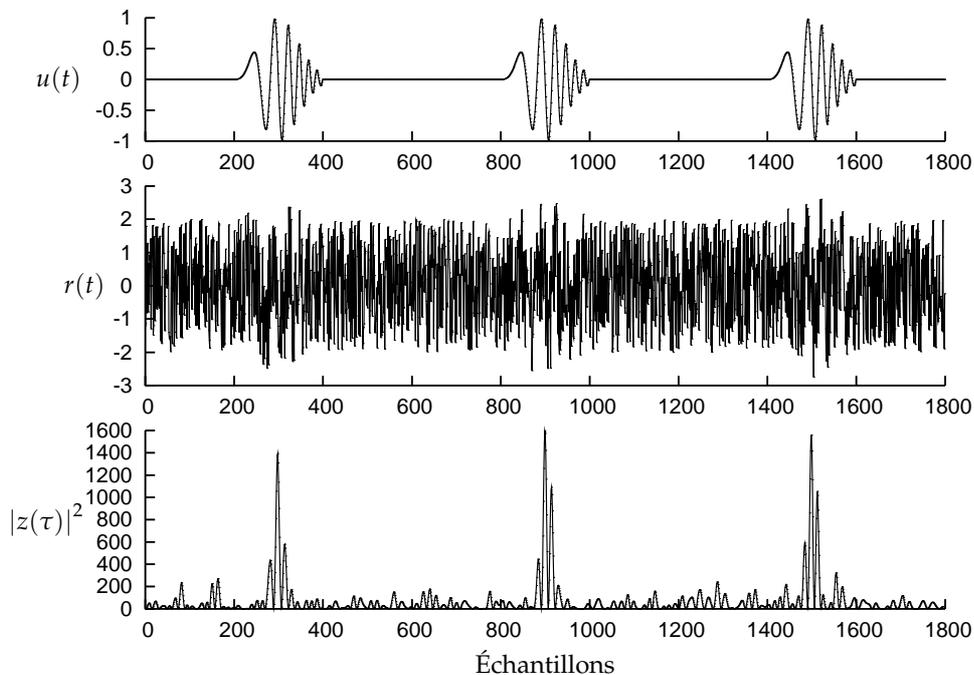


FIG. 1.9 – Exemple de filtrage adapté dans le cas d'un signal réel. En haut, le signal de référence (à l'émission). Au milieu, le signal bruité (à la réception). En bas, le résultat du filtrage adapté.

La figure FIG.1.9 présente un exemple de filtrage adapté. Le résultat obtenu après filtrage adapté permet de localiser le signal connu dans le signal bruité $\underline{r}(t)$. Le choix de la forme des signaux $\underline{u}_e(t)$ influe sur la précision de localisation. On fait alors appel à des signaux dont la fonction d'auto-corrélation se rapproche le plus possible d'une impulsion (dirac) afin d'avoir la meilleure précision possible. Ce procédé utilisé pour augmenter la résolution de la mesure de τ est appelé le principe de compression d'impulsions.

Une fois que le filtrage adapté est appliqué, une analyse temps-fréquence est opérée sur $\underline{z}(\tau)$ afin de distinguer les échos en fonction de leur retard τ et de leur Doppler Ω .

Traitement temps-fréquence

Le terme $ae^{j\phi}$ du signal reçu (terme associé à la réflectivité de la cible) peut être considéré comme constant pendant plusieurs impulsions (temps court). On envisage alors d'effectuer un traitement temps-fréquence (traitement cohérent) pour estimer le Doppler Ω dans l'échelle de temps associée au temps court.

Avant d'effectuer le traitement temps-fréquence, le signal $\underline{z}(\tau)$ est ordonné sous forme de matrice. Pour chaque rafale, on va créer une matrice dont

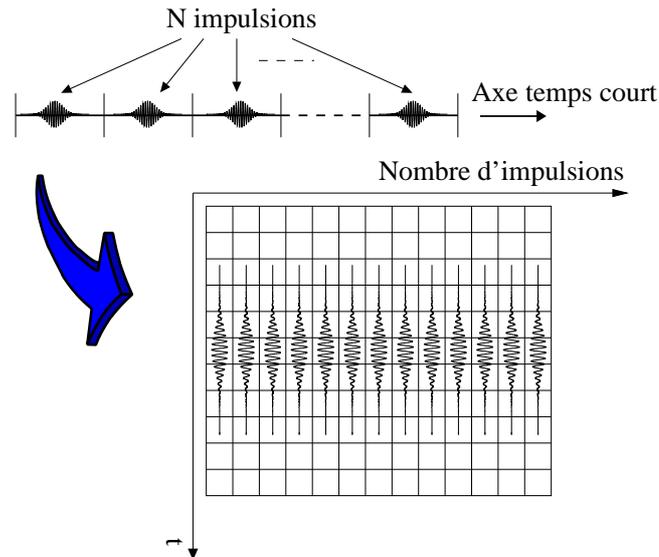


FIG. 1.10 – Pour chaque rafale, le signal est ordonné sous forme de matrice.

le nombre de colonnes correspond au nombre d'impulsions et les lignes au temps d'écoute d'une impulsion (FIG.1.10). Avec cette représentation des données, on peut noter que la ligne de matrice associée au retard τ correspond au signal $\underline{z}(\tau)$ échantillonné aux instants $\tau + kT_r$ où k est le numéro de l'impulsion considérée.

Le traitement temps-fréquence consiste alors à remplacer chaque ligne par sa transformée de Fourier (cf. FIG.1.11).

Ce traitement permet de distinguer les cibles associées à un retard τ en fonction de leurs vitesses. Pour cette opération, on utilise une fenêtre de pondération afin d'atténuer les effets (ex : phénomène de Gibbs [95]) liés à la troncature du signal (nombre fini d'impulsions). La transformée de Fourier est donc appliquée à retard constant τ , chaque ligne correspondant à une distance observée. L'opération décrite étant linéaire, l'image résultat du traitement temps-fréquence (plan temps-fréquence) est encore perturbée par un bruit gaussien complexe circulaire [99].

Par ailleurs, la durée T_e d'une impulsion est généralement très courte. Aussi, l'impulsion élémentaire $u_e(t)$ est trop brève pour résoudre le Doppler des différentes cibles, car la phase du signal reçu ne varie pas par effet Doppler de manière significative pendant la durée de l'impulsion élémentaire $u_e(t)$ (cf. figure FIG.1.12). Dans le cadre d'une impulsion élémentaire suffisamment brève, on peut alors montrer [66] que les traitements effectués sur les signaux RADAR, à savoir le filtrage adapté et le calcul de la transformée

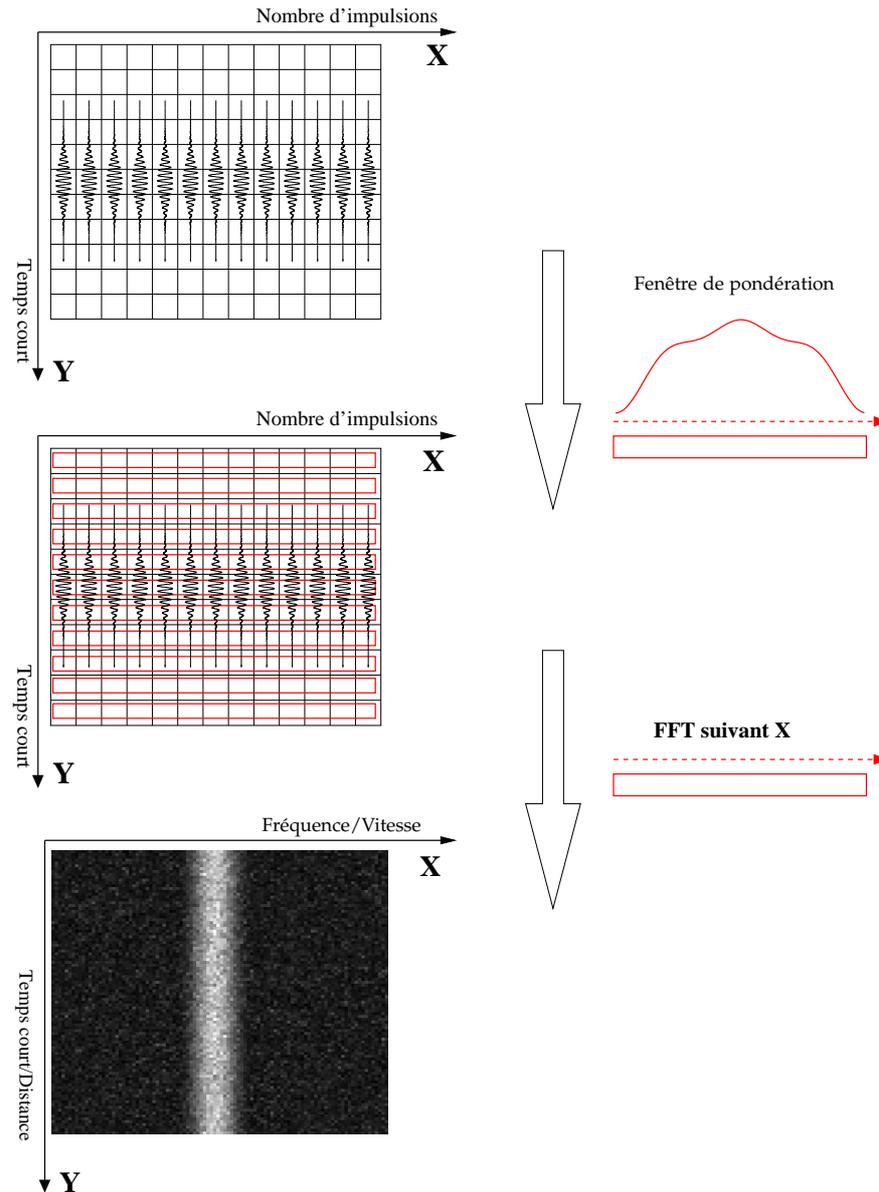


FIG. 1.11 – Le traitement temps-fréquence consiste, pour une même case distance et pour différentes impulsions, à appliquer une fenêtre de pondération et à calculer la transformée de Fourier du signal acquis.

de Fourier pour un même retard τ , conduisent au récepteur optimal dans le cas d'un bruit blanc pour un RADAR à impulsions.

Supposer que le Doppler d'une cible ne peut être résolu à l'aide d'une seule impulsion correspond à une hypothèse réaliste. En effet, appelons T_e la durée d'une impulsion, cette durée est généralement de l'ordre de 1% à 30% de la durée de la période de répétition T_r . Le Doppler d'une cible n'est ainsi généralement pas résolu, car la rotation de la phase n'est pas significative sur la durée T_e d'une impulsion :

$$\Omega T_e \ll 1. \quad (1.16)$$

En remarquant que $\Omega = 4\pi f_0 v/c$ avec f_0 la fréquence de la porteuse, on obtient que le Doppler n'est pas résolu à partir d'une seule impulsion pour

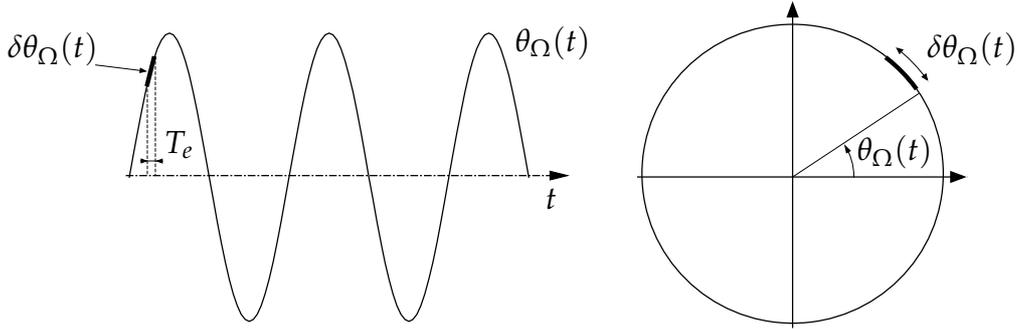


FIG. 1.12 – Évolution de la phase $\theta_{\Omega}(t) = \Omega t$ liée au Doppler Ω de la cible en fonction du temps. La durée T_e de l'impulsion élémentaire est suffisamment courte pour que le Doppler de la cible ne soit pas résolu.

toute cible dont la vitesse est inférieure à :

$$v \ll \frac{c}{4\pi f_0 T_e} \quad (1.17)$$

Exemple 1.2 Supposons que la fréquence de répétition utilisée est égale à $f_r = 40$ kHz (MFR). En cohérence avec cette fréquence de répétition, on considère une durée d'impulsion égale à $T_e = 1 \mu\text{s}$. Prenons le cas d'un RADAR en bande X dont la fréquence de la porteuse est égale à $f_0 = 10$ GHz et $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Alors l'application numérique nous permet de conclure que la vitesse de la cible doit être très inférieure à 2 400, m/s, ce qui est une vitesse très grande pour un objet volant (surtout près du sol).

Suite au traitement temps-fréquence, une opération dite de post-intégration peut être réalisée selon l'axe temps long pour améliorer le rapport signal à bruit [115]. Les cartes RADAR sont généralement post-intégrées plusieurs fois lorsque la stationnarité insuffisante de la cible ne permet pas d'effectuer un traitement cohérent sur la durée totale d'obtention de chaque carte RADAR. Ainsi, une carte distance/vitesse est la somme du module au carré de différents plans temps-fréquence. Avec cette dernière opération, comme on ne conserve que le module des données, l'information de phase est perdue. Ce choix se justifie car on suppose que les signaux reçus à différentes rafales sont incohérents entre eux, la connaissance de la phase n'apporte alors aucune information. Au contraire, la phase pourrait être nuisible au traitement car cette phase varie au cours du temps (temps long), l'addition des signaux reçus à différentes rafales pourrait s'annuler et on pourrait perdre l'information utile. La perte de cohérence est dans ce cas à mettre en relation avec le caractère aléatoire selon l'axe temps long du terme $\alpha e^{j\phi}$ du signal reçu.

De plus, cette opération (addition du module au carré de plusieurs plans temps-fréquence) a pour effet de changer la nature du bruit. Une carte distance/vitesse est alors perturbée par un bruit gamma d'ordre L , L étant le nombre de plans temps-fréquence utilisés pour la création de la carte distance/vitesse. Dans le cadre de cette thèse, nous nous limiterons à un nombre de post-intégrations de 4.

Interprétation physique

La figure FIG.1.13 présente un exemple de carte distance/vitesse.

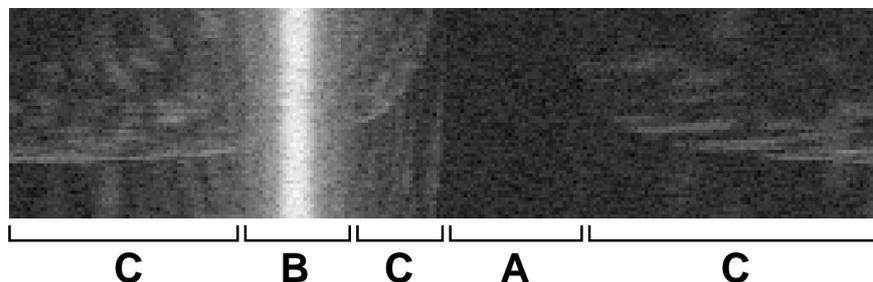


FIG. 1.13 – Exemple de carte distance/vitesse (en échelle logarithmique), données synthétiques fournies par Thalès Systèmes Aéroportés. L'axe distance est l'axe vertical et l'axe vitesse est l'axe horizontal. On distingue trois zones : la zone de bruit thermique (A), la zone de clutter central (B) et les zones de fouillis (C).

Ce type de données se caractérise par une grande dynamique, une forte inhomogénéité et la présence d'un bruit multiplicatif. Ces caractéristiques sont liées à différents phénomènes lors de l'acquisition des données.

Si le RADAR est orienté dans un espace du ciel sans objets volants, la carte distance/vitesse obtenue serait une image homogène perturbée par un bruit gamma dû à la chaîne de réception du système RADAR. On parle alors de zone de bruit thermique, la zone A dans la carte distance/vitesse présentée à la figure FIG.1.13.

Si maintenant la direction de visée du RADAR est en dessous de l'horizon, une quantité d'énergie considérable va être rétro-diffusée par le sol (énergie reçue par le lobe principal d'antenne, cf. figure FIG.1.14). L'utilisation du traitement temps-fréquence permet d'isoler les échos provenant du sol en fonction de leur vitesse (vitesse du porteur). Sur l'image FIG.1.13, les échos de sol correspondent à la barre verticale (zone B), ils sont concentrés à une même vitesse (la vitesse du porteur) et visibles à toutes les distances. De plus, l'amplitude des échos du sol fluctue dans cette zone B. Ces fluctuations ont la même origine que celles observées pour les échos de cible, c'est-à-dire un phénomène d'interférence entre les ondes rétro-diffusées par l'objet éclairé. On parlera dans ce cas-là de phénomène de Speckle.

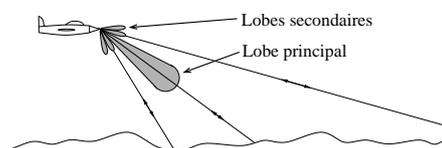


FIG. 1.14 – Échos de sol reçus par un RADAR aéroporté.

Sur l'exemple de carte distance/vitesse, on peut également remarquer la présence de lignes quasi-horizontales de fortes intensités (zones C). Ces lignes sont dues à l'énergie captée par les lobes secondaires d'antenne (cf. figure FIG.1.14). Le diagramme d'une antenne est en effet constitué d'un lobe principal (direction de visée d'un RADAR) et de lobes secondaires que l'on essaye de réduire lors de la conception des antennes. Ces lobes secondaires sont néfastes à double titre : une partie de l'énergie émise l'est en dehors de la

direction de visée et une partie de l'énergie reçue ne correspond pas à la direction de visée.

Si maintenant dans la direction de visée se trouve une cible suffisamment petite (et de vitesse suffisamment faible) pour ne pas être résolue, on pourra observer un point brillant dans la carte distance/vitesse obtenue. Ce point brillant sera placé à une case distance/vitesse dont les coordonnées sont des multiples de la distance de la cible et de sa vitesse. En effet, nous ne l'avons pas encore introduit, mais un RADAR à impulsions est ambigu en distance et en vitesse. L'ambiguïté en distance s'explique par le fait qu'un écho reçu

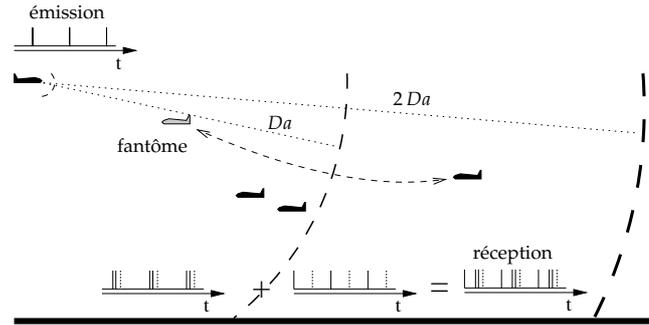


FIG. 1.15 – Si la cible est située plus loin que la distance d'écoute D_a , la distance de la cible est déterminée de façon ambiguë.

lors du temps d'écoute de l'impulsion n peut être dû à l'impulsion $n - m$ ($m = 1, 2, 3, \dots$). Autrement dit si la cible est située plus loin que la distance d'écoute, la distance de la cible est déterminée de façon ambiguë (cf. figure FIG.1.15). De la même façon, la vitesse de la cible est ambiguë. On peut montrer [65, 114] que cette ambiguïté est liée à des problèmes de sous-échantillonnage de la phase Doppler Ωt .

La distance ambiguë D_a et la vitesse ambiguë V_a dépendent de la fréquence de répétition et sont exprimées par [65] :

$$D_a = \frac{c}{2} T_r, \quad V_a = \frac{\lambda}{2T_r}. \quad (1.18)$$

Exemple 1.3 Pour un RADAR avec une porteuse à $f_0 = 10$ GHz (bande X) et une fréquence de répétition à $f_r = 15$ kHz (MFR), la distance ambiguë est égale à $D_a = 10$ km et la vitesse ambiguë est égale à $V_a = 225$ m/s. Une cible distante de 15 km du RADAR et volant à 300 m/s sera donc située à la case distance/vitesse correspondante à une distance de 5 km et à une vitesse de 75 m/s.

Les ambiguïtés en distance et/ou en vitesse sont donc liées à la fréquence de répétition f_r , on obtient alors le classement suivant :

- pour une haute fréquence de répétition (HFR), la distance est ambiguë mais pas la vitesse,
- pour une moyenne fréquence de répétition (MFR), la distance et la vitesse sont ambiguës,
- pour une basse fréquence de répétition (BFR), la vitesse est ambiguë mais pas la distance.

Un moyen simple pour lever ces ambiguïtés consiste à utiliser plusieurs fréquences de répétition différentes.

De plus de nombreuses autres perturbations existent en situation réelle :

- le phénomène de phasing : l'écho d'une cible n'est pas forcément centré sur une case distance/vitesse mais peut s'étendre sur plusieurs cases voisines si la vitesse et la distance de la cible ne correspondent pas exactement avec la distance et la vitesse associées à une case,
- le brouillage : il peut être dû aux émissions électromagnétiques alliés, aux émissions électromagnétiques adverses ou encore aux émissions électromagnétiques civiles.

Le développement des technologies civiles (UMTS, GSM, ...) et de la guerre électronique (brouillage ou jamming, mesures et contre-mesures, ...) conduit le spectre électromagnétique à être de plus en plus fourni. La répercussion sur les cartes distance/vitesse est la présence de fortes inhomogénéités, qui nuisent à la détection de cibles en réduisant la « fenêtre de vision » du RADAR, c'est-à-dire la zone de bruit thermique.

La position de la « fenêtre de vision » du RADAR peut être déplacée dans le plan distance/vitesse en changeant la fréquence de répétition. C'est pourquoi il est fréquent d'utiliser plusieurs cartes distance/vitesse acquises avec des fréquences de répétition différentes.

1.3.2 Modèle considéré

Dans le cadre de cette thèse, nous n'avons pas accès aux signaux RADAR et nous travaillons directement à partir d'une carte distance/vitesse. Excepté le nombre L de plans distance/vitesse utilisés pour la création de la carte, nous ne disposons d'aucune autre information (ni vitesse ou altitude du porteur, ni fréquence de répétition ou de porteuse, ...). Les données à traiter se présentent donc sous la forme d'une image présentant de fortes inhomogénéités et perturbée par un bruit multiplicatif dans laquelle on souhaite détecter des cibles ponctuelles en nombre et à des positions inconnus. Par analogie avec une image, nous désignerons par la suite une case distance/vitesse comme étant un pixel.

Dans ce mémoire, nous supposons que l'observation X est le produit d'une carte de réflectivité moyenne et d'un bruit gamma de moyenne 1 et d'ordre connu L . Même si une carte distance/vitesse est une image (2-D), pour des raisons de simplicité, nous utiliserons une notation 1-D pour désigner un pixel. Les pixels seront classés par ordre lexicographique, ce qui permet de leur affecter un indice unique. Nous considérerons ainsi que pour chaque pixel p , l'espérance mathématique de la valeur observée X_p est $m_p = E[X_p]$.

Définition 1.1 Soit $\{1 \dots N\}$ l'ensemble des pixels qui constituent l'observation X . Nous appellerons *fond* l'ensemble des valeurs m_p , $p \in \{1 \dots N\}$.

Nous supposons que le bruit gamma qui perturbe les observations est de même ordre quelque soit la position. En effet l'ordre du bruit est lié au nombre L de plans distance/vitesse utilisés lors de la génération des données. Nous supposons également que le bruit n'est pas corrélé en distance et en Doppler, ce qui nous amène à proposer l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1.1 L'observation X_p au pixel p est une variable aléatoire gamma de moyenne m_p et

d'ordre L : $X_p \sim \mathcal{G}(m_p, L)$. De plus, $\forall k \neq p$, X_k est statistiquement indépendante de X_p .

Dans la littérature, le fouillis est souvent modélisé comme un bruit. La vision novatrice de ce modèle consiste à différencier ce que nous appelons le fond du bruit. Le fond est assimilable à une carte de réflectivité moyenne et modélise différents phénomènes complexes (fouillis de sol, brouillage, ...). Il est pour nous un paramètre de nuisance qu'il nous faut estimer afin de pouvoir détecter les cibles alors que le bruit est un facteur perturbateur inhérent à toute mesure.

Dans l'observation X , des cibles ponctuelles sont potentiellement présentes. Pour modéliser ces cibles, il existe de nombreux modèles dans la littérature. À notre connaissance, le premier modèle de cible a été décrit par Marcum (1947-1948). Avec le modèle considéré, on suppose que la cible est non-fluctuante, autrement dit que l'énergie rétro-diffusée par la cible est constante dans le temps. Ces premiers travaux ont été poursuivis par Swerling [117, 118], qui a par ailleurs donné son nom à plusieurs modèles de cibles. Ainsi le modèle précédemment décrit est appelé indifféremment un modèle Swerling O ou Swerling V . Quatre autres modèles (Swerling I, II, III, IV) sont également proposés, ils correspondent à des cibles fluctuantes. Les modèles I et II ont été introduits pour modéliser des cibles grandes et complexes (par rapport à la longueur d'onde), alors que les modèles III et IV sont plus adaptés à des petites cibles de forme simple. Par la suite, Swerling étendra les modèles qu'il avait proposés à d'autres types de cibles [119]. Ainsi, il existe une grande diversité de modèles de cibles fluctuantes, distribuées suivant des densités de probabilité différentes [28, 110, 111, 112].

Pour notre application, le modèle le plus réaliste se révèle être le modèle Swerling I [27]. Il permet en effet de modéliser fidèlement des cibles aériennes complexes.

Par conséquent, nous considérerons que la cible est fluctuante et qu'elle peut être modélisée dans le signal RADAR complexe par une variable aléatoire gaussienne. Nous supposerons que nous obtenons une réalisation différente de cette variable aléatoire pour chaque rafale, mais que durant une rafale cette variable aléatoire ne fluctue pas, ce qui correspond au modèle de Swerling I. Dans une carte distance/vitesse, la cible fluctue alors comme une variable aléatoire gamma d'ordre L . Cela nous conduit à prendre la modélisation suivante.

Définition 1.2 *Pour le modèle de cible fluctuante (Swerling I), une cible placée au pixel p est modélisée par une variable aléatoire gamma d'ordre L et de moyenne $m_p(1 + S)$, S étant le contraste entre la cible et le fond.*

Pour le modèle Swerling I, on peut définir de manière rigoureuse le rapport signal à bruit [27], que nous exprimerons en décibels par :

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10}(S). \quad (1.19)$$

Cependant nous verrons par la suite que pour comparer des techniques de détection, il peut être également intéressant de considérer des cibles non-

fluctuantes (modèle Swerling 0). Aussi nous pourrions utiliser le modèle de cible non-fluctuante suivant.

Définition 1.3 *Pour le modèle de cible non-fluctuante (Swerling 0), on modélise la présence d'une cible au pixel p par une observation de valeur constante au pixel p et telle que $X_p = m_p(1 + S)$ où S est un paramètre qui définit le contraste entre la cible et le fond.*

Dans le cas du modèle Swerling 0, on ne peut pas fournir une définition rigoureuse du rapport signal à bruit. Afin de mesurer la difficulté liée à la détection d'une cible, on utilisera le rapport de Fisher entre l'observation X_p sans et avec cible et que nous assimilerons à un rapport signal à bruit, avec :

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10}(S^2 L). \quad (1.20)$$

Rappelons que le rapport de Fisher entre deux variables aléatoires de moyenne m_a (resp. m_b) et de variance σ_a^2 (resp. σ_b^2) s'écrit :

$$\mathcal{F} = \frac{(m_a - m_b)^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}. \quad (1.21)$$

Afin qu'il n'y ait pas de confusion entre ces deux modèles et leur définition de RSB associée, nous précisons à chaque expérience le modèle de cible utilisé. Les expressions des performances des différents détecteurs seront données par la suite en considérant le modèle de cible fluctuante. Remarquons que le modèle de cible utilisé n'a aucune influence sur l'expression de la probabilité de fausse alarme d'un détecteur et donc sur la capacité d'un détecteur à réguler le taux de fausse alarme.

Pour les deux modèles envisagés, nous avons choisi de référencer le contraste des cibles par rapport au fond (le paramètre S), ainsi la difficulté liée à la détection d'une cible ne varie pas en fonction de la valeur du fond mais uniquement en fonction de son (in-)homogénéité. Ce choix s'explique par une volonté de comparer les performances des techniques de détection sur les zones de fouillis et sur les zones de bruit thermique. Ainsi, le détecteur idéal (qui connaît le fond) obtient les mêmes performances pour une cible de RSB donné qu'elle soit placée dans une zone de fouillis ou dans une zone de bruit thermique.

Dans toutes les techniques de détection employées par la suite, la détection de cible est réalisée en étudiant la valeur d'un pixel de test n .

Définition 1.4 *Dans ce manuscrit, le pixel de test sera noté n .*

Pour la suite, nous aurons également besoin d'une région de référence, c'est-à-dire d'un ensemble de pixels constituant un voisinage du pixel de test n .

Définition 1.5 *Nous noterons ω_n la région de référence associée au pixel test n . De plus nous noterons $N_n = \text{card}(\omega_n)$ le nombre de pixels dans la région de référence, le pixel test n'étant pas compris dans ω_n .*

1.4 DÉTECTION À TAUX DE FAUSSE ALARME CONSTANT

Intéressons nous maintenant aux techniques de détection existantes. Un système RADAR doit être capable de déterminer automatiquement les pixels d'une carte distance/vitesse susceptibles d'être des cibles afin que l'opérateur RADAR en soit informé. L'opération de détection est une tâche élémentaire d'un système RADAR, mais son impact sur le fonctionnement global est déterminant. Si l'opération de détection est défectueuse (pas ou trop de cibles détectées), le système RADAR est rendu inopérant car les informations données à l'opérateur sont inexploitable. C'est pourquoi dans la plupart des systèmes RADAR, l'opération de détection doit se faire en respectant un taux de fausse alarme constant (TFAC), c'est-à-dire que l'on souhaite maîtriser le nombre de fois où un pixel est jugé comme étant une cible alors que ce n'est pas le cas (maîtrise du taux de fausse alarme).

L'opération de détection utilise un test de détection (Définition 1.6), c'est-à-dire une règle de décision qui permet à partir des données de déterminer les pixels susceptibles d'être des cibles [90, 124].

Définition 1.6 Soit τ un seuil de détection et $T(n, \mathbf{X})$ une statistique de décision établie au pixel n dont la valeur dépend des données \mathbf{X} tel que :

- $T(n, \mathbf{X}) > \tau$: le pixel test n est désigné comme contenant une cible,
 - $T(n, \mathbf{X}) < \tau$: le pixel test n est désigné comme ne contenant pas une cible.
- Le test de détection associée à $T(n, \mathbf{X})$ sera résumé par la notation :

$$T(n, \mathbf{X}) \underset{\text{pas de cible}}{\overset{\text{cible}}{\geq}} \tau. \quad (1.22)$$

On définit alors deux hypothèses.

Définition 1.7 Sous l'hypothèse H_0 , on considère qu'il n'y a pas de cible au pixel test. Sous l'hypothèse H_1 , on suppose qu'une cible est présente au pixel test.

On a alors quatre combinaisons possibles :

- il y a une cible au pixel test (H_1) et le test de détection indique que le pixel test contient une cible,
- il y a une cible au pixel test (H_1) et le test de détection n'indique pas que le pixel test contient une cible,
- il n'y a pas de cible au pixel test (H_0) et le test de détection indique que le pixel test contient une cible,
- il n'y a pas de cible au pixel test (H_0) et le test de détection n'indique pas que le pixel test contient une cible,

De ces quatre combinaisons, on va s'intéresser à la probabilité d'apparition de deux d'entre elles (les probabilités des deux autres combinaisons sont liées et peuvent être déduites des précédentes).

Ainsi, pour juger des performances d'un test de détection, on utilise la probabilité de détection et la probabilité de fausse alarme (Définition 1.8).

Définition 1.8 La probabilité de détection pour un seuil de détection τ est définie comme la

probabilité de détecter une cible quand le pixel test contient une cible (H_1) :

$$\mathcal{P}_d(\tau) = P(T(n, \mathbf{X}) > \tau | H_1) . \quad (1.23)$$

La probabilité de fausse alarme est la probabilité de détecter une cible quand le pixel test ne contient pas une cible (H_0) :

$$\mathcal{P}_{fa}(\tau) = P(T(n, \mathbf{X}) > \tau | H_0) . \quad (1.24)$$

Dans la pratique, l'utilisateur définit la probabilité de fausse alarme qu'il souhaite obtenir et l'on en déduit la valeur du seuil de détection à utiliser.

1.4.1 Choix d'un test de détection

Le choix d'un test de détection peut répondre à plusieurs critères (Neyman-Pearson, UMP, ...) [69].

Citons tout d'abord la méthode de Neyman-Pearson [84, 124]. Cette méthode consiste à trouver le test de détection qui maximise la probabilité de détection pour une probabilité de fausse alarme donnée. Cette méthode conduit au test du rapport de vraisemblance des deux hypothèses H_1 et H_0 (LRT : Likelihood Ratio Test). Notons que la méthode de Neyman-Pearson est optimale au sens de nombreux autres critères utilisés en détection : Bayes, Minimax, Most Powerful (MP) [5]. Malheureusement cette méthode n'est pas utilisable pratiquement car elle nécessite de connaître les paramètres du rapport des vraisemblances. Une extension naturelle de cette méthode consiste à estimer les paramètres inconnus au sens du maximum de vraisemblance. Le test obtenu est alors appelé le test du rapport de vraisemblance généralisé ou GLRT (Generalized Likelihood Ratio Test).

Une autre notion importante en détection est celle de tests UMP (« Uniformly Most Powerful », uniformément les plus puissants) [72, 122]. Puisque dans la pratique les paramètres des vraisemblances sont inconnus et doivent être estimés, on va chercher un test de détection qui pour un ensemble de valeurs des paramètres $\{\theta_0, \theta_1, \dots\}$ nous assure une probabilité de détection maximale tout en respectant la probabilité de fausse alarme α définie par l'utilisateur $\mathcal{P}_{fa}(\tau) = \alpha$. Le test obtenu sera appelé test UMP.

Notons qu'une autre propriété peut être utilisée pour prouver l'optimalité d'un test, c'est la propriété d'invariance de la densité de probabilité du test vis à vis d'un groupe de transformations. On utilise alors les propriétés d'invariance du test pour obtenir une expression plus simple de la statistique de décision et prouver l'optimalité du test [62, 108]. La transformation que l'on établit à partir des propriétés d'invariance du test peut être interprétée comme un changement de coordonnées dans l'espace des paramètres [70].

Citons finalement les tests Minimax [71]. Les tests du Minimax sont une autre façon de résoudre des problèmes de détection quand on ne connaît pas les probabilités de chaque hypothèse *a priori*. On étudie alors le cas le plus défavorable, c'est-à-dire le cas où la valeur des paramètres conduit à une valeur du risque de Bayes (le risque de prendre une mauvaise décision de détection) la plus élevée [71]. Un test du Minimax est un test qui a la meilleure performance de détection dans le cas le plus défavorable.

Tout ces critères d'optimalité peuvent conduire au choix d'un test de détection. Dans la pratique, il est fréquent de considérer les tests GLRT car leurs expressions peuvent être facilement obtenues, même si des contre-exemples prouvent que les tests GLRT [68] ne sont pas toujours optimaux.

1.4.2 Principales techniques de détection

Les principales techniques de détection utilisées dans les systèmes RADAR sont fondées sur la même structure. La statistique de décision consiste à faire le rapport entre la valeur du pixel test X_n et une estimation de la valeur du fond au pixel test \hat{m}_n réalisée à partir de la région de référence ω_n . La forme et la taille de la région de référence ω_n sont des paramètres fixés *a priori* par l'utilisateur. La valeur de la statistique de décision est alors comparée au seuil de détection τ :

$$\frac{X_n}{\hat{m}_n} \underset{\text{pas de cible}}{\overset{\text{cible}}{\geq}} \tau. \quad (1.25)$$

Cette structure, bien adaptée à une implantation dans un système réel, est résumée par la figure FIG.1.16. Le seuil de détection τ est choisi en fonction

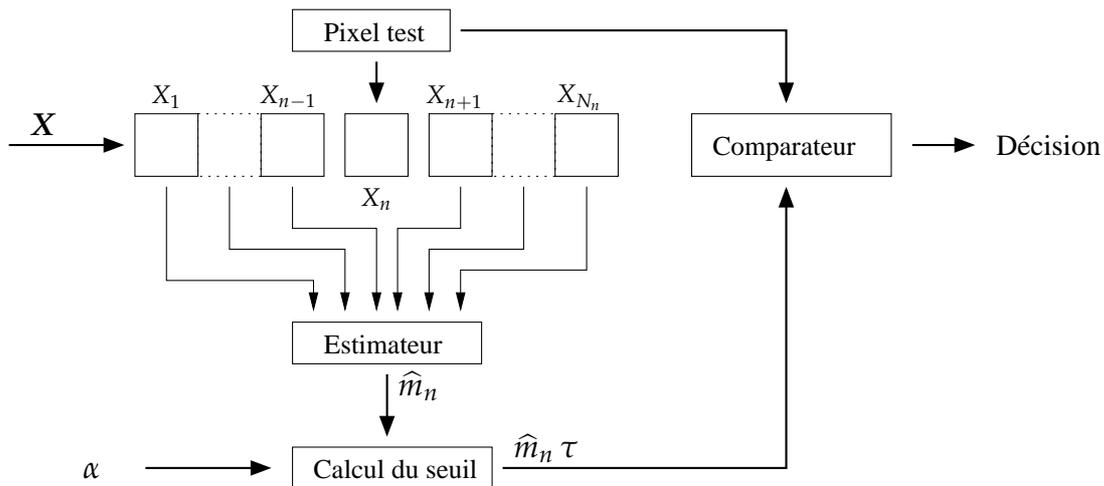


FIG. 1.16 – Schéma général d'un détecteur TFAC.

de la probabilité de fausse alarme α désirée par l'utilisateur.

On assurera une détection à taux de fausse alarme constant (TFAC) si la valeur du seuil de détection tel que $\mathcal{P}_{fa}(\tau) = \alpha$ ne dépend que de paramètres connus. Pour une probabilité de fausse alarme souhaitée, le calcul explicite du seuil de détection τ nécessite de connaître la densité de probabilité de la statistique X_n/\hat{m}_n . La détermination de cette densité de probabilité peut apparaître comme une des difficultés de la détection TFAC. En effet, nous verrons par la suite qu'il faut tenir compte précisément de la nature des fluctuations des données pour choisir la valeur du seuil de détection. Si la détermination de cette densité de probabilité est impossible, on pourra déterminer la valeur du seuil de détection par simulation numérique.

Si de nombreuses techniques de détection existent [13, 41, 106], elles se différencient généralement par la manière dont l'estimation de la valeur du fond au pixel test est réalisée.

Dans le cas d'un bruit gamma, le détecteur optimal au sens de Neyman-Pearson [42] (on parle de détecteur idéal) met en œuvre le rapport entre la valeur du pixel test X_n et la valeur du fond au pixel test m_n , ce qui explique le choix précédent à propos de la structure du détecteur (cf. équation 1.25). Cependant comme la valeur du fond est une inconnue, on ne peut réaliser une détection TFAC à l'aide du détecteur idéal.

La technique sans doute la plus connue est la technique « Cell Averaging Constant False Alarm Rate » (CA-CFAR) introduite par Finn et Johnson en 1968 [38] et analysée par Nitzberg en 1978 [85]. La statistique de détection utilisée par la technique CA-CFAR est une extension directe du détecteur optimal au sens de Neyman-Pearson sous l'hypothèse que le fond est homogène. L'estimation de la valeur du fond au pixel test est réalisée en utilisant la moyenne arithmétique :

$$\hat{m}_n^{\text{CA-CFAR}} = \frac{1}{N_n} \sum_{p \in \omega_n} X_p. \quad (1.26)$$

Notons que la moyenne arithmétique correspond à l'estimateur du maximum de vraisemblance (MV) de la valeur m_n du fond au pixel test n dans le cas d'un fond homogène perturbé par un bruit gamma. Dans [42], Gandhi et Kassam démontrent que cette technique est optimale (au sens UMP) pour la détection d'une cible de modèle Swerling I [117] dans un bruit homogène exponentiel de puissance inconnue. Ce caractère d'optimalité de la technique CA-CFAR sur des fonds homogènes est notable, ce qui conduit souvent à utiliser cette technique comme référence pour des comparaisons de performances de détection. Malheureusement les performances de la technique CA-CFAR se dégradent sur des fonds inhomogènes [41, 85], ce qui conduit à un non-respect du taux de fausse alarme souhaité ou à une chute de la probabilité de détection.

Afin d'obtenir une meilleure régulation du taux de fausse alarme qu'avec la technique CA-CFAR sur des fonds inhomogènes, plusieurs solutions ont été envisagées. Généralement cela est obtenu au prix d'une baisse des performances sur fonds homogènes par rapport à la technique CA-CFAR. L'estimateur de la valeur du fond au pixel test, la moyenne arithmétique des valeurs des pixels dans la région de référence pour la technique CA-CFAR, est alors remplacé par un estimateur robuste.

Citons tout d'abord les techniques GO-CFAR (Greatest Of) et SO-CFAR (Smallest Of) qui consistent toutes les deux à diviser la région de référence en deux parties. La moyenne arithmétique est calculée dans chacune des parties, puis la valeur la plus grande (resp. petite) est utilisée dans le test de détection de la technique GO-CFAR (resp. SO-CFAR) comme estimation de la valeur du fond au pixel test. L'estimateur utilisé permet alors de majorer (resp. minorer) la valeur du fond au pixel test. Il a été démontré [53, 130] que ces techniques permettent une meilleure régulation du taux de fausse alarme dans des situations données (fond inhomogène ou cibles multiples).

Une autre technique bien connue est la technique OS-CFAR (Ordered Statistic) introduite en 1983 par Rohling [105] et fondée sur une statistique d'ordre. Les valeurs des pixels de la région de référence sont classées par ordre croissant, la $k^{\text{ème}}$ valeur est utilisée comme estimation de la valeur du

fond au pixel test. En notant Y_l les valeurs des pixels de région de référence ordonnées par valeurs X_p croissantes, l'estimation de la valeur du fond au pixel test pour la technique OS-CFAR est :

$$\hat{m}_n^{\text{OS-CFAR}} = Y_k. \quad (1.27)$$

Cette technique présente un comportement intéressant notamment dans le cas de cibles multiples et elle a été largement étudiée [12, 73, 74, 113, 129].

Dérivée de la technique OS-CFAR, la technique TM-CFAR (Trimmed Mean) [32, 33, 41, 55, 100, 104] consiste à utiliser une moyenne tronquée pour estimer \hat{m}_n . Une nouvelle fois, les valeurs des pixels de la région de référence sont classées par ordre croissant, la moyenne des $(T_1 + 1)^{\text{ème}}$ à $(N_n - T_2)^{\text{ème}}$ valeurs correspond à la valeur estimée du fond au pixel test :

$$\hat{m}_n^{\text{TM-CFAR}} = \frac{1}{N_n - (T_1 + T_2 + 1)} \sum_{l=T_1+1}^{N_n-T_2} Y_l. \quad (1.28)$$

La technique TM-CFAR est une technique intermédiaire entre la technique CA-CFAR ($T_1 = 0$ et $T_2 = 0$) et la technique OS-CFAR ($T_1 = k - 1$ et $T_2 = N_n - k$).

Nous n'avons cité ici que les principales techniques de détection utilisées à notre connaissance. De nombreuses autres techniques fondées sur la même structure ont été proposées [16, 29, 54, 87, 92, 131].

Citons également quelques méthodes de détection originales qui, au lieu de réaliser une estimation robuste de la valeur du fond au pixel test, opèrent une sélection de la région de référence à l'aide d'une segmentation en régions homogènes des données [77, 78, 83].

Notons que la détection de cibles dans des données inhomogènes est une problématique rencontrée dans de nombreuses applications telles que les systèmes RADAR et SONAR [8, 10, 11].

1.5 PLAN DU MANUSCRIT

Après cet état de l'art, nous souhaitons maintenant présenter l'organisation de ce manuscrit. Dans le chapitre 2, nous proposons d'étudier le comportement du détecteur CA-CFAR afin d'identifier les facteurs qui nuisent à la détection TFAC sur des fonds inhomogènes. Cette première étape de caractérisation de la technique CA-CFAR est principalement un travail théorique qui nous servira dans la suite pour proposer différentes solutions. Le chapitre 3 sera consacré à la première solution proposée que nous avons appelée : sélection de région de référence. Cette solution consiste en une adaptation de la technique CA-CFAR à des fonds inhomogènes. Le but étant d'évaluer les performances que l'on peut obtenir en améliorant les outils de détection existants. Dans le chapitre 4, nous envisagerons des estimateurs de la valeur du fond adaptés à des modèles de fond plus complexes que celui utilisé par la technique CA-CFAR. Nous verrons comment on peut obtenir une détection TFAC avec ce type d'estimateur. Nous proposerons d'utiliser plusieurs estimateurs de la valeur du fond différents simultanément, puis de choisir

automatiquement celui pour lequel le modèle de fond est le plus adapté. Le chapitre 5 nous permettra d'introduire un algorithme permettant d'estimer la valeur du fond de manière globale à l'aide d'une surface maillée. Nous verrons comment utiliser cette surface maillée pour réaliser la tâche de détection et nous comparerons les méthodes de détection proposées. Enfin nous présenterons les conclusions des travaux présentés.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Ce chapitre introductif nous a permis de présenter le cadre de ces travaux de thèse : la détection de cibles ponctuelles sur des fonds inhomogènes. Les travaux menés seront appliqués aux problèmes de détection dans des cartes distance/vitesse. Ceci nous a conduit à présenter les principes de l'imagerie RADAR et la façon dont sont générées les cartes distance/vitesse. Ensuite nous avons introduit le modèle d'étude que nous nous sommes fixé, puis nous avons présenté un aperçu des techniques de détection existantes.

DÉTECTION TFAC SUR FONDS INHOMOGÈNES

2

SOMMAIRE

2.1	PERFORMANCES DU DÉTECTEUR IDÉAL	32
2.2	CA-CFAR ET FONDS HOMOGÈNES	34
2.3	PERFORMANCES EXACTES SUR FONDS INHOMOGÈNES	36
2.3.1	Expressions exactes des performances	37
2.3.2	Comportement de la statistique X_n/Z_n	39
2.4	PERFORMANCES APPROCHÉES SUR FOND INHOMOGÈNES	41
2.4.1	Propriétés de la moyenne arithmétique	41
2.4.2	Ddp de la moyenne arithmétique	43
2.4.3	Expressions approchées des performances	44
2.5	VALIDATIONS EXPÉRIMENTALES	45
2.5.1	Influence du biais	46
2.5.2	Influence de la variance d'estimation	47
2.5.3	Discussion	51
	CONCLUSION	55

Ce chapitre nous permettra de présenter les outils théoriques qui nous seront utiles afin de développer des techniques de détection à taux de fausse alarme approximativement constant. Nous étudierons des phénomènes permettant d'expliquer la dégradation des performances de la technique CA-CFAR sur des fonds inhomogènes. Dans un premier temps, les performances du détecteur idéal seront présentées et nous décrirons les performances du détecteur CA-CFAR quand il est utilisé sur des fonds homogènes. Dans un second temps, nous proposerons une étude théorique des performances de la technique CA-CFAR sur des fonds inhomogènes. Nous verrons que l'on peut obtenir les expressions analytiques des performances de la technique CA-CFAR sur un fond inhomogène. Les expressions présentées étant difficiles à interpréter, nous proposerons alors des expressions approchées des performances de la technique CA-CFAR. Nous verrons que ces expressions approchées mettent en évidence deux facteurs qui influent sur les performances de la technique CA-CFAR : le biais et la variance de l'estimateur de la valeur du fond.

2.1 PERFORMANCES DU DÉTECTEUR IDÉAL

Dans le cas où le fond est supposé connu mais où le contraste entre la cible et le fond est inconnu, on peut obtenir un détecteur que nous appellerons le détecteur idéal. Supposons que l'on souhaite savoir si le pixel n contient une cible ou pas. Nous considérerons le modèle de cible fluctuante, c'est-à-dire que X_n est supposée être une variable aléatoire gamma de moyenne $m_n(1+S)$ et d'ordre L sous l'hypothèse H_1 alors que X_n est supposée être une variable aléatoire gamma de moyenne m_n et d'ordre L sous l'hypothèse H_0 .

En utilisant la méthode de Neyman-Pearson, la statistique de décision est obtenue par le rapport des vraisemblances soit, en utilisant la modélisation décrite dans le chapitre précédent :

$$\frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_0}(X_n|S, m_n) = (1+S)^{-L} \exp \left[-L \frac{X_n}{m_n(1+S)} + L \frac{X_n}{m_n} \right], \quad (2.1)$$

avec \mathcal{L}_0 la vraisemblance associée à l'hypothèse H_0 et \mathcal{L}_1 la vraisemblance associée à l'hypothèse H_1 .

Le contraste entre la cible et le fond, défini par le paramètre S , est inconnu et son estimation (\hat{S}) au sens du maximum de vraisemblance conduit à :

$$1 + \hat{S} = \frac{X_n}{m_n}. \quad (2.2)$$

En remplaçant le paramètre S par son estimée dans l'équation 2.1, on obtient l'expression du rapport des vraisemblances généralisé suivante :

$$\frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_0}(X_n|\hat{S}(m_n), m_n) = \left(\frac{X_n}{m_n} \right)^{-L} \exp \left[-L + L \frac{X_n}{m_n} \right], \quad (2.3)$$

On pourrait utiliser directement cette expression pour réaliser un détecteur à taux de fausse alarme constant. Cependant pour calculer le seuil de détection, il nous faut connaître la loi de probabilité du rapport des vraisemblances généralisé, ce qui est loin d'être évident avec l'expression précédente.

On peut néanmoins remarquer que l'expression précédente (équation 2.3) dépend uniquement du rapport X_n/m_n . Pour notre application, nous recher-

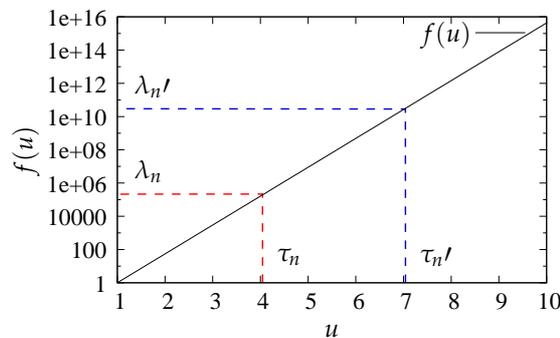


FIG. 2.1 – Sur l'intervalle $[1; \infty[$, la fonction $f(u)$ est bijective. Comparer la fonction $f(u)$ à un seuil λ_n (resp. λ_n') est équivalent à comparer u au seuil τ_n (resp. τ_n').

chons des cibles qui se distinguent du fond par une réflectivité plus grande.

Cela conduit donc à nous intéresser aux valeurs de X_n/m_n supérieures à 1. Or la fonction $f(u) = u^{-L} \exp[-L + Lu]$ est une fonction bijective sur l'intervalle $[1; \infty[$. Ainsi comparer l'expression présentée à l'équation 2.3 à un seuil $\lambda_n > 1$ est équivalent à comparer le rapport X_n/m_n à un seuil $\tau_n = f^{-1}(\lambda_n)$.

Pour le détecteur idéal, le test de détection se réduit donc à comparer le rapport entre la valeur du pixel test X_n et la valeur du fond au pixel test m_n à un seuil de détection τ_n :

$$\frac{X_n}{m_n} \underset{\text{pas de cible}}{\overset{\text{cible}}{\geq}} \tau_n . \quad (2.4)$$

Les performances du détecteur idéal sont facilement calculables. En effet, soit $f_{X_n}(x_n|m_n, L)$ la densité de probabilité de X_n lorsqu'il n'y a pas de cible au pixel n . Alors la probabilité de fausse alarme s'écrit :

$$\mathcal{P}_{fa}^{\text{Idéal}}(\tau_n|m_n, L) = \int_{m_n \tau_n}^{\infty} f_{X_n}(x_n|m_n, L) dx_n . \quad (2.5)$$

De façon similaire, si nous notons $f_{X_n}(x_n|m_n, L, S)$ la densité de probabilité de X_n lorsqu'une cible est présente au pixel n , l'expression de la probabilité de détection est :

$$\mathcal{P}_d^{\text{Idéal}}(\tau_n|m_n, L, S) = \int_{m_n \tau_n}^{\infty} f_{X_n}(x_n|m_n, L, S) dx_n . \quad (2.6)$$

Dans le cas d'une cible fluctuante, la densité de probabilité f_{X_n} est une densité de probabilité gamma pour les deux hypothèses H_0 et H_1 . Les performances du détecteur idéal s'expriment alors à l'aide de la fonction gamma incomplète $\Gamma(x, a)$ (dont l'expression est précisée à la page 191 dans la section « Notations ») :

$$\mathcal{P}_{fa}^{\text{Idéal}}(\tau_n|m_n, L) = \Gamma(L \tau_n, L) , \quad (2.7)$$

$$\mathcal{P}_d^{\text{Idéal}}(\tau_n|m_n, L, S) = \Gamma\left(\frac{L \tau_n}{1+S}, L\right) . \quad (2.8)$$

Ces expressions nous serviront de référence par la suite car les performances du détecteur idéal sont les performances maximales que l'on peut espérer atteindre pour la détection d'une cible de type Swerling I sur un fond perturbé par un bruit gamma.

La figure FIG. 2.2 illustre l'évolution de la probabilité de détection du détecteur idéal en fonction du contraste S de la cible (modèle de cible fluctuante) pour différents ordres L de bruit gamma. Comme on pouvait s'y attendre, la probabilité de détection augmente avec le contraste S . Il est plus simple de détecter une cible qui a un contraste élevé par rapport au fond, qu'un contraste faible. On remarque également que plus l'ordre L du bruit gamma est élevé, plus la \mathcal{P}_d est grande. Il est plus facile de détecter une cible quand les fluctuations des valeurs du fond et de la cible sont faibles que lorsque ces fluctuations sont fortes.

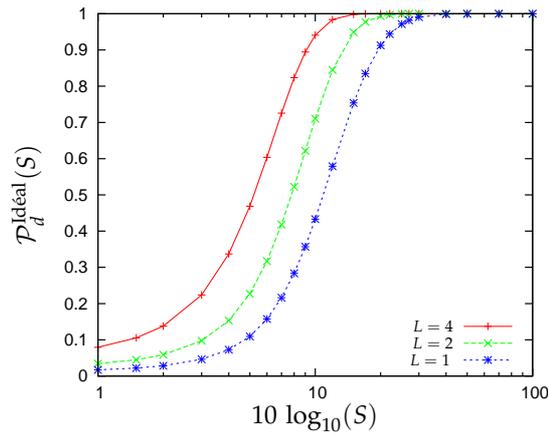


FIG. 2.2 – Évolution de la probabilité de détection du détecteur idéal en fonction du contraste S de la cible (modèle de cible fluctuante) et pour différents ordres L de bruit gamma. Le seuil de détection a été choisit pour un probabilité de fausse alarme égale à $\alpha = 10^{-4}$.

2.2 ÉTUDE DU DÉTECTEUR CA-CFAR SUR DES FONDS HOMOGENES

Gandhi et Kassam [42] ont étudié l'optimalité du détecteur CA-CFAR et ont prouvé que le test de détection utilisé par le CA-CFAR est UMP (« Uniformly Most Powerful », uniformément le plus puissant) dans le cas d'un fond homogène perturbé par un bruit gamma d'ordre $L = 1$. Aussi, les expressions des performances de détection du détecteur CA-CFAR sur un fond homogène perturbé par un bruit gamma nous seront utiles dans la suite de notre étude pour la comparaison des performances de différentes techniques de détection. De plus, les expressions des performances du CA-CFAR obtenues pour un fond homogène constituent une première étape vers une étude, présentée dans la section suivante, du comportement de ce détecteur sur des fonds inhomogènes.

Comme dit précédemment, le détecteur CA-CFAR consiste à comparer le rapport entre la valeur du pixel test X_n et la valeur estimée du fond au pixel test $\hat{m}_n^{\text{CA-CFAR}}$ à un seuil de détection τ_n . L'estimation de la valeur du fond au pixel test est réalisée en utilisant la moyenne arithmétique. Afin d'alléger la notation, nous noterons Z_n la moyenne arithmétique calculée dans la région de référence associé au pixel test n . Alors le test de détection de la technique CA-CFAR est le suivant :

$$\frac{X_n}{Z_n} \underset{\text{pas de cible}}{\overset{\text{cible}}{\geq}} \tau_n, \quad (2.9)$$

où X_n est la valeur du pixel test, $Z_n = \frac{1}{N_n} \sum_{p \in \omega_n} X_p$, $N_n = \text{card}(\omega_n)$ et τ_n le seuil de détection. On remarque que le détecteur CA-CFAR est directement dérivé du détecteur idéal quand on considère que le fond est inconnu et homogène.

Pour connaître l'expression du seuil de détection à utiliser pour une probabilité de fausse alarme α fixée par l'utilisateur, nous devons connaître la densité de probabilité de la statistique de détection X_n/Z_n . Le calcul est cette

fois moins évident que pour le détecteur idéal car nous devons prendre en compte le fait que Z_n est une variable aléatoire.

Présentons la démarche utilisée dans le cas du calcul de la probabilité de fausse alarme. Notons $T_n = X_n/Z_n$ le rapport entre la valeur du pixel test et la moyenne arithmétique et précisons que X_n et Z_n sont deux variables aléatoires indépendantes. La probabilité de fausse alarme s'exprime comme :

$$\mathcal{P}_{fa}^{\text{CA-CFAR}}(\tau_n|N_n, L) = \int_{\tau_n}^{\infty} f_{T_n}(t_n|N_n, L) dt_n, \quad (2.10)$$

où f_{T_n} est la densité de probabilité de T_n . Cette densité de probabilité peut s'écrire [88] :

$$\mathcal{P}_{fa}^{\text{CA-CFAR}}(\tau_n|N_n, L) = \int_{\tau_n}^{\infty} \int_0^{\infty} z_n f_{X_n}(t_n z_n|m_n, L) f_{Z_n}(z_n|m_n, N_n, L) dz_n dt_n, \quad (2.11)$$

avec f_{X_n} la densité de probabilité de X_n quand le pixel test ne contient pas de cible (hypothèse H_0) et f_{Z_n} la densité de probabilité de Z_n .

D'après le modèle de données que nous avons choisi, la densité de probabilité f_{X_n} correspond à la densité de probabilité d'une variable aléatoire gamma. Concernant la densité de probabilité f_{Z_n} , dans le cas d'un fond homogène, Z_n est une somme de variables aléatoires indépendantes gamma de moyennes identiques et d'ordre L . On peut en déduire [36] que Z_n fluctue comme une variable aléatoire gamma d'ordre $N_n L$. Dans l'hypothèse où le fond est homogène, l'estimation de la valeur du fond au pixel test est non-biaisée ($E[Z_n] = m_n$) et on peut alors déduire l'expression de la probabilité de fausse alarme à partir de l'équation 2.11.

L'étude du détecteur CA-CFAR sur des fonds homogènes a déjà été traitée dans la littérature [2, 38, 85]. Les expressions des performances du détecteur CA-CFAR dans ce cas sont exprimées à l'équation 2.12.

Proposition 2.1 *Sous l'hypothèse d'un fond homogène et en modélisant la cible par une variable aléatoire gamma de moyenne $m_n(1+S)$ et d'ordre L , les performances de détection du détecteur CA-CFAR sont [2] :*

$$\mathcal{P}_d^{\text{CA-CFAR}}(\tau_n|N_n, L, S) = 1 - \mathcal{I} \left(\frac{1}{1+S} \frac{\tau_n}{N_n}, L, N_n L \right), \quad (2.12)$$

avec \mathcal{I} la fonction Beta régularisée (dont l'expression est présentée à la page 191 dans la section « Notations »).

Ainsi la \mathcal{P}_{fa} du détecteur CA-CFAR sur un fond homogène est :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{fa}^{\text{CA-CFAR}}(\tau_n|N_n, L) &= \mathcal{P}_d^{\text{CA-CFAR}}(\tau_n|H_0) \\ &= 1 - \mathcal{I} \left(\frac{\tau_n}{N_n}, L, N_n L \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

En inversant l'expression de la \mathcal{P}_{fa} , il est possible de déterminer le seuil de détection $\tau_n(\alpha, N_n, L)$ qui correspond à une probabilité de fausse

alarme α choisie par l'utilisateur. Nous remarquons que le seuil de détection $\tau_n(\alpha, N_n, L)$ dépend uniquement du taux de fausse alarme souhaité, du nombre N_n de pixels dans la région de référence et de l'ordre L du bruit gamma qui perturbe le fond. On vérifie ainsi que le détecteur est TFAC car le seuil de détection dépend uniquement de paramètres connus.

Comme nous l'avons déjà signalé, la probabilité de détection du CA-CFAR augmente avec le nombre de pixels dans la région de référence N_n sur un fond homogène.

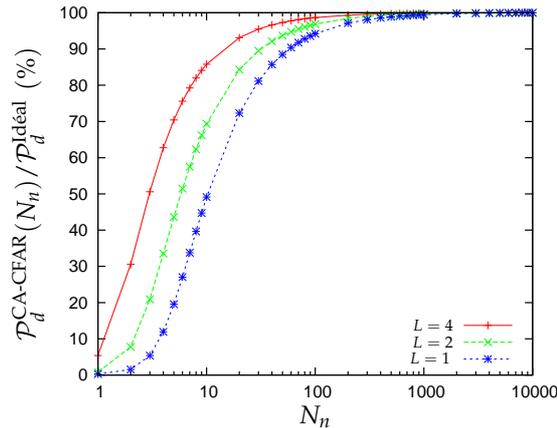


FIG. 2.3 – Évolution de la probabilité de détection, en pourcentage par rapport à la probabilité de détection du détecteur idéal, en fonction du nombre de pixels dans la région de référence pour différents ordres L de bruit gamma. Le seuil de détection a été choisi pour une probabilité de fausse alarme égale à $\alpha = 10^{-4}$.

La figure FIG. 2.3 permet d'apprécier sur un exemple l'évolution de la probabilité de détection du CA-CFAR en fonction de N_n pour différents ordres L de bruit gamma. Pour une région de référence composée de plus d'une centaine de pixels, on peut considérer que la probabilité de détection du CA-CFAR est très proche de celle du détecteur idéal. En outre, on remarque que la convergence de la probabilité de détection du CA-CFAR vers celle du détecteur idéal dépend de l'ordre L du bruit gamma. Plus l'ordre du bruit gamma est élevé, plus la \mathcal{P}_d du CA-CFAR converge vers la \mathcal{P}_d du détecteur idéal pour de faibles valeurs de N_n .

2.3 ÉTUDE DU DÉTECTEUR CA-CFAR SUR DES FONDS INHOMOGÈNES : PERFORMANCES EXACTES

Le comportement du détecteur CA-CFAR sur des fonds inhomogènes a déjà été largement étudié. Des études ont pu prouver la dégradation des performances du détecteur CA-CFAR dans un certain nombre de cas : présence de cibles interférentes ou fond inhomogène pour lequel la région de référence peut être divisée en deux zones de valeurs différentes [41, 85]. Nous proposons une étude théorique des performances du détecteur CA-CFAR sur des fonds inhomogènes et nous déterminerons l'expression exacte des performances de détection du détecteur CA-CFAR sur des fonds inhomogènes. Les expressions obtenues nous seront utiles par la suite et nous permettront

d'étudier le comportement du détecteur CA-CFAR sur différents types de fond.

2.3.1 Expressions exactes des performances

Nous proposons d'exhiber les expressions des performances théoriques du détecteur CA-CFAR pour un fond inhomogène dans le cas d'un bruit gamma et du modèle de cible fluctuante. Pour cela, nous nous attacherons premièrement à déterminer l'expression de la probabilité de détection. Pour obtenir l'expression de la probabilité de fausse alarme, il nous suffira alors de considérer le cas d'une cible de contraste nul ($S = 0$).

Pour aboutir à ce résultat, nous devons déterminer la densité de probabilité de la statistique X_n/Z_n , c'est-à-dire la densité de probabilité du rapport des deux variables aléatoires X_n et Z_n . La densité de probabilité de X_n est liée au modèle de cible utilisé (hypothèse H_1) alors que la densité de probabilité de Z_n correspond à la densité de probabilité d'une somme de variables aléatoires gamma indépendantes de moyennes différentes. Afin de déterminer la densité de probabilité de Z_n , nous utilisons les travaux de Moschopoulos [80] dans lesquels la ddp (densité de probabilité) d'une somme de variables aléatoires gamma indépendantes est exprimée sous la forme d'une série de ddp gamma (Théorème 2.1). Nous aurions pu calculer les performances du CA-CFAR par un calcul numérique, mais la précision des résultats souhaitée (en particulier sur la \mathcal{P}_{fa}) aurait nécessité la mise en œuvre de méthodes de calcul numérique précises et complexes. Le choix de présenter les expressions explicites des performances du CA-CFAR permet à la fois de bénéficier des travaux menés par Moschopoulos (en terme de précision des résultats obtenus par calcul numérique) mais également d'obtenir des expressions pour lesquelles on peut étudier le rôle des différents termes en présence.

Nous présentons les expressions obtenues dans le cas général où Z_n est une somme de variables aléatoires $\{X_p, p = 1 \dots N_n\}$ d'ordre différent $\{L_p, p = 1 \dots N_n\}$, bien que dans notre application nous considérons que l'ordre est le même quel que soit le pixel considéré : $\forall p = 1 \dots N_n, L_p = L$.

Théorème 2.1 Soit $\{X_p, p = 1, \dots, N_n\}$ un ensemble de variables aléatoires gamma mutuellement indépendantes, de moyenne $m_p = \mu_p L_p$ et d'ordre L_p tel que la densité de probabilité de X_p est :

$$f_{X_p}(x_p) \triangleq \frac{x_p^{L_p-1}}{\mu_p^{L_p} \Gamma(L_p)} \exp[-x_p/\mu_p] \text{ pour } x_p > 0, \quad (2.14)$$

et $f_{X_p}(x_p) \triangleq 0$ pour $x_p \leq 0$. Alors la ddp de $Y_n \triangleq \sum_{p=1}^{N_n} X_p$ peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$g_{Y_n}(y_n) = C \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{y_n^{\rho+k-1}}{\mu_m^{\rho+k} \Gamma(\rho+k)} \exp[-y_n/\mu_m], \quad (2.15)$$

où :

$$\mu_m \triangleq \min(\{\mu_p, p = 1 \dots N_n\}), \quad (2.16)$$

$$C \triangleq \prod_{p \in \omega_n} (\mu_m / \mu_p)^{L_p}, \quad (2.17)$$

$$\rho \triangleq \sum_{p \in \omega_n} L_p, \quad (2.18)$$

$$\delta_0 \triangleq 1, \quad (2.19)$$

$$\delta_{k+1} \triangleq \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} i \gamma_i \delta_{k+1-i}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

$$\gamma_k \triangleq \sum_{p \in \omega_n} L_p (1 - \mu_m / \mu_p)^k / k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.21)$$

Partant de ce théorème, il est alors possible de déterminer la densité de probabilité du test de détection et donc d'écrire les expressions des performances du détecteur CA-CFAR dans le cas d'un fond inhomogène (Proposition. 2.2).

Proposition 2.2 Soit $Z_n = \frac{1}{N_n} \sum_{p \in \omega_n} X_p$ la moyenne arithmétique calculée dans la région ω_n ($N_n = \text{card}(\omega_n)$), où X_p sont des variables aléatoires gamma mutuellement indépendantes d'ordre L_p et de moyenne $m_p \triangleq \mu_p L_p$. Soit X_n une variable aléatoire gamma indépendante d'ordre L_n et de moyenne $(1+S)m_n \triangleq (1+S)\mu_n L_n$ avec S le contraste entre la valeur moyenne de X_n (cible) et la valeur m_n du fond. La \mathcal{P}_d associée à la statistique X_n/Z_n est :

$$\mathcal{P}_d^{\text{CA-CFAR exa.}}(\tau_n | \mu_n, L_n, \{\mu_p\}_{p \in \omega_n}, \{L_p\}_{p \in \omega_n}, S) = C \sum_{k \geq 0} \delta_k \left[1 - \mathcal{I} \left(\frac{\tau_n \frac{\mu_m}{\mu_n N_n (1+S)}}{1 + \tau_n \frac{\mu_m}{\mu_n N_n (1+S)}}, L_n, \rho + k \right) \right], \quad (2.22)$$

où τ_n est le seuil de détection.

La démonstration de cette propriété est présentée à l'annexe A.1. L'expression des performances présentée correspond à un résultat général. Dans notre cadre applicatif, les échantillons contenus dans la région de référence sont modélisés par des variables aléatoires gamma d'ordre identique : $\forall p \in \omega_n, L = L_n = L_p$. Dans ce cas les performances du détecteur CA-CFAR sont :

$$\mathcal{P}_d^{\text{CA-CFAR exa.}}(\tau_n | \mu_n, \{\mu_p\}_{p \in \omega_n}, L, S) = C \sum_{k \geq 0} \delta_k \left[1 - \mathcal{I} \left(\frac{\tau_n \frac{m_m}{m_n N_n (1+S)}}{1 + \tau_n \frac{m_m}{m_n N_n (1+S)}}, L, N_n L + k \right) \right], \quad (2.23)$$

et :

$$\mathcal{P}_{fa}^{\text{CA-CFAR exa.}}(\tau_n | \mu_n, \{\mu_p\}_{p \in \omega_n}, L) = C \sum_{k \geq 0} \delta_k \left[1 - \mathcal{I} \left(\frac{\tau_n \frac{m_m}{m_n N_n}}{1 + \tau_n \frac{m_m}{m_n N_n}}, L, N_n L + k \right) \right]. \quad (2.24)$$

La complexité de l'expression exacte des performances de détection du détecteur CA-CFAR dans le cas d'un fond inhomogène rend difficile une interprétation physique simple du comportement du détecteur CA-CFAR sur fond inhomogène. Nous verrons par la suite comment des performances approchées du détecteur CA-CFAR permettent une interprétation plus simple.

2.3.2 Comportement de la statistique X_n/Z_n sur fond inhomogène

Il est tout d'abord important de vérifier qu'il est possible à partir des expressions exactes des performances du CA-CFAR sur fond inhomogène de retrouver les performances du CA-CFAR sur fond homogène. À partir des expressions obtenues (équation 2.23 et équation 2.24), on peut s'en assurer. En effet, si le fond est homogène les termes γ_i pour tout $i > 0$ sont tous nuls ($\forall p \in \omega_n, 1 - \mu_m/\mu_p = 0$). Alors seul le terme δ_k d'indice $k = 0$ est différent de zéro et vaut 1. Le terme C est également égal à l'unité et finalement on retrouve l'expression des performances du CA-CFAR correspondant à un fond homogène (cf. équation 2.12 et équation 2.13).

Dans le cas d'un fond inhomogène, les termes γ_i sont non tous nuls, la densité de probabilité de la statistique de décision est alors modifiée par rapport au cas d'un fond homogène. Pour illustrer ce phénomène, étudions numériquement la densité de probabilité de la statistique X_n/Z_n , que nous noterons $P_{\frac{X_n}{Z_n}}$, dans trois cas. Tout d'abord quand la région de référence est homogène (a), puis quand la région de référence est homogène mais avec une valeur de fond pour le pixel test différente de la valeur du fond dans la région de référence (b) et enfin dans le cas où la région de référence est inhomogène (c).

Pour réaliser cette étude, commençons par remarquer que la \mathcal{P}_d et la \mathcal{P}_{fa} sont invariantes à toute dilatation du fond (dans l'axe des niveaux de gris). Ainsi multiplier les valeurs du fond m_p par un facteur commun n'influe pas sur les performances de la technique CA-CFAR. Cela est une conséquence du caractère multiplicatif du bruit et du test de détection qui en découle. Dans la suite de cette section, nous nous intéresserons ainsi à des inhomogénéités référencées par rapport à la valeur du fond m_n au pixel test n .

Considérons une région de référence de 10 pixels et un bruit gamma d'ordre 4. Nous nous intéresserons à l'hypothèse H_0 , c'est-à-dire qu'il n'y a pas de cible au pixel n .

Pour le cas (a), la valeur du fond est la même pour le pixel test et tous les pixels de la région de référence. Pour le cas (b), le fond est homogène dans la région de référence, mais la valeur du fond au pixel test est 1.5 fois plus grande que la valeur du fond dans la région de référence. Pour le cas (c), nous avons choisi d'étudier une région de référence inhomogène composée de deux zones homogènes de 5 pixels : pour l'une des zones la valeur du fond est égale à 0.5 fois la valeur du fond m_n au pixel test et pour l'autre zone la valeur du fond est égale à 1.5 fois m_n .

Une représentation schématique de la forme du fond pour les trois cas est présentée à la figure FIG. 2.4. Sur cette même figure, on retrouve également la densité de probabilité du rapport X_n/Z_n dans les trois cas. Il faut noter

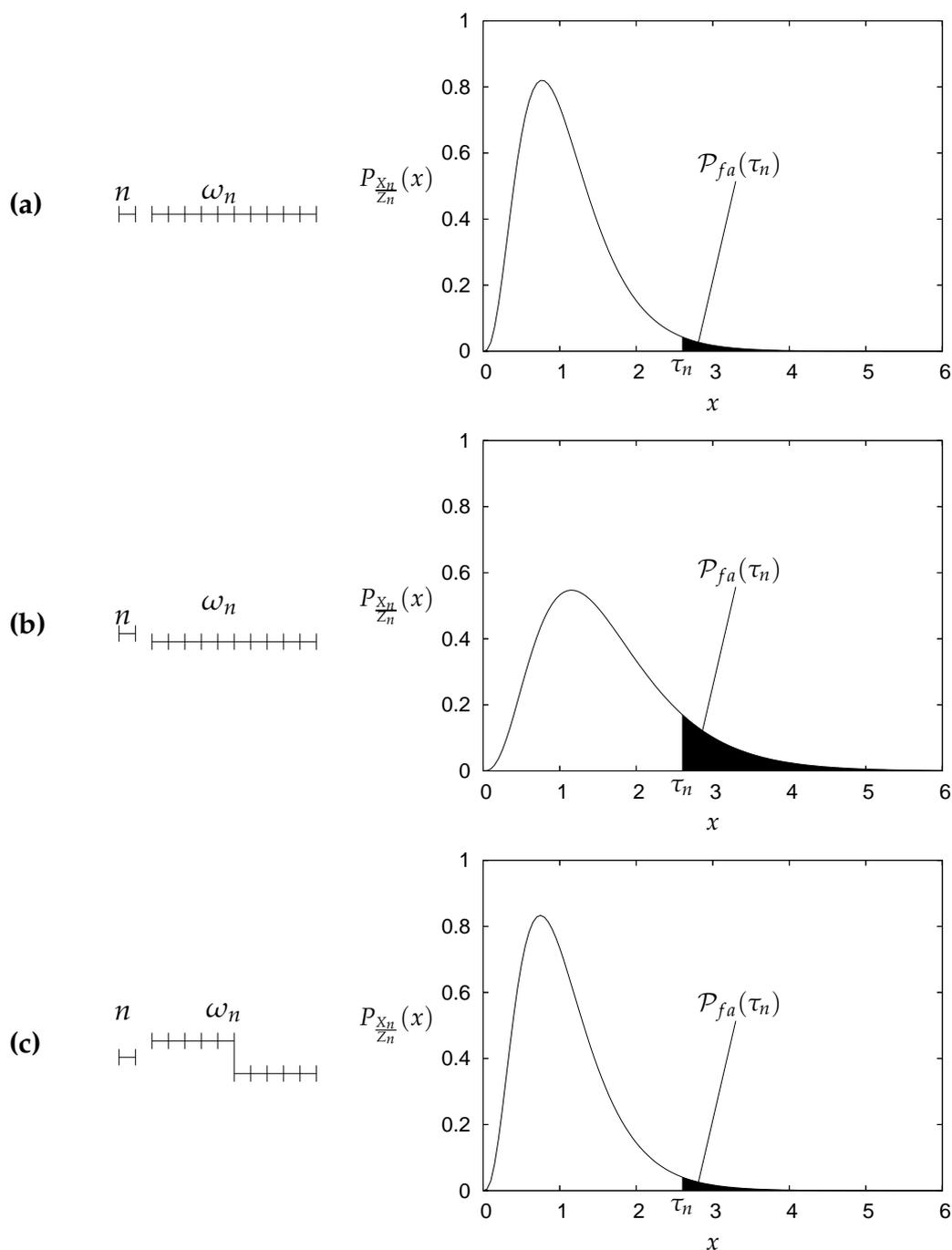


FIG. 2.4 – Pour les trois cas étudiés (a,b,c), à gauche une représentation schématique de la forme du fond, à droite la densité de probabilité du rapport X_n/Z_n correspondant.

que la probabilité de fausse alarme correspond à l'intégrale de la densité de probabilité (l'aire en noir) entre le seuil de détection τ_n et l'infini.

La densité de probabilité pour le cas (a) est différente de la ddp pour le cas (b). On observe donc que si la valeur du fond au pixel test est différente de la valeur du fond dans la région de référence, pour un même seuil de détection τ_n , la probabilité de fausse alarme obtenue est très différente. On en déduit pour le détecteur CA-CFAR qu'une estimation biaisée de la valeur du fond au pixel test est néfaste au respect du taux de fausse alarme souhaité.

Suite à cela il paraît intéressant d'étudier le cas (c) pour lequel la région

de référence est inhomogène, mais où la valeur de fond pour le pixel test correspond à la valeur moyenne du fond dans la région de référence. Le modèle de région de référence considéré dans le cas (c) assure que l'estimation de la valeur de fond pour le pixel test par la moyenne arithmétique est non biaisée, c'est-à-dire que $E[Z_n] = m_n$. La région de référence considérée étant inhomogène, cela conduit à un changement de la densité de probabilité de la statistique X_n/Z_n . On remarque que la densité de probabilité dans le cas (c) est relativement proche de la ddp dans le cas (a).

Pour un même seuil de détection τ_n , les trois cas présentés (a,b,c) conduisent à des probabilités de fausse alarme différentes. Pour le détecteur CA-CFAR, la régulation du taux de fausse alarme sera moins bien assurée dans le cas (b) que dans le cas (c). On en déduit que la maîtrise de la probabilité de fausse alarme sera plus difficile pour le CA-CFAR quand l'estimation de la valeur du fond sera biaisée (b) que quand la région de référence sera inhomogène et que Z_n ne sera pas une estimation biaisée de m_n (c).

Le cas (c) de la région de référence inhomogène se différencie des deux autres cas (a,b) en ce sens que $\mathcal{P}_{fa}^{\text{CA-CFAR exa.}}$ est la somme de plusieurs termes (indiqué par k) et non d'un seul terme ($k = 0$, pour les cas a et b). Nous pouvons nous demander quelle est l'importance de chacun des termes et combien doivent être pris en compte pour calculer $\mathcal{P}_{fa}^{\text{CA-CFAR exa.}}$ avec une précision suffisante. À l'annexe A.1, une borne sur la précision de $\mathcal{P}_{fa}^{\text{CA-CFAR exa.}}$ en fonction du nombre K de termes envisagés est indiquée.

De plus, à l'annexe A.2, une étude est réalisée sur la manière dont le calcul des performances exactes doit être conduit. Cette étude nous permet de conclure qu'il est souhaitable de sommer les termes par ordre croissant d'indice, en commençant par le terme d'indice $k = 0$ jusqu'au terme d'indice $k = K$. L'ordre K est choisi de manière à ce que le terme d'indice $k = K$ soit significatif, à la précision machine, devant la somme des termes précédents.

Nous avons pu tirer quelques enseignements des performances exactes de la technique CA-CFAR. Nous avons vu que le biais sur l'estimation de m_n est un facteur nuisible à la maîtrise du taux de fausse alarme pour la technique CA-CFAR. Pour améliorer notre compréhension des facteurs qui nuisent aux performances de la technique CA-CFAR sur des fonds inhomogènes, nous proposons d'étudier une approximation des performances exactes.

2.4 ÉTUDE DU DÉTECTEUR CA-CFAR SUR DES FONDS INHOMOGÈNES : PERFORMANCES APPROCHÉES

Nous souhaitons maintenant présenter des expressions approchées des performances de la technique CA-CFAR. Pour cela, nous étudierons dans un premier temps les propriétés statistiques de la moyenne arithmétique.

2.4.1 Propriétés de la moyenne arithmétique

L'estimateur de la valeur du fond utilisé par le détecteur CA-CFAR est la moyenne arithmétique. L'étude des deux premiers moments de cet estimateur

nous permettra de mettre en évidence des propriétés utiles pour introduire les calculs approchés.

En premier lieu, l'espérance mathématique de Z_n est :

$$\begin{aligned} E[Z_n] &= E \left[\frac{1}{N_n} \sum_{p \in \omega_n} X_p \right] \\ &= \frac{1}{N_n} \sum_{p \in \omega_n} m_p. \end{aligned} \quad (2.25)$$

L'espérance mathématique de Z_n est liée à la valeur moyenne du fond dans la région de référence.

En soulignant l'hypothèse d'indépendance des échantillons, calculons maintenant la variance de Z_n :

$$\begin{aligned} var(Z_n) &= E \left[\left(\frac{1}{N_n} \sum_{p \in \omega_n} X_p - E[Z_n] \right)^2 \right] \\ &= E \left[\frac{1}{N_n^2} \sum_{p \in \omega_n} \sum_{q \in \omega_n} (X_p - E[Z_n]) (X_q - E[Z_n]) \right] \\ &= \frac{1}{N_n^2} \sum_{p \in \omega_n} \sum_{q \in \omega_n} E[(X_p - E[Z_n]) (X_q - E[Z_n])] \\ &= \frac{1}{N_n^2} \sum_{p \in \omega_n} \underbrace{var(X_p)}_{=m_p^2/L} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{N_n^2} \sum_{p \in \omega_n} \sum_{q \in \omega_n, q \neq p} E[X_p - E[Z_n]] E[X_q - E[Z_n]]}_{=0 \text{ (indépendance)}} \\ &= \frac{1}{L N_n^2} \sum_{p \in \omega_n} m_p^2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

En faisant apparaître $E[Z_n]$, on peut écrire :

$$var(Z_n) = \underbrace{\frac{E[Z_n]^2}{L N_n}}_{\text{variance fond homogène}} + \underbrace{\frac{1}{L N_n^2} \sum_{p \in \omega_n} (m_p - E[Z_n])^2}_{\text{correction fond inhomogène}}. \quad (2.27)$$

Cette dernière expression amène plusieurs remarques. On remarque que l'expression de la variance de Z_n sur un fond inhomogène peut être décomposée en deux termes : la variance¹ de Z_n obtenue sur un fond homogène de valeur moyenne $E[Z_n] = \frac{1}{N_n} \sum_{p \in \omega_n} m_p$ et un terme correctif qui dépend de la rugosité du fond. En effet le terme $\sum_{p \in \omega_n} (m_p - E[Z_n])^2$ peut également s'écrire :

$$\sum_{p \in \omega_n} \left(m_p - \frac{1}{N_n} \sum_{q \in \omega_n} m_q \right)^2, \quad (2.28)$$

¹La variance d'une variable aléatoire gamma de moyenne $E[Z_n]$ et d'ordre $L N_n$ est égale à $E[Z_n]^2 / (L N_n)$.

ce qui correspond à un terme de rugosité [132].

Il apparaît donc que les deux premiers moments de Z_n sur un fond inhomogène dépendent uniquement de la valeur moyenne du fond et de l'écart quadratique moyen du fond par rapport à sa valeur moyenne.

2.4.2 Ddp de la moyenne arithmétique

Comme nous l'avons vu précédemment, la ddp de la moyenne arithmétique est une expression complexe (cf. équation 2.1). Il est donc intéressant de développer une expression plus simple. Dans le cas d'un fond homogène, il est connu qu'une somme de v.a. de ddp gamma homogènes est distribuée selon une ddp gamma. Il apparaît alors raisonnable, dans le cas d'un fond peu inhomogène, de considérer l'approximation selon laquelle la ddp de la somme de v.a. gamma est proche d'une ddp gamma.

De plus, nous avons vu que les deux premiers moments de la v.a. Z_n peuvent être exprimés simplement en fonction de la valeur moyenne et de l'écart quadratique du fond. Cela nous amène à considérer l'approximation suivante :

Approximation 2.1 *La moyenne arithmétique Z_n est une v.a. dont la ddp est proche de celle d'une v.a. gamma $Z_n \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{N_n} \sum_{p \in \omega_n} m_p, N_{eq}L\right)$ de moyenne $\frac{1}{N_n} \sum_{p \in \omega_n} m_p$ et d'ordre $N_{eq}L$ avec $N_{eq} = \left(\sum_{p \in \omega_n} m_p\right)^2 / \sum_{p \in \omega_n} m_p^2$.*

Le paramètre N_{eq} est un nombre de pixels équivalent, il s'agit d'un terme correctif sur l'ordre (dans le cas d'un fond homogène $N_{eq} = N_n$). Pour obtenir l'expression du paramètre N_{eq} , on identifie la variance de Z_n à la variance d'une v.a. gamma de moyenne $\frac{1}{N_n} \sum_{p \in \omega_n} m_p$ et d'ordre $N_{eq}L$:

$$\text{var}(Z_n) = \frac{\left(\frac{1}{N_n} \sum_{p \in \omega_n} m_p\right)^2}{L N_{eq}}. \quad (2.29)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on est capable de dire que $N_{eq} \leq N_n$.

L'approximation 2.1 utilisée a déjà été envisagée dans un autre contexte. Dans le cadre de communications par téléphonie mobile avec interférence de différents signaux, Linnartz [75] proposait de modéliser la ddp d'une somme de v.a. de Rayleigh par une ddp gamma. Cette même approximation a été utilisée pour des problématiques similaires par Babich et Lombardi [4].

Pour juger de la qualité de l'approximation, nous proposons de calculer la différence entre la ddp exacte et la ddp approchée de la moyenne arithmétique pour différentes configurations. Afin de mesurer cette distance entre lois, nous utiliserons la distance de Bhattacharyya [9, 47].

Définition 2.1 *Soit $P_a(x)$ et $P_b(x)$ deux densités de probabilité définies sur le même intervalle D , la distance de Bhattacharyya $d_B(P_a, P_b)$ entre ces deux densités de probabilité est définie comme :*

$$d_B(P_a, P_b) = -\log \left(\int_{x \in D} \sqrt{P_a(x) P_b(x)} dx \right). \quad (2.30)$$

Nous étudierons le cas où la moyenne arithmétique est calculée sur une région de référence composée de deux régions de 5 pixels : l'une de valeur moyenne $m_n(1+b)$, l'autre de valeur moyenne $m_n(1-b)$. Le paramètre b permet de faire varier l'homogénéité de la région de référence. La figure FIG.2.5 présente les résultats obtenus par calcul numérique pour un bruit gamma d'ordre 1, 2 et 4. Sur cette même figure, on représente également, pour comparaison, la distance de Bhattacharyya entre la ddp exacte de la moyenne arithmétique et une ddp normale. Les paramètres de la ddp normale (moyenne et variance) sont choisis de façon à ce que les deux premiers moments de la ddp exacte et de la ddp normale soient identiques.

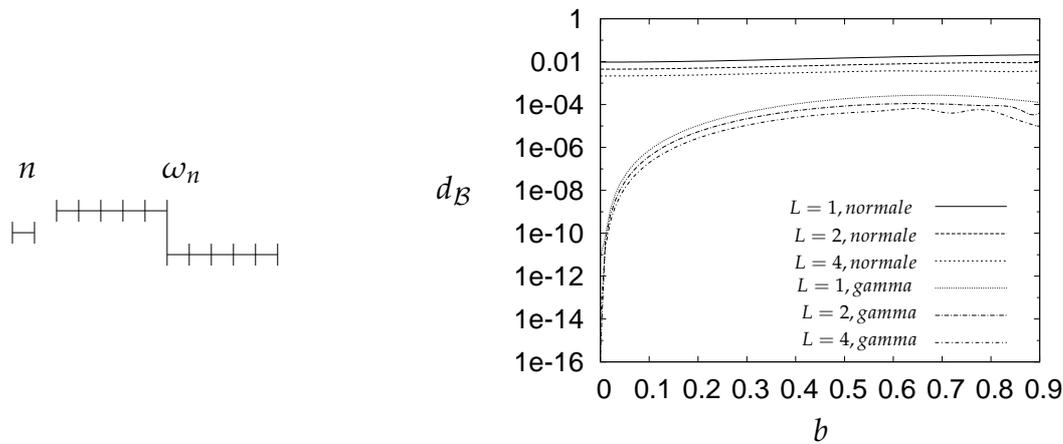


FIG. 2.5 – À gauche, une représentation schématique du fond étudié. À droite, la distance de Bhattacharyya entre la ddp exacte et la ddp approchée de la moyenne arithmétique est représentée en fonction du paramètre b (pour faire varier l'homogénéité de la région de référence) et en considérant différents ordres pour le bruit gamma. À titre de comparaison, est également représentée la distance de Bhattacharyya entre la ddp exacte et la ddp d'une v.a. normale de même moyenne et de même variance que celle de Z_n .

Quand la région de référence est homogène ($b \rightarrow 0$), la distance de Bhattacharyya est nulle, ce qui indique que les deux ddp sont identiques. Puis pour $L = 1$ cette distance augmente avec l'inhomogénéité de la région de référence, cependant les valeurs de la distance de Bhattacharyya restent faibles par rapport à la distance de Bhattacharyya entre la ddp normale et la ddp exacte. On remarque que la distance de Bhattacharyya diminue quand l'ordre du bruit gamma augmente. Dans le cas présenté, la ddp approchée est très proche de la ddp exacte, l'approximation est donc valide.

2.4.3 Expressions approchées des performances

Nous avons vu qu'une expression approchée de la ddp de la moyenne arithmétique peut être obtenue. Nous allons utiliser cette approximation afin de formuler des expressions approchées des performances de la technique CA-CFAR pour un fond inhomogène. Pour le CA-CFAR, l'estimation de la valeur du fond au pixel test Z_n peut être biaisée. Ainsi, l'espérance mathématique de la moyenne arithmétique ne correspond pas forcément à la valeur du fond au pixel test. C'est pourquoi nous complétons l'approximation précédente avec un paramètre B afin de prendre compte cet effet.

Hypothèse 2.1 *L'estimateur Z_n de la valeur du fond au pixel test n est approximativement une v.a. gamma $Z_n \sim \mathcal{G}((1+B)m_n, N_{eq}L)$ de moyenne $(1+B)m_n$ et d'ordre $N_{eq}L$.*

Le paramètre B permet de rendre compte de la présence éventuelle d'un biais sur l'estimation de la valeur du fond. L'hypothèse 2.1 conduit alors à une expression simple des performances de détection du détecteur CA-CFAR.

Proposition 2.3 *Sous l'hypothèse 2.1 et en considérant le modèle étudié, les performances de détection du détecteur CA-CFAR sur un fond inhomogène sont :*

$$\mathcal{P}_d^{CA-CFAR \text{ approx.}}(\tau_n | B, N_{eq}, L, S) = 1 - \mathcal{I} \left(\frac{\frac{1+B}{1+S} \frac{\tau_n}{N_{eq}}}{1 + \frac{1+B}{1+S} \frac{\tau_n}{N_{eq}}}, L, N_{eq}L \right), \quad (2.31)$$

et

$$\mathcal{P}_{fa}^{CA-CFAR \text{ approx.}}(\tau_n | B, N_{eq}, L) = 1 - \mathcal{I} \left(\frac{(1+B) \frac{\tau_n}{N_{eq}}}{1 + (1+B) \frac{\tau_n}{N_{eq}}}, L, N_{eq}L \right). \quad (2.32)$$

L'expression approchée des performances est plus facilement interprétable. On peut identifier clairement l'influence de deux facteurs : le biais (B) sur l'estimation de la valeur du fond et la variance d'estimation (liée au paramètre N_{eq}) de la valeur du fond.

La valeur du biais sur l'estimation de la valeur du fond est simplement :

$$B = \frac{E[Z_n] - m_n}{m_n}. \quad (2.33)$$

Précédemment nous avons déjà précisé que le paramètre N_{eq} est exprimé par :

$$N_{eq} = \frac{\left(\sum_{p \in \omega_n} m_p \right)^2}{\sum_{p \in \omega_n} m_p^2}. \quad (2.34)$$

Il nous est alors maintenant possible de calculer à l'aide des expressions approchées les performances de détection du détecteur CA-CFAR pour un fond inhomogène. On peut noter que les performances approchées se réduisent aux mêmes expressions que les performances exactes de la technique CA-CFAR dans le cas d'un fond homogène ($B = 0$ et $N_{eq} = N_n$).

2.5 VALIDATIONS EXPÉRIMENTALES DES EXPRESSIONS OBTENUES

Nous souhaitons maintenant vérifier expérimentalement la validité des expressions obtenues (équation 2.22 et équation 2.31). Ainsi, on s'assurera pour les performances exactes du CA-CFAR que l'on est capable de réaliser un calcul numérique avec une précision satisfaisante. Pour les performances approchées, on pourra étudier leur domaine de validité.

Dans ce but, nous proposons deux expériences afin d'étudier l'influence sur les performances de détection du biais sur l'estimation de la valeur du

fond et de la variance d'estimation de la valeur du fond. Pour ces deux expériences nous considérerons deux types de fond différents, que nous décrirons par la suite. Au cours de ces expériences, nous calculons les performances grâce aux expressions des performances exactes et approchées du CA-CFAR obtenues dans les sections précédentes et nous les comparons à des performances estimées par simulations numériques à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo en utilisant 10^8 réalisations. Les deux expériences sont réalisées avec un bruit gamma d'ordre $L = 1$ et $L = 4$. La valeur du seuil de détection utilisé est choisie de manière à ce que la probabilité de fausse alarme obtenue soit égale à 10^{-4} sur un fond homogène. Pour évaluer la \mathcal{P}_{fa} on considère le cas où le pixel test ne contient pas de cible alors que pour évaluer la \mathcal{P}_d nous considérons le cas d'une cible fluctuante dont le RSB est égal à 7 dB . Suite à ces deux expériences, nous discuterons des types de fond pour lesquels les performances du CA-CFAR varient par rapport aux performances obtenues sur fond homogène.

2.5.1 Influence du biais

Afin d'observer l'influence du biais, nous avons généré une région de référence ω_n homogène composée de 8 pixels (cf. figure FIG. 2.6); la valeur du fond dans la région de référence est noté m_{ω_n} . Soit m_n la valeur du fond au pixel test, on introduit alors le paramètre b tel que $m_{\omega_n} \triangleq m_n \cdot (1 + b)$ ($b \in]-1; 1[$).

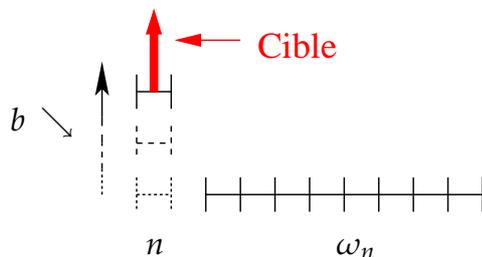


FIG. 2.6 – Représentation schématique du fond envisagé pour étudier l'influence du biais.

Les figures FIG. 2.7 et FIG. 2.8 présentent l'évolution de la \mathcal{P}_d et de la \mathcal{P}_{fa} du CA-CFAR pour différentes valeurs de b et de L . À chaque figure, on retrouve les performances calculées avec les expressions exactes (CA-CFAR exa.), avec les expressions approchées (CA-CFAR approx.) et les performances estimées par simulation numérique (CA-CFAR simul. num.). On remarque que les courbes obtenues avec les différentes expressions se superposent. Sur cet exemple la validité de l'approximation utilisée est vérifiée. De plus, on peut observer l'influence forte de la valeur de b sur les performances de détection, ainsi que sur la régulation du taux de fausse alarme. On peut en conclure que la présence de biais sur l'estimation de la valeur du fond ne permet pas de réguler correctement le taux de fausse alarme pour la technique CA-CFAR.

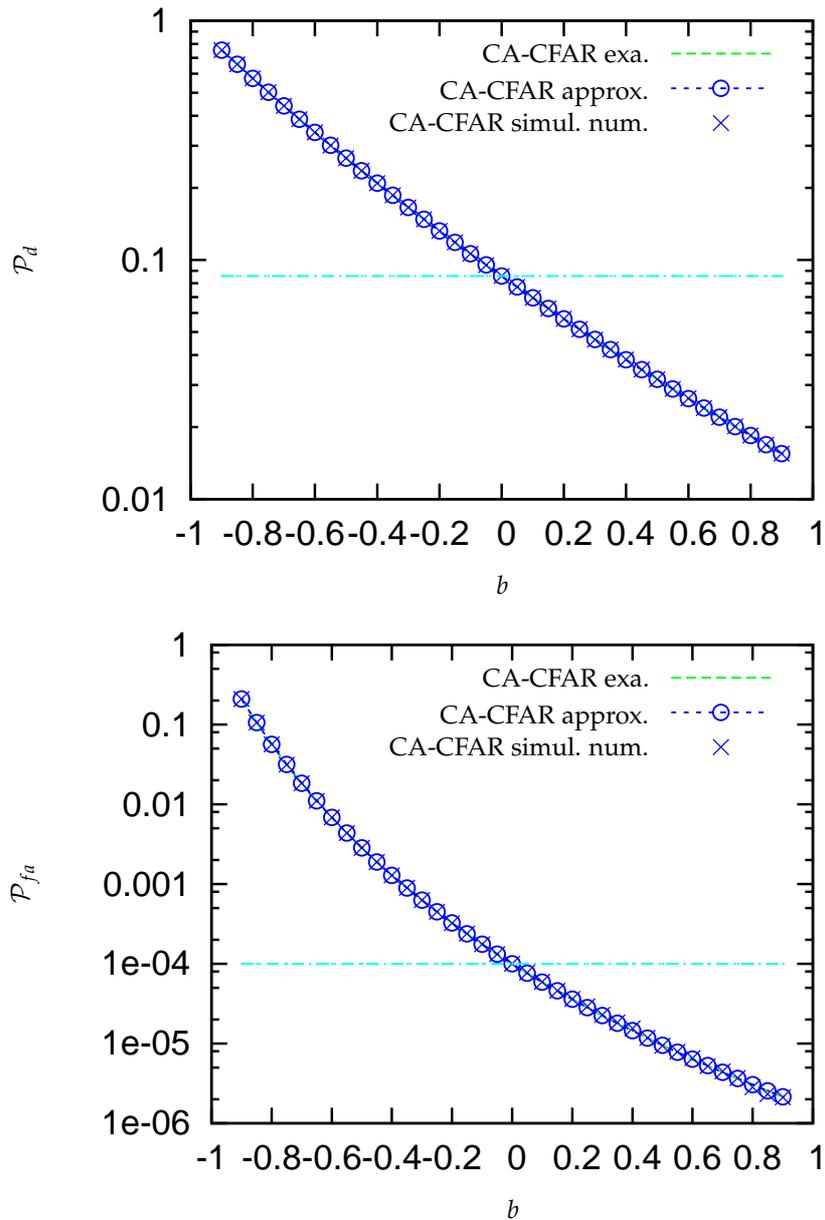


FIG. 2.7 – Évolution de la \mathcal{P}_d et de la \mathcal{P}_{fa} du CA-CFAR en fonction du paramètre b , les trois courbes correspondent aux résultats obtenus par le calcul exact (CA-CFAR exa.), par le calcul approché (CA-CFAR approx.) ou par simulation numérique (CA-CFAR simul. num.), pour un bruit gamma d'ordre $L = 1$. Les lignes horizontales indiquent les valeurs attendues sur un fond homogène tel que $m_{\omega_n} = m_n$.

2.5.2 Influence de la variance d'estimation

Dans cette expérience, nous choisissons une région de référence ω_n divisée en deux sous-régions homogènes de 4 pixels (cf. figure FIG. 2.9). La valeur du fond dans la première (resp. deuxième) sous-région est notée m_{f1} (resp. m_{f2}) avec $m_{f1} \triangleq m_n \cdot (1 + b)$ (resp. $m_{f2} \triangleq m_n \cdot (1 - b)$). La région de référence ainsi créée permet d'assurer que la valeur du fond estimée par la technique CA-CFAR n'est pas biaisée.

Les figures FIG.2.10 et FIG.2.11 illustrent l'évolution de la \mathcal{P}_{fa} et de la \mathcal{P}_d

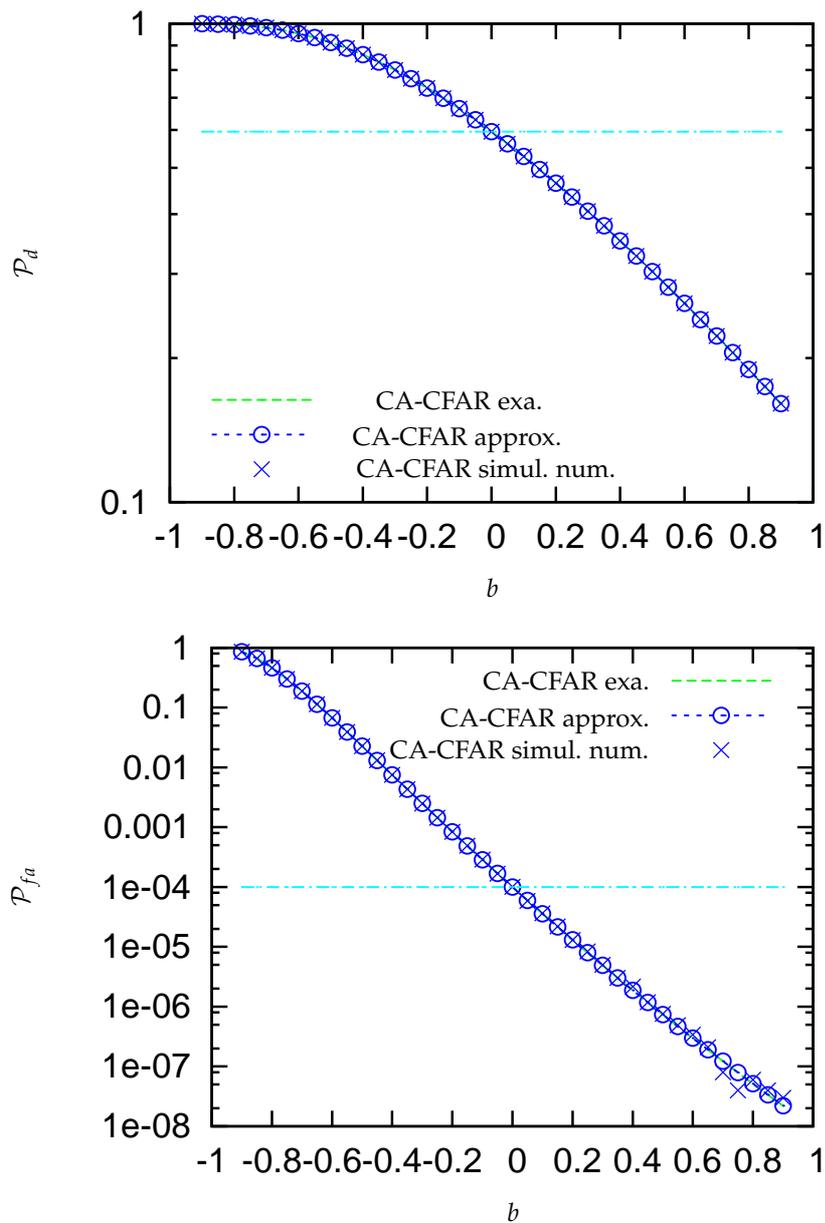


FIG. 2.8 – Évolution de la \mathcal{P}_d et de la \mathcal{P}_{fa} en fonction du paramètre b , les trois courbes correspondent aux résultats obtenus par le calcul exact (CA-CFAR exa.), par le calcul approché (CA-CFAR approx.) ou par simulation numérique (CA-CFAR simul. num.), pour un bruit gamma d'ordre $L = 4$. Les lignes horizontales indiquent les valeurs attendues sur un fond homogène tel que $m_{\omega_n} = m_n$.

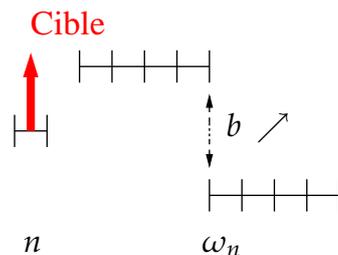


FIG. 2.9 – Représentation schématique du fond envisagé pour étudier l'influence de la variance d'estimation.

de la technique CA-CFAR pour différentes valeurs du paramètre b et de L . Sur chaque figure, on retrouve les performances calculées avec les expressions exactes (CA-CFAR exa.), avec les expressions approchées (CA-CFAR approx.) et les performances estimées (CA-CFAR simul. num.).

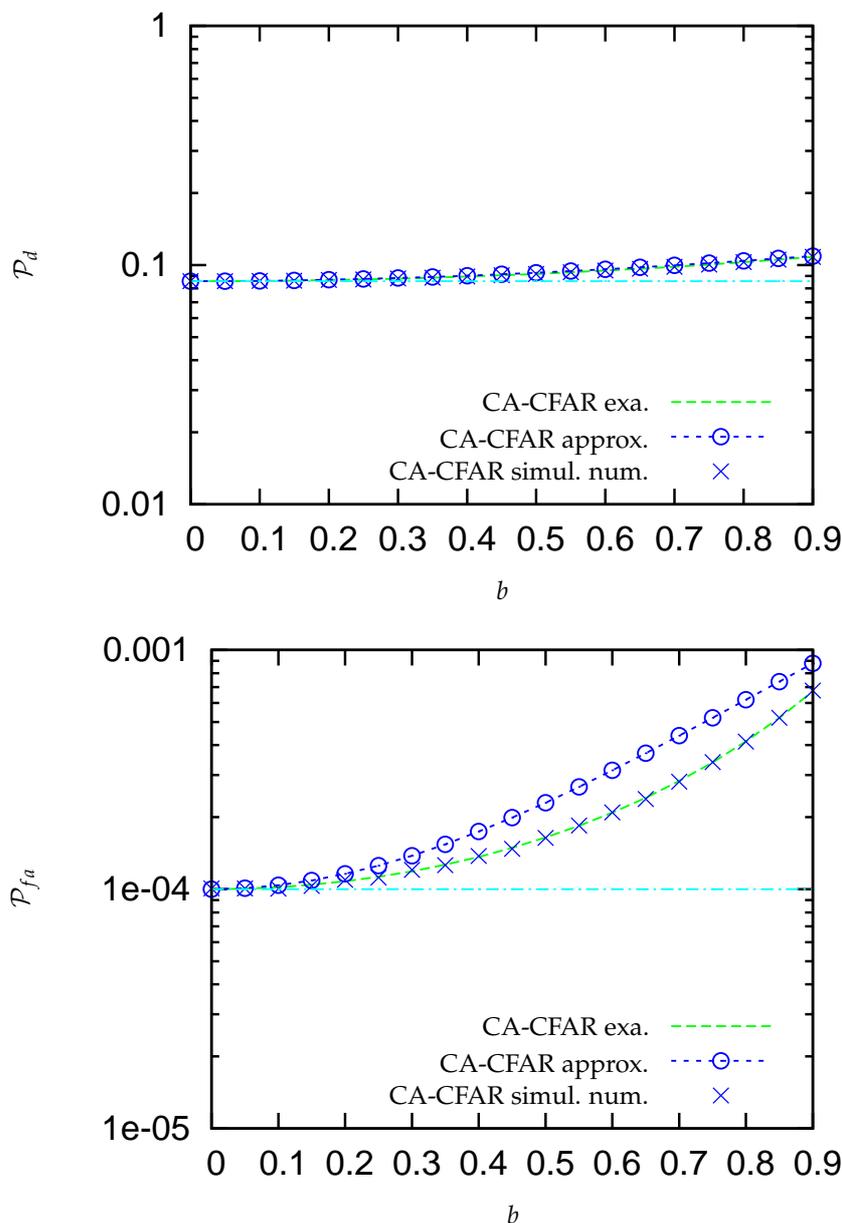


FIG. 2.10 – Évolution de la \mathcal{P}_d et de la \mathcal{P}_{fa} en fonction du paramètre b , les trois courbes correspondent aux résultats obtenus par le calcul exact (CA-CFAR exa.), par le calcul approché (CA-CFAR approx.) ou par simulation numérique (CA-CFAR simul. num.), pour un bruit gamma d'ordre 1. Les lignes horizontales indiquent les valeurs attendues sur un fond homogène tel que $m_{f1} = m_{f2} = m_n$.

On remarque que la variance d'estimation de la valeur du fond influe peu sur les performances de détection, la \mathcal{P}_d reste inchangée et la \mathcal{P}_{fa} varie faiblement. L'approximation proposée donne des résultats très proches des résultats obtenus par l'expérience ou par le calcul exact. On observe néanmoins une légère différence sur la valeur de la \mathcal{P}_{fa} entre le calcul exact et le

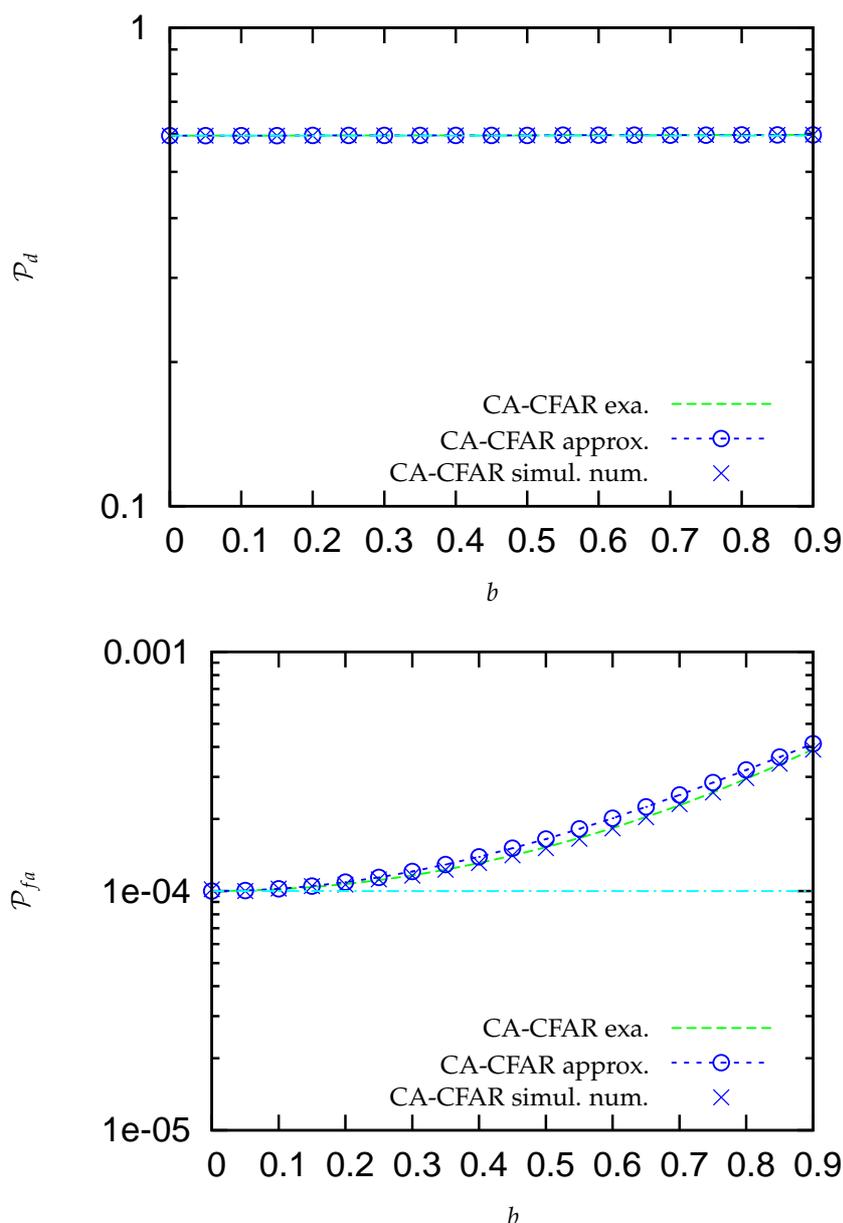


FIG. 2.11 – Évolution de la \mathcal{P}_d et de la \mathcal{P}_{fa} en fonction du paramètre b , les trois courbes correspondent aux résultats obtenus par le calcul exact (CA-CFAR exa.), par le calcul approché (CA-CFAR approx.) ou par simulation numérique (CA-CFAR simul. num.), pour un bruit gamma d'ordre 4. Les lignes horizontales indiquent les valeurs attendues sur un fond homogène tel que $m_{f1} = m_{f2} = m_n$.

calcul approché pour les valeurs de b élevées. Cette différence est d'autant plus grande que l'ordre du bruit gamma L est faible, l'approximation choisie est probablement moins bien vérifiée dans ce cas. Cependant l'évolution des performances approchées en fonction de b est en accord avec l'évolution des performances exactes et sur ces exemples il apparaît que les performances approchées majorent les performances exactes.

Sur ces deux expériences, nous avons pu vérifier la validité de l'approximation proposée. Les calculs exacts permettent d'obtenir des résultats iden-

tiques aux performances estimées, on peut en conclure que le calcul numérique des performances exactes est réalisé correctement pour ces exemples.

De plus, nous avons remarqué que le biais est le facteur principal qui empêche de contrôler le taux de fausse alarme pour la technique CA-CFAR dont le test de détection est basé sur la statistique X_n/Z_n .

2.5.3 Discussion

Grâce aux expressions des performances approchées, nous pouvons avoir une interprétation plus simple des facteurs qui nuisent aux performances du CA-CFAR sur des fonds inhomogènes. Nous avons pu mettre en évidence que le biais et la variance d'estimation de la valeur du fond au pixel test sont les principaux facteurs qui influent sur les performances du CA-CFAR. En effet, nous avons vu que les expressions approchées (pour lesquelles seulement le biais et la variance d'estimation de la valeur du fond au pixel test sont pris en compte) permettent de décrire relativement précisément les performances du détecteur CA-CFAR sur des fonds inhomogènes.

Étudions maintenant quels sont les types de fond qui sont les plus susceptibles de perturber le détecteur CA-CFAR.

Le cas du fond homogène est trivial, le détecteur CA-CFAR est optimal. Le taux de fausse alarme est parfaitement respecté et la probabilité de détection est maximale (pour une taille de région de référence fixée).

Considérons le cas d'un fond linéaire (cf. figure FIG. 2.12). Pour des rai-

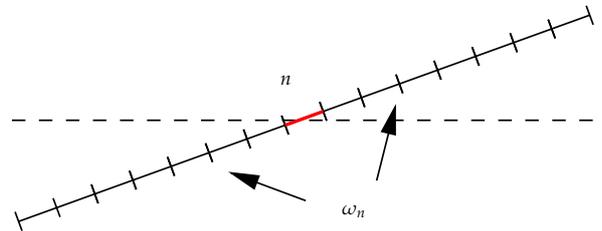


FIG. 2.12 – Exemple d'un fond linéaire

sons de simplicité, nous supposons, pour cet exemple, que le fond est à une dimension et que la coordonnée i_p du pixel $p \in \omega_n$ évolue entre 1 et N_n . La valeur du fond est alors décrit par une fonction linéaire :

$$m_p = a i_p + b > 0, \quad (2.35)$$

avec a et b les coefficients de cette forme linéaire. On peut alors calculer la valeur des coefficients B et N_{eq} .

Après des calculs simples, l'espérance mathématique de Z_n s'écrit :

$$E[Z_n] = a \frac{N_n + 1}{2} + b > 0. \quad (2.36)$$

Or si l'on suppose que le pixel test n est centré par rapport à la région de référence et que N_n est un nombre pair (cas fréquent en pratique), la valeur du fond au pixel test est exactement égale à $E[Z_n]$ et le paramètre de biais

B est alors nul. Intéressons nous maintenant au paramètre N_{eq} . Après des calculs fastidieux mais simples, le paramètre N_{eq} s'exprime par :

$$N_{eq} = N_n \frac{\left[\frac{a}{2}(N_n + 1) + b\right]^2}{\frac{a^2}{6}(N_n + 1)(2N_n + 1) + \frac{ab}{2}(N_n + 1) + b^2}. \quad (2.37)$$

On vérifie que pour un fond homogène $a = 0$, on obtient $N_{eq} = N_n$. Si on augmente maintenant la pente de la droite pour rendre le fond plus inhomogène, la pente est maximale quand b tend vers 0 (cf. figure FIG. 2.13) car les valeurs du fond doivent être positives.

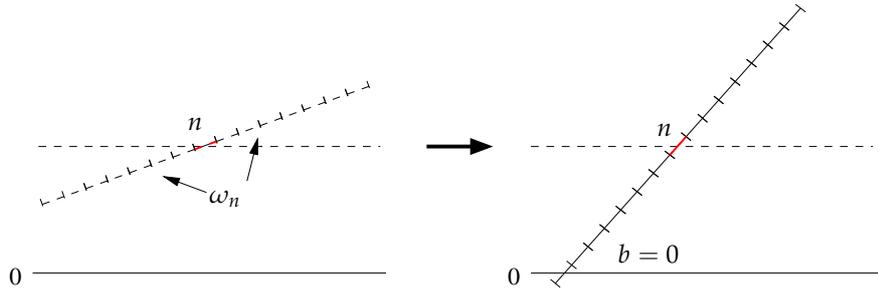


FIG. 2.13 – Le pire cas pour un fond linéaire correspond au cas $b = 0$. Dans ce cas, la pente du fond est maximale et le fond est le plus inhomogène possible.

Alors, la valeur de N_{eq} est égale à :

$$N_{eq}(b = 0) = \frac{3}{2} N_n \frac{N_n + 1}{2N_n + 1} \simeq \frac{3}{4} N_n. \quad (2.38)$$

La paramètre N_{eq} chute donc au maximum approximativement de 1/4 de sa valeur sur un fond linéaire par rapport au cas d'un fond homogène. Cette baisse de N_{eq} est due à une plus grande variance pour l'estimateur Z_n et la conséquence est une baisse de la probabilité de détection. Cette baisse sera d'autant plus forte que le nombre de pixels dans la région de référence N_n est faible ($N_n \simeq 10$, cf. figure FIG. 2.3). Pour des régions de référence suffisamment grandes ($N_n \geq 100$), la baisse de la probabilité de détection peut être considérée comme négligeable (cf. figure FIG. 2.3).

Ce qu'il est important de noter sur cet exemple, c'est que le biais sur l'estimation de la valeur du fond réalisée par la moyenne arithmétique sur un fond linéaire est nul (pour une région de référence symétrique). Le biais étant le facteur essentiel qui affecte les performances du CA-CFAR, on en déduit que les performances du CA-CFAR sont très peu modifiées dans notre cas par rapport au fond homogène. La seule différence qui peut apparaître est due à une augmentation de la variance d'estimation de la moyenne arithmétique Z_n sur un fond linéaire, qui se traduit par une diminution de N_{eq} . Ce résultat obtenu pour un fond linéaire à une dimension dont le pixel test est centré par rapport à une région de référence de taille N_n paire peut être généralisé dans le cas à deux dimensions.

Nous avons donc vu que dans le cas précédemment présenté, les performances du CA-CFAR ne sont pas fortement dégradées sur un fond linéaire et donc que ce type de fond ne nuit pas gravement à la maîtrise du taux de fausse alarme pour le CA-CFAR.

Prenons maintenant le cas d'un fond 1-D qui évoluerait comme une fonction quadratique (cf. figure FIG. 2.14) :

$$m_p = \gamma (i_p - i_n)^2 + \beta, \quad (2.39)$$

avec γ et β les paramètres de la forme quadratique. Avec le modèle choisi,

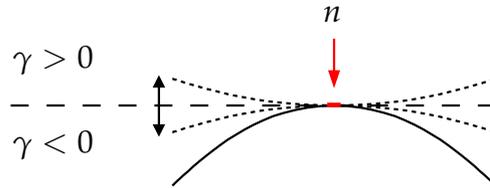


FIG. 2.14 – Exemple d'un fond quadratique

on remarque que la valeur du fond au pixel test m_n est égale à β . Le calcul de l'espérance mathématique de Z_n , nous permet d'obtenir :

$$E[Z_n] = \frac{\gamma}{N_n} \sum_{p \in \omega_n} (i_p - i_n)^2 + \beta. \quad (2.40)$$

On remarque alors que si le paramètre γ est différent de zéro, l'estimation de la valeur du fond au pixel test réalisée avec la moyenne arithmétique est biaisée. À partir de l'expression de $E[Z_n]$, on constate que la valeur du biais est proportionnelle au paramètre γ . La figure FIG. 2.15 présente l'évolution des paramètres B et N_{eq} pour un fond quadratique en fonction du paramètre γ ($\beta = 100$). On rappelle que B rend compte du biais d'estimation sur la valeur du fond et que N_{eq} est lié à la variance d'estimation de la valeur du fond. La taille de la région de référence est fixée à $N_n = 10$ pixels.

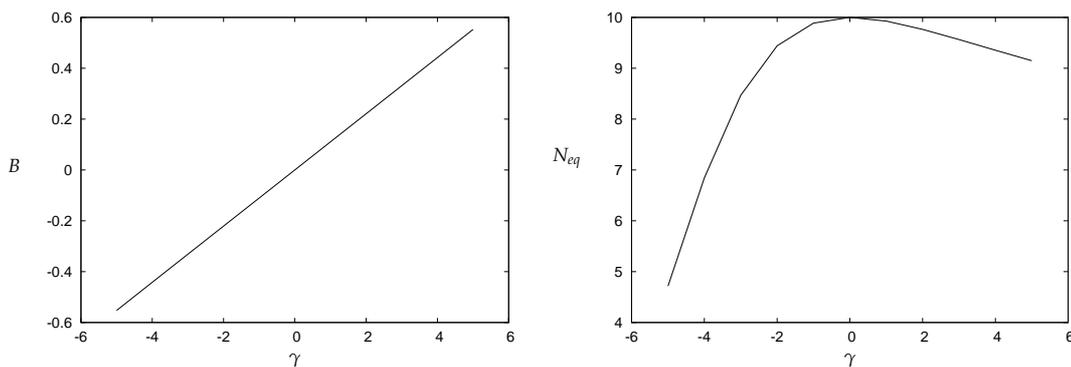


FIG. 2.15 – Pour un fond quadratique, évolution des paramètres B (à gauche) et N_{eq} (à droite) en fonction de γ .

La présence de biais ($B \neq 0$) entraîne une forte fluctuation des performances du CA-CFAR et le taux de fausse alarme est mal régulé. La figure FIG. 2.16 permet d'observer la variation de la probabilité de détection et de la probabilité de fausse alarme du CA-CFAR en fonction du paramètre γ . Les valeurs de la \mathcal{P}_d et de la \mathcal{P}_{fa} ont été obtenues grâce aux expressions approchées des performances du CA-CFAR. Le seuil de détection est choisi pour une probabilité de fausse alarme $\alpha = 10^{-4}$ sur fond homogène. Afin de calculer la \mathcal{P}_d , nous envisageons des cibles fluctuantes de RSB égal à 7 dB.

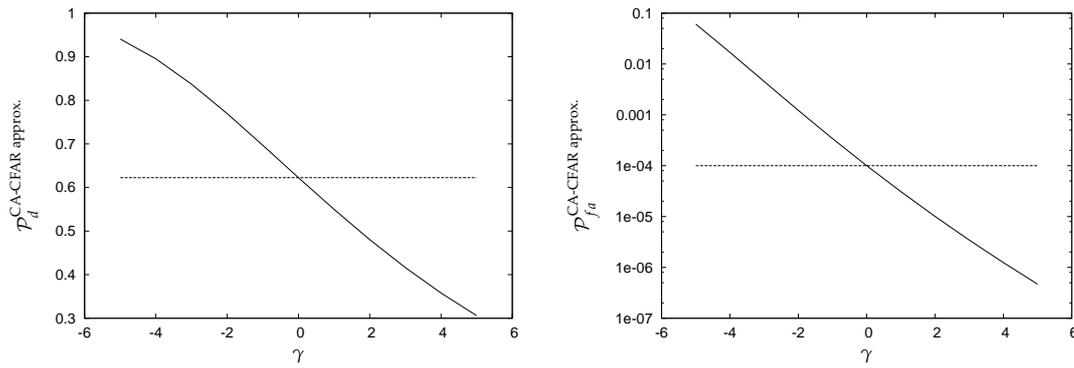


FIG. 2.16 – Pour un fond quadratique, évolution de la \mathcal{P}_d (à gauche) et de la \mathcal{P}_{fa} (à droite) du CA-CFAR en fonction de γ . Les traits en pointillé indiquent les valeurs de la \mathcal{P}_d et de la \mathcal{P}_{fa} pour un fond homogène. Le seuil de détection est choisi pour une probabilité de fausse alarme $\alpha = 10^{-4}$. On considère des cibles fluctuantes de RSB égal à 7 dB et un bruit gamma d'ordre 4.

On déduit des résultats précédents que les performances du CA-CFAR sont modifiées par rapport au cas d'un fond homogène quand la valeur du fond évolue selon une fonction quadratique et que le pixel test est centré par rapport à une région de référence de taille paire.

Nous avons vu pour un fond quadratique que les performances du CA-CFAR étaient modifiées par rapport au cas d'un fond homogène. Cette variation des performances est liée à la variation des paramètres B et N_{eq} . Nous souhaitons maintenant proposer une interprétation de l'influence des paramètres B et N_{eq} sur les performances de détection à l'aide d'une courbe COR.

Une courbe COR est une représentation de la probabilité de détection en fonction de la probabilité de fausse alarme. La courbe obtenue est paramétrée par le seuil de détection. Plus la valeur du seuil de détection est élevée et plus les valeurs de la \mathcal{P}_d et de la \mathcal{P}_{fa} sont faibles. Au contraire, plus la valeur du seuil de détection est faible et plus les valeurs de la \mathcal{P}_d et de la \mathcal{P}_{fa} sont élevées. Cette courbe fournit une bonne indication de la performance d'un détecteur et du compromis qui doit être réalisé entre une capacité de détection élevée et un taux de fausse alarme important.

La figure FIG. 2.17 présente les courbes COR du détecteur CA-CFAR calculées pour différentes tailles de régions de référence. Un bruit gamma d'ordre 4 et des cibles fluctuantes de RSB égal à 7 dB sont considérés. On remarque que plus le nombre de pixels N_n dans la région de référence est grand, plus le CA-CFAR se rapproche du détecteur parfait (coin supérieur gauche de la courbe COR).

Maintenant à l'aide des expressions approchées des performances du détecteur CA-CFAR sur des fonds inhomogènes, on s'aperçoit que lorsque le paramètre B est non nul, tout se passe comme si on avait multiplié le seuil de détection par $1 + B$. On en déduit donc qu'une estimation biaisée de la valeur du fond au pixel test conduit à un déplacement sur la courbe COR. Au contraire, une variation du paramètre N_{eq} a pour conséquence un changement de courbe COR (déplacement vertical). Il est donc possible à partir des expressions approchées des performances du détecteur CA-CFAR (équations

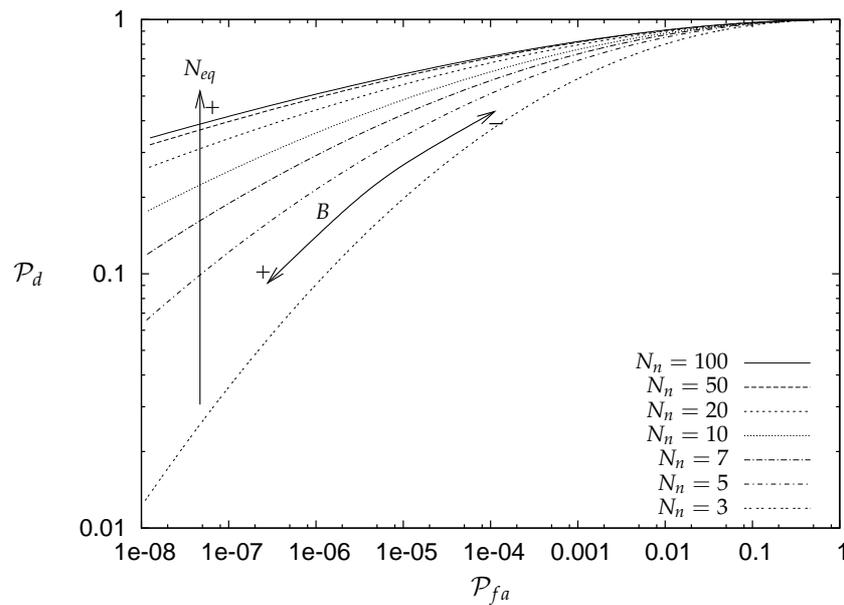


FIG. 2.17 – Courbes COR du CA-CFAR calculées pour différentes tailles de la région de référence ($L = 4$, cibles fluctuantes de RSB égal à 7 dB). Les flèches indiquent le sens de variation des performances de détection pour un fond qui n'est pas homogène $B \neq 0$ et $N_{eq} < N_n$.

2.31 et 2.32) de mieux comprendre l'influence des paramètres B et N_{eq} sur les performances du CA-CFAR.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord présenté les performances du détecteur idéal et les performances du détecteur CA-CFAR pour un fond homogène. Nous avons ensuite étudié les performances du détecteur CA-CFAR sur des fonds inhomogènes. Nous avons analysé les performances exactes du détecteur CA-CFAR dans le cas d'un fond inhomogène perturbé par un bruit gamma. Les expressions de ces performances étant difficilement interprétables, nous avons proposé d'étudier une approximation des performances exactes. Afin d'établir cette approximation, nous nous sommes intéressé aux propriétés de l'estimateur de la valeur du fond utilisé par la technique CA-CFAR : la moyenne arithmétique. Nous avons montré que la ddp de la moyenne arithmétique pour un fond quelconque peut être décrite de manière approchée par une expression simple qui ne fait intervenir que la valeur moyenne et l'écart quadratique du fond dans la région de référence. Partant de ce constat, nous avons proposé des performances approchées du détecteur CA-CFAR pour un fond inhomogène. La validité de ces performances approchées a été montrée à l'aide de simulations numériques. L'intérêt de ces performances approchées est de permettre une identification des facteurs qui nuisent à la détection TFAC pour le CA-CFAR. Nous avons vu que le biais sur l'estimation de la valeur du fond se révèle être le facteur le plus influent. Si nous souhaitons obtenir une détection TFAC sur des fonds inhomogènes, il sera donc important de maîtriser le biais sur l'estimation de

la valeur du fond. Cependant les performances approchées apportent également d'autres conclusions intéressantes. Les performances du CA-CFAR (et donc le contrôle du taux de fausse alarme) peuvent être obtenues de manière approchée en supposant que la moyenne arithmétique peut être modélisée par une v.a. gamma dont les deux premiers moments dépendent de paramètres statistiques de la valeur du fond (moyenne et rugosité). Enfin, une discussion à partir des performances approchées a permis de mieux comprendre sur quels types de fond les performances de la technique CA-CFAR sont particulièrement altérées.

SÉLECTION DE RÉGION DE RÉFÉRENCE

3

SOMMAIRE

3.1	SÉLECTION DE RÉGION DE RÉFÉRENCE	58
3.1.1	Estimation du fond	59
3.1.2	Détermination d'un ensemble de régions de référence	60
3.1.3	Contrôle du taux de fausse alarme	61
3.1.4	Analyse de l'évolution de la \mathcal{P}_d	64
3.1.5	Choix de la région de référence	66
3.2	EXEMPLES DE RÉSULTATS SUR FOND SYNTHÉTIQUE	69
3.3	EXEMPLES DE RÉSULTATS À FOND CONNU	72
	CONCLUSION	74

DANS ce chapitre, nous présenterons une nouvelle technique de détection adaptée à des fonds inhomogènes. La solution proposée est dérivée du détecteur CA-CFAR. Elle consiste en une sélection des pixels qui constituent une région de référence pour appliquer ensuite un détecteur basé sur la statistique de décision X_n/Z_n où Z_n est la moyenne arithmétique.

Cette méthode prend ses origines dans les résultats du chapitre précédent. En effet, nous disposons désormais d'un moyen de calcul (exact ou approché) de la densité de probabilité de la moyenne arithmétique Z_n sur un fond quelconque. Il peut être ainsi envisagé, connaissant une estimation préalable de la valeur du fond, d'obtenir une estimation de la ddp de Z_n qui nous permet de calculer un seuil de détection en tenant compte de la présence d'inhomogénéités.

Remarquons ici, que si nous connaissions parfaitement les valeurs du fond nous pourrions calculer un seuil pour toutes régions inhomogènes fixées conduisant à une détection TFAC à partir de la statistique X_n/Z_n . Il suffirait alors de choisir, sous certaines hypothèses, une région de référence conduisant à la performance de détection maximale.

Certes, l'algorithme décrit précédemment n'a guère d'intérêt puisque si nous connaissions le fond vrai nous aurions accès directement au détecteur idéal. Cette remarque nous permet en revanche de conclure que notre algorithme tel qu'il sera précisément défini dans la suite du chapitre, ne sera

pas rigoureusement TFAC. En effet, le fond utilisé n'est qu'une estimation de la valeur du fond moyen réel et la variance d'estimation de l'estimateur de la valeur du fond ne sera pas prise en compte dans la méthode qui va être présentée.

La technique proposée conduira tout de même à une amélioration significative de la régulation du taux de fausse alarme malgré l'utilisation d'une estimation simple de la valeur du fond. En effet, l'estimation préalable de la valeur du fond n'interviendra que dans la définition de la région de référence utilisée ainsi que dans le calcul du seuil de détection. Le calcul de Z_n se faisant toujours sur les données cela conférera au détecteur proposé une certaine robustesse à la méthode d'estimation de la valeur du fond choisie.

Dans la suite de ce chapitre, nous présenterons tout d'abord la méthode utilisée pour estimer la valeur du fond. Nous verrons ensuite comment définir un ensemble de régions de référence et comment contrôler le taux de fausse alarme pour chacune d'elle. Finalement pour un ensemble de régions de référence possibles, nous nous attacherons à choisir la région de référence la plus adaptée à la tâche de détection. Des simulations numériques nous permettront de montrer l'intérêt de la technique proposée, qui se traduit par une meilleure régulation du taux de fausse alarme sur des fonds inhomogènes qu'avec la technique CA-CFAR tout en assurant une probabilité de détection élevée.

3.1 SÉLECTION DE RÉGION DE RÉFÉRENCE

L'optimisation de la forme de la région de référence utilisée par le CA-CFAR sur un fond inhomogène a déjà été envisagée. C'est par exemple le cas des approches fondées sur une segmentation préalable de l'image en régions homogènes [77, 78, 83]. Grâce à cette segmentation on est alors capable de déterminer des régions correspondant approximativement au modèle de fond homogène associé au CA-CFAR. Ceci permet d'obtenir une meilleure régulation du taux de fausse alarme sur des fonds inhomogènes que celle obtenue avec des régions de référence de forme déterminée *a priori*. Cependant, les méthodes proposées jusqu'alors nécessitent une intervention de l'utilisateur pour obtenir des résultats de segmentation corrects. Il est possible de réaliser une segmentation sans paramètre à régler par l'utilisateur [39]. Ce type de technique permet une amélioration des performances du CA-CFAR sur des fonds constitués d'un patchwork de régions homogènes (typiquement des images SAR). Malheureusement, les cartes distance/vitesse ne correspondent pas en général à des patchworks de régions homogènes.

D'autres méthodes consistent à déterminer les différentes zones de fouillis dans les cartes distance/vitesse (grâce à des informations *a priori*) afin d'adapter la forme de la région de référence à la zone de fouillis testée. Le but étant de prendre des fenêtres dont la forme est carrée sur les zones homogènes et de forme rectangulaire sur les zones inhomogènes (l'orientation de la fenêtre est choisie en fonction de la direction pour laquelle la zone est la moins inhomogène). C'est le cas par exemple des méthodes « Regional CA-CFAR » ou « Regional TM-CFAR » [18]. Cependant ces méthodes nécessitent la connais-

sance d'informations *a priori* (altitude du porteur, vitesse, ...) dont nous ne disposons pas.

Hors du cadre de la détection, une méthode de voisinage adaptatif a été proposée pour résoudre des problèmes d'estimation de paramètres polarimétriques et/ou interférométriques dans des images SAR [126, 127]. L'estimation des paramètres est réalisée à partir d'un voisinage choisi de manière adaptative. Elle consiste, à partir d'une estimation initiale des paramètres à la position testée (que l'on appelle graine), à agréger des pixels connexes qui vérifient une condition donnée. L'estimation des paramètres est recalculée sur le voisinage ainsi déterminé, puis on recommence l'opération d'agrégation de pixels. Finalement, l'estimation des paramètres obtenue en utilisant des voisinages adaptatifs est plus précise que les méthodes d'estimation fondées sur un voisinage fixe. Notons que la méthode de filtrage adaptatif a été originalement développée pour des applications médicales [46], puis utilisée pour restaurer des images en niveaux de gris [89, 93] ou des images couleurs [23]. Cette méthode a également été étendue pour le filtrage d'images à trois dimensions [22].

La méthode que nous présenterons est relativement proche des méthodes de voisinage adaptatif. Elle nécessitera une estimation de la valeur du fond et réalisera une sélection des pixels qui constitueront la région de référence utilisée. Pour présenter la méthode que nous avons développée, nous introduirons tout d'abord la méthode d'estimation de la valeur du fond, puis la manière dont est déterminé un ensemble de régions de référence candidates. Nous décrirons ensuite une technique qui permet de sélectionner une région de référence parmi cet ensemble de régions de référence.

3.1.1 Estimation du fond

Afin d'estimer la valeur du fond, nous avons souhaité mettre en œuvre une technique simple et rapide qui est fondée sur un filtrage des données. Les données étant corrompues par un bruit multiplicatif, nous opérerons ce filtrage sur le logarithme des données $\log(X)$ afin d'effectuer l'opération de filtrage sur un bruit additif.

Nous avons choisi de filtrer le logarithme des données avec un noyau gaussien à deux dimensions de largeur σ ($\sigma = 1.6$) dont la valeur au pixel test est nulle et dont l'intégrale vaut 1. La valeur du pixel central de ce filtre est fixée à zéro afin que la valeur du pixel test ne soit pas prise en compte lors de l'estimation de la valeur du fond. En effet, la valeur du pixel test est potentiellement forte dans le cas de la présence d'une cible ce qui pourrait nuire à l'estimation de la valeur du fond, car la valeur de cette estimation serait fortement modifiée par la valeur du pixel test (noyau gaussien).

L'estimation du logarithme de la valeur du fond ainsi obtenue, et que nous noterons $\hat{\mu}_p$, permet d'obtenir une estimation non biaisée de la valeur du fond \hat{m}_p grâce à l'expression suivante :

$$\forall p, \hat{m}_p = L \exp [\hat{\mu}_p - \psi(L)] . \quad (3.1)$$

où ψ est la fonction Digamma. Le caractère non biaisé de cet estimateur est présenté dans l'annexe A.3.

3.1.2 Détermination d'un ensemble de régions de référence

La détermination d'une région de référence est fondée sur une méthode d'agrégation des pixels voisins au pixel test. Les pixels sont agrégés en fonction de la valeur du fond estimé qui leur est associée. On sélectionne les pixels dont la valeur estimée du fond est proche de la valeur du fond au pixel test. Ce choix s'explique par l'optimalité du détecteur CA-CFAR sur des fonds homogènes.

Afin que le processus d'agrégation de pixels soit rapide, la détermination d'une région de référence ne sera dépendante que d'un seul paramètre. En effet, une optimisation 2-D pour déterminer la meilleure région de référence parmi l'ensemble des régions candidates serait trop coûteuse en temps de calcul.

La technique d'agrégation mise en œuvre est réalisée dans un ensemble réduit Ω_n de pixels proches du pixel n testé. Cet ensemble Ω_n sera typiquement un carré de 15×15 pixels centré sur la position testée. Ce voisinage Ω_n permet de conserver un caractère local et permet de ne pas augmenter inutilement la charge de calcul. Une région de référence $\omega_n(R)$ est un ensemble de connexité huit compris dans la région Ω_n et dont la valeur estimée \hat{m}_p du fond en chaque pixel de $\omega_n(R)$ est telle que :

$$\forall p \in \omega_n(R), \hat{m}_n(1 - R) < \hat{m}_p < \hat{m}_n(1 + R). \quad (3.2)$$

Le paramètre $R \in [0; 1[$ permet ainsi de contrôler l'inhomogénéité de $\omega_n(R)$. Lorsque $R \rightarrow 0$ la région de référence tend vers une région homogène. Le paramètre R variera entre deux valeurs R_{min} et R_{max} , ce qui permet de définir un ensemble de régions de référence candidates qui ne dépendent que d'un paramètre scalaire R .

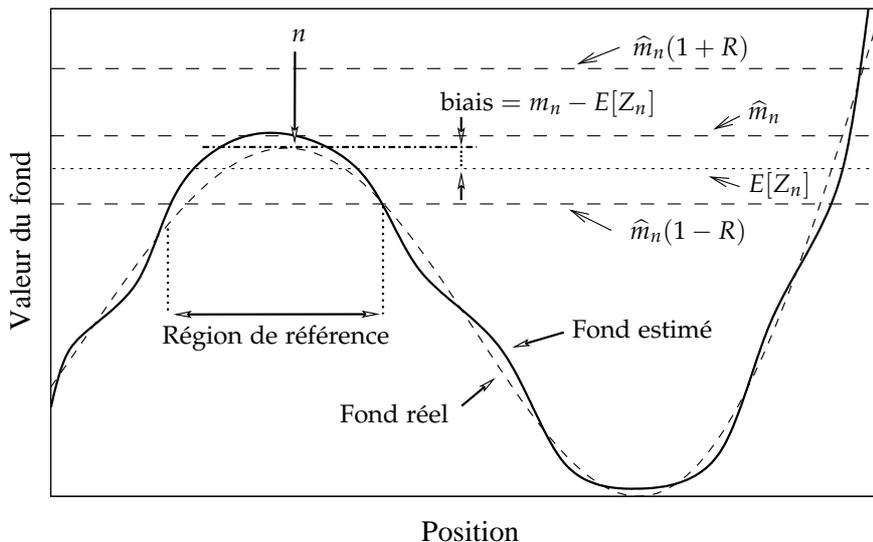


FIG. 3.1 – Illustration 1-D de la détermination d'une région de référence. Sur cette illustration, $E[Z_n]$ représente l'espérance mathématique de Z_n calculée pour la région de référence déterminée et m_n la valeur du fond au pixel test n .

La figure FIG.3.1 présente une illustration de la technique de sélection de région proposée. On peut voir les pixels choisis dans la région de référence

en fonction de la valeur du fond estimée pour une valeur du paramètre R donnée. Cette illustration montre un exemple pour lequel l'estimation Z_n de la valeur du fond au pixel test est biaisée.

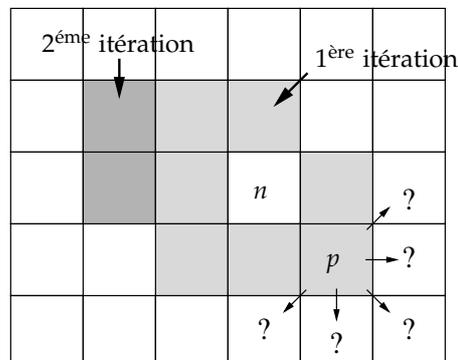


FIG. 3.2 – Illustration de la sélection des pixels constituant la région de référence. À partir du pixel test n , on sélectionne les pixels voisins dont la valeur du fond vérifie l'équation 3.2 (1^{ère} itération). Puis le processus est itéré à partir des pixels sélectionnés à l'étape précédente. Ainsi pour le pixel p , on teste si les cinq pixels voisins de p non testés doivent être inclus dans la région de référence.

La manière dont les pixels de la région de référence sont sélectionnés est mise en œuvre de la façon suivante (cf. FIG. 3.2). En partant du pixel test n (la graine), nous sélectionnons les pixels voisins de n en connexité 8 dont la valeur estimée du fond respecte la condition donnée par l'équation 3.2. Nous itérons ensuite le processus à partir des pixels qui ont été choisis à l'étape précédente. La sélection de la région de référence est finalisée quand lors d'une itération plus aucun pixel ne peut être ajouté à la région de référence.

Une fois l'ensemble de régions de référence candidates déterminé, la détermination de la région la plus adaptée ne dépend plus que de la valeur du paramètre R . Celle-ci va être déterminée en essayant de contrôler au mieux le taux de fausse alarme.

3.1.3 Contrôle du taux de fausse alarme

Si une fois la région de référence sélectionnée on souhaite utiliser le détecteur CA-CFAR, on va être amené à calculer la moyenne arithmétique Z_n (estimation de la valeur du fond au pixel test) à partir de cette région de référence. Grâce à l'illustration de la figure FIG. 3.1, on peut remarquer que la sélection d'une région de référence à l'aide de la méthode considérée ne permet pas d'assurer que Z_n ne soit pas biaisé. Ceci peut conduire à un mauvais contrôle du taux de fausse alarme comme nous l'avons vu au chapitre 2.

Les expressions des performances du détecteur CA-CFAR obtenues précédemment pour un fond inhomogène (équation 2.22) permettent de concevoir un nouveau détecteur dérivé du CA-CFAR et dont les performances seront améliorées sur fond inhomogène. Grâce à ces expressions il est possible de calculer un seuil de détection pour que la statistique de décision X_n/Z_n du CA-CFAR constitue une détection TFAC pour une région de référence inhomogène. Bien sûr cela est possible en supposant que le fond est connu, ce qui n'est pas le cas dans la pratique.

On peut envisager deux possibilités pour déterminer le seuil de détection.

- La première consiste à remplacer la valeur du fond par son estimation \hat{m}_n .
- La seconde consiste à utiliser l'estimation de la valeur du fond \hat{m}_n pour estimer le niveau moyen et la rugosité du fond. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, ces deux caractéristiques « géométriques » du fond permettent de remonter au biais et à la variance de Z_n . En considérant l'estimation de la valeur du fond \hat{m}_n nous pouvons alors déterminer une estimation du biais et de la variance de Z_n et déterminer ainsi un seuil de détection grâce aux expressions approchées (équation 2.31 et équation 2.32).

Comme nous le verrons par la suite, la seconde approche permet d'aboutir à des temps de calculs réduits tout en conduisant à des performances similaires à celles de la première solution.

Nous proposons de montrer grâce à une expérience numérique comment la détermination du seuil de détection à partir de la valeur estimée du fond en utilisant les expressions exactes du CA-CFAR permet d'améliorer la régulation du taux de fausse alarme en comparaison du cas où le calcul du seuil de détection est réalisé en supposant le fond homogène.

Pour cette expérience, nous considérons une région de référence de forme linéaire (cf. figure FIG. 3.3) et composée de deux régions, une région connexe de 4 pixels dont la valeur du fond est égale à m_n et une région connexe de 4 pixels dont la valeur du fond est égale à $m_n(1+b)$, avec m_n la valeur du fond au pixel test (cf. figure FIG. 3.4). Le paramètre b permet de faire varier l'inhomogénéité de la région de référence.

Les deux zones homogènes de niveau m_n et $m_n(1+b)$ sont ensuite perturbées par un bruit gamma d'ordre $L = 4$.

Pour différentes valeurs de b , nous représentons la probabilité de fausse alarme obtenue dans deux cas :

- (1) le seuil de détection est calculé en supposant que le fond est homogène (cf. équation 2.13),
- (2) la valeur du fond est tout d'abord estimée grâce à la méthode présentée à la section 3.1.1, puis le seuil de détection est calculé en utilisant les performances exactes (cf. équation 2.24) et en remplaçant la valeur vraie du fond par sa valeur estimée.

La figure FIG. 3.4 présente les résultats obtenus pour une probabilité de fausse alarme souhaitée égale à $\alpha = 10^{-4}$ et un bruit gamma d'ordre $L = 4$. Dans le premier cas, une fois le seuil de détection déterminé, on calcule la probabilité de fausse alarme obtenue pour les différentes valeurs de b grâce aux performances exactes (cf. équation 2.24). La probabilité de fausse alarme obtenue dans le deuxième cas, c'est-à-dire en tenant compte de l'inhomogénéité du fond, est estimée à partir de 1 000 réalisations de bruit pour tenir compte de la nature fluctuante de la valeur du fond estimée. On a ainsi 1 000 valeurs de fonds estimées différentes à partir desquelles on calcule, pour chaque valeur, le seuil de détection à utiliser. On détermine ensuite à partir des expressions des performances exactes (cf. équation 2.24) la probabilité de fausse alarme obtenue avec ce seuil de détection en considérant la vraie

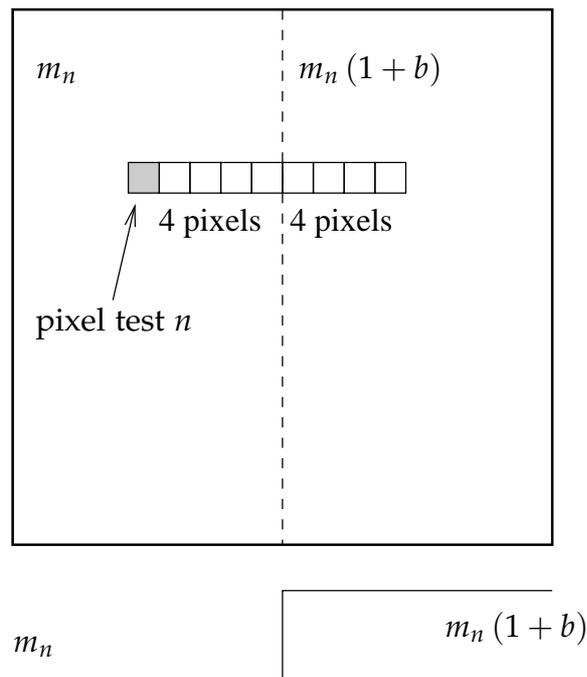


FIG. 3.3 – Illustration de l'expérience pour l'étude du contrôle du taux de fausse alarme. Le fond considéré est composé de deux zones de valeur m_n et $m_n(1 + R)$. Les régions de références sont composées de deux régions constituées de 4 pixels chacune.

valeur du fond. La probabilité de fausse alarme affichée est la moyenne des courbes de probabilité de fausse alarme sur les 1 000 réalisations.

Sur cet exemple, on peut constater que calculer le seuil de détection à partir de la valeur estimée du fond en utilisant les performances exactes du CA-CFAR permet une meilleure régulation du taux de fausse alarme sur des fonds inhomogènes ($b \neq 0$) que lorsque le seuil de détection est calculé avec l'équation 2.13, c'est-à-dire en supposant que la région de référence est homogène.

On constate sur la figure FIG. 3.4 que l'utilisation de la valeur estimée du fond (ici par un simple filtrage, cf. section 3.1.1) permet un meilleur respect du taux de fausse alarme. En particulier, on peut observer une relative insensibilité à l'inhomogénéité (paramètre b). La valeur estimée du fond \hat{m}_p n'est pas rigoureusement égale à la vraie valeur. Ce n'est cependant qu'avec la vraie valeur du fond que l'équation 2.24 conduit à une parfaite maîtrise du taux de fausse alarme. La méthode de détection proposée n'est donc pas rigoureusement à taux de fausse alarme constant. Les performances dépendent évidemment de l'estimateur de la valeur du fond considéré.

Nous nommerons DSR (pour Détecteur associé à la Sélection de Région) le détecteur qui vient d'être décrit et qui consiste à comparer la statistique X_n/Z_n à un seuil de détection calculé grâce aux expressions exactes des performances de détection en remplaçant la valeur du fond supposée connue par la valeur estimée du fond \hat{m}_n décrite dans la section 3.1.1.

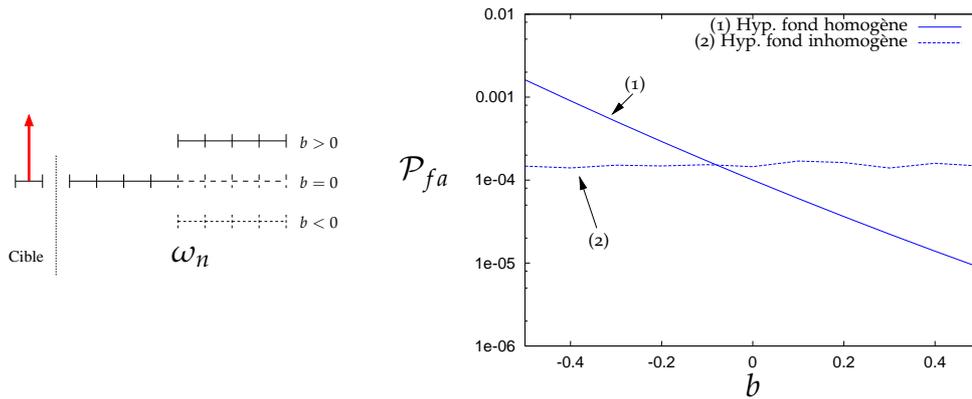


FIG. 3.4 – À gauche, une illustration présentant le type de région de référence considéré lors de cette expérience. À droite, la probabilité de fausse alarme obtenue dans les deux cas en fonction de la valeur du paramètre b .

3.1.4 Analyse de l'évolution de la probabilité de détection

Le détecteur DSR permet d'améliorer la régulation du taux de fausse alarme par rapport au détecteur CA-CFAR classique. Cependant, nous pouvons nous questionner quant à l'influence d'une région de référence inhomogène sur la probabilité de détection. Pour évaluer cette influence, nous proposons l'expérience suivante.

Prenons une région de référence composée de N_n pixels décomposable en deux sous-régions (cf. figure FIG. 3.5) : une sous-région homogène comprenant $7N_n/8$ pixels dont la valeur est égale à m_n (valeur du fond au pixel test) et une sous-région homogène comprenant $N_n/8$ pixels dont la valeur est égale à $m_n b$ (le cas $b = 1$ correspond à une région de référence homogène).

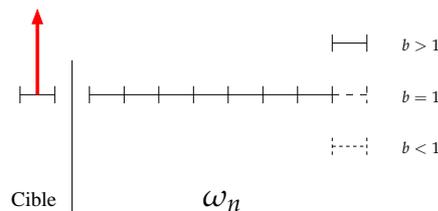


FIG. 3.5 – Illustration présentant le type de région envisagée lors de cette expérience. L'exemple présenté ici correspond à une région de référence composée de $N_n = 8$ pixels. La région de référence est composée de deux régions, l'une constituée de $7N_n/8$ pixels ($N_n = 8$ sur cette illustration) dont la valeur du fond est égale à m_n , la seconde constituée de $N_n/8$ pixels pour laquelle la valeur du fond est égale à $m_n b$.

Pour différentes valeurs de b et donc pour différents fonds inhomogènes, nous calculons la valeur du seuil de détection qui permet d'obtenir une régulation correcte du taux de fausse alarme (le seuil de détection est adapté pour chacune des régions de référence qui seront considérées dans la suite). Pour ce calcul, nous supposons ici que le fond est connu, ensuite nous calculons la probabilité de détection obtenue.

La figure FIG.3.6 présente les résultats obtenus pour plusieurs tailles de région de référence en fixant la probabilité de fausse alarme souhaitée à $\alpha = 10^{-4}$, le RSB des cibles à $S = 7$ dB (modèle de cible fluctuante) et l'ordre du bruit gamma est $L = 4$.

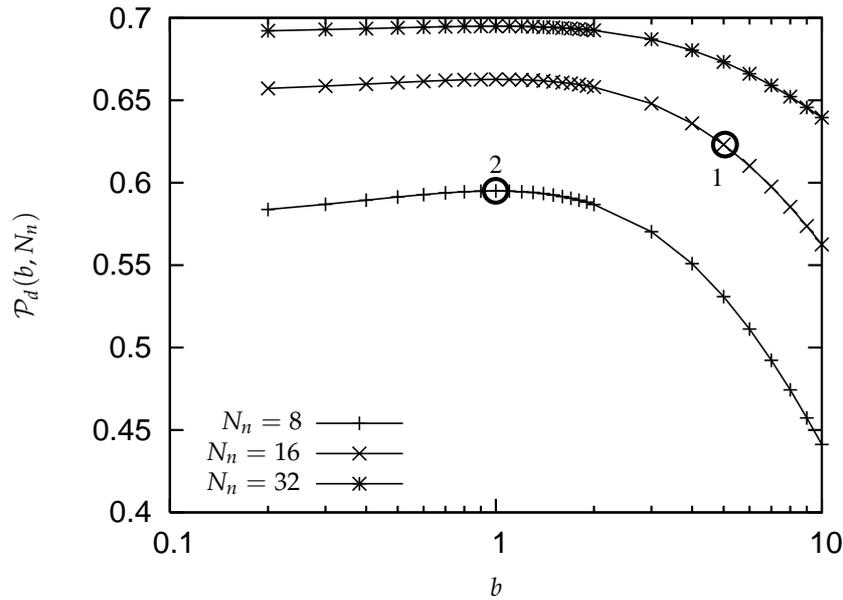


FIG. 3.6 – Évolution de la \mathcal{P}_d en fonction du paramètre b pour différentes tailles de région de référence ($\alpha = 10^{-4}$, $S = 7$ dB, $L = 4$). Lorsque $b = 1$, la région de référence est homogène.

Ces résultats montrent que la probabilité de détection varie en fonction de l'inhomogénéité du fond. Elle est, comme on pouvait s'y attendre, d'autant plus élevée que la région de référence est grande et homogène. La variance d'estimation de la moyenne arithmétique est plus grande sur un fond inhomogène que sur un fond homogène (pour une même valeur de l'espérance mathématique de la moyenne arithmétique $E[Z_n]$). Cette variance d'estimation plus grande conduit à une chute de la probabilité de détection, de la même façon que la probabilité de détection diminue quand le nombre de pixels dans la région de référence baisse. Cette expérience nous permet de remarquer qu'avec une région de référence inhomogène on peut obtenir une probabilité de détection supérieure à celle d'une région homogène, lorsque la taille de la région de référence inhomogène est suffisamment plus grande que celle de la région homogène (cf. FIG. 3.6, avec par exemple les points 1 et 2).

Pour étudier plus particulièrement ce phénomène, il est intéressant d'observer comment la probabilité de détection évolue en fonction de la taille et de l'inhomogénéité de la région de référence. La figure FIG. 3.7 présente le fond 1-D que nous considérons pour cet exemple. Partant de la plus petite région de référence composée du seul pixel $i = 1$, nous faisons grandir la région de référence pixel par pixel. Pour chacune des régions de référence obtenues $\omega_n(j)$, nous calculons la probabilité de détection en supposant que le fond est connu et en adaptant le seuil de détection de manière à ce que la probabilité de fausse alarme soit toujours égale à la probabilité de fausse alarme souhaitée $\alpha = 10^{-4}$.

Sur la figure FIG. 3.7, l'évolution de la probabilité de détection est tracée pour les différentes régions de référence $\omega_n(j)$ considérées. La région de référence $\omega_n(j)$ est donc constituée de l'ensemble des pixels allant de $i = 1$ à

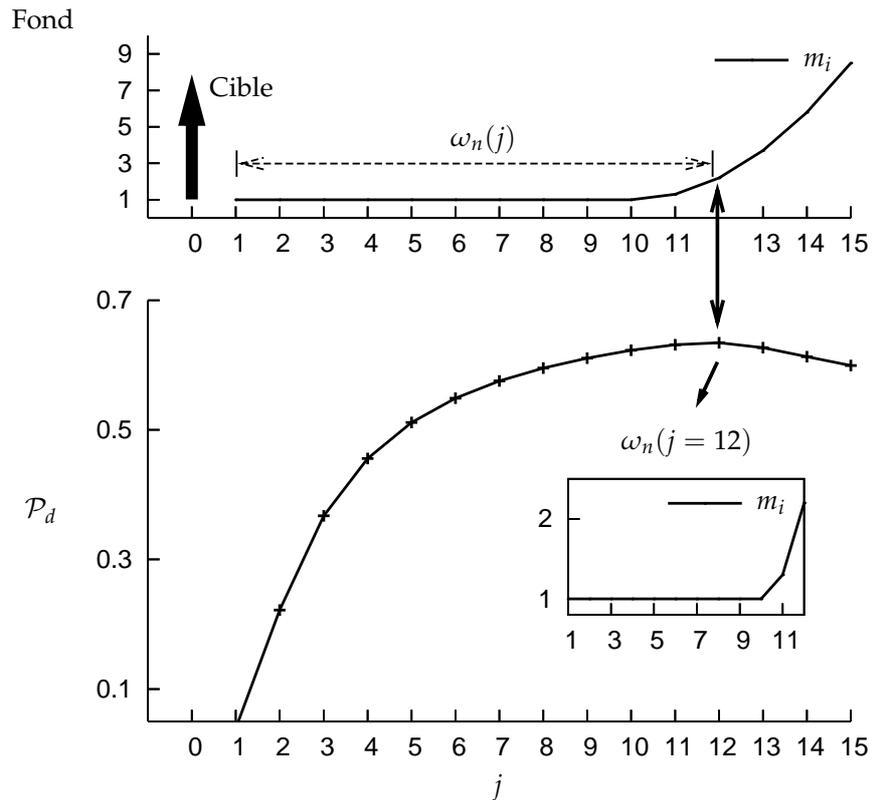


FIG. 3.7 – En haut, on représente le fond 1-D considéré. La région de référence $\omega_n(j)$ est constituée de l'ensemble des pixels d'indice $i = 1$ à $i = j$. En bas, l'évolution de la probabilité de détection est représentée pour différentes régions de référence indexées par j ($\alpha = 10^{-4}$, $S = 7$ dB, $L = 4$).

$i = j$. Nous considérerons un modèle de cible fluctuante dont le RSB est égal à 7 dB et un bruit gamma d'ordre $L = 4$.

Nous observons encore sur cette expérience, qu'une probabilité de détection plus élevée peut être obtenue avec une région de référence inhomogène qu'avec une région de référence homogène de taille plus petite. Le choix de la région de référence qui offre la probabilité de détection la plus élevée ne se limite donc pas à choisir la région de référence homogène la plus grande possible. Ainsi, pour choisir la région de référence qui permet d'obtenir la probabilité de détection la plus élevée, nous comparerons les probabilités de détection calculées pour différentes régions de référence.

Jusqu'à maintenant, nous avons détaillé une méthode pour sélectionner des régions de référence et nous avons décrit comment calculer le seuil de détection à partir d'une estimation de la valeur du fond et des performances exactes du CA-CFAR (détecteur DSR). Concernant le choix d'une région de référence, nous avons montré qu'il peut être intéressant de choisir la région de référence qui permet d'obtenir la probabilité de détection la plus élevée plutôt que de sélectionner la région de référence la plus homogène possible.

3.1.5 Choix de la région de référence

Nous décrivons dans cette section la solution que nous proposons pour déterminer parmi l'ensemble de régions de référence sélectionnées précédemment

celle qui est susceptible de conduire à une forte probabilité de détection. Cependant, vouloir maximiser la probabilité de détection suggère de fixer le modèle de cible et les paramètres de la cible (RSB). Nous proposons donc de développer une technique qui ne nécessite pas une telle hypothèse.

Afin d'analyser ce problème, considérons le cas théorique où le fond est connu. Ainsi nous considérons le cas simplifié où la forme de la région de référence sélectionnée est une fonction déterministe du paramètre R .

L'expression de la probabilité de détection calculée pour une cible de RSB S et pour la région de référence déterminée par le paramètre R est :

$$\mathcal{P}_d(\tau_n, S, R) = P_{X_n/Z_n}(X_n/Z_n > \tau_n | H_1, R) = \int_{\tau_n(R)}^{\infty} f_{X_n/Z_n}(t | H_1) dt, \quad (3.3)$$

avec f_{X_n/Z_n} la densité de probabilité de la statistique X_n/Z_n . Notons que le seuil de détection $\tau_n(R)$ dépend de la région de référence sélectionnée et donc du paramètre R et est déterminé afin d'obtenir un taux de fausse alarme donné (cf. équation 2.24). En utilisant [88], on peut montrer que la \mathcal{P}_d peut s'exprimer en fonction de f_{X_n} la ddp de X_n et f_{Z_n} la ddp de Z_n :

$$\mathcal{P}_d(\tau_n, S, R) = \int_{\tau_n(R)}^{\infty} \int_0^{\infty} z_n f_{X_n}(tz_n | H_1) f_{Z_n}(z_n | R) dz_n dt. \quad (3.4)$$

En appliquant le théorème de Fubini [14], on peut échanger les deux intégrales.

$$\mathcal{P}_d(\tau_n, S, R) = \int_0^{\infty} z_n f_{Z_n}(z_n | R) \int_{\tau_n(R)}^{\infty} f_{X_n}(tz_n | H_1) dt dz_n. \quad (3.5)$$

Si on réalise le changement de variable $t' = z_n t$, la \mathcal{P}_d est donnée par :

$$\mathcal{P}_d(\tau_n, S, R) = E_{Z_n} [P_{X_n}(X_n > Z_n(R) \tau_n(R) | H_1)]. \quad (3.6)$$

Cette dernière expression nous montre que la probabilité de détection est la moyenne sur les réalisations de la probabilité que $X_n > Z_n(R) \tau_n(R)$. Maximiser la probabilité de détection nécessite de connaître le RSB de la cible, en revanche il est possible de minimiser le produit $Z_n(R) \tau_n(R)$ sans connaître le RSB. Ainsi nous proposons de sélectionner la région de référence qui permet de minimiser $Z_n(R) \tau_n(R)$.

Cette sélection de la région de référence est réalisée dans un ensemble discret et fini de régions de référence candidates obtenues en considérant des valeurs de R comprises entre 0 et R_{max} avec un échantillonnage régulier fixé à $\delta R = 10^{-2}$. La région de référence sélectionnée est donc définie par R^{opt} :

$$R^{opt} = \arg \min_{R \in [0; R_{max}]} [Z_n(R) \tau_n(R)], \quad (3.7)$$

où $\tau_n(R)$ est déterminé avec l'équation 2.24 afin d'obtenir une probabilité de fausse alarme égale à α .

Puisque la valeur vraie du fond est inconnue, l'équation 2.24 est utilisée avec la valeur estimée \hat{m}_p et la régulation du taux de fausse alarme ne sera qu'approchée. Les performances de la technique de sélection de région que

nous avons proposée sont donc dépendantes de la qualité de l'estimation de la valeur du fond. Une estimation de la valeur du fond sans biais et avec une variance faible permettra une régulation correcte du taux de fausse alarme et une probabilité de détection élevée. Pour une application pratique, il est nécessaire que la technique de sélection de région soit robuste vis-à-vis des éventuelles erreurs d'estimation de la valeur du fond.

Pour rendre le détecteur DSR plus robuste à l'estimation de la valeur du fond, nous limiterons tout d'abord la valeur maximale du paramètre R utilisé lors de la recherche de la région de référence à la valeur $R_{max} = 0.35$. Cela permet de rendre plus rapide la sélection de région mais également de ne pas considérer les régions de référence trop fortement inhomogènes qui sont potentiellement sources de plus fortes erreurs d'estimation. En effet, pour des fonds inhomogènes, l'estimation préalable de la valeur du fond peut être mise en défaut, par exemple les discontinuités du fond sont lissées par effet passe-bas du filtre. Pour détecter ces cas problématiques, nous avons choisi une solution simple et rapide qui consiste à limiter les valeurs de R .

Pour la même raison, nous limiterons la taille de la région de référence à 10 pixels pour les valeurs du paramètre R supérieures à 0.08. Si on s'intéresse à l'évolution de la probabilité de détection de la technique CA-CFAR en fonction du nombre de pixels dans la région de référence, on constate qu'il n'est pas nécessaire de prendre un grand nombre de pixels de référence.

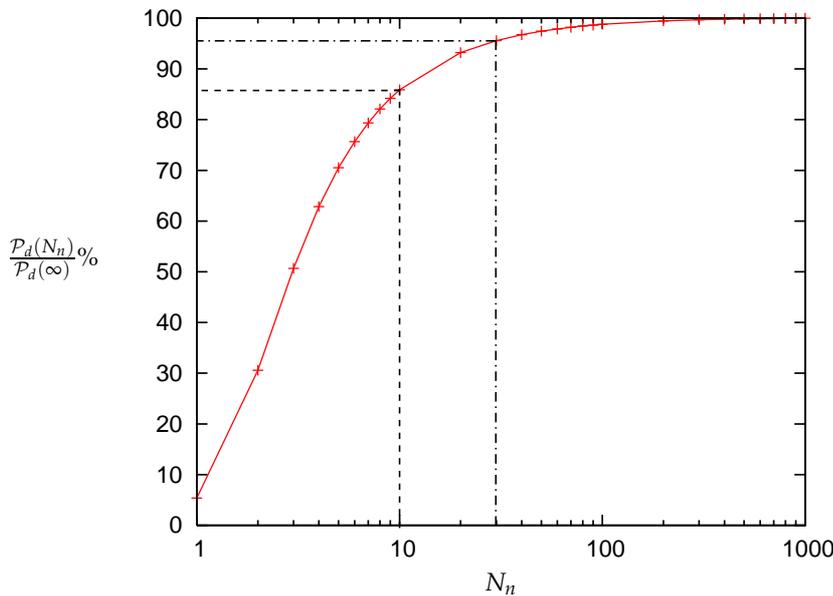


FIG. 3.8 – Évolution du rapport entre la $\mathcal{P}_d(N_n)$ et la $\mathcal{P}_d(N_n \rightarrow \infty)$ asymptotique en fonction du nombre de pixels dans la région de référence N_n , la région de référence est homogène ($\mathcal{P}_{fa} = 10^{-4}$, $L = 4$, modèle de cible fluctuante et RSB fixé à 7 dB).

Par exemple sur la figure FIG.3.8, l'évolution de la \mathcal{P}_d en fonction du nombre de pixels dans la région de référence N_n est représentée. Cette figure a été obtenue grâce à l'expression de la probabilité de détection du CA-CFAR sur fond homogène (cf. équation 2.23). On peut s'apercevoir que si $N_n = 30$, la \mathcal{P}_d a atteint environ 95 % de la valeur obtenue avec un fond connu. Avec une perte raisonnable sur la probabilité de détection, on peut donc limiter le

nombre de pixels dans la région de référence à 30 quand $R < 0.08$ (dans ce cas la région de référence est quasi-homogène).

Les modifications que nous avons apportées pour accroître la robustesse de la technique que nous proposons sont résumées par la figure FIG. 3.9.

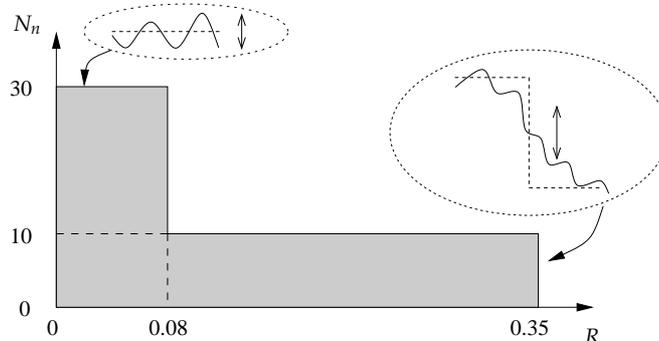


FIG. 3.9 – Récapitulatif des modifications apportées pour accroître la robustesse de la sélection de région de référence. La région grisée sur la figure représente les valeurs de R et N_n acceptables lors de la sélection de la région de référence. Les deux figures annexes représentent deux cas typiques pour lesquels s'appliquent les limitations introduites (en pointillé le fond réel, en trait plein le fond estimé).

Exceptées les valeurs $N_n \leq 30$ pixels et $R_{max} = 0.35$ qui sont des valeurs de contraintes motivées par un souci de rapidité du détecteur, la forme et les paramètres du gabarit ($R = 0.08$, $N_n = 10$ pixels) ont été choisis de manière empirique. Ces paramètres sont largement dépendants des performances de la méthode utilisée pour estimer la valeur du fond. Notre but ici était de montrer l'apport de la méthode de sélection de région dans le cas de l'utilisation d'une méthode simple d'estimation de la valeur du fond.

Les paramètres du gabarit ($R = 0.08$, $N_n = 10$ pixels) ont été choisis afin de limiter les effets passe-bas du filtrage utilisé pour l'estimation de la valeur du fond. Cette manière de limiter les défauts d'estimation de la valeur du fond possède des avantages en terme de rapidité et de simplicité.

3.2 EXEMPLES DE RÉSULTATS SUR FOND SYNTHÉTIQUE

Nous proposons d'illustrer les résultats obtenus avec la technique proposée à l'aide d'une expérience effectuée à partir d'un fond synthétique fourni par Thalès Systèmes Aéroportés (voir figure FIG. 3.10). À partir de ce fond, nous pourrions générer différentes réalisations de bruit et nous pourrions ainsi estimer les performances des différentes techniques. Durant cette expérience, nous allons nous concentrer sur quelques positions repérées par un numéro sur la figure FIG. 3.10. Les résultats présentés sont obtenus par simulations numériques (méthode de Monte-Carlo, échantillonnage uniforme [76]).

La valeur du fond est multipliée avec un bruit gamma d'ordre $L = 4$ et de moyenne 1 afin de générer pour chaque réalisation une carte distance/vitesse différente. Les techniques de détection sont alors appliquées sur la carte distance/vitesse bruitée générée. On peut ainsi estimer la probabilité de fausse alarme des différentes techniques en considérant un grand nombre de réalisations (10^6 réalisations). Afin d'estimer la probabilité de détection, nous

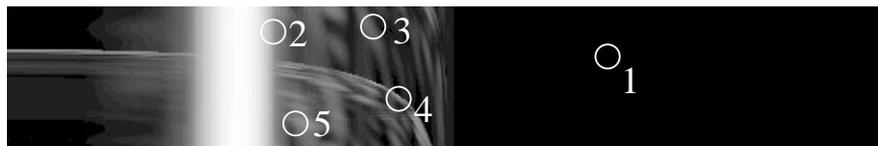


FIG. 3.10 – Logarithme de la valeur du fond synthétique fourni par Thalès Systèmes Aéroports (échelle des niveaux de gris modifiée pour la visualisation) avec indication de la position et du numéro des positions testées.

devrons ajouter des cibles. Nous considérerons le modèle de cible fluctuante avec un RSB égal à 7 dB (la définition du RSB est présentée à la section 1.3.2). Dans ce dernier cas, des cibles sont placées sur le fond synthétique aux positions testées.

Nous comparerons la technique proposée aux techniques CA-CFAR, OS-CFAR (Ordered Statistics), TM-CFAR (Trimmed Mean) et à une technique heuristique.

La technique CA-CFAR sera utilisée avec une région de référence carrée de 3×3 pixels ($N_n = 8$ pixels), afin de garantir au mieux le taux de fausse alarme souhaité. Il en sera de même pour les techniques de détection robustes OS-CFAR et TM-CFAR. Pour la technique OS-CFAR, nous utiliserons la $k^{\text{ème}}$ ($k = 6$) plus grande valeur parmi les données contenues dans la région de référence comme estimation de la valeur du fond au pixel test. Pour la technique TM-CFAR, la valeur du fond au pixel test sera estimée en calculant la moyenne arithmétique des $T_1 + 1$ à $N_n - T_2$ plus grandes valeurs ($T_1 = 5$, $T_2 = 1$) des données dans la région de référence. Les valeurs de ces paramètres ont été obtenues par extrapolation à partir de l'étude réalisée par Gandhi et Kassam [41].

La technique heuristique, que nous proposons de considérer, correspond à la technique CA-CFAR (région de référence 3×3) appliquée au rapport entre la valeur de la carte distance/vitesse X_n et la valeur estimée \hat{m}_n du fond. La division de X_n par \hat{m}_n permet d'obtenir une nouvelle image Y où $Y_n = X_n / \hat{m}_n$ est quasi-homogène. Les données sont ainsi transformées pour se rapprocher du modèle de fond homogène, utilisé par le CA-CFAR, et pour obtenir une meilleure régulation du taux de fausse alarme sur les fonds inhomogènes. La valeur du fond est estimée avec la même méthode que celle utilisée pour la sélection de région. La comparaison entre cette méthode heuristique et la sélection de région est intéressante pour dissocier l'apport lié à l'estimation de la valeur du fond et l'apport de la sélection de région.

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure FIG.3.11. Pour les trois cibles considérées (1, 4 et 5), la probabilité de détection de la technique proposée (DSR) est supérieure à la probabilité de détection des détecteurs CA-CFAR, OS-CFAR et TM-CFAR. Pour la cible 1, on remarque que la méthode heuristique ne permet pas une bonne régulation du taux de fausse alarme. Pour les cibles 4 et 5 placées sur des fonds inhomogènes, la technique proposée permet une meilleure régulation du taux de fausse alarme que les techniques CA-CFAR, OS-CFAR et TM-CFAR. On observe une baisse de la probabilité de détection de la technique DSR pour la cible 4 par rapport aux autres cibles. Nous verrons dans la prochaine section, que ceci s'explique par le fait que la région de référence sélectionnée ne comprend pas un grand

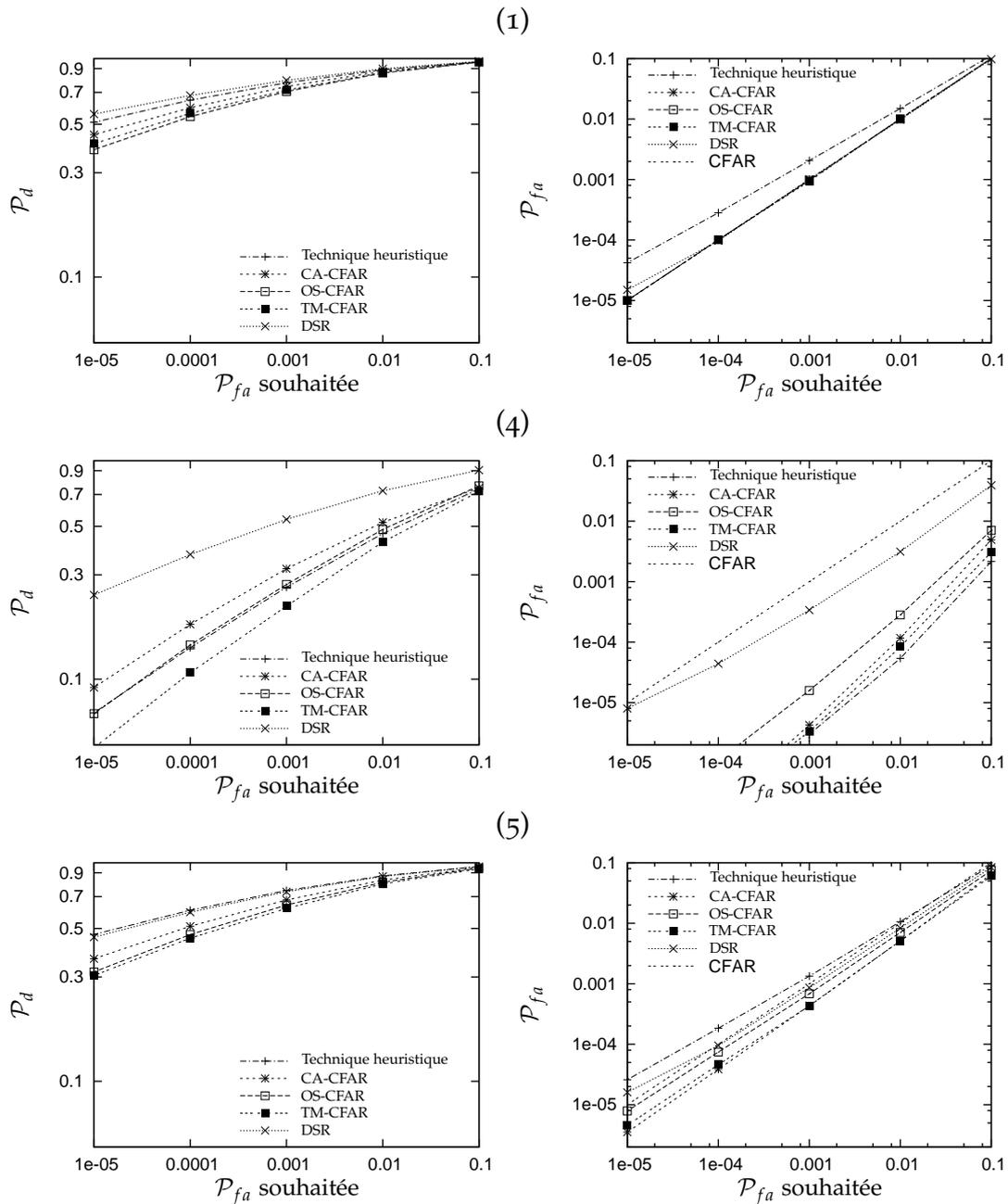


FIG. 3.11 – Comparaison des performances des détecteurs : CA-CFAR, OS-CFAR, TM-CFAR, une technique heuristique et la technique proposée.

nombre de pixels (voir FIG.3.13) et que la régulation du taux de fausse alarme est alors particulièrement difficile à la position testée.

Concernant la charge de calcul, le temps nécessaire pour sélectionner la région de référence sur un ordinateur standard (3.2 Ghz, Linux 2.6.18, GCC 4.1.2) varie en fonction de l'homogénéité de la région de référence : $< 1 ms$ pour la cible 1, $1.1 ms$ pour la cible 2, $2.6 ms$ pour la cible 3, $18 ms$ pour la cible 4 et $5 ms$ pour la cible 5.

En effet pour sélectionner une région de référence, on compare les performances obtenues avec différentes régions pour des valeurs croissantes du paramètre R (inhomogénéité croissante) jusqu'à $R = R_{max}$. Il est alors possible d'arrêter la recherche de la région de référence avant $R = R_{max}$ quand la valeur du paramètre R permet de définir une région de référence dont le nombre de pixels est supérieur au nombre de pixels limite (cf. figure FIG. 3.9).

Le temps de sélection d'une région de référence peut paraître un peu long, cependant ce temps peut être encore très largement diminué si la sélection de région utilise les performances approchées au lieu des performances exactes du détecteur CA-CFAR. D'autant plus que nous n'avons jamais observé de différence de performance entre ces deux options.

3.3 EXEMPLES DE RÉSULTATS À FOND CONNU

Les résultats que nous avons précédemment présentés ont été obtenus en utilisant la méthode d'estimation de la valeur du fond présentée à la section 3.1.1. Il est intéressant d'analyser les performances obtenues quand la valeur du fond est parfaitement connue (fond connu) afin de juger du potentiel de la technique de sélection de région.

Nous comparons la technique proposée au détecteur idéal et au détecteur Matched CA-CFAR.

Lorsque nous utilisons la sélection de région à fond connu, les modifications introduites pour des questions de robustesse vis-à-vis de l'estimation de la valeur du fond (cf. figure FIG. 3.9) ne sont pas mises en œuvre et on impose seulement $R_{max} = 0.6$.

Pour le détecteur Matched CA-CFAR, on choisit manuellement pour chaque position testée la région de référence la plus adaptée dans un ensemble de région de référence (voir figure FIG.3.12) et on applique le CA-CFAR. La région de référence sélectionnée pour le Matched CA-CFAR est celle qui permet à la fois de respecter la probabilité de fausse alarme souhaitée et également de maximiser la probabilité de détection du CA-CFAR. On peut réaliser simplement cette opération car on connaît les expressions exactes des performances de la technique CA-CFAR pour un fond quelconque. Les régions de référence sélectionnées de manière manuelle pour la technique Matched CA-CFAR et automatique pour la technique proposée sont présentées pour chaque cible à la figure FIG.3.13.

Nous pouvons remarquer que les régions de référence sélectionnées manuellement pour la technique Matched CA-CFAR et automatiquement pour la sélection de région possèdent des points communs. Dans les deux cas, les pixels sélectionnés sont relativement proches de la courbe de niveau passant

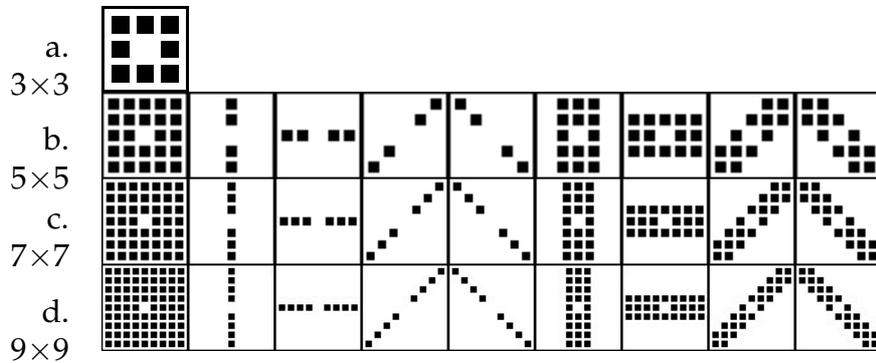


FIG. 3.12 – Ensemble des régions de référence testées pour des fenêtres de taille : 3×3 (a.), 5×5 (b.), 7×7 (c.), 9×9 (d.). Les petits carrés noir indiquent les pixels qui constituent la région de référence.

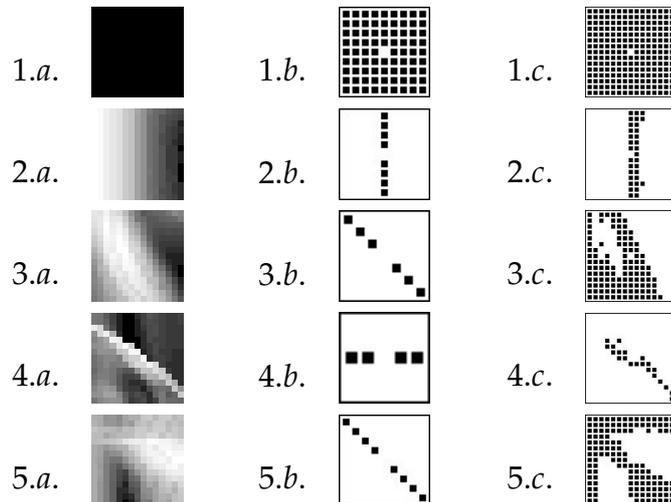


FIG. 3.13 – Régions de référence sélectionnées pour chacune des positions testées (numérotées de 1 à 5) : (a) images du logarithme de la valeur du fond aux positions testées (visualisation avec correction gamma 2), (b) régions de référence sélectionnées pour la technique Matched CA-CFAR, (c) régions de référence sélectionnées avec la technique proposée.

par la position testée. Il faut rappeler que la sélection de région permet de gérer des régions de référence inhomogènes, car le calcul du seuil de détection prend en compte le fait que la région de référence est inhomogène. Cette dernière remarque est bien illustrée pour la cible 2 (2.c.) sur la figure FIG. 3.13. On constate en effet que malgré la forme locale simple (2.a.) du fond (un plan incliné), où l'on imagine très bien la présence d'une zone homogène (ligne verticale, 2.b.), la sélection de région choisit une région inhomogène plus grande afin de minimiser le rapport $Z_n(R) \tau_n(\alpha, R)$.

Une fois les régions de référence sélectionnées, on calcule les performances obtenues avec les trois techniques : détecteur idéal, Matched CA-CFAR et détecteur DSR (fond connu). Nous reporterons également les résultats obtenus précédemment avec le détecteur DSR quand la valeur du fond est estimée à titre de comparaison. Les résultats sont présentés pour trois positions testées (1, 4 et 5) en considérant un bruit gamma d'ordre $L = 4$ et des cibles fluctuantes de RSB égal à 7 dB .

Avec la figure FIG.3.14, on peut constater que la technique DSR, à fond connu, permet un comportement TFAC et une meilleure probabilité de détection que pour la technique Matched CA-CFAR. Elle possède également des performances très proches du détecteur idéal. Cette propriété résulte de la grande taille des régions de référence utilisées par la DSR quand la valeur du fond est connu. Les résultats obtenus avec la sélection de région quand la valeur du fond est estimée sont bien entendu moins bons que lorsque la valeur du fond est connue. Cependant, à fond estimé, la sélection de région permet une bonne régulation du taux de fausse alarme tout en offrant de meilleures probabilités de détection que le détecteur Matched CA-CFAR.

Ces résultats montrent également que de meilleures performances à fond estimé pourraient être obtenues avec la sélection de région en améliorant la méthode d'estimation de la valeur du fond utilisée.

D'autre part comme nous l'avons déjà souligné, il est possible d'obtenir une mise en œuvre plus rapide de l'algorithme de sélection de région en n'utilisant plus les calculs exacts mais les calculs approchés des performances de détection (cf. section 2.4.3). L'exécution est alors sensiblement accélérée. De plus nous n'avons jamais observé de différence entre les régions de référence sélectionnées pour les deux types de calculs et donc aucune différence sur les performances des détecteurs DSR associés. Nous présenterons des résultats obtenus avec la version rapide de l'algorithme DSR au chapitre 5.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Ce chapitre a permis de présenter une méthode de détection qui consiste à adapter la technique CA-CFAR à des fonds inhomogènes en sélectionnant la région de référence. Nous avons montré sur des exemples que la technique proposée permet non seulement un meilleur respect du taux de fausse alarme mais également d'obtenir de meilleures probabilités de détection sur des fonds inhomogènes. Les performances obtenues par la sélection de région sont meilleures que les performances obtenues par la méthode CA-CFAR ou les méthodes de détection robustes OS-CFAR et TM-CFAR, méthodes qui

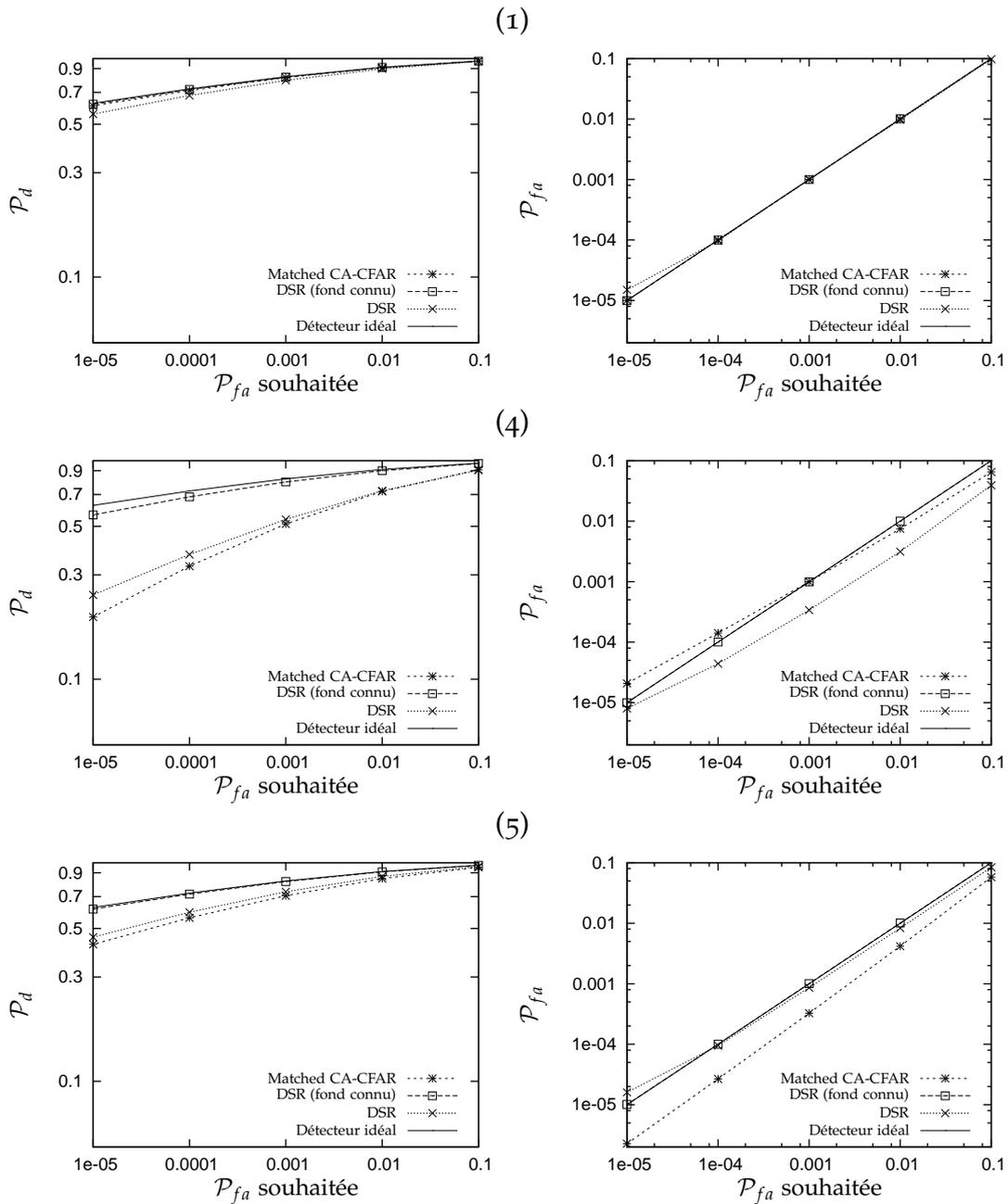


FIG. 3.14 – Comparaison des performances du détecteur idéal, Matched CA-CFAR et de la technique proposée à fond connu et à fond estimé.

sont classiquement utilisées. De manière plus générale, cette étude permet d'envisager le potentiel de la technique CA-CFAR adaptée à des fonds inhomogènes. Les performances de la sélection de région dépendent cependant de la qualité d'estimation de la valeur du fond. De plus, le coût de cette méthode en temps de calcul est relativement élevé, puisqu'il nous faut déterminer une région de référence pour chaque position testée.

Bien qu'optimiser la technique de sélection de région de référence soit une perspective intéressante, nous avons choisi d'analyser le potentiel de deux directions différentes. La première consiste à mettre en œuvre un estimateur plus simple (fondé sur une description polynomiale) de la valeur du fond avec une région de référence imposée *a priori*. La seconde consistera à mettre en œuvre un estimateur également plus simple de la valeur du fond (linéaire cette fois-ci) mais avec une adaptation automatique de la région de référence fondée sur un maillage triangulaire.

DÉTECTEUR LQ-CFAR ET SÉLECTION DE MODÈLE

SOMMAIRE

4.1	DÉTECTEUR LQ-CFAR	78
4.1.1	Choix du modèle de fond	78
4.1.2	Estimateur de la valeur du fond	79
4.1.3	Test de détection et contrôle du taux de fausse alarme	83
4.1.4	Caractérisation du détecteur LQ-CFAR	84
4.1.5	Discussion	91
4.2	SÉLECTION DE MODÈLE	93
4.2.1	Choix du modèle	94
4.2.2	Simulations numériques	95
	CONCLUSION	101

LE deuxième chapitre, qui concerne les performances théoriques du détecteur CA-CFAR sur des fonds inhomogènes, a permis de mettre l'accent sur des points importants.

Il était évident qu'une méthode faisant une hypothèse forte d'homogénéité, puisse se trouver mise en défaut lors d'une utilisation sur fonds inhomogènes. Les performances théoriques, en particulier leurs expressions approchées (basées sur les deux premiers moments statistiques de la moyenne arithmétique des échantillons dans la région de référence notée Z_n) ont montré l'impact d'une méconnaissance de la densité de probabilité de Z_n (et donc de la statistique de X_n/Z_n) sur la régulation du taux de fausse alarme. Nous avons pu montrer que tenir compte de l'augmentation de variance (grâce au paramètre N_{eq}) sur l'estimation Z_n via une densité de probabilité approximée (hypothèse $Z_n \sim \mathcal{G}(m_n, N_{eq}L)$) conduit à une amélioration de la régulation du taux de fausse alarme. L'étude des performances théoriques a permis de montrer l'influence déterminante de la présence éventuelle d'un biais sur l'estimation de Z_n .

Dans le chapitre précédent nous avons proposé une technique qui tente de corriger les effets du biais et de variance d'estimation sur Z_n par rapport

au détecteur (le CA-CFAR) qui peut présenter de forts biais d'estimation en présence d'un fond inhomogène. Il apparaît donc intéressant d'étudier un détecteur, toujours fondé sur la statistique de décision X_n/\hat{m}_n , mais où \hat{m}_n serait un estimateur différent de la moyenne arithmétique. L'objectif est alors de développer un estimateur de la valeur du fond qui présente un biais plus faible que celui de la technique CA-CFAR afin d'obtenir une régulation de la probabilité de fausse alarme plus efficace.

Pour mettre en œuvre un tel détecteur il faut également déterminer la densité de probabilité de cette estimation, ou au moins sa variance d'estimation (sur un fond correspondant aux hypothèses considérées). Dans ces conditions, on peut espérer mettre en œuvre un détecteur à taux de fausse alarme constant dans le cadre des hypothèses, mais surtout obtenir un détecteur plus robuste dans le cas d'un fond inhomogène quelconque.

Le détecteur présenté dans ce chapitre est un exemple de la mise en œuvre de ce principe. Ce détecteur est fondé sur une technique de détection à fenêtre glissante utilisant une modélisation polynomiale de la valeur du fond. Sur des exemples, nous montrerons que l'introduction de ce type de modélisation du fond permet un meilleur contrôle du taux de fausse alarme que la technique CA-CFAR sur des fonds inhomogènes. Puis nous verrons comment choisir de manière automatique entre le CA-CFAR et le détecteur proposé et comment cette approche permet d'améliorer la probabilité de détection.

4.1 DÉTECTEUR LQ-CFAR

4.1.1 Choix du modèle de fond

Lors de la discussion établie à la fin du chapitre 2, nous avons pu noter que les performances du détecteur CA-CFAR ne sont pas fortement modifiées sur des fonds dont la valeur est une fonction linéaire des coordonnées par rapport aux performances obtenues sur des fonds homogènes. Au contraire, un fond dont la valeur évolue suivant une fonction quadratique entraîne une modification des performances du CA-CFAR et empêche de maîtriser le taux de fausse alarme.

Il est donc naturel de s'intéresser à des modèles de fond décrits par des fonctions quadratiques. Pour les données traitées, la valeur du fond peut être vue comme une fonction compliquée à deux dimensions. Tant que les valeurs du fond ne présentent pas des variations trop brutales (discontinuités), il est alors raisonnable de penser qu'une approximation locale du fond par un polynôme d'ordre 2 peut constituer une modélisation acceptable. De plus, une forme quadratique permet de prendre en compte localement la valeur moyenne, la pente et la courbure du fond.

Cependant, l'expression explicite de l'estimateur des paramètres au sens du maximum de vraisemblance (MV) ne peut être obtenue, ce qui oblige à réaliser une optimisation numérique pour estimer les valeurs des paramètres. Afin de contourner cet obstacle, nous avons choisi d'estimer le logarithme de la valeur du fond plutôt que la valeur du fond elle-même. Le bruit multiplicatif qui perturbe les données sera alors transformé en bruit additif et l'opéra-

tion d'estimation de la valeur du fond pourra être réalisée avec un estimateur des moindres carrés (MC). Par conséquent, le logarithme de la valeur du fond sera estimé à partir du logarithme des données. Dans la suite, nous noterons Y_p le logarithme des données X_p .

On peut aussi se demander pourquoi ne pas envisager des polynômes d'ordre supérieur à 2. Nous verrons par la suite qu'un polynôme d'ordre 2 nécessite l'estimation de 6 paramètres, ce qui se traduit par une variance d'estimation de la valeur du fond au pixel test plus grande qu'avec l'estimation de la moyenne arithmétique. Cela entraîne une baisse de la probabilité de détection par rapport au détecteur CA-CFAR sur des fonds homogènes. Aussi prendre des polynômes d'ordre supérieur à 2 pourrait éventuellement permettre une meilleure maîtrise du taux de fausse alarme au prix d'une chute plus importante de la probabilité de détection sur des fonds homogènes.

Le détecteur LQ-CFAR (Log-Quadratic-CFAR) que nous allons présenter utilise donc un modèle quadratique du logarithme de la valeur du fond. Pour simplifier, nous appellerons ce modèle de fond le modèle log-quadratique.

4.1.2 Estimateur de la valeur du fond

Nous supposons que le logarithme de la valeur du fond peut être localement modélisé par une fonction quadratique dans la région de référence ω_n . Nous noterons μ_{p,ω_n} l'espérance mathématique du logarithme des données au pixel p en considérant la région de référence ω_n .

Remarquons que les données Y_p sont donc modélisées par une valeur moyenne μ_{p,ω_n} perturbée par un bruit additif qui, par définition de μ_{p,ω_n} , est à valeur moyenne nulle, mais dont la ddp n'est pas symétrique, il sera donc nécessaire, lors du retour dans l'espace des données X_p , de tenir compte de cette dissymétrie.

On suppose que la valeur de μ_{p,ω_n} est ainsi décrite par une fonction polynomiale d'ordre 2 des coordonnées des pixels :

$$\mu_{p,\omega_n} = a_{\omega_n} i_p^2 + b_{\omega_n} j_p^2 + c_{\omega_n} i_p j_p + d_{\omega_n} i_p + e_{\omega_n} j_p + f_{\omega_n}, \quad (4.1)$$

où (i_p, j_p) sont les coordonnées du pixel p et $a_{\omega_n}, b_{\omega_n}, c_{\omega_n}, d_{\omega_n}, e_{\omega_n}, f_{\omega_n}$ sont les coefficients du polynôme qui dépendent de la région de référence considérée ω_n . La notation que nous adoptons maintenant repose sur une renumérotation des pixels de 1 à N_n dans la région de référence ω_n . Notons que le pixel test n n'appartient pas à ω_n . Pour des raisons de mise en œuvre numérique les calculs numériques sont implémentés en considérant, pour chaque position de la région ω_n , les coordonnées relatives par rapport au pixel situé en haut à gauche de la fenêtre contenant ω_n .

La notation matricielle suivante sera utile :

$$\mu_{p,\omega_n} = \mathbf{v}_p^T \boldsymbol{\theta}_{\omega_n}, \quad (4.2)$$

avec A^T le transposé de A , le vecteur \mathbf{v}_p :

$$\mathbf{v}_p \triangleq [i_p^2, j_p^2, i_p j_p, i_p, j_p, 1]^T, \quad (4.3)$$

et le vecteur de paramètres :

$$\boldsymbol{\theta}_{\omega_n} \triangleq [a_{\omega_n}, b_{\omega_n}, c_{\omega_n}, d_{\omega_n}, e_{\omega_n}, f_{\omega_n}]^T. \quad (4.4)$$

Nous noterons également $\boldsymbol{\mu}_{\omega_n}$ le vecteur des valeurs moyennes du logarithme des données dans la région de référence :

$$\boldsymbol{\mu}_{\omega_n} \triangleq [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p, \dots, \mu_{N_n}]^T. \quad (4.5)$$

Le vecteur $\boldsymbol{\mu}_{\omega_n}$ peut s'exprimer en fonction des coordonnées des pixels de la région de référence et du vecteur de paramètres :

$$\boldsymbol{\mu}_{\omega_n} = \mathbf{M}_{\omega_n} \boldsymbol{\theta}_{\omega_n}, \quad (4.6)$$

avec \mathbf{M}_{ω_n} une matrice telle que :

$$\mathbf{M}_{\omega_n} \triangleq [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p, \dots, \mathbf{v}_{N_n}]^T. \quad (4.7)$$

Nous noterons également le logarithme des données contenues dans ω_n sous forme de vecteur :

$$\mathbf{Y}_{\omega_n} \triangleq [Y_1, \dots, Y_p, \dots, Y_{N_n}]^T. \quad (4.8)$$

En prenant le logarithme des données, le bruit devient additif. Il est alors possible d'utiliser un estimateur des moindres carrés pour estimer les paramètres $\boldsymbol{\theta}_{\omega_n}$. Cet estimateur minimise donc l'erreur quadratique moyenne :

$$\left(\mathbf{Y}_{\omega_n} - \boldsymbol{\mu}_{\omega_n} \right)^T \left(\mathbf{Y}_{\omega_n} - \boldsymbol{\mu}_{\omega_n} \right). \quad (4.9)$$

Le vecteur des paramètres estimés $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n}$ est solution de l'estimateur des moindres carrés et s'exprime simplement [31] :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n} \triangleq \boldsymbol{\Lambda}_{\omega_n} \mathbf{M}_{\omega_n}^T \mathbf{Y}_{\omega_n}, \quad (4.10)$$

où la matrice $\boldsymbol{\Lambda}_{\omega_n}$ est égale à :

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\omega_n} \triangleq \left(\mathbf{M}_{\omega_n}^T \mathbf{M}_{\omega_n} \right)^{-1}. \quad (4.11)$$

À partir de l'estimation du vecteur de paramètres, on en déduit l'estimation de $\boldsymbol{\mu}_{\omega_n}$ que nous noterons $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\omega_n}$:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\omega_n} \triangleq \mathbf{M}_{\omega_n} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n}. \quad (4.12)$$

On peut facilement démontrer que l'estimateur du vecteur de paramètre obtenu est non-biaisé :

$$\begin{aligned} E \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n} \right] &= \boldsymbol{\Lambda}_{\omega_n} \mathbf{M}_{\omega_n}^T E \left[\mathbf{Y}_{\omega_n} \right] \\ &= \boldsymbol{\Lambda}_{\omega_n} \mathbf{M}_{\omega_n}^T \mathbf{M}_{\omega_n} \boldsymbol{\theta}_{\omega_n} \\ &= \boldsymbol{\theta}_{\omega_n}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

et donc :

$$\begin{aligned} E \left[\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\omega_n} \right] &= E \left[\mathbf{M}_{\omega_n} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n} \right] \\ &= \mathbf{M}_{\omega_n} \boldsymbol{\theta}_{\omega_n} \\ &= \boldsymbol{\mu}_{\omega_n}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Par ailleurs, la variance du bruit σ_b^2 , qui perturbe le logarithme des données, peut être calculée en fonction de l'ordre L du bruit gamma qui perturbe X_p (cf. Annexe A.3) :

$$\sigma_b^2 \triangleq \zeta(2, L), \quad (4.15)$$

où $\zeta(s, \alpha)$ est la fonction Zeta de Hurwitz définie à la page 191. La variance du bruit est utile pour calculer la matrice de covariance de $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n}$:

$$\begin{aligned} cov \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n} \right) &= E \left[(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n} - \boldsymbol{\theta}_{\omega_n}) (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n} - \boldsymbol{\theta}_{\omega_n})^T \right] \\ &= E \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n}^T \right] - \boldsymbol{\theta}_{\omega_n} \boldsymbol{\theta}_{\omega_n}^T, \end{aligned} \quad (4.16)$$

car :

$$E \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n} \right] = \boldsymbol{\theta}_{\omega_n}. \quad (4.17)$$

Or :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n} = \boldsymbol{\Lambda}_{\omega_n} \mathbf{M}_{\omega_n}^T \mathbf{Y}_{\omega_n}, \quad (4.18)$$

d'où :

$$cov \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n} \right) = E \left[(\boldsymbol{\Lambda}_{\omega_n} \mathbf{M}_{\omega_n}^T \mathbf{Y}_{\omega_n}) (\boldsymbol{\Lambda}_{\omega_n} \mathbf{M}_{\omega_n}^T \mathbf{Y}_{\omega_n})^T \right] - \boldsymbol{\theta}_{\omega_n} \boldsymbol{\theta}_{\omega_n}^T. \quad (4.19)$$

De plus :

$$E \left[\mathbf{Y}_{\omega_n} \mathbf{Y}_{\omega_n}^T \right] = \sigma_b^2 \mathbf{I}_{N_n} + (\mathbf{M}_{\omega_n} \boldsymbol{\theta}_{\omega_n}) (\mathbf{M}_{\omega_n} \boldsymbol{\theta}_{\omega_n})^T, \quad (4.20)$$

où \mathbf{I}_{N_n} désigne la matrice identité de taille $N_n \times N_n$. Ainsi :

$$\begin{aligned} cov \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n} \right) &= \sigma_b^2 (\boldsymbol{\Lambda}_{\omega_n} \mathbf{M}_{\omega_n}^T) (\boldsymbol{\Lambda}_{\omega_n} \mathbf{M}_{\omega_n}^T)^T \\ &\quad + (\boldsymbol{\Lambda}_{\omega_n} \mathbf{M}_{\omega_n}^T) (\mathbf{M}_{\omega_n} \boldsymbol{\theta}_{\omega_n}) (\mathbf{M}_{\omega_n} \boldsymbol{\theta}_{\omega_n})^T (\boldsymbol{\Lambda}_{\omega_n} \mathbf{M}_{\omega_n}^T)^T \\ &\quad - \boldsymbol{\theta}_{\omega_n} \boldsymbol{\theta}_{\omega_n}^T, \end{aligned} \quad (4.21)$$

en utilisant les propriétés de la transposée d'une matrice et la définition de la matrice $\boldsymbol{\Lambda}_{\omega_n}$, on obtient :

$$cov \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n} \right) = \sigma_b^2 \boldsymbol{\Lambda}_{\omega_n} + \boldsymbol{\theta}_{\omega_n} \boldsymbol{\theta}_{\omega_n}^T - \boldsymbol{\theta}_{\omega_n} \boldsymbol{\theta}_{\omega_n}^T, \quad (4.22)$$

et donc :

$$cov \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n} \right) = \sigma_b^2 \boldsymbol{\Lambda}_{\omega_n}. \quad (4.23)$$

À partir de la matrice de covariance de $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n}$, on peut déduire la variance d'estimation de l'estimateur $\hat{\mu}_{n, \omega_n}$ pour le pixel n , que nous noterons ζ_{n, ω_n}^2 :

$$\begin{aligned} \zeta_{n, \omega_n}^2 &= var \left(\hat{\mu}_{n, \omega_n} \right) \\ &= var \left(\mathbf{v}_n^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n} \right) \\ &= E \left[\mathbf{v}_n^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n}^T \mathbf{v}_n \right] - \mathbf{v}_n^T \boldsymbol{\theta}_{\omega_n} \boldsymbol{\theta}_{\omega_n}^T \mathbf{v}_n \\ &= \sigma_b^2 \mathbf{v}_n^T \boldsymbol{\Lambda}_{\omega_n} \mathbf{v}_n. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Cette dernière expression suggère que la variance de l'estimateur peut dépendre de la forme de la région de référence.

Maintenant que nous avons un estimateur de μ_{n,ω_n} et que nous avons analysé ces caractéristiques principales, on souhaite à partir de l'estimation de μ_{n,ω_n} pouvoir déduire la valeur de m_n correspondante, c'est-à-dire la valeur du fond au pixel test. Or nous avons signalé précédemment que les données Y_p sont perturbées par un bruit additif mais dont la ddp n'est pas symétrique.

Ainsi, bien que $Y_n = \log(X_n)$, on a $\langle Y_n \rangle = \langle \log(X_n) \rangle$ mais $\langle \log(X_n) \rangle \neq \log[\langle X_n \rangle]$. Cependant, on peut montrer que pour une variable aléatoire gamma de moyenne m_n et d'ordre L , la valeur moyenne μ_n du logarithme de cette même variable aléatoire est égale à (cf. Annexe A.3) :

$$\mu_n = \psi(L) - \log(L/m_n), \quad (4.25)$$

où ψ est la fonction digamma.

La transformation inverse de l'équation 4.25 permet une estimation de m_n à partir de $\hat{\mu}_{n,\omega_n}$. Cependant cette démarche n'assure pas d'obtenir une estimation non biaisée. En effet, il faut connaître la ddp de $\hat{\mu}_{n,\omega_n}$, ce qui est complexe. Nous proposons plutôt de mettre en œuvre une approche plus simple fondée sur l'approximation suivante.

Comme $\hat{\mu}_{n,\omega_n}$ est la somme de variables aléatoires, elle est approximativement distribuée suivant une distribution gaussienne de moyenne μ_{n,ω_n} et de variance ζ_{n,ω_n}^2 .

Cette approximation résulte du théorème central limite. En considérant des régions de référence de taille suffisante (5x5 pixels) pour lesquelles $N_n \gtrsim 24$, l'utilisation du théorème central limite peut conduire à une bonne approximation.

On peut remarquer que l'approximation considérée ici peut être comparée à celle que nous avons utilisée pour déterminer les performances approchées du CA-CFAR sur des fonds inhomogènes (cf. hypothèse 2.1). Dans les deux cas, nous fixons la loi suivant laquelle l'estimation de la valeur du fond est distribuée, puis nous réalisons une identification des deux premiers moments.

Avec l'approximation précédente concernant $\hat{\mu}_{n,\omega_n}$, on peut montrer qu'une estimation non-biaisée de m_n peut être obtenue en considérant la relation suivante (cf. Annexe A.4) :

$$\hat{m}_{n,\omega_n}^{\text{LQ-CFAR}} \triangleq L \exp \left[\hat{\mu}_{n,\omega_n} - \psi(L) - \frac{\zeta_{n,\omega_n}^2}{2} \right], \quad (4.26)$$

où $\hat{m}_{n,\omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}$ est l'estimation de la valeur du fond au pixel test du LQ-CFAR obtenue en considérant la région de référence ω_n .

Avec les éléments présentés, nous sommes capable de réaliser une estimation de la valeur du fond en utilisant une modélisation quadratique du logarithme de la valeur du fond. Voyons maintenant comment utiliser cette estimation de la valeur du fond pour concevoir le détecteur LQ-CFAR.

4.1.3 Test de détection et contrôle du taux de fausse alarme

Le détecteur LQ-CFAR est fondé sur le test de détection suivant :

$$\frac{X_n}{\hat{m}_{n,\omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}} \underset{\text{pas de cible}}{\overset{\text{cible}}{\geq}} \tau_n. \quad (4.27)$$

La valeur du seuil de détection pour obtenir un taux de fausse alarme fixé, et prouver le caractère TFAC du détecteur proposé, nécessite de calculer la ddp associée au test de détection ci-dessus. Cette densité de probabilité est fournie par l'expression suivante [88] :

$$f_{X_n/\hat{m}_{n,\omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}}(t|\omega_n, L, S) = \int_0^\infty m f_{X_n}(t m|m_n, L, S) f_{\hat{m}_{n,\omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}}(m|m_n, \omega_n, L) dm, \quad (4.28)$$

où $f_{X_n/\hat{m}_{n,\omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}}$ est la ddp associée à la statistique de décision, f_{X_n} est la ddp de la valeur du pixel test et $f_{\hat{m}_{n,\omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}}$ est la ddp de $\hat{m}_{n,\omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}$.

La ddp de la valeur du pixel test est supposée distribuée suivant un modèle de cibles fluctuantes. La ddp f_{X_n} sera donc considérée comme étant une loi gamma de moyenne $m_n(1+S)$ et d'ordre L .

Avec l'approximation précédente, \hat{m}_{n,ω_n} est considérée comme étant une variable aléatoire gaussienne. On en déduit que la ddp de $\hat{m}_{n,\omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}$ est la ddp d'une variable aléatoire log-normale. La ddp de $\hat{m}_{n,\omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}$ peut alors s'exprimer sous la forme suivante :

$$f_{\hat{m}_{n,\omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}}(m|m_n, \omega_n, L) \triangleq \frac{\exp\left[-\frac{(\log(\frac{m}{m_n}) + \frac{1}{2}\zeta_{n,\omega_n}^2)^2}{2\zeta_{n,\omega_n}^2}\right]}{m \zeta_{n,\omega_n} \sqrt{2\pi}}, \quad m > 0. \quad (4.29)$$

La probabilité de détection est obtenue à partir de la ddp de la statistique de décision :

$$\mathcal{P}_d^{\text{LQ-CFAR}}(\tau_n|\omega_n, L, S) \triangleq \int_{\tau_n}^\infty f_{X_n/\hat{m}_{n,\omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}}(t|\omega_n, L, S) dt. \quad (4.30)$$

Après des calculs un peu fastidieux (cf. Annexe A.5), on obtient l'expression suivante :

$$\mathcal{P}_d^{\text{LQ-CFAR}}(\tau_n|\omega_n, L, S) = \frac{\exp(-\zeta_{n,\omega_n}^2/8)}{\zeta_{n,\omega_n} \Gamma(L) \sqrt{2\pi}} \times \int_0^\infty u^{-3/2} \Gamma\left(L, \frac{L u \tau_n}{1+S}\right) \exp\left[-\frac{\log(u)^2}{2\zeta_{n,\omega_n}^2}\right] du. \quad (4.31)$$

On en déduit directement la probabilité de fausse alarme :

$$\mathcal{P}_{fa}^{\text{LQ-CFAR}}(\tau_n|\omega_n, L) = \frac{\exp(-\zeta_{n,\omega_n}^2/8)}{\zeta_{n,\omega_n} \Gamma(L) \sqrt{2\pi}} \times \int_0^\infty u^{-3/2} \Gamma(L, L u \tau_n) \exp\left[-\frac{\log(u)^2}{2\zeta_{n,\omega_n}^2}\right] du. \quad (4.32)$$

À partir de l'équation 4.32, il est possible de calculer numériquement la valeur du seuil de détection correspondant à une probabilité de fausse alarme fixée. Cette expression de la probabilité de fausse alarme ne dépend en effet que de paramètres connus qui sont : l'ordre L du bruit gamma, la forme et la taille de la région de référence. Le détecteur obtenu peut donc être considéré comme un détecteur TFAC dans le cadre de l'approximation considérée.

4.1.4 Caractérisation du détecteur LQ-CFAR

Intéressons nous tout d'abord à l'évolution de la probabilité de détection du LQ-CFAR en fonction du contraste S de la cible par rapport au fond. La figure FIG. 4.1 présente cette caractéristique pour un modèle de cible fluctuante, pour différentes tailles de la région de référence (de forme carrée) et pour deux ordres de bruit gamma différents ($L = 1$ et $L = 4$). Cette figure a été obtenue par calcul numérique en utilisant l'équation 4.31 de la probabilité de détection du LQ-CFAR. En premier lieu, on remarque que la probabilité de détection du LQ-CFAR augmente avec la taille de la région de référence et tend vers la \mathcal{P}_d du détecteur idéal. Rappelons que le détecteur idéal utilise la valeur vraie du fond et que ses performances représentent les meilleures performances que l'on peut espérer obtenir. La probabilité de détection du LQ-CFAR suit la même évolution que la \mathcal{P}_d du détecteur idéal et peut être sensiblement inférieure pour des petites tailles de fenêtre.

Il était également prévisible que la probabilité de détection du CA-CFAR soit supérieure à la \mathcal{P}_d du LQ-CFAR sur fond homogène car l'estimateur de la valeur du fond utilisé par le LQ-CFAR a une variance d'estimation supérieure à celle de la moyenne arithmétique (CA-CFAR). Afin de mieux caractériser cette chute de la \mathcal{P}_d du LQ-CFAR sur fond homogène, nous proposons de calculer le rapport suivant :

$$\rho = \frac{\mathcal{P}_d^{\text{LQ-CFAR}}}{\mathcal{P}_d^{\text{CA-CFAR}}} \quad (4.33)$$

entre la \mathcal{P}_d du LQ-CFAR $\mathcal{P}_d^{\text{LQ-CFAR}}$ et la \mathcal{P}_d du CA-CFAR $\mathcal{P}_d^{\text{CA-CFAR}}$.

La figure FIG. 4.2 représente l'évolution de ρ en fonction de la probabilité de fausse alarme souhaitée α pour différentes tailles de la région de référence (de forme carrée) et pour différents ordres L du bruit gamma ($L = 1$ et $L = 4$). Ces résultats sont obtenus en considérant la même région de référence pour chacune des techniques, un fond homogène et une cible fluctuante de RSB fixé à 7 dB . On observe une forte différence entre la probabilité de détection du LQ-CFAR et celle du CA-CFAR dans le cas d'un bruit gamma d'ordre $L = 1$. Cette différence est bien plus faible pour un bruit gamma d'ordre $L = 4$.

En utilisant le détecteur LQ-CFAR sur des fonds homogènes, on obtiendra donc des probabilités de détection moins bonnes que pour le CA-CFAR.

Analysons maintenant la capacité de régulation du taux de fausse alarme du LQ-CFAR en comparaison du CA-CFAR. Pour cette comparaison, nous considérerons un fond inhomogène (représenté sur la figure FIG.4.3) et un bruit distribué suivant une loi gamma d'ordre 4. Le logarithme de la valeur

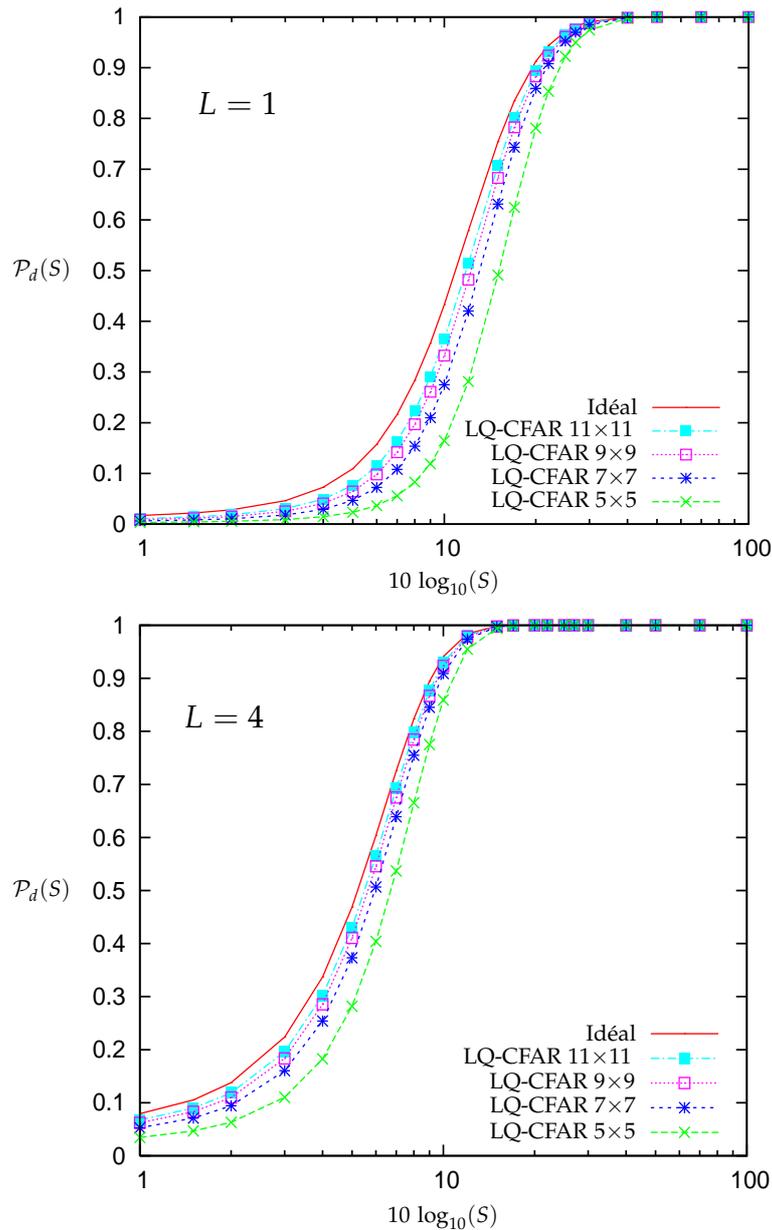


FIG. 4.1 – Évolution de la probabilité de détection du LQ-CFAR en fonction du contraste S de la cible (modèle de cible fluctuante) pour différentes tailles de régions de référence. Les courbes ont été obtenues par calcul numérique à partir de l'équation 4.31. La courbe en trait plein correspond à la \mathcal{P}_d du détecteur idéal. Le seuil de détection a été choisi pour une probabilité de fausse alarme égale à $\alpha = 10^{-4}$. Au dessus les résultats sont obtenus avec un bruit gamma d'ordre $L = 1$, en dessous les résultats sont obtenus pour un bruit gamma d'ordre $L = 4$.

du fond inhomogène est obtenu par filtrage d'un bruit gaussien de variance 10 à l'aide d'un noyau gaussien de taille 2.2 pixels. Pour chaque pixel du fond étudié et pour une région de référence de taille 7×7 pixels, on estime à partir de $3.5 \cdot 10^5$ réalisations la probabilité de fausse alarme et la probabilité de détection du CA-CFAR et du LQ-CFAR. Le modèle de cible fluctuante est considéré avec un RSB fixé à 7 dB et la probabilité de fausse alarme souhaitée est égale à $\alpha = 10^{-4}$.

Afin d'analyser les fluctuations de la \mathcal{P}_d et de la \mathcal{P}_{fa} en fonction de la

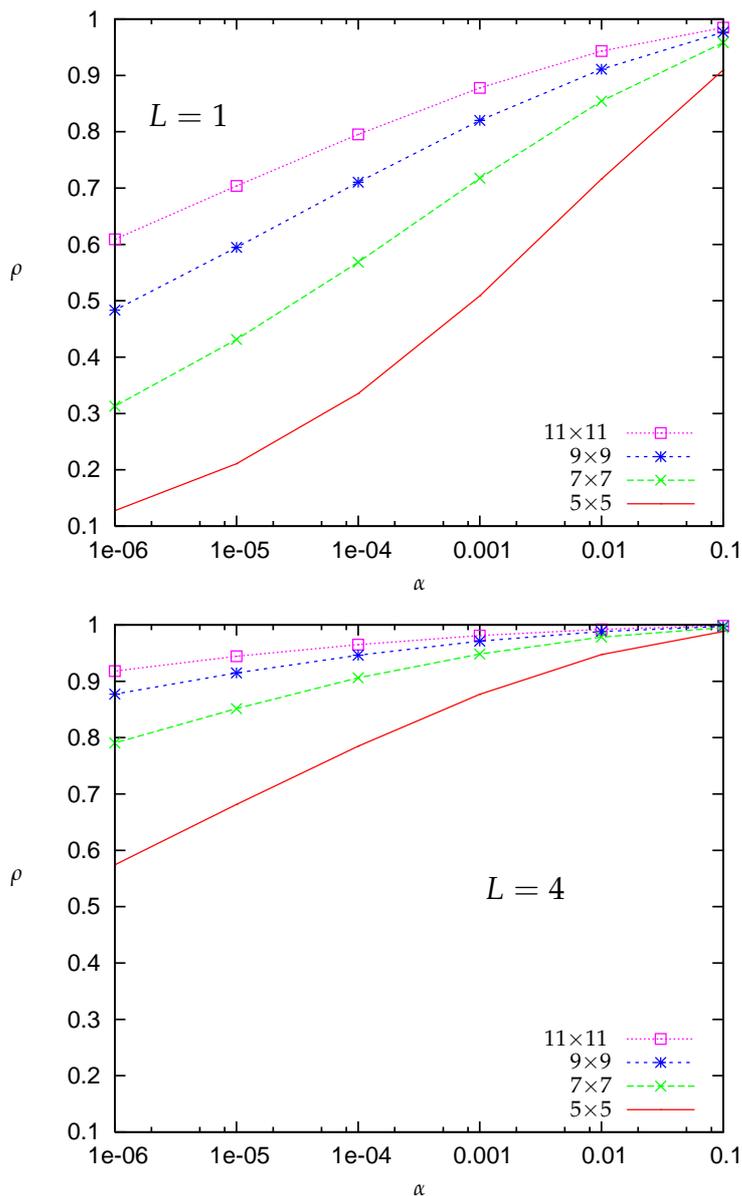


FIG. 4.2 – Évolution de ρ en fonction de la probabilité de fausse alarme souhaitée α pour différentes tailles de régions de référence. On considère un cible fluctuante de RSB égal à 7 dB et un fond homogène. Au dessus les résultats sont obtenus en considérant un bruit gamma d'ordre $L = 1$, en dessous les résultats sont obtenus pour un bruit gamma d'ordre $L = 4$.

position de la cible, pour chaque pixel, nous représenterons la \mathcal{P}_d estimée en fonction de la \mathcal{P}_{fa} estimée. On obtient ainsi un nuage de point qui permet de juger de la fluctuation des performances des détecteurs. Il est ainsi possible d'observer à la fois la différence entre la \mathcal{P}_{fa} souhaitée α et la \mathcal{P}_{fa} estimée mais également les variations de la \mathcal{P}_d estimée. Afin d'effectuer des comparaisons, les analyses sont présentées sur deux types de fonds de même taille, l'un des fonds est homogène (cf. figure FIG.4.4), l'autre est inhomogène (cf. figure FIG.4.5).

Intéressons nous tout d'abord au cas du fond homogène (figure FIG.4.4). Les performances théoriques du CA-CFAR sur un fond homogène, comme celles du LQ-CFAR, peuvent être représentées par un unique point car la \mathcal{P}_{fa}

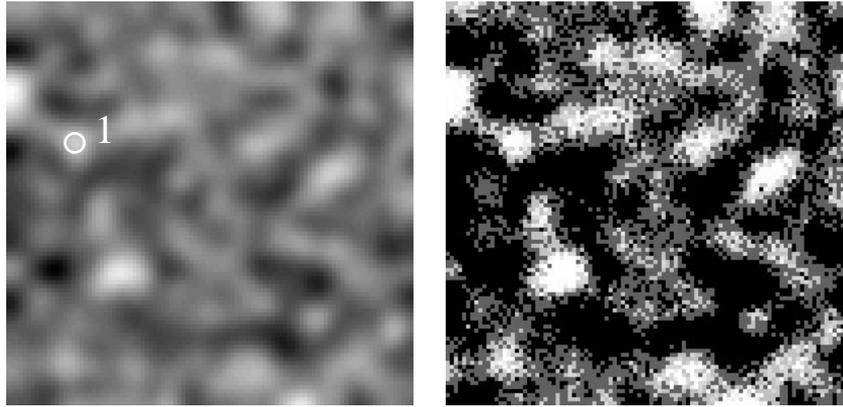


FIG. 4.3 – À gauche, le fond (100×100) utilisé pour l'expérience (visualisation du logarithme de la valeur du fond). Le rond dessiné sur ce fond indique la position de la cible 1. À droite, un exemple de données générées à partir du fond présenté (échelle des niveaux de gris modifiée).

estimée est égale à la \mathcal{P}_{fa} souhaitée et la \mathcal{P}_d ne fluctue pas. Les fluctuations que l'on observe (nuage de points horizontal) sur les résultats sont dues au nombre limité de réalisations utilisées ($3.5 \cdot 10^5$ réalisations) lors de cette expérience. La largeur du nuage de points est fixée par la variance d'estimation de la probabilité de fausse alarme. Les résultats sur fond homogène permettent ainsi de visualiser la variance d'estimation des \mathcal{P}_{fa} et \mathcal{P}_d estimées. La variance d'estimation sur la \mathcal{P}_{fa} est plus grande pour le CA-CFAR que pour le LQ-CFAR car il est d'autant plus difficile d'estimer une \mathcal{P}_{fa} que sa valeur est faible [97] et la valeur moyenne de la \mathcal{P}_{fa} est plus faible pour le CA-CFAR que celle du LQ-CFAR.

La figure FIG.4.5 présente les résultats obtenus sur le fond inhomogène étudié. On observe les fortes fluctuations des performances du CA-CFAR comparées aux performances du LQ-CFAR. On peut également observer que la \mathcal{P}_{fa} du LQ-CFAR estimée moyenne est plus proche de la \mathcal{P}_{fa} souhaitée que la \mathcal{P}_{fa} du CA-CFAR estimée moyenne. Les \mathcal{P}_{fa} du LQ-CFAR estimées pour chaque pixel sur fond inhomogène sont plus dispersées que dans le cas du fond homogène. Ces fluctuations de la \mathcal{P}_{fa} estimée du LQ-CFAR en fonction du pixel étudié (par rapport à la \mathcal{P}_{fa} souhaitée) sont probablement imputables à des erreurs de modèles. En effet, le fond utilisé lors de cette expérience est proche mais ne correspond pas exactement au modèle de fond du LQ-CFAR. Ces erreurs de modèle peuvent se traduire par une estimation biaisée de la valeur du fond au pixel test, ce qui induit une fluctuation des performances du LQ-CFAR (bien plus faible que les fluctuations des performances du CA-CFAR). De plus, la \mathcal{P}_d du LQ-CFAR estimée moyenne est supérieure à la \mathcal{P}_d estimée moyenne du CA-CFAR. Ces résultats illustrent l'intérêt d'utiliser le LQ-CFAR sur des fonds inhomogènes. Le LQ-CFAR permettra une meilleure régulation du taux de fausse alarme et peut conduire à une meilleure probabilité de détection que pour le CA-CFAR.

Pour un fond homogène, on observe sur la figure FIG. 4.4 un écart entre la probabilité de fausse alarme souhaitée et la probabilité de fausse alarme moyenne du LQ-CFAR. Cet écart, qui est du même ordre de grandeur que pour un fond inhomogène (cf. figure FIG. 4.5), diminue quand le nombre de pixels de référence augmente. Ainsi, pour une probabilité de fausse alarme

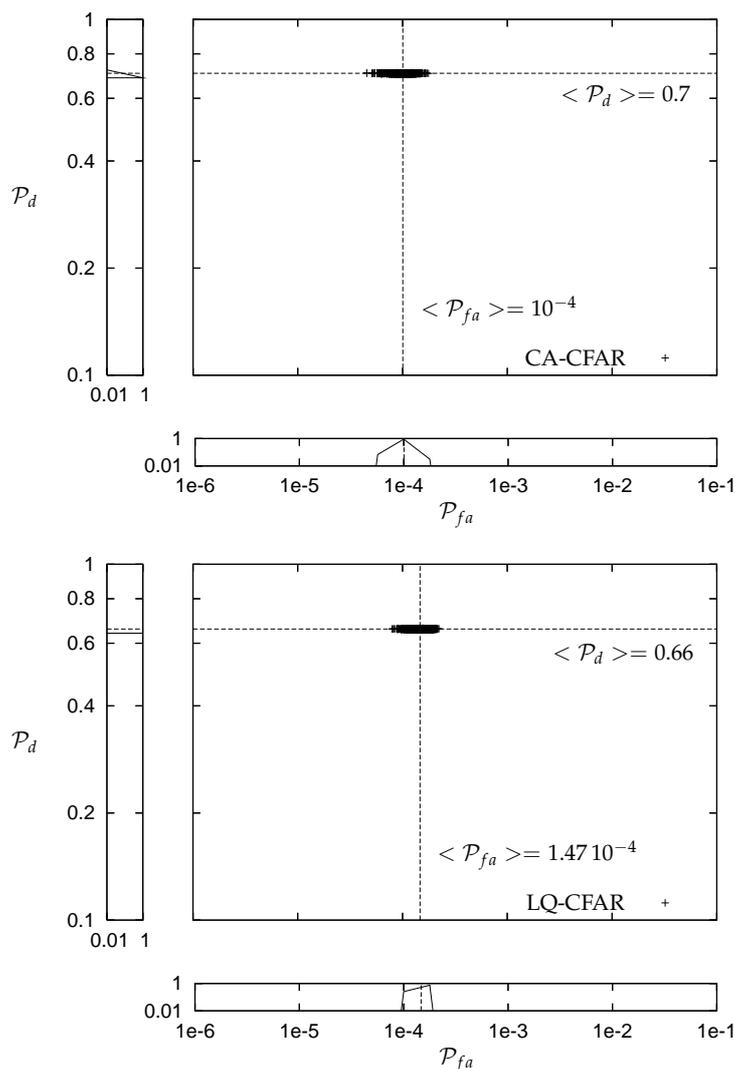


FIG. 4.4 – La figure principale représente la \mathcal{P}_d estimée en fonction de la \mathcal{P}_{fa} estimée ($\alpha = 10^{-4}$) pour un fond homogène. Les deux figures annexes présentent les histogrammes des fréquences d'apparition (les deux axes sont en échelle logarithmique) de la \mathcal{P}_{fa} estimée et de la \mathcal{P}_d estimée. En haut, les résultats obtenus pour le CA-CFAR, en bas, les résultats obtenus pour le LQ-CFAR. Les lignes en pointillés indiquent la \mathcal{P}_d et la \mathcal{P}_{fa} estimées en moyenne sur tous les pixels.

souhaitée égale à $\alpha = 10^{-4}$ et un bruit gamma d'ordre $L = 4$, la probabilité de fausse alarme obtenue avec le détecteur LQ-CFAR sur un fond homogène est égale à $1.2 \cdot 10^{-4}$ pour une région de référence de taille 9×9 pixels et $1.1 \cdot 10^{-4}$ pour une taille de 11×11 pixels. Remarquons, pour finir, que ce léger écart sur la probabilité de fausse alarme reste limité et surtout bien inférieur aux fluctuations de la probabilité de fausse alarme du CA-CFAR sur fond inhomogène.

Lors de l'expérience précédente sur fond inhomogène, nous avons observé que le détecteur CA-CFAR ne permet pas d'obtenir une régulation correcte du taux de fausse alarme. On peut alors envisager d'adapter la forme et la taille de la région de référence afin de corriger ce problème et de comparer les performances obtenues à celles du LQ-CFAR. Nous souhaitons présenter

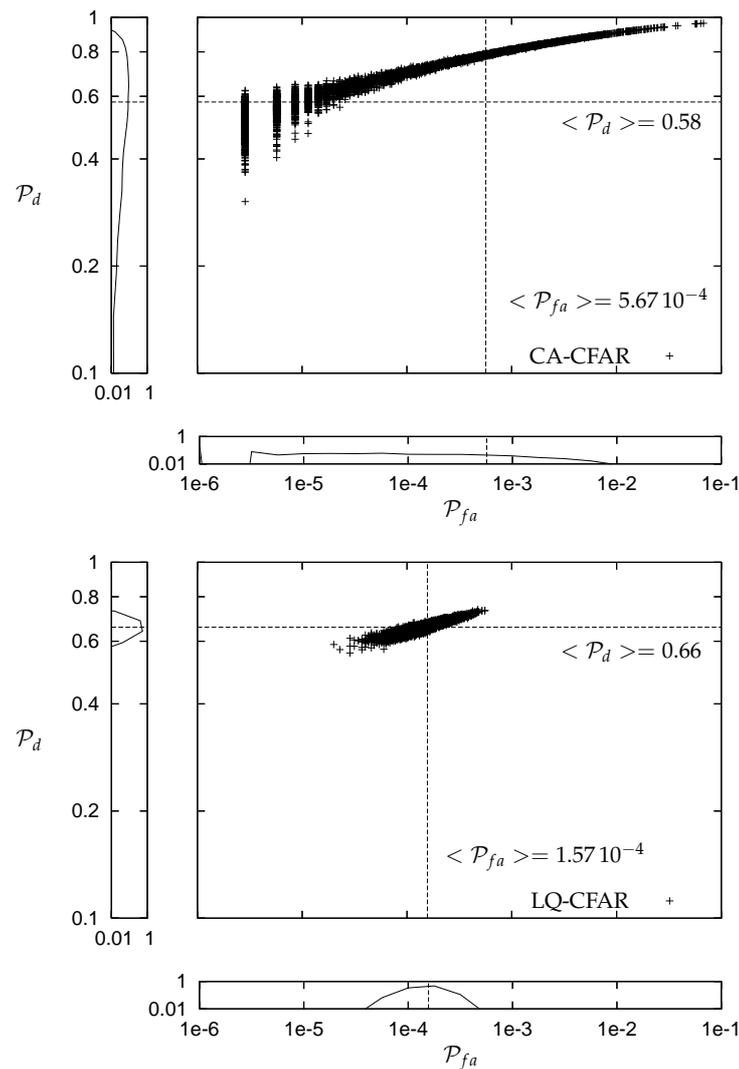


FIG. 4.5 – La figure principale représente la \mathcal{P}_d estimée en fonction de la \mathcal{P}_{fa} estimée ($\alpha = 10^{-4}$) pour le fond inhomogène étudié. Les deux figures annexes présentent les histogrammes des fréquences d'apparition (les deux axes sont en échelle logarithmique) de la \mathcal{P}_{fa} estimée et de la \mathcal{P}_d estimée. En haut, les résultats obtenus pour le CA-CFAR, en bas, les résultats obtenus pour le LQ-CFAR. Les lignes en pointillés indiquent la \mathcal{P}_d et la \mathcal{P}_{fa} estimées en moyenne sur tous les pixels.

une telle comparaison pour la cible 1 dont la position est indiquée sur le fond utilisé à la figure FIG. 4.3. Les résultats de cette comparaison sont présentés à la figure FIG. 4.6. Les paramètres de simulation sont identiques à ceux de l'expérience précédente à l'exception du fait que l'on envisage plusieurs probabilités de fausse alarme α de consigne.

On peut remarquer qu'avec une région de référence de taille 7×7 pixels le détecteur CA-CFAR ne permet pas de réguler correctement le taux de fausse alarme. La probabilité de fausse alarme estimée du CA-CFAR est supérieure à la probabilité de fausse alarme souhaitée α , ce qui explique pourquoi la probabilité de détection du CA-CFAR est supérieure à la probabilité de détection du détecteur idéal. Le détecteur LQ-CFAR permet un meilleur respect du taux

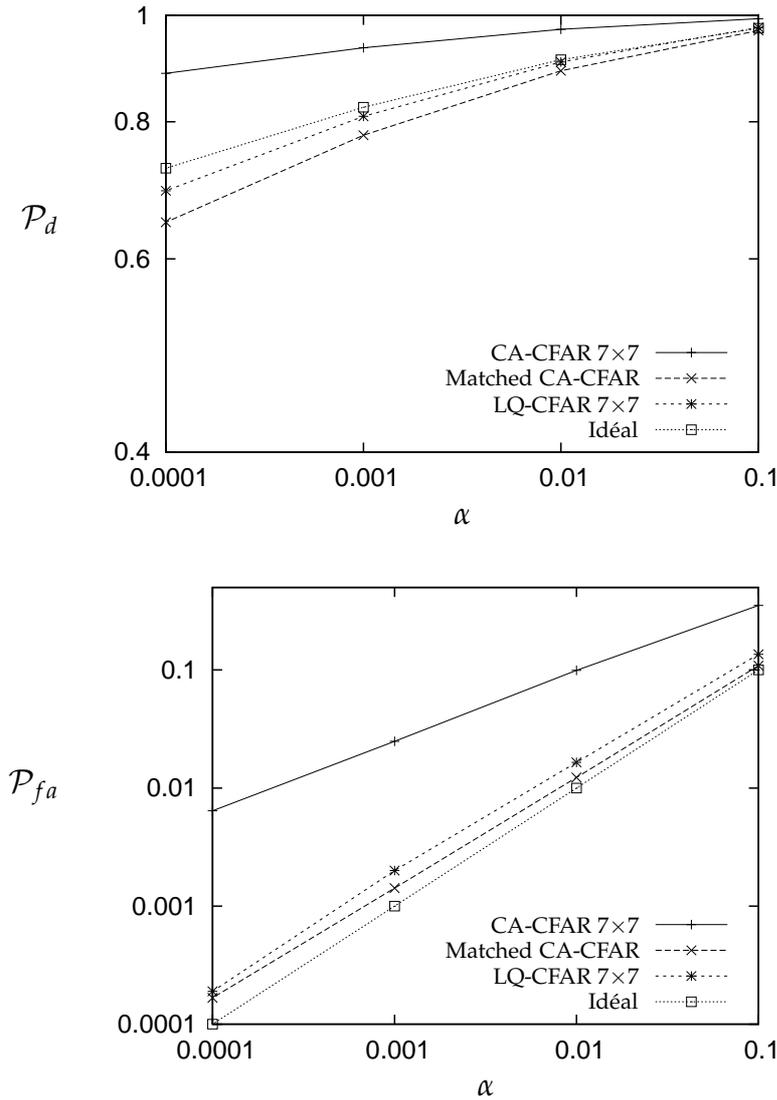


FIG. 4.6 – En haut, évolution de la probabilité de détection estimée en fonction de la probabilité de fausse alarme de consigne α . En bas, évolution de la probabilité de fausse alarme estimée en fonction de la probabilité de fausse alarme de consigne α . Les résultats sont présentés pour les détecteurs CA-CFAR (région de référence de taille 7×7 pixels), Matched CA-CFAR, LQ-CFAR (région de référence de taille 7×7 pixels) et le détecteur idéal (fond connu). Pour cette expérience, nous considérons la cible 1 dont la position est indiquée par un rond sur la figure FIG. 4.3.

de fausse alarme que le détecteur CA-CFAR pour une région de référence de taille 7×7 pixels.

Toujours pour la cible 1, utilisons maintenant le détecteur Matched CA-CFAR présenté à la section 3.3 et qui consiste à adapter la forme et la taille de la région de référence. Rappelons que ce détecteur est irréalisable en pratique et ne présente un intérêt que pour l'analyse des résultats. La taille et la forme de la région de référence du Matched CA-CFAR sont choisies parmi un ensemble de région de référence (cf. figure FIG. 3.12) de manière à obtenir la meilleure régulation du taux de fausse alarme possible et la meilleure probabilité de détection. Pour la position testée (cible 1), la région de référence choisie pour le Matched CA-CFAR est présentée à la figure FIG. 4.7.

Une fois la région de référence choisie, nous calculons les performances du Matched CA-CFAR en utilisant les expressions exactes du CA-CFAR sur des fonds inhomogènes (équation 2.22).

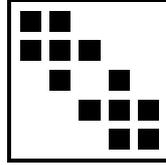


FIG. 4.7 – Région de référence utilisée pour le détecteur Matched CA-CFAR. Les carrés noirs indiquent les pixels qui constituent la région de référence. Cette région a été sélectionnée manuellement afin d’obtenir la meilleure régulation possible du taux de fausse alarme parmi les régions présentées à la figure FIG. 3.12.

Sur la figure FIG. 4.6, on peut remarquer que la probabilité de détection obtenue par le Matched CA-CFAR est inférieure à la probabilité de détection du LQ-CFAR avec une région de référence de 7×7 pixels. La maîtrise du taux de fausse alarme obtenue par le Matched CA-CFAR est juste légèrement meilleure que celle obtenue par le LQ-CFAR. Cependant le Matched CA-CFAR nécessite un choix manuel d’une région de référence adaptée au fond testé alors que le LQ-CFAR est une technique de détection entièrement automatique. Cet exemple montre clairement l’intérêt d’utiliser le détecteur LQ-CFAR sur des fonds inhomogènes.

4.1.5 Discussion

Pour réaliser une détection TFAC avec le détecteur LQ-CFAR, la ddp de $\hat{\mu}_{n,\omega_n}$ a été décrite par une ddp normale ce que nous avons justifié à l’aide du théorème central limite. Lors de nos recherches, nous avons cependant pu constater qu’une autre hypothèse était possible et permettait d’obtenir des résultats relativement similaires. En effet, il est également possible de considérer que $\hat{m}_{n,\omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}$ est une variable aléatoire gamma de moyenne m_n et d’ordre $N_{eq} L$ où N_{eq} est un paramètre qui correspond à un nombre équivalent de pixels et dont la valeur est explicitée dans la suite. Comme nous allons le voir, cette approximation gamma est intéressante pour comparer les performances du CA-CFAR et du LQ-CFAR. De plus, l’expression des performances du LQ-CFAR formulées à partir de cette approximation gamma sont plus simples et plus facilement calculables que celles obtenues précédemment.

L’approximation gamma de la ddp $\hat{m}_{n,\omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}$ est plus difficilement justifiable que précédemment. Néanmoins, en considérant cette approximation, on peut facilement formuler de nouvelles expressions des performances du LQ-CFAR. Pour un modèle de cible fluctuante, ces performances ont exactement les mêmes expressions que les performances approchées du détecteur CA-CFAR sur des fonds inhomogènes (équation 2.31 et équation 2.32) excepté que le paramètre B est nul car l’estimateur utilisé par le LQ-CFAR est non biaisé et que la valeur du paramètre N_{eq} est exprimée par une nouvelle relation. L’expression du paramètre N_{eq} peut être obtenue après des calculs simples (cf. Annexe A.3) :

$$\zeta_{n,\omega_n}^2 = \zeta(2, N_{eq} L). \quad (4.34)$$

La valeur du paramètre N_{eq} est donc liée à l'ordre L du bruit gamma et à la variance ς_{n,ω_n}^2 de $\hat{\mu}_{n,\omega_n}$. Pour juger de la qualité des deux approximations, nous proposons de comparer la ddp de $\hat{m}_{n,\omega_n}^{LQ-CFAR}$ estimée par une méthode de Monte Carlo (10^8 réalisations) aux ddp gamma ou lognormale. Lors de cette expérience, nous comparerons également la ddp estimée de la statistique $X_n / \hat{m}_{n,\omega_n}^{LQ-CFAR}$ aux ddp de cette statistique selon les deux approximations.

Cette expérience est réalisée pour deux ordres de bruit gamma différents ($L = 1$ et $L = 4$) et un fond log-quadratique présenté à la figure FIG. 4.8. La taille de la région de référence sera fixée à 7×7 pixels et on considérera le cas où il n'y a pas de cible au pixel test.

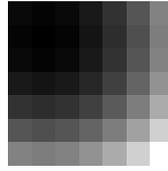


FIG. 4.8 – Visualisation du logarithme de la valeur du fond (7×7) utilisé lors de l'expérience. Le logarithme de la valeur du fond correspond à une fonction quadratique, qui est décentrée par rapport au pixel test placé au centre. La valeur maximale du fond est indiquée par le pixel dont le niveau de gris est le plus clair.

Les résultats de cette expérience sont présentés à la figure FIG. 4.9 pour $L = 1$ et à la figure FIG. 4.10 pour $L = 4$.

On remarque grâce à ces résultats qu'une ddp lognormale permet de mieux modéliser la ddp de $\hat{m}_{n,\omega_n}^{LQ-CFAR}$. La ddp gamma est tout de même une bonne approximation de la ddp de $\hat{m}_{n,\omega_n}^{LQ-CFAR}$. En effet, si on s'intéresse à la densité de probabilité de $X_n / \hat{m}_{n,\omega_n}^{LQ-CFAR}$, la ddp obtenue en considérant l'approximation gamma est proche de la ddp estimée. On peut également noter que les deux approximations sont d'autant mieux vérifiées que l'ordre du bruit gamma L est élevé.

L'approximation gamma est également pour comparer les performances du LQ-CFAR et du CA-CFAR. Notamment, pour juger de la perte de détection du LQ-CFAR par rapport au CA-CFAR sur des fonds homogènes, on peut raisonner directement sur le paramètre N_{eq} qui correspond à un nombre équivalent de pixels dans la région de référence. Plus la valeur du paramètre N_{eq} est élevée, plus la valeur du seuil de détection utilisée sera faible et meilleure sera la probabilité de détection. Le tableau TAB. 4.1 indique la valeur du paramètre N_{eq} pour différentes tailles de région de référence. Ce

N_{eq}	Taille de ω_n (N_n)				
	3×3 (8)	5×5 (24)	7×7 (48)	9×9 (80)	11×11 (120)
$L = 1$	0.9	3.8	8	13.6	20.5
$L = 2$	0.8	4.5	9.8	16.9	25.8
$L = 4$	0.8	5	11	19.1	29.2

TAB. 4.1 – Ce tableau indique le nombre de pixel équivalent N_{eq} pour différentes tailles de la région de référence ω_n .

tableau indique, par exemple, que le détecteur LQ-CFAR utilisé sur un fond

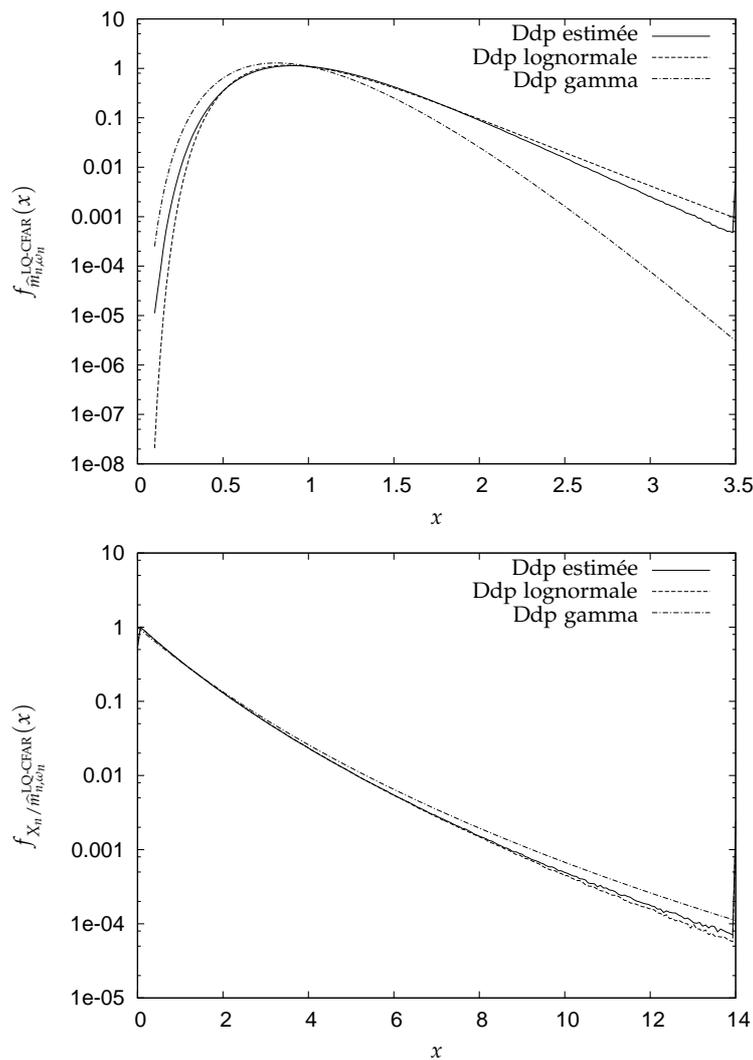


FIG. 4.9 – En haut, les ddps de $\hat{m}_{n,\omega_n}^{LQ-CFAR}$ estimées et obtenues en considérant chacune des approximations (lognormale ou gamma). En bas, les ddps de $X_n / \hat{m}_{n,\omega_n}^{LQ-CFAR}$ estimées et obtenues en considérant chacune des approximations (lognormale ou gamma). Les résultats ont été obtenus en considérant un bruit gamma d'ordre $L = 1$.

log-quadratique de taille 7×7 a la même probabilité de détection que le détecteur CA-CFAR utilisant une région de référence homogène composée de $N_{eq} = 11$ pixels pour un bruit gamma d'ordre $L = 4$. On remarque également que le paramètre N_{eq} prend des valeurs particulièrement faibles pour des régions de référence de taille 3×3 . La probabilité de détection associée à de telles valeurs de N_{eq} est très faible (cf. figure FIG. 2.3), aussi il apparaît inutile d'utiliser le détecteur LQ-CFAR avec de telles tailles de région de référence.

4.2 SÉLECTION DE MODÈLE

Nous avons pu constater précédemment que le détecteur LQ-CFAR présente une meilleure capacité de régulation du taux de fausse alarme sur fond inhomogène que celle du CA-CFAR au prix d'une baisse de la probabilité de détection sur des fonds homogènes par rapport à la \mathcal{P}_d du CA-CFAR. Pour ré-

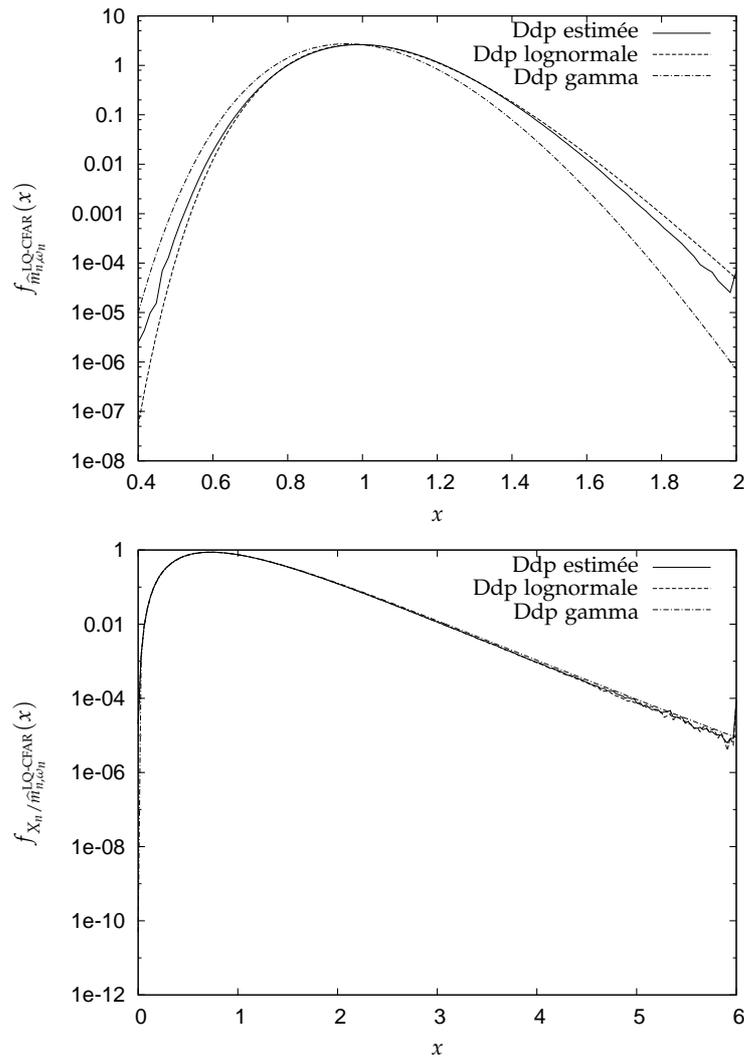


FIG. 4.10 – En haut, les ddps de $\hat{m}_{n,\omega_n}^{LQ-CFAR}$ estimées et obtenues en considérant chacune des approximations (lognormale ou gamma). En bas, les ddps de $X_n/\hat{m}_{n,\omega_n}^{LQ-CFAR}$ estimées et obtenues en considérant chacune des approximations (lognormale ou gamma). Les résultats ont été obtenus en considérant un bruit gamma d'ordre $L = 4$.

duire cette baisse de performance sur fond homogène et obtenir une maîtrise du taux de fausse alarme améliorée sur fond inhomogène, nous proposons de sélectionner automatiquement le détecteur à utiliser entre le CA-CFAR et le LQ-CFAR.

4.2.1 Choix du modèle

Ce choix entre les deux détecteurs CA-CFAR et LQ-CFAR peut être fondé sur plusieurs solutions [3, 82, 123]. Le problème du choix de modèle a déjà été intensivement étudié, notamment par Akaike, Schwarz, Rissanen ou Wallace [63]. Pour réaliser cette sélection, nous proposons d'utiliser le principe de minimisation de la complexité stochastique (MCS) introduit par Rissanen [102]. Une description plus détaillée du principe de minimisation de la complexité stochastique sera fournie dans le chapitre suivant.

Pour chaque modèle, nous calculons le nombre moyen de nats¹ nécessaire à la description des données et du modèle considéré. Nous noterons ce nombre $\Delta_n^{\text{CA-CFAR}}$ lorsque les données sont décrites avec le modèle de fond du CA-CFAR (qui correspond à un fond homogène) et $\Delta_n^{\text{LQ-CFAR}}$ pour le modèle associé au LQ-CFAR (log-quadratique). Le détecteur choisi est alors celui qui minimise le nombre de nat pour décrire le fond ou, plus clairement, la détection est réalisée avec le LQ-CFAR si $\Delta_n^{\text{LQ-CFAR}} < \Delta_n^{\text{CA-CFAR}}$ et elle est réalisée avec le CA-CFAR dans le cas contraire.

Pour un modèle fixé, la longueur de description se décompose en deux termes :

- le nombre moyen de nats nécessaire pour représenter les données connaissant le modèle,
- le nombre moyen de nats nécessaire pour décrire le modèle.

Le premier terme correspond à l'opposé de la log-vraisemblance [40] et le second terme est approximativement égal au nombre de paramètres du modèle multiplié par $\log(N_n)/2$ [61].

La longueur de description pour le modèle homogène associé au CA-CFAR est donc :

$$\Delta_n^{\text{CA-CFAR}} \triangleq -N_n \log \left(L^L \Gamma(L) \right) + N_n L \left[1 + \log \left(\hat{m}_n^{\text{CA-CFAR}} \right) \right] - (L-1) \sum_{p \in \omega_n} \log(X_p) + \log(N_n)/2, \quad (4.35)$$

alors que pour le modèle log-quadratique associé au LQ-CFAR, elle vaut :

$$\Delta_n^{\text{LQ-CFAR}} \triangleq -N_n \log \left(L^L \Gamma(L) \right) + L \sum_{p \in \omega_n} \log \left(\hat{m}_{p, \omega_n}^{\text{LQ-CFAR}} \right) - (L-1) \sum_{p \in \omega_n} \log(X_k) + L \sum_{p \in \omega_n} X_p / \hat{m}_{p, \omega_n}^{\text{LQ-CFAR}} + 6 \log(N_n)/2. \quad (4.36)$$

Le calcul et la comparaison de $\Delta_n^{\text{CA-CFAR}}$ et $\Delta_n^{\text{LQ-CFAR}}$ pour chaque position test permet de sélectionner de façon automatique le détecteur à utiliser. On peut alors analyser l'intérêt de cette méthode de sélection de détecteur avec des simulations numériques.

4.2.2 Simulations numériques

Pour analyser, l'intérêt de la sélection de modèle, nous présenterons des résultats obtenus sur deux types de données différentes. Dans un premier temps, nous présenterons des résultats obtenus sur des données synthétiques. Puis, dans un second temps, nous étudierons les résultats obtenus sur un fond réel.

Résultats sur fonds synthétiques

Considérons une région de référence de taille 7×7 , pour laquelle les valeurs du logarithme du fond sont décrites par une fonction quadratique des coordonnées des pixels. Plus précisément, la valeur du logarithme du fond au

¹Le nat est une unité de mesure de la quantité d'information, un nat correspond à $\log(2)$ bits.

pixel p de coordonnées (i_p, j_p) est :

$$\mu_{p,\omega_n} = \text{sign}(C) C^2 (\lambda_p^2 + \kappa_p^2), \quad (4.37)$$

où $\text{sign}(C)$ est la fonction signe égale à 1 si $C \geq 0$ et -1 sinon. Le paramètre C permet de faire varier la courbure du fond, lorsque C est égal à zéro le fond est homogène et de valeur unitaire.

La fonction quadratique, qui définit le logarithme de la valeur du fond, n'est pas centrée sur le pixel test (dont les coordonnées sont (i_n, j_n)) pour ne pas considérer un cas particulier, c'est pourquoi on introduit les coordonnées : $\lambda_p \triangleq i_p - i_n + 2$ et $\kappa_p \triangleq j_p - j_n + 2$.

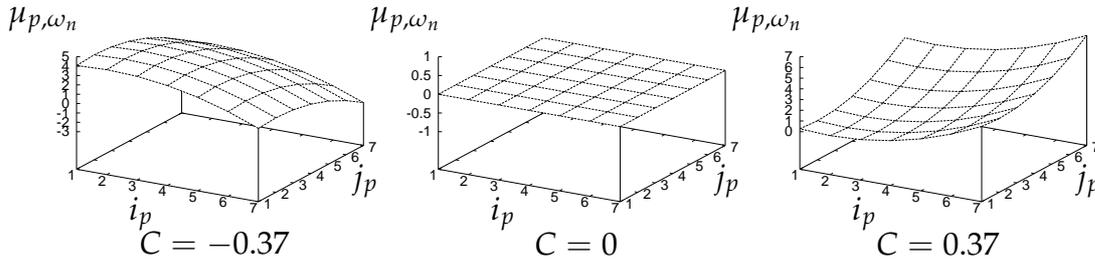


FIG. 4.11 – Exemples de fond log-quadratique généré par différentes valeurs de C .

La figure FIG. 4.11 présente trois exemples de fond obtenus à partir de la définition précédente. Le pixel test est placé au centre de la région de référence et nous considérons une cible non-fluctuante de RSB égal à 16.6 dB . Le fait de ne pas faire fluctuer la cible permet de se concentrer sur la difficulté liée à estimer la valeur du fond.

Les résultats ont été obtenus pour un bruit gamma d'ordre $L = 4$ et l'estimation des performances est réalisée à l'aide de 10^6 réalisations pour une probabilité de fausse alarme souhaitée égale à $\alpha = 10^{-4}$. Les figures FIG. 4.12, FIG. 4.13 et FIG. 4.14 présentent les \mathcal{P}_d et les \mathcal{P}_{fa} estimées pour respectivement le CA-CFAR, le LQ-CFAR et la sélection de modèle en fonction de la valeur du paramètre C .

On remarque tout d'abord le caractère TFAC du détecteur LQ-CFAR quelque soit la valeur du paramètre C . Le détecteur CA-CFAR ne régule pas correctement le taux de fausse alarme pour toutes les valeurs de C , mais possède une probabilité de détection plus élevée que celle du LQ-CFAR sur des fonds quasi-homogènes ($C \simeq 0$). La sélection de modèle tire avantage des deux détecteurs. La probabilité de fausse alarme est mieux régulée avec la sélection de modèle que pour le CA-CFAR et la probabilité de détection de la sélection de modèle est supérieure à la \mathcal{P}_d du LQ-CFAR sur des fonds quasi-homogènes.

La sélection de modèle n'est cependant pas parfaite. On peut observer soit un taux excessif de fausse alarme pour $C \simeq -0.14$, soit une probabilité de détection qui n'est pas la \mathcal{P}_d maximale des détecteurs CA-CFAR et LQ-CFAR pour $C \simeq 0.13$. Dans les deux cas, la dégradation des performances résulte du choix du détecteur CA-CFAR à la place du LQ-CFAR. Ces erreurs de sélection de modèle ont plusieurs origines possibles.

Tout d'abord, le choix du modèle réalisé avec la minimisation de la complexité stochastique ne garantit pas que l'on sélectionne le détecteur le plus adapté au fond du point de vue des performances de détection.

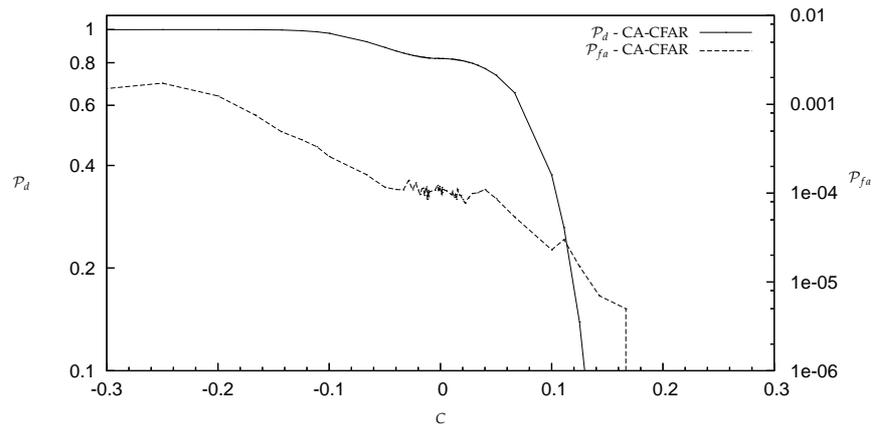


FIG. 4.12 – Cette figure présente l'évolution de la \mathcal{P}_d et de la \mathcal{P}_{fa} en fonction de C pour le CA-CFAR. La probabilité de fausse alarme souhaitée est fixée à $\alpha = 10^{-4}$.

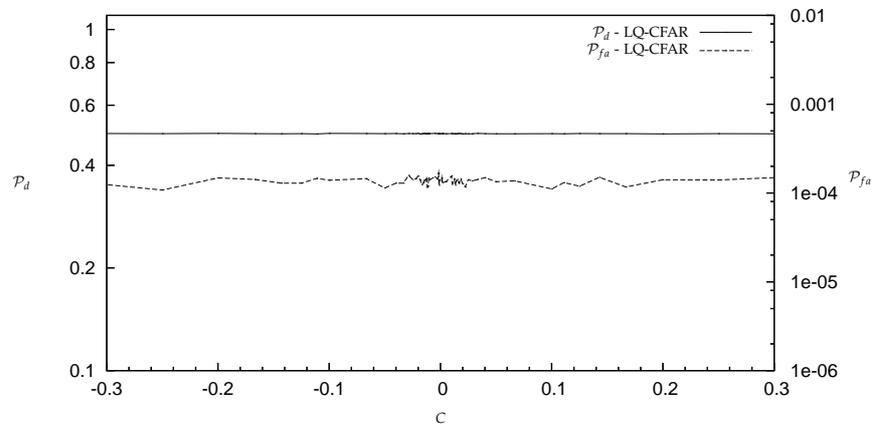


FIG. 4.13 – Cette figure présente l'évolution de la \mathcal{P}_d et de la \mathcal{P}_{fa} en fonction de C pour le LQ-CFAR. La probabilité de fausse alarme souhaitée est fixée à $\alpha = 10^{-4}$.

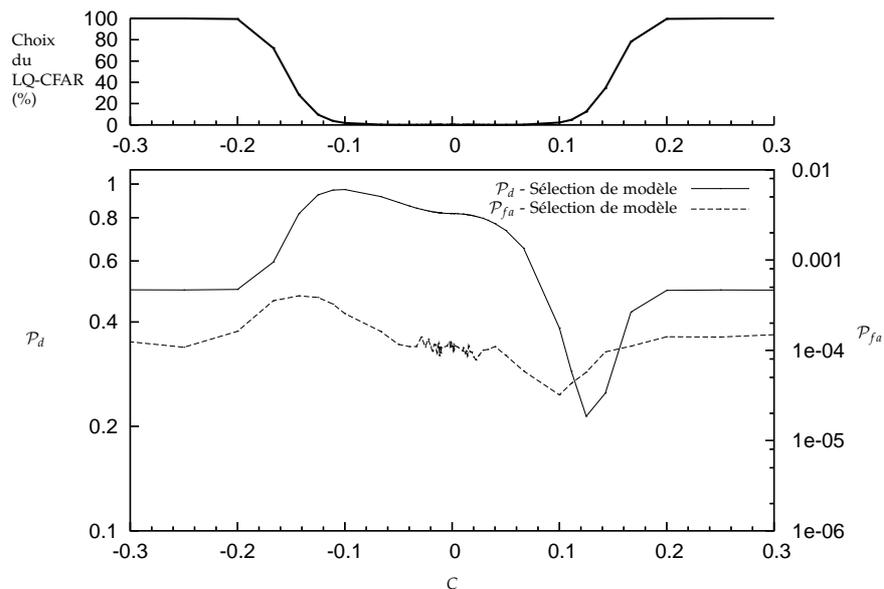


FIG. 4.14 – En haut, cette figure présente l'évolution en pourcentage du nombre de fois où le détecteur LQ-CFAR a été sélectionné. En bas de cette figure, l'évolution de la \mathcal{P}_d et de la \mathcal{P}_{fa} en fonction de C est représentée pour la sélection de modèle. La probabilité de fausse alarme souhaitée est fixée à $\alpha = 10^{-4}$.

D'autre part, il est intéressant de remarquer à partir des équations 4.35 et 4.36 que le choix du modèle selon le critère de la minimisation de la complexité stochastique équivaut à réaliser le test suivant :

$$\sum_{p \in \omega_n} \left[\frac{X_p}{\hat{m}_{p, \omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}} + \log \left(\frac{\hat{m}_n^{\text{CA-CFAR}}}{\hat{m}_{p, \omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}} \right) \right] \underset{\text{CA-CFAR}}{\overset{\text{LQ-CFAR}}{\geq}} N_n - \frac{5}{L} \log \left(\frac{N_n}{2} \right). \quad (4.38)$$

La seuil utilisé par ce test est fixe et dépend uniquement du nombre de pixels dans la région de référence N_n et de l'ordre L du bruit gamma. Aussi on peut constater que le seuil de détection ne dépend pas de la forme de la région de référence, or on sait que la variance d'estimation de l'estimateur utilisé par le LQ-CFAR en dépend. Cet écueil est lié au fait que le terme de codage des paramètres est relativement simplifié [103] par rapport au terme réel de codage des paramètres.

Cette expérience montre néanmoins l'intérêt de la sélection de modèle, qui permet une régulation du taux de fausse alarme relativement bonne à comparer du CA-CFAR et une probabilité de détection obtenue notablement améliorée sur des fonds homogènes par rapport au LQ-CFAR.

Résultats sur fonds réels

Cette deuxième expérience vise à comparer les performances de la sélection de modèle avec les techniques de détection classiques sur des fonds réels. Les données considérées sont issues d'une image RADAR à Synthèse d'Ouverture (RSO ou SAR en anglais) haute résolution (décimétrique) simple vue ($L = 1$). Cette image a été acquise avec le système aéroporté RAMSES [30] et est fournie par l'ONERA.

Lors de cette expérience, nous allons comparer la sélection de modèle à quatre détecteurs : le CA-CFAR, l'OS-CFAR, le TM-CFAR et le LQ-CFAR. Pour ces cinq techniques, nous utiliserons la même région de référence : une région de référence carrée de taille 9×9 . La probabilité de fausse alarme que nous souhaitons obtenir est fixée à $\alpha = 10^{-3}$.

Les techniques OS-CFAR et TM-CFAR disposent de paramètres que l'utilisateur doit ajuster (cf. section 1.4.2). Il s'agit de l'ordre k pour le détecteur OS-CFAR et des ordres T_1 et T_2 pour le TM-CFAR. Les valeurs de ces paramètres sont fixées afin que la probabilité de fausse alarme moyenne estimée sur toute l'image soit proche de la probabilité de fausse alarme souhaitée par l'utilisateur. Ainsi, nous considérerons les valeurs suivantes : $k = 75$, $T_1 = 67$ et $T_2 = 2$.

Les techniques de détection étudiées sont alors utilisées sur les données. Le nombre de détection sur toute l'image, c'est-à-dire le nombre de fois où la statistique de test dépasse le seuil de détection, nous permet une estimation de la \mathcal{P}_{fa} moyenne sur l'image. Pour évaluer la \mathcal{P}_d moyenne sur l'image, nous rencontrons une difficulté car nous ne connaissons pas la valeur du fond. On ne peut alors pas fixer le contraste S de la cible par rapport à la valeur du fond. Pour contourner cette difficulté, le contraste de la cible est alors fixé par rapport à la valeur estimée du fond. Nous proposons d'estimer la valeur du fond avec la même technique que celle utilisée pour la sélection de région

(cf. section 3.1.1), qui consiste à filtrer le logarithme des données par un filtre gaussien. La taille du filtre gaussien est fixé à $\sigma = 1.2$ pixels et nous prenons en compte le pixel central. Nous considérons une cible non-fluctuante dont le contraste par rapport à la valeur estimée du fond correspond à un RSB de 18 dB . Dans ces conditions, le contraste de la cible étant référencé par rapport à une estimation de la valeur du fond, le RSB de la cible par rapport au vrai fond va fluctuer en fonction de la position dans l'image. On peut étudier la fluctuation de ce RSB par une simulation numérique simple. Dans le cas d'un fond homogène connu perturbé par un bruit gamma d'ordre $L = 1$ et filtré par le filtre gaussien considéré, on constate que le RSB fluctue autour de la valeur de 18 dB avec un écart type d'environ 3 dB .

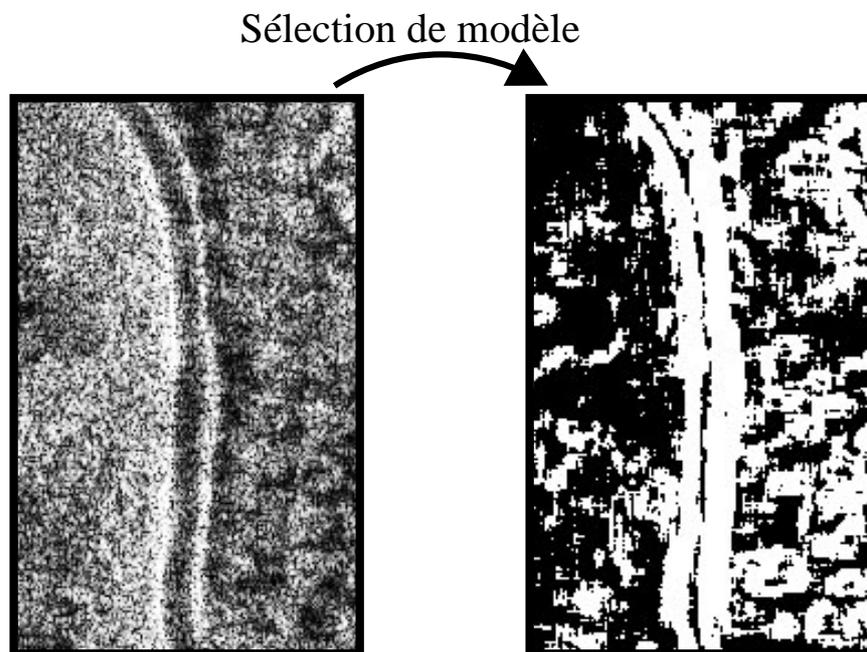


FIG. 4.15 – À gauche, l'extrait d'une image SAR réelle (251×156) acquise par le système RADAR aéroporté RAMSES [30] et fournie par l'ONERA. À droite, l'image de sélection de modèle, où les pixels noirs (resp. blancs) sont les pixels pour lesquels le détecteur CA-CFAR (resp. LQ-CFAR) a été utilisé. Sur cet exemple, le détecteur CA-CFAR (resp. CA-CFAR approx.) est sélectionné dans 55 % (resp. 45 %) des cas.

La figure FIG. 4.15 présente l'image utilisée lors de cette expérience et une image de sélection de modèle qui indique pour chaque pixel quel est le détecteur qui a été sélectionné. Dans le tableau TAB. 4.2, les \mathcal{P}_d moyennes et les \mathcal{P}_{fa} moyennes calculées sur toute l'image pour les détecteurs CA-CFAR, OS-CFAR, TM-CFAR, LQ-CFAR et pour la sélection de modèle (SM) sont regroupées.

	OS-CFAR	TM-CFAR	CA-CFAR	LQ-CFAR	SM
\mathcal{P}_d	0.52	0.53	0.6	0.56	0.64
\mathcal{P}_{fa}	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	$9.2 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$

TAB. 4.2 – Ce tableau présente les \mathcal{P}_d moyennes et les \mathcal{P}_{fa} moyennes calculées sur toute l'image pour les détecteurs CA-CFAR, OS-CFAR, TM-CFAR, LQ-CFAR et pour la sélection de modèle (SM).

À travers cette expérience, on note encore la bonne maîtrise du taux de fausse alarme obtenue avec le LQ-CFAR. Au contraire la \mathcal{P}_{fa} obtenue avec le détecteur CA-CFAR est bien plus grande que la valeur de consigne $\alpha = 10^{-3}$. Les détecteurs OS-CFAR et TM-CFAR présentent un bon contrôle du nombre de fausse alarme, mais cela est en grande partie dû aux choix manuels (et adaptés à l'image de test) des paramètres de ces techniques. L'OS-CFAR et le TM-CFAR ont néanmoins une \mathcal{P}_d plus faible que les détecteurs CA-CFAR ou LQ-CFAR. La sélection de modèle permet d'avoir une probabilité de détection plus élevée que le LQ-CFAR ou que le CA-CFAR au prix d'une légère perte en terme de respect de la \mathcal{P}_{fa} souhaitée par rapport au LQ-CFAR.

Il faut noter que les performances estimées sur toute l'image ne reflètent que des caractéristiques moyennes des performances de détection. En particulier, elles ne nous renseignent pas sur la dispersion des performances. Une technique peut être TFAC en un pixel et non TFAC pour un autre pixel. Cette façon de mesurer les performances peut conduire à des conclusions erronées, d'autant plus que les performances du détecteur sont inhomogènes. Cependant lorsque que l'on ne considère qu'une seule réalisation (données réelles), il n'est pas possible d'estimer pour chaque pixel les \mathcal{P}_{fa} et \mathcal{P}_d , aussi nous utilisons ces performances moyennes comme indicateurs.

Pour compléter ces indicateurs, il est également intéressant d'observer les plans de détection obtenus pour chacune des techniques. La figure FIG. 4.16 présente les fausses alarmes détectées par les différents algorithmes.

Pour le CA-CFAR, on remarque sur la figure FIG. 4.16 que les fausses alarmes sont corrélées avec les motifs (route) présents dans les données. Ce phénomène est moins marqué pour les techniques OS-CFAR et TM-CFAR. Pour le LQ-CFAR, on observe au contraire qu'il y a peu de corrélation entre les fausses alarmes et les motifs présents. Le LQ-CFAR se rapproche en ce sens du détecteur idéal pour lequel il n'y aurait aucune corrélation entre les fausses alarmes et les motifs des données et où les fausses alarmes seraient uniquement liées aux fluctuations du bruit. La sélection de modèle présente plus de fausses alarmes que le LQ-CFAR sans pour autant retrouver une corrélation forte entre les fausses alarmes et les motifs des données (notamment au niveau de la route) comme cela est le cas pour le CA-CFAR.

Concernant la charge de calcul, l'utilisation de la sélection de modèle pour tester tous les pixels de l'image réelle précédente nécessite 860 ms contre environ 640 ms pour le LQ-CFAR et 220 ms pour le CA-CFAR sur un ordinateur standard (PC 3.2 Ghz, Linux 2.6.18, GCC 4.1.2). Il est normal que la sélection de modèle demande un temps de calcul plus grand que le CA-CFAR, cependant le surcoût de temps de calcul est raisonnable. Il est donc envisageable d'implémenter la sélection de modèle dans un système réel, d'autant plus qu'une optimisation du programme de sélection de modèle pourrait conduire à une baisse substantielle du temps de calcul.

Sur cette dernière expérience, on a encore pu montrer l'intérêt de la sélection de modèle. Sur des données réelles, la sélection de modèle permet d'obtenir une régulation du taux de fausse alarme meilleure que celle du CA-CFAR tout en présentant une probabilité de détection supérieure aux techniques de détection standard (CA-CFAR, OS-CFAR et TM-CFAR).

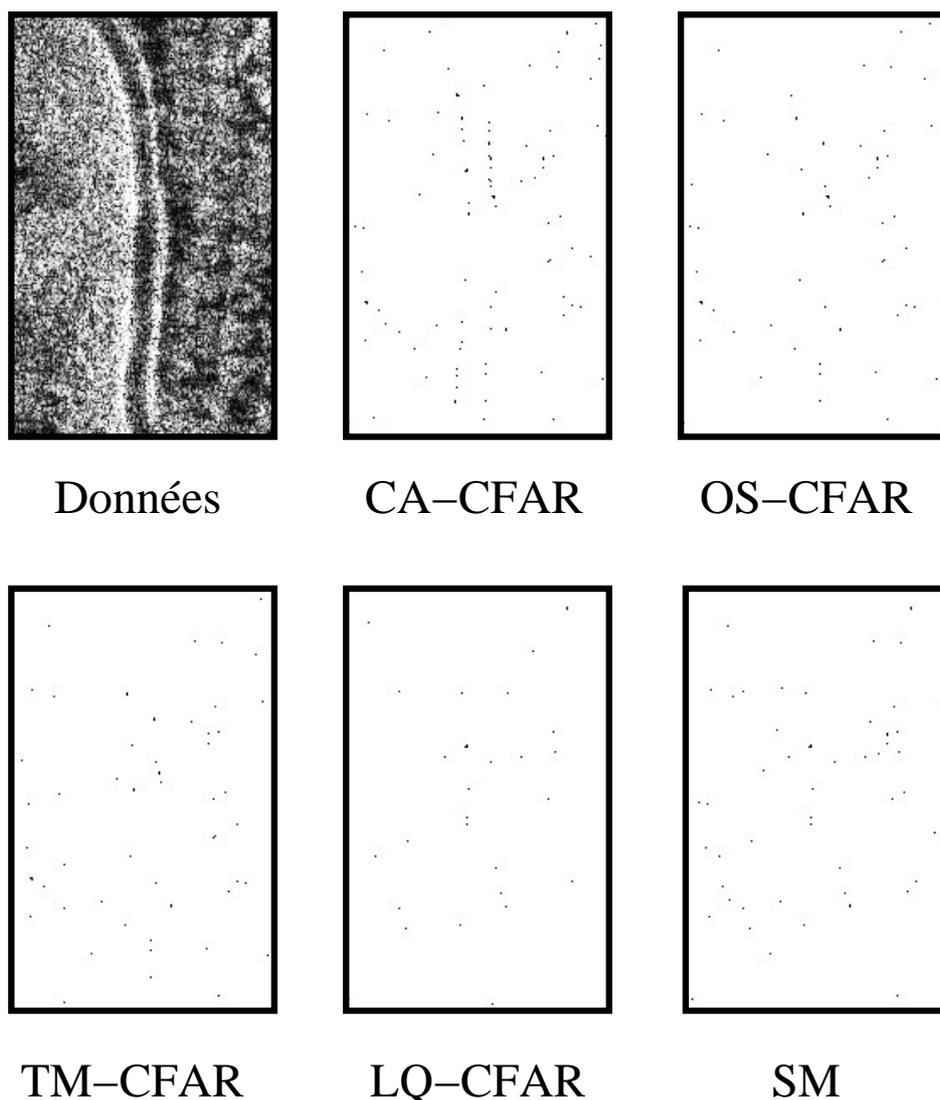


FIG. 4.16 – Présentation du logarithme des données ainsi que des différents plans de fausse alarme obtenus en appliquant les différentes techniques étudiées (CA-CFAR, OS-CFAR, TM-CFAR, LQ-CFAR, SM) sur les données. Un pixel noir représente une fausse alarme.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Lors de ce chapitre, nous avons présenté un nouveau détecteur. Le LQ-CFAR est adapté à des fonds dont le logarithme de la valeur évolue selon une fonction quadratique des coordonnées des pixels. Ce détecteur permet donc une régulation du taux de fausse alarme sur des fonds inhomogènes (dans le cadre du modèle de fond étudié). Cependant le LQ-CFAR présente une probabilité de détection inférieure à celle du CA-CFAR sur des fonds homogènes (pour une même région de référence). Aussi, nous avons proposé une méthode de sélection automatique du détecteur à utiliser en fonction de la nature du fond. Le but étant d'obtenir la \mathcal{P}_d optimale du CA-CFAR sur des fonds homogènes et le caractère TFAC du LQ-CFAR sur les fonds inhomogènes. La méthode que nous avons utilisée pour la sélection du détecteur est fondée sur le principe de la minimisation de la complexité stochastique. Cette méthode

permet d'obtenir une meilleure régulation du taux de fausse alarme que le CA-CFAR et une meilleure probabilité de détection que le LQ-CFAR sur des fonds homogènes.

SURFACE ACTIVE STATISTIQUE

5

SOMMAIRE

5.1	PRÉSENTATION DE LA SURFACE ACTIVE STATISTIQUE	104
5.1.1	Représentation de données par des surfaces maillées	104
5.1.2	Principe de minimisation de la complexité stochastique	109
5.1.3	Critère de complexité stochastique pour la SAS	111
5.1.4	Simplification et déformation du maillage	113
5.1.5	Estimation des valeurs nodales	114
5.2	APPLICATION POUR LA DÉTECTION	118
5.2.1	Utilisation sur données perturbées par un bruit gamma	119
5.2.2	Exemples d'estimation de la valeur de fonds	119
5.2.3	Détecteur DSAS	123
5.2.4	Comparaison des techniques de détection	124
	CONCLUSION	136

LA solution proposée au chapitre précédent nous a permis de montrer les capacités de régulation du taux de fausse alarme d'un détecteur fondé sur une statistique de décision de la forme X_n/\hat{m}_n . La régulation du taux de fausse alarme sur un fond inhomogène quelconque dépend de la capacité de l'estimateur de la valeur du fond au pixel test noté \hat{m}_n à limiter le biais d'estimation. La solution proposée dans le chapitre précédent (le LQ-CFAR) fondée sur une approximation quadratique du logarithme de la valeur du fond présente une bonne régulation de la \mathcal{P}_{fa} mais au prix d'une baisse des performances de détection. Les performances en détection étant directement liées à la variance d'estimation de \hat{m}_n , nous proposons d'étudier les capacités d'un estimateur de la valeur du fond original qui présente peu de biais en présence d'un fond quelconque et dont la variance reste faible.

La méthode d'estimation de la valeur du fond repose sur une technique de Surface Active Statistique (SAS). À la différence des méthodes précédentes où l'on ne s'intéressait qu'à un voisinage autour du pixel test, cette méthode tient compte de la totalité des données pour réaliser une estimation de la valeur du fond en chaque pixel. Au cours de cette estimation, les données seront modélisées à l'aide d'un maillage que l'on va déformer et simplifier afin de

représenter au mieux les données. Nous verrons qu'une telle méthode d'estimation peut être utilisée pour des tâches de détection. Ce chapitre est structuré en deux grandes parties. Nous présenterons tout d'abord la technique de Surface Active Statistique, qui constituera une nouvelle méthode d'estimation de la valeur du fond. Cette technique est adaptée à un bruit gaussien et nous montrerons comment l'utiliser pour estimer la valeur du fond quand les données sont perturbées par un bruit de loi gamma. Cela permettra de proposer un détecteur que nous appellerons DSAS. Nous comparerons alors les performances du détecteur DSAS avec les autres méthodes étudiées dans les chapitres précédents.

5.1 PRÉSENTATION DE LA TECHNIQUE DE SURFACE ACTIVE STATISTIQUE

La technique de Surface Active Statistique définit une méthode d'estimation de la valeur moyenne de données bruitées. Elle s'appuie sur une représentation des données à l'aide d'une surface maillée (maillage) et sur le principe de minimisation de la complexité stochastique [102] pour déformer et simplifier ce maillage afin de représenter au mieux les données. Dans cette section, nous introduirons la modélisation par surface maillée puis nous présenterons le principe de minimisation de la complexité stochastique.

5.1.1 Représentation de données par des surfaces maillées

La représentation de données par des maillages est couramment utilisée en infographie, notamment pour la synthèse d'image 3-D ou encore en physique pour la résolution de nombreux problèmes de calculs (par exemple, avec la méthode des éléments finis).

Choix d'un maillage

Un maillage est constitué de nœuds qui sont reliés entre eux par des segments. Les positions des nœuds définissent une réalisation géométrique du maillage, ce qui correspond au positionnement du maillage dans l'espace. Les segments décrivent, quant à eux, la topologie du maillage et sont tels que deux segments ne peuvent partager qu'un seul nœud. La figure FIG. 5.1 présente un exemple de maillage et montre la distinction entre nœuds et segments.

Les maillages non-structurés correspondent aux maillages dont la topologie est arbitraire. Ils possèdent des avantages par rapport aux maillages structurés pour la représentation de données [6]. En particulier, ils présentent une plus grande flexibilité et s'adaptent plus facilement à des formes complexes. C'est pourquoi nous utiliserons des maillages non-structurés et plus spécifiquement des maillages triangulaires dont le constituant élémentaire est un triangle.

L'utilisation des maillages triangulaires en traitement d'image a déjà fait l'objet de plusieurs travaux. Les applications concernent la restauration

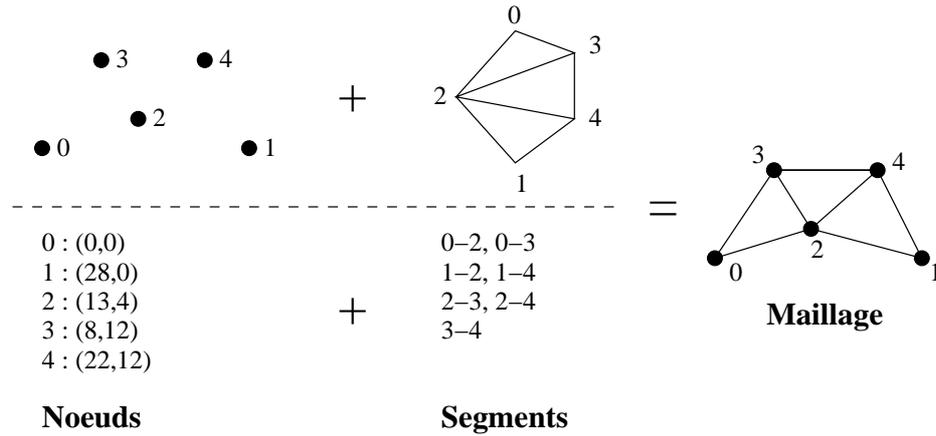


FIG. 5.1 – Exemple de maillage. À gauche, les nœuds du maillage avec leurs positions, au milieu les segments du maillage (topologie), à droite le maillage correspondant.

d'images perturbées par un bruit de Speckle [7], le filtrage d'image [43] ou encore la compression de données [34, 120] (MPEG-4).

Dans notre cas, le maillage servira à estimer la valeur du fond. En d'autres termes, le maillage décrira une surface (surface maillée) dont la valeur correspond à la valeur estimée du fond.

De part la nature des données, la valeur du fond peut être modélisée par une fonction continue et nous utiliserons donc un maillage continu.

Maillage utilisé par la SAS

Le modèle de surface utilisé est fondé sur un maillage à mailles triangulaires où chaque sommet d'un triangle définit un nœud $K = (i_k, j_k, \theta_k)$. Nous noterons (i_k, j_k) les coordonnées du nœud k et θ_k la valeur de la surface à ce nœud que nous appellerons également valeur nodale. La valeur de la surface à l'intérieur de chaque triangle est une interpolation linéaire définie par les coordonnées des sommets du triangle. Ce modèle définit une fonction continue de classe C^0 . Il est linéaire par morceaux et entièrement défini par la topologie du maillage. De plus, la modification des coordonnées (position ou valeur nodale) d'un nœud n'introduit qu'une modification locale de la surface, limitée au polygone formé par les nœuds entourant le nœud dont les coordonnées ont été modifiées.

La surface maillée sera notée $S(\theta, T)$ où θ représente l'ensemble des valeurs nodales et où T définit la topologie du maillage et les coordonnées $p = (i, j)$ des nœuds. Chaque pixel de l'image appartient à un unique triangle t [19] défini par trois sommets qui correspondent aux nœuds A, B et C du maillage de coordonnées respectives $\begin{vmatrix} p_a \\ \theta_a \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} p_b \\ \theta_b \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} p_c \\ \theta_c \end{vmatrix}$. La valeur $S_t(p, \theta) \equiv S(p, \theta, T)|_{p \in t}$ de la surface maillée pour les pixels appartenant au triangle t est entièrement définie par la position du pixel p et par les coordonnées des trois sommets du triangle t (cf. figure FIG. 5.2).

Nous avons utilisé l'approche développée dans [44] afin de définir sans ambiguïté les pixels appartenant à un triangle. En effet, il est délicat de définir à quel triangle appartiennent les pixels situés sur les segments ou les nœuds

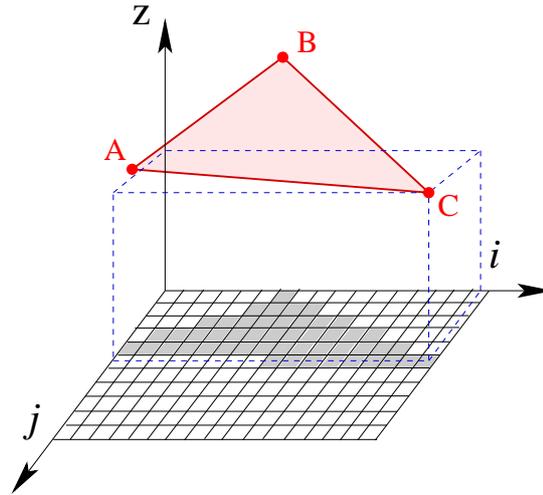


FIG. 5.2 – Exemple d'un triangle t : la valeur $S_t(p, \theta)$ de la surface est entièrement déterminée par la position du pixel $p = (i, j)$ et par les coordonnées des sommets A, B, C .

du maillage. Une solution pragmatique et rigoureuse consiste à déplacer les nœuds d'une translation de $(1/2, 1/4)$ de pixel.

Pour les nœuds A, B et C , la valeur $S_t(p, \theta)$ sera notée :

$$\begin{aligned} S_t(p_a, \theta) &= \theta_a, \\ S_t(p_b, \theta) &= \theta_b, \\ S_t(p_c, \theta) &= \theta_c. \end{aligned} \quad (5.1)$$

La fonction $S_t(p, \theta)$ à l'intérieur du triangle t , qui correspond à l'équation d'un plan, est définie comme la somme de trois fonctions linéaires de p :

$$S_t(p, \theta) = a_z \mathcal{P}_{ABC}(p) + b_z \mathcal{P}_{BCA}(p) + c_z \mathcal{P}_{CAB}(p). \quad (5.2)$$

Les trois fonctions linéaires \mathcal{P}_{ABC} , \mathcal{P}_{BCA} et \mathcal{P}_{CAB} sont définies par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{ABC}(p_a) = 1 \\ \mathcal{P}_{ABC}(p_b) = 0 \\ \mathcal{P}_{ABC}(p_c) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{P}_{BCA}(p_a) = 0 \\ \mathcal{P}_{BCA}(p_b) = 1 \\ \mathcal{P}_{BCA}(p_c) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{P}_{CAB}(p_a) = 0 \\ \mathcal{P}_{CAB}(p_b) = 0 \\ \mathcal{P}_{CAB}(p_c) = 1 \end{cases} \quad (5.3)$$

La figure FIG. 5.3 représente la fonction \mathcal{P}_{BCA} . On notera que les valeurs prises par les fonctions \mathcal{P}_{ABC} , \mathcal{P}_{BCA} et \mathcal{P}_{CAB} sont indépendantes des valeurs nodales θ_a , θ_b et θ_c et sont uniquement liées aux positions des nœuds A, B et C (p_a, p_b, p_c) et à la position du pixel considéré $p = (i, j)$.

Cette modélisation reprend une description classique de surface maillée [79] à partir de fonctions de base (les fonctions \mathcal{P}_{ABC} , \mathcal{P}_{BCA} et \mathcal{P}_{CAB}) similaires à celles qui sont utilisées dans le cas des splines par exemple. Ici les splines correspondantes seraient simplement d'ordre 1.

Déformation et simplification de maillage

L'objectif de l'algorithme SAS (Surface Active Statistique) est de déformer et de simplifier le maillage afin de représenter au mieux la valeur du fond.

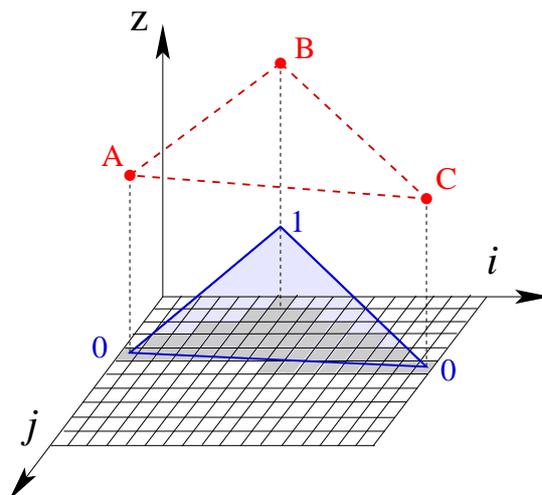


FIG. 5.3 – Exemple de la fonction \mathcal{P}_{BCA} . Elle vaut 1 en B et zéro aux nœuds A et C.

Prenons un exemple à une dimension pour illustrer ces propos. À l'aide de la figure FIG.5.4, on constate que nous disposons *a priori* de données et d'un maillage sans lien entre eux. À l'étape initiale (a), le maillage n'est donc pas une bonne représentation de la valeur du fond.

La première opération (b) consiste à estimer la valeur des nœuds du maillage à partir des données. Lors de cette opération, la nature du bruit qui perturbe les données doit être prise en compte afin d'estimer la valeur du fond. Notons ici que, le maillage étant continu, l'estimation des valeurs nodales nécessite une optimisation globale sur l'ensemble des nœuds.

Cependant malgré l'estimation des valeurs nodales des nœuds, la représentation donnée par le maillage n'est pas satisfaisante et peut être grandement améliorée en déplaçant ou en supprimant certains nœuds. Cette étape (c) consiste à déformer et simplifier le maillage puis à ré-estimer les valeurs nodales des nœuds. Dans le cas d'un maillage 2-D, nous verrons par la suite que l'on peut également améliorer la topologie du maillage pour obtenir une meilleure représentation de la valeur du fond.

L'intérêt d'utiliser une surface maillée en détection apparaît maintenant. Dans les régions où le fond est complexe, déplacer les nœuds et modifier la topologie permet une modélisation avec un nombre réduit de nœuds. Comme nous le verrons par la suite, la variance d'estimation de la valeur du fond dépend directement de la densité de nœuds et de la topologie. Aussi, la SAS permet d'obtenir une variance d'estimation faible sur les parties homogènes du fond (car il y aura peu de nœuds) tout en garantissant une estimation satisfaisante dans les zones où la valeur du fond varie rapidement. La SAS permet ainsi de modéliser la valeur du fond avec un faible nombre de nœuds. Ce faible nombre de nœuds conduit naturellement à des triangles ayant les surfaces les plus larges possible et donc à une variance d'estimation faible.

La simplification de maillage est un thème qui est activement étudié notamment pour l'industrie des jeux vidéos ou pour le rendu d'image 3-D [56, 57, 58, 91]. Dans notre cas, utiliser un maillage d'une complexité trop élevée n'est pas uniquement pénalisant en terme de temps de calcul mais également pour l'estimation. En effet, si le maillage est trop dense la variance

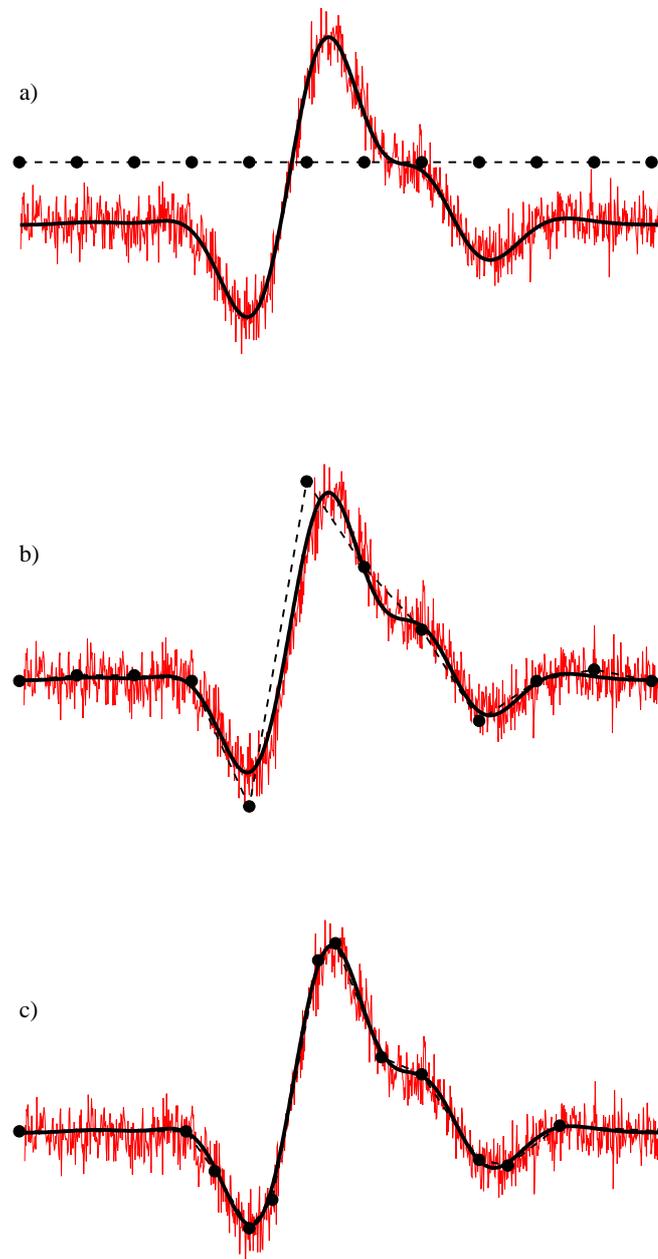


FIG. 5.4 – Schéma explicatif 1-D de l'objectif de l'algorithme Surface Active Statistique. Les différents éléments représentés correspondent aux données (traits fins), au fond (traits forts) dont on souhaite estimer la valeur, aux nœuds du maillage (ronds) et aux segments du maillage (traits en pointillé). La figure (a) illustre l'étape initiale, on dispose de données et d'un maillage sans aucun lien entre eux. Sur la figure (b), la valeur des nœuds a été estimée à partir des données, le maillage représente une estimation de la valeur du fond. La figure (c) présente le résultat final, le maillage a été simplifié, déformé afin de représenter au mieux le fond.

d'estimation augmente car le maillage aura tendance à représenter les fluctuations du bruit. Il faut donc disposer d'un critère pour déterminer la topologie et le nombre de nœuds nécessaires à une bonne représentation de la valeur du fond.

En traitement d'image, différentes approches ont été proposées pour adapter un maillage [79] à des données. On peut citer les travaux de la thèse de Vintimilla [128] qui ont pour application la restauration d'image ou encore ceux de la thèse de Thoka [121] qui concernent l'extraction de surfaces dans des images médicales. À notre connaissance les différentes méthodes proposées ne tiennent pas compte de la nature du bruit et une approche heuristique est utilisée dans chaque cas pour déformer le maillage.

La méthode utilisée par Vintimilla [128] consiste, à partir d'un maillage initial, à calculer l'erreur quadratique moyenne. Les régions pour lesquelles l'erreur quadratique est supérieure à une valeur de consigne sont ensuite identifiées et la densité du maillage dans ces régions est augmentée. Le résultat obtenu avec cette méthode est donc dépendant de la valeur de consigne.

Thoka [121] préfère utiliser une approche fondée sur le calcul d'une énergie. Pour chaque maille, l'énergie du maillage est décomposée en une énergie interne et une énergie externe de manière analogue à ce qui est réalisé par exemple avec les contours actifs. Cette approche est utilisée pour déformer un maillage et extraire des formes à partir d'images médicales. Thoka souligne cependant que l'approche qu'il a utilisée ne permet pas de comparer deux maillages dont les densités de nœuds sont différentes. Il choisit alors de fixer le nombre de nœuds *a priori*.

L'algorithme SAS repose sur le principe de minimisation de la complexité stochastique pour réaliser la simplification du maillage. Nous verrons que ce principe permet d'aboutir à un algorithme rapide, adapté à la nature du bruit et sans paramètre à régler par l'utilisateur. Afin de mieux comprendre l'algorithme SAS, nous commencerons par rappeler le principe de minimisation de la complexité stochastique.

5.1.2 Principe de minimisation de la complexité stochastique

Le principe de la Minimisation de la Complexité Stochastique (MCS) est un principe général introduit par Rissanen en 1978 [101, 102]. Fondé sur des concepts issus de la théorie de l'information, ce principe permet notamment de résoudre des problèmes d'estimation d'ordre de modèle. Ce principe a été appliqué dans différents domaines, notamment pour la segmentation d'images [37, 39, 61, 67, 107], et il a conduit à des résultats intéressants. Son objectif est de permettre de choisir le modèle le plus simple qui représente au mieux les données. Le principe de la MCS consiste à choisir le modèle dont la complexité stochastique est minimale. La complexité stochastique est, quant à elle, définie comme étant égale au nombre de bits qu'il faut pour décrire non seulement les données, mais également le modèle lui-même.

Pour choisir le modèle qui permet la description la plus simple des données, il nous faut être capable de quantifier la complexité associée à la description des données.

Complexité de Kolmogorov

La notion de complexité algorithmique a été introduite par Kolmogorov dans les années 1960 [98]. La complexité de Kolmogorov associée à un ensemble de données est la longueur (mesurée en bits) du plus court programme qui permet de générer ces données.

La principale limitation liée à la complexité de Kolmogorov est qu'il est impossible de la déterminer en un temps fini [24]. De plus, même si nous étions capable de trouver le programme qui conduit à la complexité de Kolmogorov, ce n'est pas pour autant que nous serions capable d'avoir une interprétation simple des données et d'en extraire les informations que nous souhaitons [102].

Information de Shannon

Une façon de résoudre le problème posé avec la complexité de Kolmogorov peut être en partie résolu par l'approche proposée par Shannon [109] en 1948. En effet, son approche consiste à ne pas considérer chaque réalisation des données indépendamment du processus aléatoire dont elles sont issues. L'idée de Shannon pour définir la notion de quantité d'information consiste à considérer qu'une réalisation apporte d'autant plus d'information qu'elle est improbable. La quantité d'information associée à une réalisation, quand elle est exprimée en bits, est alors égale à l'opposé du logarithme en base 2 de sa probabilité d'apparition.

On peut montrer [25] que la valeur moyenne de la complexité de Kolmogorov pour un ensemble de réalisations issues d'une certaine loi de probabilité est égale, quand le nombre de réalisations est grand, à l'espérance mathématique de leur quantité d'information. Cette valeur moyenne est égale à l'entropie définie par Shannon [109].

La quantité d'information de Shannon peut être considérée comme une approximation du nombre de bits nécessaire pour décrire des données lorsque la loi de probabilité qui les a engendrées est connue. Le code, qui correspond à la suite de nombres binaires décrivant les données, associé à la quantité d'information de Shannon est appelé code entropique. Ce code ne correspond à un nombre de bits minimal qu'en moyenne sur toutes les réalisations possibles.

Complexité stochastique

La quantité d'information de Shannon permet d'obtenir une approximation du nombre de bits nécessaires au codage des données. Cependant, pour déterminer cette quantité d'information, il est nécessaire de connaître la loi de probabilité qui a permis de générer les données. Dans notre cas, la famille de la loi de probabilité est imposée et est la même pour tout pixel de l'image. Tous les paramètres, à l'exception de la moyenne, sont identiques pour l'ensemble des pixels de l'image. Si ces paramètres constants (la variance pour la famille gaussienne ou l'ordre pour la famille gamma) sont inconnus, ils sont associés à la valeur moyenne en tout pixel pour former le modèle qu'il est nécessaire de déterminer.

Afin de résoudre ce problème, Rissanen a défini la complexité stochastique [102], qui est l'addition de deux termes. L'un est égal au nombre de bits nécessaires pour décrire les données connaissant le modèle et l'autre est égal au nombre de bits nécessaires pour coder le modèle.

Le principe de minimisation de la complexité stochastique consiste à considérer que le meilleur modèle parmi un jeu prédéfini de modèles est celui qui correspond à la plus faible valeur de la complexité stochastique.

Dans notre cas, les données \mathbf{X} sont représentées à l'aide d'un modèle de structure T et de paramètre θ . La complexité stochastique est alors :

$$\Delta(\mathbf{X}, \theta, T) = \Delta_{\text{Données}}(\mathbf{X}|\theta, T) + \Delta_{\text{Param}}(\theta|T) + \Delta_{\text{Maillage}}(T), \quad (5.4)$$

où $\Delta_{\text{Données}}(\mathbf{X}|\theta, T)$ est le nombre de bits nécessaires pour décrire les données \mathbf{X} connaissant T et θ , $\Delta_{\text{Param}}(\theta|T)$ est le nombre de bits nécessaires pour coder les paramètres connaissant T , et $\Delta_{\text{Maillage}}(T)$ est le nombre de bits nécessaires pour coder la structure du modèle. La somme des termes $\Delta_{\text{Param}}(\theta|T)$ et $\Delta_{\text{Maillage}}(T)$ correspond au nombre de bits nécessaires pour coder le modèle. Le nombre de bits $\Delta_{\text{Données}}(\mathbf{X}|\theta, T)$ est estimé par la quantité d'information de Shannon de la réalisation \mathbf{X} .

5.1.3 Critère de complexité stochastique pour la SAS

L'objectif de la SAS est de trouver la surface maillée qui, pour des données \mathbf{X} , minimise la complexité stochastique. On peut noter que les différents termes de codage qui composent la complexité stochastique ne présentent aucun paramètre à régler par l'utilisateur. Afin d'obtenir des expressions plus simples, ces différents termes seront exprimés en nats qui est une unité de mesure de la quantité d'information (1 nat est égal à $\log(2)$ bits).

Codage du maillage

Déterminer le terme de codage du maillage n'est pas chose évidente. En effet, il nous faut connaître la longueur moyenne du codage nécessaire à la description la plus courte possible d'un maillage triangulaire quelconque. Le codage utilisé doit permettre la description des coordonnées des nœuds du maillage, ainsi que la topologie du maillage (segments). Dans la suite, le nombre de nœuds du maillage sera noté M et le nombre de segments S .

Nous proposons à l'annexe A.6 une méthode pour coder un maillage triangulaire quelconque. Puis, nous en déduisons une approximation de la longueur moyenne du codage du maillage :

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{Maillage}}(T) \triangleq & 2(M-1) [1 + \log(\hat{\rho})] + \frac{1}{2} \log [2(M-1)] \\ & + \text{Card}(\text{Num}) - (M-1) \log \left(\frac{M-1}{N_{\text{Clk}}} \right) \\ & - (N_{\text{Clk}} - (M-1)) \log \left(\frac{N_{\text{Clk}} - (M-1)}{N_{\text{Clk}}} \right), \quad (5.5) \end{aligned}$$

où $\hat{\rho}$ est la valeur moyenne des longueurs des segments du maillage, $\text{Card}(\text{Num}) = S - 2(M - 1)$ et $N_{\text{Cik}} = S - (M - 1)$.

Comme on pouvait s'y attendre, le terme de codage du maillage obtenu augmente avec le nombre de nœuds du maillage. Il augmente également avec la longueur des segments. La longueur moyenne de codage du maillage sera donc d'autant plus grande que le nombre de nœuds est élevé et que la longueur moyenne des segments est grande. De plus, les éléments qui entrent en jeu dans le terme de codage du maillage peuvent être facilement obtenus ou calculés. Ainsi il n'est pas nécessaire de synthétiser le codage du maillage pour calculer $\Delta_{\text{Maillage}}(\mathbf{T})$ (cf. équation 5.5). Le calcul de ce terme n'est donc pas pénalisant en temps de calcul.

Codage des paramètres

Le codage du vecteur de paramètres θ est un problème ardu car les valeurs nodales ne sont pas indépendantes et ne prennent pas des valeurs entières [103]. En conséquence, nous avons considéré une approximation.

La valeur nodale d'un nœud est estimée à partir des pixels appartenant au polygone défini par les nœuds voisins au nœud considéré. Si chaque valeur nodale était indépendante, la longueur de code nécessaire pour coder la valeur nodale serait approximativement égale à $1/2 \log(N_{\text{Poly}}(K))$ nats où $N_{\text{Poly}}(K)$ est le nombre de pixels dans le polygone défini par les nœuds voisins au nœud K [102]. Cette longueur de code est une majoration de la longueur de code d'une valeur nodale. En effet, pour la SAS, les valeurs nodales des nœuds ne sont pas indépendantes ce qui implique que lorsque l'on connaît une valeur nodale, on a une certaine quantité d'information sur les valeurs nodales des nœuds voisins.

Si l'on considère un seul triangle, nous disposons des pixels compris à l'intérieur du triangle pour estimer trois valeurs nodales. Il apparaît alors raisonnable de considérer que chaque valeur nodale est estimée avec un tiers des pixels du triangle. Aussi nous supposons que seulement un tiers des pixels du polygone contribue à l'estimation de la valeur nodale du nœud associé au polygone.

Pour l'ensemble des valeurs nodales, on aboutit alors au terme de codage des paramètres suivant :

$$\Delta_{\text{Param}}(\mathbf{T}) \triangleq \frac{1}{2} \sum_{K \in \text{maillage}} \log(N_{\text{Poly}}(K)/3). \quad (5.6)$$

Cette approximation du terme de codage des paramètres est relativement satisfaisante car elle permet de prendre en compte la corrélation entre les valeurs nodales. Elle permet également d'obtenir une relation entre la valeur du terme de codage des paramètres et la topologie du maillage.

De plus, cette expression du terme de codage des paramètres est simple et peut être calculée rapidement. En effet, il est possible d'associer à chaque polygone une contribution au terme de codage des paramètres. Ainsi une modification qui ne touche qu'un polygone n'affectera que la contribution associée à ce polygone. Il est inutile de recalculer les contributions de tous

les autres polygones. On peut ainsi calculer rapidement le nouveau terme $\Delta_{\text{Param}}(T)$ de codage des paramètres (après modification) à partir de l'ancien (avant modification) en soustrayant l'ancienne contribution et en ajoutant la nouvelle.

Enfin, il est également important de noter que la valeur du terme de codage des paramètres considéré ne dépend pas des valeurs nodales θ .

Codage des données

Comme nous l'avons vu précédemment le terme de codage des données est égal à la quantité d'information de Shannon nécessaire pour coder ces données. Ce terme est donc égal à l'opposé de la log-vraisemblance des données. Il est alors dépendant de l'hypothèse qui est réalisée sur la nature du bruit.

Dans le cas d'un bruit gaussien de variance constante, ce terme est égal à (cf. annexe A.8) [19, 40] :

$$\Delta_{\text{Données}}(\mathbf{X}|\theta, T) = \frac{N}{2} \left[1 + \log \left(2 \pi \hat{\sigma}^2 \right) \right], \quad (5.7)$$

avec :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{p \in \text{maillage}} [X_p - S(p, \theta, T)]^2, \quad (5.8)$$

où $S(p, \theta, T)$ est la valeur de la surface maillée au pixel p et N est le nombre total de pixels des données.

5.1.4 Simplification et déformation du maillage

Le problème que l'on doit maintenant résoudre consiste à déterminer le maillage T (topologie et position des nœuds) qui minimise la complexité stochastique, ce qui peut être écrit :

$$\left(\hat{T}_{\text{MCS}}, \hat{\theta}_{\text{MCS}} \right) = \arg \min_{T, \theta} \Delta(\mathbf{X}, \theta, T), \quad (5.9)$$

avec :

$$\Delta(\mathbf{X}, \theta, T) = \Delta_{\text{Maillage}}(T) + \Delta_{\text{Param}}(\theta|T) + \Delta_{\text{Données}}(\mathbf{X}|\theta, T). \quad (5.10)$$

On peut remarquer que l'estimation $\hat{\theta}_{\text{MCS}}$ de θ pour une topologie T fixée et obtenue simplement par :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{\text{MCS}}(T) &= \arg \min_{\theta} \Delta_{\text{Données}}(\mathbf{X}|\theta, T) \\ &= \hat{\theta}_{\text{MV}}(\mathbf{X}|T). \end{aligned} \quad (5.11)$$

En effet, la valeur du terme $\Delta_{\text{Param}}(\theta|T)$ présenté à la section précédente est indépendante de la valeur de θ . En ré-injectant cette solution $\hat{\theta}_{\text{MV}}(\mathbf{X}|T)$ qui correspond à l'estimée au sens du maximum de vraisemblance, nous obtenons alors :

$$\hat{T}_{\text{MCS}} = \arg \min_T \Delta \left(\mathbf{X}, \hat{\theta}_{\text{MV}}(\mathbf{X}|T), T \right). \quad (5.12)$$

Afin de déterminer le maillage qui minimise cette complexité stochastique, nous allons déformer et simplifier le maillage. La première estimation des valeurs nodales est réalisée pour la topologie initiale qui correspond à un maillage hexagonal dense et régulier. Quatre étapes de modifications du maillage, qui forment une séquence, sont ensuite alternées dans l'ordre suivant : le déplacement de nœuds (D), la suppression de nœuds (S), le déplacement de nœuds (D) et le basculement d'arêtes (B), ce qui correspond à la séquence :

$$D S D B$$

Les opérations de déformation et simplification de maillage que constituent le déplacement de nœuds, la suppression de nœuds et le basculement d'arêtes sont détaillées à l'annexe A.7. Entre chacune de ces étapes, nous estimons les valeurs nodales des nœuds (F), ce qui conduit à la séquence :

$$F D F S F D F B F$$

À partir d'une configuration donnée, la valeur du critère pour une nouvelle configuration est calculée. Cette nouvelle configuration peut être obtenue soit en déplaçant un nœud, soit en le supprimant, soit en basculant une arête. Cette nouvelle configuration est acceptée pour remplacer la précédente uniquement si la valeur du critère diminue. En d'autres termes, une modification n'est acceptée que si elle permet de faire décroître la complexité stochastique. On répète plusieurs séquences jusqu'à ce que, pendant une séquence, plus aucune modification ne diminue la complexité stochastique. Ainsi, la méthode utilisée pour optimiser le critère de MCS reprend le concept utilisé dans [39].

5.1.5 Estimation des valeurs nodales au sens du maximum de vraisemblance

L'algorithme SAS est adapté à un bruit gaussien. Dans ce cas, le critère optimisé est quadratique et on peut mettre en œuvre un algorithme d'optimisation rapide. Si on modélise les données \mathbf{X} comme la somme d'une valeur moyenne $S(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T})$ et d'un bruit gaussien indépendant de pixel à pixel et de variance σ^2 constante sur le maillage, alors la log-vraisemblance de l'observation \mathbf{X} s'écrit [19] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{X} | S(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T}), \sigma^2) = & -\frac{N}{2} \log(2 \pi \sigma^2) \\ & - \frac{1}{2 \sigma^2} \sum_{p \in \text{maillage}} [X_p - S(p, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{T})]^2, \end{aligned} \quad (5.13)$$

La variance du bruit étant inconnue et supposée constante, nous pouvons l'estimer au sens du maximum de vraisemblance, pour un maillage \mathbf{T} donné, et la substituer à la valeur vraie dans l'équation 5.13. On obtient une estimation au sens du MV du vecteur de paramètres $\boldsymbol{\theta}$ en minimisant, dans ce cas, le critère des moindres carrés :

$$J_{MV}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{T}) = \sum_{p \in \text{maillage}} [X_p - S(p, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{T})]^2. \quad (5.14)$$

Le nombre d'inconnues pour l'estimation de l'image $S(\theta, T)$ au sens du MV (les positions des nœuds étant fixées) est égal à M , qui correspond aux M valeurs nodales des nœuds.

L'expression de l'estimateur au sens du MV de θ et l'étude de ces propriétés sont simplifiées avec une notation vectorielle et nous présentons ci-après les différentes définitions nécessaires à la compréhension de la notation utilisée.

Un nœud K du maillage est lié à Q_k triangles, nombre qui par définition est égal à l'ordre du nœud K . Ces triangles définissent le polygone de voisinage $\{P_1, P_2, \dots, P_{Q_k}\}$ du nœud K .

Définissons alors la fonction de base F_K associée au nœud K . Cette fonction définit une forme polygonale dont un exemple est présenté à la figure FIG. 5.5.

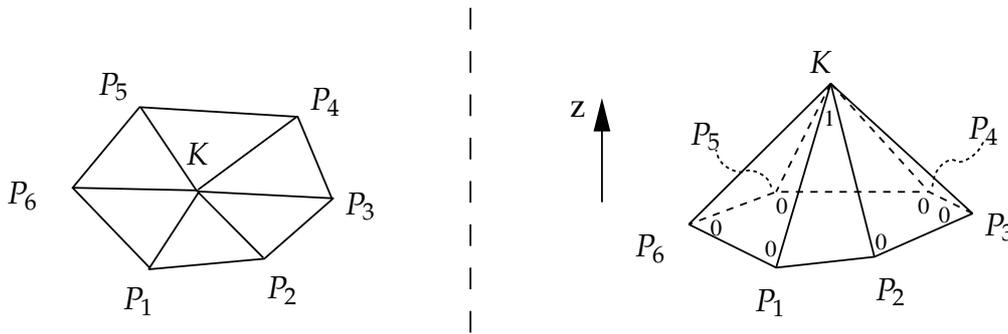


FIG. 5.5 – Polygone de voisinage du nœud K . À gauche, une vue de dessus du maillage, les nœuds P_1, \dots, P_6 sont les nœuds voisins au nœud K , ils définissent le polygone de voisinage du nœud K . À droite, une visualisation de la fonction F_K dont les valeurs constituent le vecteur \underline{P}_K .

La fonction de base F_K a pour valeurs les valeurs des fonctions de base $\{\mathcal{P}_{K, P_q, P_{q+1}}\}$ (cf. équation 5.3) pour tous les triangles du polygone de voisinage et zéro ailleurs. On notera \underline{P}_K le vecteur $(N \times 1)$ qui contient les valeurs de F_K rangées dans l'ordre lexicographique des pixels. La contribution du nœud K à l'image $\underline{S}(\theta, T)$, ainsi rangée sous forme de vecteur, peut alors être écrite :

$$\underline{S}(\theta, T)|_K \triangleq \underline{P}_K \theta_K. \quad (5.15)$$

Si l'on considère l'ensemble des nœuds, alors l'image $\underline{S}(\theta, T)$ s'exprime sous forme matricielle :

$$\underline{S}(\theta, T) = \underline{\underline{P}} \theta, \quad (5.16)$$

où la matrice $\underline{\underline{P}}$ ($N \times M$) est la matrice de toutes les fonctions de base associées aux nœuds :

$$\underline{\underline{P}} = [\underline{P}_1, \dots, \underline{P}_K, \dots, \underline{P}_M]. \quad (5.17)$$

On peut noter que la matrice $\underline{\underline{P}}$ ne dépend que du maillage T , c'est-à-dire de la position (i, j) des nœuds ainsi que de la topologie du maillage. La modélisation matricielle obtenue permet d'aboutir à une simplification des calculs.

Dans le cadre du modèle considéré, les données X sont égales à la somme d'une valeur $S(\theta_0, T_0)$ déterministe et d'un bruit additif gaussien indépendant, identiquement distribué de pixel à pixel et de variance σ^2 . En notant \underline{X}

les données \underline{X} ordonnées sous forme de vecteur et \underline{B} le vecteur de bruit, on aboutit à la modélisation suivante :

$$\underline{X} = \underline{P}(T_0) \theta_0 + \underline{B}, \quad (5.18)$$

où θ_0 est le vecteur des paramètres vrais, T_0 les positions vraies des nœuds ainsi que la topologie vraie du maillage.

L'équation 5.14 peut être écrite :

$$J_{MV}(\theta|T) = (\underline{X} - \underline{P}\theta)^T (\underline{X} - \underline{P}\theta) \quad (5.19)$$

et l'estimation des valeurs nodales consiste alors à rechercher une solution au sens des moindres carrés :

$$\hat{\theta}_{MV} = \arg \min_{\theta} (\underline{X} - \underline{P}\theta)^T (\underline{X} - \underline{P}\theta), \quad (5.20)$$

ce qui conduit à la solution sous forme de pseudo-inverse :

$$\hat{\theta}_{MV} = (\underline{P}^T \underline{P})^{-1} \underline{P}^T \underline{X}. \quad (5.21)$$

Le rang de la matrice \underline{P} est toujours égal à M car toute colonne possède par construction un support non nul non inclus dans l'union des supports de toutes les autres colonnes de la matrice. Ainsi, on est assuré que la matrice $\underline{P}^T \underline{P}$ est de rang plein. Quelque soit la topologie du maillage, on pourra donc calculer $\hat{\theta}_{MV}$.

À partir de l'expression de $\hat{\theta}_{MV}$ présentée à l'équation 5.21, on peut vérifier que l'estimateur $\hat{\theta}_{MV}$ est non biaisé. De plus, on peut obtenir l'expression de la matrice de covariance des estimées :

$$E \left[(\hat{\theta}_{MV} - \theta_0) (\hat{\theta}_{MV} - \theta_0)^T \right] = \sigma^2 (\underline{P}^T \underline{P})^{-1}. \quad (5.22)$$

La variance d'estimation (cf. équation 5.22) est indépendante des valeurs nodales θ et ne dépend que de la topologie du maillage.

Le calcul de la matrice de Fisher nous renseigne sur les bornes de Cramer-Rao qui fournissent la variance minimale atteignable avec un estimateur non biaisé. Le jeu de paramètres inconnus est la concaténation de la variance du bruit σ^2 et du vecteur des valeurs nodales θ : $\beta = [\sigma^2, \theta^T]^T$. La matrice de Fisher est définie par :

$$\begin{aligned} I(\beta) &\triangleq E \left[\frac{\partial \mathcal{L}(X|\theta, T_0, \sigma^2)}{\partial \beta} \frac{\partial \mathcal{L}(X|\theta, T_0, \sigma^2)}{\partial \beta^T} \right] \\ &= -E \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(X|\theta, T_0, \sigma^2)}{\partial \beta \partial \beta^T} \right], \end{aligned} \quad (5.23)$$

cette expression fait intervenir la log-vraisemblance $\mathcal{L}(X|\theta, T_0, \sigma^2)$. On peut alors montrer (cf. annexe A.9) que la variance d'estimation de l'estimateur $\hat{\theta}_{MV}$ est égale à la borne de Cramer-Rao, définie par l'inverse de la matrice de Fisher $I(\beta)^{-1}$.

Les valeurs de $S(p, \hat{\theta}, T)$ en tout point du maillage étant déterminées par une interpolation linéaire entre les nœuds du maillage, on peut en déduire la variance d'estimation du maillage pour tout pixel. En effet, pour un pixel p appartenant à un triangle dont les sommets sont les nœuds A, B et C , alors la valeur de $S_t(p, \theta)$ est :

$$S_t(p, \theta) = a_z \mathcal{P}_{ABC}(p) + b_z \mathcal{P}_{BCA}(p) + c_z \mathcal{P}_{CAB}(p). \quad (5.24)$$

Nous noterons respectivement a_0, b_0 et c_0 les vraies valeurs nodales des nœuds A, B et C . Nous avons démontré précédemment que l'estimation des valeurs nodales n'est pas biaisée, c'est-à-dire que $E[a_z] = a_0, E[b_z] = b_0, E[c_z] = c_0$.

Calculons maintenant la variance de $S_t(p, \theta)$:

$$\begin{aligned} \text{var}(S_t(p, \theta)) &= E \left[(S_t(p, \theta) - S_t(p, \theta_0))^2 \right] \\ &= E \left[((a_z - a_0) \mathcal{P}_{ABC}(p) + (b_z - b_0) \mathcal{P}_{BCA}(p) \right. \\ &\quad \left. + (c_z - c_0) \mathcal{P}_{CAB}(p))^2 \right] \\ &= \text{var}(a_z) \mathcal{P}_{ABC}^2(p) + \text{var}(b_z) \mathcal{P}_{BCA}^2(p) + \text{var}(c_z) \mathcal{P}_{CAB}^2(p) \\ &\quad + 2 \text{cov}(a_z, b_z) \mathcal{P}_{ABC}(p) \mathcal{P}_{BCA}(p) \\ &\quad + 2 \text{cov}(a_z, c_z) \mathcal{P}_{ABC}(p) \mathcal{P}_{CAB}(p) \\ &\quad + 2 \text{cov}(b_z, c_z) \mathcal{P}_{BCA}(p) \mathcal{P}_{CAB}(p), \end{aligned} \quad (5.25)$$

où les termes de variance et de covariance peuvent être extraits de la matrice de covariance (cf. équation 5.22). Les trois premiers termes ($\text{var}(a_z), \text{var}(b_z)$ et $\text{var}(c_z)$) sont des éléments diagonaux de la matrice de covariance (cf. équation 5.22) et les trois autres termes ($\text{cov}(a_z, b_z), \text{cov}(a_z, c_z)$ et $\text{cov}(b_z, c_z)$) sont des éléments non diagonaux qui permettent de prendre en compte la corrélation entre les différentes valeurs nodales. Ainsi, il est possible de calculer pour tous les pixels la variance d'estimation de la valeur du fond.

Nous avons ici présenté comment l'estimation des valeurs nodales au sens du maximum de vraisemblance peut être obtenue. Cependant, l'estimation des valeurs nodales nécessite la manipulation d'une matrice de grande dimension ($\underline{\underline{P}}$ est une matrice de taille $N \times M$), ce qui induit une forte charge de calcul. Afin d'obtenir une estimation plus rapide, nous avons choisi de mettre en œuvre une résolution du système linéaire défini à l'équation 5.21 à l'aide d'un algorithme itératif du second ordre.

Le critère du maximum de vraisemblance étant quadratique (cf. équation 5.19), un algorithme utilisant le hessien du critère convergerait en un coup. Cependant cette voie nous conduirait à la résolution d'un système linéaire posant les mêmes difficultés en terme de temps de calcul et de charge mémoire que le calcul direct.

Aussi, nous considérons une méthode itérative du second ordre se limitant à l'utilisation de la diagonale du hessien. Ceci conduit à l'équation itérative suivante :

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \gamma \left(\frac{\partial^2 J_{MV}}{\partial \theta^2} \right)^{-1} \Bigg|_{\theta=\theta_t} \odot \frac{\partial J_{MV}}{\partial \theta} \Bigg|_{\theta=\theta_t}, \quad (5.26)$$

où :

$$\frac{\partial^2 J_{MV}}{\partial \theta^2} = \left[\frac{\partial^2 J_{MV}}{\partial \theta_1^2} \cdots \frac{\partial^2 J_{MV}}{\partial \theta_K^2} \cdots \frac{\partial^2 J_{MV}}{\partial \theta_M^2} \right]^T, \quad (5.27)$$

et où \odot correspond au produit d'Hadamard, c'est-à-dire au produit terme à terme des deux vecteurs en argument. Cet algorithme du deuxième ordre correspond ainsi à l'optimisation, à chaque itération, du critère $J_{MV}(\theta|T)$ dans chaque axe θ_K indépendamment les uns des autres. Le coefficient γ permet de modifier l'amplitude des déplacements. Lorsque $\gamma = 1$, il est intéressant de noter que l'algorithme défini (cf. équation 5.26) correspond à la résolution du système (cf. équation 5.21) par la méthode de Jacobi [21]. Il est prouvé [20] que cet algorithme converge dans le cas d'une matrice hermitienne définie positive, ce qui correspond à notre cas (cf. équation 5.21). L'objectif des travaux de thèse n'étant pas de chercher à étudier les propriétés de l'algorithme de minimisation (cf. équation 5.26), nous n'irons pas plus loin dans l'étude théorique de cet algorithme. Cependant, nous avons constaté que l'emploi d'un coefficient γ inférieur à 1 conduit à une accélération notable de la vitesse de convergence. Nous avons choisi $\gamma = 1/2$, valeur qui nous permet typiquement d'obtenir des précisions relatives de l'ordre de 10^{-3} sur les valeurs nodales en moins de 10 itérations. Compte tenu de cette dernière remarque, nous avons choisi de considérer un algorithme qui travaille à nombre d'itération fini (typiquement 15).

Par ailleurs, les termes qui entrent en jeu dans l'équation 5.26 peuvent être calculés rapidement (cf. annexe A.11) grâce aux techniques précédemment développées dans [19] et qui sont rappelées à l'annexe A.10. Les temps de calcul pour l'estimation des valeurs nodales d'un maillage sont très faibles (de l'ordre de quelques millisecondes sur un ordinateur standard pour un maillage de plusieurs milliers de nœuds et pour une image de quelques centaines de pixels de côté) ce qui est fondamental pour que l'algorithme SAS soit suffisamment rapide. En plus, il est possible grâce à la technique présentée de réaliser une estimation des valeurs nodales sur tout le maillage ou une partie seulement de celui-ci. Cette propriété est importante pour que les opérations de déformation de maillage soient réalisées rapidement. Ainsi, lorsque l'on effectue une modification topologique (suppression de nœud ou basculement d'arête) sur un nœud du maillage, on peut estimer uniquement les valeurs nodales du nœud en question et des nœuds qui l'entourent et non estimer l'ensemble des valeurs nodales. En effet, même si comme nous l'avons déjà vu, l'optimisation des valeurs nodales est *a priori* globale, une modification locale du maillage affecte essentiellement les valeurs nodales des nœuds proches de la modification.

5.2 APPLICATION POUR LA DÉTECTION

Nous présenterons des exemples de résultats obtenus en utilisant l'algorithme SAS sur des données perturbées par un bruit gamma. Puis, nous verrons comment utiliser la SAS pour notre problématique de détection.

5.2.1 Utilisation sur données perturbées par un bruit gamma

Pour utiliser la SAS sur des données perturbées par un bruit gamma d'ordre L , nous utiliserons la même démarche que celle mise en œuvre pour le détecteur LQ-CFAR. Nous réaliserons donc une estimation de la valeur du fond à partir du logarithme des valeurs des données. Ainsi comme nous l'avons vu au chapitre précédent dans la section 4.1.2, il est possible à partir d'une estimation réalisée avec le logarithme des données d'établir une estimation de la valeur du fond non biaisée. Pour cela, nous ferons l'approximation suivante.

Nous utiliserons la surface maillée S pour modéliser le logarithme de la valeur du fond. Comme $S(p, \hat{\theta}, \hat{T})$ correspond à une estimation du logarithme de la valeur du fond au pixel p , cette grandeur est une variable aléatoire. Nous supposons qu'elle est distribuée suivant une loi gaussienne de variance $\text{var} \left(S(p, \hat{\theta}, \hat{T}) \right)$.

Cependant, avec cette hypothèse, le fait que la topologie du maillage est estimée (déformation du maillage) n'est pas prise en compte. Aussi il est possible que la variance d'estimation $\text{var} \left(S(p, \hat{\theta}, \hat{T}) \right)$ soit inférieure à la variance d'estimation effective. Il apparaît cependant difficile d'exprimer la variance d'estimation liée à l'estimation de la topologie aussi nous choisissons de négliger ce terme.

En notant \hat{m}_p^{SAS} l'estimation de la valeur du fond au pixel p , on peut alors définir la relation suivante à partir de l'équation 4.26 :

$$\hat{m}_p^{SAS} \triangleq L \exp \left[S(p, \hat{\theta}, \hat{T}) - \psi(L) - \frac{\zeta_p^2}{2} \right], \quad (5.28)$$

où ζ_p^2 désigne la variance d'estimation de $S(p, \hat{\theta}, \hat{T})$ au pixel p , c'est-à-dire :

$$\zeta_p^2 \triangleq \text{var} \left(S(p, \hat{\theta}, \hat{T}) \right). \quad (5.29)$$

Dans l'expression de $\text{var} \left(S(p, \hat{\theta}, \hat{T}) \right)$ (cf. équation 5.22), le paramètre σ^2 est lié à l'ordre L du bruit gamma par la relation suivante (cf. annexe A.3) :

$$\sigma^2 \triangleq \zeta(2, L). \quad (5.30)$$

5.2.2 Exemples d'estimation de la valeur de fonds

La figure FIG. 5.6 présente un premier exemple de résultat obtenu avec la méthode proposée.

Pour ce premier exemple nous considérons un fond synthétique complexe. Ce fond présente à la fois des discontinuités (régions 1, 3 et 5) et des variations lentes des niveaux de gris (régions 2 et 4). De plus, les motifs qui composent ce fond sont constitués de lignes droites et de courbes (régions 2 et 3). Les courbes sont particulièrement difficiles à représenter avec un maillage triangulaire. Ce fond est ensuite bruité avec un bruit gamma d'ordre $L = 4$. À partir de l'image bruitée obtenue, on estime la valeur du fond avec trois

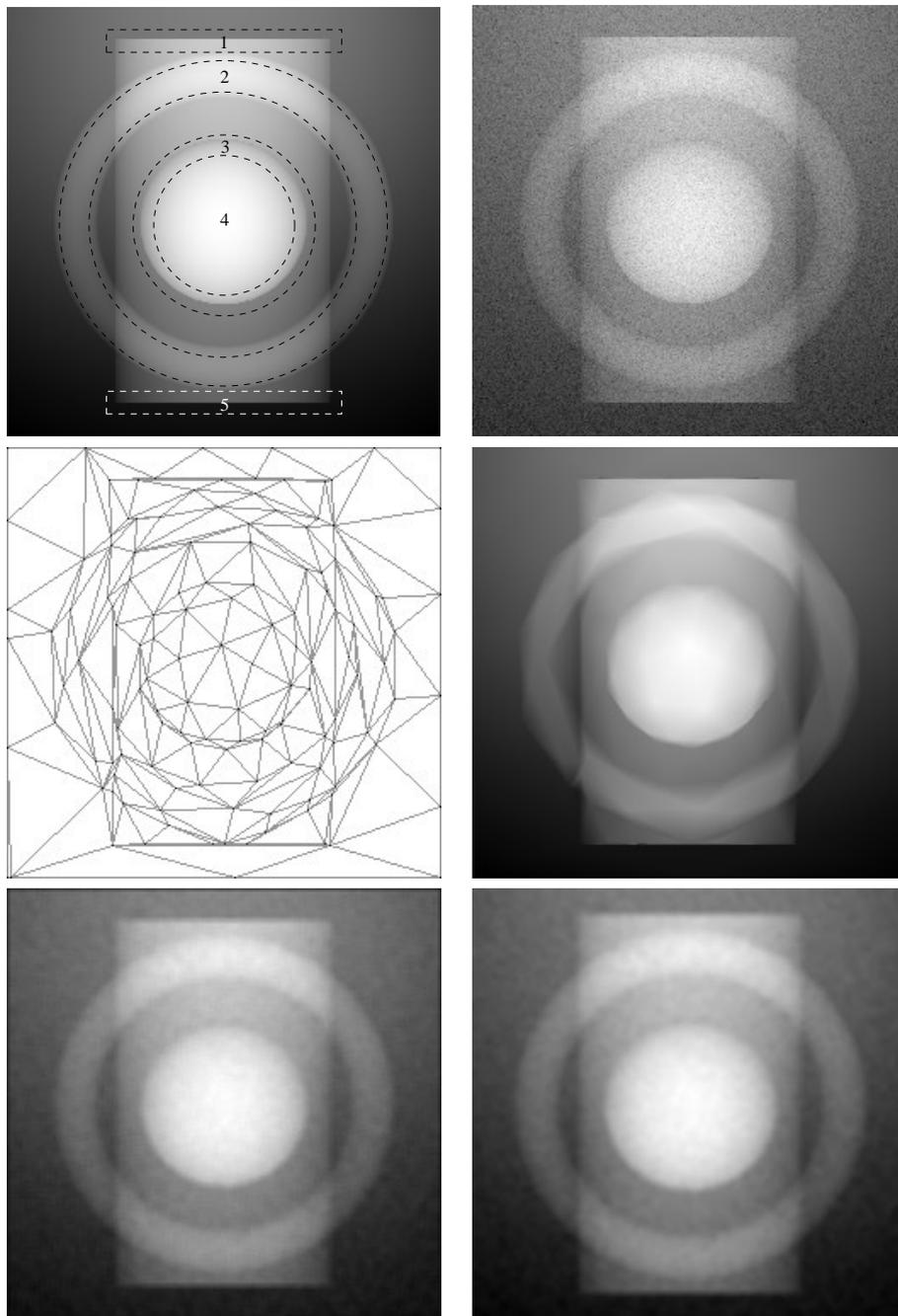


FIG. 5.6 – Premier exemple de résultat avec la SAS sur des données perturbées par un bruit gamma d'ordre $L = 4$. De gauche à droite et de haut en bas, le logarithme de la valeur du fond considéré (256×256 pixels), le logarithme des données, le maillage obtenu, l'estimation du logarithme de la valeur du fond obtenue avec la SAS, l'estimation du logarithme de la valeur du fond obtenue avec un filtre moyenneur de taille 5×5 pixels et l'estimation du logarithme de la valeur du fond obtenue avec un filtre gaussien (la méthode d'estimation utilisée à la section 3.1.1). Différentes régions d'intérêt sont représentées sur le logarithme de la valeur du fond considéré.

méthodes : la SAS, un filtre moyenneur et un filtre gaussien. Le filtre moyenneur est un filtre de taille 5×5 pixels dont le pixel central du filtre est nul, on obtient ainsi la même méthode d'estimation de la valeur du fond que celle utilisée par un détecteur CA-CFAR de même taille. Le filtre gaussien correspond à la même méthode d'estimation de la valeur du fond que celle utilisée par la sélection de région (méthode présentée à la section 3.1.1).

Visuellement, on peut observer que l'estimation de la valeur du fond obtenue avec la SAS semble présenter beaucoup moins de fluctuations que celle obtenue avec le filtre moyenneur ou le filtre gaussien. Cela est une des caractéristiques des résultats fournis par la SAS ; la valeur estimée du fond est fortement débruitée puisque le résultat est une fonction continue linéaire par morceaux. Pour expliquer cette qualité visuelle des résultats, il faut s'intéresser au maillage associé à l'estimation de la valeur du fond fournie par la SAS. On observe la présence de triangles de grandes dimensions dans les zones où l'évolution de la dérivée seconde de la valeur du fond est lente. Ces triangles de grandes dimensions permettent une estimation précise de la valeur du fond et une suppression du bruit particulièrement efficace. On peut également constater que la variance d'estimation de la valeur du fond est plus faible pour les triangles de grande dimension grâce à la figure 5.7 qui présente l'image de la variance d'estimation ζ_p^2 obtenue sur cet exemple.

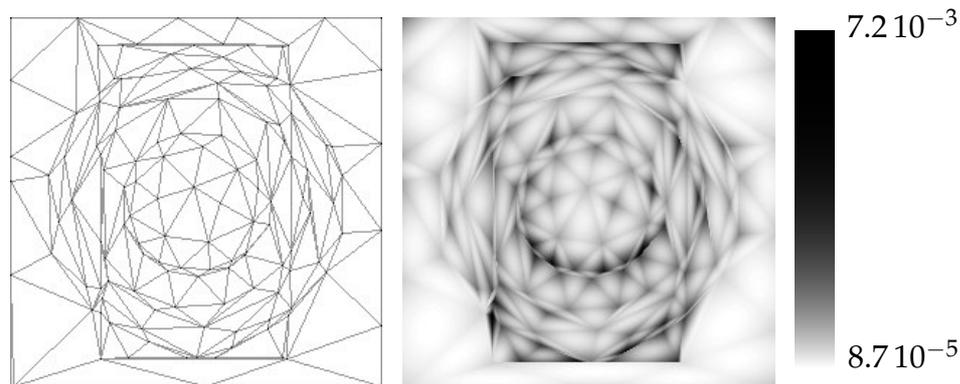


FIG. 5.7 – À gauche l'image du maillage, à droite l'image de variance d'estimation ζ_p^2 avec l'échelle de niveaux de gris associée.

La densité de triangles ainsi que les positions des nœuds et des arêtes sont adaptées en fonction de la complexité locale du fond afin de décrire au mieux ses évolutions. On peut néanmoins voir apparaître sur l'estimation de la valeur du fond fournie par la SAS la topologie du maillage. L'aspect anguleux que l'on observe dans certaines zones du fond estimé (régions 2 et 3) peut être associé à la présence d'une arête du maillage. Cela est soit un défaut inhérent au modèle utilisé par la SAS quand il faut représenter par exemple les contours du dôme (région 3) ou soit un avantage pour représenter des discontinuités franches comme les bords supérieur et inférieur du motif central (régions 1 et 5) sur l'exemple (cf. FIG.5.8).

La méthode d'estimation de la valeur du fond par la SAS est, bien sûr, plus complexe et plus lourde à mettre en œuvre qu'une méthode de filtrage. En effet, l'adaptation du maillage demande de nombreuses opérations. Sur cet exemple, le maillage initial est un maillage régulier (maille de taille 8×9 , c'est-à-dire que les nœuds sont distants de 8 pixels selon i et de 9 pixels selon j) qui

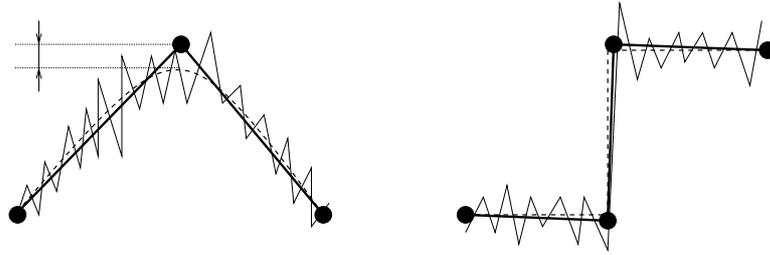


FIG. 5.8 – Illustration 1-D présentant les erreurs de modèles possibles avec la SAS. À gauche, un exemple où le modèle utilisé par la SAS ne permet pas une représentation correcte d'une surface courbe. À droite, un exemple où le modèle permet au contraire une estimation correcte de la valeur du fond. Le fond est tracé en pointillé, l'estimation obtenue avec la SAS est représentée en trait fort et les nœuds sont symbolisés par des cercles.

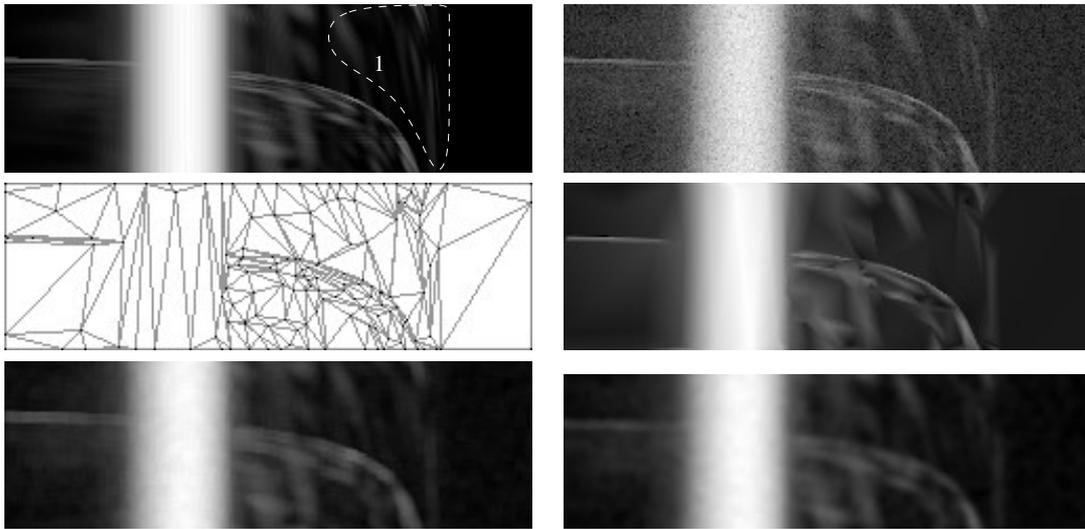


FIG. 5.9 – Deuxième exemple de résultat avec la SAS sur des données perturbées par un bruit gamma d'ordre $L = 4$. De gauche à droite et de haut en bas, le logarithme de la valeur du fond considéré (fond synthétique fourni par Thalès Systèmes Aéroportés), le logarithme des données, le maillage obtenu, l'estimation du logarithme de la valeur du fond obtenue avec la SAS, l'estimation du logarithme de la valeur du fond obtenue avec un filtre moyenneur de taille 5×5 et l'estimation du logarithme de la valeur du fond obtenue avec un filtre gaussien (la méthode d'estimation utilisée à la section 3.1.1).

comptent 896 nœuds et le maillage final est réduit à 133 nœuds. Cependant il faut noter que le résultat ici présenté (cf. FIG. 5.6) est obtenu après 10 secondes de temps de calcul sur un ordinateur standard (Intel Centrino 1.4 Ghz, Linux 2.6.14, GCC 4.0.1). Ce temps de calcul est obtenu grâce à l'utilisation d'un algorithme rapide [19] (cf. annexe A.10).

Considérons maintenant un nouvel exemple où les données traitées correspondent à une carte distance/vitesse. Le fond utilisé pour cette expérience (cf. FIG. 5.9) a été fourni par Thalès Systèmes Aéroportés. Il est particulièrement difficile car il est composé de détails fins qu'il n'est pas évident de distinguer dans le bruit (notamment les détails placés dans la région 1). On remarque sur le résultat de la SAS que ces détails sont mieux rendus qu'avec le filtre moyenneur et avec le filtre gaussien, où ils ont tendance à apparaître flou. On observe sur cet exemple que les zones, où les détails du fond sont plus grossiers, sont modélisées avec peu de triangles par la SAS. La variance

d'estimation de la valeur du fond pour ces triangles est visuellement plus faible que celle obtenue avec le filtre moyennneur ou le filtre gaussien.

Avec un maillage initial (maille de taille 2×3) composé de 3 320 nœuds, l'estimation de la valeur du fond réalisée avec la SAS (cf. FIG. 5.9) est obtenue en 16 secondes sur un ordinateur standard (Intel Centrino 1.4 Ghz, Linux 2.6.14, GCC 4.0.1) et le maillage final comprend 150 nœuds.

La qualité visuelle du résultat obtenu avec la SAS nous a incités à étudier les performances de détection que l'on peut obtenir avec la SAS. En effet, une des conclusions de l'étude menée au chapitre 2 est que la qualité de l'estimation de la valeur du fond est déterminante pour obtenir une technique de détection à taux de fausse alarme constant dont les performances de détection sont élevées. Ainsi il apparaît intéressant d'étudier si l'estimation de la valeur du fond par la SAS permet d'améliorer les performances des techniques de détection.

5.2.3 Détecteur DSAS

Pour utiliser la SAS en détection, nous suivons la même démarche que celle développée pour le détecteur LQ-CFAR (cf. chapitre 4). Aussi le détecteur associé à la SAS, que nous appellerons DSAS, est fondé sur le test de détection suivant :

$$\frac{X_n}{\widehat{m}_n^{SAS}} \underset{\text{pas de cible}}{\overset{\text{cible}}{\geq}} \tau_n, \quad (5.31)$$

où τ_n est le seuil de détection dont la valeur dépend de la probabilité de fausse alarme α souhaitée par l'utilisateur et de la variance d'estimation de la SAS ζ_n^2 à travers l'équation suivante obtenue dans le chapitre précédent :

$$\mathcal{P}_{fa}^{DSAS}(\tau_n | \zeta_n^2, L) = \frac{\exp(-\zeta_n^2/8)}{\zeta_n \Gamma(L) \sqrt{2\pi}} \times \int_0^\infty u^{-3/2} \Gamma(L, Lu\tau_n) \exp\left[-\frac{\log(u)^2}{2\zeta_n^2}\right] du. \quad (5.32)$$

Remarquons qu'une estimation de la valeur du fond réalisée grâce à une méthode qui prend en compte l'ensemble des données, et donc notamment le pixel test, est biaisée par la présence d'une cible. Pour les autres techniques de détection présentées, la valeur du pixel test n'est pas prise en compte lors de l'estimation de la valeur du fond afin de ne pas rencontrer ce problème. Or, avec la SAS, il est possible de réaliser une estimation de la valeur du fond sans tenir compte de l'ensemble des données. Pour des raisons de rapidité, il n'est pas envisageable de réaliser une estimation de la valeur du fond (algorithme SAS complet) sans tenir compte du pixel test pour toutes les positions testées. En revanche, une fois la topologie du maillage déterminée et pour chaque pixel testé, on peut estimer les valeurs nodales sans prendre en compte la valeur du pixel testé, cette approche nécessitant beaucoup moins de temps (quelques millisecondes comparé à quelques dizaines de secondes). Un exemple est proposé sur la figure FIG. 5.10, où les résultats obtenus sont présentés soit en prenant en compte l'intégralité des données,

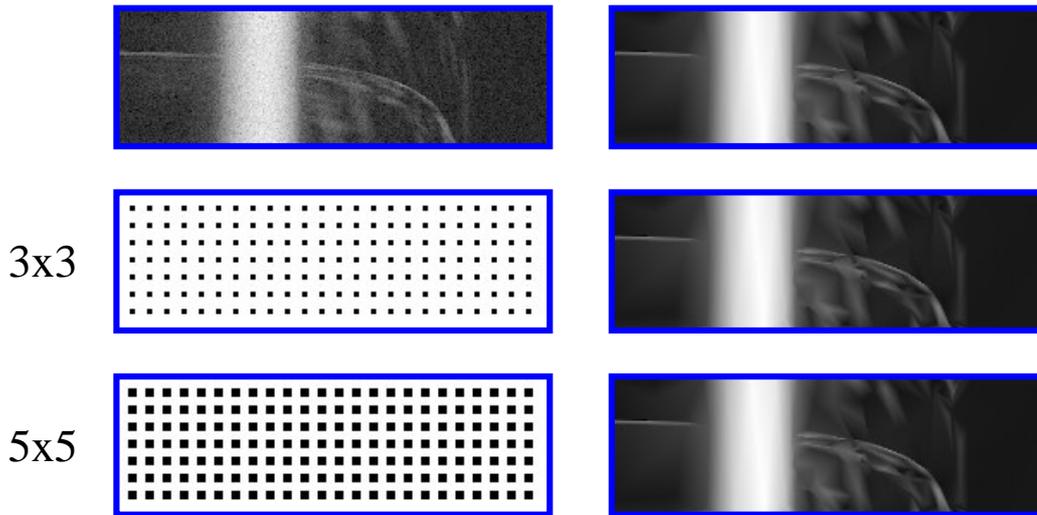


FIG. 5.10 – De gauche à droite et de haut en bas, le logarithme des données (fond synthétique fourni par Thalès Systèmes Aéroportés), le logarithme de la valeur estimée du fond par la SAS à partir de l'ensemble des données, un premier masque (les pixels noirs ne sont pas pris en compte), le logarithme de la valeur estimée du fond (à topologie du maillage fixée) pour le premier masque, le second masque et le logarithme de la valeur estimée du fond (à topologie fixée) pour le second masque.

soit en masquant une partie des données. Le maillage utilisé sur cet exemple est déterminé à partir de l'ensemble des données.

On considère deux masques, l'un pour lequel des zones de 3×3 pixels ne sont pas prises en compte lors de l'estimation de la valeur du fond, l'autre pour lequel la taille des zones est de 5×5 pixels. Visuellement les différences entre les différents résultats sont minimes. Ceci s'explique par le fait que la modélisation utilisée impose des contraintes (topologique et de continuité) qui rendent l'algorithme peu sensible à la non-prise en compte d'une partie des données.

Cette simulation semble indiquer qu'avec la SAS, il est possible de ne pas prendre en compte la valeur du pixel test lors de l'estimation des valeurs nodales du maillage.

5.2.4 Comparaison des techniques de détection

Nous souhaitons maintenant comparer les performances du détecteur DSAS aux performances d'autres détecteurs : les détecteurs standard (CA-CFAR, OS-CFAR, TM-CFAR) et ceux proposés dans cette thèse (la sélection de région, le LQ-CFAR et la sélection de modèle qui permet une sélection automatique entre les détecteurs CA-CFAR et LQ-CFAR). Pour comparer les probabilités de fausse alarme estimées de chacune des techniques par une méthode de type Monte-Carlo, il est nécessaire de réaliser un grand nombre de tirages (typiquement 10^5) pour obtenir une précision suffisante [76, 97]. Les temps de calculs cumulés pour toutes ces techniques ne nous permettent pas de réaliser une telle simulation numérique. Il est cependant possible d'utiliser des méthodes d'évaluation de la qualité d'un détecteur qui ne nécessitent que quelques réalisations.

Principe de la méthode de comparaison

En effet, les critères de qualité d'un détecteur (en termes de performance) que nous considérons sont la maîtrise du taux de fausse alarme et le pouvoir de détection. Pour évaluer la capacité d'un détecteur à maîtriser le taux de fausse alarme, on peut déterminer le nombre de fausses alarmes moyen $\langle NFA \rangle$ calculé pour l'ensemble des positions testées et pour les différentes réalisations. Ce nombre est une estimation de la probabilité de fausse alarme moyenne sur l'image et il est également intéressant pour l'analyse des résultats de représenter le nombre moyen de fausses alarmes NFA en chaque site afin de localiser où se situent ces fausses alarmes.

Pour quantifier le pouvoir de détection d'une technique, nous utiliserons un indicateur nommé ADT (« Average Detection Threshold », seuil de détection moyen) dans la littérature [41, 105]. Le principe de cet indicateur part du constat que le pouvoir de détection est d'autant plus élevé que la valeur du pixel test X_n est comparé à une valeur faible. Pour toutes les techniques de détection étudiées, la valeur X_n est comparée au produit du seuil de détection τ_n et de la valeur estimée du fond au pixel test \hat{m}_n . Afin que la valeur de cet indicateur ne dépende pas de la valeur m_n du fond au pixel test, le produit $\tau_n \hat{m}_n$ est normalisé par rapport à un fond de valeur unitaire. Aussi la valeur de l'indicateur ADT est l'espérance mathématique de $\tau_n \hat{m}_n / m_n$, valeur qui doit être la plus faible possible pour obtenir une capacité de détection élevée. La figure FIG. 5.11 illustre le principe de l'indicateur ADT .

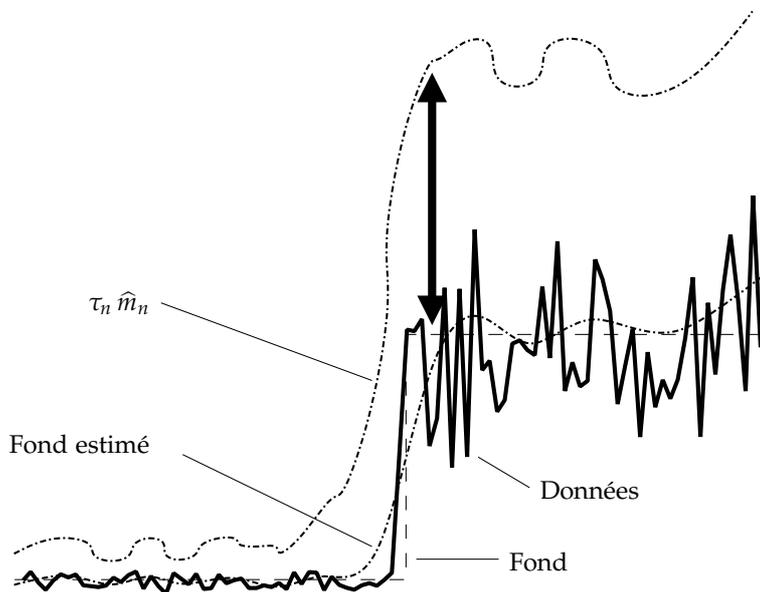


FIG. 5.11 – Illustration expliquant le principe de l'indicateur ADT . La capacité de détection d'un détecteur est liée à la valeur de $\tau_n \hat{m}_n / m_n$. Plus cette valeur est faible, plus le détecteur sera à même de détecter une cible de faible intensité.

Dans le cas du détecteur idéal (fond connu), la valeur de l'indicateur ADT est égale à τ_n , où τ_n est le seuil de détection déterminé en fonction de la \mathcal{P}_{fa} souhaitée et de l'ordre du bruit gamma (cf. équation 2.7). La valeur de l'indicateur ADT dans le cas du détecteur idéal représente une limite inférieure. Si l'indicateur ADT d'une technique de détection est inférieur à cette limite, cela indique le plus souvent une non-maîtrise du taux de fausse alarme.

Pour estimer la valeur de l'indicateur $ADT = E[\tau_n \hat{m}_n / m_n]$ pour chaque position testée, nous réalisons une moyenne sur l'ensemble des réalisations de bruit. Nous noterons $\langle ADT \rangle$ la valeur de l'indicateur ADT estimé en moyenne sur l'ensemble des positions testées.

À l'aide des indicateurs précédemment définis, nous souhaitons maintenant comparer différentes techniques de détection : le CA-CFAR, l'OS-CFAR, le TM-CFAR, le DSR, le LQ-CFAR, la sélection de modèle (SM) entre les techniques CA-CFAR et LQ-CFAR et pour finir le détecteur DSAS.

Pour les détecteurs CA-CFAR, OS-CFAR, TM-CFAR, LQ-CFAR et la sélection de modèle nous considérons une région de référence de taille 5×5 . Le nombre de pixels dans la région de référence est donc de 24 pixels, car le pixel central, qui correspond au pixel test, n'est pas pris en compte pour l'estimation de la valeur du fond. Pour les détecteurs OS-CFAR et TM-CFAR, il est nécessaire de fixer la valeur de leurs paramètres (cf. section 1.4.2). Nous utiliserons les valeurs recommandées par Gandhi et Kassam [41], c'est-à-dire $k = 12$, $T_1 = 18$ et $T_2 = 1$. Avec la valeur $k = 12$, l'estimateur de la valeur du fond utilisé par le détecteur OS-CFAR correspond approximativement à un filtre médian. Les valeurs $T_1 = 18$ et $T_2 = 1$ sont telles que l'estimation de la valeur du fond obtenue avec le détecteur TM-CFAR est calculée à partir des 5 valeurs des données les plus grandes dans la région de référence¹. Aussi le détecteur TM-CFAR aura tendance à sur-estimer la valeur du fond, ce qui lui permettra une bonne maîtrise du taux de fausse alarme mais cela se fait au dépend sa capacité de détection.

Le détecteur DSR sera utilisé de la même manière que celle qui a été présentée dans la section 3.2. Pour des raisons de rapidité d'exécution du détecteur DSR, nous utiliserons les expressions des performances approchées à la place des expressions des performances exactes pour la détermination du seuil de détection (cf. section 3.1.3).

Résultats sur carte distance/vitesse

La figure FIG. 5.12 présente le premier fond utilisé (fond synthétique fourni par Thalès Systèmes Aéroportés) ainsi qu'un exemple de réalisation obtenue avec un bruit gamma d'ordre $L = 4$. Pour cette simulation numérique, la probabilité de fausse alarme souhaitée est fixée à $\alpha = 10^{-4}$ et les résultats seront obtenus à partir de $1.4 \cdot 10^4$ réalisations.

La figure FIG. 5.13 présente les cartes du nombre moyen de fausses alarmes obtenues pour les différentes techniques de détection. Grâce aux cartes du nombre moyen de fausses alarmes, on peut tout d'abord remarquer que tous les détecteurs sont plus ou moins mis en défaut par les fortes discontinuités du fond. Ceci illustre la difficulté à détecter des cibles sur ce type de fond. Les détecteurs CA-CFAR et OS-CFAR sont les détecteurs pour lesquels la sensibilité à ces discontinuités du fond est la plus forte. Le détecteur TM-CFAR est moins perturbé par ces discontinuités. Cela est dû, comme nous l'avons déjà indiqué, au choix des valeurs des paramètres T_1 et T_2 de cette technique.

En complément des cartes du nombre moyen de fausses alarmes, nous proposons une indication sur le comportement de chacune des techniques.

¹L'estimateur de la valeur du fond utilisé par le TM-CFAR correspond à $\hat{m}_n^{\text{TM-CFAR}} =$

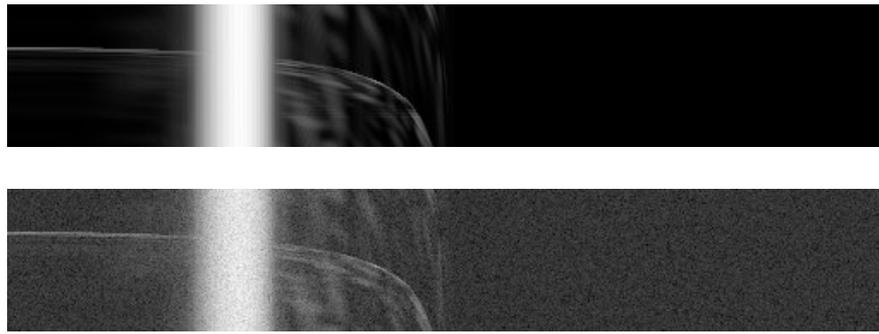


FIG. 5.12 – En haut le fond (fond synthétique fourni par Thalès Systèmes Aéroportés) considéré lors de cette expérience, en bas un exemple de réalisation obtenue avec un bruit gamma d'ordre $L = 4$ (visualisation du logarithme).

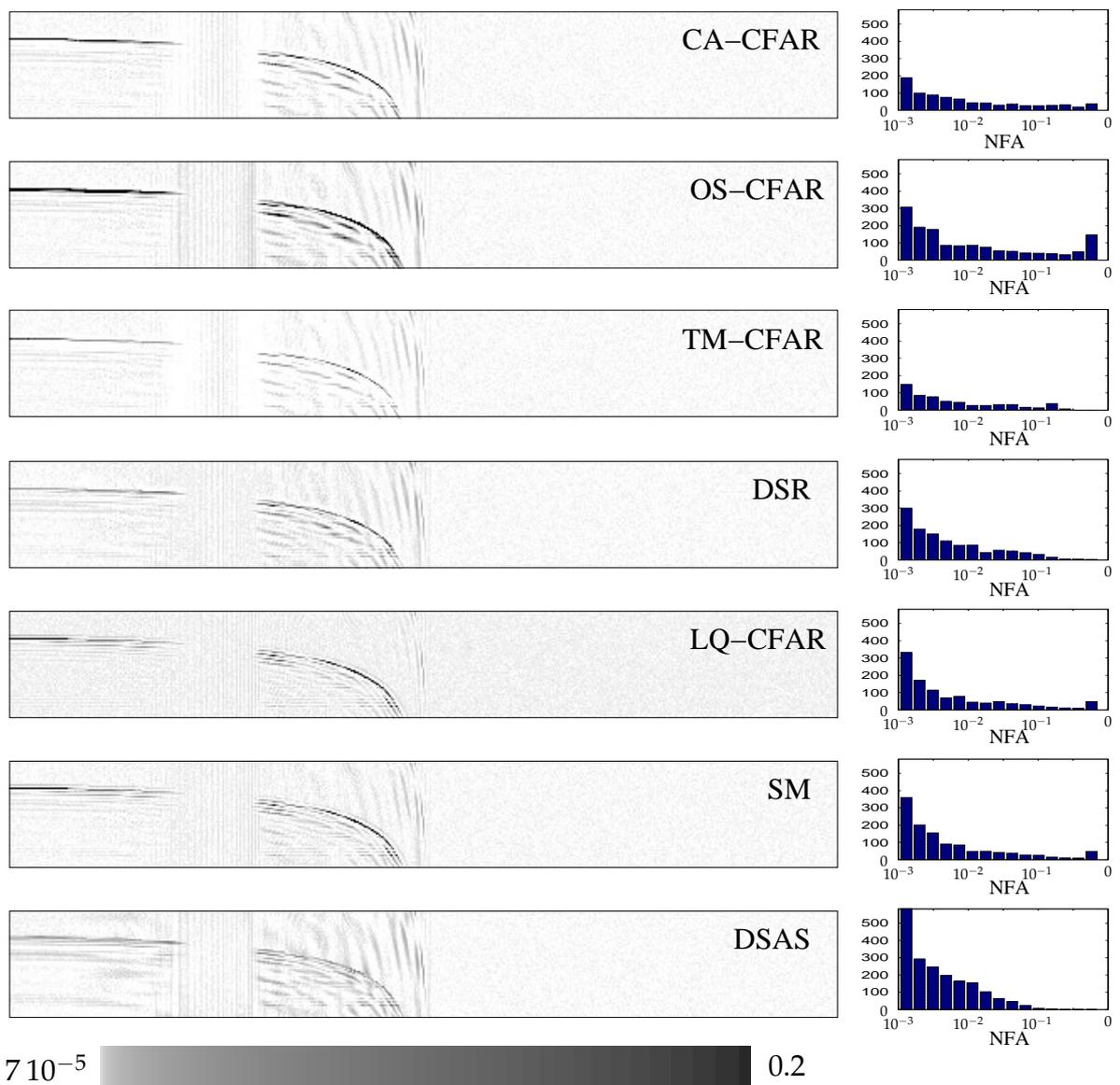


FIG. 5.13 – Cartes du nombre moyen de fausses alarmes NFA obtenues pour les différentes techniques de détection (représentées avec la même échelle de niveau de gris). À la droite de chacune des cartes, on présente son histogramme.

En effet, sur fond inhomogène, une mauvaise régulation du taux de fausse alarme se traduit par une fluctuation du nombre moyen de fausses alarmes (par rapport à la probabilité de fausse alarme souhaitée) en fonction de la position testée. Aussi, nous présentons un histogramme de chacune des cartes. Pour le détecteur idéal, l'histogramme serait constitué d'une unique classe, ce qui indiquerait que la probabilité de fausse alarme de ce détecteur est la même quelque soit la position testée. De plus cette classe serait centrée sur la valeur de la probabilité de fausse alarme souhaitée ($\alpha = 10^{-4}$). Dans le cas d'un détecteur réel, cet histogramme permet de juger de la capacité du détecteur à avoir un comportement constant en terme de régulation du taux de fausse alarme quelque soit la position testée. Sur les histogrammes, on ne représente que les valeurs de la carte supérieures à 10^{-3} car les valeurs inférieures sont estimées avec une trop grande variance pour être exploitables. Cependant cela n'est pas gênant car nous souhaitons précisément étudier les cas où les détecteurs sont mis en défaut et fournissent un trop grand nombre de fausses alarmes.

À partir de l'histogramme, on peut remarquer que le détecteur DSR a un meilleur comportement que le détecteur CA-CFAR. En effet, pour le détecteur DSR, l'étalement de l'histogramme est plus faible que pour le CA-CFAR. Avec la carte du nombre moyen de fausses alarmes NFA , on constate que le détecteur DSR (sélection de région) présente un nombre moyen de fausses alarmes plus faible que la technique CA-CFAR, ce qui justifie l'intérêt de sélectionner la région de référence. On peut remarquer que le détecteur DSR est sensible aux discontinuités du fond, ce qui s'explique par le fait que l'estimation de la valeur du fond, qui est réalisée avec un filtrage par un noyau gaussien, (cf. section 3.1.1), est particulièrement difficile à ces endroits. Aussi, le choix de la région de référence et le calcul du seuil de détection sont moins performants dans ces cas.

Le détecteur LQ-CFAR est encore plus fortement sensible aux discontinuités du fond que le détecteur DSR. Ce résultat est logique et était prévisible. En effet, une discontinuité brutale du fond (du type « marche ») ne correspond pas au modèle de fond associé au LQ-CFAR, c'est-à-dire un fond qui évolue localement de manière continue. Néanmoins hormis les zones où le fond présente des discontinuités, le détecteur LQ-CFAR est peu sensible aux fluctuations du fond (pour le détecteur idéal, les positions des fausses alarmes seraient indépendantes des motifs du fond). Il est par ailleurs intéressant de remarquer que le détecteur SM est moins sensible aux discontinuités du fond. Sur les histogrammes obtenus pour les détecteurs LQ-CFAR ou SM, on retrouve le problème rencontré par ces techniques face à de fortes discontinuités du fond. En effet, le nombre élevé de fortes valeurs de NFA (les classes les plus à droite de l'histogramme) est lié aux positions repérées par le niveau de gris le plus foncé sur les cartes de ces détecteurs. On note également que l'on retrouve ce phénomène, de manière moins marquée, sur les histogrammes obtenus pour les détecteurs CA-CFAR ou TM-CFAR et de manière plus marquée sur celui obtenu pour le détecteur OS-CFAR.

$\frac{1}{N_n - (T_1 + T_2 + 1)} \sum_{l=T_1+1}^{N_n - T_2} Y_l$ où Y_l sont les valeurs des pixels de la région de référence classées par ordre croissant

Enfin on constate sur les cartes que le détecteur DSAS présente une sensibilité plus marquée que le LQ-CFAR aux variations du fond excepté pour des discontinuités du fond. Néanmoins, il faut noter que les fausses alarmes du détecteur DSAS sont principalement concentrées dans les zones où la valeur du fond évolue rapidement. Il est, en effet, plus dur d'estimer et de représenter l'évolution de la valeur du fond à ces endroits avec un maillage. Le choix d'un maillage triangulaire et les contraintes topologiques associées font qu'il est difficile de représenter des détails du fond dont la taille est très faible (quelques pixels). Cependant, il est à noter que nous connaissons la topologie du maillage, il est donc possible d'identifier les zones où la densité de triangles est élevée et où les triangles sont de faible taille. On pourrait ainsi imaginer un post-traitement permettant de prendre en compte cette information de topologie pour mieux maîtriser le taux de fausse alarme avec le DSAS. Sur l'histogramme, on peut noter que le détecteur DSAS est le détecteur qui présente le plus faible nombre de valeurs de NFA élevées (les classes les plus à droite de l'histogramme).

En outre, cette expérience permet de vérifier que la probabilité de fausse alarme estimée sur fond homogène pour les détecteurs CA-CFAR, OS-CFAR, TM-CFAR, DSR et DSAS est égale à la probabilité de fausse alarme souhaitée ($\alpha = 10^{-4}$). Pour effectuer cette vérification nous n'avons utilisé que la partie homogène de la carte distance/vitesse considérée pour les simulations numériques. La \mathcal{P}_{fa} du détecteur LQ-CFAR sur fond homogène est estimée à $2.2 \cdot 10^{-4}$, ce qui s'explique par le fait que le seuil de détection est choisi en utilisant une approximation de la distribution du logarithme de la valeur du fond sous la forme d'une loi normale (sujet dont nous avons déjà discuté à la section 4.1.4). On peut d'ailleurs observer sur la carte du nombre de fausses alarmes du LQ-CFAR (cf. figure 5.13) que le taux de fausse alarme de ce détecteur est supérieur à celui des autres détecteurs sur fond homogène (partie droite du fond considéré pour cette expérience). Il est alors intéressant de constater que la \mathcal{P}_{fa} du détecteur SM est estimée à $1.2 \cdot 10^{-4}$, cette valeur est plus proche de la probabilité de fausse alarme souhaitée que la valeur obtenue pour le LQ-CFAR. En effet, le détecteur CA-CFAR est principalement sélectionné sur fond homogène. Nous remarquons que le détecteur DSAS, qui utilise la même approximation que le détecteur LQ-CFAR pour le choix du seuil de détection, permet de réguler correctement le taux de fausse alarme sur fond homogène. La différence entre ces techniques est que l'estimation de la valeur du fond avec la SAS est réalisée à partir d'un plus grand nombre de pixels (grand triangle) que dans le cas du LQ-CFAR, pour la région homogène du fond (partie droite du fond). Aussi, comme nous l'avons déjà souligné au chapitre précédent, il apparaît que l'approximation choisie est d'autant plus justifiée que le nombre de pixels utilisés pour l'estimation de la valeur du fond est grand.

Intéressons nous maintenant aux valeurs des indicateurs choisis : $\langle NFA \rangle$ le nombre de fausses alarmes moyen et l'indicateur $\langle ADT \rangle$. Les valeurs de ces indicateurs obtenues pour les différentes techniques sont données au tableau TAB. 5.1. Sur la figure FIG. 5.14, on retrouve les mêmes informations présentées de manière plus visuelle. Rappelons que l'indicateur $\langle NFA \rangle$ doit être le plus proche possible de la probabilité de fausse alarme souhaitée $\alpha = 10^{-4}$ et que

Détecteur	$\langle NFA \rangle$	$\langle ADT \rangle$
Idéal	10^{-4}	4
CA-CFAR	$1.7 \cdot 10^{-3}$	4.8
OS-CFAR	$5.3 \cdot 10^{-3}$	4.5
TM-CFAR	$5.5 \cdot 10^{-4}$	5.6
DSR	$7.8 \cdot 10^{-4}$	4.6
LQ-CFAR	$1.8 \cdot 10^{-3}$	5.1
SM	$1.7 \cdot 10^{-3}$	4.5
DSAS	$5.8 \cdot 10^{-4}$	4.1

TAB. 5.1 – Pour chacune des techniques, ce tableau rassemble les valeurs des critères d'évaluation : $\langle NFA \rangle$ le nombre de fausses alarmes moyen et $\langle ADT \rangle$ qui indique le pouvoir de détection. Ces résultats ont été obtenus en considérant le fond présenté à la figure FIG. 5.12.

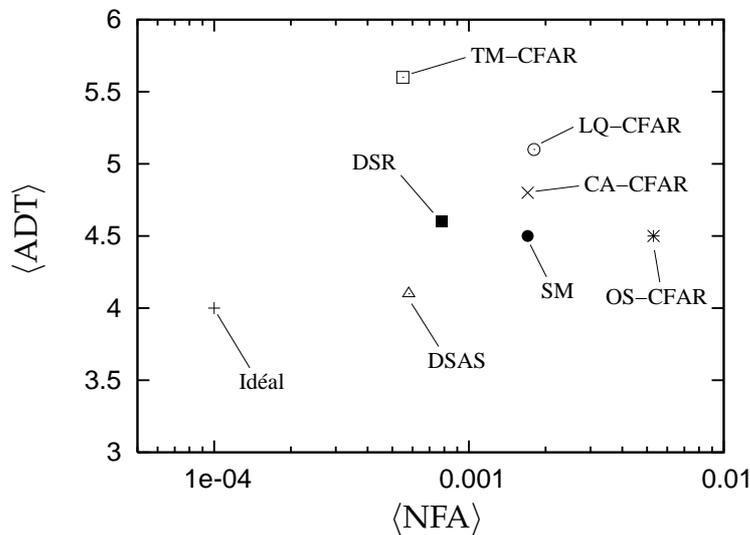


FIG. 5.14 – Pour chaque technique, le symbole indique les valeurs des deux indicateurs $\langle NFA \rangle$ et $\langle ADT \rangle$. Ces résultats ont été obtenus en considérant le fond présenté à la figure FIG. 5.12.

l'indicateur $\langle ADT \rangle$ doit être le plus faible possible pour obtenir la capacité de détection la plus élevée possible. La valeur de ces indicateurs est également mentionnée pour le détecteur idéal afin de servir de référence pour comparer les différentes techniques étudiées.

De manière générale, au regard des valeurs de $\langle NFA \rangle$, tous les détecteurs ne permettent pas d'assurer rigoureusement le taux de fausse alarme. Il existe cependant des différences de comportement, le détecteur OS-CFAR est, par exemple, le détecteur qui présente la moins bonne maîtrise du taux de fausse alarme.

Tout d'abord, remarquons que le détecteur DSR permet une meilleure régulation du taux de fausse alarme que le CA-CFAR, mais il permet également d'obtenir une capacité de détection supérieure (la valeur de $\langle ADT \rangle$ pour le DSR est inférieure à celle du CA-CFAR).

Le détecteur LQ-CFAR, comme nous avons pu le constater précédemment de manière visuelle, ne permet pas une bonne régulation du taux de fausse alarme car il est mis en défaut par les discontinuités du fond. Les résultats obtenus peuvent sembler très négatifs, cependant il ne reflète pas la capacité

du LQ-CFAR à maintenir un taux de fausse alarme constant sur des zones du fond inhomogènes telles que des zones de fouillis où le fond présente des ondulations. Aussi, nous proposerons dans la suite un deuxième exemple pour montrer dans quelles situations l'utilisation de ce détecteur est intéressante.

Malgré les difficultés rencontrées par le LQ-CFAR, on peut remarquer que la sélection de modèle (SM) permet une maîtrise du taux de fausse alarme équivalente à celle du CA-CFAR tout en offrant une meilleure capacité de détection que le CA-CFAR.

Le détecteur DSAS présente une meilleure maîtrise du taux de fausse alarme que les détecteurs CA-CFAR, OS-CFAR, DSR, LQ-CFAR et SM, mais également une meilleure capacité de détection. Par ailleurs, la capacité de détection du DSAS est très proche de la capacité de détection du détecteur idéal. On voit ici l'intérêt de la méthode d'estimation de la valeur du fond SAS. L'algorithme cherchant à maximiser la taille des triangles, on obtient une variance suffisamment faible pour atteindre la capacité de détection du détecteur idéal.

Pour finir, le détecteur TM-CFAR obtient de bons résultats en terme de maîtrise de la fausse alarme, ce qui peut sembler à première vue très intéressant. Cependant cette bonne maîtrise du taux de fausse alarme se fait au dépend de la capacité de détection du TM-CFAR, capacité de détection qui est la plus faible de celles des détecteurs testés.

Cette première expérience amène plusieurs conclusions sur les détecteurs proposés :

- le détecteur DSR permet d'améliorer les performances du CA-CFAR, autant en capacité de régulation du taux de fausse alarme qu'en capacité de détection,
- le détecteur LQ-CFAR est mis en défaut par les discontinuité du fond, néanmoins la sélection de modèle (SM) permet d'obtenir une capacité de détection plus élevée que celle du CA-CFAR,
- le détecteur DSAS est moins sensible que les autres techniques aux discontinuités du fond, il offre une bonne maîtrise du taux de fausse alarme et la capacité de détection la plus élevée.

Résultats sur fond sans discontinuité

Considérons maintenant un deuxième fond (présenté à la figure FIG. 5.15) dont le logarithme de la valeur du fond est obtenu par filtrage d'un bruit gaussien de variance 10 par un noyau gaussien de taille 2.2 pixels. Nous conservons, pour les différentes techniques, les mêmes paramètres que ceux utilisés à la simulation numérique précédente. Nous utilisons également les mêmes paramètres de simulation ($L = 4$, $\alpha = 10^{-4}$) que pour l'expérience que nous venons de réaliser et nous considérons $1.6 \cdot 10^3$ réalisations.

Sur la figure FIG. 5.16, on peut observer les cartes du nombre moyen de fausses alarmes obtenues pour les différentes techniques. Pour cette expérience, le nombre de réalisations étant plus réduit, la partie de l'histogramme correspondant à des valeurs de NFA inférieure à 10^{-2} est estimée avec une variance importante et cette partie est peu significative.

Nous constatons, comme précédemment, que les positions des fausses

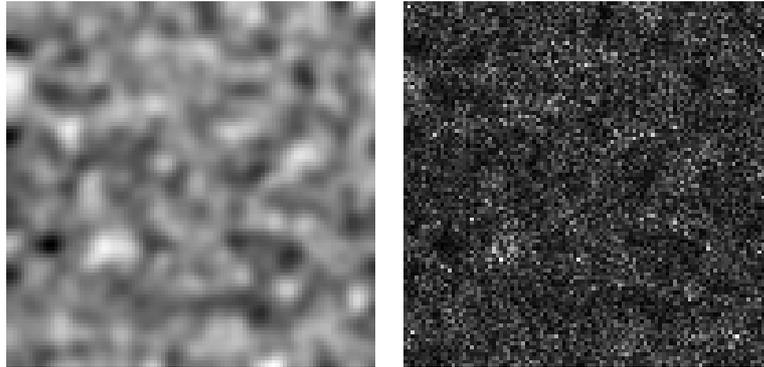


FIG. 5.15 – À gauche le fond (100×100) considéré lors de cette expérience, à droite un exemple de réalisation obtenue à partir de ce fond (visualisation du logarithme).

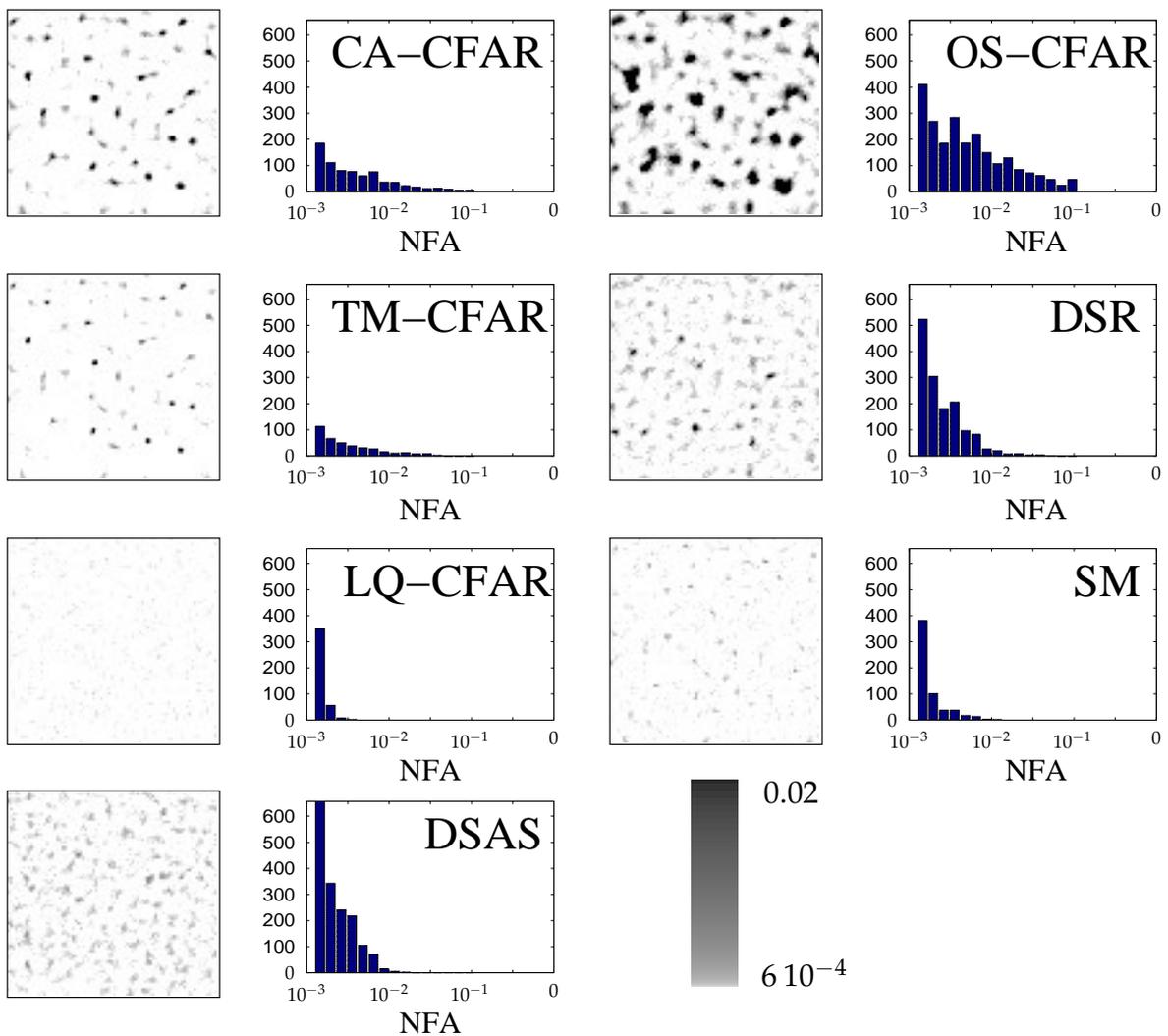


FIG. 5.16 – Cartes du nombre moyen de fausses alarmes NFA obtenues pour les différentes techniques de détection (représentées avec la même échelle de niveau de gris). À la droite de chacune des cartes, on présente son histogramme.

Détecteur	$\langle NFA \rangle$	$\langle ADT \rangle$
Idéal	10^{-4}	4
CA-CFAR	$8 \cdot 10^{-4}$	6
OS-CFAR	$3.9 \cdot 10^{-3}$	4.4
TM-CFAR	$3 \cdot 10^{-4}$	7.9
DSR	$7.8 \cdot 10^{-4}$	4.9
LQ-CFAR	$2.4 \cdot 10^{-4}$	5
SM	$3.2 \cdot 10^{-4}$	4.9
DSAS	$7.4 \cdot 10^{-4}$	4.4

TAB. 5.2 – Pour chacune des techniques, ce tableau rassemble les valeurs des critères d'évaluation : $\langle NFA \rangle$ le nombre de fausses alarmes moyen et $\langle ADT \rangle$ qui indique le pouvoir de détection. Ces résultats ont été obtenus en considérant le fond présenté à la figure FIG. 5.15.

alarmes des détecteurs CA-CFAR et OS-CFAR sont fortement liées aux motifs du fond (les fausses alarmes sont concentrées à certaines positions). C'est également le cas pour le détecteur TM-CFAR, mais le nombre de fausses alarmes est cependant nettement plus faible que pour le CA-CFAR ou l'OS-CFAR. Cette concentration des fausses alarmes traduit un problème d'estimation de la valeur du fond aux positions concernées.

On retrouve ce phénomène de regroupement des fausses alarmes pour le détecteur DSR, mais de façon nettement moins importante que pour le CA-CFAR, les fausses alarmes sont réparties de manière plus homogène sur l'ensemble du fond. Sur l'histogramme, on peut remarquer que le nombre de *NFA* de valeurs élevées ($> 10^{-2}$) est inférieur pour le détecteur DSR par rapport au CA-CFAR.

Pour le détecteur LQ-CFAR, le nombre de fausses alarmes est nettement plus faible et elles sont mieux réparties sur l'image que pour le DSR, ce qui est également le cas pour la sélection de modèle (SM). Concernant les histogrammes obtenus pour ces détecteurs, on note que le LQ-CFAR et la sélection de modèle (SM) sont les détecteurs qui présentent le comportement le plus proche du détecteur idéal (une unique classe).

On constate sur la carte que le détecteur DSAS présente un nombre de fausses alarmes supérieur à celui du LQ-CFAR mais avec une répartition relativement homogène des fausses alarmes sur le fond. À la vue de l'histogramme, on remarque que le détecteur DSAS a un comportement légèrement moins bon que la sélection de modèle (SM), toutefois le nombre de *NFA* de valeurs élevées est inférieure ($> 10^{-2}$) pour le DSAS en comparaison du CA-CFAR. Il faut cependant noter que le fond utilisé est très différent du modèle de surface utilisé par la SAS, aussi sa valeur est particulièrement difficile à modéliser et à représenter pour la SAS.

Considérons maintenant, pour les différentes techniques, les valeurs des indicateurs $\langle NFA \rangle$ et $\langle ADT \rangle$ qui sont regroupées dans le tableau TAB. 5.2. La figure FIG. 5.17 regroupe les mêmes informations présentées sous une forme différente.

On remarque une nouvelle fois que le détecteur DSR permet d'améliorer

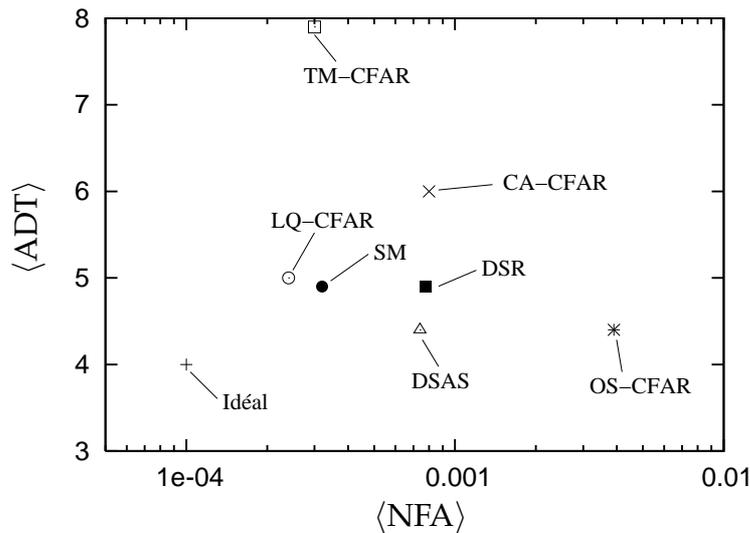


FIG. 5.17 – Pour chaque technique, le symbole indique les valeurs des deux indicateurs $\langle NFA \rangle$ et $\langle ADT \rangle$. Ces résultats ont été obtenus en considérant le fond présenté à la figure FIG. 5.15.

la capacité de régulation du taux de fausse alarme du CA-CFAR et permet également un net gain de la capacité de détection.

Le détecteur LQ-CFAR, mieux adapté à ce type de fond (qui ne correspond pourtant pas exactement au modèle de fond utilisé par le LQ-CFAR), est le détecteur qui permet la meilleure régulation du taux de fausse alarme. La capacité de régulation du taux de fausse alarme du LQ-CFAR est supérieure à celle du TM-CFAR, qui possède pourtant une capacité de détection bien plus faible que le LQ-CFAR. La sélection de modèle (SM) permet quant à elle d'améliorer la capacité de détection du LQ-CFAR au prix d'une moins bonne régulation du taux de fausse alarme.

Le détecteur DSAS présente une capacité à réguler le nombre de fausses alarmes moins bonne que les détecteurs LQ-CFAR ou SM mais supérieure à celle du CA-CFAR ou du DSR. Le détecteur DSAS partage avec l'OS-CFAR la meilleure capacité de détection tout en assurant une capacité de régulation de fausse alarme améliorée par rapport à l'OS-CFAR.

Pour conclure, cette expérience nous a permis de constater que le détecteur LQ-CFAR présente un intérêt sur des fonds évoluant de manière complexe mais sans discontinuités. On a pu également remarquer que le détecteur DSAS permet d'obtenir une nouvelle fois la meilleure capacité de détection tout en assurant une meilleure régulation du taux de fausse alarme que le CA-CFAR, même si le détecteur DSAS n'est pas particulièrement bien adapté à ce type de fond.

Ces expériences nous ont permis de comparer les différentes techniques de détection étudiées. Elles montrent l'intérêt d'utiliser le détecteur DSAS pour la détection, on peut obtenir une capacité de détection particulièrement élevée tout en assurant une meilleure régulation du taux de fausse alarme que les détecteurs CA-CFAR ou DSR.

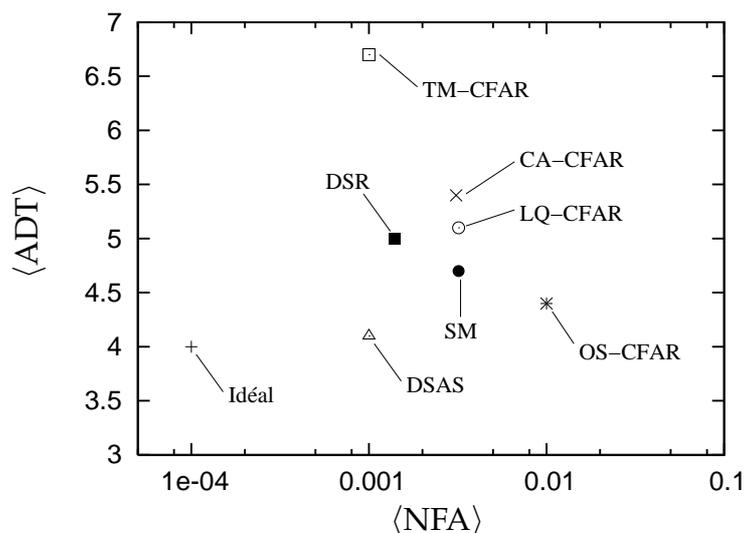


FIG. 5.18 – Pour chaque technique, le symbole indique les valeurs des deux indicateurs $\langle NFA \rangle$ et $\langle ADT \rangle$. Ces résultats ont été obtenus en considérant la région inhomogène (partie de gauche) du fond présenté à la figure FIG. 5.12.

Synthèse

Suite aux comparaisons des techniques de détection étudiées dans cette thèse, nous pouvons aboutir à plusieurs conclusions.

Le détecteur DSR a une meilleure capacité de détection que le CA-CFAR tout en offrant une meilleure maîtrise du taux de fausse alarme. Cependant les performances du détecteur DSR sont liées à la qualité de l'estimation préalable de la valeur du fond utilisée.

Le détecteur LQ-CFAR permet d'améliorer la maîtrise du taux de fausse alarme en comparaison du CA-CFAR lorsque le fond ne présente pas de discontinuités. Pour la simulation numérique réalisée en utilisant une carte distance/vitesse, les résultats semblent montrer que les performances en détection du LQ-CFAR sont moins bonnes que celles du CA-CFAR sur des fonds comportant des discontinuités. Cependant une grande partie de la carte distance/vitesse est constituée d'une région homogène pour laquelle le CA-CFAR est parfaitement adapté. Sur la figure FIG. 5.18, nous présentons les résultats obtenus si l'on ne considère que la région inhomogène de la carte distance/vitesse, c'est-à-dire la partie gauche de celle-ci. On peut alors noter que les détecteurs CA-CFAR, LQ-CFAR et la sélection de modèle (SM) ont une capacité de régulation du taux fausse alarme quasi-identique, mais le LQ-CFAR et la sélection de modèle (SM) permettent d'obtenir une meilleure capacité de détection que le CA-CFAR. Lors de la deuxième expérience sur des fonds continus, l'intérêt de ce détecteur a pu être démontré de manière plus forte car il permet d'obtenir une meilleure maîtrise du taux de fausse alarme et une meilleure capacité de détection que le CA-CFAR.

La sélection de modèle a été introduite car la probabilité de détection du LQ-CFAR sur fond homogène est inférieure à celle du CA-CFAR. Il s'agit d'une méthode automatique de choix entre le CA-CFAR et le LQ-CFAR. Les résultats obtenus montrent que la sélection de modèle permet une améliora-

tion de la capacité de détection du LQ-CFAR, notamment sur fond homogène, au prix d'une moins bonne maîtrise du taux de fausse alarme.

Enfin, le détecteur DSAS permet d'obtenir la meilleure capacité de détection parmi les détecteurs étudiés et sa maîtrise du taux de fausse alarme est supérieure à celle du CA-CFAR. Sur des fonds continus, ce détecteur présente une moins bonne régulation du taux de fausse alarme que le LQ-CFAR, mais il est moins sensible que ce dernier à des discontinuités du fond. Aussi le détecteur DSAS apparaît comme une solution intéressante sur des fonds complexes composés de zones où le fond évolue de manière continue et de zones où le fond présente des discontinuités.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Dans ce chapitre, nous avons proposé l'utilisation d'une méthode d'estimation de la valeur du fond prenant en compte l'ensemble des données. Cette méthode utilise une modélisation de la valeur du fond par une surface maillée linéaire et continue par morceaux et correspond à la Surface Active Statistique (SAS). Cette modélisation repose sur l'utilisation d'un maillage triangulaire. L'algorithme SAS que nous avons présenté permet de déformer et de simplifier le maillage afin de représenter aux mieux les données. L'algorithme proposé est relativement rapide (quelques dizaines de secondes), sans paramètre à régler par l'utilisateur et est adapté à la nature du bruit perturbant les données. L'estimation de la valeur du fond obtenue avec l'algorithme SAS a été utilisée en détection. Nous avons ainsi obtenu le détecteur DSAS que nous avons comparé sur des simulations numériques aux autres détecteurs étudiés dans cette thèse. À la vue des résultats, il apparaît que le détecteur DSAS permet d'obtenir une capacité de détection élevée (proche de celle du détecteur idéal) tout en assurant une meilleure maîtrise du taux de fausse alarme que le détecteur CA-CFAR par exemple.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Au cours de ce travail de thèse, nous nous sommes attachés à proposer des méthodes qui améliorent la régulation du taux de fausse alarme pour la détection de cibles ponctuelles sur des fonds fortement inhomogènes, perturbés par un bruit gamma. Pour cela, nous avons tout d'abord étudié les principales techniques existantes. Une étude approfondie du détecteur CA-CFAR sur des fonds inhomogènes nous a permis de montrer qu'une estimation correcte de la valeur du fond était une étape clef pour assurer de bonnes performances de détection. Afin de garantir le respect du taux de fausse alarme, nous avons vu qu'il faut être capable d'estimer sans biais la valeur du fond et qu'il faut connaître la variance d'estimation de la valeur du fond. Enfin, pour obtenir les meilleures performances de détection possibles, il faut réussir à réduire la variance d'estimation de la valeur du fond au minimum.

Après cette étude du détecteur CA-CFAR, nous avons proposé différentes solutions dont la première a été le détecteur associé à la sélection de région (DSR). Cette technique consiste à adapter, pour chaque position testée, la région de référence utilisée pour l'estimation du fond et à tenir compte des inhomogénéités du fond dans le calcul du seuil de détection. La technique proposée, dérivée du CA-CFAR, nécessite pour cela une estimation préalable de la valeur du fond. Nous avons pu montrer sur différents exemples que cette technique permet d'obtenir une meilleure régulation du taux de fausse alarme qu'avec le CA-CFAR, mais également une capacité de détection plus grande. Cette technique peut potentiellement donner de très bonnes performances de détection mais son bon fonctionnement est lié à la qualité de l'estimation préalable de la valeur du fond.

Pour la deuxième solution que nous avons développée, nous supposons que le logarithme de la valeur du fond peut être décrite localement par une fonction quadratique des coordonnées. Le détecteur alors obtenu, dénommé LQ-CFAR, permet une meilleure régulation du taux de fausse alarme que celle du CA-CFAR sur des fonds inhomogènes au prix d'une baisse du pouvoir de détection sur les fonds homogènes. Aussi nous avons proposé de choisir automatiquement l'un ou l'autre des détecteurs (CA-CFAR ou LQ-CFAR) afin d'obtenir de meilleures performances de détection tout en assurant le contrôle du taux de fausse alarme. Nous avons pu montrer l'intérêt de cette approche sur plusieurs exemples. Nous avons néanmoins montré que cette méthode ne permet pas de gérer des discontinuités du fond.

Le dernier détecteur que nous avons présenté est fondé sur une estimation de la valeur du fond par une surface maillée. Ce détecteur utilise une nouvelle modélisation de la valeur du fond dont l'estimation est réalisée grâce à l'ensemble des données à la différence des techniques de détection précédentes qui utilisent une région de référence localisée autour du pixel test.

L'estimation de la valeur du fond est réalisée par l'algorithme de « Surface Active Statistique » (SAS) qui permet de déterminer une représentation des données par une surface maillée et qui repose sur le principe de la minimisation de la complexité stochastique (MCS). À partir d'un maillage régulier, cet algorithme déforme et simplifie le maillage afin de représenter au mieux les données au sens de la MCS. La SAS est un algorithme sans paramètre à régler par l'utilisateur. Nous avons pu montrer que le détecteur DSAS, qui utilise l'estimation de la valeur du fond réalisée par la SAS, possède une capacité de détection supérieure à celle des autres détecteurs étudiés. Le détecteur DSAS permet également d'améliorer la régulation du taux de fausse alarme en comparaison du CA-CFAR. Il présente cependant une maîtrise du taux de fausse alarme inférieure à celle du LQ-CFAR sur des fonds inhomogènes complexes, excepté pour des discontinuités brutales du fond.

Proposer un détecteur TFAC est toujours un compromis entre une maîtrise correcte du taux de fausse alarme et une capacité de détection élevée. Nous avons tenté de proposer des solutions qui permettent d'améliorer la régulation du taux de fausse alarme mais sans négliger toutefois leur capacité de détection.

Suite à ces travaux, il est possible d'envisager différentes perspectives. Tout d'abord une étude de l'effet du phénomène de phasing (correspondant au fait que l'écho d'une cible n'est pas nécessairement contenu dans une unique case distance/vitesse) sur les performances des différentes techniques de détection est un point qui devra être étudié.

Comme nous l'avons déjà souligné, les performances du détecteur DSR sont liées à la qualité de l'estimation préalable de la valeur du fond. Aussi, utiliser l'estimation fournie par la SAS comme estimation préalable de la valeur du fond nous semble une perspective intéressante. La qualité de l'estimation fournie par la SAS pourrait permettre une amélioration des performances du détecteur DSR au prix d'une charge de calcul supplémentaire.

On pourrait poursuivre l'étude du détecteur fondé sur la sélection entre le LQ-CFAR et le CA-CFAR afin d'améliorer le critère pour le choix du détecteur. On pourrait ainsi espérer obtenir une meilleure régulation du taux de fausse alarme et un gain en capacité de détection. De toute évidence, ce détecteur présente un fort intérêt pour la détection sur des fonds inhomogènes de par sa simplicité de mise en œuvre et sa rapidité. Concernant la sensibilité du détecteur LQ-CFAR et de la sélection de modèle à des discontinuités du fond, on pourrait imaginer une étape de post-traitement afin d'utiliser un détecteur plus adapté aux endroits correspondants. Cette étape de post-traitement pourrait d'ailleurs être intégrée à la sélection de modèle comme la possibilité de choisir un détecteur supplémentaire.

Une amélioration du contrôle du taux de fausse alarme du détecteur DSAS est également envisageable. Nous pourrions utiliser l'information de topologie du maillage pour mieux réguler les fausses alarmes. On peut notamment envisager d'utiliser le détecteur DSR (sélection de région) à proximité des segments du maillage, où l'on sait que les fausses alarmes sont potentiellement plus nombreuses. Par ailleurs, l'utilisation en détection d'une version de la SAS adaptée à un bruit gamma (et non à un bruit gaussien) ne se justifie pas

à notre avis. En effet, les études que nous avons réalisées indiquent que nous ne pourrions pas obtenir un gain de performance significatif en comparaison de la charge de calcul supplémentaire. En revanche, changer le modèle de surface nous semble être une évolution intéressante de la SAS. Avec le nouveau modèle de surface, on envisagerait une modélisation du fond par un maillage triangulaire, continu et quadratique (et non plus linéaire) par morceaux. Nous pensons qu'une telle modélisation de la valeur du fond pourrait permettre une qualité d'estimation du fond encore meilleure et ainsi, pour la détection, une meilleure régulation du taux de fausse alarme. Le détecteur DSAS est une première étude de l'utilisation d'une surface maillée en détection, mais il reste encore de nombreuses voies d'investigation.

En conclusion, nous pensons que les trois techniques de détection proposées possèdent chacune leur domaine d'application approprié. Le DSR pour des fonds qui présentent de fortes discontinuités, la sélection de modèle pour des fonds qui évoluent de manière continue et le DSAS pour des fonds très hétérogènes, qui possèdent à la fois des zones continues et des discontinuités. La recherche d'un algorithme qui synthétiserait l'ensemble de ces propriétés est un enjeu important s'il permet d'atteindre de faibles temps de calcul.

ANNEXES

A

A.1 PERFORMANCES DE DÉTECTION DU CA-CFAR : CAS GÉNÉRAL

Démonstration *Démonstration de la proposition 2.2*

Nous supposons que la valeur X_n du pixel test n est une variable aléatoire gamma de moyenne $m_n(1+S)$ (S représente le contraste entre la cible et le fond) et d'ordre L_n dont la ddp est exprimée par :

$$f_{X_n}(x_n) \triangleq \frac{x_n^{L_n-1}}{\mu_{n,S}^{L_n} \Gamma(L_n)} \exp[-x_n/\mu_{n,S}] \text{ pour } x_n > 0, \quad (\text{A.1})$$

où $\mu_{n,S} = \frac{m_n(1+S)}{L_n}$.

De plus, nous supposons que pour chaque pixel p de la région de référence ω_n , sa valeur X_p est une variable aléatoire gamma indépendante de moyenne m_p et d'ordre L_p . La densité de probabilité de $Y_n = \sum_{p \in \omega_n} X_p$ peut alors s'écrire, d'après Moschopoulos [80], comme :

$$f_{Y_n}(y_n) = C \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{y_n^{\rho+k-1}}{\mu_m^{\rho+k} \Gamma(\rho+k)} \exp[-y_n/\mu_m], \quad (\text{A.2})$$

où :

$$N_n = \text{card}(\omega_n), \quad (\text{A.3})$$

$$\mu_p = \frac{m_p}{L_p}, \quad (\text{A.4})$$

$$\mu_m \triangleq \min(\{\mu_p, p \in \omega_n\}), \quad (\text{A.5})$$

$$C \triangleq \prod_{p \in \omega_n} (\mu_m/\mu_p)^{L_p}, \quad (\text{A.6})$$

$$\rho \triangleq \sum_{p \in \omega_n} L_p, \quad (\text{A.7})$$

$$\delta_0 \triangleq 1, \quad (\text{A.8})$$

$$\delta_{k+1} \triangleq \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} i \gamma_i \delta_{k+1-i}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{A.9})$$

$$\gamma_k \triangleq \sum_{p \in \omega_n} L_p (1 - \mu_m/\mu_p)^k / k, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (\text{A.10})$$

Or selon Papoulis [88], si les variables X_n et Y_n sont mutuellement indépendantes, la ddp de la variable aléatoire $W_n = X_n/Y_n$ peut s'exprimer comme :

$$f_{W_n}(w_n) = \int_0^{\infty} y_n f_{X_n}(w_n y_n) f_{Y_n}(y_n) dy_n. \quad (\text{A.11})$$

Après avoir développé l'expression précédente, nous pouvons exprimer f_{W_n} sous la forme suivante :

$$f_{W_n}(w_n) = \int_0^{\infty} \sum_{k \geq 0} g_k(y_n, w_n) dy_n, \quad (\text{A.12})$$

avec :

$$g_k(y_n, w_n) \triangleq y_n \frac{(w_n y_n)^{L_n-1}}{\mu_{n,S}^{L_n} \Gamma(L_n)} \exp\left(-\frac{w_n y_n}{\mu_{n,S}}\right) \times \frac{C \delta_k y_n^{\rho+k-1} e^{-\frac{y_n}{\mu_m}}}{\mu_m^{\rho+k} \Gamma(\rho+k)}. \quad (\text{A.13})$$

Grâce à la proposition A.1 présentée à la fin de ces calculs, nous montrons qu'il est possible dans l'expression de f_{W_n} de permuter la somme et l'intégrale :

$$f_{W_n}(w_n) = \int_0^\infty \sum_{k \geq 0} g_k(y_n, w_n) dy_n = \sum_{k \geq 0} \int_0^\infty g_k(y_n, w_n) dy_n. \quad (\text{A.14})$$

En introduisant la fonction Beta et en utilisant la propriété suivante [48] :

$$\Gamma(L_n) \Gamma(\rho+k) = \Gamma(L_n + \rho+k) \mathcal{B}(L_n, \rho+k), \quad (\text{A.15})$$

on obtient :

$$g_k(y_n, w_n) = C \frac{\delta_k}{\mathcal{B}(L_n, \rho+k)} \times \frac{w_n^{L_n-1}}{\mu_{n,S}^{L_n} \mu_m^{\rho+k}} \times \frac{y_n^{L_n+\rho+k-1}}{\Gamma(L_n + \rho+k)} e^{-y_n \left(\frac{w_n}{\mu_{n,S}} + \frac{1}{\mu_m}\right)}. \quad (\text{A.16})$$

En regroupant les termes en y_n , l'expression de f_{W_n} peut s'écrire sous la forme :

$$f_{W_n}(w_n) = C \sum_{k \geq 0} \frac{\delta_k}{\mu_{n,S}^{L_n} \mathcal{B}(L_n, \rho+k)} \frac{w_n^{L_n-1}}{\left(\frac{w_n}{\mu_{n,S}} + \frac{1}{\mu_m}\right)^{L_n+\rho+k} \mu_m^{\rho+k}} \times \int_0^\infty h_{k,L_n,\rho,\mu_{n,S},\mu_m}(y_n) dy_n, \quad (\text{A.17})$$

avec

$$h_{k,L_n,\rho,\mu_{n,S},\mu_m}(y_n) \triangleq \frac{\left(\frac{w_n}{\mu_{n,S}} + \frac{1}{\mu_m}\right)^{L_n+\rho+k}}{\Gamma(L_n + \rho+k)} y_n^{L_n+\rho+k-1} e^{-y_n \left(\frac{w_n}{\mu_{n,S}} + \frac{1}{\mu_m}\right)}. \quad (\text{A.18})$$

Nous remarquons alors que les fonctions $h_{k,L_n,\rho,\mu_{n,S},\mu_m}(y_n)$ sont les ddp de v.a. gamma respectivement d'ordre $L_n + \rho + k$ et de moyenne $\left(\frac{w_n}{\mu_{n,S}} + \frac{1}{\mu_m}\right)^{-1}$, ce qui conduit au résultat suivant :

$$\forall k \geq 0, \int_0^\infty h_{k,L_n,\rho,\mu_{n,S},\mu_m}(y_n) dy_n = 1. \quad (\text{A.19})$$

La ddp de W_n est donc donnée par :

$$f_{W_n}(w_n) = C \sum_{k \geq 0} \frac{\delta_k}{\mu_{n,S}^{L_n} \mathcal{B}(L_n, \rho+k)} \frac{w_n^{L_n-1}}{\left(\frac{w_n}{\mu_{n,S}} + \frac{1}{\mu_m}\right)^{L_n+\rho+k} \mu_m^{\rho+k}}, \quad w_n \geq 0. \quad (\text{A.20})$$

Remarquons que $Y_n = Z_n N_n$ et donc que $X_n/Z_n = W_n N_n$.

Calculons maintenant la probabilité de détection qui est définie comme :

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_d^{\text{CA-CFAR exa.}}(\tau_n | S, \mu_n, L_n, \{\mu_p\}_{p \in \omega_n}, \{L_p\}_{p \in \omega_n}) \\ &= P(X_n/Z_n > \tau_n | H_1, \mu_n, L_n, \{\mu_p\}_{p \in \omega_n}, \{L_p\}_{p \in \omega_n}) \\ &= P(W_n > \tau_n/N_n | H_1, \mu_n, L_n, \{\mu_p\}_{p \in \omega_n}, \{L_p\}_{p \in \omega_n}) \\ &= \int_{\tau_n/N_n}^{\infty} f_{W_n}(w_n) dw_n, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

avec τ_n un seuil de détection. L'expression de la \mathcal{P}_d est donc :

$$\begin{aligned} & P(W_n > \tau_n/N_n | H_1, \mu_n, L_n, \{\mu_p\}_{p \in \omega_n}, \{L_p\}_{p \in \omega_n}) = \\ &= \int_{\tau_n/N_n}^{\infty} \sum_{k \geq 0} C \frac{\delta_k}{\mu_{n,S}^{L_n} \mathcal{B}(L_n, \rho + k)} \frac{w_n^{L_n-1}}{\mu_m^{\rho+k} \left(\frac{w_n}{\mu_{n,S}} + \frac{1}{\mu_m}\right)^{L_n+\rho+k}} dw_n. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Nous souhaitons maintenant simplifier les termes qui dépendent de w_n . En définissant $u_n \triangleq w_n \frac{\mu_m}{\mu_{n,S}}$, nous pouvons remarquer que :

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_n/N_n}^{\infty} \frac{w_n^{L_n-1}}{\left(\frac{w_n}{\mu_{n,S}} + \frac{1}{\mu_m}\right)^{L_n+\rho+k}} dw_n \\ &= \int_{\tau_n/N_n}^{\infty} \mu_m^{L_n+\rho+k} \frac{w_n^{L_n-1}}{\left(\frac{w_n \mu_m}{\mu_{n,S}} + 1\right)^{L_n+\rho+k}} dw_n \\ &= \int_{\tau_n \frac{\mu_m}{N_n \mu_{n,S}}}^{\infty} \mu_m^{\rho+k} \mu_{n,S}^{L_n} \frac{u_n^{L_n-1}}{(1+u_n)^{L_n+\rho+k}} du_n, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

alors l'expression de la \mathcal{P}_d peut s'écrire :

$$\begin{aligned} & P(W_n > \tau_n/N_n | H_1, \mu_n, L_n, \{\mu_p\}_{p \in \omega_n}, \{L_p\}_{p \in \omega_n}) = \\ & \int_{\tau_n \frac{\mu_m}{N_n \mu_{n,S}}}^{\infty} \sum_{k \geq 0} C \frac{\delta_k}{\mathcal{B}(L_n, \rho + k)} \frac{u_n^{L_n-1}}{(1+u_n)^{L_n+\rho+k}} du_n. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

En réalisant le changement de variable $v_n \triangleq \frac{u_n}{1+u_n}$, $v_n \in [0, 1]$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & P(W_n > \tau_n/N_n | H_1, \mu_n, L_n, \{\mu_p\}_{p \in \omega_n}, \{L_p\}_{p \in \omega_n}) = \\ & \int_{\frac{\tau_n \frac{\mu_m}{N_n \mu_{n,S}}}{1+\tau_n \frac{\mu_m}{N_n \mu_{n,S}}}}^1 \sum_{k \geq 0} e_k(v_n) dv_n, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

avec :

$$e_k(v_n) \triangleq C \frac{\delta_k}{\mathcal{B}(L_n, \rho + k)} v_n^{L_n-1} (1-v_n)^{\rho+k-1}. \quad (\text{A.26})$$

Grâce à la proposition A.2, on peut montrer que la somme et l'intégrale peuvent être

permutées dans l'expression de la \mathcal{P}_d :

$$\begin{aligned}
& P(W_n > \tau_n / N_n | H_1, \mu_n, L_n, \{\mu_p\}_{p \in \omega_n}, \{L_p\}_{p \in \omega_n}) \\
&= \int_{\frac{\tau_n \frac{\mu_m}{N_n \mu_{n,S}}}{1 + \tau_n \frac{\mu_m}{N_n \mu_{n,S}}} }^1 \sum_{k \geq 0} e_k(v_n) dv_n \\
&= \sum_{k \geq 0} \int_{\frac{\tau_n \frac{\mu_m}{N_n \mu_{n,S}}}{1 + \tau_n \frac{\mu_m}{N_n \mu_{n,S}}} }^1 e_k(v_n) dv_n. \tag{A.27}
\end{aligned}$$

En utilisant la définition de la fonction Beta incomplète régularisée $\mathcal{I}(x, a, b)$ (cf. définitions des notations p.191) pour exprimer la \mathcal{P}_d , nous concluons que :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P}_d^{\text{CA-CFAR } \text{exa.}}(\tau_n | S, \mu_n, L_n, \{\mu_p\}_{p \in \omega_n}, \{L_p\}_{p \in \omega_n}) = \\
& C \sum_{k \geq 0} \delta_k \left[1 - \mathcal{I} \left(\frac{\tau_n \frac{\mu_m}{\mu_n N_n (1+S)}}{1 + \tau_n \frac{\mu_m}{\mu_n N_n (1+S)}}, L_n, \rho + k \right) \right]. \tag{A.28}
\end{aligned}$$

□

Corollaire A.1 *Le calcul numérique de l'équation A.28 nécessite de réaliser une troncature. Notons K l'ordre à lequel la troncature est réalisée, dans le cas du calcul de la \mathcal{P}_{fa} on peut alors donner une borne sur l'erreur due à la troncature :*

$$\begin{aligned}
\varepsilon_K(\tau_n) &= \mathcal{P}_{fa}^{\text{CA-CFAR } \text{exa.}}(\tau_n | \mu_n, L_n, \{\mu_p\}_{p \in \omega_n}, \{L_p\}_{p \in \omega_n}) \\
&\quad - {}^K \mathcal{P}_{fa}^{\text{CA-CFAR } \text{exa.}}(\tau_n | \mu_n, L_n, \{\mu_p\}_{p \in \omega_n}, \{L_p\}_{p \in \omega_n}) \\
&= C \sum_{k \geq K+1} \delta_k \left[1 - \mathcal{I} \left(\frac{\tau_n \frac{\mu_m}{\mu_n N_n}}{1 + \tau_n \frac{\mu_m}{\mu_n N_n}}, L_n, \rho + k \right) \right] \\
&\leq C \sum_{k \geq K+1} \delta_k, \tag{A.29}
\end{aligned}$$

où ${}^K \mathcal{P}_{fa}^{\text{CA-CFAR } \text{exa.}}(\tau_n | \mu_n, L_n, \{\mu_p\}_{p \in \omega_n}, \{L_p\}_{p \in \omega_n})$ est l'expression de $\mathcal{P}_{fa}^{\text{CA-CFAR } \text{exa.}}(\tau_n | \mu_n, L_n, \{\mu_p\}_{p \in \omega_n}, \{L_p\}_{p \in \omega_n})$ limitée aux K premiers termes. De plus, nous remarquons que :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_K(0) &= \mathcal{P}_{fa}^{\text{CA-CFAR } \text{exa.}}(0 | \mu_n, L_n, \{\mu_p\}_{p \in \omega_n}, \{L_p\}_{p \in \omega_n}) \\
&\quad - {}^K \mathcal{P}_{fa}^{\text{CA-CFAR } \text{exa.}}(0 | \mu_n, L_n, \{\mu_p\}_{p \in \omega_n}, \{L_p\}_{p \in \omega_n}) \\
&= 1 - C \sum_{k=0}^K \delta_k = C \sum_{k \geq K+1} \delta_k, \tag{A.30}
\end{aligned}$$

alors :

$$\varepsilon_K(\tau_n) \leq \varepsilon_K(0) = 1 - C \sum_{k=0}^K \delta_k. \tag{A.31}$$

On obtient ainsi une borne supérieure de l'erreur liée à la troncature de la somme infinie pour $\mathcal{P}_{fa}^{CA-CFAR\text{ exa.}}$. On peut noter que cette erreur est nulle quand la région de référence est homogène. Quand la région de référence est inhomogène, on peut lors du calcul numérique de ${}^K\mathcal{P}_{fa}^{CA-CFAR\text{ exa.}}$ calculer également la borne précédemment présentée et ainsi obtenir une information quant à l'erreur liée à la troncature de la somme infinie.

Proposition A.1 Dans l'expression de f_{W_n} (équation A.12), la somme et l'intégrale peuvent être permutées :

$$f_{W_n}(w_n) = \int_0^\infty \sum_{k \geq 0} g_k(y_n, w_n) dy_n = \sum_{k \geq 0} \int_0^\infty g_k(y_n, w_n) dy_n. \quad (\text{A.32})$$

Démonstration Dans [80], il est démontré que :

$$f_{Y_n}(y_n) = \sum_{k \geq 0} C \frac{\delta_k y_n^{\rho+k-1} e^{-\frac{y_n}{\mu_m}}}{\mu_m^{\rho+k} \Gamma(\rho+k)} \leq C \frac{\mu_m^{-\rho}}{\Gamma(\rho)} y_n^{\rho-1} \exp\left[-y_n \frac{1-b}{\mu_m}\right], \quad (\text{A.33})$$

avec

$$b \triangleq \max\left(\left\{1 - \frac{\mu_m}{\mu_p}, p \in \omega_n, p \neq m\right\}\right). \quad (\text{A.34})$$

Or, par définition :

$$g_k(y_n, w_n) \triangleq y_n \frac{(w_n y_n)^{L_n-1}}{\mu_{n,S}^{L_n} \Gamma(L_n)} \exp\left(-\frac{w_n y_n}{\mu_{n,S}}\right) \times C \frac{\delta_k y_n^{\rho+k-1} e^{-\frac{y_n}{\mu_m}}}{\mu_m^{\rho+k} \Gamma(\rho+k)}. \quad (\text{A.35})$$

En utilisant le résultat de Moschopoulos, nous en déduisons que :

$$\sum_{k \geq 0} g_k(y_n, w_n) \leq C \frac{\mu_n^{-L_n} \mu_m^{-\rho}}{\Gamma(L_n) \Gamma(\rho)} w_n^{L_n-1} y_n^{L_n+\rho-1} \times \exp\left[-y_n \left(\frac{w_n}{\mu_n} + \frac{1-b}{\mu_m}\right)\right]. \quad (\text{A.36})$$

À l'aide du théorème de la convergence dominée [15], on s'assure de la convergence dominée de $\sum_{k \geq 0} g_k(y_n, w_n)$, ce qui implique que la somme et l'intégrale peuvent être permutées dans l'expression de f_{W_n} .

□

Proposition A.2 Dans l'expression de la \mathcal{P}_d (cf. équation A.25), l'intégrale et la somme peuvent être permutées :

$$\begin{aligned} & P(W_n > \tau_n / N_n | H_1, \mu_n, L_n, \{\mu_p\}_{p \in \omega_n}, \{L_p\}_{p \in \omega_n}) \\ &= \int_{\frac{\tau_n}{1+\tau_n} \frac{\mu_m}{N_n \mu_{n,S}}}^1 \sum_{k \geq 0} e_k(v_n) dv_n \\ &= \sum_{k \geq 0} \int_{\frac{\tau_n}{1+\tau_n} \frac{\mu_m}{N_n \mu_{n,S}}}^1 e_k(v_n) dv_n, \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

où :

$$e_k(v_n) \triangleq C \frac{\delta_k}{\mathcal{B}(L_n, \rho + k)} v_n^{L_n-1} (1 - v_n)^{\rho+k-1}. \quad (\text{A.38})$$

Démonstration Pour démontrer cette proposition, nous allons démontrer la convergence uniforme de la série $e_k(v_n)$.

Dans [80], une borne supérieure de δ_k est utilisée :

$$|\delta_k| \leq \frac{(\rho)_k}{k!} b^k, \quad (\text{A.39})$$

avec $b \triangleq \max \left(\left\{ 1 - \frac{\mu_m}{\mu_p}, p \in \omega_n, p \neq m \right\} \right) \leq 1$ et où $(a)_k$ désigne le symbole de Pochhammer (cf. définitions des notations p.191).

En utilisant la propriété suivante :

$$\mathcal{B}(L_n, \rho + k) = \frac{(\rho)_k}{(L_n + \rho)_k} \mathcal{B}(L_n, \rho) \quad (\text{A.40})$$

on peut alors définir $B_k(v_n)$:

$$B_k(v_n) \triangleq C \frac{v_n^{L_n-1}}{\mathcal{B}(L_n, \rho)} (1 - v_n)^{\rho-1} \frac{(L_n + \rho)_k}{k!} [b(1 - v_n)]^k, \quad (\text{A.41})$$

tel que :

$$|e_k(v_n)| \leq B_k(v_n). \quad (\text{A.42})$$

Une étude de la fonction $B_k(v_n)$ permet de remarquer que cette fonction atteint une valeur maximale B_k^0 en v_k^0 :

$$\forall v_n \in [0, 1], \quad B_k(v_n) \leq B_k^0 = B_k(v_k^0), \quad (\text{A.43})$$

et :

$$v_k^0 = \frac{L_n - 1}{L_n + \rho + k - 2}. \quad (\text{A.44})$$

On peut alors noter que :

$$\frac{B_{k+1}^0}{B_k^0} = \frac{(L_n + \rho + k) b(1 - v_k^0)}{(L_n + \rho - 1) (k + 1)}. \quad (\text{A.45})$$

Quand k tend vers l'infini, le rapport entre B_{k+1}^0 et B_k^0 tend vers une valeur limite :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{B_{k+1}^0}{B_k^0} = \frac{b}{L_n + \rho - 1}. \quad (\text{A.46})$$

Comme $b \leq 1$, cette valeur limite est inférieure à 1 pour des ordres de bruit gamma usuels ($L_n + \rho > 2$).

Aussi, en appliquant le théorème de d'Alembert, on prouve la convergence de la série B_k^0 :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{B_{k+1}^0}{B_k^0} \rightarrow \frac{b}{L_n + \rho - 1} < 1 \\ k \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k \geq 0} B_k^0 \text{ converge}, \quad (\text{A.47})$$

ce qui implique la convergence uniforme de la série $e_k(v_n)$ (critère de Weierstrass [17]). D'après le théorème de la convergence uniforme [51], la somme et l'intégrale peuvent alors être permutées dans l'expression de la \mathcal{P}_d .

□

A.2 CALCUL NUMÉRIQUE DES PERFORMANCES EXACTES DU CA-CFAR

Dans cette annexe, nous proposons d'étudier comment les performances exactes du CA-CFAR peuvent être calculées numériquement. Pour cette étude, nous utiliserons trois régions de référence différentes (a,b,c), les mêmes que celles utilisées dans la section 2.3.2.

Rappelons que la statistique de décision utilisée par le CA-CFAR correspond au rapport X_n/Z_n où X_n est la valeur du pixel test et Z_n l'estimation de la valeur du fond au pixel test. Dans le chapitre 2, nous avons présenté les expressions exactes des performances du CA-CFAR. L'expression exacte de la probabilité de fausse alarme du CA-CFAR peut notamment s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{P}_{fa}^K(\tau_n) = \int_{\tau_n}^{\infty} P_{\frac{X_n}{Z_n}}^K(x) dx, \quad (\text{A.48})$$

où la ddp $P_{\frac{X_n}{Z_n}}^K(x)$ de X_n/Z_n est donnée par :

$$P_{\frac{X_n}{Z_n}}^K(x) = \sum_{k=0}^K T^k(x). \quad (\text{A.49})$$

Cette dernière expression fait intervenir une somme de termes $T^k(x)$ indicés par k allant de 0 jusqu'à l'ordre K . Pour le calcul exacte de la probabilité de fausse alarme, il est nécessaire de faire tendre K vers l'infini. Cependant pour calculer numériquement cette valeur, nous devons limiter le nombre de termes K pris en compte lors du calcul. Aussi nous analysons dans la suite les répercussions liées à la prise en compte d'un nombre K limité de termes lors du calcul de cette somme. Puis nous donnerons quelques éléments concernant la manière dont le calcul des performances exactes doit être conduit pour limiter les erreurs d'arrondi.

Rappelons que nous considérons des régions de référence composées de 10 pixels, un bruit gamma d'ordre $L = 4$ et que nous considérons que le pixel test n ne contient pas de cible. Pour le cas (a), la valeur du fond est la même pour le pixel test et tous les pixels de la région de référence. Pour le cas (b), le fond est homogène dans la région de référence, mais la valeur du fond au pixel test est 1.5 fois plus grande que la valeur du fond dans la région de référence. Pour le cas (c), nous avons choisi d'étudier une région de référence inhomogène composée de deux zones homogènes de 5 pixels : pour l'une des zones la valeur du fond est égale à 0.5 fois la valeur du fond m_n au pixel test et pour l'autre zone la valeur du fond est égale à 1.5 fois m_n . Ce dernier cas (c) est particulièrement intéressant car, contrairement aux deux autres cas (a,b), on peut remarquer à partir de l'équation 2.24 que la \mathcal{P}_{fa} exacte du CA-CFAR est la somme de plusieurs termes (indiqué par k) et non d'un seul terme ($k = 0$, pour les cas a et b). On peut alors se demander quelle est l'importance de chacun des termes et combien doivent être pris en compte pour décrire la \mathcal{P}_{fa} exacte du CA-CFAR avec une précision suffisante.

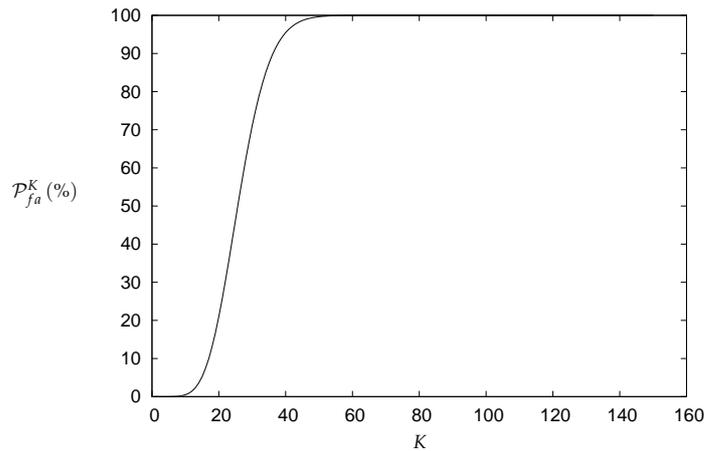


FIG. A.1 – Évolution de la probabilité de fausse alarme \mathcal{P}_{fa}^K en fonction du nombre de termes K utilisés.

A.2.1 Influence du nombre de termes

La figure FIG. A.1 illustre dans le cas (c) l'évolution de la probabilité de fausse alarme en fonction du nombre K de termes pris en compte lors du calcul. Plus exactement, la courbe indique quel pourcentage de la probabilité de fausse alarme totale est obtenu en ne considérant que les K premiers termes. Le seuil de détection est fixé de sorte que la probabilité de fausse alarme finale soit égale à 10^{-4} . On peut s'apercevoir qu'un nombre restreint de termes ($K \simeq 60$) permet d'évaluer la probabilité de fausse alarme. La probabilité de fausse alarme calculée en ne considérant que les K premiers termes \mathcal{P}_{fa}^K converge rapidement ($K \simeq 60$) vers la probabilité de fausse alarme exacte. Il apparaît donc possible de calculer la probabilité de fausse alarme exacte du CA-CFAR en ne prenant en compte lors du calcul qu'un nombre limité de termes.

Par ailleurs, cette évolution rapide de \mathcal{P}_{fa}^K indique que tous les termes de la somme infinie n'ont pas la même importance. Par exemple, nous avons pu remarquer précédemment que le terme d'indice $k = 0$ de la probabilité de fausse alarme est nul dans le cas (c) alors que ce n'est pas vrai pour les cas (a,b). On peut alors se questionner sur la méthode à utiliser pour calculer numériquement les performances exactes du détecteur CA-CFAR. En effet, on va devoir sommer des termes de valeurs très différentes. Or on sait que cela peut conduire à des erreurs de calcul numérique [45, 60, 81], un terme de faible valeur étant négligé devant un terme de forte valeur. L'ordre dans lequel on va sommer les différents termes, aura donc une influence sur la précision du résultat du calcul de la probabilité de fausse alarme.

A.2.2 Calcul numérique

Pour répondre à cette préoccupation concernant le calcul numérique des performances exactes, étudions l'influence des différents termes. La ddp de la statistique X_n/Z_n peut être vue comme une somme de termes T^k où k est l'indice du terme en question. La ddp de X_n/Z_n calculée avec les K premiers

termes, que nous notons $P_{\frac{X_n}{Z_n}}^K$, est donc donnée par :

$$P_{\frac{X_n}{Z_n}}^K(x) = \sum_{k=0}^K T^k(x). \quad (\text{A.50})$$

Les deux graphiques présentés à la figure FIG.A.2 permettent de représenter l'évolution de la ddp de la statistique X_n/Z_n en fonction du nombre K de termes pris en compte lors du calcul. Sur le premier des graphiques, il est représenté $P_{\frac{X_n}{Z_n}}^K(x)$ en fonction de x obtenue en ne considérant que les K premiers termes et cela pour différentes valeurs de K . On peut alors observer la convergence de $P_{\frac{X_n}{Z_n}}^K$ en fonction de K . Sur le second graphique, on représente également l'évolution de $P_{\frac{X_n}{Z_n}}^K$ en fonction de K mais sous la forme d'une image. Dans ce cas, $P_{\frac{X_n}{Z_n}}^K$ est représenté en niveau de gris. On voit alors la convergence rapide de $P_{\frac{X_n}{Z_n}}^K$ en fonction de K . En effet, lorsque la valeur de K est supérieure à 60, les lignes de l'image sont identiques.

Le résultat présenté avec la figure (FIG. A.2) est cohérent avec la figure précédente, un nombre restreint de termes ($K \simeq 60$) suffit pour calculer $P_{\frac{X_n}{Z_n}}^K(x)$ et, de plus, les premiers termes ($K \leq 20$) ont une contribution faible à la valeur de $P_{\frac{X_n}{Z_n}}^K(x)$.

On peut également représenter les différentes termes T^k qui entrent en jeu pour le calcul de la ddp du test de détection (cf. figure FIG. A.3). Pour cela, nous utilisons les mêmes représentations que pour la figure précédente. Le premier des graphiques représente le terme $T^k(x)$ en fonction de x pour différents termes d'indice k . Le second des graphiques est une représentation sous forme d'image où le niveau de gris de l'image est associé à la valeur de $T^k(x)$ calculée en considérant le $k^{\text{ème}}$ terme.

On remarque que tous les termes ne contribuent pas de manière égale dans la somme qui définit la ddp du test de détection, certains termes étant prépondérants.

Lorsque nous calculons une probabilité de détection ou une probabilité de fausse alarme, nous calculons l'intégrale de la ddp $P_{\frac{X_n}{Z_n}}^K(x)$ de la statistique X_n/Z_n suivant x entre un seuil τ et l'infini. Pour calculer avec précision la \mathcal{P}_d ou la \mathcal{P}_{fa} , il faut donc avoir une connaissance précise de la queue de la distribution de X_n/Z_n . Ce faisant, on peut observer que les premiers termes décrivent principalement la queue de cette distribution. Ces termes étant de faible valeur, lors du calcul des performances exactes, il faut les prendre en compte en premier afin d'éviter les erreurs de calculs numériques.

C'est pourquoi nous calculons les performances de détection exactes en sommant les termes d'indices k du plus petit jusqu'au terme d'indice $k = K$. L'ordre K est choisi de manière à ce que le terme d'indice $k = K$ soit significatif, à la précision machine, devant la somme des termes précédents.

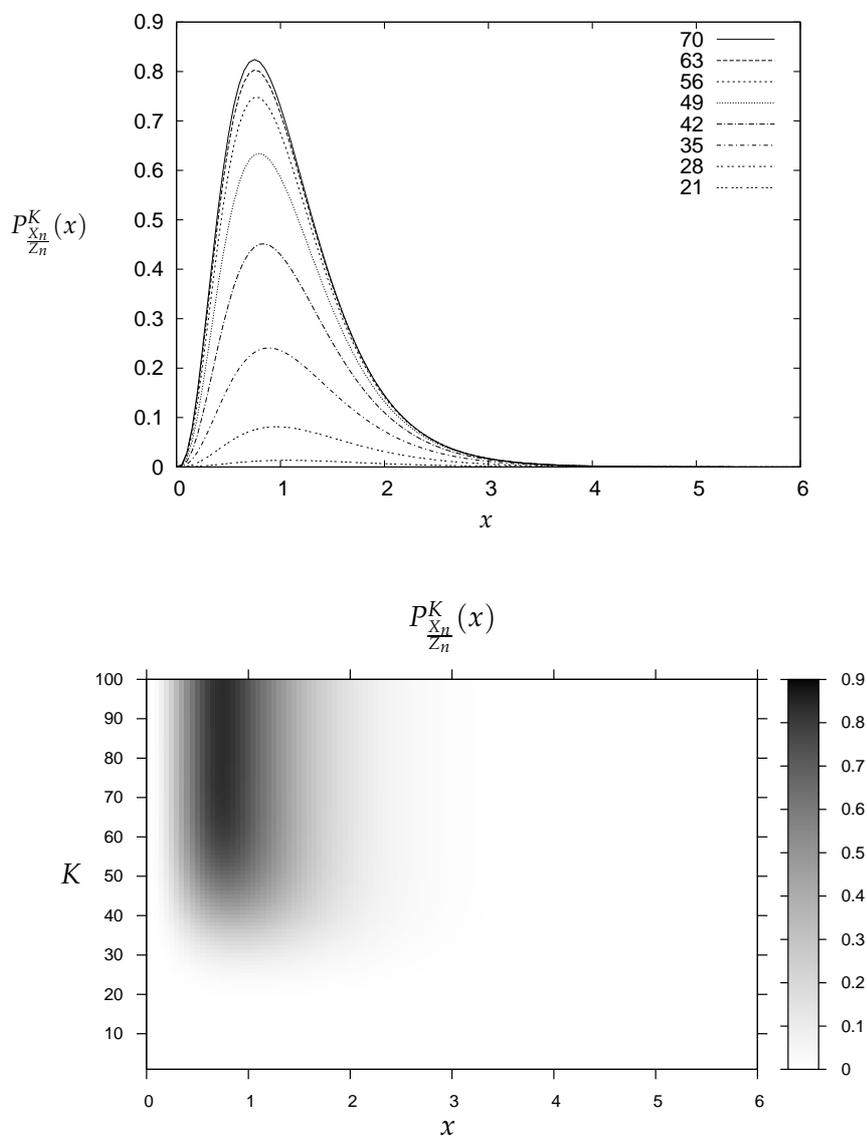


FIG. A.2 – Évolution de la ddp du test de détection en fonction du nombre de termes K pris en compte lors du calcul. En haut, le graphique présente la densité de probabilité du test de détection calculé avec K termes pour différentes valeurs de K . En bas, l'image illustre l'évolution de la ddp du test de détection en fonction de K ($K \in [1, 100]$). L'axe vertical correspondant au nombre de termes K pris en compte pour le calcul, les niveaux de gris sont fixés à partir de la valeur de $P_{\frac{X_n}{Z_n}}^K(x)$.

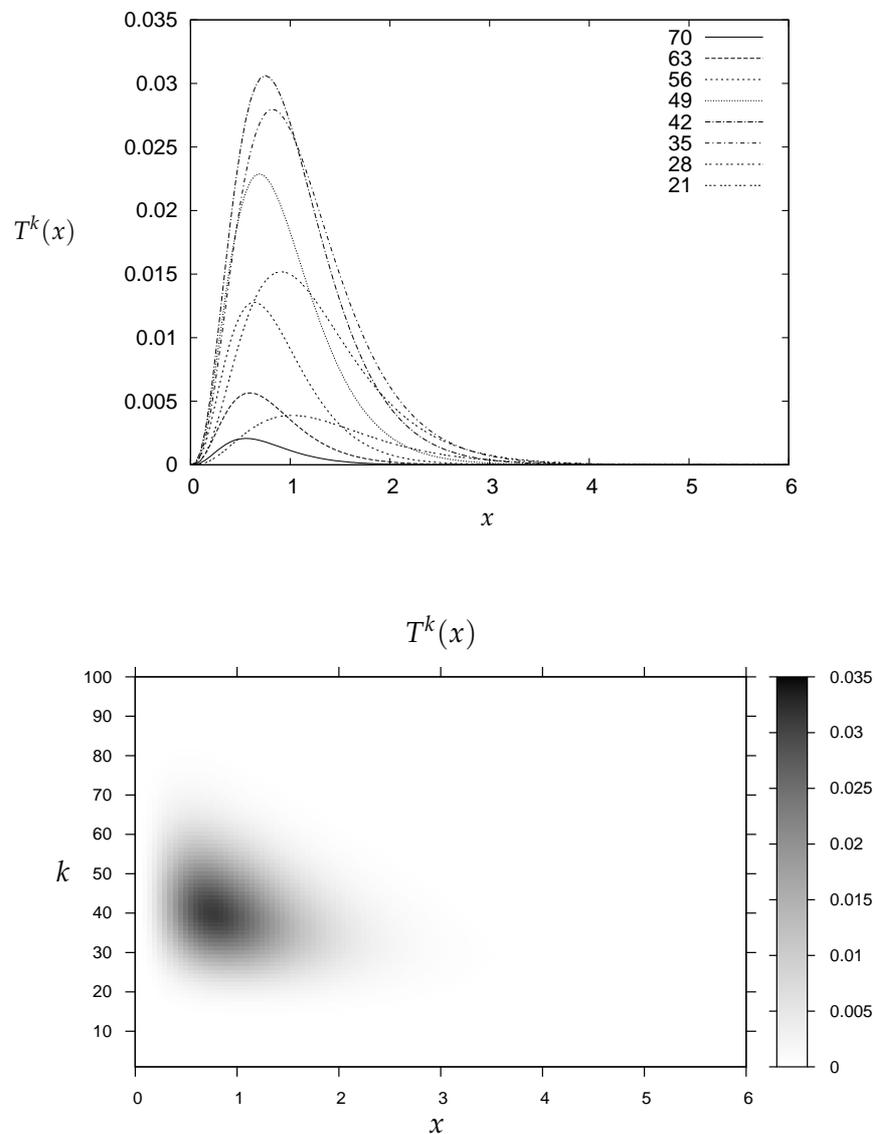


FIG. A.3 – Importance des différents termes qui sont additionnés pour obtenir la ddp du test de détection. En haut, le graphique présente la densité de probabilité associée à chacun des termes T^k . En bas, l'image permet d'apprécier la ddp de chacun des termes ($k \in [1, 100]$). L'axe vertical correspondant à l'indice k du terme considéré et les niveaux de gris sont fixés à partir de la valeur de $T^k(x)$.

A.3 MOYENNE ET VARIANCE DU LOGARITHME D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE GAMMA

Proposition A.3 Soit X une v.a. gamma de moyenne m et d'ordre L , soit $Y = \log(X)$, alors :

$$E_X[Y] = \psi(L) - \ln\left(\frac{L}{m}\right), \quad (\text{A.51})$$

et

$$\text{var}_X(Y) = \zeta(2, L), \quad (\text{A.52})$$

avec ψ la fonction Digamma et ζ la fonction Zeta de Hurwitz [1, 52].

Démonstration L'espérance mathématique de Y est donnée par :

$$E_X[Y = \log(X)] = \int_0^\infty \log(x) \frac{L^L x^{L-1}}{m^L \Gamma(L)} \exp\left[-L \frac{x}{m}\right] dx. \quad (\text{A.53})$$

D'après [52] :

$$\int_0^\infty x^{\nu-1} \exp[-\mu x] \log(x) dx = \frac{\Gamma(\nu)}{\mu^\nu} [\psi(\nu) - \log(\mu)]. \quad (\text{A.54})$$

Donc :

$$E_X[Y] = \psi(L) - \ln\left(\frac{L}{m}\right). \quad (\text{A.55})$$

De plus :

$$E_X[Y^2] = \int_0^\infty \log(x)^2 \frac{L^L x^{L-1}}{m^L \Gamma(L)} \exp\left[-L \frac{x}{m}\right] dx. \quad (\text{A.56})$$

Toujours d'après [52] :

$$\int_0^\infty x^{\nu-1} \exp[-\mu x] \log(x)^2 dx = \frac{\Gamma(\nu)}{\mu^\nu} \left[[\psi(\nu) - \log(\mu)]^2 + \zeta(2, \nu) \right]. \quad (\text{A.57})$$

D'où $E_X[Y^2]$:

$$E_X[Y^2] = \left[\psi(L) - \log\left(\frac{L}{m}\right) \right]^2 + \zeta(2, L). \quad (\text{A.58})$$

Ce qui conduit à :

$$\text{var}_X(Y) = E_X[Y^2] - E_X[Y]^2 = \zeta(2, L). \quad (\text{A.59})$$

□

A.4 LQ-CFAR ET ESTIMATION NON-BIAISÉE DU FOND

Rappelons tout d'abord certaines propriétés des variables aléatoires lognormales.

Propriété A.1 Soit $\hat{\mu}$ une variable aléatoire gaussienne de moyenne μ et de variance ζ^2 , alors $\hat{v} = \exp[\hat{\mu}]$ est une variable aléatoire log-normale dont la densité de probabilité est :

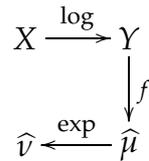
$$f_{\hat{v}}(v) = \frac{1}{v \zeta \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\log(v) - \mu)^2}{2\zeta^2} \right]. \quad (\text{A.60})$$

La valeur moyenne de \hat{v} est [35] :

$$E[\hat{v}] = \exp \left[\mu + \frac{\zeta^2}{2} \right]. \quad (\text{A.61})$$

Supposons maintenant que X est une variable aléatoire gamma de moyenne m et d'ordre L . Cette variable aléatoire représente les données. Puis introduisons la variable aléatoire Y telle que $Y \triangleq \log(X)$ (le logarithme des données). Grâce à l'annexe A.3, nous sommes capable de donner la valeur des deux premiers moments de Y à partir de m et L et plus particulièrement la valeur moyenne de Y que nous noterons $\mu \triangleq E[Y]$. Considérons une fonction f qui à partir de Y permet une estimation de μ (estimation du logarithme de la valeur du fond). Notons cette estimation $\hat{\mu}$ que nous supposons être une variable aléatoire lognormale de moyenne μ et de variance ζ^2 . Nous calculons ensuite $\hat{v} \triangleq \exp(\hat{\mu})$ dont nous sommes capable de donner la valeur moyenne grâce à l'équation A.61.

On peut représenter ces différentes opérations par le diagramme suivant :



avec :

$$X \sim \mathcal{G}(m, L), \quad (\text{A.62})$$

$$E[Y] = \mu = \psi(L) - \log(L/m), \quad (\text{A.63})$$

$$\hat{\mu} \sim \mathcal{N}(\mu, \zeta^2), \quad (\text{A.64})$$

$$E[\hat{v}] = \exp \left[\mu + \frac{\zeta^2}{2} \right]. \quad (\text{A.65})$$

En remplaçant dans l'équation A.65 μ par son expression (cf. équation A.63), on obtient que :

$$E[\hat{v}] = \frac{m}{L} \exp \left[\psi(L) + \frac{\zeta^2}{2} \right]. \quad (\text{A.66})$$

On remarque alors que la valeur moyenne de \hat{v} est différente de m . Si nous souhaitons effectuer une estimation non-biaisée de m à partir de \hat{v} , nous pouvons réaliser la transformation suivante :

$$\hat{m} = \hat{v} L \exp \left[-\psi(L) - \frac{\zeta^2}{2} \right], \quad (\text{A.67})$$

avec \hat{m} l'estimateur non-biaisé de m obtenu à partir de \hat{v} . En effet :

$$\begin{aligned} E[\hat{m}] &= E[\hat{v}] L \exp \left[-\psi(L) - \frac{\zeta^2}{2} \right] \\ &= L \exp [\mu - \psi(L)], \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

à partir de cette dernière expression et en utilisant l'équation A.63, on obtient que $E[\hat{m}] = m$.

En exprimant \hat{m} en fonction de $\hat{\mu}$, on obtient alors :

$$\hat{m} = L \exp \left[\hat{\mu} - \psi(L) - \frac{\zeta^2}{2} \right]. \quad (\text{A.69})$$

A.5 CALCULS DES PERFORMANCES DU LQ-CFAR

Le test de détection du LQ-CFAR consiste à calculer le rapport entre le pixel test et une estimation de la valeur du fond au pixel test $\hat{m}_{n,\omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}$. En supposant que $\hat{m}_{n,\omega_n}^{\text{LQ-CFAR}}$ est une variable aléatoire lognormale, nous souhaitons calculer les performances du LQ-CFAR.

Dans cette annexe, nous établirons l'expression de la probabilité de fausse alarme pour un test de détection correspondant au rapport entre une variable aléatoire gamma et une variable aléatoire log-normale. Nous noterons X la variable aléatoire gamma de moyenne $m(1+S)$ et d'ordre L et \hat{m} la variable aléatoire log-normale de moyenne m et de variance ζ^2 . Définissons la variable aléatoire T comme :

$$T \triangleq \frac{X}{\hat{m}}. \quad (\text{A.70})$$

La densité de probabilité de X est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{L^L}{m^L (1+S)^L \Gamma(L)} x^{L-1} \exp \left[-L \frac{x}{m(1+S)} \right]. \quad (\text{A.71})$$

La densité de probabilité de \hat{m} est donnée par :

$$g_{\hat{m}}(y) = \frac{1}{y \zeta \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\log(y) - \mu)^2}{2\zeta^2} \right]. \quad (\text{A.72})$$

où $\mu \triangleq \log(m) - \frac{1}{2}\zeta^2$ (cf. propriété A.1). On peut alors exprimer la densité de probabilité de \hat{m} en fonction des paramètres m et ζ :

$$g_{\hat{m}}(y) = \frac{1}{y \zeta \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{\left(\log(y/m) + \frac{1}{2}\zeta^2 \right)^2}{2\zeta^2} \right]. \quad (\text{A.73})$$

D'après Papoulis [88], la densité de probabilité de T est :

$$f_T(t) = \int_0^\infty y f_X(ty) g_{\hat{m}}(y) dy. \quad (\text{A.74})$$

Que l'on peut écrire après remplacement de f_X et $g_{\hat{m}}$:

$$f_T(t) = \frac{L^L}{m^L (1+S)^L \Gamma(L)} \frac{1}{\zeta \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (ty)^{L-1} \exp \left[-L \frac{ty}{m(1+S)} - \frac{1}{2\zeta^2} \left(\log(y/m) + \frac{1}{2}\zeta^2 \right)^2 \right] dy. \quad (\text{A.75})$$

En développant le terme dans la fonction exponentielle :

$$f_T(t) = \frac{L^L}{m^L (1+S)^L \Gamma(L)} \frac{1}{\zeta \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (ty)^{L-1} \exp \left[-L \frac{ty}{m(1+S)} - \frac{1}{2\zeta^2} \log(y/m)^2 - \frac{1}{2} \log(y/m) - \frac{\zeta^2}{8} \right] dy. \quad (\text{A.76})$$

Soit :

$$f_T(t) = \frac{L^L}{m^L (1+S)^L \Gamma(L)} \frac{\exp\left[-\frac{\zeta^2}{8}\right]}{\zeta \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{t^{L-1} y^{L-3/2}}{m^{-1/2}} \exp\left[-L \frac{t y}{m(1+S)} - \frac{1}{2\zeta^2} \log(y/m)^2\right] dy. \quad (\text{A.77})$$

Le calcul de la probabilité de détection correspond à la probabilité que la valeur de T soit supérieure au seuil de détection τ dans le cas où le pixel test contient une cible (hypothèse H_1) :

$$\mathcal{P}_d(\tau) = \int_\tau^\infty f_T(t) dt. \quad (\text{A.78})$$

D'où :

$$\mathcal{P}_d(\tau) = \int_\tau^\infty \frac{L^L}{m^L (1+S)^L \Gamma(L)} \frac{\exp\left[-\frac{\zeta^2}{8}\right]}{\zeta \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{t^{L-1} y^{L-3/2}}{m^{-1/2}} \exp\left[-L \frac{t y}{m(1+S)} - \frac{1}{2\zeta^2} \log(y/m)^2\right] dy dt. \quad (\text{A.79})$$

En utilisant le théorème de Fubini, on peut intervertir les intégrales :

$$\mathcal{P}_d(\tau) = \frac{L^L}{m^L (1+S)^L \Gamma(L)} \frac{\exp\left[-\frac{\zeta^2}{8}\right]}{\zeta \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{y^{L-3/2}}{m^{-1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\zeta^2} \log(y/m)^2\right] \int_\tau^\infty t^{L-1} \exp\left[-L \frac{t y}{m(1+S)}\right] dt dy. \quad (\text{A.80})$$

Or d'après [49] :

$$\int_\tau^\infty t^{L-1} \exp\left[-L \frac{t y}{m(1+S)}\right] dt = \left(L \frac{y}{m(1+S)}\right)^{-L} \Gamma\left(L, L \tau \frac{y}{m(1+S)}\right). \quad (\text{A.81})$$

avec $\Gamma(x, y)$ la fonction gamma incomplète.

On obtient alors :

$$\mathcal{P}_d(\tau) = \frac{\exp\left[-\frac{\zeta^2}{8}\right]}{\zeta \Gamma(L) \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{y^{-3/2}}{m^{-1/2}} \Gamma\left(L, L \tau \frac{y}{m(1+S)}\right) \exp\left[-\frac{1}{2\zeta^2} \log(y/m)^2\right] dy. \quad (\text{A.82})$$

En effectuant le changement de variable $u = \frac{y}{m}$, on aboutit à :

$$\mathcal{P}_d(\tau) = \frac{\exp\left[-\frac{\zeta^2}{8}\right]}{\zeta \Gamma(L) \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty u^{-3/2} \Gamma\left(L, L \tau \frac{u}{1+S}\right) \exp\left[-\frac{1}{2\zeta^2} \log(u)^2\right] du. \quad (\text{A.83})$$

A.6 TERME DE CODAGE DU MAILLAGE DE LA SAS

Pour établir l'expression du terme de codage du maillage de la Surface Active Statistique (SAS), nous allons tout d'abord décrire une représentation compacte du maillage. L'idée est de considérer que l'on doit transmettre le maillage à une personne distante avec le message le plus court possible. Puis nous calculerons la longueur moyenne de ce message.

A.6.1 Description compacte du maillage

Nous proposons dans cette annexe d'exposer une approche qui permet d'aboutir à un codage d'un maillage triangulaire. La longueur du codage obtenu est d'un ordre de grandeur raisonnable et permet d'obtenir des résultats satisfaisants. La solution au problème du terme de codage d'un maillage triangulaire n'est probablement pas unique et une solution alternative pourrait être une perspective intéressante.

Description d'un maillage triangulaire

Pour que la personne qui reçoit le message puisse reconstruire le maillage, il lui faut connaître les positions des nœuds ainsi que leurs connexions ce qui définit la topologie du maillage. Les informations liées à la topologie d'un maillage triangulaire peuvent être regroupées dans un tableau que nous nommerons tableau topologique. La figure FIG. A.4 présente un exemple de maillage et le tableau TAB. A.1 présente le tableau topologique associé à ce maillage. Lors de l'écriture de ce tableau topologique, nous numérotions les nœuds du maillage par ordre croissant au fil de leur apparition dans le tableau topologique. Cette convention nous sera utile par la suite pour présenter une description du maillage de faible longueur.

Nœud	Coordonnées	Nœuds connexes
<u>0</u>	(0,0)	<u>1</u> <u>2</u> <u>3</u> <u>0</u>
1	(40,5)	<u>4</u> <u>2</u> 0 1
2	(30,30)	0 1 4 <u>5</u> <u>3</u> 0
3	(-10,40)	0 2 5 <u>6</u> <u>7</u> <u>3</u>
4	(100,0)	<u>8</u> <u>5</u> 2 1 4
5	(60,50)	2 4 8 <u>9</u> <u>10</u> <u>11</u> <u>6</u> 3 2
6	(20,60)	3 5 11 <u>7</u> 3
7	(0,80)	3 6 11 <u>7</u>
8	(90,40)	<u>9</u> 5 4 8
9	(100,80)	<u>10</u> 5 8 9
10	(70,85)	<u>11</u> 5 9 10
11	(40,85)	7 6 5 10 11

TAB. A.1 – Tableau topologique associé au maillage de la figure FIG. A.4. Dans la colonne de droite, les numéros de nœud non soulignés sont des informations redondantes qui peuvent être déduites à partir des informations apportées par les numéros de nœud soulignés.

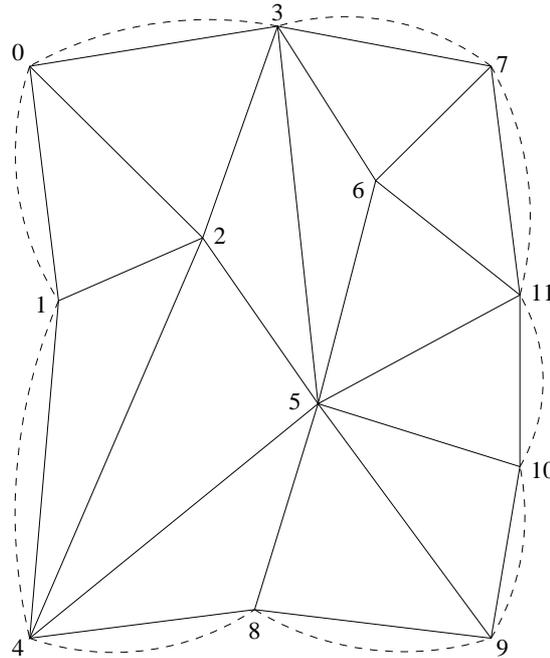


FIG. A.4 – Exemple de maillage comportant 12 nœuds et 33 segments. Les liaisons en pointillés permettent d'identifier les segments qui définissent les bords du maillage.

À chaque ligne du tableau est associé un nœud du maillage. Dans la colonne de gauche, le numéro du nœud est indiqué, ses coordonnées sont dans la colonne du milieu et la colonne de droite indique quels sont ses nœuds connexes, c'est-à-dire les nœuds auxquels il est relié par une arête du maillage. Pour le nœud numéro 0, on peut par exemple constater que ses coordonnées sont $(0,0)$ et qu'il est relié aux nœuds numéro 1, 2 et 3. On note que le nœud numéro 0 est indiqué comme un nœud connexe à lui-même, ce qui permet de savoir que ce nœud est un nœud du bord du maillage. Nous reviendrons sur ce point plus tard.

Afin d'être exploitable, l'écriture du tableau topologique doit respecter certaines règles liées notamment à la structure triangulaire du maillage.

Règle A.1 Chaque ligne du tableau correspond à un nœud dont le numéro est noté à gauche. Pour la $(K + 1)^{\text{ème}}$ ligne, la liste des nœuds connexes notée à droite est ordonnée, à une permutation circulaire près, de façon à être parcourue en tournant dans le sens trigonométrique autour du nœud numéro K .

Cette règle permet de retrouver facilement la structure du maillage à partir du tableau topologique puisque celle-ci est supposée triangulaire. En effet, en considérant la $(K + 1)^{\text{ème}}$ ligne du tableau topologique et en prenant deux numéros (P_1 et P_2) de nœuds qui se suivent dans la colonne de droite, on peut établir l'existence d'un triangle dont les sommets sont les nœuds numéro K , P_1 et P_2 . Ainsi pour la ligne correspondant au nœud numéro 0, si on choisit les nœuds numéro 1 et 2 (les deux premiers de la liste), on peut en déduire l'existence d'un triangle $(0,1,2)$. En utilisant cette même règle, le triangle $(0,2,3)$ est également défini avec la même ligne du tableau topologique.

Dans le tableau topologique, on constate que pour un nœud (K) intérieur au maillage, le premier et le dernier élément de la liste des nœuds connexes

sont les mêmes, ce qui permet de décrire complètement le polygone associé au nœud (K). Cette remarque peut être vérifiée grâce aux lignes correspondantes aux nœuds numéro 2, 5 et 6 dans le tableau topologique. On peut ainsi facilement identifier un nœud intérieur au maillage en lisant le tableau topologique.

On souhaite également pouvoir identifier facilement les nœuds du bord du maillage dans le tableau topologique. Aussi une nouvelle règle est établie.

Règle A.2 Pour un nœud du bord du maillage, la liste des numéros de nœuds connexes commence par le numéro d'un nœud du bord du maillage et finit par le numéro du nœud associé à la ligne.

On peut vérifier cette règle pour l'ensemble des nœuds du bord dans le tableau topologique. C'est le cas par exemple pour le nœud numéro 0 dont la liste des nœuds connexes débute par 1 (le numéro d'un nœud du bord) et finit par 0 (lui-même).

Ainsi grâce aux deux règles précitées, toute topologie de maillage à mailles triangulaires peut être représentée. Pour bien comprendre comment le maillage est reconstruit à l'aide du tableau topologique, considérons l'exemple du nœud numéro 1.

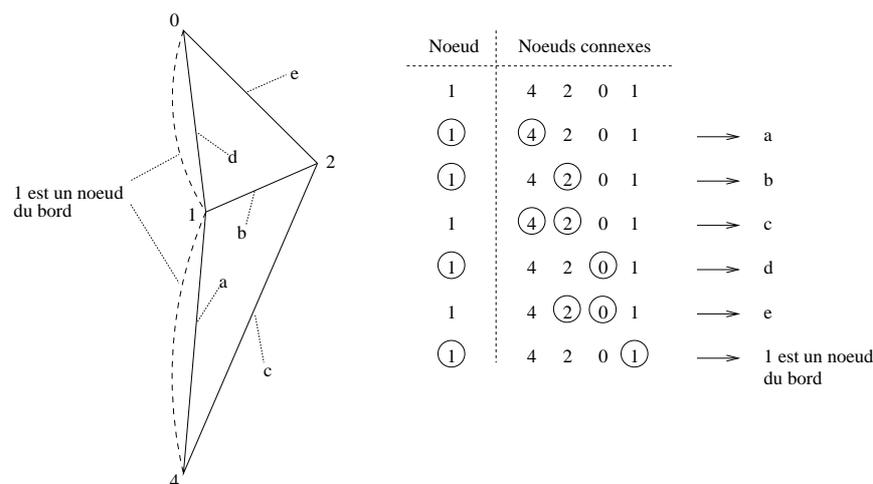


FIG. A.5 – Exemple de reconstruction de maillage pour le nœud numéro 1. À gauche, le polygone de voisinage du nœud numéro 1, à chaque segment est associée une lettre. Les liaisons en pointillés permettent d'identifier les segments qui définissent les bords du maillage. À droite, la ligne du tableau topologique associée au nœud numéro 1 est dupliquée plusieurs fois. Pour chaque ligne, les numéros entourés permettent de reconstruire les segments indiqués après la flèche.

La figure FIG. A.5 illustre comment chacun des segments reliés au nœud numéro 1 peut être reconstruit. Ainsi le triangle composé des nœuds numéro 1, 4 et 2 est reconstruit à partir des segments a , c et b . De même le triangle composé des nœuds numéro 1, 2 et 0 est reconstruit avec les segments b , e et d . L'utilisation de la règle A.2 à la dernière ligne du tableau de la figure FIG. A.5 permet de savoir que le nœud numéro 1 est un nœud du bord et que le segment a est une arête du bord du maillage. Alors, le segment d appartient nécessairement au bord du maillage pour assurer la continuité du bord.

Codage non simplifié et reconstruction du maillage

L'objectif est maintenant de coder le tableau topologique d'un maillage triangulaire quelconque. Pour cela, nous considérons que le premier nœud est toujours placé en $(0,0)$ et on ne le code donc pas. En envoyant les coordonnées d'un nœud uniquement lors de sa première apparition, on peut représenter le codage du maillage obtenu sous la forme suivante :

{ 1 (40,5), 2 (30,30), 3 (-10,40), 0; 4 (100,0), 2, 0, 1; 0, 1, 4, 5 (60,50), 3, 0; 0, 2, 5, 6 (20,60), 7 (0,80), 3; 8 (90,40), 5, 2, 1, 4; 2, 4, 8, 9 (100,80), 10 (70,85), 11 (40,85), 6, 3, 2; 3, 5, 11, 7, 3, 7; 3, 6, 11, 7; 9, 5, 4, 8; 10, 5, 8, 9; 11, 5, 9, 10; 7, 6, 5, 10, 11. } ,

où la virgule sépare les informations d'une même ligne du tableau topologique et le point virgule sépare les informations de deux lignes différentes du tableau topologique. Remarquons que cette ponctuation est rajoutée uniquement dans un souci de lisibilité de la liste, mais qu'il n'est pas nécessaire de transmettre cette ponctuation dans la mesure où cette information est obtenue directement lors de la reconstruction du maillage. En effet, avec les deux règles précédentes, on sait que la liste des nœuds connexes à un nœud numéro K se termine soit par K (le nœud numéro K est un nœud du bord) soit par le même numéro que le premier élément de la liste (le nœud numéro K est un nœud intérieur au maillage). On peut donc identifier dans le codage un changement de ligne du tableau topologique.

La figure FIG. A.6 est une représentation de la reconstruction du maillage. Sur cette figure, la contribution apportée à la reconstruction du maillage par chaque ligne du tableau topologique est indiquée.

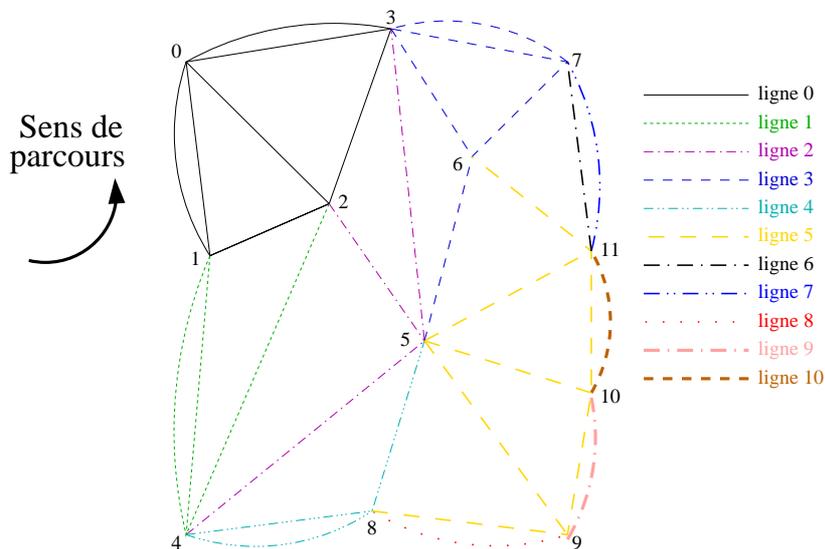


FIG. A.6 – Construction du codage du maillage. Pour chaque ligne du tableau topologique, on associe un style et une couleur de trait différent.

Lors de cette reconstruction du maillage, la transmission d'un nouveau nœud (P_2) permet de reconstruire deux arêtes qui relient le nouveau nœud à deux nœuds précédemment reconstruits. Le premier de ces nœuds est le nœud (K) correspondant à la ligne du tableau topologique en cours de reconstruction. Le second nœud (P_1) précède le nouveau nœud lors du parcours dans le sens trigonométrique du polygone de voisinage du nœud numéro

K. Cette propriété est directement liée à la nature triangulaire du maillage comme l'illustre la figure FIG. A.7.

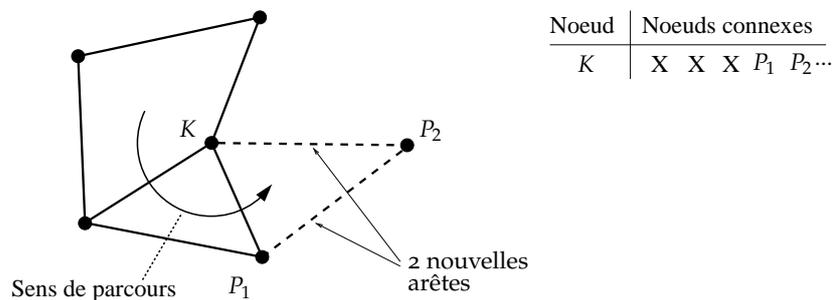


FIG. A.7 – Lors de la reconstruction d'un nouveau nœud P_2 , deux nouvelles arêtes sont également reconstruites. Le nouveau nœud (P_2) est connexe à deux nœuds (K et P_1) précédemment reconstruits.

Simplification du codage du maillage

Nous remarquons que l'information fournie par le tableau topologique est redondante. Par exemple, des connexions entre les nœuds sont dénombrées en double. C'est le cas du segment (0,1), qui est présent à la première ligne (premier nœud connexe) et à la deuxième ligne (troisième nœud connexe) du tableau topologique. Ainsi, les numéros de nœuds soulignés dans le tableau topologique (cf. tableau TAB. A.1) correspondent aux informations suffisantes pour reconstruire le maillage (déclaration de nœuds ou de segments). Les numéros de nœuds qui ne sont pas soulignés dans le tableau topologique sont autant d'informations superflues pour coder le maillage. Lors de la reconstruction du maillage, l'information apportée par les éléments non soulignés peut être déduite de l'information transmise grâce aux éléments soulignés en considérant les deux règles citées précédemment.

Pour obtenir un codage de longueur plus faible, on va donc transmettre uniquement les éléments soulignés dans le tableau topologique, c'est-à-dire : $\{ 1 (40,5), 2 (30,30), 3 (-10,40), 0; 4 (100,0), 2; 5 (60,50), 3; 6 (20,60), 7 (0,80), 3; 8 (90,40), 5; 9 (100,80), 10 (70,85), 11 (40,85), 6; 7; 7; 9; 10; 11. \}$,

Pour mieux comprendre ce codage, analysons le code $4 (100,0), 2$, correspondant à la deuxième ligne du tableau topologique (nœud numéro 1). La première ligne du tableau topologique a déjà permis une reconstruction partielle du maillage (cf. figure FIG. A.6). Le nœud numéro 1 a déjà été transmis lors du codage de la première ligne du tableau topologique, il est donc inutile de transmettre à nouveau ses coordonnées. Il n'est également pas nécessaire de rappeler le numéro du nœud dans la mesure où la $K^{\text{ème}}$ ligne du tableau est par construction consacrée au nœud numéro $K - 1$. Le nœud numéro 1 est relié par un segment au nœud numéro 4 qui lui au contraire n'a pas encore été transmis. Il nous faut donc transmettre ses coordonnées et ainsi établir le segment (1,4). Le fait de transmettre le nœud numéro 4 permet également de savoir que le nœud numéro 4 est un nœud du bord. En effet, sachant que le nœud (1) est situé sur un bord (la ligne précédente du tableau nous l'a appris), le nœud (4) qui apparaît en premier dans la ligne du tableau topologique associée au nœud (1) est également un nœud situé sur un

bord (conséquence de la règle A.2). Concernant le segment entre les nœuds numéro 1 et 2, il a déjà été codé avec la première ligne du tableau topologique. Cependant nous devons coder le segment entre les nœuds numéro 2 et 4 pour déclarer le triangle (1,4,2), ce qui nous oblige à transmettre le numéro du nœud (2) sans pour autant transmettre ses coordonnées (déjà transmises). Les deux derniers numéros de nœuds (0 et 1) de la deuxième ligne du tableau topologique n'ont pas besoin d'être codés car cette partie du maillage a déjà été reconstruite grâce à la première ligne du tableau topologique comme on peut le voir avec les traits pleins sur la figure FIG. A.6.

Cependant si les derniers éléments de la deuxième ligne du tableau topologique ne sont pas transmis, il peut sembler nécessaire d'indiquer un changement de ligne du tableau topologique avant la description du polygone de voisinage du nœud correspondant à la troisième ligne du tableau topologique (nœud numéro 2). Cette indication n'est en fait pas nécessaire. En effet, le code $\{ 1 (40,5), 2 (30,30), 3 (-10,40), 0; 4 (100,0), 2 \}$ (correspondant aux deux premières lignes du tableau topologique) permet une reconstruction partielle du maillage visible sur la figure FIG. A.6 (ligne 0 et ligne 1). Partant de cette reconstruction, on ne peut pas ajouter un nouveau nœud connexe au nœud numéro 1 tout en gardant une structure de maillage triangulaire sinon des triangles se recouvriraient. Aussi, le récepteur est capable de compléter la deuxième ligne du tableau topologique avec les informations $\{0,1\}$ transmises dans le code correspondant à la première ligne du tableau topologique. Le récepteur reconstruit alors l'ensemble de la deuxième ligne du tableau topologique. En utilisant les deux règles de construction du tableau topologique (règles A.1 et A.2), le récepteur sait ainsi que les informations transmises après le code $\{ 4 (100,0), 2 \}$ correspondent à une nouvelle ligne du tableau topologique. Il est difficile de savoir où les changements de ligne du tableau topologique ont lieu lors de la lecture du code, aussi la figure FIG. A.6 qui présente les différentes étapes de reconstruction du maillage peut être une aide utile à la compréhension.

Ce codage peut encore être réduit. En effet lorsque l'on code un nœud, il est inutile de transmettre à la fois ses coordonnées et son numéro puisque l'on sait que les nœuds sont numérotés dans leur ordre d'apparition. Il est donc suffisant de transmettre les coordonnées des nœuds au fur et à mesure de leur apparition. On obtient ainsi le codage suivant :

$$\{ (40,5), (30,30), (-10,40), 0; (100,0), 2; (60,50), 3; (20,60), (0,80), 3; (90,40), 5; (100,80), (70,85), (40,85), 6; 7; 7; 9; 10; 11. \} ,$$

De plus, on remarque que les numéros soulignés pour la $(K + 1)^{\text{ème}}$ ligne du tableau topologique TAB. A.1 ont des valeurs proches du numéro K du nœud correspondant à la ligne. Aussi, plutôt que de transmettre le numéro absolu d'un nœud de la $(K + 1)^{\text{ème}}$ ligne, on utilise un codage relatif du numéro du nœud par rapport à K . Autrement dit, si on considère la $(K + 1)^{\text{ème}}$ ligne du tableau topologique et P le numéro d'un nœud connexe au nœud numéro K , il suffit de transmettre la différence $P - K$ des numéros de nœud. On aboutit alors au codage suivant :

$$\{ (40,5), (30,30), (-10,40), \underline{0}; (100,0), \underline{1}; (60,50), \underline{1}; (20,60), (0,80), \underline{0}, (90,40), \underline{1}; (100,80), (70,85), (40,85), \underline{1}; \underline{1}; \underline{0}; \underline{1}; \underline{1}; \underline{1}. \} .$$

Dans ce codage on distingue deux types d'éléments qui sont des coordonnées (en gras) et des numéros relatifs de nœud (souligné).

A.6.2 Détermination de la longueur de code

Rappelons que nous cherchons à déterminer une approximation de la longueur de codage minimale du maillage et non le codage lui-même. À cette fin, la longueur du codage précédent peut être divisée en trois termes.

Il faut tout d'abord coder les coordonnées des nœuds. On doit donc coder la liste des coordonnées suivante :

$Pos = \{ (40,5), (30,30), (-10,40), (100,0), (60,50), (20,60), (0,80), (90,40), (100,80), (70,85), (40,85). \}$

ce qui correspond aux éléments en gras dans le codage.

Puis nous devons transmettre la liste des numéros des nœuds, c'est-à-dire les éléments souligné dans le codage :

$Num = \{ 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1. \}$

Enfin, le codage est une liste d'éléments de nature différente. Une information supplémentaire est nécessaire pour savoir si l'élément du codage correspond aux coordonnées d'un nœud (représenté par un 1) ou au numéro d'un nœud (représenté par un 0). Cette dernière liste est :

$Clk = \{ 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0. \}$

Nous appelons cette suite de valeurs binaires la liste d'horloge.

La reconstruction du maillage à partir des trois listes (Pos , Num et Clk) s'effectue de la manière suivante. Le récepteur lit un élément de la liste Clk dont la valeur lui indique s'il doit lire un élément de la liste Pos (des coordonnées) ou un élément de la liste Num (un numéro de nœud). À partir de l'élément lu, le récepteur complète la reconstruction du maillage en utilisant les règles citées précédemment. Lorsque le récepteur n'est plus capable de compléter la reconstruction du maillage avec les informations qu'il possède, il lit un nouvel élément de la liste Clk afin de continuer la reconstruction avec un élément de la liste Pos ou de la liste Num . Ce processus se continue jusqu'à la lecture complète des trois listes, ce qui permet la reconstruction complète du maillage. Il est important de noter que les listes Pos et Num ne sont pas lues indépendamment les unes des autres. L'ordre dans lequel les éléments des listes Pos et Num sont lus est donné par la liste Clk .

Afin d'obtenir une approximation de la longueur de code nécessaire pour coder la topologie du maillage, nous proposons d'utiliser la longueur moyenne des codes entropiques pour le codage des coordonnées des nœuds et des numéros des nœuds. Par ailleurs, nous rappelons que M (resp. S) correspond au nombre total de nœuds (resp. segments) du maillage.

Codage de la liste des coordonnées des nœuds (Pos)

Pour coder la liste (Pos), nous devons coder les coordonnées de $M - 1$ nœuds. Aussi, il est possible de localiser un nouveau nœud (P_2) par rapport à deux nœuds (K et P_1) déjà reconstruits et connexes au nouveau nœud (cf. FIG. A.7). Nous localiserons alors un nouveau nœud par l'intersection de deux cercles (cf. FIG. A.8) centrés sur les nœuds numéro K et P_1 . Le premier cercle est

centré sur le nœud numéro K associé à la ligne du tableau topologique qui est en train d'être reconstruite. Le second cercle est centré sur le nœud numéro P_1 qui précède le nouveau nœud lors du parcours dans le sens trigonométrique du polygone de voisinage du nœud numéro K . Les rayons de ces deux cercles correspondent respectivement aux segments (K, P_2) et (P_1, P_2) .

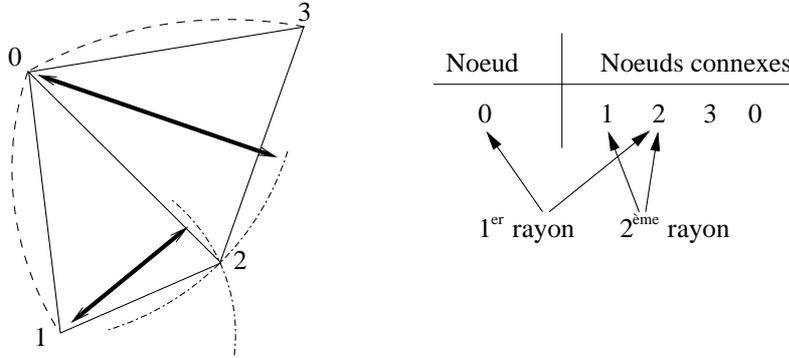


FIG. A.8 – Le nouveau nœud (ici le nœud numéro $P_2 = 2$) est positionné à l'intersection de deux cercles dont les rayons correspondent aux segments $(K = 1, P_2 = 2)$ et $(P_1 = 0, P_2 = 2)$ définis dans le tableau topologique (la ligne du tableau topologique correspondante est rappelée à droite).

Chaque fois que l'on souhaite localiser un nouveau nœud, il nous faut alors transmettre les rayons de ces deux cercles. Nous supposons que le rayon de chaque cercle est une réalisation d'une variable aléatoire exponentielle. Le choix de cette loi de distribution est obtenu en appliquant le principe du maximum d'entropie [96], de façon à nous placer dans le cas le plus désavantageux, c'est-à-dire le cas nécessitant le plus de nats. Ainsi, on peut utiliser la longueur moyenne des codages entropiques pour le codage des rayons des cercles [102]. La longueur du codage moyen d'un rayon de cercle est alors égale à $[1 + \log(\hat{\rho})]$ où $\hat{\rho}$ est la valeur moyenne des longueurs des segments du maillage [39]. Pour obtenir la longueur du codage de l'ensemble des rayons des cercles, la longueur du codage moyen d'un rayon doit être multipliée par $2(M - 1)$ car pour chacun des $M - 1$ nœuds deux rayons de cercle doivent être codés.

De plus, il est également nécessaire de coder la valeur de $\hat{\rho}$. Le paramètre $\hat{\rho}$ est calculé à partir de la longueur des segments parcourus lors de la description du maillage. Nous avons pu remarquer lors de la reconstruction du maillage qu'à chaque fois que nous codons un nouveau nœud, nous codons également deux segments. Le nombre de segments parcourus lors de la description du maillage est alors égal à $2(M - 1)$. D'après [102], la longueur de code associée au paramètre $\hat{\rho}$ peut être approchée par $1/2 \log [2(M - 1)]$.

Finalement, la longueur de code nécessaire pour le codage de la liste Pos est égale à :

$$\Delta_{Pos} \triangleq \underbrace{2(M - 1) [1 + \log(\hat{\rho})]}_{\text{codage moyen des rayons des cercles}} + \underbrace{\frac{1}{2} \log [2(M - 1)]}_{\text{codage de } \hat{\rho}}. \quad (\text{A.84})$$

Codage de la liste des numéros des nœuds (*Num*)

Nous cherchons tout d'abord à déterminer le nombre d'éléments qui constituent la liste *Num*. Comme nous avons déjà pu le remarquer lors de la reconstruction du maillage, pour chaque nœud nous avons défini deux segments soit au total $2(M - 1)$ segments. Il nous reste donc à coder $S - 2(M - 1)$ segments, ce qui correspond au nombre d'éléments dans la liste *Num* que nous notons $\text{Card}(Num) = S - 2(M - 1)$.

Chaque élément de la liste *Num* est un nombre entier supérieur ou égal à zéro. En effet, comme les nœuds sont numérotés dans leur ordre d'apparition, les nombres de la liste *Num* sont nécessairement positifs ou nuls. Nous avons pu constater que pour des maillages usuels les éléments de valeur égale à 1 sont fortement majoritaires, une quantité non négligeable d'éléments a la valeur 0 (les nœuds des bords supérieur et droit) et quelques éléments ont des valeurs différentes de 0 et 1. Par ailleurs, la valeur maximale d'un élément est égale à M (le nombre de nœuds).

Déterminer la longueur moyenne du codage de la liste (*Num*) est difficile. En effet, nous ne connaissons pas la probabilité d'apparition des différentes valeurs de la liste *Num* et nous n'avons pas trouvé de relation simple entre ces différentes probabilités d'apparition et des caractéristiques globales de la topologie du maillage. Néanmoins, l'étude de différents maillages nous a conduit à la conclusion que la loi de probabilité des éléments de la liste (*Num*) est extrêmement piquée sur la valeur 1 et qu'elle ne correspond pas à une loi standard.

Il serait possible de déterminer la longueur moyenne de codage de la liste *Num* à partir d'un histogramme des éléments de la liste calculé pour un maillage donné. Cependant cette solution nécessiterait la construction du codage du maillage, ce qui n'est pas envisageable si on souhaite aboutir à un algorithme rapide.

Ce terme de codage des numéros des nœuds pourrait également être négligé mais cela n'est pas souhaitable car le but de ce terme est précisément de contraindre le maillage. C'est pourquoi nous avons préféré associer à la liste *Num* une longueur moyenne de codage non nulle.

Aussi, nous supposons que la quantité d'information moyenne pour coder un élément de la liste est égale à un nat. On en déduit le terme de codage de la liste (*Num*), qui est exprimé en nats par :

$$\Delta_{Num} \approx \text{Card}(Num). \quad (\text{A.85})$$

Ce terme de codage est approximatif. Pour des maillages usuels, nous avons cependant pu vérifier expérimentalement que le terme de codage que nous utilisons est un majorant de la longueur moyenne du code nécessaire pour décrire la liste *Num* et qu'il conduit à de bons résultats.

Codage de la liste d'horloge (*Clk*)

Par définition, la liste *Clk* ne comporte que des 0 (numéro de nœud) ou des 1 (coordonnées de nœud). De plus, nous connaissons les proportions de 0 et de 1 à partir de l'étude des listes *Pos* et *Num*. En effet, le nombre de 1 (resp. 0)

est égal au nombre d'éléments dans la liste *Pos* (resp. *Num*). Il y a donc $M - 1$ valeurs égales à 1 et $S - 2M + 2$ valeurs égales à 0 pour un total de $N_{\text{Clk}} = S - M + 1$ éléments. On modélise alors la liste *Clk* par une variable aléatoire de Bernoulli dont la probabilité d'apparition d'un 1 est égale à $(M - 1)/N_{\text{Clk}}$ et dont la probabilité d'apparition d'un 0 est égale à $(N_{\text{Clk}} - (M - 1))/N_{\text{Clk}}$.

On peut alors calculer la longueur moyenne de code pour la liste *Clk* en utilisant l'entropie de Shannon :

$$\Delta_{\text{Clk}} \triangleq -(M - 1) \log \left(\frac{M - 1}{N_{\text{Clk}}} \right) - (N_{\text{Clk}} - (M - 1)) \log \left(\frac{N_{\text{Clk}} - (M - 1)}{N_{\text{Clk}}} \right). \quad (\text{A.86})$$

Finalement le terme de codage du maillage que nous utilisons est :

$$\Delta_{\text{Maillage}}(\mathbf{T}) \triangleq \Delta_{\text{Pos}} + \Delta_{\text{Pos}} + \Delta_{\text{Clk}}. \quad (\text{A.87})$$

A.7 SAS : OPÉRATIONS DE SIMPLIFICATION ET DE DÉFORMATION DE MAILLAGE

Dans cette annexe, nous décrivons les différentes opérations de modification et de simplification de maillage.

Déplacement de nœuds

Le déplacement de nœuds est l'étape la plus simple de déformation de maillage, elle consiste à modifier les coordonnées d'un nœud. Lors de l'étape de déplacement de nœuds, le nombre ainsi que les connexions entre les nœuds sont fixés.

Le déplacement de nœuds est constitué d'une opération de déplacement élémentaire (déplacement d'un pixel pour tous les nœuds) que l'on va effectuer plusieurs fois pour déplacer les nœuds de proche en proche (cf. figure FIG. A.9).

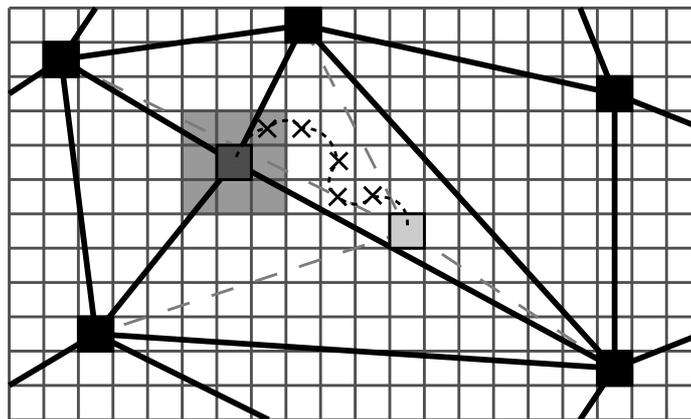


FIG. A.9 – Exemple de déplacement d'un nœud (le maillage est vu par dessus et le quadrillage représente les positions discrètes que peuvent prendre les nœuds). La position de départ du nœud considéré est représentée par le carré rempli en gris clair. Le nœud a été déplacé de proche en proche (les positions sont représentées par des croix) jusqu'à la position actuelle (carré rempli en gris foncé). À partir de la position actuelle, le nœud peut être déplacé vers une des huit positions voisines (carré rempli en gris moyen).

Pour chaque nœud testé, l'opération de déplacement élémentaire consiste à choisir la position du nœud qui permet de minimiser la complexité stochastique. Cette position est choisie dans un voisinage immédiat du nœud testé (les 8 positions voisines). La seule condition à vérifier lors du déplacement d'un nœud est de nature topologique. En effet, il faut que le déplacement du nœud n'entraîne pas une inversion topologique. Une inversion topologique apparaît quand un nœud est déplacé en dehors du polygone formé par les nœuds connexes au nœud déplacé.

Cette opération de déplacement élémentaire est ré-itérée jusqu'à ce que plus aucun déplacement ne soit accepté ou jusqu'à un nombre maximal d'itérations (typiquement 15). On considère que le déplacement d'un nœud (déplacement d'un pixel) entraîne une modification minimale du terme de codage des données. Aussi nous considérons qu'il n'est pas nécessaire de réaliser une

estimation des valeurs nodales des nœuds après le déplacement élémentaire d'un seul nœud. Par contre, les valeurs nodales des nœuds sont mises à jour après une itération, c'est-à-dire quand tous les nœuds ont été testés pour un déplacement élémentaire.

Basculement d'arêtes

Le basculement d'arêtes consiste en une modification topologique qui dans le cas d'un quadrilatère formé par deux triangles et par les 4 nœuds A , B , C et D , supprime la connexion entre les deux sommets opposés ($B - D$) pour établir une connexion entre les deux autres sommets opposés ($A - C$).

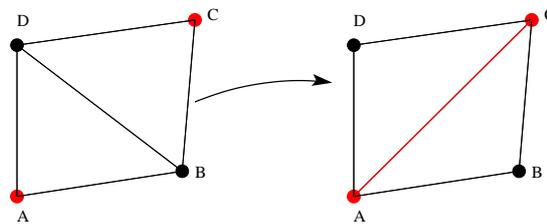


FIG. A.10 – Exemple de basculement d'arêtes. Le segment entre les nœuds B et D est remplacé par un segment entre les nœuds A et C .

La figure FIG. A.10 montre un exemple de basculement d'arêtes. Pour cette opération, il est également nécessaire de vérifier que le basculement d'une arête n'engendre pas une inversion topologique. Lorsqu'un basculement d'arête est testé, les valeurs nodales des nœuds formant le quadrilatère sont estimées afin que la modification topologique soit prise en compte dans le calcul du terme de codage des données.

Suppression de nœuds

La suppression de nœuds consiste à enlever le nœud testé si la modification engendrée fait diminuer la complexité stochastique. Lors du test de la modification, les valeurs nodales des nœuds voisins au nœud testé sont estimées afin d'obtenir un calcul correcte du terme de codage des données.

L'opération de suppression de nœuds est différente en fonction de l'ordre du nœud testé, c'est-à-dire en fonction du nombre de nœuds auxquels le nœud testé est relié. Aussi, nous avons considéré la suppression de nœuds d'ordre 3 (ordre minimal d'un nœud pour un maillage triangulaire), 4, 5 ou 6. La suppression de nœuds d'ordre supérieur à 6 n'a pas été traitée car la complexité algorithmique devient très importante, la vitesse d'exécution de l'algorithme SAS s'en trouve diminuée. De plus l'ordre d'un nœud peut baisser lors de la modification de la topologie autour du nœud considéré, ainsi un nœud dont l'ordre été initialement supérieur à 6 peut être supprimé après plusieurs modifications topologiques du maillage.

La figure FIG. A.11 présente un exemple de suppression de nœud d'ordre 3. Cette opération est simple car il n'existe qu'une seule alternative à la suppression d'un nœud d'ordre 3, le nœud en question disparaît et les trois triangles qui avaient pour sommet le nœud supprimé sont remplacés par un seul triangle.

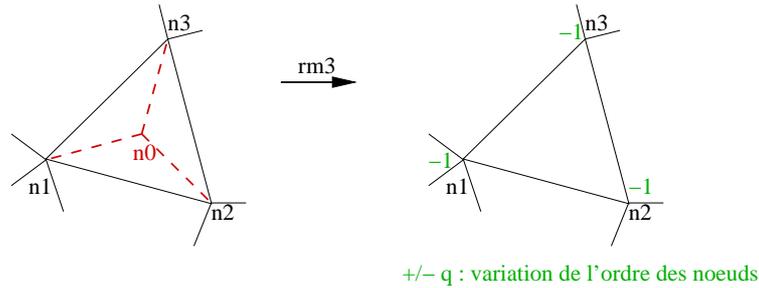


FIG. A.11 – Exemple de suppression d'un nœud d'ordre 3.

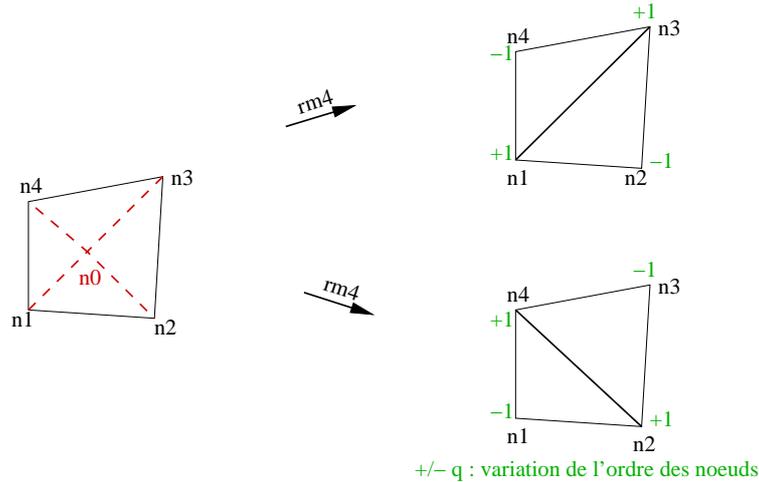


FIG. A.12 – Exemples de suppression d'un nœud d'ordre 4.

La suppression d'un nœud d'ordre 4 offre elle deux alternatives comme nous pouvons le voir avec la figure FIG. A.12.

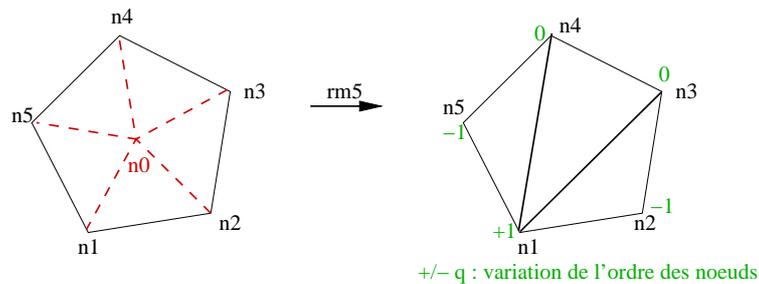


FIG. A.13 – Exemple de suppression d'un nœud d'ordre 5.

Pour la suppression d'un nœud d'ordre 5, la complexité algorithmique augmente sensiblement puisqu'il existe cinq alternatives. La figure FIG. A.13 montre l'exemple d'une de ces alternatives, les autres alternatives peuvent être déduites par permutation circulaire des nœuds.

Pour la suppression d'un nœud d'ordre 6, on dénombre jusqu'à quatorze alternatives. La figure FIG. A.14 présente les quatre types d'alternatives principales. À partir de ces quatre alternatives principales, on peut en déduire les quatorze alternatives par permutation circulaire des nœuds.

Pour la suppression d'un nœud, nous testerons toutes les alternatives possibles (en fonction de l'ordre du nœud) et nous conserverons celle qui permet de minimiser la complexité stochastique.

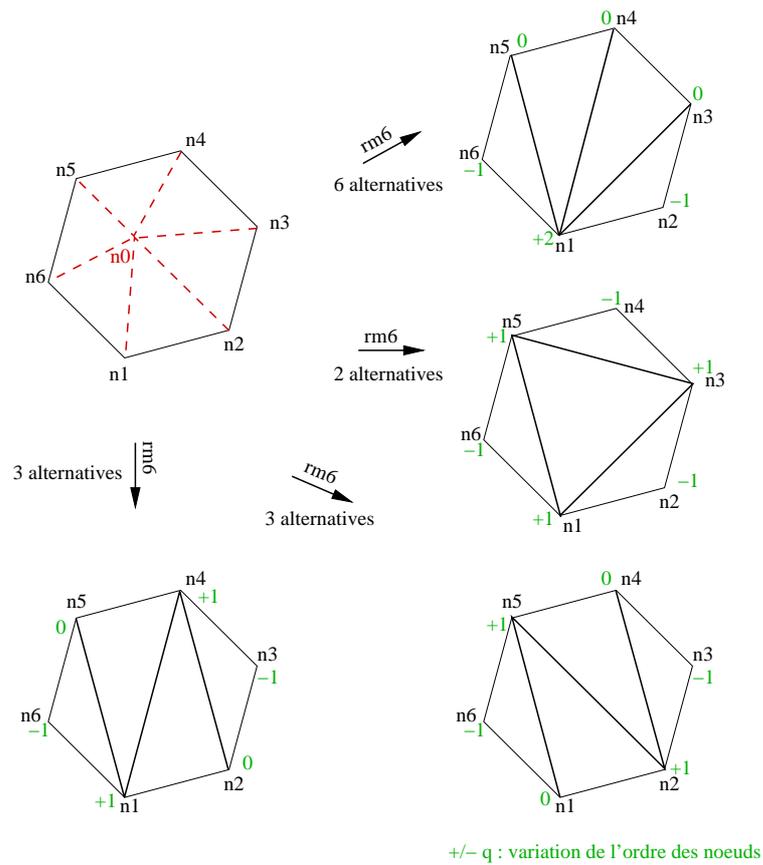


FIG. A.14 – Exemples de suppression d'un nœud d'ordre 6.

Si la suppression d'un nœud offre de nombreuses alternatives (surtout quand le nœud est d'ordre élevé), il faut néanmoins noter que toutes ces alternatives peuvent être obtenues à partir d'une succession de nœud d'ordre 3 et de basculement d'arête [58].

A.8 SAS : DÉTERMINATION DE LA LOG-VRAISEMBLANCE GÉNÉRALISÉE

On considère que l'image X est la somme d'une valeur déterministe S et d'un bruit gaussien B indépendant de pixel à pixel, de moyenne nulle et de variance σ^2 constante sur toute l'image. Nous considérons le cas où S est une surface maillée dont la valeur au pixel p est notée $S(p, \boldsymbol{\theta}, T)$. On a alors la relation :

$$X_p = S(p, \boldsymbol{\theta}, T) + B_p. \quad (\text{A.88})$$

La densité de probabilité de la variable aléatoire X_p est :

$$P_{X_p}(X_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(X_p - S(p, \boldsymbol{\theta}, T))^2}{\sigma^2} \right]. \quad (\text{A.89})$$

La log-vraisemblance de l'image X s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}, T, \sigma^2) &= \sum_{p \in \text{maillage}} \log [P_{X_p}(X_p)] \\ &= -\frac{N}{2} \log (2\pi\sigma^2) \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{p=1}^N (X_p - S(p, \boldsymbol{\theta}, T))^2 \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

où N est le nombre de pixels appartenant au maillage.

La variance σ^2 est considérée inconnue et nous l'estimons au sens du maximum de vraisemblance [19, 40] :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{p \in \text{maillage}} [X_p - S(p, \boldsymbol{\theta}, T)]^2. \quad (\text{A.91})$$

En remplaçant σ^2 par $\hat{\sigma}^2$ dans l'équation A.90, nous obtenons la log-vraisemblance généralisée :

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}, T, \hat{\sigma}^2) = \frac{N}{2} \left[1 + \log (2\pi\hat{\sigma}^2) \right]. \quad (\text{A.92})$$

A.9 SAS : BORNES DE CRAMER-RAO

En utilisant une notation vectorielle, la log-vraisemblance peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{X}|\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T}), \sigma^2) &= -\frac{N}{2} \log(2\pi\sigma^2) \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{X} - \underline{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T}))^T (\mathbf{X} - \underline{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T})) . \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

Nous proposons maintenant de calculer l'expression de la matrice de Fisher.

Calculons tout d'abord la dérivée de $\mathcal{L}(\mathbf{X}|\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T}), \sigma^2)$ par rapport à σ^2 :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{X}|\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T}), \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} (\mathbf{X} - \underline{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T}))^T (\mathbf{X} - \underline{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T})) . \quad (\text{A.94})$$

En utilisant la propriété suivante [50] :

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} (\mathbf{X} - \underline{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T}))^T (\mathbf{X} - \underline{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T})) = -2 \underline{\underline{\mathbf{P}}}^T (\mathbf{X} - \underline{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T})) , \quad (\text{A.95})$$

dérivons l'équation A.94 par rapport à $\boldsymbol{\theta}$:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{X}|\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T}), \sigma^2)}{\partial \sigma^2 \partial \boldsymbol{\theta}} = -\frac{1}{\sigma^4} \underline{\underline{\mathbf{P}}}^T (\mathbf{X} - \underline{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T})) . \quad (\text{A.96})$$

L'espérance mathématique de l'équation A.96 est nulle, car l'estimateur est non biaisé :

$$E \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{X}|\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T}), \sigma^2)}{\partial \sigma^2 \partial \boldsymbol{\theta}} \right] = 0 . \quad (\text{A.97})$$

Maintenant dérivons une nouvelle fois l'équation A.94 par rapport à σ^2 :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{X}|\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T}), \sigma^2)}{\partial \sigma^2 \partial \sigma^2} = \frac{N}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6} (\mathbf{X} - \underline{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T}))^T (\mathbf{X} - \underline{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T})) . \quad (\text{A.98})$$

En prenant l'opposé de l'espérance mathématique de l'expression précédente (cf. équation A.98), on définit :

$$\begin{aligned} I_{\sigma^2}(\sigma^2) &\triangleq -E \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{X}|\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T}), \sigma^2)}{\partial \sigma^2 \partial \sigma^2} \right] \\ &= \frac{N}{2\sigma^4} . \end{aligned} \quad (\text{A.99})$$

En effet, rappelons que :

$$(\mathbf{X} - \underline{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T}))^T (\mathbf{X} - \underline{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T})) = N \sigma^2 . \quad (\text{A.100})$$

Calculons maintenant la dérivée de la log-vraisemblance par rapport à $\boldsymbol{\theta}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{X}|\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T}), \sigma^2)}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{\sigma^2} \underline{\underline{\mathbf{P}}}^T (\mathbf{X} - \underline{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{T})) . \quad (\text{A.101})$$

Dérivons une nouvelle fois par rapport à θ :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{X}|\mathbf{S}(\theta, \mathbf{T}), \sigma^2)}{\partial \theta \partial \theta^T} = -\frac{1}{\sigma^2} \underline{\underline{\mathbf{P}^T \mathbf{P}}}. \quad (\text{A.102})$$

On définit alors la matrice $\mathbf{I}_\theta(\theta)$ telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\theta(\theta) &\triangleq -E \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{X}|\mathbf{S}(\theta, \mathbf{T}), \sigma^2)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \underline{\underline{\mathbf{P}^T \mathbf{P}}}. \end{aligned} \quad (\text{A.103})$$

En regroupant les différents calculs, on peut dire que la matrice d'information de Fisher est une matrice bloc diagonale en σ^2 et θ que l'on peut exprimer sous la forme suivante :

$$\mathbf{I} \left(\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} I_{\sigma^2}(\sigma^2) & \mathbf{0}_{1 \times M} \\ \mathbf{0}_{M \times 1} & \mathbf{I}_\theta(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.104})$$

où $\mathbf{0}_{N \times M}$ est une matrice nulle de taille $N \times M$.

On remarque que la matrice de covariance de $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MV}$ (cf. équation 5.22) est égale à l'inverse du terme de la matrice de Fisher relatif aux paramètres d'intérêts $\mathbf{I}_\theta(\boldsymbol{\theta})$. On prouve ainsi que l'estimateur $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MV}$ est efficace (non biaisé et de variance minimale).

A.10 PRÉSENTATION DU PRINCIPE D'ALGORITHME RAPIDE

Nous souhaitons ici fournir une présentation succincte du principe d'algorithme rapide. Pour de plus amples informations, nous invitons le lecteur à se référer aux références suivantes [19, 39, 44].

Soit Ω une région simplement connexe. Dans les différents algorithmes développés, on peut être amené à calculer une statistique $T_k(\Omega)$ (par exemple, la valeur moyenne) associée à la région Ω (par exemple un triangle pour la SAS). Le calcul de cette statistique $T_k(\Omega)$ nécessite alors une sommation sur la région Ω :

$$T_k(\Omega) = \sum_{(i,j) \in \Omega} t_k [X_{i,j}] , \quad (\text{A.105})$$

où (i, j) sont les coordonnées de l'échantillon $X_{i,j}$ et t_k est, dans les cas qui nous intéressent, de la forme :

$$t_k [X_{i,j}] = [X_{i,j}]^k , k \in \{0, 1, 2\} . \quad (\text{A.106})$$

La région étant simplement connexe, cette sommation 2-D peut être remplacée par une sommation 1-D sur le contour de Ω :

$$T_k(\Omega) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} c_{i,j} F_{i,j}(k) , \quad (\text{A.107})$$

avec \mathcal{C} le contour de Ω parcouru dans le sens trigonométrique et où $F(k)$ est une image pré-calculée une fois pour toute à l'initialisation de l'algorithme et obtenue en effectuant une sommation selon les lignes des données :

$$F_{i,j}(k) = \sum_{i_1}^i t_k [X_{i_1,j}] . \quad (\text{A.108})$$

Le coefficient $c_{i,j}$ pour la position (i, j) du contour dépend seulement des positions de ses pixels voisins sur le contour \mathcal{C} et prend ses valeurs parmi l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$. Pour plus de détails sur la façon dont sont obtenues les valeurs de $c_{i,j}$, on pourra se référer à [44].

Le fait de remplacer les sommations sur des régions par des sommations sur des contours permet un gain en vitesse de calcul conséquent (typiquement un facteur 80).

Par la suite, cet algorithme rapide a été généralisé aux cas des régions non simplement connexes [39].

A.11 SAS ET ALGORITHME RAPIDE

Nous souhaitons ici présenter comment il est possible d'utiliser un algorithme rapide avec la SAS pour l'optimisation des valeurs nodales. Nous présenterons les étapes principales de calcul, nous éviterons ainsi au lecteur les longs calculs nécessaires pour obtenir chacun des termes nécessaires au calcul du critère du MV avec l'algorithme rapide.

Le critère du MV s'exprime sous la forme suivante :

$$J_{MV}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{T}) = \sum_{p \in \text{maillage}} [X_p - S(p, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{T})]^2. \quad (\text{A.109})$$

On commence par remplacer la sommation sur les pixels des données, par une double sommation, l'une sur les triangles du maillage, l'autre sur les pixels de chaque triangle t :

$$J_{MV}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{T}) = \sum_{t \in \text{maillage}} \sum_{p \in t} [X_p - S_t(p, \boldsymbol{\theta})]^2, \quad (\text{A.110})$$

où $S_t(p, \boldsymbol{\theta})$ est la valeur prise par la surface maillée pour tout pixel p à l'intérieur du triangle t . Par définition, $S_t(p, \boldsymbol{\theta})$ est nulle pour tout pixel p en dehors du triangle t . Il faut remarquer qu'il est possible, de la même manière, de ne pas considérer tous les pixels compris dans un triangle. On peut ainsi, si on le souhaite, utiliser la SAS sans considérer l'intégralité des données. Cela est utile quand on souhaite utiliser la SAS en détection et ne pas tenir compte du pixel test pour l'estimation de la valeur du fond.

La valeur de $S_t(p, \boldsymbol{\theta})$ est la combinaison linéaire de trois fonctions élémentaires :

$$S_t(p, \boldsymbol{\theta}) = k_z \mathcal{P}_{K, P_q, P_{q+1}}(p) + p_{qz} \mathcal{P}_{P_q, P_{q+1}, K}(p) + p_{(q+1)z} \mathcal{P}_{P_{q+1}, K, P_q}(p), \quad (\text{A.111})$$

avec K, P_q, P_{q+1} les trois sommets (nœuds) du triangle t et $k_z, p_{qz}, p_{(q+1)z}$ leurs valeurs nodales respectives.

De plus, une fonction élémentaire à l'intérieure du triangle t est une fonction linéaire :

$$\mathcal{P}_{K, P_q, P_{q+1}}(p) = \alpha_{K, P_q, P_{q+1}} \times i + \beta_{K, P_q, P_{q+1}} \times j + \gamma_{K, P_q, P_{q+1}} \quad (\text{A.112})$$

où $\{\alpha_{K, P_q, P_{q+1}}, \beta_{K, P_q, P_{q+1}}, \gamma_{K, P_q, P_{q+1}}\}$ sont les coefficients de la fonction élémentaire $\mathcal{P}_{K, P_q, P_{q+1}}(p)$ sur le triangle (K, P_q, P_{q+1}) , coefficients qui ne dépendent que des coordonnées des nœuds du maillage.

On peut alors écrire le critère sous la forme suivante en mettant les valeurs

nodales associées au triangle t en facteur :

$$\begin{aligned}
 J_{MV}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{T}) = & \sum_{t \in \text{maillage}} \left[k_z^2 \times \text{terme}_1 \right. \\
 & + p_{q_z}^2 \times \text{terme}_2 \\
 & + p_{(q+1)_z}^2 \times \text{terme}_3 \\
 & + k_z \times p_{q_z} \times \text{terme}_4 \\
 & + k_z \times p_{(q+1)_z} \times \text{terme}_5 \\
 & + p_{q_z} \times p_{(q+1)_z} \times \text{terme}_6 \\
 & \left. + 1 \times \text{terme}_7, \right] \tag{A.113}
 \end{aligned}$$

où les termes terme_i correspondent à des sommes sur des triangles du produit de deux fonctions élémentaires ou du produit d'une fonction élémentaire et des données. La valeur de ces termes dépend uniquement de \mathbf{X} , des coordonnées $p = (i, j)$ des pixels et des coordonnées des nœuds du maillage.

Il est donc possible d'utiliser un algorithme rapide en considérant des images pré-calculées associées à chacun des termes non exprimés de l'équation A.113. Dans le calcul du critère, la sommation sur les pixels de l'image peut alors être remplacée par une sommation sur les contours des triangles. De plus, en remplaçant dans l'équation A.113 les fonctions élémentaires pour leur expression, les images pré-calculées obtenues sont indépendantes de la topologie du maillage et des valeurs nodales, ce qui permet d'effectuer les opérations de déformation/simplification de maillage sans avoir besoin de recalculer ces images pré-calculées.

En développant les calculs, on peut montrer que 10 images pré-calculées sont nécessaires pour le calcul du critère.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Abramowitz et I. Stegun. Psi (digamma) function. Dans *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*, Chapitre Gamma function and related functions, page 258. Dover Publications, New-York, 1972. (Cité page 154.)
- [2] C. Alberola-López, J.R. Casar-Corredera, et G. de Miguel-Vela. Object CFAR detection in gamma-distributed textured-background images. *IEE Proc. Vision, Signal and Image Processing*, 146(3) :130–136, Juin 1999. (Cité page 35.)
- [3] H. Amirmehrabi et R. Viswanathan. A New Distributed Constant False Alarm Rate Detector. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 33(1) :85–97, Janvier 1997. (Cité page 94.)
- [4] F. Babich et G. Lombardi. A general Nakagami approximation for the sum of Ricean interferers. *IEE Electronics Letters*, 34(1) :23–24, Janvier 1998. (Cité page 43.)
- [5] M. Basseville et I. V. Nikiforov. Testing between two simple hypotheses. Dans *Detection of Abrupt Changes : Theory and Application*, Chapitre Statistical background and criteria, pages 128–130. Prentice Hall, New Jersey, 1993. (Cité page 25.)
- [6] M. Bern et D. Eppstein. Mesh Generation and Optimal Triangulation. *Computing and Euclidean Geometry*, 2nd. Ed., World Scientific, pages 47–123, 1995. (Cité page 104.)
- [7] N. Bertaux, Y. Frauel, Ph. Réfrégier, et B. Javidi. Speckle removal using a maximum-likelihood technique with isoline gray-level regularization. *Journal of the Optical Society of America A*, 21 :2283–2291, Décembre 2004. (Cité page 105.)
- [8] O. Besson, S. Bidon, et J. Y. Tourneret. Covariance Matrix Estimation With Heterogeneous Samples. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(3) :909–920, Mars 2008. (Cité page 28.)
- [9] A. Bhattacharyya. On a measure of divergence between two statistical populations defined by probability distributions. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 35 :99–109, Novembre 1943. (Cité page 43.)
- [10] S. Bidon, O. Besson, et J. Y. Tourneret. A Bayesian Approach to Adaptive Detection in Nonhomogeneous Environments. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(1) :205–217, Janvier 2008. (Cité page 28.)

- [11] S. Bidon, O. Besson, et J. Y. Tournet. The Adaptive Coherence Estimator is the Generalized Likelihood Ratio Test for a Class of Heterogeneous Environments. *IEEE Signal Processing Letters*, 15 :281–284, 2008. (Cité page 28.)
- [12] S. Blake. OS-CFAR Theory for Multiple Targets and Nonuniform Clutter. *IEEE Transactions on AES*, 24(6) :785–790, Novembre 1988. (Cité page 28.)
- [13] R.S. Blum, S.A. Kassam, et H.V. Poor. Distributed detection with multiple sensors : part II - advanced topics. *Proceedings of the IEEE*, pages 64–79, Janvier 1997. (Cité page 26.)
- [14] N. Boccarda. Fubini’s theorem. Dans *Functional Analysis*, Chapitre Measure and Integration, pages 35–47. Academic Press, Boston, 1990. ISBN 978-0121088101. (Cité page 67.)
- [15] N. Boccarda. Lebesgue’s dominated convergence theorem. Dans *Functional Analysis*, Chapitre Measure and Integration, pages 29–35. Academic Press, Boston, 1990. ISBN 978-0121088101. (Cité page 146.)
- [16] N. Bon. *Détection, imagerie et classification haute résolution de cibles marines à l’aide d’un radar aéroporté en balayage*. PhD thesis, Université de Bretagne Occidentale, ENSIETA, Brest, Décembre 2006. (Cité page 28.)
- [17] I.N. Bronshtein et K.A. Semendyayev. Weierstrass’ criterion for the uniform convergence of series. Dans *Handbook of Mathematics*, Chapitre Differential and integral calculus, page 335. Springer, 1997. (Cité page 148.)
- [18] L. L. Campbell. *Air-to-Air RADAR modes for the CP-140 Maritime Patrol Aircraft*. PhD thesis, Ottawa-Carleton Institute for Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Departement of Systems and Computer Engineering, Carleton University, Ottawa, Canada, 1996. (Cité page 58.)
- [19] C. Chesnaud, Ph. Réfrégier, et V. Boulet. Statistical Region Snake-Based Segmentation Adapted to Different Physical Noise Models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(11) :1145–1157, 1999. (Cité pages 105, 113, 114, 118, 122, 173 et 176.)
- [20] P. G. Ciarlet. Convergence des méthodes de jacobi, de gauss-seidel, de relaxation. Dans *Introduction à l’analyse numérique matricielle et à l’optimisation*, Chapitre Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires, pages 102–109. Dunod, Université Pierre et Marie Curie, 1998. (Cité page 118.)
- [21] P. G. Ciarlet. Description des méthodes de jacobi, de gauss-seidel, de relaxation. Dans *Introduction à l’analyse numérique matricielle et à l’optimisation*, Chapitre Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires, pages 97–102. Dunod, Université Pierre et Marie Curie, 1998. (Cité page 118.)

- [22] M. Ciuc, Ph. Bolon, E. Trouvé, V. Buzuloiu, et J.P. Rudant. Adaptive-neighborhood speckle removal in multi-temporal synthetic aperture radar images. *Applied Optics*, 40 :5954–5966, 2001. (Cité page 59.)
- [23] M. Ciuc, R. M. Rangayyan, T. Zaharia, et V. Buzuloiu. Filtering noise in color images using adaptive-neighborhood statistics. *Journal of Electronic Imaging*, 9 :484–494, 2000. (Cité page 59.)
- [24] T. M. Cover et J. A. Thomas. The halting problem and the noncomputability of kolmogorov complexity. Dans *Elements of Information Theory*, Chapitre Kolmogorov Complexity, pages 482–487. Wiley-interscience, New York, 2006. (Cité page 110.)
- [25] T. M. Cover et J. A. Thomas. Kolmogorov complexity and entropy. Dans *Elements of Information Theory*, Chapitre Kolmogorov Complexity, pages 473–475. Wiley-interscience, New York, 2006. (Cité page 110.)
- [26] J. Darricau. Radars : Concepts et fonctionnalités. Rapport technique, Techniques de l'ingénieur, traité Télécoms, E 6 660, Septembre 1996. (Cité page 7.)
- [27] J. Darricau. Radars : Paramètres de détection. Rapport technique, Techniques de l'ingénieur, traité Télécoms, E 6 655, Septembre 1996. (Cité pages 10 et 22.)
- [28] A. De Maio, A. Farina, et G. Foglia. Target fluctuation models and their application to radar performance prediction. *IEE Proceedings, Radar, Sonar and Navigation*, 151(5) :261–269, Octobre 2004. (Cité page 22.)
- [29] A. Di Vito, G. Galati, et R. Mura. Analysis and Comparison of Two Order Statistics CFAR Systems. *IEE Proceedings F*, 141(2) :109–115, Avril 1994. (Cité page 28.)
- [30] P. Dubois-Fernandez, O.R. du Plessis, D. le Coz, J. Dupas, B. Vazian, X. Dupuis, H. Cantalloube, C. Coulombeix, C. Titin-Schnaider, P. Dreuillet, J.M. Boutry, J.P. Canny, L. Kaisersmertz, J. Peyret, P. Martineau, M. Chanteclerc, L. Pastore, et J.P. Bruyant. The ONERA RAMSES SAR system. Dans *IGARSS, Toronto, Canada*, 2002. (Cité pages 98 et 99.)
- [31] R. O. Duda et P. E. Hart. Maximum likelihood estimation. Dans *Pattern classification and scene analysis*, Chapitre Parameter estimation and supervised learning, pages 44–49. John Wiley and sons, Inc., New York, 1973. (Cité page 80.)
- [32] M. B. El Mashade. Analysis of the Censored-Mean Level CFAR Processor in Multipletarget and Nonuniform Clutter. *IEE Proc. RADAR, SONAR, Navig.*, 142(5) :259–266, Octobre 1995. (Cité page 28.)
- [33] M. B. El Mashade. Monopulse Detection Analysis of the Trimmed Mean CFAR Processor in Nonhomogeneous Situations. *IEE Proc-RADAR, SONAR, Navig.*, 143(2) :87–94, Avril 1996. (Cité page 28.)

- [34] F. Elisei, G. Bailly, M. Odisio, et P. Badin. Clones parlants 3D vidéo réalistes : Application à l'interprétation de FAP MPEG-4. *Journées CO-RESA, Dijon, France*, Décembre 2001. (Cité page 105.)
- [35] M. Evans, N. Hastings, et B. Peacock. Lognormal distribution. Dans *Statistical Distributions*, Chapitre Lognormal Distribution, page 102. Wiley Series in Probability and Statistics, second édition, 1993. (Cité page 155.)
- [36] M. Evans, N. Hastings, et B. Peacock. Variate relationships. Dans *Statistical Distributions*, Chapitre Gamma Distribution, page 77. Wiley Series in Probability and Statistics, second édition, 1993. (Cité page 35.)
- [37] M. Figueiredo, J. Leitão, et A. K. Jain. Unsupervised contour representation and estimation using B-splines and a minimum description length criterion. *IEEE Trans. Image Processing*, 9(6) :1075–1087, jun 2000. (Cité page 109.)
- [38] H.M. Finn et P.S. Johnson. Adaptive detection mode with treshold control as a function of spatially sampled clutter estimation. *RCA Review*, 29(3) :414–464, 1968. (Cité pages 27 et 35.)
- [39] F. Galland, N. Bertaux, et Ph. Réfrégier. Minimum Description Length Synthetic Aperture Radar Image Segmentation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(9), Septembre 2003. (Cité pages 58, 109, 114, 166 et 176.)
- [40] F. Galland et Ph. Réfrégier. Information theory based snake adapted to inhomogeneous intensity variations. *Optics Letters*, 32 :2514–2516, 2007. (Cité pages 95, 113 et 173.)
- [41] P.P. Gandhi et S.A. Kassam. Analysis of CFAR processors in nonhomogeneous background. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 24(4) :427–445, Juillet 1988. (Cité pages 26, 27, 28, 36, 70, 125 et 126.)
- [42] P.P. Gandhi et S.A. Kassam. Optimality of the Cell Averaging CFAR detector. *IEEE Transactions on Information Theory*, 40(4) :1226–1228, Juillet 1994. (Cité pages 27 et 34.)
- [43] M.A. Garcia et B.X. Vintimilla. Accelerations of filtering and enhancement operations through geometric processing of gray-level images. *IEEE International Conference on Image Processing, Vancouver, Canada*, 1 : 97–100, Septembre 2000. (Cité page 105.)
- [44] O. Germain et Ph. Réfrégier. Statistical active grid for segmentation refinement. *Pattern Recognition Letters*, 22 :1125–1132, Février 2001. (Cité pages 105 et 176.)
- [45] D. Goldberg. What every computer scientist should know about floating-point arithmetic. *Issue of Computing Surveys*, pages 171–264, Mars 1991. (Cité page 150.)

- [46] R. Gordon et R.M. Rangayyan. Feature enhancement of film mammograms using fixed and adaptive neighborhoods. *Applied Optics*, 23(4) : 560–564, 1984. (Cité page 59.)
- [47] F. Goudail, Ph. Réfrégier, et G. Delyon. Bhattacharyya distance as a contrast parameter for statistical processing of noisy optical images. *Journal of the Optical Society of America A*, 21(7) :1231–1240, 2004. (Cité page 43.)
- [48] I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik. The beta function. Dans *Table of Integrals Series and Products, Sixth Edition*, Chapitre Euler's Integrals of the First and Second Kinds, page 899. Academic Press, New York, 2000. (Cité page 143.)
- [49] I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik. Combinations of exponentials and rational functions. Dans *Table of Integrals Series and Products, Sixth Edition*, Chapitre Exponential functions, page 336. Academic Press, New York, 2000. (Cité page 158.)
- [50] I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik. Differentiation of matrices. Dans *Table of Integrals Series and Products, Sixth Edition*, Chapitre Matrices and related results, pages 1063–1064. Academic Press, New York, 2000. (Cité page 174.)
- [51] I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik. Numerical series and infinite products. Dans *Table of Integrals Series and Products, Sixth Edition*, Chapitre Functional series, page 15. Academic Press, New York, 2000. (Cité page 148.)
- [52] I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik. *Table of Integrals Series and Products, Sixth Edition*. Academic Press, New York, 2000. (Cité page 154.)
- [53] V.G. Hansen et J.H. Sawyer. Detectability Loss Due to "Greatest Of" Selection in a Cell-Averaging CFAR. *IEEE Transactions on AES*, 16 :115–118, 1980. (Cité page 27.)
- [54] S. D. Himonas et M. Barkat. Automatic Censored CFAR Detection for Nonhomogeneous Environments. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 28(1) :286–304, Janvier 1992. (Cité page 28.)
- [55] J.A. Holm, J.R. and Ritcey. The Optimality of the Censored Mean-Level Detector. *IEEE Transactions on Information Theory*, 37(1) :206–209, 1991. (Cité page 28.)
- [56] H. Hoppe. Progressive meshes. *Special Interest Group on Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH)*, pages 99–108, 1996. (Cité page 107.)
- [57] H. Hoppe. Site internet de hugues hoppe, 2008. <http://research.microsoft.com/hoppe/>. (Cité page 107.)
- [58] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, J. McDonald, et W. Stuetzle. Mesh optimization. *Special Interest Group on Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH)*, pages 19–26, 1993. (Cité pages 107 et 172.)

- [59] J. B. Johnson. Thermal agitation of electricity in conductors. *Physical Review*, 32(1) :97–109, Jul 1928. (Cité page 12.)
- [60] W. Kahan. Site internet du Professeur William Kahan, 2008. <http://www.cs.berkeley.edu/~wkahan/>. (Cité page 150.)
- [61] T. Kanungo, B. Dom, W. Niblack, et D. Steele. A fast algorithm for MDL-based multi-band image segmentation. *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 609–616, Jun 1994. (Cité pages 95 et 109.)
- [62] H.S. Kim. *Adaptive Target Detection in RADAR Imaging*. PhD thesis, University of Michigan, 2001. (Cité page 25.)
- [63] A.D. Lanterman. Schwarz, Wallace, and Rissanen : Interwining Themes in Theories of Model Order Estimation. *International Statistical Review*, 69(2) :185–212, Août 2001. (Cité page 94.)
- [64] F. Le Chevalier. The active radar and sonar signal. Dans *Principles of RADAR and SONAR Signal Processing*, Chapitre Radar and Sonar, pages 4–8. Artech House Publishers, Thales Airborne Systems, 2002. (Cité pages 7 et 8.)
- [65] F. Le Chevalier. Range and velocity ambiguities. Dans *Principles of RADAR and SONAR Signal Processing*, Chapitre Application to RADAR, pages 69–70. Artech House Publishers, Thales Airborne Systems, 2002. (Cité page 20.)
- [66] F. Le Chevalier. Reception of a pulse train. Dans *Principles of RADAR and SONAR Signal Processing*, Chapitre Application to RADAR, pages 66–69. Artech House Publishers, Thales Airborne Systems, 2002. (Cité page 16.)
- [67] Y.G. Leclerc. Constructing simple stable descriptions for image partitioning. *Computer Vision*, 3 :73–102, 1989. (Cité page 109.)
- [68] E. L. Lehmann. On likelihood ratio tests. *2nd Lehmann Symposium - Optimality*, Institute of Mathematical Statistics, 49 :1–8, 2006. (Cité page 26.)
- [69] E.L. Lehmann. The general decision problem. Dans *Testing Statistical Hypotheses*, Chapitre The General Decision Problem, pages 1–29. Wiley publications in statistics, University of California, Berkeley, 1959. (Cité page 25.)
- [70] E.L. Lehmann. Invariance. Dans *Testing Statistical Hypotheses*, Chapitre Invariance, pages 213–264. Wiley publications in statistics, University of California, Berkeley, 1959. (Cité page 25.)
- [71] E.L. Lehmann. The minimax principle. Dans *Testing Statistical Hypotheses*, Chapitre The Minimax Principle, pages 326–347. Wiley publications in statistics, University of California, Berkeley, 1959. (Cité page 25.)

- [72] E.L. Lehmann. Uniformly most powerful tests. Dans *Testing Statistical Hypotheses*, Chapitre Uniformly Most Powerful Tests, pages 60–124. Wiley publications in statistics, University of California, Berkeley, 1959. (Cité page 25.)
- [73] N. Levanon. Detection Loss Due to Interfering Targets in Ordered Statistic CFAR. *IEEE Transactions on AES*, pages 678–681, Novembre 1988. (Cité page 28.)
- [74] N. Levanon et M. Shor. Order Statistic CFAR for Weibull Background. *IEE Proceedings, F*, 137(3) :157–162, Juin 1990. (Cité page 28.)
- [75] J.P.M.G. Linnartz. *Effects of fading and interference in narrowband land-mobile networks*. PhD thesis, Technische Universiteit Delft, The Netherlands, Décembre 1991. (Cité page 43.)
- [76] J.C. MacKay. Uniform sampling. Dans *Uniform Theory, Inference and Learning Algorithms*, Chapitre Monte Carlo Methods, pages 357–361. Cambridge University Press, 2007. (Cité pages 69 et 124.)
- [77] I. Mc Connell et C. Oliver. A comparison of segmentation methods with standard CFAR for point target detection. *SAR Image Analysis, Modelling and Techniques*, Proc. SPIE 3497 :76–87, 1998. (Cité pages 28 et 58.)
- [78] I. Mc Connell et C. Oliver. Segmentation-based target detection in SAR. *SAR Image Analysis, Modelling and Techniques II*, Proc. SPIE 3869 :45–54, 1999. (Cité pages 28 et 58.)
- [79] J. Montagnat, H. Delingette, et N. Ayache. A review of deformable surfaces : topology, geometry and deformation. *Image and Vision Computing*, 19(14) :1023–1040, Décembre 2001. (Cité pages 106 et 109.)
- [80] P.G. Moschopoulos. The distribution of the sum of independent gamma random variables. *Ann. Inst. Statist. Math. (Part A)*, 37 :541–544, 1985. (Cité pages 37, 142, 146 et 147.)
- [81] J.M. Muller. Site internet de Jean-Michel Muller, 2007. <http://perso.ens-lyon.fr/jean-michel.muller/>. (Cité page 150.)
- [82] D.T. Nagle et J. Saniie. Performance Analysis of Linearly Combined Order Statistic CFAR Detectors. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 31(2) :522–533, Avril 1995. (Cité page 94.)
- [83] U. Ndili, R. Nowak, R. Baraniuk, H. Choi, et M. Figueiredo. Coding-theoretic approach to segmentation and a robust CFAR detector for LADAR images. *Proceedings of the SPIE 15th Annual International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation, and Controls. Algorithms for Synthetic Aperture Radar Imagery VIII*, SPIE, 4379 :86–94, Avril 2001. (Cité pages 28 et 58.)

- [84] J. Neyman et E. S. Pearson. On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character.*, 231 :289–337, 1933. (Cité page 25.)
- [85] R. Nitzberg. Analysis of the Arithmetic Mean CFAR Normalizer for Fluctuating Targets. *IEEE Transactions on AES*, 1 :44–47, 1978. (Cité pages 27, 35 et 36.)
- [86] H. Nyquist. Thermal agitation of electric charge in conductors. *Physical Review*, 32(1) :110–113, Jul 1928. (Cité page 12.)
- [87] I. Ozgunes, P. P. Gandhi, et S. A. Kassam. A Variably Trimmed Mean CFAR Radar Detector. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 28(4), Octobre 1992. (Cité page 28.)
- [88] A. Papoulis. One function of two random variables. Dans *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes - Third Edition*, Chapitre Two random variables, page 138. WCB Mc Graw-Hill, Polytechnic University, 1991. (Cité pages 35, 67, 83, 142 et 157.)
- [89] R. B. Paranjape, T. F. Rabie, et R. M. Rangayyan. Image restoration by adaptive-neighborhood noise subtraction. *Applied Optics*, 33(14) :2861–2869, Mai 1994. (Cité page 59.)
- [90] H.V. Poor. *An Introduction to Signal Detection and Estimation - Second Edition*. Springer, Department of Electrical Engineering, Princeton University, Princeton, USA, 1998. (Cité page 24.)
- [91] D. Porquet. *Rendu en temps réel de scènes complexes*. PhD thesis, Université de Limoge, Novembre 2004. (Cité page 107.)
- [92] L. A. Prastitis, J. Frank, et S. D. Himonas. A New CFAR Processor In Nonhomogeneous Background and Multiple Target Situations. *IEEE*, 1993. (Cité page 28.)
- [93] R. M. Rangayyan, M. Ciuc, et F. Faghieh. Adaptive-neighborhood filtering of images corrupted by signal-dependent noise. *Applied Optics*, 37 (20) :4477–4487, Juillet 1998. (Cité page 59.)
- [94] Ph. Réfrégier. Filtrage adapté. Dans *Théorie du signal, signal information fluctuations*, Chapitre Filtrage, pages 126–133. Masson, Paris, 1993. (Cité page 15.)
- [95] Ph. Réfrégier. Phénomène de gibbs. Dans *Théorie du signal, signal information fluctuations*, Chapitre Échantillonnage des signaux, page 61. Masson, Paris, 1993. (Cité page 16.)
- [96] Ph. Réfrégier. Principe du maximum d'entropie. Dans *Théorie du signal, signal information fluctuations*, Chapitre Maximum d'entropie, pages 212–220. Masson, Paris, 1993. (Cité page 166.)

- [97] Ph. Réfrégier. Estimation d'une efficacité de détection. Dans *Théorie du bruit et applications en physique*, Chapitre Exemples d'estimation en physique, pages 232–234. Lavoisier, Paris, 2002. (Cité pages 87 et 124.)
- [98] Ph. Réfrégier. Information de shannon. Dans *Théorie du bruit et applications en physique*, Chapitre Informations et fluctuations, pages 119–121. Lavoisier, Paris, 2002. (Cité page 110.)
- [99] Ph. Réfrégier. Un modèle simple du « speckle ». Dans *Théorie du bruit et applications en physique*, Chapitre Théorèmes « limites » et fluctuations, pages 94–102. Lavoisier, Paris, 2002. (Cité pages 11 et 16.)
- [100] J.T. Richard et G.M. Dillard. Adaptive Detection Algorithms for Multiple Target Situations. *IEEE Transactions on AES*, 4 :338–343, 1977. (Cité page 28.)
- [101] J. Rissanen. Modeling by shortest data description. *Automatica*, 14 : 465–471, 1978. (Cité page 109.)
- [102] J. Rissanen. *Stochastic Complexity in Statistical Inquiry*, volume 15 de *Series in Computer Science*. World Scientific, Singapore, 1989. (Cité pages 94, 104, 109, 110, 111, 112 et 166.)
- [103] J.J. Rissanen. A universal prior for integers and estimation by minimum description length. *The Annals of Statistics*, 11 :416–431, 1983. (Cité pages 98 et 112.)
- [104] J.A. Ritcey. Performance Analysis of the Censored Mean-Level Detector. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems*, 22(4) :443–454, Juillet 1986. (Cité page 28.)
- [105] H. Rohling. RADAR CFAR Tresholding in Clutter and Multiple Target Situations. *IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems*, 19(4) :608–621, 1983. (Cité pages 27 et 125.)
- [106] H. Rohling. Some RADAR topics : waveform design, range CFAR and target recognition. *NATO, Advanced Study Institute : Advances in sensing with security applications (Il Ciocco, Italy)*, Juillet 15-30, 2005. (Cité page 26.)
- [107] O. Ruch et Ph. Réfrégier. Minimal-complexity segmentation with a polygonal snake adapted to different optical noise models. *Opt. Lett.*, 26 (13) :977–979, 2001. (Cité page 109.)
- [108] L. Scharf, S. Kraut, et M. McCloud. A review of matched and adaptive subspace detectors. *Proc. Symp. on Adaptive Systems for Signal Process. Commun. and Control, Lake Louise, Alta., Canada*, pages 82–86, Octobre 2000. (Cité page 25.)
- [109] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Tech. J.*, 27 :379– 423 ; 623 – 656, 1948. (Cité page 110.)

- [110] D. A. Shnidman. Radar detection probabilities and their calculation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 31(3) :928–950, Juillet 1995. (Cité page 22.)
- [111] D. A. Shnidman. Expanded Swerling target models. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 39(3) :1059–1069, Juillet 2003. (Cité page 22.)
- [112] D. A. Shnidman. Radar Detection in Clutter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 41(3) :1056–1067, Juillet 2005. (Cité page 22.)
- [113] M. Shor et N. Levanon. Performances of Order Statistics CFAR. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 27(2), Mars 1991. (Cité page 28.)
- [114] G.W. Stimson. Doppler ambiguities. Dans *Introduction to Airborne Radar, second edition*, Chapitre Effect of Range and Doppler Ambiguities on Ground Clutter, pages 314–316. Scitech Publishing, Inc., 1998. (Cité page 20.)
- [115] G.W. Stimson. Postdetection integration. Dans *Introduction to Airborne Radar, second edition*, Chapitre Detection range, pages 131–133. Scitech Publishing, Inc., 1998. (Cité page 18.)
- [116] G.W. Stimson. Selecting the optimum frequency. Dans *Introduction to Airborne Radar, second edition*, Chapitre Choice of Radio Frequency, pages 88–90. Scitech Publishing, Inc., 1998. (Cité pages 5 et 7.)
- [117] P. Swerling. Probability of Detection for Fluctuating Targets. *IEEE Transactions on Information Theory*, 6(2) :269–308, Avril 1960. (Cité pages 22 et 27.)
- [118] P. Swerling. Detection of RADAR echoes in noise revisited. *IEEE Transactions on Information Theory*, 12(3) :348–361, Juillet 1966. (Cité page 22.)
- [119] P. Swerling. RADAR probability of detection for some additional fluctuating target cases. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems*, 33(2) :698–709, Avril 1997. (Cité page 22.)
- [120] A.M. Tekalp et J. Ostermann. Face and 2-D mesh animation in MPEG-4. *Signal Processing : Image Communication*, 15 :387–421, 2000. (Cité page 105.)
- [121] J. Tohka. *Global optimization-based deformable meshes for surface extraction from medical images*. PhD thesis, Tampere University of Technology, Finland, Décembre 2003. (Cité page 109.)
- [122] J.-Y. Tourneret, A. Ferrari, F. Goudail, et Ph. Réfrégier. A UMP unbiased test for target detection in active coherent images. *Fourth International Conference on Physics in Signal and Image Processing, PSIP 2005, Toulouse*, pages 69–74, 2005. (Cité page 25.)

- [123] M.K. ünér et P.K. Varshney. Distributed CFAR Detection in Homogeneous and Nonhomogeneous Backgrounds. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 32(1) :84–97, Janvier 1996. (Cité page 94.)
- [124] H.L. Van Trees. Decision criteria. Dans *Detection, Estimation, and Modulation Theory - Part I. Detection, Estimation, and Linear Modulation Theory*, Chapitre Classical Detection and Estimation Theory, pages 23–36. Wiley-Interscience, George Mason University, 2001. (Cité pages 24 et 25.)
- [125] H.L. Van Trees. Detection of signals in additive white gaussian noise. Dans *Detection, Estimation, and Modulation Theory - Part I. Detection, Estimation, and Linear Modulation Theory*, Chapitre Detection of Signals - Estimation of Signal Parameters, pages 247–253. Wiley-Interscience, George Mason University, 2001. (Cité page 15.)
- [126] G. Vasile, E. Trouvé, J.S. Lee, et V. Buzuloiu. General adaptive-neighborhood technique for improving synthetic aperture radar interferometric coherence estimation. *Journal of the Optical Society of America A*, 21(8) :1455–1464, Août 2004. (Cité page 59.)
- [127] G. Vasile, E. Trouvé, J.S. Lee, et V. Buzuloiu. Intensity-Driven Adaptive-Neighborhood Technique for Polarimetric and Interferometric SAR Parameters Estimation. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 44(6) :1609–1621, Juin 2006. (Cité page 59.)
- [128] B.X. Vintimilla Burgos. *Approximation and geometric processing of digital images with adaptive triangular meshes*. PhD thesis, Universidad Politécnic de Cataluña, Catalunya, Octobre 2000. (Cité page 109.)
- [129] P. Weber et S. Haykin. Ordered Statistic CFAR Processing for Two-Parameter Distribution with Variable Skewness. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Ssystems*, 21(6) :819–821, Novembre 1985. (Cité page 28.)
- [130] M. Weiss. Analysis of Some Modified Cell-Averaging CFAR Processors in Multiple-Target Situations. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Ssystems*, 18 :102–114, 1982. (Cité page 27.)
- [131] He You. Performance of Some Generalized Modified Order Statistics CFAR Detectors with Automatic Censoring Technique in Multiple Target Situations. *IEE Proceedings F*, 131(4) :205–212, 1994. (Cité page 28.)
- [132] M.L. Zani. La mesure de rugosité ? Quelques normes... et plusieurs dizaines de paramètres. *Mesures*, 758 :59–63, Octobre 2003. (Cité page 43.)

NOTATIONS

X_n	un scalaire
θ ou $\underline{\theta}$	un vecteur
M ou \underline{M}	une matrice
$n = (i_n, j_n)$	les coordonnées du pixel test
ω_n	la région de référence
$N_n = \text{card}(\omega_n)$	le nombre de pixels dans la régions de référence
$E[X]$	l'espérance mathématique de X
X^+	le transposé conjugué de X
\mathcal{P}_d	la probabilité de détection
\mathcal{P}_{fa}	la probabilité de fausse alarme
$\mathcal{B}(a, b)$	la fonction Beta

$$\mathcal{B}(a, b) \triangleq \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt$$

$\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(x, a, b)$	la fonction Beta incomplète
--------------------------------------	-----------------------------

$$\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(x, a, b) \triangleq \int_0^x u^{a-1}(1-u)^{b-1} du$$

$\mathcal{I}(x, a, b)$	la fonction Beta incomplète régularisée
------------------------	---

$$\mathcal{I}(x, a, b) \triangleq \frac{\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(x, a, b)}{\mathcal{B}(a, b)}$$

$\psi(x)$	la fonction Digamma
-----------	---------------------

$$\psi(x) \triangleq \frac{d}{dx} \ln [\Gamma(x)]$$

$\Gamma(x)$	la fonction gamma
-------------	-------------------

$$\Gamma(x) \triangleq \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

$\Gamma(x, a)$	la fonction gamma incomplète
----------------	------------------------------

$$\Gamma(x, a) \triangleq \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$$

$(a)_k$	le symbole de Pochhammer
---------	--------------------------

$$(a)_k \triangleq a(a+1) \cdots (a+k-1), \quad (a)_0 \triangleq 1$$

$\zeta(s, \alpha)$	la fonction Zeta de Hurwitz
--------------------	-----------------------------

$$\zeta(s, \alpha) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} (k + \alpha)^{-s}$$

ACRONYMES

ADT	Average Detection Treshold
BFR	Basse Fréquence de Répétition
CA-CFAR	Cell-Averaging Constant False Alarm Rate
COR	Caractéristiques Opérationnelle de Réception
ddp	densité de probabilité
DSAS	Détecteur associé à la Surfactive Active Statistique
DSR	Détecteur associé à la sélection de région
GLRT	Generalized Likelihood Ratio Test, test du rapport des vraisemblances généralisées
GO-CFAR	Greatest Of Constant False Alarm Rate
HFR	Haute Fréquence de Répétition
LQ-CFAR	Log-Quadratic Constant False Alarm Rate
LRT	Likelihood Ratio Test, test du rapport des vraisemblances
MFR	Moyenne Fréquence de Répétition
MV	Maximum de Vraisemblance
OS-CFAR	Ordered Statistics Constant False Alarm Rate
RADAR	Radio Detection And Ranging
RSB	Rapport Signal à Bruit (SNR)
RSO	RADAR à Synthèse d'Ouverture
SAS	Surface Active Statistique
SAR	Synthetic Aperture RADAR
SER	Section Efficace Radar
SM	Sélection de modèle
SNR	Signal to Noise Ratio (RSB)
SO-CFAR	Smallest Of Constant False Alarm Rate
TFAC	Taux de Fausse Alarme Constant
TM-CFAR	Trimmed Mean Constant False Alarm Rate
UMP	Uniformly Most Powerful
v.a.	variable aléatoire

Ce document a été préparé à l'aide de l'éditeur de texte GNU Emacs et du logiciel de composition typographique L^AT_EX 2_ε.

Titre Détection sur données fortement inhomogènes et application aux RADAR aéroportés

Résumé La détection à taux de fausse alarme constant de cibles ponctuelles dans des données fortement inhomogènes est un problème difficile. En effet, les techniques de détection standard sont mises en défaut et ne permettent pas une régulation correcte du taux de fausse alarme. Dans ce manuscrit, nous présentons trois nouvelles solutions à ce problème. Les méthodes développées sont appliquées sur des données qui correspondent à celles de RADAR aéroportés et plus exactement sur des cartes distance/vitesse. Ces trois approches différentes sont comparées par simulation numérique aux méthodes de détection classiques. Dans le cadre du modèle étudié, elles permettent une amélioration du contrôle du taux de fausse alarme par rapport aux techniques existantes et présentent de meilleures capacités de détection.

Title Detection in strongly nonhomogeneous data and application to airborne RADAR

Abstract The constant false alarm rate detection of punctual targets embedded in strongly nonhomogeneous data is a difficult task. Indeed, the standard detection techniques do not allow one to get an appropriate regulation of the false alarm rate. In this manuscript, we present three new solutions for this issue. The developed methods are applied on simulated range/doppler maps that arise on the airborne RADAR context. These three approaches are compared by numerical simulations to the classical detection methods. Compared to the standard techniques and within the scope of the studied model, the proposed solutions allow one to get a better false alarm rate regulation and better detection capacities.

Discipline Traitement des Images

Mots-clés RADAR, Détection, Taux de Fausse Alarme Constant, Fond inhomogène, Bruit Gamma