Activités interdisciplinaires en premier cycle à propos d'un mathématicien français du 16ème siècle: François VIETE

Jean-Paul GUICHARD
Professeur de Mathématiques
Collège Mendès France
Parthenay
I.R.E.M. de Poitiers

et

Jean-Pierre SICRE
Professeur de Mathématiques
Collège Tiraqueau
Fontenay-le-Comte
I.R.E.M. de Nantes

ARMOIRIES.—FRANÇOIS VIÈTE, membre du conseil privé du roi, portait « d'argent au chevron d'azur » accosté de 6 étoiles de..., accompagné en chef d'un » soleil de..., et en pointe d'un lys de jardin arrosé » par une main dextre issant d'une nuée au côté » senestre du chevron. » .

Cette dernière figure fait allusion aux services rendus par le célèbre mathématicien au roi de Navarre à l'occasion de la découverte du chiffre des correspondances espagnoles. Quant au soleil et aux étoiles, ils rappellent le système planétaire connu au XVIe siècle.

I- Objectifs

Les principaux objectifs que nous avons poursuivis à travers les travaux présentés dans cet article sont les suivants:
- découvrir et faire découvrir un mathématicien de notre région, important mais aujourd'hui oublié;
- intéresser les divers élèves par une approche interdisciplinaire;
- redonner une dimension humaine à la science à partir d'une approche historique à propos du calcul algébrique, au programme de la classe de quatrième, et dont VIETE fut le fondateur;
- faire sentir que les mathématiques n'ont pas toujours été ce qu'elles sont aujourd'hui, et inversement que des sujets étudiés en classe le sont depuis longtemps;
- travailler en cours de mathématiques sur de **vrais** problèmes: problèmes de mathématiciens et qui sont à l'origine, dans le cas présent, du calcul littéral;
- réaliser et faire réaliser des documents réutilisables par d'autres: cet article en fait partie.

L'atteinte de ce dernier objectif constitue pour nous l'essentiel de l'évaluation du travail fait.

II- Présentation générale

Cette activité, dont le thème était François VIETE, a été menée durant l'année scolaire 1985-1986 par deux classes de quatrième, et s'est poursuivie en troisième durant l'année 1986-1987. Ces deux classes, d'établissements différents, avaient 26 et 29 élèves de 14-15 ans, dont un certain nombre ayant choisi l'option latin.

Le travail, étalé sur les deux années scolaires, a été effectué en collaboration avec les professeurs de dessin, histoire et géographie, latin, français et travail manuel auxquels se sont jointes les documentalistes des deux collèges. Il s'est déroulé dans le cadre d'un P.A.E. Les Projets d'Action Educative de ce type sont destinés à enrichir le travail de la classe. Ils doivent rester cohérents avec les programmes et les contenus, et permettre de traiter un thème à travers plusieurs disciplines. Par les méthodes diversifiées et les réalisations qu'ils impliquent, tous les élèves peuvent jouer un rôle actif. L'acceptation d'un tel projet est soumis à la constitution d'un dossier (comprenant objectifs, participants, activités et budget) et à l'approbation d'une commission académique de choix. Une fois accepté, le projet peut se réaliser grâce à l'attribution de quelques heures supplémentaires pour les enseignants et à l'utilisation d'une certaine somme d'argent permettant des achats divers (ici, photocopies, livres, papeterie, panneaux pour l'exposition, ...) et des déplacements.

III- Les réalisations

Elles sont de trois ordres:
- des dossiers documentaires;
- une exposition sur le thème "François VIETE et la Renaissance";
- une bande dessinée sur la vie de François VIETE.

Les dossiers et l'exposition portent sur les thèmes suivants: l'architecture, la sculpture, la musique, la peinture, la calligraphie, la vie et la géographie au 16ème siècle; Fontenay-le-Comte au 16ème siècle; les contemporains de VIETE à Fontenay, la vie de VIETE et son œuvre.

1.- Les dossiers

Chaque dossier est pris en charge par un groupe d'élèves. Il est établi soit au C.D.I. (Centre de Documentation et d'Information) avec l'aide de la documentaliste, soit à partir de travaux faits en classe; c'est par exemple le cas de l'œuvre de VIETE étudiée en mathématiques, de l'architecture et de la peinture étudiées en cours de dessin ... Un travail de documentation, sous la direction d'un professeur d'histoire et géographie, mené par les élèves aux archives départementales de Niort, a aidé à la constitution de ces dossiers. En illustration, des extraits de quatre dossiers: les deux premiers sont des pages de couverture. les tâches du second et troisième sont dues au "vieillissement" à la flamme fait par les élèves.

2.- L'exposition

Elle a été réalisée, hors des heures de cours, à partir des dossiers. Elle comporte 38 panneaux, comme ceux qui illustrent la page, et elle est accompagnée d'une documentation sur le travail fait en cours de mathématiques autour de l'œuvre de VIETE (voir le paragraphe suivant). L'exposition est constituée de panneaux doubles en bois (réalisés par les élèves en éducation manuelle et technique) qui peuvent se poser sur une table. Cette exposition sera installée dans divers établissements scolaires de la région, ainsi que dans des lieux tous publics (châteaux, centres d'actions culturelles, ...) le premier étant le château de la Citardière en Vendée du 1er juillet au 15 septembre 1987.

3.- La bande dessinée

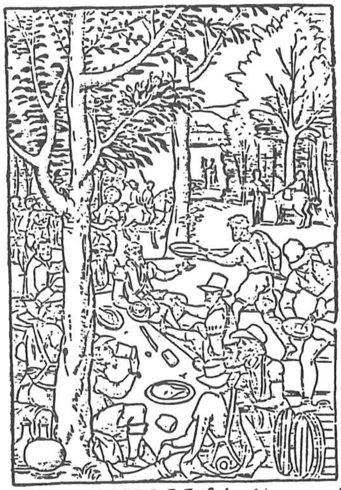
Elle a été réalisée en cours de dessin. Le groupe chargé du dossier "Vie de VIETE" a réalisé une triple chronologie: vie de VIETE, événements historiques, événements culturels. A partir de celle-ci, tous les élèves ont fait une rédaction qui a servi de scénario pour la bande dessinée. La classe a été divisée en huit groupes qui prenaient en charge une page de la bande dessinée. La bande dessinée se termine par quelques mots sur les apports importants de VIETE dans l'histoire des mathématiques. Elle est en vente au prix de 10 F. Pour tous renseignements sur l'exposition ou pour se procurer la bande dessinée s'adresser à Jean-Pierre SICRE - Collège Tiraqueau - Charzais - 85200 Fontenay-le-Comte.

Thirez Jérome [redacted] Jean-François Verdon

JAQVES DV FOVILLOVX. 81

Du lieu ou se doyt faire l'assemblee, & comme elle se doyt faire.

CHAP. 31.

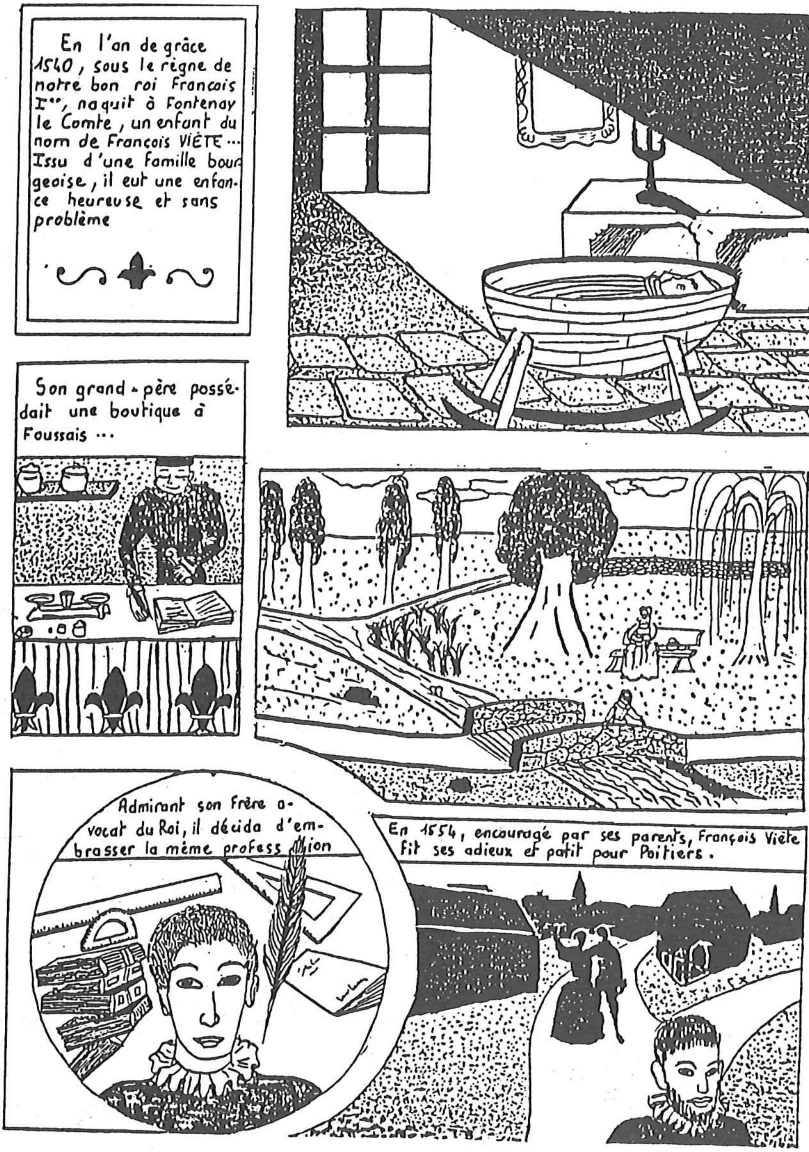


L'ASSEMBLEE se doyt faire en quelque beau lieu, soubz des arbres, aupres d'une fontaine ou ruisseau, la ou les Veneurs se doyuent tous rendre, pour faire leur rapport. Ce pendant le Sommelier doyt

Page de la Vénerie, par Jacques du Fouilloux. Poitiers. De Marnef et Bouchet (vers 1561).

vous présentent :

La France à l'époque de Viete
(1560-1603)


En l'an de grâce 1540, sous le règne de notre bon roi François Ier, naquit à Fontenay le Comte, un enfant du nom de François VIÈTE ... Issu d'une famille bourgeoise, il eut une enfance heureuse et sans problème
Son grand-père possédait une boutique à Foussais ...
Admirant son frère avocat du Roi, il décida d'embrasser la même profession
En 1554, encouragé par ses parents, François Viète fit ses adieux et patit pour Poitiers.


A l'appel d'Henri IV, Viète découvre le code secret utilisé par les Espagnols dans leurs messages
Henri IV envoie son écuyer chercher François VIÈTE
Viète résoud l'équation qu'Adrianus Romanus avait lancée en défi à tous les mathématiciens. Henri IV le Félicite.

IV- Dans le cours de Mathématiques

Voici les matériaux tirés de l'œuvre de VIETE que nous avons pu intégrer à notre cours de mathématiques de la classe de quatrième.

A - Le calcul algébrique: Introduction à l'Art Analytique

1/ Les règles des puissances (Chap. III.3. - Chap IV - Règle III [1])

Ces textes latins, compréhensibles même sans avoir fait de latin, permettent d'apprécier la notation actuelle et de faire fonctionner les règles sur les puissances: travail plus efficace que des exercices didactiques du type "calculer $x^5 \times x^3$" car il force à revenir à la définition de la puissance.

1- Notations des puissances:

Latus,seu Radix.
2 Quadratum.
3 Cubus.
4 Quadrato-quadratum.
5 Quadrato-cubus.
6 Cubo-cubus.
7 Quadrato-quadrato-cubus.

- Les nombres 2, 3, 4, ... indiquent la puissance
- A côté du nombre se trouve: le nom de cette puissance

Remplis le tableau suivant:

	traduction littérale	Justification du nom
x^2		
x^3		
x^4		
x^5		
x^6		

2- Opérations sur les puissances:

Latus in se facit Quadratum.
Latus in Quadratum facit Cubum.
Latus in Cubum facit Quadrato-quadratum.
Latus in Quadrato-quadratum,facit Quadrato-cubum.
Latus in Quadrato-cubum,facit Cubo-cubum.

Et permutatim, id est Quadratum in latus facit Cubū. Cubus in latus, facit Quadrato-quadratum &c. Rursus,

Quadratum in se facit Quadrato-quadratum.
Quadratum in Cubum, facit Quadrato-cubum.
Quadratum in Quadrato-quadratum, facit Cubo-cubum.

et permutatim. Rursus,

Cubus in se facit Cubo-cubum.
Cubus in Quadrato-quadratum, facit Quadrato quadrato-cubum.
Cubus in Quadrato-cubum, facit Quadrato-cubo-cubum.
Cubus in Cubo-cubum, facit Cubo-cubo-cubum.

et permutatim, eóque deinceps ordine.

Traduis chaque proposition et donne à côté la traduction moderne (avec des lettres). Fais un tableau.

Voici quelques travaux d'élèves sur le sujet.

1)

	traduction littérale	Justification du nom
x^2	carré	$x^2 = x \times x$ (côtés d'un carré)
x^3	cube	$x^3 = x \times x \times x$ (arêtes d'un cube)
x^4	carré carré	$x^2 \times x^2 = x^4$
x^5	carré cube	$x^2 \times x^3 = x^5$
x^6	cube cube	$x^3 \times x^3 = x^6$.

2)

* Le côté fois lui-même fait le carré
* Le côté fois le carré fait le cube
* Le côté fois le cube fait le carré carré
* Le côté fois le carré carré fait le carré cube
* Le côté fois le carré cube fait le cube cube
* Et réciproquement, le carré fois le côté fait le cube
  le cube fois le coté fait le carré carré
* Le carré fois lui-même fait le carré carré
* Le carré fois le cube fait le carré cube
* Le carré fois le carré carré fait le cube cube
  et réciproquement
* Le cube fois lui-même fait le cube cube
* Le cube fois le carré carré fait le carré carré cube
* Le cube fois le carré cube fait le carré cube cube
* Le cube fois le cube cube fait le cube cube cube

3)

$x^2 = x \times x$
$x^3 = x \times x^2$
$x^4 = x \times x^3 = x^2 \times x^2$
$x^5 = x \times x^4 = x^2 \times x^3$
$x^6 = x \times x^5 = x^3 \times x^3$
$x^3 = x^2 \times x$
$x^4 = x^3 \times x$
$x^2 \times x^2 = x^4$
$x^2 \times x^3 = x^5$
$x^2 \times x^4 = x^6$

$x^3 \times x^3 = x^6$
$x^3 \times x^4 = x^7$
$x^3 \times x^5 = x^8$
$x^3 \times x^6 = x^9$

2/ L'utilisation des lettres (Chap. V.5. - Chap VIII.1.2. [3])

"Afin que cette méthode (zététique) soit aidée par quelque artifice, on distinguera les grandeurs données des grandeurs inconnues et cherchées en les représentant par un symbole constant, invariable et bien clair, par exemple, en désignant les grandeurs cherchées par la lettre A ou par toute autre voyelle E, I, O, U, Y, et les grandeurs données par les lettres B, C, D ou par d'autres consonnes ..." (Chap. 5)

"Dans l'Analyse, le mot équation employé seul est pris pour désigner une égalité ordonnée régulièrement par la méthode zététique. Une équation est donc la comparaison d'une grandeur inconnue avec une grandeur connue. ..." (Chap. 8)

Ces fragments donnés et lus en classe après un travail sur la mise en équation de problèmes permettent de faire le point et de donner un codage. On peut les mettre en application sur les nombreux problèmes fournis par le livre des *Zététiques* ([1], [2], [4], [5] voir le paragraphe B).

L'intérêt est double:

* mise en équation: donc travail de codage et de traduction en vue d'une résolution difficile ou impossible autrement;
* distinguer par un artifice repérable les inconnues (voyelles) des données (consonnes); on retrouve là, en algèbre, le travail préparatoire à tout problème de démonstration en géométrie: la recherche des données (ou hypothèses) sur laquelle on insiste beaucoup en quatrième. Il va sans dire qu'une fois le problème mis en équation sous sa forme générale, il s'agit uniquement ensuite, à ce niveau, de le résoudre sur un exemple numérique.

D'autre part, les problèmes des *Zététiques* (dont une partie est reprise de DIOPHANTE) présentent l'avantage de ne poser à propos de leurs énoncés que des problèmes de compréhension de la langue et non pas du contexte du problème qui est souvent un frein à la mise en équation (Cf. *Cahiers de Troisième,* IREM de Poitiers, 1985).

3/ Les règles de transformation des équations (Chap. V. [1])

PROPOSITIO II.

Proponatur A Cubus, plùs B in A Quadratum æquari Z plano in A, Dico per hypobibasmū A Quadratum, plùs B in A æquari Z plano.

PROPOSITIO III.

Proponatur B in A Quadratum, plùs D plano in A, æquari Z Solido. Dico per parabolismum A Quadratum, plùs $\frac{D \text{ plano}}{B}$ in A, æquari $\frac{Z \text{ solido}}{B}$. Illud cum est omnia so-

> ***Exercice.***— Traduis avec les notations actuelles. Explique les règles utilisées et que VIETE nomme hypobibasme et parabolisme.

Une traduction pourrait être:

II- Soit $A^3 + BA^2 = ZA$, je dis par hypobibasme que $A^2 + BA = Z$.

III- Soit $BA^2 + DA = Z$, je dis par parabolisme que $A^2 + \frac{D}{B}A = \frac{Z}{B}$.

Remarque: pour VIETE, les lettres représentent des grandeurs qui ont une dimension qui doit être précisée à partir de la dimension 2 afin que soit respectée ce qu'il appelle la loi des homogènes et qui rappelle l'équation aux dimensions en physique.

B - Résoudre des problèmes par l'algèbre: les Zététiques

Zetein (ζητειν) = chercher en grec

1/ Zététiques I (Livre I)

a) Le problème

Voici son expression chez VIETE [1] reproduite telle quelle:

FRANCISCI VIETÆ

ZETETICORVM

LIBER PRIMVS.

ZETETICVM I.

DAtâ differentiâ duorum laterum , & adgregato eorumdem inuenire latera.

Il y a la possibilité de traduire ou de faire traduire en français. Un exemple de traduction d'élève est donnée dans le paragraphe 2. En voici une formulation moderne: étant donné la différence de deux nombres et leur somme, trouver ces deux nombres.

b) La recherche

A partir de l'énoncé du problème (en français), on peut mettre les élèves en recherche:

- sur un cas particulier en jouant les magiciens: un élève choisit deux nombres et ne donne que leur différence et leur somme. Les autres doivent retrouver les nombres.
- pour trouver une formule générale permettant de faire le calcul de tête $\left(x = \frac{S+D}{2} \ ; \ y = \frac{S-D}{2} \right)$

c) La solution

- On peut procéder à une mise en équation et une résolution avec les notations de VIETE (cf. A.2).
- On peut étudier la solution donnée par VIETE:

DAtâ differentiâ duorum laterum, & adgregato eorumdem inuenire latera.

Sit data B differentia duorum laterum, & datum quoque D adgregatum eorumdem. Oportet inuenire latera.

Latus minus esto A, maius igitur erit A + B. Adgregatum ideo laterum A bis + B. At idem datum est D. Quare A bis + B æquatur D. Et per antithesim, A bis æquabitur D — B, & omnibus subduplatis, A æquabitur D semissi, minùs B semisse.

Vel, latus maius esto E. Minus igitur erit E — B. Adgregatum ideo laterum. E bis, minùs B. At idem datum est D. Quare E bis minùs B æquabitur D. & per antithesim, E bis æquabitur D + B, & omnibus subduplatis E æquabitur D semissi, plùs B semisse.

Datâ igitur differentiâ duorum laterum & adgregato eorumdem inueniuntur latera. Enimuero

Adgregatum dimidium laterum minùs dimidia differentia æquale est lateri minori, plùs eâdem, maiori.

Quod ipsum est quod arguit Zetesis.

Sit B 40. D 100. A fit 30. E 70.

Que l'on peut traduire ainsi:
"Soit B la différence donnée des deux côtés et D leur somme également donnée. Il s'agit de trouver les côtés.

Si A est le plus petit, le plus grand sera alors $A + B$. Leur somme $2A + B$. Mais c'est D. Donc $2A + B = D$. Et par antithèse, $2A = D - B$, et en divisant tout par deux: $A = \frac{D}{2} - \frac{B}{2}$.

Ou alors soit E le plus grand côté. Le plus petit sera alors $E - B$. leur somme $2E - B$. Mais c'est D. Donc $2E - B = D$ et par antithèse $2E = D + B$, et en divisant tout par deux: $E = \frac{D}{2} + \frac{B}{2}$.

Donc la différence des deux côtés étant donnée ainsi que leur somme, on peut trouver les côtés. Car:

La moitié de la somme moins la moitié de la différence est égale au plus petit côté, et au plus grand si on fait plus.

C'est ce que montre la Zétèse.

Soit $B = 40$ $D = 100$. Alors $A = 30$ $E = 70$."

Le caractère de généralité du problème nous permet de montrer aux élèves l'intérêt du calcul littéral.

d) Autres problèmes

Les problèmes suivants du livre I permettent de faire des exercices sur les systèmes à deux inconnues (classe de troisième) ou sur les équations à une inconnue avec mise en équation.

2/ Zététiques I à XIII (Livre II)

a) Les problèmes

FRANCISCI VIETÆ

ZETETICORVM

LIBER SECVNDVS.

ZETETICVM I.

DATO Rectangulo sub lateribus & ratione laterum inueni-re latera.

ZETETICVM II.

Data Rectangulo ſub lateribus & adgregato quadratorum inueniuntur latera.

ZETETICVM III.

Dato Rectangulo ſub lateribus & differentia laterum inueniuntur latera.

ZETETICVM IIII.

Dato Rectangulo ſub lateribus & adgregato laterum inueniuntur latera.

ZETETICVM V.

Datâ differentiâ laterum & adgregato quadratorum inueniuntur latera.

ZETETICVM VI.

Dato adgregato laterum & adgregato quadratorũ inueniuntur latera.

Enim-

ZETETICVM VII.

Datâ differentiâ laterum, & differentiâ quadratorum inueniuntur latera.

Une fois traduits, ils peuvent être posés tels quels comme travail à partir des identités remarquables au programme de la classe de quatrième, et résolus sur des exemples numériques. Un tel travail permet de s'approprier les identités remarquables et d'en voir l'intérêt: elles deviennent des outils pour résoudre des problèmes.

Zététiques	Traduction littérale	Traduction définitive
Liber primus		
Z-I- Data differentia duorum laterum et adgregato eorumdem invenire latera.	La différence de deux côtés ayant été donnée et la somme des mêmes, trouve les côtés.	Connaissant la différence et la somme de deux longueurs, trouver les longueurs
Z-II- Data differentia duorum laterum et ratione eorumdem invenire latera.		Connaissant la différence et le quotient de deux longueurs, trouver les longueurs.
Liber secundus		
Z-I- Dato rectangulo sub lateribus et ratione laterum, invenire latera	Un rectangle construit sous ses côtés ayant été donné, et le quotient des côtés, trouver les côtés.	Connaissant l'aire d'un rectangle et le quotient des côtés, trouver les longueurs.
Z-II- Data rectangulo sub lateribus et adgregato quadratorum inveniuntur latera.	Un rectangle construit sous ses côtés ayant été donné et la somme des carrés, les côtés sont trouvés.	Connaissant l'aire d'un rectangle et la somme des carrés de ses côtés, on trouve les côtés.
Z-III- Dato rectangulo sub lateribus et differentia laterum inveniuntur latera.		Connaissant l'aire d'un rectangle et la différence de ses côtés, on trouve les côtés.
Z-IV- Dato rectangulo sub lateribus et adgregato laterum inveniuntur latera.		Connaissant l'aire d'un rectangle et la somme de ses côtés, on trouve les côtés.
Z-V- Dato differentia laterum et agregato quadratorum inveniuntur latera.		Connaissant la différence des côtés et la somme de leurs carrés, on trouve les côtés.
Z-VI- Dato adgregato laterum adgregato quadratorum inveniuntur latera.	La somme des côtés ayant été donnée et les carrés des côtés, les côtés sont trouvés.	Connaissant la somme des côtés et la somme de leurs carrés, on trouve les côtés.
Z-VII- Dato differentia laterum et differentia quadratorum inveniuntur latera.		Connaissant la différence des côtés et la différence des carrés des côtés, on trouve les côtés.

Zététiques: traduction d'élèves.

b) Les solutions Un exemple: Zététique n° 7 [2]

Etant données la différence de deux grandeurs, et la différence de leurs carrés, on trouve les grandeurs. En effet:
"Lorsqu'on divise la différence des carrés des grandeurs par la différence des grandeurs, on obtient leur somme."

On a déjà vu en effet que le produit de la différence des grandeurs par leur somme fait la différence de leurs carrés. Mais la division est l'opération qui restitue ce qui était modifié par le produit.
Soit la différence des grandeurs, 8, celle de leurs carrés 96, la somme des grandeurs sera 12, c'est pourquoi ces grandeurs seront: la plus grande 10, la plus petite 2.

Tous les zététiques du livre II sont de cette forme: énoncé du problème - règle (ou théorème) utilisée - courte explication - application numérique.

Nous avons utilisé ces textes:
- Pour faire utiliser les identités remarquables (cf. B.2.a)
- Pour faire traduire ces problèmes sous forme algébrique: il s'agit donc de comprendre le texte du problème, et d'opérer le codage que constitue sa mise en équation.
- Pour faire faire des démonstrations: et cela nous semble important en quatrième parallèlement à l'apprentissage de la démonstration en géométrie. Il s'agit donc de justifier les règles que donne VIETE pour résoudre les différents problèmes; ainsi après l'aspect généralisation (cf. B.1.c) apparaît la deuxième grande fonction du calcul littéral: la possibilité de faire des démonstrations.

Voici deux types de travaux donnés en classe à partir de là. Dans la fiche de travail les exemples numériques ne sont pas ceux de VIETE car dans son ouvrage tous les exemples sont construits à partir des mêmes nombres 2 et 10.

Devoir sur feuille pour le mardi 11-03-86

Le problème 2 du livre 2 des Zététiques de VIETE est le suivant:

Etant donné le produit de deux nombres et la somme de leurs carrés, on trouve les nombres.
En effet, "Le double du produit des nombres, ajouté à la somme de leurs carrés, est égal au carré de leur somme; si on l'enlève à la somme des carrés, on obtient le carré de leur différence."

VIETE donne ensuite la solution si le produit P vaut 20 et la somme C des carrés 104.
1/ Les deux règles données par VIETE sont-elles justes ? Prouve-le.
2/ Utilise sa méthode et le zététique 1 du livre I pour trouver les nombres dans le cas où P = 20 et C = 104 sachant qu'ils sont positifs.

4ème - 1. **Algèbre: Recherches (Zététiques)**

1/ Il est facile, connaissant la somme et la différence de deux nombres de trouver ces nombres.
a) Rappelle la méthode.
b) Applique-la à un exemple de ton choix (rédige l'énoncé de ton problème).
c) Vérifie ta solution.

2/ Démontre que les affirmations suivantes sont toujours vraies:

1. Le double du produit de deux nombres, ajouté à la somme de leurs carrés est égal au carré de leur somme; si on l'enlève à la somme des carrés, on obtient le carré de leur différence.
2. Le carré de la différence de deux nombres, ajouté à quatre fois leur produit est égal au carré de leur somme.
3. Le carré de la somme de deux nombres, diminué de quatre fois leur produit est égal au carré de leur différence.
4. Le double de la somme des carrés de deux nombres, diminué du carré de la différence de ces nombres, est égale au carré de leur somme.
5. Le double de la somme des carrés de deux nombres, moins le carré de leur somme est égal au carré de leur différence.
6. Lorsque l'on divise la différence des carrés de deux nombres par la différence des nombres, on obtient leur somme.
7. Lorsque l'on divise la différence des carrés de deux nombres par la somme des nombres, on obtient leur différence.
8. Le carré de la différence des carrés de deux nombres, ajouté au carré du double produit, est égal au carré de leur somme des carrés.
9. La somme du produit de deux nombres et de leurs carrés, diminuée des trois quarts du carré d'un des nombres est égale au carré de la somme de l'autre nombre et de la moitié du premier.
10. Le carré de la somme de deux nombres, moins la somme du produit et des carrés, est égal au produit des nombres.

3/ En utilisant 1/ et 2/ résous les problèmes suivants où il s'agit de trouver deux nombres positifs x et y sachant que:

1.	$xy = 84$	et	$x^2 + y^2 = 193$
2.	$xy = 90$	et	$x - y = 1$
3.	$xy = 72$	et	$x + y = 18$
4.	$x - y = 5$	et	$x^2 + y^2 = 1753$
5.	$x + y = 100$	et	$x^2 + y^2 = 6352$
6.	$x - y = 5{,}2$	et	$x^2 - y^2 = 50{,}96$
7.	$x + y = 2$	et	$x^2 - y^2 = \frac{8}{3}$
8.	$xy = 40$	et	$x^2 - y^2 = 39$
9.	$xy + x^2 + y^2 = 5$	et	$x = 49$
10.	$xy + x^2 + y^2 = 21$	et	$x + y = 5$
11.	$xy + x^2 + y^2 = 196$	et	$xy = 60$
12.	$x^2 + y^2 = 74$	et	$x^2 - y^2 = 24$

3/ Zététiques Livre III [4] (dans l'édition de 1630)

On trouve dans ce livre d'autres problèmes concernant le triangle rectangle et qui auraient leur place en classe de troisième une fois connu le théorème de PYTHAGORE.

En voici quelques-uns:

ZETETIQVE III.

Estant donnée la perpendiculaire d'vn triangle rectangle, & la difference de la base à l'hypotenuse: trouuer la base & hypotenuse.

ZETETIQVE IV.

Estant donnée la perpendiculaire d'vn triangle rectangle, & la somme de la base & hypotenuse; trouuer la base & hypotenuse.

ZETETIQVE V

Estant donnée l'hypotenuse d'vn triangle rectangle & la différence des costez d'autour l'angle droit; trouuer iceux.

C - Calcul de π : Réponses variées à des questions mathématiques (Livre VIII)

Voici un exercice de calcul numérique (valeurs approchées au programme) utilisant la formule découverte par VIETE et qui est le premier exemple de produit infini.

VIETE après des calculs assez longs aboutit à cette formule:

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots\cdots}$$

Calcule:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \ ; \ \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \ ; \ \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \ ; \ \ldots$$

Applique chaque fois la formule. Que penser ?

Il va sans dire que ces notations ne sont pas celles de VIETE et que la formule établie par VIETE n'est pas celle-ci. Tout d'abord la notion π est postérieure à VIETE et ne s'est imposée qu'à partir d'EULER (Cf. DEDRON et ITARD, *Mathématiques et mathématiciens*, Magnard, 1959. p. 421-422).

D'autre part, le calcul fait effectivement par VIETE en 1593 est celui du rapport des aires du carré inscrit dans un cercle et du cercle lui-même, qu'il exprime sous forme de produit infini. Il s'agit donc, avec nos notations, du calcul de $\frac{2}{\pi}$. On pourra trouver le texte de VIETE extrait de [5] et une utilisation en classe dans la brochure n° 61 de l'IREM de Paris-Sud: *M.A.T.H. Mathématiques Approche par des Textes Historiques*, 1986, p. 14-23.

Il y aurait certainement bien d'autre choses exploitables dans les œuvres de VIETE et nous avons envie de continuer nos recherches. En particulier, VIETE a été un des précurseurs de l'usage des décimaux. Voici ce qu'il en dit dans son Canon Mathématique (1579) [8]:

> "Sans avoir égard à ce que ces subdivisions ont de commode, d'habiles calculateurs conseillent énergiquement de se servir dans les constructions des Canons des soixantièmes et multiples de soixante en prenant pour exprimer le demi-diamètre: 60 ou une puissance de 60. Mais à moins d'avoir à sa disposition une table des multiples de 60, il est bien difficile de faire des multiplications, des divisions, des extractions de racines carrées en pleine sécurité. L'arithmétique dans ce système est très glissante, et il est difficile d'y éviter des chutes. Et ce qui dans les calculs par soixantièmes et

multiples de soixante s'exécute, le regard fixé sur une table, avec difficulté et fatigue pour les yeux, s'exécute par millièmes et milliers, plus promptement sans le secours d'aucune table par la voie de l'arithmétique ordinaire. En un mot, dans les mathématiques, usez avec parcimonie ou, plutôt, ne faites pas usage des soixantièmes et multiples de soixante; usez plutôt, faites toujours usage des millièmes, milliers, des centièmes et des centaines, des dixièmes et des dizaines; montez, descendez toujours les degrés de ce système d'arithmétique."

V- Les retombées

Si ce travail a permis des réalisations et des travaux en classe, il a eu sur nous-mêmes des répercussions importantes.

A - Sur le plan culturel

L'aspect interdisciplinaire a fait naître en nous le désir de découvrir le 16ème siècle, pour notre plaisir personnel: sensibilité à tout ce qui touche cette période au cours de lectures, de voyages, de visites, d'émissions radio ou TV, volonté d'en savoir et d'en connaître davantage (achat de livres, revues, disques, ...). Quelques exemples en vrac: redécouverte de RABELAIS, MONTAIGNE, RONSARD, du château d'Oiron, très beau château Renaissance à 40 km au nord de Parthenay, découverte du vin du Jurançon et de la correspondance d'HENRI IV et de CORISANDRE, de la musique de LEJEUNE, DE LASSUS, du traité de danse de THOINOT ARBEAU, du traité de vénerie de Jacques DU FOUILLOUX, célébrité locale, des écrivains BRANTOME et Agrippa D'AUBIGNÉ, ...

B - Sur le plan professionnel

Ce travail sur VIETE nous a permis de reconsidérer notre vision de l'algèbre, et à partir de là de concevoir les étapes d'un apprentissage du calcul algébrique. Un de ses prolongements a été l'apport historique qu'il a permis pour l'élaboration et la mise en place d'un stage de formation s'adressant à des enseignants de mathématiques de collège et paru dans le Plan Académique de Formation de l'Académie de Poitiers sous le titre: "Le calcul littéral au Collège".

1/ L'algèbre de VIETE

En essayant de cerner l'apport spécifique de VIETE aux mathématiques, et en examinant ce qui a fait célébrer VIETE comme le père de l'Algèbre, nous avons clarifié ce que recouvrait ce terme d'Algèbre. Ce travail de réflexion nous a conduits à faire des recherches de documents et diverses lectures concernant l'histoire des mathématiques en particulier: CLAIRAUT, CONDILLAC, des brochures IREM sur l'algèbre (IREM de Toulouse, IREM de Dijon), articles "Algèbre" de vieilles encyclopédies, ...

En fait, la révolution opérée par VIETE est celle du passage de la résolution numérique des équations au calcul littéral. Il s'agit alors de résoudre les problèmes dans leur généralité: on voit donc apparaître les "paramètres", les démonstrations algébriques. Doublé d'une analyse de travaux faits en didactique des mathématiques, ce travail nous a amenés à réfléchir au statut des lettres et des notations et à procéder à la classification suivante:

	Sens du signe =
1. Codages d'un objet, d'une grandeur • Abréviation → lettre appellation, **nom** Exemples: d: ("=") médiatrice de [AB] ℓ = largeur du rectangle $A = 3 \times (5 - 2 \times 4) + 3 + 4 \times 6$	désignation ("est", "désigne")
2. Codage d'un problème • Mise en équation → lettre **inconnue** Exemple: $3x + 2 = 7$	conditionnel ("est-il égal à", = ?)
3. Codage d'un programme de calcul • Fonction, graphique → lettre **variable** Exemples: $y = 3x + 2$ $A = \frac{(B + b) \times h}{2}$	fonctionnel (correspondance, adressage) ("vaut", "correspond à", ←)
4. Codage d'une situation générale • Démonstration → lettre **paramètre** Exemple: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$	identité ("est identique à", ≡)

N.B. - Les fonctions peuvent se superposer.

Pour nous maintenant les enjeux sont clairs: le but du calcul algébrique est de:

- transformer les écritures, les faire parler,
- garder une trace des calculs,
- suppléer la mémoire

pour résoudre des **problèmes**.

Il s'ensuit des conséquences pédagogiques:

- multiplier les situations de codage;
- éviter les calculs purement formels.

Tout ce travail de réflexion nous a ainsi permis d'être plus au clair et donc d'expliquer aisément aux élèves les enjeux de l'usage des lettres. Il nous permet aussi de chercher et choisir des situations appropriées au rôle que l'on veut faire jouer aux lettres, par exemple la sensibilisation au rôle de paramètre, au caractère de généralité d'une situation à partir de la *Zététique I* du Livre I.

2/ Les identités remarquables

Le travail sur les *Zététiques* et la découverte du Livre II ont été l'occasion de trouver une partie des réponses à des questions que nous nous posions: à quoi sert l'apprentissage des identités remarquables ? Pourquoi une telle importance lui est accordée ? Quel est l'intérêt des batteries d'exercices purement techniques sur lesquels travaillent les élèves ? Quels réels problèmes leur connaissance permet-elle de résoudre ? Au moins maintenant nous avons un matériau: une mine de problèmes qu'elles permettent de résoudre avec en plus un travail de codage et de démonstration.

Pour terminer nous pouvons dire aussi que les connaissances acquises à partir de ce travail nous permettent de faire en cours de mathématiques des remarques historiques, de resituer les problèmes, les notations. Ceci se fait à l'occasion, tout au long de l'année, mais est aussi important, voire plus, qu'une action ou une activité ponctuelle sur l'histoire des mathématiques, car il s'agit d'un climat, d'un état d'esprit qui "imbibe" les élèves et leur fait voir et vivre les mathématiques autrement.

VI- Principales sources

Nous remercions Jacques BOROWCZYK de l'Université de Poitiers qui a largement contribué à la recherche et à la duplication d'une partie des documents.

Œuvres de VIETE utilisées

[1] VIETE, *In artem analyticum isagoge*. Mettayer. Tours, 1591. (Bibliothèque municipale de Fontenay-le-Comte).

[2] GRISARD, Traduction des Zététiques in *François VIETE mathématicien de la fin du seizième siècle*. Thèse de doctorat. Ecole Pratique des Hautes Etudes. Paris. 1968.

[3] VIETE, Introduction à l'art analytique. Traduction de RITTER in *Bulletino di bibliografica e di storia della scienze matematiche e fisiche*. Tome I. Luglio, 1868.

[4] VAULEZARD, *La nouvelle algèbre de M. VIETE*. 1630. Fayard. 1986. (Introduction à l'art analytique et Zététiques, mais la traduction et les commentaires sont d'un style compliqué).

[5] (VAN) SCHOOTEN, *Francisci VIETÆ Opera Mathematica*. Leyde, 1646. (A noter: les notations utilisées par Van Schooten ne sont pas celles de VIETE. Une réédition en 1970 par Georg Ohm, Verlag Hildesheim. New-York).

[6] VIETE, *Principes de cosmographie*. Rouen. 1647.

A propos de VIETE

[7] PUIG RITALONGI, *Catherine DE PARTHENAY*. Ed. Cante Parthenay. s.d.

[8] RITTER, *François VIETE inventeur de l'algèbre moderne*. in Revue Occidentale. Seconde série. Tome X. Paris 1895.

[9] CHASLES, *Des droits de VIETE méconnus*. in Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. 5 mai 1841.

[10] ALLÉGRET, *VIETE*. Discours prononcé à la distribution solennelle des prix du lycée impérial de Poitiers le 10 avril 1867. In Mélanges Scientifiques et littéraires. Clermont-Ferrand. 1868.

[11] FILLON et RITTER, *Notice sur la vie et les œuvres de VIETE*. Guilmard. Nantes. 1849.

[12] FILLON, *Recherches historiques et archéologiques sur Fontenay*. Fontenay 1846. Laffite reprints Marseille 1981.

[13] Documents divers des archives départementales de Niort.