Sammlung

von

Beispielen und Aufgaben

aus der

allgemeinen Arithmetik und Algebra.

In systematischer Folge bearbeitet

für

Gymnasien, Realschulen, höhere Bürgerschulen und Gewerbschule

von

Dr. Eduard Heis,

Professor der Mathematik und Astronomie
an der Königlichen Akademie zu Münster.

Einundzwanzigste Auflage.

Köln, 1869.
Verlag der M. DuMont-Schauberg'schen Buchhandlung.
Wien.
Gerold u. Comp. — W. Braumüller.

Inhalt.

Vorbegriffe.

§. 1.

Begriff und Anwendung der Addition.

1) Was heißt zwei oder mehrere Zahlen zu einander addiren? Wie heißt das Ergebniß der Addition? Wie heißen die zu vereinigenden Zahlen? Welches ist das Zeichen der Addition?

2) Die beiden Summanden einer Summe seien p und q. Wie heißt diese Summe?

3) a) Wie heißt die um 7 vergrößerte Zahl a? b) Wie die um n vergrößerte Zahl m? c) Wie die um m vergrößerte Zahl n?

4) Wie groß ist q, wenn $q = m + n$, und $m = 9$, $n = 18$ gesetzt wird?

5) Wenn z eine ganze Zahl bedeutet, wie heißt alsdann die nächst höhere ganze Zahl?

6) Jemand hat a, ein Anderer b Thaler Vermögen. Wie viel besitzen beide zusammen?

7) A hat m, B n Gulden Schulden. Wie viel Schulden haben beide zusammen?

8) Einer geht 43 Schritte vorwärts und hierauf 27 Schritte rückwärts. Wie viel Schritte hat er im Ganzen gemacht?

9) Ein Luftball steigt zuerst 1850 Fuß und fällt hierauf 440 Fuß. Wie viel Fuß hat derselbe im Ganzen zurückgelegt?

10) Von zwei Dampfwagen, welche sich begegnen, legt der eine in jeder Minute 2497 Fuß, der andere 2769 Fuß zurück. Um wie viel Fuß werden beide eine Minute nach ihrem Zusammentreffen von einander entfernt sein?

11) Wie heißen die Antworten der drei vorhergehenden Aufgaben, wenn für die besonderen Zahlen jedes Mal die allgemeinen Zahlzeichen a und b gesetzt werden?

12) Mein Bruder war p Jahre alt, als ich geboren wurde. Jetzt bin ich q Jahre alt. Wie alt ist mein Bruder?

13) Der Kaiser Augustus wurde im Jahre 63 vor Christus geboren und starb im Jahre 14 nach Christus. Wie alt wurde er?

14) In Petersburg tritt der Mittag 1 Stunde 52 Minuten früher ein, als in Paris. Wenn in Paris halb 2 Uhr ist, wie viel Uhr ist in demselben Zeitmomente in Petersburg?

15) Jemand gab 125 Thaler aus und behielt 713 Thaler übrig? Wie viel Geld besaß er?

§. 2.

Begriff und Anwendung der Subtraction.

1) Was heißt eine Zahl von einer andern abziehen oder subtrahiren? Was heißt eine Zahl um eine andere vermindern? Welche Zahl heißt Minuend, welche Subtrahend? welche Rest, Unterschied oder Differenz? Welches ist das Zeichen der Subtraction?

2) α) Wie heißt die um b verminderte Zahl a? β) Wie heißt die um 13 verminderte Zahl c? γ) Subtrahire s von m. δ) Vermindere s um m. ε) Wie heißt die Differenz, deren Subtrahend p und deren Minuend q ist?

3) Wenn a eine ganze Zahl bedeutet, wie heißt alsdann, α) die nächst-niedrigere, β) die zweit-vorhergehende ganze Zahl?

4) Wenn die Summe zweier Zahlen 23, und die eine 17 ist, wie groß ist alsdann die andere Zahl?

5) Die Summe zweier Zahlen ist q, der eine Summand p. Wie groß ist der andere Summand? Wie findet man überhaupt aus der Summe und dem einen Summanden den anderen Summanden?

6) Was hat man an die Stelle von x zu setzen, α) wenn $x + 5 = 12$, β) wenn $x + 37 = 63$ werden soll?

7) α) Wem ist der Minuend einer Differenz, β) wem der Subtrahend gleich? γ) Von einer Zahl, die ich im Sinne habe, ziehe ich 39 ab und erhalte 48. Wie heißt die Zahl? Wie groß ist die Zahl x, wenn δ) $x - 9 = 13$, ε) $x - 513 = 478$?

8) α) Von 24 Silbergroschen [m Kreuzern] gebe ich ein Bestimmtes aus und behalte 17 Silbergroschen [n Kreuzer] übrig. Wie viel habe ich ausgegeben? Wie groß ist die Zahl x, wenn β) $21 - x = 13$, γ) $495 - x = 378$?

9) Jemand hat 300 Gulden baares Geld und 74 Gulden Schulden. Wie viel besitzt er im Vermögen?

10) Ein Anderer hat 1298 Thlr. baares Geld und 1417 Thlr. Schulden. Wie viel Schulden bleiben ihm, wenn er so viel, als ihm möglich, abzahlt?

11) Jemand hat ein jährliches Einkommen von m Thalern. Seine Ausgaben betragen n Thaler. Wie viel behält er jährlich übrig, oder wie viel Schulden macht er jährlich?

12) Einer geht zuerst 217 Schritte vorwärts und hierauf 59 Schritte rückwärts. Wie viel Schritte ist er von dem Orte entfernt, von dem er ausging?

13) Jemand geht zuerst 369 Schritte vorwärts und hierauf 712 Schritte rückwärts. Wie viel Schritte befindet er sich von dem Orte, von dem er ausging?

14) Ein auf einem Berge aufsteigender Luftball erhebt sich 2884 Fuß und langt, nachdem er 3693 Fuß gefallen, am Fuße des Berges an. Wie hoch ist der Berg?

15) Ein Körper bewegt sich a Fuß vorwärts und dann b Fuß rückwärts. Wie viel Fuß befindet er sich von dem Orte, von dem er ausging, je nachdem $a > b$, $a = b$, oder $a < b$ ($a \gtreqless b$) ist?

16) Drei Oerter, A, B, C, liegen auf einer Landstraße in gerader Linie hinter einander. A ist von B 16 und von C 37 Meilen entfernt. Wie weit ist B von C entfernt?

17) Wann hörte der im Jahre 432 vor Christus anfangende achtundzwanzigjährige peloponnesische Krieg auf?

18) Wann fing der 1648 nach Christus beendigte dreißigjährige Krieg an?

19) Newton wurde am 25. December 1642 zu Wolstrop geboren und starb am 20. März 1727 zu London. Wie alt wurde er?

20) Ein Faß Waare wiegt mit dem Fasse (Brutto) 1476 Pfund; das Faß allein (Tara) wiegt 27 Pfund. Welches ist das reine (Netto-) Gewicht der Waare?

21) Eine Kiste verpackter Waare wiegt Brutto 412 Pfund [b Pfund], Netto 391 Pfund [n Pfund]. Wie viel beträgt die Tara?

22) α) Wenn die Tageslänge 8 oder allgemein s Stunden beträgt, wie viel beträgt die Nachtlänge? Wenn die Sonne β) um 7, oder γ) um halb 5 Uhr, oder δ) um 12 Uhr Mittag, oder ε) um 12 Uhr Mitternacht aufgeht, um wie viel Uhr wird sie selbigen Tages untergehen?

23) Zwei Dampfschiffe fahren hinter einander. Das eine legt jede Minute 1500 Fuß [m F.], das andere 1200 Fuß [n F.] zurück. Um wie viel entfernen sich dieselben jede Minute von einander?

24) Ich gehe 120 Schritte vorwärts, dann 47 Schritte rückwärts, hierauf 19 Schritte vorwärts und zuletzt 92 Schritte rückwärts. Wie viel Schritte habe ich im Ganzen zurückgelegt, und wie viel Schritte bin ich von dem Orte entfernt, von dem ich ausging?

25) Ein Schiff fährt aus dem Hafen einer Insel a Meilen nach Westen und hierauf b Meilen zurück nach Osten. Wie viel

Meilen ist dasselbe von dem Hafen entfernt, von dem es auslief, und wie viel Meilen hat es im Ganzen abgemacht?

26) Ein Dampfschiff legt ohne Einwirkung des Stromes und Windes jede Minute 1473 Fuß zurück; durch Einwirkung des Wassers allein wird dasselbe jede Minute 213 Fuß abwärts getrieben und durch Einwirkung des Windes allein jede Minute 300 Fuß weit gebracht. Wie viel Fuß legt das Dampfschiff jede Minute zurück, wenn dasselbe α) stromabwärts mit dem Winde, β) stromabwärts gegen den Wind, γ) stromaufwärts mit dem Winde, δ) stromaufwärts gegen den Wind fährt?

27) Wie heißen die Antworten der vorhergehenden Aufgabe, wenn für die besonderen Zahlen 1473, 213 und 300 die allgemeinen Zahlzeichen d, s und w gesetzt werden?

28) Wie groß sind x, y, z, wenn 1) $x+m = p$, 2) $y-n = q$, 3) $a - z = c$ ist?

§. 3.

Begriff und Anwendung der Multiplication.

1) Was heißt eine Zahl mit einer anderen Zahl multipliciren? Welche Zahl heißt Multiplicand, welche Multiplicator, welche Product? Welches ist das Zeichen der Multiplication? Wann darf das Zeichen der Multiplication ausgelassen werden?

2) Der Multiplicator eines Productes ist p, der Multiplicand q. Wie heißt das Product? Wie heißt das Product, wenn der Multicator a, der Multiplicand 7 ist?

3) Wie groß ist q, wenn $q = x \cdot y$, und $x = 9$, $y = 7$, gesetzt wird?

4) Können 5 Thlr. mit 7 Thlrn., oder 12 Thlr. Schulden mit 17 Thlrn. Schulden, oder 3 Silbergroschen mit 4 Pfennigen multiplicirt werden?

5) Was kommt heraus, α) wenn 9 sieben mal, β) 73 siebenundsechszig mal, γ) wenn x n-mal zu sich selbst addirt wird?

6) In einem rechtwinkeligen Weingarten befinden sich an der einen Seite 217 [p], an der anderen 197 [n] Weinstöcke. Wie viel Weinstöcke macht es im Ganzen?

7) Ein rechtwinkeliges Feld hat 81 preuß. Ruthen Länge und 57 Ruthen Breite. Wie viel Quadratruthen enthält das Feld?

8) Ein rechtwinkeliger Haufen Ziegelsteine hat in der Länge 98, in der Breite 57 und in der Höhe 29 Steine. Wie viel Steine enthält derselbe im Ganzen?

9) Einer legt jährlich 250 Thaler [m Gulden] zurück. Wie viel wird er nach 12, wie viel nach n Jahren gespart haben?

10) Einer macht jährlich a Thlr. Schulden. Wie viel Schulden wird er in 8, wie viel in x Jahren gemacht haben?

11) Das Pfund einer Waare kostet 17 Sgr. [n Kreuzer]. Was kosten 19, was x Pfund?

12) Für m Thlr. erhält man eine Elle. Wie viel kosten n Ellen?

13) Wenn ein Hase bei jedem Sprunge 6 Fuß zurücklegt, wie viel wird er nach 27 Sprüngen zurückgelegt haben?

14) Der Schall legt in jeder Secunde 1048 Fuß zurück. Wie viel in t Secunden?

15) Ein sich gleichförmig bewegender Körper möge in jeder Zeiteinheit (z. B. Secunde) c Raumeinheiten (z. B. Meter) zurücklegen. Welchen Raum wird er in t Zeiteinheiten zurücklegen?

16) Fünf [a] Arbeiter werden mit der Aufführung einer Mauer in 20 [b] Tagen fertig. Wie viel Tage würde ein Arbeiter gebrauchen?

17) Wenn 6 Pferde [n Pferde] mit einem Futtervorrathe 24 Tage [t Tage] auskommen, wie lange wird ein Pferd mit demselben Vorrathe auskommen?

18) α) 139 Thaler wie viel Silbergroschen? β) m Thaler wie viel Silbergroschen und wie viel Pfennige? γ) p Gulden wie viel Kreuzer? δ) n Centner wie viel Pfund, Loth und Quentchen?

§. 4.

Begriff und Anwendung der Division.

1) Was heißt eine Zahl durch eine andere Zahl dividiren? was eine Zahl in eine andere dividiren? Was versteht man unter Dividend, Divisor, Quotient? Welches ist das Zeichen der Division?

2) Es soll dividirt werden: α) q durch p, β) a durch 17, γ) 25 durch x, δ) 999 durch 37.

3) Dividire: α) m in n, β) 45 in q, γ) q in 45, δ) q durch 45.

4) Wenn $p : q = r$ ist, wie groß ist r für α) $p = 84$, $q = 7$, β) $p = 4$, $q = 4$?

5) α) Welche Zahl gibt, mit 7 multiplicirt, 56? β) welche mit 17 multiplicirt, 1003? γ) Wie oftmal muß 13 als gleicher Summand genommen werden, damit als Summe 91 herauskommt? δ) wie oftmal 123, damit 1107 herauskommt? ε) Wie oftmal können 12 Thlr. von 96 Thlrn. abgezogen werden? ζ) Welche Zahl gibt, mit x multiplicirt, y?

6) Der Multiplicator eines Productes sei 7, das Product 91. Wie heißt der Multiplicand? Wie, wenn der Multiplicator p, das Product q ist? Wie findet man überhaupt, wenn das Product und der Multiplicator bekannt sind, den Multiplicanden, oder, wenn das Product und der Multiplicand bekannt sind, den Multiplicator? Welche Zahl hat man an die Stelle von x und y zu setzen, wenn α) $9 \cdot x = 63$, β) $43 \cdot x = 2451$, γ) $y \cdot 8 = 72$, δ) $y \cdot 53 = 1537$ werden soll?

7) Wie oft sind 18 Ellen in 126 Ellen enthalten? Welches ist der achtzehnte Theil von 126 Ellen?

8) Eine gewisse Anzahl Pfunde einer Waare kostet 324 Thlr. Wie viel kostet der achtzehnte Theil der Anzahl Pfunde?

9) Wenn man für 57 Thlr. [p Thlr.] 1311 Pfd. [q Pfd.] erhält, wie viel Pfund erhält man für einen Thaler?

10) Das Licht durchläuft den Weg von der Sonne zur Erde, welcher nach den neuesten Untersuchungen im Mittel 19846794 geogr. Meilen beträgt, mit gleichförmiger Geschwindigkeit in 8 Min. und 18 Sec. Wie viel Meilen legt dasselbe in jeder Secunde zurück?

11) Ein sich gleichförmig bewegender Körper legt in t Secunden s Meter zurück. Wie viel in einer Secunde?

12) Wenn eine Kanonenkugel in einer Secunde 570 Meter, ein mit aller Kraft aus der Hand geworfener Stein in derselben Zeit 19 Meter zurücklegt, wie oftmal ist die Geschwindigkeit der Kanonenkugel größer, als die des Steines?

13) Wem ist der Dividend eines Quotienten gleich? Wem der Divisor? Welche Zahl hat man an die Stelle von x zu setzen, wenn α) $x : 7 = 9$, β) $x : 23 = 17$ werden soll? Wie groß ist y, wenn γ) $35 : y = 7$, δ) $703 : y = 19$ ist?

14) m Pfennige α) wie viel Silbergroschen, β) wie viel Thaler?

15) Wenn mit einem gewissen Vorrathe an Proviant ein Mann 91 Tage [c Tage] auskommt, wie lange werden mit demselben 13 Mann [n Mann] auskommen?

16) Wenn an einer Arbeit ein Mann 54 Tage gebraucht, wie viel Mann sind erforderlich, diese Arbeit in 9 Tagen zu vollenden?

17) Ein Arbeiter vollendet eine Arbeit in m Tagen. In welcher Zeit werden n Arbeiter mit derselben fertig?

18) Ein rechtwinkeliger Garten hat 4371 [m] Quadrat-Meter Inhalt und 93 [p] Meter in der Länge. Wie viel Meter hat derselbe in der Breite?

19) Wenn ein Capital in einem Jahre den zwanzigsten Theil an Zinsen bringt, wie viel Zinsen geben 8780 Gulden [n Gulden]?

20) In einer Taschenuhr befinden sich zwei Räder, welche mit ihren Zähnen in einander greifen. Das große hat 54 [n], das

kleine 6 Zähne [r Zähne]. Wie oftmal dreht sich das kleine Rad um, wenn sich das große einmal umdreht?

21) Das Hinterrad eines Wagens habe 15 Fuß [t Fuß] im Umfange, das Vorderrad 9 Fuß [u Fuß]. Wie oftmal dreht sich das eine dieser Räder schneller um, als das andere?

22) Wie oftmal bewegt sich der Minutenzeiger einer Uhr schneller, als der Stundenzeiger?

23) Wie groß sind x, y, z, wenn 1) $x \cdot m = p$, 2) $y : n = q$, 3) $a : z = c$ werden soll?

§. 5.

Begriff und Anwendung der Potenzirung.

1) Was heißt eine Zahl mit einer anderen potenziren? Was ist Potenz, Basis, Grundzahl oder Dignand, und Exponent? Wie wird eine Potenz bezeichnet?

2) Wie groß sind: a) 3^2, b) 4^3, c) 2^{10}, d) 10^2 e) 2^4, f) 4^2?

3) Die Basis einer Potenz sei 4, der Exponent 5. Wie heißt die Potenz? Wie, wenn die Basis y und der Exponent x heißt?

4) Es soll hingeschrieben werden: α) n zur m-ten Potenz; β) die x-te Potenz von 3; γ) p hoch q; δ) die $x + y$-te Potenz von a.

5) Wenn $x^y = z$ und $x = 5$, $y = 7$ ist, wie groß ist z?

6) Wie wird das aus 7 gleichen Factoren 3 gebildete Product bezeichnet, und welcher Zahl ist dasselbe gleich?

7) Wie wird α) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ und wie β) das aus x gleichen Factoren m gebildete Product bezeichnet?

8) a) Wie viel Quadratmeter hält ein Quadrat von n Meter Länge; b) wie viel Kubikmeter ein Würfel von n Meter Höhe?

9) Wie lange haben die sieben Könige Roms regiert, wenn die Anzahl der Jahre der fünften Potenz von drei gleich ist?

10) Von Erbauung der Stadt Rom bis zum Ende des ersten punischen Krieges werden 8^3 Jahre gezählt. Wie viel Jahre sind es?

(In folgenden Beispielen sollen die Resultate sowohl ausgerechnet, als auch in Form einer Potenz angegeben werden.)

11) Wenn Einer täglich 7 Francs ausgibt, wie viel macht es in sieben Wochen?

12) Wenn Einer monatlich 12 Pfund gebraucht, für das Pfund 12 Gulden bezahlt, wie viel wird er in 12 Jahren bezahlen müssen?

13) Wie viel Pfennige kosten 12 Dutzend Tassen, wenn jede Tasse 12 Silbergroschen kostet?

14) Wie viel Schachteln befinden sich in 12 Kisten, wenn jede Kiste 12 Pakete enthält, in jedem Pakete sich 12 Dutzend große

Schachteln befinden und jede Schachtel eilf kleinere in sich eingeschlossen enthält?

15) Wie viel Stücke erhält man, wenn man einen Apfel in 4 Theile, jeden Theil nochmals in 4 Theile u. s. w. fünfmal hinter einander theilt?

16) Wie viel Stücke erhält man, wenn man eine Linie in m Theile, jeden Theil nochmals in m Theile u. s. w. $x$mal hinter einander theilt?

17) Wie viel Eltern, Großeltern, Urgroßeltern u. s. w. bis zum zehnten Grade hinauf könntest du haben?

18) Wenn ein Malter Roggen im Durchschnitte jährlich 9 Malter [a Malter] gibt, und wenn jedes Jahr das im vorhergehenden Jahr Gewonnene ausgesäet wird, wie viel erhält man aus einem Malter nach 7 Jahren? wie viel nach n Jahren?

19) Ich kaufe 3 Pfund Waare und gewinne beim Verkaufe doppelt so viel, als mir die Waare gekostet hat. Für alles eingelöste Geld kaufe ich mir zum zweiten, dritten u. s. w. sechsten Male von derselben Waare. Wie viel Pfund werde ich zuletzt kaufen können?

20) Jemand mischt einen Tropfen einer Flüssigkeit mit 24 Tropfen Wasser, nimmt von dieser Mischung einen Tropfen, setzt ihn wieder zu 24 Tropfen Wasser u. s. w. sechsmal hinter einander. Wie stark wird die Verdünnung des ersten Tropfens sein?

§. 6.

Gebrauch der Klammern (Parenthesen).*)

1) Zu berechnen: α) $39 + 28 - 9$, β) $39 + (28 - 9)$, γ) $39 - 28 - 9$, δ) $39 - (28 - 9)$; ε) hinzuschreiben und auszurechnen: 76 vermindert um die Summe der Zahlen 27 und 13; ferner ζ) 25 vermehrt um die um 6 verminderte Zahl 23; η) 147 vermindert um die Summe der Zahlen 27 und 39; endlich ϑ) 86 vermindert um die um 97 verkleinerte Zahl 118.

2) Wie unterscheidet sich $a - b + c$ von $a - (b + c)$? Wie $a - (b - c)$ von $a - b - c$? Was wird aus jeder der Formeln, α) wenn $a = 8$, $b = 3$, $c = 1$, β) wenn $a = 36$, $b = 17$, $c = 2$ gesetzt wird?

3) Folgende Ausdrücke sollen berechnet werden:

1) $12 - 7 - (2+1)$; 2) $12 - 7 - 2+1$;
3) $12 - (7-2+1)$; 4) $12 - (7-2)+1$;
5) $12 - [7-(2+1)]$; 6) $63 - [24-(15-8)]$;
7) $63 - [24-15-8]$; 8) $63 - 24 - (15-8)$;
9) $63 - 24 - 15 - 8$; 10) $79-38-17-14-2+9$;
11) $79-[38-17-14-2+9]$; 12) $79-(38-17-14)-2+9$;

*) Die Klammern kommen zuerst bei Girard (1629) vor.

13) $79 - [38-17-14] - [2+9]$;
14) $79 - [38 - (17-14-2) + 9]$;
15) $79 - [38 - (17-14) - (2+9)]$;
16) $79 - [38 - 17 - (14-2) + 9]$;
17) $79 - [38 - (17 - [14-2] + 9)]$;
18) $79 - [38 - (17 - [14-2]) + 9]$;
19) $79 - [38 - (17 - 14 - 2 + 9)]$.

4) Folgende Beispiele sollen berechnet werden:
1) $17 - 8 - 5 - 1 + 3$; 2) $17 - (8-5) - [1+3]$;
3) $17 - [8 - (5-1) + 3]$; 4) $17 - [8-(5-1+3)]$;
5) $17 - 8 - (5-1+3)$; 6) $17 - [8-(5-[1+3])]$.

5) Hinzuschreiben: α) m vermindert um die Summe $p + q$; β) die Differenz $x - y$ vermindert um die Differenz $b - c$.

6) Man vermehre die Zahl a um b, ziehe, was herauskommt, von c ab, addire die Differenz zu m und ziehe die ganze Summe von d ab. Es soll die Formel berechnet werden: α) für $a = 3$, $b = 5$, $c = 15$, $m = 2$, $d = 13$; ebenso β) für $a = 6$, $b = 7$, $c = 18$, $m = 1$, $d = 9$.

7) Auf welche Art müssen Klammern angebracht werden, wenn aus $m-n+p-q$ für $m = 8, n = 3, p = 1, q = 2$ die Werthe α) 2, β) 4 und γ) 6 entstehen sollen?

8) Was wird aus $7-3$, wenn an die Stelle von 3 der gleichbedeutende Werth $8-5$ gesetzt wird? Was wird aus $8+15$, wenn für 15 der gleichbedeutende Werth $9+6$ gesetzt wird? Was wird aus $a - (b-c)$, wenn $m+n$ an die Stelle von a, $p - [q-r]$ an die Stelle von b, und $x+y$ an die Stelle von c gesetzt wird?

9) Folgende Ausdrücke zu berechnen:
1) $a(b-c+d)$; 2) $ab-c+d$; 3) $a[b-(c+d)]$;
4) $(a-b) \cdot (c-d)$; 5) $(a-b) \cdot c-d$; 6) $a - b[c-d]$;
7) $a-bc-d$; 8) $(a+b-c)d$; 9) $a+b-c \cdot d$;
10) $a+(b-c) \cdot d$ α) für $a = 50$, $b = 9$, $c = 5$, $d = 2$; β) für $a = 200$, $b = 21$, $c = 7$, $d = 6$; ferner:
11) $[(x+2)x+5]x$, 12) $[([(x+4)x-3]x + 7)x+8]x$,
13) $(50-[35-(10-x)x]x)x$ für α) $x = 1$, β) $x = 2$, γ) $x = 3$, δ) $x = 4$.

10) α) Die Summe $a+b$ soll mit c multiplicirt werden und β) die Zahl d mit der um die Summe $p+q$ verminderten Zahl r.

11) Man vermindere a um b, ziehe, was herauskommt, von d ab und multiplicire das Resultat mit der um m verminderten Zahl n.

12) Was wird aus dem Ausdrucke $b+b\cdot c-c$, wenn in demselben $m+n$ an die Stelle von b, und $p-q$ an die Stelle von c gesetzt wird?

13) Hinzuschreiben: 1) Summe $x+y$ mal Differenz $z-u$; 2) x vermehrt um das Product aus y mal Differenz $z-u$; 3) x nebst dem Producte aus y mal z, vermindert um u; 4) Summe $x+y$ mal z vermindert um u.

14) α) $ab\cdot c$, β) $a\cdot(bc)$, γ) $a\cdot(bc)\cdot d$, δ) $ab\cdot(cd)$, ε) $a[b\cdot(cd)]$, ζ) $abcd$, η) $a^2\cdot(a^3b)b^4$ für $a=4$, $b=5$, $c=6$, $d=7$ zu berechnen.

15) α) Folgende Ausdrücke zu berechnen: 1) $(a-b+c):d$, 2) $a-b+(c:d)$, 3) $a-[(b+c):d]$, 4) $(a-b):(c+d)$, 5) $a-[b:c]+d$, 6) $(a-b):c+d$ für α) $a=36$, $b=12$, $c=4$, $d=2$. β) In den obigen Quotienten soll an die Stelle des Doppelpunctes der Querstrich gesetzt werden.

16) In den Ausdrücken: α) $m-\frac{n+p}{q}$, β) $t-\frac{u}{v+x}$, γ) $\frac{r+s}{t-x}$ soll an die Stelle des Querstrichs der Doppelpunct gesetzt werden.

17) Man dividire die Differenz der Zahlen x und y durch z, ziehe den Quotienten von t ab und multiplicire das Resultat mit u.

18) Folgende Ausdrücke sollen berechnet werden: α) $ab:c$, β) $ab:(cd)$, γ) $a\cdot b:c\cdot d$, δ) $a\cdot\frac{b}{cd}$, ε) $a\cdot\frac{b}{c}\cdot d$, ζ) $a:b:(c:d)$ für $a=108$, $b=12$, $c=6$, $d=2$.

19) α) $\frac{abc}{d:e}:\frac{m}{d}$, β) $\frac{ab}{c}:\frac{de}{m}$ für $a=30$, $b=10$, $c=5$, $d=8$, $e=4$, $m=16$ zu berechnen.

20) Es soll x mit 3 multiplicirt, das Product in m dividirt, der Quotient endlich mit n multiplicirt werden.

21) Zur Auffindung der Zeit der Ostern im Verlaufe unseres Jahrhunderts hat der berühmte Mathematiker Gauß*) folgende Formeln gegeben: Bezeichnet n das laufende Jahr unseres Jahrhunderts (z. B. 68 für das Jahr 1868), bedeuten ferner a, b, c, d und e bezüglich die kleinsten Reste der Divisionen $(n+14):19$, $n:4$, $(n+1):7$, $(19a+23):30$ und $2(b+2c+3d+2):7$, so wird Ostersonntag auf den $(22+d+e)$ten März, oder den $(d+e-9)$ten April fallen. Nach vorstehenden Formeln soll Ostern für die nächstfolgenden 5 Jahre berechnet werden.

*) Gauß Mon. Corr. 1800 Aug. Delambre hat in den Corr. des tems 1817 p. 307 den Beweis mitgetheilt.

Erster Abschnitt.

Anwendung der Sätze über Summen und Differenzen.

§. 7.

I. $a + b = b + a$.

II. $(a+b) + c = (a+c) + b = a + (b+c)$ ꝛc.

1) Wie wird eine Zahl zu einer Summe und wie eine Summe zu einer Zahl addirt?

2) Man vermehre $x+y$ um p; eben so x um $y+z$.

3) Man addire $a+b$ zu c und vermehre die Summe um d.

4) Zu 6 Thlrn. 7 Sgr. kommen 16 Sgr. hinzu. Wie viel macht es zusammen? Welche der obigen Formeln kommt bei Berechnung dieses und des folgenden Beispiels in Anwendung?

5) Zu 23 Loth kommen 6 Pfund 17 Loth. Wie viel macht es zusammen?

6) Wie werden die Summen a) $99997 + 83752 + 3$, b) $17+(2765+99983)$ auf die kürzeste Art berechnet?

7) $3995+29997+5+3$ auf die kürzeste Art zu berechnen.

8) Eben so: $9999+9998+9996+9995+4+2+1+5$.

9) Auf einem in eine Spitze zulaufenden Dache befinden sich 100 Reihen Schiefer: in der ersten Reihe 1, in der zweiten 2, in der dritten 3 u. s. w., in der letzten Reihe 100 Schiefer. Wie viel Schiefer macht es im Ganzen?

Anleitung. Man addire zuerst die Schiefer der ersten und letzten Reihe, dann die der zweiten und vorletzten, die der dritten und drittletzten Reihe u. s. w.

10) Vermehre m um m, und die erhaltene Summe wieder um m.

11) Was kann man für $n+n+n+n+n+n+n$ setzen?

12) Was versteht man unter Coefficient?

13) Auszuführen: $12a+9a+4a+3a+a$.

14) Man vermehre $9b$ um $7b$, und das, was herauskommt, um $17b$.

Auszuführen:

15) α) $3a+5b+7a$; β) $6a+9b+11b$.

16) α) $19m + (6m+3n)$; β) $20b + (7a+14b)$.

17) $119m+27n+15n+48m+126n+m$.
18) $14n+(24p+8n)+(13p+15n)$.
19) $5x+[8y+(3y+4x)]+2x$.
20) $3a+6b+7c+(9a+2c+4b)+(7c+12a+14b)$.
21) $9m+6n+7p+(13m+11n+8p)+(5n+6p+7m)+(8n+13m+9p)+(17p+16n+13m)$.
22) $17x+75y+39z+228u+(19x+18y+38z)+(23x+25y+49u)+(41x+28z+95u)+(82y+195z+28u)$.
23) $135m+578n+212p+513q+817r+(1014p+1113m+718r)+(327q+219n)+(87m+487q+781n+282r)+(422n+486p+673q)+(288p+665m+183r)$.

§. 8.

I. $a-b+b=a$. II. $a+b-b=a$.
III. $a-(a-b)=b$. IV. $a-a=0$.

1) α) $3a+9b-9b$; β) $7a-11b+11b$.
2) α) $18p+15q-18p$; β) $7a+5b+3b-8b$.
3) α) $9a+2b+2a-11a$; β) $3c+4a+(7b+6b)-13b-4a$.
4) $7m+17n-(8b+4b)+12b-17n$.
5) α) $x+(y-z)-(y-z)$; β) $23p-(14q-3n)+(14q-3n)$.
6) $48m+(9n-7q)-(9n-7q)+12m$.
7) $a-b-(b+c-d)+(b+c-d)+b+b-a$.
8) $11a+11b+11c-11d+11d-11c+11b$.
9) α) $m-m$; β) $7m-(2m+5m)$; γ) $a-36-(a-36)$.
10) α) $a-b+c-(a-b)$; β) $m-n+o+(p-q)-(m-n+o)+q$.

11) Ein Spieler besaß 23 Thlr. 15 Sgr., verlor zuerst 17 Thlr. 19 Sgr. und gewann hierauf 17 Thlr. 19 Sgr. Wie viel behielt er?

12) Jemand, der 9712 Francs Schulden hat, macht nach einiger Zeit 2813 Francs Schulden hinzu, nimmt aber späterhin 9712 Francs ein. Wie viel Schulden behält er?

13) Ein Schiff befindet sich $29\frac{3}{4}$ Meilen [a Meilen] südlich von einem Orte. Durch einen starken Nordwind wird dasselbe zuerst $17\frac{5}{8}$ [b Meilen] und hierauf durch einen plötzlich eintretenden Südwind $29\frac{3}{4}$ Meilen [a Meilen] weit getrieben. Wie weit befindet sich das Schiff von dem Orte, von dem es ausging?

14) Eine telegraphische Nachricht geht von Berlin um 2 Uhr 13 Minuten 45 Secunden nach Köln und gelangt daselbst in Zeit von 25 Minuten 41 Secunden vollständig an. Die kölner Uhr geht aber in Bezug auf die berliner Uhr 25 Minuten 41 Secunden nach. Um wie viel Uhr kölner Zeit kommt die Nachricht an?

15) Jemand besitzt 70 Gulden 13 Kreuzer, gewinnt im Spiele Anfangs 9 Francs 25 Centimes, hierauf 15 Pfund Sterling 7 Shilling, verliert alsdann 9 Francs 25 Centimes und zuletzt noch 70 Gulden 13 Kreuzer. Wie viel Geld bleibt ihm übrig?

16) Ein Luftball steigt zuerst a Fuß in die Höhe und hierauf b Fuß, fällt alsdann a Fuß, steigt wieder c Fuß, und fällt zuletzt b Fuß. Wie hoch steht derselbe über dem Orte, von dem er aufstieg?

17) In der linken Hand habe ich $a-b+c-d$, in der rechten $a+b-c+d$ Silbergroschen. Ich bringe aus der rechten in die linke d, hierauf aus der linken in die rechte c, und zuletzt aus der rechten in die linke b Silbergroschen. Wie viel habe ich nun in jeder der beiden Hände?

18) Welche Größe muß zu $8p-3q$ addirt werden, damit $8p$ herauskommt?

19) Welche Größe muß zu $3m-(5n-2b)$ addirt werden, damit $3m$ herauskommt?

20) α) $p-(p-q)$; β) $15a-(15a-23b)$; γ) $27m+19m-(46m-12n)$; δ) $x-y-(x-y-z)$.

21) Ich habe 7 Thlr. [m Gulden] und gebe 7 Thlr. weniger 13 Sgr. [m Gulden weniger n Kreuzer] aus. Wie viel behalte ich übrig?

22) $34m - (34m-13n) + (34p-13n)$ auszuführen.

23) Warum ist $a+b = (a-m) + (b+m)$? und wie läßt sich der Sinn dieser Formel in Worten aussprechen?

§. 9.

$$\text{I.}\quad a + b - c = a - c + b.$$
$$\text{II.}\quad a - b - c = a - c - b.$$

1) Wie wird eine Zahl von einer Summe subtrahirt?
2) Wie wird eine Zahl zu einer Differenz addirt?
3) Wie wird eine Zahl von einer Differenz subtrahirt?

Auszuführen:

4) α) $120+2b+3d-2b$; β) $5n+8p+129-5n-8p$.

5) α) $127+43x-49$; β) $120+14y+13z-64-13z$.

6) α) $84589+8783-4589$; β) $28654+9999-18654$, mit Anwendung der Formel I. zu berechnen.

7) In einem Weinfasse befinden sich 2 preuß. Ohm 93 Quart; hierzu kommen 5 Ohm 67 Quart, und werden alsdann 93 Quart herausgezapft. Wie viel bleibt zurück? (Formel I.)

8) α) $3a-7b+2a$; β) $17m-9n+16m$; γ) $34p-28q+12p+7p$; δ) $x-y+x+y$.
9) α) $4m+8n-16p+7n$; β) $6m+5n-17q+8n+8m$.
10) α) $7q-8r-5t+12q$; β) $25x-8y-8z+14x+8y$.
11) α) $24m-13p-12q+13p$;
β) $24m+13n-4q-7r+8n+4m$.
12) α) $3872-983+111$; β) $60000-8873+9873$. (I.)
13) $5a+7b-8c-7b$. Aufl.: $5a+7b-7b-8c = 5a-8c$.
14) $13a+14b-15c-14b$.
15) $28b+36a+36c-28b-36c$.
16) α) $212-35x-148$; β) $436+48y-20z-223-48y$.
17) $35p+28q-13r-20s-35p$.
18) α) $87768-8989-7768$; β) $583291-99998-483291$ nach Formel II. zu berechnen:

§. 10.

$$a-(b+c) = a-b-c = a-c-b.$$

1) Wie wird von einer Zahl eine Summe subtrahirt? Wie wird eine Zahl von einer Differenz subtrahirt?
2) α) $14m+13n-(13n+6p)$; β) $56+17p-(19+q)$.
3) $29a+17b+12a+13b-[4c+29a+17b]$.
4) $24a-6a$.
5) α) $23p-9p$; β) $45q-17q$.
6) Wie werden zwei gleichnamige Größen mit ungleichen Coefficienten von einander subtrahirt?
7) $17a-2a-7a+22b-3b-19b$.
8) $17m+23n-(15n+4m)$.
9) $48p+20q+13r-(7r+8p)$.
10) α) $34a-29-59$; β) $44p-9x-18x$.
11) $37p-25q-(14q+12p)$.
12) $43m-18n-20p-(23m+14p)$.
13) Von 17 Thlrn. weniger 16 Sgr. 7 Pfg., welche ich besitze, gebe ich 13 Sgr. 5 Pfg. aus. Wie viel behalte ich übrig?
14) Von 10 Centnern Waare verkaufe ich zuerst 3 Centner 47 Pfund 16 Loth, hierauf 4 Ctr. 9 Pfd. 12 Loth und zuletzt 1 Ctr. 53 Pfd. 4 Loth. Wie viel behalte ich übrig?
15) Nach obiger Formel zu berechnen:
α) $37000-913-514-5573$;
β) $58769-9999-9997-3-9991-1-9998-9-9993-2-7$.
16) Warum ist $a-b=a+c-(b+c)$, und wie heißt dieser Satz in Worten?

§. 11.

I. $a + (b-c) = a + b - c = a - c + b.$
II. $(a-b) + (c-d) = (a+c) - (b+d).$

1) α) Wie wird eine Differenz zu einer Zahl addirt? β) Wie werden zwei Differenzen zu einander addirt?

2) Es soll 657 um die Differenz der beiden Zahlen 3000 und 357 vermehrt werden.

3) Zu 98372 soll die um 7372 verminderte Zahl 11000 addirt werden.

4) α) $7a + (5a-3b)$; β) $12m + (7m-9n)$.

5) $22p+17q+(23q-18p)$; $47p-28q-17r+(28q-5r)$.

6) $27q-14r + (20q-7r)$.

7) $39x-12y + [13x - (51x+12y)]$.

8) Ein Bote geht um 2 Uhr 17 Minuten von einem Orte A nach einem Orte B, und gebraucht an Zeit 2 Stunden weniger 13 Minuten. Um wie viel Uhr langt er in B an?

9) α) 1837+9994; β) 58776+99987 zu berechnen. (I.)

10) 9 Centner 37 Pfund 2 Loth preuß. Neugewicht soll um 3 Centner 98 Pfund 28 Loth vermehrt werden.

11) α) $(x+y) + (x-y)$; β) $(8m+9n) + (8m-9n)$.

12) α) $7a-3b + (9a-8b)$; β) $6x-7y + (3x-9y)$. (Formel II.)

13) $(a-b) + (a-b) + (a-b) + (a-b) + (a-b)$.

§. 12.

$$a - (b-c) = a-b+c = a+c-b = c+a-b.$$

1) Wie wird eine Differenz von einer Zahl subtrahirt?

2) Wie wird eine Zahl zu einer Differenz addirt? Wie wird von einer Summe eine Zahl subtrahirt, welche größer als einer der Summanden ist?

3) α) $p - (q-r)$; β) $6a-(3b-5c)$; γ) $800-(100-1)$.

4) α) $4a - (7b-5a)$; β) $24m - (3n-14m)$.

5) $14m+9n-(9m-7n)$; $27p+28q-13r-(17p-15q)$.

6) Was wird aus $p-q$ für $p = 24a+13b$ und $q = 12a-19b$?

7) α) $x + y - (x-y)$; β) $8m+9n - (8m-9n)$.

8) $36m+12n - (6n-4m) - (28m-18n)$.

9) α) $22p-13q - (22p-17q)$; β) $r-[q-(t-u)]$.

10) $24t+28u-13v+18x - (28u-13v-18x)$.

11) Wenn ich 3 Thlr. weniger 7 Sgr. [m Gulden weniger p Kreuzer] zu bezahlen habe, wie viel erhalte ich an 5 Thalern [q Gulden] zurück? (Nach der Formel zu berechnen.)

12) Ein Schreiner sägt von einem 12 Fuß langen Brette ein Stück von 7 Fuß weniger 3 Zoll Länge ab. Wie lang ist das übrig bleibende Stück? (Formel.)

13) Ich werde über 2 Monate 12 Jahre alt; mein Bruder wird heute 14 Jahre alt. Um wie viel bin ich jünger, als mein Bruder? (Formel.)

14) Jemand wurde am Christtage 1769 geboren und starb 1831 am 9. Januar. Wie alt ist er geworden? (Formel.)

15) α) $724-99$, β) $576-399$, γ) $3875-2999$, δ) $8450980-7999992$ nach obiger Formel zu berechnen.

16) $3a-17b+5b$.

Auflös.: $3a-17b+5b = 3a-(17b-5b) = 3a-12b$; auch nach §. 10 u. §. 8: $3a-17b+5b = 3a-(12b+5b)+5b = 3a-12b-5b+5b = 3a-12b$.

17) α) $7a-32b+19b$; β) $25p+17x-29y-42x+4y$.

18) $25p+17x+(28p-29x)$.

19) Jemand hat 19 Pfund Sterling weniger 13 Shilling und erhält 9 Shilling. Wie viel besitzt er?

20) Kann $3a-2b+2c$ als eine Differenz angesehen werden, deren Minuend $3a$ ist? Wie heißt der Subtrahend?

21) Kann $7a-2b-3c+5d-6e$ als eine Differenz betrachtet werden, deren Minuend $7a-3c$ ist?

22) Warum ist $a-b=a-c-(b-c)$, und wie heißt dieser Satz in Worten?

§. 13 a.

Vereinigung mehrgliederiger Ausdrücke.

(Nach §. 7. — §. 12.)

1) α) $5a+3b+9a$; β) $7a+13b+12b$; γ) $3a+9b-3a$; δ) $6a+7b-7b$; ε) $18a+13b-11a$; ζ) $15a+14b-9b$; η) $16a+19b-24b$; ϑ) $9a+13b-14a$; ι) $27a-6b+13a$; $\varkappa$) $25a-9b+9b$; λ) $8a-7b+11b$; μ) $29a-13b+5b$; ν) $24a-7b-16a$; ξ) $36a-8b-13b$; o) $17a-18b-11b$; π) $25a+13b+58b-16n-12n+18q-9q+27p-38p$.

2) α) $8x+5y+3x-2y$; β) $9x+8y-9x+3z-2y$; γ) $24a+23b-7b-19b$; δ) $25a+18b-31a+8b$; ε) $26a-13b+13b-8x+14x$; ζ) $5a-8b+7b-2a$; η) $16a-17b-19b-24b$; ϑ) $59x+18t-28y+48t-55u+28y-118t-45u-x$.

3) $247r+84b-529+33a-98b+989$.

4) $127a-19a+15a+35b-15b+45b-13a-7a-25a-35b-18b.$
5) $27m-28n-108+45n-17m-36+9n+170.$
6) $27a+13b-12c-18a-19b-5c-9c+11b.$
7) $9997a-698b+2348a-572b+36b.$
8) $24a-13m-6n+15a+22p+n-3p-2a-37a+13m+5n.$
9) $45a+13b-48a-39a+76b-12b-35a.$
10) $3a+5b+9a-2a-8b-b-11a-6a+3b+7a+2b-b.$
11) $17x+24y-13z-5x+8y+2z-9x-28y+6z+3x-2y-5z.$
12) $39y-18u+16t-19u-18t-14y+45u-27t+16y.$

Auszuführen:

13) $26a+38b-12c+(37a-14b-18c).$
14) $17a-14b-12c-13d+(25a+18b+12c+4d).$
15) $37a-4b-17c+15d-6f-8h+(3c-31a+9b-5d-h-11f).$
16) $a-2b-3c+4d+(5b-6a-7c+8d)+(9a-10b+11c-12d)+(13a-10b+9c-8d)+(7a-6b+5c+4d)+(3a-2b-c).$
17) $18a+9b-7c+9d+(3b-7a-7d-6c)+(13c-4d+9a-5b)+(3d-7b-18c+4a).$
18) $24m-17q+15p-13n+(11q-10p-8n+3m)+(9n-6m-4q-7m-5n)+(8q-4p-12m+18n).$
19) $3x+5y-3z+(8t-3y-7x)+(8y-4x)+(13x-7z-7t-14)+(11z-13t-9)+(5t-8z-17y-1)+(2x+17).$
20) Wie viel machen 9998, 9997, 9993, 9987, 99983 zusammen?
21) $(x-y)+(x-y)+(x-y)+(x-y)+(x-y)+(x-y)+(x-y)+(x-y)+(x-y).$
22) $13x-8y+(14x-9y)+(5y-2x)+(7y-3x).$
23) Die zwanzig auf 9999980 hinter einander folgenden Zahlen 9999981, 9999982 u. s. w. sollen zusammengezählt werden.
24) α) $7a+3b-(2a+b)$; β) $9a+14b-(4a-3b)$; γ) $15a+12b-(a-3b)-(9a+6b).$
25) $7a+12b+3c-(2a+5b+2c).$
26) $6a-5b-5c-(2a+4b+3c).$
27) $18a-24b+23c-(16a+14b-13c).$
28) $26m-24n-48p-20q-(14m-28n-19p+18q).$
29) $3m-38n-57p-15q-[12p-38q+48n-50m].$
30) $13g+15h-17k-13l+14n-(14n+15h-13l-17k).$
31) $7a-5b-3c+4g-9k-24l-38n-(24g+7a-24l+8c-16b+18n).$

32) $17a-9b-8c-(6a-5b-3c)-(7a+9b-8c)$.

33) $13a-17b-5c-(14a-6b-11c)+(7a-8b+9c)-(5a-18b+14c)$.

34) $13a-15b-7c-11d+(7a-6b+8c+3d)-(6d+5b-7c+2a)-(5c-10d-28b+17a)$.

35) $3a-7b+8c-4d+8e+(7a+6e+9c-5d+8b)-(d+2c-15b-5a-3e)$.

36) $4x-8y-19q-3z-(24x-18y-34p-12q-13z)-(14q-17q-8z)$.

37) $15y+6x-[3y-(8z+4x)]$.
Aufl.: $15y+6x-3y+(8z+4x)=12y+10x+8z$.

38) $37x-48y-[18z-(12x+3y)-(2z-4y)]-33z$.
Aufl.: $49x-49y-49z$.

39) $6x-8y-2z-[4x-8y-(2z-5y)-(4x+3y)+(8x+2z)]$.

40) $44x+[48y-(6z+3y-7x)+4z]-[48y-8x+2z-(4x+y)]$.

41) $4x-[(a-4x)+(3y+17a)-(98x+3y)]$.

42) $13x-36y-27z-[7y+5z-(7x+35y-28z)+(15x+7z)]-[6z-(11y+9x)-(83z-11x-11y)]-(3x-8y)$.

43) $25a-19b-[3b-[4a-(5b-6c)]-8a]$.

44) $6m+[4m-[8n-(2m+4n)-22n]-7n]-[7n+[9m-(3n+4m)+8n]+6m]$. Aufl.: $m-n$.

45) Was wird aus $m-(n-o)$, wenn $n=7m-(8p+3q)$ und $o=2m-(8p-3q)$ gesetzt wird?

46) Welche Zahl muß zu $5p-[7q+3p-(2p+q)]$ addirt werden, damit $4p-[14q+(2p-7q)-3p]$ herauskommt?

§. 13b. Wiederholungs-Beispiele.

1) Wenn der Einkaufspreis einer Waare mit e, der Verkaufspreis mit v und Gewinn mit g, der Schaden mit s bezeichnet werden, welche Beziehung findet α) zwischen e, v und g, β) zwischen e, v und s Statt?

2) Wenn n eine ganze Zahl bedeutet, wie heißen alsdann die vier folgenden, wie die vier vorhergehenden ganzen Zahlen?

3) Einer geht p Schritte vorwärts, m Schritte rückwärts, r Schritte rückwärts und zuletzt s Schritte vorwärts; wie viel Schritte ist er von dem Orte entfernt, von dem er ausging?

4) Ein Ort A hat n Stunden α) früher, β) später Mittag, als ein anderer Ort B. Wenn nun an dem ersten Orte p Uhr ist, wie viel Uhr ist in demselben Momente an dem zweiten Orte?

5) Von drei Oertern habe der erste die nördliche geographische Breite a, der zweite die nördliche geographische Breite b,

der dritte die **südliche** geographische Breite c. Um wie viel Grade sind die durch je zwei der Oerter gelegten Parallelkreise von einander entfernt? Wie heißen die Antworten für Berlin $52^{0}\ 30'\ 17''$ nördlicher Breite, Wien $48^{0}\ 12'\ 35''$ nördlicher Breite und Cap der guten Hoffnung $33^{0}\ 56'\ 3''$ südlicher Breite?

6) α) Von drei Oertern liegt der erste m Grad östlich, der zweite n Grad östlich, der dritte p Grad westlich von der Insel Ferro. Wie groß sind die Längen-Unterschiede je zweier dieser Oerter? Wie heißen die Antworten für Petersburg $47^{0}\ 58'\ 8''$ östlicher Länge, Rom $30^{0}\ 8'\ 30''$ östlicher Länge und Philadelphia $57^{0}\ 29'\ 22''$ westlicher Länge von Ferro? Wie viel Uhr ist in Petersburg, wie viel in Philadelphia, wenn in Rom Mittags 12 Uhr ist? β) Ein Ort hat die nördliche Breite a, ein anderer liegt b Grade mehr südlich. Welches ist die Breite des letzteren Ortes?

7) Eine Nachricht geht durch den elektrischen Telegraphen um 7 Uhr 53 Minuten 12 Secunden von Berlin nach Paris und gebraucht zur Ueberbringung 9 Minuten 8 Secunden. Um wie viel Uhr **pariser** Zeit kommt die Nachricht an, wenn die pariser Uhr 44 Minuten 14 Secunden **nach** der berliner Uhr geht?

8) 1 Pfund Waare kostet n Gulden, was kosten p Pfund? Wie viel Pfund erhält man aber für p Gulden?

9) Wie viel Ziegelsteine sind in p rechtwinkeligen Haufen enthalten, wenn jeder Haufen p Steine in der Länge, p in der Breite und p in der Höhe enthält?

10) Eine wiener Mark Münzgewicht hält 2^{16} Richtpfennige. Wie viel macht dieses aus?

11) α) Ein Meter hat 10^{1} Decimeter, 10^{2} Centimeter, 10^{3} Millimeter und 10^{4} Dixmillimeter. Wie viel macht jedes aus? β) Eine Last preuß. Neugewicht hat $12 \, . \, 10^{9}$ Korn. Wie viel macht dieses aus?

12) Wenn m, n, p, q vier beliebige Zahlen bedeuten, wie drückt man alsdann in algebraischen Zeichen aus: a) die Summe der beiden ersten vermindert um die Summe der beiden letzten? b) die Summe der beiden ersten multiplicirt mit der Summe der beiden letzten? c) die Differenz der beiden ersten dividirt durch die Summe der beiden letzten? d) die Differenz der beiden letzten dividirt in das Product der beiden ersten? e) das Product der beiden ersten dividirt durch das Product der beiden letzten? f) das Product der beiden ersten dividirt durch den Quotienten der beiden letzten? g) die Summe der beiden ersten dividirt durch das Product der beiden letzten? h) den Quotienten der beiden ersten dividirt durch das Product der beiden letzten? i) den Quotienten der beiden ersten

dividirt durch die Differenz der beiden letzten? k) die Summe der drei ersten multiplicirt mit der letzten? l) das Product der Summe der beiden ersten und der dritten, vermindert um die vierte? m) die erste Zahl vermehrt um das Product der zweiten und dritten Zahl, und das, was herauskommt, dividirt in das Product der dritten und vierten Zahl?

13) Wie unterscheidet sich $(a+b)^2$ von α) $a+b^2$? β) a^2+b^2?

14) Zu berechnen: 1) $(a+b)^2$, 2) a^2+b^2, 3) $(a-b)^2$, 4) a^2-b^2, für α) $a = 4$, $b = 3$, β) $a = 12$, $b = 5$, γ) $a = 7$, $b = 3$.

15) Wenn p und q zwei beliebige Zahlen bedeuten, so soll hingeschrieben werden: 1) das Quadrat der Summe der beiden Zahlen; 2) die Summe der Quadrate der beiden Zahlen vermehrt um das doppelte Product derselben; 3) das Quadrat der Differenz der beiden Zahlen; 4) die Summe der Quadrate der beiden Zahlen vermindert um das doppelte Product der Zahlen; 5) die Summe der beiden Zahlen multiplicirt mit der Differenz derselben Zahlen; 6) die Differenz der Quadrate der beiden Zahlen.

16) Die Ausdrücke in Nr. 15 sollen für α) $p = 5$, $q = 2$; β) $p = 8$, $q = 5$, γ) $p = 13$, $q = 7$ berechnet werden.

17) Wem ist α) $(m+n) + (m-n)$, β) $(m+n) - (m-n)$ gleich? Welche Sätze lassen sich aus diesen Formeln aufstellen?

18) Was kommt heraus, wenn von einer Zahl die um n kleinere Zahl abgezogen wird?

19) Wenn $x+y+z = M$, $x+y-z = N$, $x-y+z = O$, $y+z-x = P$, wie groß ist alsdann α) $M+N+O+P$; β) $M-N+O-P$; γ) $M-N-O+P$; δ) $M-N-O-P$?

20) Wenn $A = 3x-2y+5z$, $B = 7x-8y+5z$, $C = 9x-5y+3z$, $D = 11x-3y-4z$, wie groß ist alsdann 1) $A+B+C+D$; 2) $A+B-C-D$; 3) $A-B-C+D$; 4) $A-(B-C-D)$; 5) $B-[A-(C-D)]$; 6) $B-[C-[A-(B+D)]]$; 7) $A+A+A+A+A$; 8) $D+D+D+D$?

21) Wenn $E = 5x+3y-7z$, $F = 8x-9y-3z$, $G = 9y-3x-7z$, $H = 8y-7x-7z$, wie groß ist α) $E-[F-(G-H)]$; β) $G-(F-[H-(E+G)])$?

22) Die acht Ausdrücke A bis H Nr. 20 und 21 sollen zu einander addirt, und von deren Summe sollen die einzelnen Summanden α) in der Reihenfolge $A, B \ldots H$, β) in der Reihenfolge $H, G \ldots A$ subtrahirt werden.

Zweiter Abschnitt.

Producte, Quotienten und Brüche, Theilbarkeit der Zahlen, Decimalbrüche, Verhältnisse und Proportionen.

A. Anwendung der Sätze von Producten und Quotienten.

§. 14.

I. $(p \pm q)n = pn \pm qn$. II. $m(a \pm b) = ma \pm mb$.

1) Wie wird eine Summe mit einer ganzen Zahl multiplicirt?
2) Wie wird eine Zahl mit einer Summe multiplicirt?
3) Wie wird eine Differenz mit einer ganzen Zahl multiplicirt?
4) Wie wird eine Zahl mit einer Differenz multiplicirt?
5) Wie werden Producte von gleichen Multiplicatoren oder von gleichen Multiplicanden zu einander addirt oder von einander subtrahirt?

Auszuführen:

6) $p \cdot (m+n)$; $m \cdot (x+1)$; $13 \times (y+z)$; $27(u+49)$; $x(x+1)$.
7) $(a+b) \times n$; $(a+17)p$; $(u+85) \cdot 97$; $(p+1)53$.
8) $x \cdot (y-z)$; $7(1-a)$; $(9-x) \times m$; $(12-p)8$; $y \cdot (y-1)$.
9) $a(a-b+c+d-e)$; $(p-q-r+t)t$; $78(x-98+o-z)$.
10) Was wird aus ax, wenn $x = y+z-u$ gesetzt wird?
11) Was wird aus dem Producte mn, wenn der Multiplicator sich um 7 vermehrt?
12) Ein Kaufmann kauft Waare, das Pfund zu m Sgr., und nimmt auf jedes Pfund n Sgr. Nutzen. Wie viel erhält er für p Pfund?
13) Multiplicirt man 73 mit 48, so erhält man 3504. Wie viel wird man zu dem Resultate hinzufügen müssen, wenn α) 75 mit 48, wie viel, wenn β) 73 mit 51 zu multipliciren ist?
14) Kostet 1 Centner 3 Thlr. 25 Sgr. 9 Pfg., so bezahlt man für 67 Centner 258 Thlr. 15 Sgr. 3 Pfg. Um wie viel muß man letztere Summe vermehren, wenn man für einen Centner 3 Thlr. 25 Sgr. 11 Pfg. bezahlen muß?

15) $98734 \cdot 27534 = 2718541956$. Wie groß ist $98737 \cdot 27534$, wie groß $98734 \cdot 27538$, wie groß $98737 \cdot 27538$?

16) $58764 \times 392514 = 23065692696$. Wie viel ist 58767×392514, wie viel 58764×392519?

17) $(1000-3) \cdot 37$; $99 \cdot 23$; 999×13; 9999×39; 99999×87.

18) Nach der Formel $m(a-b)$ zu multipliciren: α) 7 mit 996, β) 23 mit 996, γ) 29 mit 9993, δ) 35 mit 9993.

19) Ein Pfund kostet α) 3 Gulden weniger 7 Kreuzer, β) 6 Gulden weniger 3 Kreuzer. Wie viel kosten 17 Pfund?

20) α) 1 Pfund kostet 1 Thlr. 29 Sgr. 7 Pfg. Wie viel kosten 18 Pfund? (1 Thlr. 29 Sgr. 7 Pfg. = 2 Thlr. weniger 5 Pfg.) β) 1 Elle kostet 2 Thlr. 28 Sgr. 9 Pf. Wie viel kosten 12 Ellen?

21) In den folgenden Ausdrücken die Klammern fortzuschaffen: α) $[[x+5]x+7]x+3$; β) $[(x-3)x+5]x-91$; γ) $([(x-10)x+35]x-50)x+24$.

Zu vereinigen:

22) $5a+5b$. Aufl.: $5(a+b)$.

23) α) $7m-7n$; β) $9x-9$; γ) $py-p$.

24) α) $7a-7$; β) $5x+5y-20$.

25) α) $7x-7y+7z-21$; β) $9x-18y-24z-27$.

26) α) $mx+nx$; β) $ax+x$; γ) $xx-x$.

27) $py-qy+ry$.

28) α) $6a+6b+6c+30$; β) $13a-13b-13c-13$.

29) $(17m)(5a)-(17m)(3a)-(17m)b+(17m)(3b)+17m$.

30) α) $ap+mp+np-qp-p+pp$; β) $(m-n)x+(n-1)x$.

31) $11x+nx-mx+x+(m-1)x+x^2$.

32) Zu berechnen: $19 \cdot 58+27 \cdot 58+24 \cdot 58+13 \cdot 58+17 \cdot 58$.

33) Eben so: $127 \cdot 459-127 \cdot 324-127 \cdot 35$.

34) α) $(3p-2q)(x-y)+(5p+3q)(x-y)$; β) $(x+y)(x-y)+(x-y)(x-y)$; γ) $(x+y)(x+y)-(x-y)(x+y)$.

35) $3(a-b)+(m-n)(a-b)+(n-3)(a-b)$.

36) $(9m-4n)(a-b)-(5m-8n)(a-b)-(n+m)(a-b)$.

37) $(2p-3q)(p-q)+(5q-p)(p-q)-(p-q)^2-(4q-p)(p-q)$. Aufl.: $(p-q)^2$.

38) $(4a-5b+6c)(3a-2b-5c)-(4a-5b+6c)(2a+3b-4c)+(4a-5b+6c)(5a-6b-7c)-(4a-5b+6c)(5a-9b-11c)$.

39) Wie viel machen 17 Pfund Kaffee, jedes Pfund zu 12 Sgr. 6 Pfg., 17 Pfund Zucker, jedes Pfund zu 8 Sgr. 4 Pfg., und 17 Pfund Mandeln, jedes Pfund zu 9 Sgr. 2 Pfg., zusammen?

40) 37 Ellen, die Elle zu 3 Thlr. 7 Sgr. 5 Pfg.; 37 Ellen, die Elle zu 13 Thlr. 9 Sgr. 2 Pfg.; 37 Ellen, die Elle zu 1 Thlr. 18 Sgr. 9 Pfg., und 37 Ellen, die Elle zu 1 Thlr. 24 Sgr. 8 Pfg., wie viel macht es zusammen an Geld?

41) Die Ausdrücke α) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, β) $x^3 - 12x^3 + 47x - 60$, γ) $x^4 + 2x^3 - 25x^2 + 26x + 120$ in Ausdrücke zu verwandeln, ähnlich denen in 21) α), β) und γ).

In folgenden Beispielen die Klammern fortzuschaffen:

42) α) $9x - 7(y+z)$. Antw.: $9x - [7y+7z] = 9x - 7y - 7z$.
β) $4m - 5(p-q)$. Antw.: $4m - [5p - 5q] = 4m - 5p + 5q$.

43) $a + b(c+d-e) - m(n+p) - r(s-t)$.

44) $28(x-y+z) + 24(x+y-z) - 13(y-x-z)$.

45) $(96-a-b-c)14 + (4+a-c)13 - (7-a-c)97$.

46) $24x - 6y - 9(x+y) + 25x - 19(y-z) - 17(x+y-z)$.

47) $53(a-b+c) - 27(a+b-c) - 26(a-b-c)$.

48) $87(a-b-c-d) - 68(a-b-d) - 53(a-b-c) + 42(b+d)$.

49) $(p-q-m)p - q(m-q-p) + (q+m)m + m(p-m)$.

50) Zu berechnen: $546000 - 273 \cdot 999$. (Bem.: $999 = 1000 - 1$).

51) Eben so auf die kürzeste Weise: $9997 \cdot 1759 - 997 \cdot 2870$.

52) Aus einem Geldsacke, in welchem sich 1200 Thlr. befinden, werden 19 Rollen Geld herausgenommen. Jede Rolle enthält 40 Thlr. weniger 4 Sgr. Wie viel Geld bleibt übrig?

53) Ich besitze 35 Thlr. und bezahle hiervon 7 Ellen Tuch, jede Elle zu 3 Thlr. 28 Sgr. 6 Pfg. Wie viel behalte ich an Geld übrig? (Bemerk.: 3 Thlr. 28 Sgr. 6 Pfg. = 4 Thlr. weniger 1 Sgr. 6 Pfg.

In folgenden Ausdrücken die Producte mit gleichen Multiplicanden oder Multiplicatoren zu vereinigen:

54) α) $7x+5y+5z$; β) $9x-14y-14z$; γ) $3m+8p-8q$; δ) $9a-7b+7c$.
Aufl.: α) $7x+5(y+z)$; β) $9x-14(y+z)$; γ) $3m+8(p-q)$, oder: $3m-8(q-p)$; δ) $9a-7(b-c)$, oder: $9a+7(c-b)$.

55) $a - mb + mc - md + ne - ng$.
Aufl.: $a - m(b-c+d) + n(e-g)$, oder:
$a + m(c-b-d) - n(g-e)$.

56) $23a - 7b + 7c + 7d - 5p - 5q + 5r + 35$.

57) $3m - 19p - 17x + 19q - 17y + 3n - 19 - 17t$.

58) $a - pb + rd - pc - re + r^2 - a^2 - r$.

59) $z-px-qy+pz-ry+qx-rz$.
60) $m-nx-py+mx-px-ny-my+p-n$.
61) α) $a-b(c-d)-b\cdot d$; β) $a-(x+y)c+y\cdot c$.
62) $m-n(p-q)-(m-2n)(p-q)$.
63) $a-(3b-2c)(m-n)-(2b-4c)(m-n)$.
64) $ab-(a+n)c+nc$.
65) $1-a+b-(2a+3b)(a-b)+(3a+2b-1)(a-b)$.
Aufl.: $(1-a+b)^2=(a-b-1)^2$.
66) $pm-pn-pm+qn$
Aufl.: $p(m-n)-q(m-n)=(p-q)(m-n)$.
67) α) $pm+qm-pn-qn$; β) $p\cdot q-p.7-3\cdot q+21$.
68) α) $p\cdot m-2\cdot m+2\cdot n-p\cdot n$; β) $x\cdot y-x\cdot 8+y-8$.
69) α) $x^2+xy-yx-y^2$; β) $5m\cdot 7n-5m-1+7\cdot n$.
70) $30+3x\cdot 6+2y\cdot 8y-3x\cdot 8y-5\cdot 8y-2y\cdot 6$.
71) $ad+bd+ce-ae+bf-cf+af-cd-be$.
Aufl.: $(a+b-c)(d-e+f)$.
72) $a-(9m+8n-7p)(x-y)+(10m+8n-6p)(x-y)$.
73) $(5m-9n)(3p-4q)-(4m-7n)(11p+9q)+$
$(4m-7n)(9p-8q)-(4m-7n)(p-21q)$.
Aufl.: $(m-2n)(3p-4q)$.

§. 15.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{I.} & (a\cdot b)\cdot c=(a\cdot c)\cdot b=a\cdot(b\cdot c).\\ \text{II.} & a\cdot b=b\cdot a.\end{array}\right\}\ (\text{Vgl. §. 7.})$$

1) Wie wird ein Product mit einer ganzen Zahl multiplicirt?
2) Wie wird eine Zahl mit einem Producte multiplicirt?
3) Warum darf man Multiplicator und Multiplicand eines Productes mit einander vertauschen? Welchen gemeinschaftlichen Namen führen Multiplicator und Multiplicand eines Productes?
4) $7\cdot a$ mit 4, $69\cdot x$ mit 87, $a\cdot 19$ mit 58 zu multipliciren.
5) Auszuführen: $14\cdot(3a+2b-9c)+(5x-8y-9z)\cdot 42$.
6) Eben so: $24(98x-52y+7z)-397(45x-58y-87z)+(35x-42y+59z)198$.
7) Zu vereinigen: α) $27x-18y+15n$;
β) $45x-35u-48m-56n$.
8) Auf die kürzeste Weise α) $25\cdot 9$ mit 4, β) $237\cdot 125$ mit 8 zu multipliciren.
9) Wie viel Aepfel sind in 4 Körben, wenn in jedem sich 29 Viertel (à 25 Stück) befinden?
10) Wofür ist mehr Fracht zu zahlen, für 27 Centner 19 Meilen oder für 19 Centner 27 Meilen weit zu fahren?

11) Eine gewisse Anzahl Ziegelsteine ist in zwei rechtwinkeligen Haufen aufgestellt. Der erste hat in der Länge 113, in der Breite 97, in der Höhe 67; der zweite hat in der Länge 67, in der Breite 113, in der Höhe 97 Ziegelsteine. In welchem von beiden Haufen befinden sich die meisten Steine?

12) Auf die kürzeste Art zu berechnen: α) $25 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 3$; β) $125 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 4$; γ) $125 \times 125 \times 125 \times 8 \times 8 \times 8$.

13) $5 \cdot 9 \cdot 8$ mit $4 \cdot 13 \cdot 125$ zu multipliciren.

14) Eben so: $25a(m+n)$ mit $27p$ und $25tuv$ mit $99xyz$.

15) Eben so; 25 mit 36. [Anleit.: $36 = 4 \cdot 9$ u. s. w.]

16) Eben so: 25 mit α) 52, β) 64; 125 mit 48, 56 und 72.

17) Welche Versetzungen können in dem Producte $(a+b)\ (c+d)$ mit den vier Zahlen a, b, c, d vorgenommen werden, ohne daß der Werth des Productes sich ändert?

18) $63arqpm - 45bqprn - 27pqrcd + 9perq - 9prp$ zu vereinigen.

19) Folgende Producte: α) $a^2 \cdot a$, β) $a^3 \cdot a$, γ) $a^5 \cdot a^2$, δ) $a^3 \cdot a \cdot a \cdot a$, ε) $a^4(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)$, ζ) $a^7 a^6$ auszuführen.

20) Auszuführen: $x^9 x^7 + y^{13} y - z^{12} z^3 z^5 + u \cdot u + g^3 gggg^5$.

21) $25a^2$ mit $44a^3b^2$ zu multipliciren.

22) Eben so: $(25a^9b^7c^6) \cdot (7a^{11}c^{14}b^{13})$ mit $3a^5b^6c^7$.

In den Beispielen 23—28 die Klammern aufzulösen:

23) α) $17a^2(2a^2 - 3b^2 - 5a^2c)$; β) $24a^3b^2(9a^7b^5 - 11a^9b^8 + a^{11}b^{13})$.

24) $91a^2b^2c^2 - 7a^2b(13bc^2 - 9cb^2) - 21cb^3(3a^2 - 2c^2)$.

25) $9a^2bc(2ab^2c^2 - 4a^5b^6c^6) - 3a^3b^5c^7(a^8b^6c^4 - 13a^4b^2) - 5a^2bc^3(3ab^2 - 5a^9b^{10}c^8)$.

26) $13a^2y^2(8a^5y^7 - 2a^4y^9) - 2a^4y^5(9a^3y^4 - 13a^2y^6)$.

27) $5m^2n^3(2m^3n^2p^5q^5 + 3m^5n^5x^9y^{10}) - 15x^7y^8(m^7n^8x^2y^2 - 2p^9q^{10}) - 5p^4q^3(m^5n^5pq^2 + 6x^7y^8p^5q^7)$.

28) $25c^2d^2(4c^3d^4 - 45c^6d^8 + 23c^8d^9) - 5c^4d^4(8cd^2 + 34c^4d^6 - 24c^6d^7) + 125c^5d^5(36d - 48c^3d^5 - 54c^5d^6)$.

29) Welche Factoren haben a^7b^9 und $a^{11}b^5$ gemeinschaftlich?

30) Welche Factoren haben die drei Producte $15a^9b^8c^{13}$, $21a^6b^{12}c^2$ und $33a^5b^{11}c^{18}$ gemeinschaftlich?

In folgenden Beispielen die Producte zu vereinigen:

31) $25a^2 + 30a^4 - 35a^6$. Aufl.: $5a^2(5 + 6a^2 - 7a^4)$.

32) $24a^2b^3c^5d^6 - 6a^4b^2c^7d^9 - 36a^3b^2c^9d^{11} - 6a^2b^2c^2d^2$.

33) $35m^{19}n^{27}o^{16}p^{11} - 28m^{21}n^{13}o^{17}p^{21} - 49m^{18}n^{10}o^5p^7$.

34) $11a^2b^2 - 18x^3y^4z^5 - 27x^5y^3z^7 + 45x^2y^8z^6$.

35) $16m^{10}n^{12}p^{14} - 40m^8n^9p^{10}x^5y^6z^7 - 22m^2n^3p^4x^{11}y^{12}z^{13} + 55x^{16}y^{18}z^{20}$.
Aufl.: $(8m^8n^9p^{10} - 11x^{11}y^{12}z^{13})(2m^2n^3p^4 - 5x^5y^6z^7)$.

36) $77a^5b^7 - 55a^6m^4b^5 - 66a^3b^{12}m^3 - 91a^9b^2m^6 + 65a^{10}m^{10} + 78a^7b^7m^9$. Aufl.: $(11a^3b^5 - 13a^7m^6)(7a^2b^2 - 5a^3m^4 - 6b^7m^3)$.

§. 16.

$$\left\{\begin{array}{rl} \text{I.} & (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd. \\ \text{II.} & (a+b)(c-d) = ac-ad+bc-bd. \\ \text{III.} & (a-b)(c+d) = ac+ad-bc-bd. \\ \text{IV.} & (a-b)(c-d) = ac-ad-bc+bd. \end{array}\right\}$$

1) Wie wird eine Summe mit einer Summe multiplicirt?
2) Wie wird eine Summe mit einer Differenz multiplicirt?
3) Wie wird eine Differenz mit einer Summe multiplicirt?
4) Wie wird eine Differenz mit einer Differenz multiplicirt?
5) Welche praktische Regeln ergeben sich aus obigen vier Formeln für die Multiplication mehrgliederiger Ausdrücke in Hinsicht der Vorzeichen, mit denen die einzelnen Partialproducte behaftet sind?

Auszuführen:

6) $\alpha)$ $(m+n)(p+q)$; $\beta)$ $(5a+2b)(3c+4d)$; $\gamma)$ $(a+1)(b+1)$.
7) $\alpha)$ $(7a+9b)(11a+13b)$; $\beta)$ $(6x+5y)(4y+3x)$; $\gamma)$ $(10a+b)(10c+d)$; $\delta)$ $(mx+n)(px+q)$;
8) $\alpha)$ $(d+e)(f-g)$; $\beta)$ $(98a+17b)(99a-25b)$.
9) $\alpha)$ $(h-i)(k+l)$; $\beta)$ $(91m-494n)(7m+38n)$.
10) $\alpha)$ $(p-q)(r-s)$; $\beta)$ $(q-p)(r-s)$; $\gamma)$ $(p-q)(s-r)$; $\delta)$ $(q-p)(s-r)$; $\varepsilon)$ $(23a-5b)(99a-6b)$.
11) $\alpha)$ $44x-18y)(50x-7y)$; $\beta)$ $(42y-125z)(25y-32z)$.
12) $\alpha)$ $(a+b)^2$; $\beta)$ $(a-b)^2$; $\gamma)$ $(b-a)^2$. Wem ist nach diesen Formeln das Quadrat der Summe, wem das Quadrat der Differenz zweier Zahlen gleich? Nach diesen Formeln zu berechnen: $\delta)$ $(3a+2b)^2$; $\varepsilon)$ $(7m-11n)^2$; $\zeta)$ $31^2 = (30+1)^2$; $\eta)$ 43^2; $\vartheta)$ 85^2; $\iota)$ $99^2 = (100-1)^2$; $\varkappa)$ 97^2; $\lambda)$ 198^2.
13) Multiplicirt man 47796 mit 28534, so erhält man 1363811064. Wie viel kommt heraus, wenn beide Factoren um 1 vermehrt werden?
14) Ein Garten, der 318 Fuß lang und 87 Fuß breit ist, wird in der Länge um 10 Fuß, in der Breite um 5 Fuß vergrößert. Um wie viel nimmt der Flächeninhalt desselben zu?
15) In einem Buche befinden sich auf jeder Seite 36 Zeilen, in jeder Zeile 45 Buchstaben. Wie viel Buchstaben wird jede Seite mehr oder weniger enthalten, wenn auf jede Seite 3 Zeilen

mehr, dagegen in jeder Zeile 3 Buchstaben **weniger** gesetzt werden?

16) Jemand hat die Zahlen 879899257 und 48623793 mit einander zu multipliciren, sieht aber, weil er schlecht geschrieben, die erste Ziffer 7 rechter Hand des ersten Factors für 1, die erste Ziffer 3 des zweiten Factors für 5 an. Um wie viel muß er, ohne die Rechnung von Neuem zu machen, das **Resultat vergrößern** oder **verkleinern**, wenn er das richtige Resultat erhalten will?

Anl.: $879899257 \cdot 48623793 = (879899251+6)(48623795-2)$.

17) $123456 \times 78910 = 9741912960$; wie groß α) 123459×78908, β) 123453×78912?

18) $31415 \times 68585 = 2154597775$. Wie groß ist 31414×68584?

19) $78564 \times 21436 = 1684097904$. Wie groß ist 78559×21431?

20) Berechne: 97×98; 9998×997; 4996×39997; 59998×79996.

21) $(m+n) \cdot (m-n)$. Was kann man im Allgemeinen für das **Product** aus **Summe** und **Differenz** zweier Zahlen setzen?

22) α) $(13a-17b)(13a+17b)$; β) $(21p-31q)(31q+21p)$.

23) Zu berechnen: 1) $(50+3)(50-3)$; 2) 54×46; 3) $18 \cdot 22$; 4) $97 \cdot 103$; 5) $117 \cdot 123$; 6) $70004 \cdot 69996$; 7) $5006 \cdot 4994$.

24) Um wie viel ändert sich das Product aus zwei Factoren, beide gleich 78543, wenn von dem einen Factor 13 abgezogen und zu dem anderen Factor 13 hinzugesetzt wird?

25) Zu berechnen: α) 67^2-33^2; β) 83^2-17^2; γ) 151^2-49^2; δ) 784^2-216^2; ε) 5129^2-3871^2; ζ) $571428^2-428571^2$.

26) α) $(3a+2b+7c)(5a+6b+9c)$; β) $(4p+18q-7r)(7p-11q+3r)$; γ) $(100a+10b+c)(100d+10e+f)$; δ) $(1000m+100n+10p+q)(1000r+100s+10t+u)$.

27) $(5x^2+7x+8)(9x^2-11x+3)$; $(9x-7y-11z)(2x+8y-7z)$.

28) α) $(7m+9n-8)(8m-4n-1)$; β) $(8m-9n-3q)(7m-18n-11q)$.

29) α) $(a+b+c)(a+b+c)$; β) $(a+b+c)(a+b-c)$.

30) α) $(a-b+c)(a+b-c)$; β) $(a+b+c)(a-b-c)$.

31) α) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$; β) $(x^2-2x+1)(x^2+2x+1)$.

32) α) $(x^3+x^2+x+1)(x-1)$; β) $(5x+1)(125x^3-25x^2+5x-1)$; γ) $(az^2+bz+c)(dz^2+ez+f)$; δ) $(mz^3+nz^2+pz+q)(rz^3+sz^2+pz+u)$.

33) α) $(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)(x+y)$; β) $(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)(x-y)$; γ) $(x^2+(n-1)x+1)(x+1)$; δ) $[bx^2+(c-b)x+b](x+1)$; ε) $[nx^2+(a+n)x+n](x-1)$; ζ) $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5)(1-2x+x^2)$.

34) $(343x^3+245x^2y+175xy^2+125y^3) \times (49x^2-70xy+25y^2)$.

35) $15a^2+24b^2-(3a+2b)(5a+2b)$. **Aufl.**: $12b^2-28ab$.

36) $26xy - (9x-8y)(5x+2y) - (4y-3x)(15x+4y)$.

37) $(4p-3q)(7p+8q) - (8p-9q)(5p+7q) - (3p-2q)(5p+8q)$. Aufl.: $55q^2-27p^2-14pq$.

38) $(34m-12n)(17m-8n) - [(4m-6n)(7m-3n) - (5m-8n)(7m-6n)]$. Aufl.: $585m^2-508mn+126n^2$.

39) $(3a-6c)(4a-3d)-[(2a-5c)(6a-11d)-(37cd-6ac)]$.

40) $(3x^3 - 2x^2 + x - 1)(5x^2-4x-1) - (15x^4-12x^3+3x^2-x-1)(x-1)$. Aufl.: $5x^4-5x^3-3x^2+3x$.

41) $98a^2b^2(a^2+3b^2)(7a^2-11b^2)$.

42) $(3a+5b) \times [(7a+6b)(3a-5b)]$.

43) $(3m-7n) \cdot (9m^2+49n^2) \times (3m+7n)$.

44) $(3m+7) \cdot (81m^4+441m^2+2401) \times (3m-7)$.

45) $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$.

46) $(ab+ac+bc)(ab+ac-bc)(ab-ac+bc)(-ab+ac+bc)$.

47) $(a-b+c+d)(a+b+c-d)(a+b-c+d)(-a+b+c+d)$.

48) $(4x^2-6xy+9y^2)(2x+3y)(4x^2+6xy+9y^2)(2x-3y)$.

49) $[x^3 + (a+1)x^2 - (a^2+2a-3)x + (a^3-5a^2+8a-7)][x^2 + (a-1)x + (a^2-3a+1)]$.

50) $[y^3 + (a+b)y^2 + (a^2-b^2)y + (a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)][y^2-(a-b)y + (a^2-2ab+b^2)]$.

51) Zu beweisen, daß: $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$.

§. 17.

$$\left.\begin{array}{llll} \text{I.} & (a:b) \times b = a. & \text{II.} & a \times b:b = a. \\ \text{III.} & a:(a:b) = b. & \text{IV.} & a:a = 1. \end{array}\right\} \text{(Vergl. §. 8.)}$$

1) Wie lassen sich obige Formeln durch Worte ausdrücken?

2) 117 soll mit 319 multiplicirt, und das, was herauskommt, durch 319 dividirt werden.

3) α) $5384 \cdot 1719 : 1719$; β) $5841 \cdot 2813 : 5841$.

4) α) $\frac{m(a+b)}{a+b}$; β) $\frac{(3a-5b)m}{3a-5b}$; γ) $\frac{6m(5x-8y)}{5x-8y}$.

5) 30 Pfund kosten 7 Thlr. Wie viel Sgr. kostet ein Pfund?

6) Für 47 Thlr. erhält man 30 Ellen. Wie viel Silbergroschen kostet eine Elle?

7) 100 Ellen kosten 37 österreichische Gulden [m Gulden]. Wie viel kostet eine Elle? (1 Gulden = 100 Neukreuzer.)

8) 30 Pfd. kosten m Thlr. Wie viel Sgr. kostet ein Pfund?

9) 360 Pfund kosten 37 Thlr. Wie viel Pfg. kostet ein Pfund?

10) Für 30 Dutzend Knöpfe zahle ich 17 Thlr. Wie viel zahle ich für einen Knopf?

11) Wenn ich jährlich 7 Thlr. für die Armen gebe, wie viel macht es im Durchschnitte für jeden Tag? (1 Jahr = 360 Tagen.)

12) Für 30 Gulden erhalte ich 19 Neupfund; wie viel Neuloth für einen Gulden?

13) Für 100 Francs erhalte ich 9 Centner (à 100 Pfund); wie viel für einen Franc?

14) Ein Anker Wein (à 30 Quart) kostet 11 Thlr.; wie viel Silbergroschen ein Quart?

15) Wenn ich 23 Viertel (1 Viertel = 25) Nüsse unter 25 Kinder gleichmäßig vertheile, wie viel erhält jedes?

16) Dividire 562 in 179278 und multiplicire den Quotienten mit 562.

17) $\alpha)\ \frac{5m^2n^2}{x^2y^2} \times (x^2y^2)$; $\beta)\ \frac{p}{a+b}(a+b)$; $\gamma)\ \frac{c+d}{m-n-o}(m-n-o)$.

18) Einer gibt täglich für Kost und Miethe 23 Sgr. aus. Wie viel gebraucht er im April, wie viel im Januar und Februar?

19) Ein Knabe gibt täglich 9 Pfennige für Naschwerk aus. Wie viel Thaler macht es in einem Jahre?

Auszuführen:

20) $\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\right)n$. Aufl.: $a+b$. 21) $\left(\frac{a}{x} - \frac{b}{x}\right)x$.

22) $\left(\frac{r}{x+y} - \frac{s}{x+y} + \frac{t}{x+y}\right)(x+y)$.

23) $a - \left(\frac{b}{y} + \frac{c}{y}\right)y$. 24) $a - \left(\frac{n}{z} + \frac{p}{z} - \frac{q}{z}\right)z$.

25) $m+3n - \frac{n+o}{p}p + \frac{o-e}{n}n - \frac{m+n-e}{n+o}(n+o)$. Aufl.: n.

26) $x + y\frac{z+t}{y} - \frac{z-c+x}{a}a - \frac{c+t-e}{m}m$. Aufl.: e.

27) $\left(m + \frac{a}{n}\right)\left(n - \frac{a}{m}\right)$. 28) $\alpha)\ \frac{1}{x^2}\cdot x^2$; $\beta)\ \frac{1}{y^2}\cdot y^3$.

29) $\alpha)\ \left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c\right)x^2$; $\beta)\ \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)x^4$.

30) $\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)(x^4+x^3)$. Aufl.: x^3+1.

31) $\alpha)\ ab \cdot (pq) : (ab) : (pq) : y$;
$\beta)\ (a+b)\ (c+d) : (a+b) : (c+d)$.

32) Warum ist $a \cdot b = (a:m)\cdot(b\cdot m)$? Wie heißt dieser Satz in Worten? (Vergl. §. 8 Nr. 23.)

33) $\alpha)\ p : (p : q)$; $\beta)\ (a+b) : [(a+b) : (c+d)]$.

34) $\alpha)\ (a+b) : \frac{a+b}{a-b}$; $\beta)\ m - (p+q) : \frac{p+q}{m-n}$.
Aufl.: $\alpha)\ a-b$; $\beta)\ n$.

§. 18.

I. $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$. II. $\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$. (Vergl. §. 10 Nr. 16 und §. 12 Nr. 22.)

1) Wann bleibt ein Quotient ungeändert?

Folgende Quotienten zu vereinfachen:

2) α) $36 : 63$; β) $12a : 36$; γ) $\frac{ab}{ac}$;

δ) $[4a(b-c)] : [d \cdot (b-c)]$; ε) $\frac{x}{xy}$; ζ) $\frac{x}{x^2}$; η) $\frac{x^4}{x^7}$.

3) α) $\frac{15abcd}{60\,abmc}$; β) $\frac{44pqn}{99\,mpn}$; γ) $\frac{(15m^2n^2p)\,(7p^2n)}{(14p^3)\,(5m^2q)}$.

4) α) $\frac{6m(n-o+p)}{18q(n-o+p)}$; β) $\frac{24(x-y)\,(z-t)}{36(z+t)\,(x-y)}$.

5) α) $\frac{6x-6y-6z}{24x-24y-24z}$ *); β) $\frac{20a^5b^2-24a^2b^6}{28a^7b^2-32a^2b^8}$.

6) $\frac{21m^3n^2p^2-15m^2n^3p^2+9m^2n^2p^3}{18m^4n^2p^2+24m^2n^4p^2-6m^2n^2p^4}$.

7) α) $\frac{18a^4-12a^2b^2}{36a^2b^2-24b^4}$; β) $\frac{7x^2y^4-42x^2y^2p^2z^2}{70p^2z^4-42x^2y^2p^2z^2}$.

8) $\frac{21xz-27yz-28px+36py}{35xz-45yz+56px-72py}$; $\frac{10ac-15bc+12ad-18bd}{(2a-3b)^2}$.

9) α) $\frac{8 \cdot 6 \cdot 15}{25 \cdot 9 \cdot 16}$; β) $\frac{91 \cdot 36}{28 \cdot 117}$; γ) $\frac{18 \cdot 35 \cdot 26 \cdot 111}{39 \cdot 27 \cdot 42 \cdot 5}$.

10) $\frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$ für α) $n = 9$, β) $n = 13$, γ) $n = 15$, und δ) $n = 19$ zu berechnen.

11) Wie groß wird der Divisor des Quotienten $\frac{13}{17}$, wenn der Dividend 39, 117, 143, 169 oder 221 wird, und der Werth des Quotienten unverändert bleibt?

12) Den Quotienten $\frac{a}{b}$ in einen anderen ihm gleichen zu verwandeln, α) dessen Dividend $6a$, oder $7abc$, oder $ab+ac$ ist; β) dessen Divisor bx oder b^2a^2 ist.

13) Den Quotienten $\frac{25}{27}$ in einen anderen ihm gleichen zu verwandeln, dessen Divisor 459, oder 729, oder 999, oder 1269 ist.

---

*) Man vereinige in den Beispielen 5—8 im Divisor und Dividenden die Producte, welche mit gleichen Factoren behaftet sind.

14) Die Quotienten $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{17}{24}$, $\frac{37}{45}$, $\frac{59}{72}$ in Quotienten mit dem gemeinschaftlichen Divisor 360 zu verwandeln.

15) $\frac{5a^2b^2}{3cd}$ in einen Quotienten zu verwandeln, dessen Divisor $27b^2cd$, oder $24pcdq$, oder $36a^2b^2c^2d^2$, oder $66cd(a+b)$ ist.

16) Eben so $(3a-5b):(6c)$ in einen Quotienten, dessen Divisor $30abc$, oder $42c^2de$, oder $6c(3a+5b)$ ist.

17) Wenn $(5xy):(7pqrs) = z:(35pqrst)$ ist, wie groß ist z?

18) 25 in Quotienten zu verwandeln, deren Divisoren 13, 15, 17, 19, 21 sind.

19) α) $\dfrac{a - \dfrac{b+c}{m}}{d - \dfrac{e-n}{m}}$; β) $\dfrac{3 - \dfrac{5a-4}{7}}{1 - \dfrac{a+2}{7}}$ zu vereinfachen.

§. 19.

$$\frac{a \pm b}{m} = \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m}. \quad \text{(Vergl. §. 14.)}$$

1) Wie wird eine Summe, wie eine Differenz durch eine Zahl dividirt?

2) Wie werden zwei Quotienten von gemeinschaftlichem Divisor zu einander addirt, wie von einander subtrahirt?

Auszuführen:

3) α) $\frac{7a+7b+7c}{7}$; β) $\frac{13mn + 13mp - 13mq + 13m}{13m}$.

4) α) $\frac{p+q}{q}$; β) $\frac{24a+17b}{17b}$; γ) $\frac{6ab-3ac-24ad}{3a}$.

5) $[11(a+b)+23x(a+b) - 19y(a+b)] : [a+b]$.

6) α) $\frac{a+b}{ab}$; β) $\frac{ay+bx}{xy}$; γ) $\frac{ab+ac+bc}{abc}$;

δ) $[5(a-b)+9(a+b)-90(a^2-b^2)] : [45(a+b)(a-b)]$.

7) $[n(a-b)-2(m+n)(a+b) - (a+b)] : [a+b]$.

8) $a - \frac{7b+7c}{7}$. Aufl.: $a-(b+c) = a-b-c$.

9) $a - \frac{19m\cdot n - 38m^2 + 19m\cdot a}{19m}$. Aufl.: $2m-n$.

10) $4x - \frac{(2x-7y)p - 2(5x-8y)\cdot p + 3(4x-3y)\cdot p}{p}$. Aufl.: 0.

11) Dividire ich 40503146 durch 7198, so erhalte ich 5627. Wie viel erhalte ich, wenn der Dividend sich um 71980 vergrößert?

12) 526926439416 : 897 = 587431928. Wie groß ist 527823439416 : 897?

13) 3858094119 : 48639 = 79321. Wie groß ist 3856294476 : 48639?

Zu vereinigen:

14) α) $\frac{88}{37} + \frac{87}{37} - \frac{95}{37} + \frac{150}{37} - \frac{11}{37}$; β) $\frac{a}{x} - \frac{b}{x}$.

15) α) $\frac{7a}{17} + \frac{10a}{17}$; β) $\frac{6a}{10} + \frac{17a}{10} - \frac{2a}{10} - \frac{a}{10}$; γ) $\frac{a-b}{c} + \frac{b}{c}$.

16) $\frac{25a-36b}{a-b} + \frac{13a-5b}{a-b} + \frac{a+2b}{a-b}$. Aufl.: 39.

17) $\frac{x-n}{x+y+z} + \frac{y-z}{x+y+z} + \frac{2z+n}{x+y+z}$. Aufl.: 1.

18) $\frac{5x-8y-9z}{x-y+z} + \frac{4x+9y-3z}{x-y+z} + \frac{15z-6x-4y}{x-y+z}$. Aufl.: 3.

19) α) $\frac{a}{5} - \frac{b+c}{5}$; β) $\frac{a}{6} - \frac{b-c}{6}$;

γ) $\frac{a}{7} - \frac{b-c}{7} + \frac{d-a}{7} - \frac{c+d-8b}{7}$. δ) $\frac{a}{13} - \frac{a-13b}{13}$.

Aufl.: α) $\frac{a-(b+c)}{5} = \frac{a-b-c}{5}$; β) $\frac{a-b+c}{6}$; γ) b; δ) b.

20) $\frac{7a-9b}{3a+2b} - \frac{5a-7b}{3a+2b} + \frac{a}{3a+2b}$. Aufl.: $\frac{3a-2b}{3a+2b}$.

21) $\frac{13a-29b}{5(a-b)} - \frac{7b-21a}{5(a-b)} - \frac{9b-11a}{5(a-b)}$. Aufl.: 9.

22) α) $\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$; β) $\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$.

In folgenden Ausdrücken die Quotienten mit gleichen Divisoren zu vereinigen:

23) $a - \frac{b}{9} - \frac{c}{9}$. Aufl.: $a - \frac{b+c}{9}$.

24) $m - \frac{n}{4} + \frac{p}{4}$. Aufl.: $m - \frac{n-p}{4}$ oder $m + \frac{p-n}{4}$.

25) $a - \frac{b}{x} - \frac{c}{x} + \frac{d}{x}$. 26) $3a - \frac{5m}{7n} - \frac{9m}{7n}$.

27) $\alpha)$ $14b - \frac{4xy}{3z} - \frac{7xy}{3z} - \frac{8xy}{3z}$; $\beta)$ $a - \frac{5m}{x} + \frac{7m}{x}$.

28) $\frac{20a}{7b} - \frac{6a}{7b} - \frac{26m}{9n} + \frac{8m}{9n} - \frac{13a-7b}{5b} + \frac{8a-7b}{5b}$.

29) $\frac{3a-6b}{a+b} - \frac{5a-6b}{a-b} - \frac{4a-5b}{a+b} + \frac{7a-8b}{a-b}$. Aufl.: 1.

olgende ungleichnamige Quotienten zu vereinigen:

30) $\alpha)$ $\frac{p}{q} + \frac{r}{s}$. Aufl.: $\frac{ps+rq}{qs}$; $\beta)$ $\frac{x}{y} \pm \frac{u}{z}$; $\gamma)$ $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.

31) $\alpha)$ $\frac{m}{xy} - \frac{n}{yz}$. Aufl.: $\frac{mz-nx}{xyz}$; $\beta)$ $\frac{p}{y^2z} + \frac{q}{yz^2}$.

32) $\alpha)$ $\frac{m}{ab} + \frac{n}{b}$; $\beta)$ $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x}$; $\gamma)$ $\frac{m}{x^3} + \frac{n}{x^2} - \frac{p}{x}$.

33) $\alpha)$ $\frac{x}{y} - \frac{z}{t} + \frac{u}{v}$; $\beta)$ $\frac{a}{b} - \frac{a+b}{a-b}$; $\gamma)$ $\frac{m}{a-b} - \frac{a-b}{m}$;

$\delta)$ $\frac{a}{xy} + \frac{b}{xz} - \frac{c}{yz}$; $\varepsilon)$ $\frac{x^2}{yz^2} - \frac{y^2}{x^2z} + \frac{z^2}{y^2x}$.

34) $\alpha)$ $\frac{6a-7b}{3a-2b} - \frac{5a}{9b}$; $\beta)$ $\frac{2x}{11y} - \frac{3x-8y}{7x-5y}$; $\gamma)$ $\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}$.

35) $\alpha)$ $a \pm \frac{b}{c}$. Aufl.: $\frac{ac \pm b}{c}$; $\beta)$ $x + \frac{1}{x}$; $\gamma)$ $y + \frac{x-y}{2}$;

$\delta)$ $x - \frac{x+y}{2}$; $\varepsilon)$ $x - \frac{x-y}{2}$; $\zeta)$ $a - b - \frac{a-b-c}{2}$.

36) $\alpha)$ $6a + \frac{3b}{7a}$; $\beta)$ $25(a-b) + \frac{17a}{3b} - \frac{13b}{5a}$.

37) $\alpha)$ $\frac{(a+b)^2}{4ab} - 1$; $\beta)$ $\frac{(a-b)^2}{4ab} + 1$. 38) $\frac{a^2+b^2}{a+b} - (a-b)$.

39) $\frac{9m}{8b} + \frac{7n}{36b} + \frac{11m}{28b} - \frac{7(m+n)}{4b} + \frac{117m}{252b}$.

40) $\alpha)$ $\frac{m}{np} - \frac{a-b}{p^2} - \frac{c-d}{n^2m}$; $\beta)$ $\frac{4x}{7p^2yq} - \frac{5x}{9py^2q^2} - \frac{11p}{63qy^3}$.

41) $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b} - \frac{a^2-ab+b^2}{a-b} + \frac{2b^3-b^2+a^2}{a^2-b^2}$. Aufl.: 1.

42) $\frac{3m}{7p^2qr^2} + \frac{11n}{3p^3rqs^2} + \frac{14n}{9pq^2r} - \frac{7q}{5r^2p}$.

43) $\frac{x^2}{3y^2} + \frac{x^2y^2}{3y^4-x^4} + \frac{x^6}{3y^2(3y^4-x^4)}$.

44) $\frac{x}{y} + \frac{2x^2+y^2}{xy} + \frac{3xy^2-3x^3-y^3}{x^2y} - \frac{4xy^3-2x^2y^2-y^4}{x^2y^2}$.
Aufl.: 2.

45) $\frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x} - \frac{1-x+x^2}{1+x^2} - \frac{1+x+x^2}{1-x^2} - 1$.

46) $\frac{4a-3b}{2a-11b} - \frac{6a+22b}{6a-33b} - \frac{1}{2a-11b} + 1$.

47) α) $\frac{1+5x}{1-5x} - \frac{1-5x}{1+5x}$; β) $\frac{3y^2-2}{7y^2-5} + \frac{7y^2+3}{4y^2-1}$.

48) $\frac{5y^2-7}{9y^2-1} + \frac{3y^2-2}{4y^2+1} - \frac{7y^2-1}{5y^2+2}$.

49) $\frac{3x^2-2x+1}{5x^2-7x+9} + \frac{2x^2-3x+2}{4x^2-11x-3}$.

50) $\frac{x^2}{xy+y^2} + \frac{x^2+y^2}{xy} - \frac{y^2}{x^2+xy}$.

51) $\frac{x^3-2x^2+3x-4}{x^3+2x^2+3x+4} - \frac{x^3-2x^2-3x+4}{x^3-2x^2+3x+4}$.

52) $\frac{5x^4-7x^3-9x^2+11}{2x^4-3x^3+2x^2-1} - \frac{x-1}{x+3}$.

53) $\frac{x^2+x+1}{(1-2x)^3} - \frac{x+1}{(1-2x)^2} + \frac{1}{1-2x}$.

54) Bleibt der Quotient $\frac{a}{b}$ unverändert, wenn einerlei Zahl m zum Dividenden und zum Divisor addirt oder von denselben subtrahirt wird?

(Fernere Beispiele über die Vereinigung ungleichnamiger Quotienten finden sich im §. 27, Nr. 29 u. s. w.)

§. 20.

Gleichheit eines Quotienten $a : b$ und eines Bruches $\frac{a}{b}$.

1) Wenn 19 Thlr. unter 21, 22, 23 Leute zu gleichen Theilen vertheilt werden, wie viel erhält Jeder in Bruchtheilen eines Thalers?

2) Wenn ein Stab von 9 Fuß Länge in 10 gleiche Theile

getheilt wird, wie lang ist jeder Theil in Bruchtheilen eines Fußes?

3) Wie kann ich auf einem Blatte Papier, welches nur zwei Fuß Länge hat, ein Siebenzehntel von 32 Fuß mit Hülfe des Zirkels bestimmen?

4) Wem ist das Product aus einem Bruche und dem Nenner desselben gleich? Wem ist der Quotient des Zählers eines Bruches durch den Bruch selbst gleich? Wann bleibt ein Bruch ungeändert? Wie werden Brüche zu einander addirt oder von einander subtrahirt?

5) Wenn eine Linie von 11 Zoll Länge in 12 gleiche Theile getheilt wird, wie groß ist der Unterschied zwischen einem solchen Theile und einem Zolle in Bruchtheilen eines Zolles?

6) Wie groß ist der Unterschied zwischen einer Linie und einem Zehntel von 9 Linien, oder einem Zehntel von 11 Linien*)? Wie groß ist der Unterschied zwischen einer Linie und dem n-ten Theile des $n+1$- oder $n-1$-fachen der Linie?

7) Wie kann man $\frac{17}{60}$ einer Linie, die sich ihrer Kleinheit wegen nicht bequem mit dem Zirkel eintheilen läßt, abmessen?

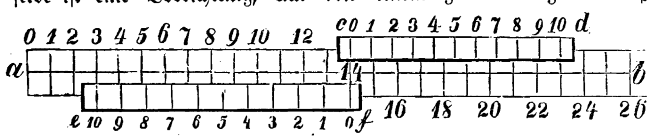
Aufl.: Man nehme das Siebenzehnfache der kleinen Linie und theile dasselbe in 60 gleiche Theile.

§. 21.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & (a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b. \\ \text{II.} & (a : m) : n = (a : n) : m. \end{array}\right\} \text{(Vergl. §. 9.)}$$

1) Wie wird ein Product durch eine Zahl dividirt? (Formel I.)
2) Wie wird ein Quotient mit einer Zahl multiplicirt? (I.)
3) Wie wird ein Quotient durch eine Zahl dividirt? (II.)

*) Anwendung hiervon macht man bei dem Nonius oder Vernier. Derselbe ist eine Vorrichtung, um von einem geradlinigen Maßstabe



oder einem eingetheilten Bogen (Limbus) kleinere Theile, als die darauf verzeichnete Eintheilung besitzt, ablesen zu können. Ist z. B. auf dem Stabe ab eine Eintheilung in Decimal-Linien vorhanden, und man wollte mittels eines Schiebers noch $^1/_{10}$ Linie davon abnehmen, so trage man die Länge von 9 Linien auf den Schieber cd auf und theile sie in 10 gleiche Theile, dann muß jeder Theil des Schiebers um $^1/_{10}$ Linie kleiner sein, als eine Linie des Maßstabes. Ganz dasselbe erreicht man, wenn man 11 Linien auf den Schieber ef aufträgt und diese Linie wieder in 10 gleiche Theile theilt. — Der Erfinder dieser Vorrichtung ist nicht der Portugiese Nunez oder Nonius (1492—1577), sondern Vernier (**La construction etc. Bruxelles 1431**).

4) Wie wird ein Bruch mit einer Zahl multiplicirt oder dividirt?

5) Multiplicire 24 mit 17, dividire, was herauskommt, durch 12.

6) Das Product 45 $\times$ 81 durch 9 zu dividiren.

7) Welches ist der 15te Theil von 13 Thlrn. in Silbergroschen?

8) Für 15 Francs erhalte ich 7 Pfund. Wie viel Neuloth für 1 Fr.?

9) Für 20 Gulden erhalte ich 13 Centner (à 100 Pfund). Wie viel Pfund für einen Gulden?

10) 700 durch 25 zu dividiren. (Anleitung: $700 = 100 \cdot 7$.)

11) 900, 1300, 1700, 3300, 1275 durch 25 zu dividiren.

12) Eben so 7000, 19000, 23000, 19125, 21375 durch 125.

13) Auszuführen: $\alpha)\ \frac{(7a)b}{7}$; $\beta)\ \frac{(5pq)\,(rst)}{rs}$; $\gamma)\ \frac{(15pq)\,(25qr)}{5q}$.

14) Eben so: $\alpha)\ \frac{(14am-21an)49a}{7a}$; $\beta)\ \frac{(48pqr)(16ptq)(24pnq)}{8pq}$.

15) $\frac{3}{37}$ mit $\alpha)$ 3, $\beta)$ 5, $\gamma)$ 7, $\delta)$ 111 zu multipliciren.

16) $\alpha)\ \frac{7a}{5b}\cdot 6a$; $\beta)\ \frac{4m^2}{5n^3}\cdot 93m$; $\gamma)\ \frac{7p^2qr^2}{11xy}\cdot 24p^2q^2r$.

17) $\left(\frac{8}{27}\frac{x^3}{y^3}+\frac{1}{3}\frac{x^2z}{y^2u}+\frac{3}{8}\frac{xz^2}{yu^2}+\frac{27}{64}\frac{z^3}{u^3}\right)[8xu-9yz]$.

18) $\left[1\frac{2}{3}\frac{y^3}{z^3}+4\frac{5}{6}\frac{y^2}{z^2}+7\frac{8}{9}\frac{y}{z}+9\frac{7}{8}\right][6y^2-5yz+4z^2]$.

19) $\alpha)\ \frac{a}{b\cdot n}\cdot n$. Aufl.: $\frac{a}{b}$; $\beta)\ \frac{p}{qrs}\cdot rs$.

20) $\alpha)\ \frac{5b^2}{9a^2}\cdot 3a^2$; $\beta)\ \frac{5mn}{42abd}\cdot 7ab$; $\gamma)\ \frac{9nx^2m}{128y^2p^2}\cdot 32x^2y^2$.

21) $\alpha)\ \frac{4pq}{(18m^2pn)(81nxm^2)}$ mit $9m^2n$,

$\beta)\ \frac{pqr}{(a^2b^3c^5)\,(a^4b^3c^6)\,(a^7b^3c^4)}$ mit $a^2b^2c^4$ zu multipliciren.

22) m Pfund kosten n Thaler; wie viel p Pfund?

Aufl.: 1 Pfund kostet $\frac{n}{m}$, p Pfund kosten $\frac{n}{m}\cdot p = \frac{np}{m}$ Thaler.

23) Ein Bote legt in 7 Stunden [n Stunden] 5 Meilen [q Meilen] zurück. Wie viel legt er in 9 Stunden [r St.] zurück?

24) $\left(\frac{2a^3}{3b^3}+\frac{5a^2}{6b^2}+\frac{7a}{9b}\right)3b$.

25) Wie viel erhält man, wenn man 23 Thaler erst durch 19, dann durch 30 dividirt?

26) $\frac{12}{25}$ durch α) 2, β) 3, γ) 4, δ) 6 zu dividiren; eben so $\frac{315}{211}$ durch α) 5, β) 7, γ) 9, δ) 35, ε) 45, ζ) 63.

27) α) $(33abc):(7pq)$ durch $11ab$; β) $(25m^2n):(16px)$ durch $5mn$ zu dividiren.

28) α) $\dfrac{42p(m-n)}{ab}:[7(m-n)]$; β) $\dfrac{25(a^2-b^2)}{7(a+b)}:[25(a^2-b^2)]$.

29) α) $\dfrac{6am-6an}{5pq}:(6a)$; β) $\dfrac{45at-25aq+35as}{14mn}:(5a)$.

30) $[16xz-8x(y-z)]:[5mn]:[8x]$.

§. 22.

$(a:b):c = a:(b\cdot c)$. (Vergl. §. 10).

Satz: Es ist einerlei, ob eine Zahl durch zwei oder mehrere Zahlen nach einander, oder durch das Product der Zahlen dividirt wird.

1) Wie wird ein Quotient oder ein Bruch durch eine Zahl dividirt?

2) Wie wird eine Zahl durch ein Product dividirt?

Auszuführen:

3) α) $(5mn):[7pq]:[4rs]$; β) $(4a-b):(3a+b):[7a]$.

4) α) $(2x-z):(5y-2z):(4z)$; β) $27m^2n^2p^2:[25rst]:[9str]$.

5) $(45a^2-15b^2):(7m+n):(15ab)$.

6) $24a^2b^2c^2:[37m^2n^2y^2]:(14m^2y^2):(5n^2y^7)$.

7) Ein Pfund kostet $\frac{3}{7}$ Thaler. Wie viel kostet ein Loth in Bruchtheilen eines Thalers?

8) Wie viel sind $\frac{13}{31}$ Sgr., wie viel $\frac{7}{13}$ Pfg. in Bruchtheilen eines Thalers? Wie viel sind $\frac{17}{23}$ Kreuzer in Bruchtheilen eines Guldens?

9) Wenn man 37000 erst durch 125, dann durch 8 theilt, was kommt heraus?

10) Auszuführen: α) 6200:25:4; β) 1920000:16:625.

11) Wie groß ist α) der 15te Theil des 24ten Theiles von 23 Thlrn.? β) der 5te Theil des 12ten Theiles von 19 Gulden südd. W.?

12) Zu dividiren: a^7 durch a^3. Aufl.: $a^7:a^3 = a^7:a:a:a = a^4$.

13) α) $a^{13}:a^6$; β) $a^{21}:a^{13}$; γ) $a^{19}:a^{14}$; δ) $x^{15}:x^5$.

14) α) $[m^{14}n^{13}]:[m^{11}n^7]$; β) $[p^5x^6z^7u^9]:[p^4x^5z^6u^8]$.

15) $27a^7b^2c^2-18a^8b^3c^5$ durch $9a^6b^2c$ zu dividiren.

16) Auszuführen: α) $(24a^3b^2c-16ab^5c^4):[8a^2b^3c^2]$;
β) $[36a^4b^2-4a^2b^2(3a^2-b)]:[4a^2b^2]$.

17) Drei gezahnte Räder stehen in solcher Verbindung mit einander, daß, wenn das eine sich bewegt, die beiden anderen sich ebenfalls bewegen. Das zweite bewegt sich 5 mal so langsam, als das erste, und das dritte 12 mal so langsam, als das zweite. Den wievielten Theil eines Umlaufes macht das dritte Rad, wenn das erste Rad sich 7 mal umdreht?

18) Wie heißt das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn statt 5, 12 und 7 die allgemeinen Zeichen p, q und n gesetzt werden?

19) Wenn die Geschwindigkeit des Secundenzeigers einer Secundenuhr gleich 1 [gleich c] gesetzt wird, wie groß ist die Geschwindigkeit des Stundenzeigers?

§. 23.

I. $c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ca}{b}$. II. $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$. (Vergl. §. 11.)

1) Wie wird eine Zahl mit einem Quotienten, wie mit einem Bruche multiplicirt?

2) Wie wird ein Quotient mit einem Quotienten, wie ein Bruch mit einem Bruche multiplicirt?

3) 29 mit dem Quotienten $15:23$ zu multipliciren.

4) Eben so: α) $13m^2n^2$ mit $\frac{7p^2m^2}{8n^5}$; β) $45p^2q^2$ mit $\frac{7x^2y^2}{15p^4q^9}$.

5) Eben so: α) $3a$ mit $\frac{6a-7b}{3a+2b}$; β) $9x^7y^{11}$ mit $\frac{4p^2m^2}{7x^2y^2}$.

6) Eben so: $5(7a-3b)$ mit $5m^2n^2:(7a-3b)$.

7) Wie viel Thaler machen α) 149, β) 207, γ) n Francs à $\frac{4}{15}$ Thaler preuß.? Wie viel δ) 23, ε) p Gulden südd. W. à $\frac{4}{7}$ Thaler preuß.?

8) $a^3b^2+a^2b^3$ mit $\frac{a^5}{b^7}-\frac{b^7}{a^5}$ zu multipliciren.

9) Eben so: $mp-n$ mit $\frac{m^2p^2}{n^2}+\frac{mp}{n}+1$.

10) α) $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{8}$; β) $\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{13}$; γ) $\frac{25}{28}\cdot\frac{17}{33}$; δ) $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{3}$.

11) α) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}$; β) $\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}$; γ) $\frac{x}{n}\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{n}{z}$.

12) α) $8\frac{3}{4}\cdot 16\frac{7}{8}$; β) $39\frac{5}{12}\cdot 48\frac{7}{13}$. (Nach §. 16, Formel I.)

13) α) $12\frac{1}{2}\cdot 7\frac{1}{4}$; β) $7\frac{2}{3}\cdot 9\frac{3}{14}$; γ) $18\frac{1}{6}\cdot 9\frac{5}{12}$.

14) α) $14\frac{12}{13}\cdot 12\frac{14}{15}$; β) $32\frac{25}{27}\cdot 53\frac{29}{33}$. (Nach §. 16, Formel IV.)

15) α) $\frac{ma^2b^2}{ncd^2}\cdot\frac{pa^4b^5}{qc^4d^3}$; β) $\frac{6p^2q^2r^2}{7mx^5y^6}\cdot\frac{3q^7r^6}{5mx^6y^7}$; γ) $\frac{12x^2}{5y^2}\cdot\frac{10xy}{9z^2}$.

16) α) $\frac{5m^2n^2}{7p^2q^2} \times \frac{3m^2-5n^2-7mn}{6p^2+9q^2-11pq}$; β) $\frac{3acd}{4pqm} \times \frac{16pm}{27ca}$.

17) α) $\frac{81m^4n^7q^9}{49p^6q^{11}z^{13}} \times \frac{7m^9p^7r}{9n^9q^{11}}$; β) $\frac{a-b}{c} \cdot \frac{d}{a-b}$.

18) $\frac{5a^3b^2}{7m^2n^4} \times \frac{14a^9m^7}{25n^5b^{11}} \times \frac{5n^{11}m^6}{6a^{15}b^{13}} \times \frac{6am}{b^3n}$.

19) $\frac{13(a-b)}{7(p-q)} \times \frac{5(r-s)}{39(a-b)} \times \frac{21(p-q)}{55(r-s)}$.

20) Jemand gebraucht in 11 Tagen 17 Pfund Waare, von der 13 Pfund 16 Silbergroschen kosten. Ein Anderer gebraucht in 13 Tagen 16 Pfund Waare, von der 11 Pfund 17 Silbergroschen kosten. Wer von Beiden gibt täglich mehr aus?

21) Ein Bote legt in 7 Stunden 3 Meilen zurück und erhält für je 11 Meilen 5 Gulden Botengeld. Ein Anderer legt in 11 Stunden 5 Meilen zurück und erhält für je 7 Meilen 3 Gulden Botengeld. Welcher von beiden Boten verdient stündlich am meisten?

22) Drei gezahnte Räder stehen so mit einander in Verbindung, daß, wenn das erste sich bewegt, die beiden anderen sich mit bewegen. Dreht das erste sich 9 mal um, so dreht das zweite sich 17 mal um; dreht das zweite sich 11 mal um, so dreht das dritte sich nur 5 mal um. Wie oftmal wird das dritte Rad sich umdrehen, wenn das erste sich 1 mal umdreht?

23) Wie heißt die Auflösung der vorigen Aufgabe, wenn für 9, 17, 11, 5 die allgemeinen Zeichen p, q, r, s gesetzt werden?

24) 19 Pfund kosten 11 Thaler, à $\frac{3}{17}$ Friedrichsd'or, wie viel Friedrichsd'or kostet 1 Pfund?

25) Ein Pfund kostet 19 Sgr. (à $3\frac{1}{2}$ Kr. rhein.), wie viel kosten $\frac{2}{7}$ Pfund in Kreuzern?

Auszuführen:

26) $\frac{11mno}{13pqr} \times \left(\frac{3}{4}\frac{pr}{mo} + \frac{3}{7}nq - \frac{5}{6}\frac{rq}{no}\right)$.

27) $\frac{15pq}{11rs} - \frac{3r^2s}{4p^2}\left(\frac{7p^2}{11rs^2} + \frac{20p^3q}{11r^3s^2}\right)$.

28) $\frac{2}{7c} - \frac{2}{a+b}\left(\frac{a+b}{7c} - a - b\right)$. Aufl.: 2.

29) $1 - \frac{a+b}{a-b}\left(\frac{a}{a+b} - \frac{a-b}{a} + \frac{a-b}{a+b}\right)$.

30) $1 - \frac{2401}{14641}\frac{x^4}{y^4} - \left(1 - \frac{7}{11}\frac{x}{y}\right)\left(\frac{7}{11}\frac{x}{y} + \frac{49}{121}\frac{x^2}{y^2} + \frac{343}{1331}\frac{x^3}{y^3}\right)$.

31) $\left(1\tfrac{2}{3}\frac{a}{b} - 4\tfrac{5}{6}\frac{b}{a}\right)\left(7\tfrac{8}{9}\frac{b}{a} - 10\tfrac{11}{12}\frac{a}{b}\right) - \left(\frac{7}{9}\frac{a}{b} + \frac{5}{12}\frac{b}{a}\right)\left(\frac{7}{9}\frac{a}{b} - \frac{5}{12}\frac{b}{a}\right)$.

32) $\left(\frac{1}{16}\frac{x^4}{z^8} + \frac{1}{12}\frac{x^3y}{z^6} + \frac{1}{9}\frac{x^2y^2}{z^4} + \frac{4}{27}\frac{xy^3}{z^2} + \frac{16}{81}y^4\right)\left(\frac{1}{2}\frac{x}{z^2} - \frac{2}{3}y\right)$.

33) $\left(\frac{1}{3}\frac{ab}{c^2} - \frac{3}{5}\frac{bc}{a^2}\right)\left(\frac{5}{7}\frac{ac}{b^2} - \frac{7}{9}\frac{ab}{c^2}\right)\left(\frac{3}{5}\frac{bc}{a^2} - \frac{1}{3}\frac{ab}{c^2}\right)$.

34) Wie lassen sich die Quotienten $\frac{16a^2b^2}{35cm^2}$, $\frac{5(a+b)^2c}{n}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{1}{n}$ als Resultate der Multiplicationen zweier Quotienten betrachten?

35) Warum gelten die in §. 15 für ganze Zahlen aufgestellten Sätze auch für Bruchzahlen?

§. 24.

I. $a : \frac{b}{c} = (a : b) \cdot c = \frac{ac}{b} = a \cdot \frac{c}{b}$. (Vergl. §. 12.)

II. $\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m : p}{n : q} = \frac{mq}{np} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p}$.

1) Wie wird eine ganze Zahl durch einen Quotienten oder Bruch dividirt? Wie wird ein Quotient oder Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt? (Umkehrung der Formel I.)

2) Wie wird ein Quotient durch einen Quotienten, wie ein Bruch durch einen Bruch dividirt?

3) α) $m : \frac{p}{q}$; β) $a : \frac{1}{b}$; γ) $abc : \frac{ab}{cd}$; δ) $1 : \frac{m}{n}$.

4) α) $(a+b)c : [(a+b) : d]$; β) $7a : [(3m-n) : (6a+2b)]$.

5) α) $3a^2b^2 : \frac{12a^4b^3}{5mn^2}$; β) $24a^{11}b^{13}c^{14} : \frac{8cd}{9a^5b^6c^2}$.

6) α) $(49x^2y^3 - 28x^4y^3) : \frac{7x^2y^2}{11pq^2}$; β) $(p^2+q^2) : \frac{pq}{r}$.

7) $(x^2a^2y) : [(x^2a^2y^2) : (p^2q^2r^2)]$; $9x^4y^5z^6 : [(27x^6y^9z^7) : (4m^3n^2o^2)]$.

8) α) $5a : \frac{1}{6a+2b} : \frac{25a}{19d}$; β) $1 : \frac{1}{x} : \frac{1}{xx}$.

9) α) $\frac{33}{35} : \frac{7}{11}$; β) $\frac{19}{56} : \frac{25}{37}$; γ) $\frac{14}{39} : \frac{19}{58}$; δ) $1 : \frac{1}{9}$; ε) $1 : \frac{25}{36}$.

10) Eine Elle kostet $\frac{14}{19}$ Thaler, wie viel Ellen erhält man für $\frac{49}{57}$ Thaler?

11) Ein Pfund kostet $\frac{36}{77}$ Gulden. Wie viel erhält man für $\frac{63}{121}$ Gulden?

12) Ein preußischer Fuß $= \frac{29}{30}$ pariser Fuß. Wie groß ist ein pariser Fuß in preußischem Fuße?

13) Ein Faß enthält $\frac{9}{7}$ Ohm, ein zweites $\frac{9}{35}$, ein drittes $\frac{3}{28}$, ein viertes $\frac{1}{14}$ Ohm. Wie oftmal kann man das angefüllte zweite, dritte, vierte Faß in das leere erste Faß ausgießen?

14) Ein Körper legt in einer Secunde $1\frac{2}{3}$ Fuß, ein zweiter in derselben Zeit $\frac{5}{21}$ Fuß zurück. Wie vielmal so schnell, als der zweite, bewegt sich der erste Körper?

15) α) $\dfrac{7ab}{3mn} : \dfrac{5pq}{11xyz}$; β) $\dfrac{14a^2b^3c}{39d^2e^5g^6} : \dfrac{35d^7e^4g^8}{9a^4b^5c^2}$.

16) α) $\dfrac{25p^4q^5r^6}{49x^4y^5z^6} : \dfrac{30p^7qr^8}{77xy^7z^2}$; β) $\dfrac{45(x-y)}{32(z+y)} : \dfrac{27(x-y)}{128b(z+y)}$.

17) α) $\dfrac{x^3}{y^3z^3} : \dfrac{y^2}{z^2} : \dfrac{x^2}{y^2}$; β) $\dfrac{25ab}{4mn} : \dfrac{5a}{2m} : \dfrac{6b^2}{7n} : \dfrac{3}{14b}$.

18) $\frac{24}{35}$ durch α) $\frac{6}{7}$, β) $\frac{3}{5}$, γ) $1\frac{1}{7}$, δ) $2\frac{2}{5}$ zu dividiren.

19) α) $\dfrac{22abc}{39pqr} : \dfrac{11ab}{3pr}$; β) $\dfrac{520x^2y^2p^2}{531m^4n^5q^6} : \dfrac{13xy^2p}{9mn^5q}$.

20) $[45(a+b)x : [64(x+y)z]] : [5(a+b) : [16(x+y)]]$.

21) $\dfrac{63a^4b^3+27a^3b^4-9a^2b^2}{14m^3n^5-21m^4n^4-35m^2n^2} : \dfrac{9a^2b^2}{7m^2n^2}$.

22) $\dfrac{3a(5m+7n)-(5m+7n)2b}{3a(9n-3b)-2b(9n-3b)} : \dfrac{5m+7n}{9n-3b}$.

23) $\dfrac{7a(3m+7n)-(5a+2b)(3m+7n)}{(2a-2b)(7p+6q)} : \dfrac{3m+7n}{7p+6q}$.

24) $\dfrac{3ab}{cd} : \left(\dfrac{9a^2}{35c^2} : \dfrac{2d^2}{5b} : \dfrac{10bcd}{a^2}\right)$.

25) $\dfrac{6p^2q^2}{m+n} : \left(\dfrac{3(m-n)p}{7(r+s)} : \left\{\dfrac{4(r-s)}{21pq^2} : \dfrac{r^2-s^2}{4(m^2-n^2)}\right\}\right)$. Aufl.: $10\frac{2}{3}$.

26) $\dfrac{a^2b^2}{c} : \left[\dfrac{a^2c^2}{b} : \left\{\dfrac{b^2c^2}{a} \times \dfrac{ac}{b^2}\right\} : \left\{\dfrac{ab}{c^2} : \dfrac{bc}{a^2}\right\}\right)$. Aufl.: $\dfrac{a^3b^3}{c^3}$.

§. 25.
Division durch einen mehrgliederigen Ausdruck.

$$\text{I.}\quad \frac{mx+my+mz}{x+y+z} = m.$$

$$\text{II.}\quad \frac{A}{B} = C + \frac{A-BC}{B} = C - \frac{BC-A}{B}.$$

1) $\alpha)$ $(7a+7b):(a+b)$; $\beta)$ $(18a-27b):(2a-3b)$; $\gamma)$ $(893a+1081b):(19a+23b)$; $\delta)$ $(ac+bc):(a+b)$; $\varepsilon)$ $(mxy-nxy):(m-n)$; $\zeta)$ $(35xz-45yz):(7x-9y)$.

2) $\alpha)$ $(39a+26b-91c):(3a+2b-7c)$; $\beta)$ $(28x^3-49x^2+77x):(4x^2-7x+11)$; $\gamma)$ $(44pm^2n^2-99p^2mn^2-143p^2m^2n):(4mn-9pn-13mp)$.

3) $\alpha)$ $(\frac{6}{13}ad-\frac{8}{13}bd-\frac{9}{13}cd):(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b-\frac{3}{4}c)$;
$\beta)$ $(b+b^2):(a+ab)$; $\gamma)$ $\left(x-y+\frac{y^2}{x}-\frac{y^3}{x^2}\right):(x^3-x^2y+xy^2-y^3)$;
$\delta)$ $(45x^3-48x^2+50x):(\frac{3}{4}x^2-\frac{4}{5}x+\frac{5}{6})$;
$\varepsilon)$ $(\frac{1}{27}a^3-\frac{1}{45}c^3+\frac{1}{63}b^3):\left(\frac{1}{3}\frac{a^2}{bc}-\frac{1}{5}\frac{c^2}{ab}+\frac{1}{7}\frac{b^2}{ac}\right)$.

4) $\alpha)$ $\left(\frac{a^2}{cd}-\frac{ab^2}{c^2d}+\frac{ab}{d^2}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{c}+\frac{c}{d}\right)$;

$\beta)$ $\left(\frac{3x^3y^3}{7z^4p^4}-\frac{7z}{15y}+\frac{27x^2p^3}{55z^4}\right):\left(\frac{5x^2y^2}{7z^3p^3}-\frac{7z^2p}{9y^2x}+\frac{9p^4x}{11yz^3}\right)$.

5) $\alpha)$ $(mp+np+mq+nq):(m+n)$; $\beta)$ $(35+5x+7z+xz):(5+z)$; $\gamma)$ $(100mp+10mq+10pn+nq):(10p+q)$;
$\delta)$ $(8ac+10ad+12bc+15bd):(4c+5d)$.

6) $\alpha)$ $(rt-ru+st-su):(t-u)$; $\beta)$ $(182gi-169gk-168hi+156hk):(14i-13k)$; $\gamma)$ $(12pr+6ps-8qr-4qs):(24p-16q)$.

7) $\alpha)$ $(rt+ru-st-su):(t+u)$; $\beta)$ $(ab+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}):(b+\frac{1}{2})$;
$\gamma)$ $(15ac+18ad-10bc-12bd):(5c+6d)$.

8) $\alpha)$ $(mp-mq-np+nq):(p-q)$; $\beta)$ $(xy-2x-3y+6):(y-2)$; $\gamma)$ $(77xz-91xo-99yz+117yo):(11z-13o)$;
$\delta)$ $(2ac-3ad-6bc+9bd):(\frac{1}{2}a-1\frac{1}{2}b)$.

9) $\alpha)$ $(30ac-15bc-42ad+21bd):(5c-7d)$;
$\beta)$ $(45ac+90ad-32bc-64bd):(6c+12d)$;
$\gamma)$ $(100mp-150mq-135np+202\frac{1}{2}nq):(8\frac{1}{3}m-11\frac{1}{4}n)$.

10) $\alpha)$ $(168eg-180eh-182fg+195fh):(12e-13f)$;
$\beta)$ $(a^2+2ab+b^2):(a+b)$; $\gamma)$ $(m^2-2mn+n^2):(m-n)$;
$\delta)$ $(42a^2+51ab+15b^2):(6a+3b)$; $\varepsilon)$ $(x^2-8x+15):(x-5)$;
$\zeta)$ $(x^2+10x-24):(x+12)$; $\eta)$ $(x^2-10x+24):(x-6)$;
$\vartheta)$ $(4x^2-4x+1):(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4})$.

11) α) $(a^2-b^2):(a-b)$; β) $(x^2-y^2):(x+y)$; γ) $(49m^2-121n^2):(7m-11n)$; δ) $(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}):(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3})$.

12) α) $(56x^2-92\frac{4}{7}y^2):(8x+10\frac{2}{7}y)$; β) $(6x^2-\frac{1}{6}):(x+\frac{1}{6})$; γ) $(12\frac{3}{5}x^2-17\frac{6}{7}y^2):(21x+25y)$; δ) $(\frac{4}{9}y^2-\frac{9}{16}z^2):(\frac{2}{3}y-\frac{3}{4}z)$.

13) α) $(35a^2+24ab-15ac+4b^2-6bc):(5a+2b)$; β) $(35p^2-82pq-25pr+48q^2+30qr):(5p-6q)$; γ) $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$ erst durch $x-4$, hierauf den Quotienten durch $x-3$, und den hieraus sich ergebenden Quotienten durch $x-2$ zu dividiren.

14) α) $(12m^2-51mn-24mp+54n^2+48np):(3m-6n)$; β) $(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3):(a+b)$; γ) $(8-12y+6y^2-y^3):(2-y)$; δ) $(x^3-y^3):(x-y)$; ε) $(x^3+y^3):(x+y)$; ζ) $(x^4-y^4):(x-y)$; η) $(x^4-y^4):(x+y)$; ϑ) $(x^5-y^5):(x-y)$; ι) $(x^5+y^5):(x+y)$. Welche Sätze folgen aus den Beispielen $\delta-\iota$ über die Theilbarkeit durch die Binome $x-y$ und $x+y$? Ist $\varkappa$) x^3-y^3 auch durch $x+y$ ohne Rest theilbar? sind ferner λ) x^3+y^3 durch $x-y$, μ) x^4+y^4 durch $x+y$ u. s. w. ohne Rest theilbar?

15) α) $(12x^2+54y^2+48yz-51xy-24xz):(4x-9y-8z)$ *); β) $(35a^2-143b^2+60bc+323c^2-36ab-214ac):(7a+11b-19c)$; γ) $(x^2-y^2+2yz-z^2):(x+y-z)$; δ) $(x^2-y^2-2yz-z^2):(x+y+z)$; ε) $(3x^4-4x^3+1):(x-1)^2$.

16) α) $(4ad+6bd+10cd+12be+8ae+20ce):(2a+3b+5c)$; β) $(3x^2-8\frac{5}{6}xy+6xz+6\frac{1}{2}y^2-8\frac{2}{3}yz):(2x-3y+4z)$; γ) $(49x^2-16z^2+21xy+12yz):(7x+3y-4z)$.

17) α) $(12aq-36nq+24mq-21na+63n^2-42mn):(4q-7n)$; β) $(p^2-1\frac{1}{3}pq+1\frac{1}{15}p+\frac{4}{5}q-1):(\frac{1}{3}p-\frac{1}{5})$.

18) α) $(32a^2+45b^2+60c^2+76ab+88ac+104bc):(8a+9b+10c)$; β) $(12m^2+3mn-2m-1\frac{1}{2}n^2-n):(6m+3n)$.

19) α) $(77a^2+15bc+56c^2-54b^2-133ac+3ab):(11a-9b-8c)$;
β) $(\frac{1}{10}-\frac{1}{15}y-\frac{1}{30}z+\frac{1}{18}yz-\frac{1}{24}z^2):(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}z)$.

20) $(20a^2+27b^2+54bc-44ad+33bd-51ab-72ac):(5a-9b-18c-11d)$.

21) $(20x^4+32x-51x^3-12x^2):(4x^2-7x-8)$ **).

22) α) $(21y^4-17y^2+58y+16-78y^3):(7y^2-5y-2)$; β) $(18x^4+38x^2+32-68x-24x^3):(6x-4)$; γ) $(30x^4-130x^3+36-147x+165x^2):(60x-180)$; δ) $(60x^5-85x^4+86x^3-10+32x-69x^2):(180x^2-120x+60)$.

23) α) $(5x^4-7\frac{2}{3}x^3y+10\frac{1}{4}x^2y^2-3\frac{5}{6}xy^3+1\frac{3}{4}y^4):(5x^2-6xy+7y^2)$; β) $(1\frac{3}{4}a^4-3\frac{5}{6}a^3b+6\frac{3}{4}a^2b^2-4\frac{2}{3}ab^3+2\frac{1}{2}b^4):(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{3}ab+\frac{1}{2}b^2)$;

---

*) Man ordne den Dividenden zuerst nach den Buchstaben x, y, z.
**) Man ordne den Dividenden nach fallenden Potenzen von x.

γ) $(27x^5y^4z^4-30x^4y^5z^5-77x^3y^6z^6+72x^2y^7z^7-55xy^8z^8):$
$(3x^2y^2z^3-xy^3z^4-11y^4z^5)$.

24) α) $(\frac{7}{16}a^2-\frac{33}{160}ab+\frac{13}{43}ac+\frac{23}{16}bc-\frac{27}{40}b^2-\frac{55}{72}c^2):$
$(\frac{7}{8}a+\frac{9}{10}b-\frac{11}{12}c)$;

β) $(8y^5-38y^4+36y^3+7y^2-20y+6):(\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{6}y+\frac{1}{8})$.

25) $(\frac{1}{10}x^2-\frac{1}{18}y^2-\frac{1}{168}yz-\frac{1}{60}xy-\frac{17}{140}xz+\frac{1}{28}z^2):$
$(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{4}z)$.

26) $(\frac{1}{12}x^5y^2-\frac{19}{180}x^4y^3+\frac{41}{840}x^2y^5-\frac{37}{840}x^3y^4+\frac{1}{56}xy^6):$
$(\frac{1}{4}x^3y-\frac{1}{6}x^2y^2-\frac{1}{8}xy^3)$.

27) $(64m^6-729n^6y^{12}):(2m-3ny^2)$.

28) $(128x^7y^7-2187z^7):(2xy-3z)$.

29) $[5005x^4-3834x^3y+5985y^4+8067x^2y^2-7098x^3y]:$
$[\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{5}xy+\frac{1}{7}y^2]$.

30) $(\frac{1}{16}-\frac{1}{81}x^4):(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x):(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}x^2)$. *).

31) $\left(\frac{16}{625}\frac{x^{12}}{y^8}-\frac{81}{2401}\frac{y^{12}}{x^8}\right):\left(\frac{2}{5}\frac{x^3}{y^2}-\frac{3}{7}\frac{y^3}{x^2}\right):\left(\frac{4}{25}\frac{x^6}{y^4}+\frac{9}{49}\frac{y^6}{x^4}\right)$ *).

32) $\frac{1}{384}-\frac{13}{30240}x-\frac{61}{18144}x^2+\frac{1}{3240}x^3+\frac{1}{945}x^4$ zuerst durch $\frac{1}{6}+\frac{1}{7}x$, hierauf den Quotienten durch $\frac{1}{8}-\frac{1}{9}x$ und zuletzt durch $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}x$ zu dividiren. Aufl.: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x$.

33) α) $1:(1-x)$; β) $1:(1+x)$ in Reihen zu entwickeln.

34) Eben so: α) $p:(a-x)$; β) $p:(a+x)$.

35) Was wird aus den in 33 entwickelten Reihen, wenn $x=\frac{1}{2}$?

36) Was wird aus dem Resultate der Division $1:(1+x)$, wenn $x=7$ gesetzt wird?

37) Was wird aus dem Resultate der Division $p:(a-x)$, wenn $p=1$, $a=10$, $x=1$ gesetzt wird?

38) 7853219 nach der Formel $p:(a-x)$ durch 99, durch 999, durch 9999, durch 95, $97\frac{1}{2}$, $98\frac{3}{4}$ und $98\frac{1}{3}$ zu dividiren. (5 Decimalstellen.)

39) 67948 nach der Formel $p:(a+x)$ durch 103, 105, 1004, $102\frac{1}{2}$ und $101\frac{1}{4}$ zu dividiren. (5 Decimalstellen.)

40) k mit $\frac{100}{104}$, eben so mit $100:103\frac{3}{4}$ zu multipliciren.

41) α) $1-x+x^2$ in 1; β) $1-2x+x^2$ in 1 zu dividiren.
Aufl.: α) $1+x-x^3-x^4+x^6+x^7-\cdots$;
β) $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+\cdots$

42) 1 durch $x^2+2xy+y^2$ zu dividiren.

43) $[x^2-(a+b)x+ab]:(x-a)$.

44) $x^3-(a-b+c)x^2+(ac-ab-bc)x+abc$ erst durch $x-a$ und hierauf den Quotienten durch $x+b$ zu dividiren.

---

*) Die Ordnung des Dividirens umzuändern.

45) $x^4-(b-a-c+d)x^3+(ac-ab-ad-bc+bd-cd)x^2+(abd-abc-acd+bcd)x+abcd$ erst durch $x+a$, hierauf durch $x-b$ und zuletzt durch $x+c$ zu dividiren. Antw.: $x-d$.

46) $[adx^4-(bd+ae)x^3+(af+be+cd)x^2-(bf+ce)x+cf]:[ax^2-bx+c]$.

§. 26.

Null und negative Zahlen.

Eine negative Zahl ist das Resultat einer Subtraction, bei welcher der Minuend kleiner ist, als der Subtrahend. Ist $b<c$ und $d<e$, so gelten folgende Sätze:

I. $a+(b-c) = a-(c-b); \quad a-(b-c) = a+(c-b)$.

II. $a+d(b-c) = a-d(c-b); \quad a-d(b-c) = a+d(c-b)$.

III. $a\pm(d-e)(b-c) = a\pm(e-d)(c-b)$.

IV. $a+\frac{b-c}{d} = a-\frac{c-b}{d}; \quad a-\frac{b-c}{d} = a+\frac{c-b}{d}$.

V. $a+\frac{d}{b-c} = a-\frac{d}{c-b}; \quad a-\frac{d}{b-c} = a+\frac{d}{c-b}$.

VI. $a\pm\frac{d-e}{b-c} = a\pm\frac{e-d}{c-b}$.

1) Wie entsteht Null? Aendert sich eine Zahl, wenn zu derselben Null addirt oder von derselben Null subtrahirt wird?

2) $a+[b-(c+d)]-(p-q)$ für $a=20$, $b=7$, $c=4$, $d=3$, $p=q$ zu berechnen.

3) Was wird aus einem Producte, wenn ein Factor $=0$ ist?

4) Zu berechnen: α) $4+0\cdot4-7\cdot0+0\cdot0$;
β) $(a-b)(c+d)-(a^2-b^2)(c-d)-(a+b)(c-d)$ für $a=b$, $c=d$.

5) Was wird aus einem Quotienten, wenn der Dividend 0 und der Divisor eine beliebige Zahl ist?

6) Wie ändert sich $n:k$, wenn k allmählich kleiner wird und sich der Null nähert? Was kann man für $n:0$ setzen? Was bedeutet das Zeichen ∞? Was kann man für $n:\infty$ setzen?

7) Was kann man für $0:0$ setzen?

8) Was wird α) aus $a+(c-d):p-(d-c):n$, wenn $d=c$, $p>0$, $n>0$; β) aus $d:(C-c)$, wenn $C=c$ und $d>0$ ist?

9) $(MC-mc):(C-c)$ zu berechnen α) für $M=17$, $C=57$, $m=51$, $c=19$; β) für $M=13$, $m=5$, $C=c=11$.

10) In jedem der folgenden Ausdrücke für x einen solchen Werth zu setzen, daß derselbe zu 0 wird: α) $x-13$; β) $x-a$; γ) $b+x-c$; δ) $13(x-7)$; ε) $(x-2)(x-5)$; ζ) $(x-3)(x-7)(x-10)$; η) $(x-a)n$; ϑ) $(x-b)(x-c)$; ι) $(x-p)(x-q)(x-r)$; $\varkappa$) $(x-7):5$; λ) $(x-9):(x-3)$; μ) $(x-m):(x+n)$.

11) Wie werden negative Zahlen addirt oder subtrahirt?

12) Zu berechnen für $a = 42$, $m = 11$, $n = 17$, $p = 6$, $q = 8$: α) $a + (m-n) - (p-q)$; β) $n - (q-a) - (p-m)$*).

13) $x - (x-9) + (x-11) - (x-13)$ für $x = 7$ zu berechnen.

14) Wie groß ist $9 - (x-y) + (m-n) - (r-s-u)$, wenn $y-x = 5$, $n-m = 13$, $s+u-r = 6$ ist?

15) α) $22-(-9)-(-4)$; β) $-(-48)-(-29)+(-77)$; γ) $-11\frac{1}{4}-(-3\frac{2}{5})-5\frac{1}{2}+(-3\frac{1}{2})+10\frac{1}{60}$ zu berechnen.

16) $C-c$ zu berechnen α) für $C = 11$, $c = -7$, oder β) für $C = -7$, $c = -18$.

17) $m-n(n-p)$ α) für $m = -7\frac{1}{2}$, $n = 13$, $p = -14\frac{1}{2}$, oder β) für $m = 3\frac{1}{4}$, $n = -9\frac{1}{2}$, $p = -7\frac{1}{4}$ zu berechnen.

18) α) $a + (-5a) - (-9a)$; β) $-23m - [-23m-n]$.

19) α) $9x-(-8y)+(-9x-8y)$; β) $3a-2b+(-5m)-9n-(-7a)+(-5a)-[-3a-2b+4n]-[-5m-(-9n-3a)]$.

20) $5a-(-2a-[-a-(2b-5a)+(-a+b)-7b]-(-9a))$.

21) Warum ist $a \times (-b) = -ab$, $(-a) \times b = -(ab)$ und $(-a) \times (-b) = ab$?

Antw.: Man setze $a = m-n$, $b = p-q$; alsdann ist, wenn $m > n$ und $p > q$, 1) $a \times (-b) = a \times (q-p) = aq-ap = -(ap-aq) = -a(p-q) = -ab$. Eben so ist 2) $(-a) \times b = -ab$; 3) ist $(-a)(-b) = (n-m)(q-p) = nq-np-mq+mp = mp-mq-np+nq = (m-n)(p-q) = a \cdot b$.

22) $a+m(m-a)-n(n-a)$ für $a = 42$, $m = 11$, $n = 17$ zu berechnen.

23) Eben so: $(a-b)c+b(c-a)-(c-b)a+(a-b)(b-c)-(a-c)(c-b)+(c-b)(c-a)$ für $a = 7\frac{1}{2}$, $b = 9\frac{1}{3}$, $c = 5\frac{1}{4}$.

24) Eben so: $x+(x-8)7-(x-7)5-(x-5)(x-6)$ für $x=3$.

25) Eben so: $(-5)\cdot 9-11\cdot(-3)+6\cdot(-9)-(-45)\cdot 8+(-3)\cdot(-7)-(-5)\cdot(-19)$.

26) $(a-b)(c-d)+(c-b)(-d)-c(-a)$ für $a = -6\frac{1}{2}$, $b = -5\frac{1}{4}$, $c = -8\frac{1}{4}$, $d = -7$ zu berechnen.

27) $12\cdot(-9)\cdot(-5)+(-3)\cdot(-25)\cdot(-4)-125\cdot 17\cdot(-8)-(-13)\cdot(-15)\cdot(-75)$ zu berechnen.

28) Was gibt eine negative Zahl durch eine positive, eine positive durch eine negative, eine negative durch eine negative dividirt?

29) $x + \dfrac{x-23}{8}$ und $9 - \dfrac{5-x}{9-x}$ für $x = 7$ zu berechnen.

*) Die Formeln sind vorher so umzuändern, daß nichts Negatives darin vorkommt.

30) Eben so: $7+\frac{x-7}{11-x}-\frac{x-3}{x-18}+\frac{5(x-4)}{3(8-x)}-\frac{4(x-6)}{7(11-x)}$ für $x=13$.

31) Zu berechnen: $\frac{-27}{3}+\frac{-15}{3}-\frac{-84}{4}+\frac{26}{-2}-\frac{32}{-4}-\frac{28}{-4}-\frac{3510}{-117}+\frac{70}{-35}+\frac{-5}{-3}-\frac{-57}{-19}-\frac{270}{3}+(-5)\cdot\frac{-21}{-15}+\frac{36}{(-4):(-3)}-\frac{(-4)(-8)}{(-2)36}$.

32) $(MC-mc):(C-c)$ zu berechnen für $M=8$, $m=2$, $C=-7$, $c=-5$; eben so: $\frac{1}{6}Rr:(R+r)$ für α) $R=-7\frac{1}{2}$, $r=5$, β) $R=19\frac{1}{4}$, $r=-11$, γ) $R=-7\frac{3}{4}$, $r=-5\frac{1}{4}$.

33) $\alpha)\ \frac{a-b}{b-a}$, $\beta)\ \frac{2a-3b+6c}{3b-2a-6c}$, $\gamma)\ \frac{m^2-n^2}{n-m}$, $\delta)\ \frac{7a-7b+7c}{11b-11a-11c}$, $\varepsilon)\ \frac{(a-b)(-c)(m^3-n^3)(2rs-r^2-s^2)}{(b-a)(n-m)(-c)^3(r-s)}$ aufzuheben.

34) Was ist für x zu setzen, wenn jeder der folgenden Ausdrücke zu 0 werden soll: α) $x+7$; β) $x+m$; γ) $a+x+b$; δ) $(x+5)7$; ε) $(x+3)(x+7)$; ζ) $(x+m)(x+n)$; η) $(x+a)(x-b)(x+c)$; ϑ) $(x+a):(x+b)$?

35) Welche Werthe hat man für x zu nehmen, daß jeder der folgenden Ausdrücke negativ werde: α) $x-7$; β) $x-m$; γ) $x+7$; δ) $x+m$; ε) $x-a-b$; ζ) $a+x-b$; η) $(x+a)p$; ϑ) $(x-b)q$; ι) $(x+1)(x+9)$; $\varkappa$) $(x+a)(x+b)$; λ) $(x+1)(x+5)(x+8)$; μ) $(x+p)(x+q)(x+r)$; ν) $(x+8):x$; ξ) $(x+4):(x+1)$; o) $(x+a):(x+b)$; π) x^3; ϱ) x^2; σ) x^4; τ) x^7?

36) Wie läßt sich α) $(x-y)^2$ aus $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, wie β) $(m-n)^3$ aus $(m+n)^3=m^3+3m^2n+3mn^2+n^3$ ableiten?

37) Wenn $(a^3-b^3):(a-b)=a^2+ab+b^2$, welchem Ausdrucke ist alsdann $(a^3+b^3):(a+b)$ gleich?

38) Wenn $(1+x)(2+x)(3+x)=6+11x+6x^2+x^3$ ist, was gibt $(1-x)(2-x)(3-x)$?

39) Wenn $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2-(abc+abd+acd+bcd)x+abcd$, was wird aus $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$?

40) Wie gehen die aus $1:(1-x)$ und $1:(1+x)$, eben so die aus $p:(a-x)$ und aus $p:(a+x)$ (s. §. 25, Beispiel 33 u. 34) sich ergebenden Resultate in einander über?

41) Was wird aus der Formel $\frac{xy+xz+yz+xyz}{x+y+z}$, wenn x allein in $-x$, was, wenn y allein in $-y$, was, wenn z allein

in $-z$ sich verwandelt? Was wird aus der Formel, wenn zwei dieser drei Zahlen zugleich negativ werden, was endlich, wenn alle drei zugleich negativ werden?

42) Was wird aus $\frac{mn}{m+n}$ für $n = \infty$? A.: $\frac{m}{m:n+1} = m$.

43) Was wird aus der Formel $\frac{11Rr}{6(R+r)}$, wenn $r = \infty$ gesetzt wird, was, wenn $R = -\infty$, $r = -12$ gesetzt werden?

44) Für welchen Werth von x werden folgende Ausdrücke unendlich: α) $4 : (x-7)$, β) $x : (x-3)$, γ) $a : (x+n)$, δ) $(x+a) : [(x+b)(x-c)(x+d)]$?

B. Maß der Zahlen.

§. 27.

Aufhebung des gemeinschaftlichen Divisors und des gemeinschaftlichen Dividuus.

1) Wenn die Zahl m ein Maß der ganzen Zahlen a, b und c ist, so ist dieselbe auch ein Maß von $a \pm b \pm c$. Warum?

2) Wenn m ein Maß der ganzen Zahl a und n eine beliebige ganze Zahl bedeutet, ist dann auch m ein Maß von $a \cdot n$ oder von $a : n$? Ist unter derselben Voraussetzung $m \cdot n$ oder $m : n$ auch ein Maß von a?

3) Wenn 24 das größte Maß von 7608 ist, welche kleineren Maße hat letztere Zahl?

4) Wie findet man zu zwei Zahlen das größte gemeinschaftliche Maß? wie zu drei oder mehreren?

5) Zu α) 9982 und 67735, β) 19143 und 150308, γ) 19035 und 168495, δ) 12177 und 120540, ε) 1000 und 5069 das größte gemeinschaftliche Maß zu suchen.

6) Die Quotienten: α) 186466 : 18927, β) 32376 : 324072, γ) 9215 : 90792 aufzuheben.

7) Die Brüche α) $\frac{43395}{341637}$, β) $\frac{10395}{85185}$, γ) $\frac{6935}{61393}$, δ) $\frac{30120}{235689}$, ε) $\frac{88360}{261807}$ aufzuheben.

8) Zu α) 488 und 4873, β) 8765 und 4321, γ) 703 und 323 das größte gemeinschaftliche Maß und den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus zu suchen.

9) Zu den drei Zahlen 47871, 134748, 24428 das größte gemeinschaftliche Maß zu suchen.

10) Eben so zu den drei Zahlen 12324, 14931, 18249.

11) Eben so zu den vier Zahlen 13104, 16848, 24024, 6048.

12) Zu den drei Zahlen 252, 540, 385 den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus zu suchen.

13) Eben so zu den vier Zahlen 60, 84, 45, 56.

14) Eben so zu den Zahlen 3696, 1632, 4675.

15) Folgende Brüche: $\frac{49}{252} + \frac{413}{540} + \frac{178}{385}$ zu addiren.

16) Auszuführen: $8\frac{47}{420} - 5\frac{191}{252} - 1\frac{269}{280} + 3\frac{163}{168}$.

17) Das größte gemeinschaftliche Maß zu $12x^2+5x-3$ und $6x^2+x-1$ zu suchen. Aufl.: $3x-1$.

18) Eben so zu $6x^3+13x^2+15x-25$ und $2x^3+4x^2+4x-10$. Aufl.: x^2+3x+5.

19) Eben so zu $3x^5-x^4-3x+1$ und $3x^4+x^3+x^2+x-2$. Aufl.: x^3+x^2+x+1.

20) Eben so zu α) $a^7-3a^4-4a^3-3a^2-a$ und $a^6-a^4-2a^3-3a^2-2a-1$; eben so zu β) a^4-y^2 und $a^3+(a+1)ay+y^2$.

21) Eben so zu $2y^6+2y^5-3y^4-5y^3-14y^2-7y$ und $2y^5+2y^4-5y^3-5y^2-7y-7$. Aufl.: $2y^2-7$.

22) Eben so zu $2x^6-x^5-5x^3-5x^2-x$ und $2x^5-x^4-2x^3-2x^2-4x-1$. Aufl.: $2x^2-3x-1$.

23) Eben so zu $x^6+4x^5-3x^4-16x^3+11x^2+12x-9$ und $6x^5+20x^4-12x^3-48x^2+22x+12$. Aufl.: x^3+x^2-5x+3.

24) Zu a^3-a^2-a+1 und a^3-a^2+a-1 den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus zu suchen. Aufl.: a^5-a^4-a+1.

25) Eben so zu x^3+8 und x^4-16. Aufl.: $x^6-2x^5+4x^4-16x^2+32x-64$.

26) Zu $6a^4-5a^2-1$, $3a^2-3$ und $5a^3-4a-1$ den größten gemeinschaftlichen Divisor zu suchen.

27) Zu $3a^2+a-2$, $3a^2+5a+2$ und $9a^3+9a^2-4a-4$ den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus zu suchen.

28) Zu $a^3(b^2+2bc+c^2) - a^2b(2b^2+3bc+c^2) + ab^3(b+c)$ und $a^2(b^2-c^2) - ab(2b^2+bc-c^2) + b^3(b+c)$ den größten gemeinschaftlichen Divisor zu suchen.

29) Die Quotienten $\dfrac{x-8}{x^2-5x+6}$ und $\dfrac{x-2}{x^2-9x+14}$ zu addiren.

Anleitung. Man suche zuerst zu den beiden Divisoren den gemeinschaftlichen Dividuus u. s. w.

30) $\dfrac{3x-2}{x^2-x-6} - \dfrac{5x-3}{x^2+x-12}$ auszuführen.

31) Eben so: $\dfrac{z^4-2z^2-3}{15z^6-17z^2-18+25z^4} - \dfrac{z^2-4z+1}{12z^4-z^2-6}$.

32) $\dfrac{my-n}{y^2+(m+n+p)y+(m+n)p} - \dfrac{ny+m}{m^2+2mn+n^2-y^2}$.

33) $\frac{5x-2}{x^2-3x-4}+\frac{2x+1}{x^2-x-12}-\frac{3x-1}{x^2+x-20}$.

34) $\frac{x-1}{x^2-7x+10}-\frac{x-2}{x^2-9x+14}-\frac{x-3}{x^2-12x+35}$.

35) $\frac{x}{x^2-1}+\frac{x^2+x-1}{x^3-x^2+x-1}+\frac{x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}-\frac{x^3}{x^4-1}$.

§. 28.

Theilbarkeit der Zahlen durch 2, 5, 10, 4, 25, 100, 8, 125, 1000, 9, 3, 6, 11. Zerlegung der Zahlen in Factoren. Absolute Primzahlen. Zerlegung zusammengesetzter algebraischer Ausdrücke in Factoren.

1) Wie lassen sich die Reste der Divisionen der Zahlen 512, 713, 418, 596, 2798 durch die Zahlen 2, 5 und 10 angeben, ohne die Divisionen auszuführen?

2) Wann ist eine Zahl ohne Rest durch 2, 5 oder 10 theilbar?

3) Welche von den Zahlen 74, 95, 360, 744, 780, 1719, 2000, 1713, 1024, 9315, 125000 lassen sich durch 2, 5 oder 10 ohne Rest theilen?

4) Welche Reste lassen die Zahlen 5814, 7823, 1836, 45913, 2475, 4365, 82725 übrig, wenn man sie durch 4, 25 oder 100 dividirt?

5) In einem Korbe befinden sich 1273 Nüsse; wie viel Nüsse bleiben übrig, wenn man so viel Viertel-Hundert, als möglich, herauszählt? Wie viel bleiben von 85712 Nüssen übrig?

6) Wann ist eine Zahl durch 4, 25 oder 100 ohne Rest theilbar?

7) Welche von den Zahlen 732, 7759, 48875, 300100, 2785, 2862, 774, 825 lassen sich durch 4, 25 oder 100 ohne Rest theilen?

8) Jedes Jahr nach Christi Geburt, welches sich durch 4 ohne Rest theilen läßt, ist ein Schaltjahr. Welche Jahre in unserem Jahrhunderte sind Schaltjahre? (Ausnahme: 1900.)

9) Welche Reste lassen die Zahlen 2719, 5304, 60700, 540008 bei der Division durch 8, 125 und 1000 übrig?

10) Ein Körper, der sich auf einem Kreise von 125 Fuß Umfang bewegt, hat von einem bestimmten Puncte aus 378596 Fuß zurückgelegt. Wie viel Fuß ist er von dem Puncte entfernt, von dem er ausging?

11) Wann ist eine Zahl durch 8, 125 oder 1000 theilbar?

12) Welche von den Zahlen 5728, 6718, 23000, 4725, 5675, 4400 und 100000 sind durch 8, 125 oder 1000 theilbar?

13) Welche Reste lassen die Zahlen 10, 100, 1000, 10000 u. s. w. bei der Division durch 9 übrig; welchen Rest 10^n, wenn n eine beliebige ganze Zahl bedeutet?

14) Welche Reste lassen die Zahlen 20, 200, 2000 u. s. w., ferner 30, 300, 3000 u. s. w., 40, 400, 4000 u. s. w., 70, 700, 7000 u. s. w. bei der Division durch 9 übrig? welchen Rest eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$, wo a und n beliebige ganze Zahlen bedeuten?

15) Jede Zahl ist ein Vielfaches von 9, nebst dem Reste, den die Division der Quersumme durch 9 übrig läßt. Warum?

16) Welche Reste lassen die Zahlen 4321, 12212, 5876, 27506, 278942, 123456789 bei der Division durch 9 übrig?

17) Wann ist eine Zahl durch neun ohne Rest theilbar? wann durch drei, wann durch sechs?

18) Welche von den in Nr. 3, 4, 7 und 12 angegebenen Zahlen lassen sich α) durch 9, β) durch 3, γ) durch 6 ohne Rest theilen?

19) Welche kleinsten, positiven oder negativen, Reste lassen die Zahlen 10, 100, 1000, 10000, 100000 u. s. w. bei der Division durch 11 übrig?

20) Welchen Rest läßt 10^n bei der Division durch 11 übrig, wenn n eine gerade, welchen, wenn n eine ungerade Zahl ist?

21) Welche Reste lassen die Zahlen 20, 200, 2000, 20000 u. s. w., 30, 300, 3000, 30000 u. s. w., 80, 800, 8000, 80000 u. s. w. bei der Division durch 11 übrig? welche Reste die Zahlen $a \cdot 10^{2n}$ und $a \cdot 10^{2n-1}$, wo n und a beliebige ganze Zahlen bedeuten?

22) Welche Reste lassen die Zahlen 31104, 58642, 41972, 558279 bei der Division durch 11 übrig?

23) Wann ist eine Zahl durch 11 ohne Rest theilbar?

24) Welche von den Zahlen 39742857, 679534, 918290714, 448360, 9080907 lassen sich durch 11 ohne Rest theilen?

25) Schreibe irgend eine Zahl mit beliebig vielen Ziffern hin, setze darunter eine andere Zahl mit denselben Ziffern, nur in veränderter Ordnung, und subtrahire die kleinere Zahl von der größeren. Die Differenz wird alsdann durch 9 theilbar sein. Warum?

26) Ich habe eine Zahl im Sinne und subtrahire hiervon eine andere Zahl, die mit denselben Ziffern, nur in veränderter Ordnung, geschrieben wird. Der Rest ist: 6419.758, wo . an der Stelle einer ausgelassenen Ziffer steht. Wie heißt die fehlende Ziffer?

27) Welchen Rest läßt das Product zweier Zahlen bei der Division durch 9 übrig? (Antwort auf 15 zu stützen.)

28) Welche Reste lassen die Producte α) 57908×298765, β) 36729×58643 bei der Division durch 9 übrig?

Antw.: α) 57908 läßt bei der Division durch 9 2 übrig (S. 15), 298765 läßt 1 übrig; das Product der beiden Zahlen läßt also bei der Division durch 9 $1 \cdot 2 = 2$ übrig.

29) Welchen Rest das Product $437 \times 586 \times 2719 \times 5871$?

30) Welche Reste α) 357934^2; β) 27915^3; γ) 4856431^5?

31) Welche Reste α) 4^9; β) 4^{37}; γ) 7^{49}; δ) 2347^{55}; ε) 5^7; ζ) 3866^{47}; η) 8^{31}? A.: α) 1; β) 4; γ) 7; δ) 7; ε) 5; ζ) 2; η) 8.

32) Wie macht man auf eine ausgeführte Multiplication oder Division die Neunerprobe? Kann man aus der Richtigkeit der Neunerprobe immer auf die Richtigkeit der Rechnung schließen?*)

33) Welchen Rest läßt das Product der beiden Zahlen: α) 387×597; β) 3791584×2765432; γ) überhaupt zweier beliebigen Zahlen bei der Division durch 11 übrig?

34) Wie macht man die Eilferprobe? Ist dieselbe untrüglich?

35) α) 10378368; β) 3675375; γ) 138752757; δ) 50875; ε) 1953125; ζ) 1048576000 in Primfactoren zu zerlegen.

36) Eben so: α) 10001; β) 10201; γ) 10283; δ) 637; ε) 689; ζ) 697; η) 731; ϑ) 7363; ι) 8341; $\varkappa$) 111; λ) 1111.

37) α) Wie heißen alle zwischen 1 und 300 liegenden Primzahlen? β) Jede Primzahl (1, 2, 3 ausgenommen) ist von der Form $6n \pm 1$. Warum?

Folgende Ausdrücke in Factoren zu zerlegen:

38) α) x^2-y^2; β) $4m^2-9n^2$; γ) $5a^2-45m^2$; δ) $1-z^2$; ε) $a^2y^2-b^2z^2$; ζ) $x^4-0{,}16$; η) $256x^8y^{16}-6561z^{24}t^{48}$.

39) α) $1764m^2-900n^2$; β) $16x^2y^2-81p^2q^2r^2$;

γ) $\dfrac{49a^2b^2}{841c^2d^2}-\dfrac{36c^2d^{12}}{25a^2b^2}$; δ) $\dfrac{(a-x)^4}{(a+x)^4}-\dfrac{(a+x)^4}{(a-x)^4}$.

40) α) $49(a-b)^2-64(m-n)^2$; β) $(a+b)^2-(a-b)^2$.

41) α) $a^2+2ab+b^2-c^2$; β) $a^2-2ab+b^2-c^2$; γ) $m^2-n^2-2np-p^2$; δ) $m^2-n^2+2np-p^2$. (S. §. 16 Nr. 12 und 21.)

42) $(x^2+2x+1-y^2) \cdot (y^2-x^2+2x-1)$.

43) $x^2+(a+b)x+ab$. Antw.: $(x+a)(x+b)$.

44) α) x^2+5x+6; β) $x^2+8x+15$; γ) $x^2+20x+91$; δ) $x^2+1\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$; ε) $x^2+12ax+35a^2$.

45) α) $x^2+2x+\frac{3}{4}$; β) $x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{18}$; γ) $x^2+\frac{12}{35}x+\frac{1}{35}$; δ) $x^2+\frac{5}{12}x+\frac{1}{24}$; ε) $x^2+2ax+(a^2-b^2)$.

46) $x^2+(a-b)x-ab$.

47) α) x^2+x-6; β) $x^2+3x-10$; γ) $x^2+2x-143$; δ) $x^2+7x-120$; ε) $x^2+5\frac{1}{2}x-3$; ζ) $x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$.

48) $x^2-(a-b)x-ab$.

49) α) x^2-x-12; β) $x^2-5x-24$; γ) $x^2-7x-60$; δ) $x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}$; ε) $x^2-\frac{1}{12}x-\frac{5}{8}$; ζ) $x^2-\frac{3}{4}xy-\frac{1}{4}y^2$.

---

*) Die höchst praktische Neunerprobe bei der Multiplication und Division, welche schon im Algorithmus M. Georgii Peurbachii († 1461) de integris vorkommt und welche sich in allen alten Rechenbüchern findet, ist in unseren Tagen mit Unrecht in Vergessenheit gerathen.

50) $x^2-(a+b)x+ab$.

51) α) $x^2-10x+16$; β) $x^2-11x+24$; γ) $x^2-13x+30$; δ) $x^2-53x+360$; ε) $x^2-\frac{27}{20}x+\frac{9}{20}$.

52) α) $x^2-2mx+(m^2-n^2)$; β) $x^2-2nx-(m^2-n^2)$.

53) α) $acx^2+(ad+bc)xy+bdy^2$; β) $prx^2-(pt+qr)xy+qty^2$; γ) $a^3x^2+(ab-a^2b^2)xy-b^3y^2$.

54) α) $1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2$; β) $(x^2-y^2+z^2)^2+4y^2z^2$; γ) $(x-y)(x^2-z^2)-(x-z)(x^2-y^2)$.

55) α) x^4-y^4; β) x^8-y^8 in Factoren zu zerlegen. (S. Nr. 14 §. 25.)

56) Eben so: α) x^3-y^3; β) x^3+y^3; γ) x^5-y^5; δ) x^5+y^5. (S. Nr. 14. §. 25.)

57) Den gemeinschaftlichen Factor zu x^2-5x+6 und $x^2+3x-10$ zu suchen.

Anleitung. Man zerlege jedes Polynom in seine binomischen Factoren.

58) Eben so zu: α) x^2-4 und x^2+x-6; β) $x^2+1\frac{1}{2}x-4\frac{1}{2}$ und $x^2+3\frac{1}{2}x-7\frac{1}{2}$; γ) $x^2-(a+c)x+ac$ und $x^2-(a-d)x-ad$; δ) $x^2-y^2z^2$ und $x^2+2xyz+y^2z^2$.

59) Folgende Quotienten abzukürzen:

$$\alpha)\ \frac{x^2-y^2}{(x-y)^2};\qquad \beta)\ \frac{x^3y^3-z^6}{(xy-z^2)^2};\qquad \gamma)\ \frac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2+(c-a)x-ac}.$$

60) α) $\frac{x^2-7x+12}{x^2+2x-15}$; β) $\frac{x^2y^2-6xyz+9z^2}{5x^3y^2+5x^2yz-60xz^2}$; γ) $\frac{x^3y^3+z^3}{x^5y^5+z^5}$.

61) Mit Hülfe der Sätze über Zerlegung der algebraischen Ausdrücke in Factoren sollen die Beispiele 29—35 in §. 27 gelös't werden.

C. Decimalbrüche*).

§. 29.

Begriff eines Decimalbruches. Addition und Subtraction der Decimalbrüche.

1) Was ist ein Decimalbruch? Was bedeutet das Decimalkomma? Auf wie vielfache Weise kann ein Decimalbruch ausgesprochen werden?

2) Was geschieht, wenn das Decimalkomma von der Rechten zur Linken oder von der Linken zur Rechten um eine Stelle

*) Regiomontanus (1436—76) führte die Decimalbrüche zuerst ein; in allgemeineren Gebrauch kamen dieselben seit der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts (Recorde 1557, Stevin 1585).

oder um zwei, drei, n Stellen gerückt wird? Was geschieht, wenn dem Decimalbruche zur Rechten oder zur Linken p Nullen zugesetzt werden?

3) Gibt es auch unechte Decimalbrüche?

4) α) $3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{9}{1000000}$; β) $\frac{7}{100} + \frac{3}{10000} + \frac{5}{10000000}$; γ) $\frac{5}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{3}{10^6}$ durch Decimalbrüche darzustellen.

5) Wie unterscheiden sich 37,859, 378,59, 3785,9, 37859 und 3,7859 von einander?

6) Wie unterscheiden sich 0,34, 0,034, 0,0034, 0,340, 0,3400, 0,34000, 3,4 und 34 von einander?

7) 5,43728, 0,57648, 9,3755, 1,59625, 0,000125, 0,00003125, 0,0078125, 0,9008371 in gewöhnliche Brüche zu verwandeln.

8) Wie werden Decimalbrüche zu einander addirt, wie von einander subtrahirt?

9) 27,435 + 19,764 + 23,001 + 15,075 + 24,081 + 0,071.

10) 34,7856 + 0,3 + 4,7432 + 9,410006 + 0,074 + 1823.

11) α) 9,9998 + 4,796 + 3719 + 42,87357 + 0,000002 + 6223,330628; β) 3,839 + 24,4 + 7,65 + 9,7899.

12) 9,5842 — 3,3964; 240,0098 — 39,8531; 94,0008 — 0,7564.

13) 1,3579911 — 0,797911; 44,3759 — 2,854; 39,4837 — 14,48.

14) 72,54 — 68,97364; 14,07 — 11,27463; 12 — 3,9864; 3,8744 — 1,8744; 1 — 0,30103; 1 — 0,4771213; 10 — 9,032796.

15) 0,387 + 0,723331 — 1 + 1,5237 + 2,361 — 2,6694637 + 2,7726 — 2,7709072 + 5,2 + 19,18239 — 9,538786.

§. 30.

Multiplication und Division. Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche. Periodische Decimalbrüche. Unvollständige Decimalbrüche. Abgekürzte Rechnungen.

1) Wie werden Decimalbrüche multiplicirt, wie dividirt?

2) 3,14159 × 7; 3,65 × 66; 0,686 × 3125; 1593 × 0,00001684.

3) 0,08765 × 1000; 98,7641 × 7200; 78,125 × 128000.

4) 3,7 × 9,4; 1,0759 × 3,16; 112,21 × 0,351; 798,35 × 0,00076.

5) 0,2 × 0,3; 0,001 × 0,0001; 0,007 × 0,0009; 0,015625 × 0,0064; 0,1875 × 0,720000004; 0,3125 × 12,800000008.

6) Wie viel preußische Fuß enthalten 43, wie viel 72,05846 Meter à 3,186199 preuß. Fuß?

7) α) 0,1, 0,7, 0,01, 0,02, 0,03, 0,07, 0,47, 0,375, 0,789, 0,385, 0,6667 Thaler in Silbergroschen und in Pfennige zu ver-

wandeln. β) Wenn 1 Neupfund = 1,069 preußische Altpfund, wie viel Loth und Quentchen macht es? Wie viel preußischen Pfunden sind 71 Neucentner (à 100 Pfund) gleich? γ) Ein Jahr hat 365,24222 Tage; wie viel Tage, Stunden, Minuten und Secunden macht es?

8) Die Brüche α) $\frac{3}{4}$, β) $\frac{11}{16}$, γ) $\frac{19}{32}$, δ) $\frac{27}{64}$, ε) $\frac{19}{250}$, ζ) $\frac{1}{6250}$ in Decimalbrüche zu verwandeln.

9) Eben so: α) $\frac{22}{7}$, β) $\frac{333}{106}$, γ) $\frac{355}{113}$, δ) $\frac{103993}{33102}$, ε) $\frac{498}{7593}$, ζ) $\frac{23}{1856}$, η) $\frac{267}{26983}$, ϑ) $\frac{1}{397854}$, ι) $\frac{1000}{2875446}$, $\varkappa$) $\frac{1}{98745OO}$. (9 St.)

10) α) Wenn 131 engl. Meilen 28 preuß. Meilen gleich sind, wie viel beträgt 1 engl. Meile in preuß. Meilen, wie viel 1 preuß. Meile in engl. Meilen ausgedrückt? β) Wenn 47 preuß. Morgen so groß als 12 Hectaren sind, wie viel beträgt 1 Morgen? (4 St.)

11) α) Wie muß der Nenner eines Bruches beschaffen sein, damit derselbe durch einen vollständigen Decimalbruch sich darstellen läßt? β) Warum entsteht, wenn der Decimalbruch ein unvollständiger ist, eine Periode? γ) Wie viel Ziffern kann höchstens die Periode enthalten? δ) Die Anzahl der Ziffern der Periode in den Decimalbrüchen, welche den Brüchen $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{19}$, $\frac{3}{17}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{7}{19}$, $\frac{11}{23}$, $\frac{58}{59}$, $\frac{17}{24}$, $\frac{29}{36}$, $\frac{47}{48}$ gleich sind, zu bestimmen.

12) Woher kommt es, daß in den Decimalbrüchen, welche man aus den sechs Brüchen $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ und $\frac{6}{7}$ erhält, die Perioden mit denselben Ziffern, nur in veränderter Ordnung, geschrieben werden?

13) Folgende periodische Decimalbrüche sollen in gewöhnliche Brüche verwandelt werden: α) 0,1111....; β) 0,6666....; γ) 0,010101....; δ) 0,3636....; ε) 0,001001001.......; ζ) 0,270270......; η) 0,0000010000001000001......; ϑ) 0,2439024390......: ι) 0,142857142857......; $\varkappa$) 0,256410256410......; λ) 0,12658227848101265822784810.......

14) Eben so: α) 0,8333... (Periode 3); β) 0,297474.. (Per. 74); γ) 0,055... (Per. 5); δ) 0,428535535... (Per. 535); ε) 0,379643219... (Per. 43219); ζ) 0,37987012... (Per. 987012).

15) Welche Regel hat man zu befolgen, wenn unvollständige Decimalbrüche nur bis auf eine bestimmte Stelle angegeben werden sollen? Was hat man für a) 0,7854321...., b) 0,49799832...., c) 0,4973541...., d) 0,5827651...., e) 0,5764349.... zu setzen, wenn man nur α) 2, β) 3, γ) 4, δ) 5 Decimalstellen beibehalten will? Was heißt es, ein unvollständiger Decimalbruch habe eine Genauigkeit von 2, 3, n Stellen?

16) α) 6285,92 : 8; β) 3314,961 : 39; γ) 5938,7778 : 654.

17) α) 8,64192 : 7; β) 2203,1213 : 29; γ) 27,010278 : 387.

18) α) 387,54 : 100; β) 4,8321 : 10000; γ) 0,008756 : 100000.

19) α) 301,53 : 69000; β) 7006,652 : 1,234; γ) 1,0665 : 0,00135.

20) 8,81076:0,357; 3,315816:1,806; 3,36539:0,0001835.

21) α) 97406784:0,0000789; β) 1:0,1024; γ) 1:0,15625; δ) 118,853801 : 98,765; ε) 6978 : 0,29075; ζ) 3 : 0,0075; η) 400:56,5784; ϑ) 3:4943,34; ι) 300:0,00001732; $\varkappa$) 10:0,025.

22) α) Wie groß ist ein preußischer Fuß in Decimalbruchtheilen eines Meters ausgedrückt? (S. Beispiel 6.) β) Wie viel Meter betragen 3 preußische Ellen, wenn 1 Elle $25\frac{1}{2}$ Zoll ist?

Antw.: α) 0,3138536, β) 2,0008167.

23) Der Sonnen-Durchmesser ist 112,21, der Durchmesser des Planeten Venus 0,97, des Planeten Jupiter 11,62, des Mondes 0,27275 Erd-Durchmessern gleich. Wie oftmal ist der Sonnen-Durchmesser größer, als jeder der Durchmesser der genannten Himmelskörper? (4 Decimalstellen.)

24) Die Entfernung Mercur's von der Sonne beträgt 0,3870981, des Planeten Venus 0,7233316, des Planeten Mars 1,5236923 Halbmesser der Erdbahn. Wie oftmal sind die beiden letzteren Planeten weiter von der Sonne entfernt, als der erstere? (4 St.)

25) Von einem Neumonde zum nächstfolgenden sind 29,530588 Tage. Wie viel Mondmonate verfließen in 19 Sonnenjahren, wenn jedes derselben zu 365,24222 Tagen gerechnet wird? (3 Stellen.)

26) Jemand verfertigt mehrere Kugeln von gleicher Größe aus verschiedenen Metallen und bestimmt deren Gewichte. Eine Kugel aus Platin wiegt 20,855 Loth, eine zweite aus Gold 19,258 Loth, eine dritte aus Blei 11,352 Loth, eine vierte aus Silber 10,474 Loth, eine fünfte aus Kupfer 8,434 Loth. Wie vielmal so schwer ist jede der vorher genannten Kugeln, als eine folgende? (Jede der 10 Beispiele auf 3 Stellen zu berechnen.)

27) $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\frac{x^8}{1.2\ldots8}+\frac{x^9}{1.2\ldots9}+\frac{x^{10}}{1.2\ldots10}+\frac{x^{11}}{1.2\ldots11}$ für α) $x=1$, β) $x=0{,}9$, γ) $x=0{,}8$ zu berechnen. (7 Stellen.)

28) Eben so: $4(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15})$. (5 St.)

29) Eben so: α) $\frac{a}{1}-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\frac{a^5}{5}-\frac{a^6}{6}$ für $a=0{,}1$ (7 St.); β) $\frac{a}{1}-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}-\frac{a^7}{7}+\frac{a^9}{9}-\frac{a^{11}}{11}$ für $a=0{,}2$. (8 Stellen.)

30) $16\left\{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{5}\right)^9\right\}-4\left\{\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3\right\}$ zu berechnen. (9 St.) A.: 3,141592682.

31) α) Wenn p unvollständige Decimalzahlen, von welchen jede n Decimalstellen hat, addirt werden, welche Genauigkeit hat alsdann das Resultat? β) Wenn man die Summe der unvollständigen Decimalbrüche 17,4386... + 19,8765... + 0,8757... + 0,9863... + 0,7987... nimmt, auf welche Decimalstelle kann man sich alsdann im Resultate als zuverlässig richtig verlassen? γ) Wenn zwei unvollständige Decimalzahlen von einander subtrahirt werden, welche Genauigkeit hat alsdann das Resultat? δ) Welche Genauigkeit hat die Differenz der unvollständigen Decimalzahlen 9,8761... und 3,8547...?

32) Wie werden Decimalbrüche mit einander in abgekürzter Weise multiplicirt oder durch einander dividirt? Wie bestimmt sich die Genauigkeit des Resultates, wenn die Decimalbrüche unvollständig oder vollständig sind? In den folgenden Beispielen soll jedesmal angegeben werden, bis auf welche Stelle des Resultates man sich als zuverlässig richtig verlassen könne.

33) α) $37{,}9858764 \times 0{,}4872365$; β) $0{,}5872193 \times 0{,}4196215$; γ) $27{,}5639 \times 2{,}8743$; δ) $0{,}0072246 \times 0{,}56287$.

Aufl.: α) 18,50810544.

34) α) $1{,}414214^2$; β) $1{,}44225^3$; γ) $3{,}8571431^3$.

Aufl.: γ) 57,38485.

35) α) πr^2; β) $\frac{4}{3}\pi r^3$ für $\pi = 3{,}14159265$ und $r = 0{,}387564$.

36) Nach verkürzter Division auszuführen:

α) $58{,}732196 : 34{,}4827913$; β) $14{,}297543 : 119{,}89543$;
γ) $0{,}80754167 : 0{,}0032197$; δ) $16 : 1{,}4876532$.

37) Ein pariser Kubikzoll reines Wasser ist 1,3551017 pariser Loth schwer. Wie viel wiegt ein pariser Kubikzoll Gold, wenn dasselbe 19,2580123 mal so schwer als Wasser ist?

38) Der alte griechische Fuß betrug 0,983253 preußische Fuß, der alte römische Fuß 0,9391216 preußische Fuß. Wie groß war ein römischer Fuß in griechischen Fußen und umgekehrt?

39) Der Umfang eines Kreises beträgt das 3,14159265fache seines Durchmessers. Wie groß ist der Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser 41333600 Meilen ist?

40) $\dfrac{49876 \cdot 0{,}037542 \cdot 68{,}7075}{7{,}81649 \cdot 578{,}93 \cdot 28{,}4299}$ zu berechnen.

41) Ein Meter = 3,186199 preußische Fuß. Wie viel Kubikfuß enthält ein Kubikmeter (Stere)? wie viel 32,34587 Kubikmeter?

42) Wie viel preußische Morgen enthält 1 Hectare, wenn 1 Hectare = 100 Are, 1 Are = 1 Quadratdecameter, 1 Decam. = 10 Met., 1 Morgen = 180 Quadratruthen, 1 Quadratruthe = 144 Quadratfuß? Antw.: 10151,864 : 2592 = 3,9166 preuß. Morgen.

43) Die geographische Meile beträgt nach Bessel 1970,25008

preuß. Ruthen; wie viel beträgt hiernach der Umfang des Aequators der Erde, gleich 5400 geogr. Meilen in preuß. Meilen? Wie viel beträgt die Oberfläche der Erde = 9261238,314 geogr. Quadratmeilen in preuß. Quadratmeilen? wie viel der Inhalt = 2650184445,1 geogr. Kubikmeilen in preuß. Kubikmeilen?

D. Verhältnisse und Proportionen.

§. 31.

Verhältnisse.

1) Was ist ein Verhältniß? Wie viel Arten von Verhältnissen gibt es? Was versteht man unter Antecedent, Consequent und Exponent*)?

2) Zu den geometrischen Verhältnissen: α) 24 Sgr. : 16 Sgr.; β) 12 Sgr. : 2 Pfg.; γ) $42\frac{5}{8} : 7\frac{3}{4}$; δ) 6 Pfund : 7 Loth; ε) $89\frac{1}{3}$ Stunde : $5\frac{7}{12}$ Stunden; ζ) 3 Thlr. 22 Sgr. 6 Pfg. : 7 Sgr. 6 Pfg.; η) 204,72 : 12,795; ϑ) 0,462″ : 0,0007′; ι) $(a+b)(m^2-n^2) : (a^2-b^2)(m-n)$ die Exponenten zu suchen.

3) Wie groß ist der Antecedent eines geometrischen Verhältnisses, wenn der Consequent $13\frac{17}{19}$ und der Exponent $5\frac{2}{7}$ ist? wie groß, wenn der Consequent 13 Thlr. 17 Sgr. 5 Pfg. und der Exponent $19\frac{3}{5}$ ist?

4) Der Antecedent eines geom. Verhältnisses sei 0,07006652, der Exponent 0,5678. Wie groß ist der Consequent?

5) Wie wird ein Verhältniß geändert, wenn der Antecedent oder der Consequent sich vergrößert oder verkleinert?

6) Wie ändert sich der Exponent eines geometrischen Verhältnisses, wenn der Antecedent oder Consequent multiplicirt oder dividirt wird? wie, wenn der Antecedent und Consequent beide mit derselben Zahl multiplicirt oder durch dieselbe Zahl dividirt werden?

7) Bleibt ein geometrisches Verhältniß ungeändert, wenn zum Antecedenten und Consequenten dieselbe Zahl addirt wird?

8) Der Exponent des Verhältnisses eines preußischen Fußes zu einem pariser Fuße ist 0,96618. Wie groß ist der Exponent des Verhältnisses einer preußischen Ruthe oder eines preußischen Zolles zu einem pariser Fuße? wie groß der Exponent des Verhältnisses eines preußischen Zolles zu einem pariser Zolle?

9) Der Exponent des Verhältnisses eines Meters zu einem preußischen Fuße ist 3,186199. Wie groß ist der Exponent des

*) Der Exponent eines geometrischen Verhältnisses wird so genommen, daß der Consequent, mit demselben multiplicirt, dem Antecedenten gleich wird.

Verhältnisses eines Decimeters (0,1 Meter) zu einem preußischen Zolle, zu einer preußischen Ruthe?

10) Folgende Verhältnisse in andere gleich große, deren Glieder ganze Zahlen sind, zu verwandeln: α) $5\frac{3}{4} : 18\frac{1}{4}$; β) $5\frac{3}{7} : \frac{5}{11}$; γ) $4\frac{9}{10} : 5\frac{7}{13}$; δ) $0{,}078 : 4\frac{2}{5}$; ε) $6{,}976 : 0{,}0032$.

11) Folgende Verhältnisse durch die kleinsten ganzen Zahlen auszudrücken: 1) $3825 : 5175$; 2) $13{,}284 : 1{,}1988$; 3) $26\frac{1}{4} : 61\frac{1}{4}$; 4) $5\frac{1}{7} : 18\frac{6}{7}$; 5) $289575 : 334125$; 6) $4352049 : 4426443$; 7) 7 Thlr. 5 Sgr. 9 Pfg. : 9 Thlr. 3 Sgr. 2 Pfg.; 8) 70 Pfund 28 Loth : 94 Pfund 16 Loth; 9) $41' \, 3'' : 57' \, 9''$.

12) Wie läßt sich das Verhältniß eines pariser Fußes zu einem Meter $25296 : 77872$ durch kleinere Zahlen ausdrücken?

13) Der Exponent des Verhältnisses eines Kilogrammes zu einem preußischen Pfunde Altgewicht ist 2,138. Wie groß ist der Exponent des Verhältnisses eines preußischen Pfundes zu einem Kilogramme?

14) Wie ändert sich der Exponent e eines Verhältnisses $a : b$, wenn dasselbe in $b : a$, oder in $a \pm b : b$, oder in $a \pm b : a$, oder in $a : a \pm b$, oder in $b : a \pm b$, oder in $a + b : a - b$, oder endlich in $ma \pm nb : pa \pm qb$ umgeändert wird?

15) Wenn n der Exponent des Verhältnisses $p : q$ ist, wie groß ist der Exponent des Verhältnisses $5p + 3q : 7p - 6q$?

§. 32.

Proportionen.

1) Was versteht man unter einer Proportion? Wie viel Arten von Proportionen gibt es? Welche Glieder müssen bei einer arithmetischen, welche bei einer geometrischen Proportion gleichartig sein? Welche Glieder heißen homologe, welche innere und äußere? Was versteht man unter einer stetigen Proportion?

2) Welche Veränderung kann man in einer Proportion*) mit den einzelnen Gliedern durch Multiplication oder Division, unbeschadet der Richtigkeit der Proportion, vornehmen?

3) Folgende Proportion in eine andere umzuändern, deren Glieder ganze Zahlen sind: $5\frac{4}{7} : 4\frac{8}{11} = 3\frac{3}{7} : 1\frac{1}{11}x$.

4) Warum ist in jeder Zahlen-Proportion das Product der äußeren Glieder dem Producte der inneren Glieder gleich?

5) Wie überzeugt man sich von der Richtigkeit einer Proportion?

*) In der Folge soll, wenn von einer Proportion schlechtweg die Rede ist, hierunter jedes Mal eine geometrische Proportion verstanden werden.

6) Welche von nachstehenden Proportionen sind richtig, welche unrichtig?

I. $(3a+4b):(9a+8b) = (a-2b):(3a-4b)$.

II. $(9a^2-4b^2):(15a^2-31ab+14b^2) = (15a^2+31ab+14b^2):(25a^2-49b^2)$.

III. $(a^3+b^3):(a^2+b^2) = (a^2-b^2):(a-b)$.

IV. $(a^3+b^3):(a+b)=(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5):(a^3-b^3)$.

7) Warum ist a^2-b^2 die mittlere Proportionale zwischen $a^2+2ab+b^2$ und $a^2-2ab+b^2$?

8) Welche Versetzungen kann man mit den Gliedern der Proportion $m:n=p:q$ vornehmen?

9) Können die vier Zahlen 323, 195, 285, 221 zu einer Proportion mit einander verbunden werden?

10) Können die vier Ausdrücke $1-x^2$, $4-y^2$, $2-2x+y-xy$ und $2+2x-y-xy$ zu einer Proportion zusammengestellt werden?

11) Wenn die beiden Producte $21p^2qr$ und $55mn$ einander gleich sind, welche Proportionen kann man aus den Factoren derselben bilden?

12) Welche Veränderungen kann man mit einer Proportion durch Addition oder Subtraction der Antecedenten oder Consequenten vornehmen?

13) Wenn $a:b=c:d$, warum ist $(ma\pm nb):(pa\pm qb) = (mc\pm nd):(pc\pm qd)$?

14) Welche einfachere Proportionen lassen sich aus der Proportion $(7x+8y):(7x-8y) = (35m+24z-24u):(35m-24z+24u)$ durch Addition oder Subtraction der Antecedenten und Consequenten herleiten?

15) Wie findet man zu drei bekannten Gliedern einer Proportion das unbekannte Glied?

Aus den folgenden Proportionen 16—21 x zu bestimmen:

16) $221a^2b^2:17pqa = 26ab^2:x$.

17) $29(a+b):x = 551(a^2-b^2):19(a-b)$. Aufl.: $x=1$.

18) $13\frac{17}{19}:x = 0{,}00831:4\frac{11}{13}$.

19) 3 Thlr. 22 Sgr. 6 Pfg. : 6 Thlr. 7 Sgr. 6 Pfg. = 5 Centner 25 Pfund : x.

20) $[a-b]:\left[\frac{(a+b)^2}{2ab}-1\right] = x:\left(a+b+\frac{2b^2}{a-b}\right)$. A.: $x=2ab$.

21) $(3a^2+2ab-8b^2):(5a^2+4ab-12b^2) = x:(5a-6b)$.

22) Die beiden ersten Glieder einer Proportion $x:y=p:q$ zu finden, wenn die Summe s oder Differenz d derselben und die beiden letzten Glieder bekannt sind.

23) Die Zahl 3390 in zwei Summanden zu zerlegen, die in dem Verhältnisse 13 : 17 zu einander stehen.

24) Aus $x:(a-x) = m:n$ die unbekannte Zahl x zu bestimmen.

25) Aus α) $x:(d+x) = p:q$, β) $a:b = (y-m):m$ und aus γ) $(c+z):(c-z) = r:s$ die Unbekannten x, y und z zu finden.

26) Folgende Proportion aufzulösen:

$$x:y = \left[a+b - \frac{ab}{a+b}\right] : \left[a-b + \frac{ab}{a-b}\right], \text{ wenn } x+y = 2a^3 \text{ ist.}$$

Aufl.: $x = a^3-b^3$, $y = a^3+b^3$.

27) Eben so: $x:y =$

$$\left[a-b + \frac{b^2}{a-b}\left(1 - \frac{b(a+b)}{a^2+ab+b^2}\right)\right] : \left[\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^3}{a^2+ab+b^2}\right],$$

wenn $x-y = 2b^5$. Aufl.: $x = a^5+b^5$, $y = a^5-b^5$.

28) Wenn $A:B = m:n$, $B:C = n:o$, $C:D = o:p$, $D:E = p:q$, welchen Verhältnissen sind alsdann die Verhältnisse: $A:C$, $A:D$, $A:E$, $B:D$, $B:E$ und $C:E$ gleich?

29) Wenn $A:B = f:g$, $B:C = h:i$, $C:D = k:l$, $D:E = m:n$, welchen Verhältnissen sind alsdann die Verhältnisse: $A:C$, $A:D$ und $A:E$ gleich?

30) Was heißt: M zu N ist zusammengesetzt aus den Verhältnissen $a:b$, $c:d$, $e:f$, $g:h$?

31) Welche Proportionen kann man aus $a:b = c:d$, $e:f = g:h$, $i:k = l:m$, $n:o = p:q$ durch Multiplication ableiten?

32) Was versteht man unter einer fortlaufenden Proportion $a:b:c:d:e = m:n:o:p:q$? Wie werden mehrere Proportionen $a:b = m:n$, $b:c = p:q$, $c:d = r:s$ in eine fortlaufende Proportion verwandelt?

33) Wenn $a:b = 1:2$, $b:c = 3:4$, $c:d = 5:6$, $d:e = 7:8$, welchen Verhältnissen ist alsdann $a:b:c:d:e$ gleich?

34) Wenn $a:b = 11:13$, $c:d = 7:9$, $e:c = 9:5$, $d:b = 11:7$, welchen Verhältnissen ist alsdann $a:b:c:d:e$ gleich?

35) Wenn $a:b = 4:5$, $d:f = 5:2$, $e:c = 6:7$, $d:b = 7:3$ und $f:c = 4:3$, welchen Verhältnissen ist alsdann $a:b:c:d:e:f$ gleich?

Aufl.: 24 : 30 : 21 : 70 : 18 : 28.

36) Wenn $x:y:z:u = p:q:r:s$, so ist $(x \pm y \pm z \pm u):x:y:z:u = (p \pm q \pm r \pm s):p:q:r:s$. Warum?

37) Wie groß sind x, y, z, u, wenn $x:y:z:u = a:b:c:d$ und $x+y+z+u = s$ ist?

38) x, y, z, u zu bestimmen, wenn $x:y:z:u = 19:11:4:1$ und $x-y-z+u = 95$ ist.

39) Wie groß sind x, y, z, p, wenn $x:y:z:p = 133:247:285:371$ und $y-x+p-z = 1000$ ist?

40) $x:y:z:t = 3:5:7:9$ und $7x-4y+2z-t = 66$. Wie groß sind x, y, z, t?

41) $x:y:z:u = a^3+a^2+a+1 : a^2+a+1 : a+1 : 1$ und $x-y+z-u = a\frac{a^4-1}{a+1}$. Wie groß sind x, y, z, u?

Aufl.: $x = a^4-1$, $y = a^3-1$, $z = a^2-1$, $u = a-1$.

42) Wenn $x:y = a:b$, $y:z = c:d$, $z:u = e:f$ und $x+y+z+u = s$, wie lassen sich hieraus x, y, z, u bestimmen?

43) $x:y = 7:26$, $y:z = 5:21$, $z:u = 9:20$ und $x+y-z+u = 2497$. Wie groß sind x, y, z, u?

§. 33 a.

Anwendung der Proportionslehre.

(Gerades und umgekehrtes Verhältniß. Einfaches, zusammengesetztes, quadratisches, kubisches Verhältniß. Kettenregel. Gesellschafts- und Mischungs-Rechnung.)

1) Wann sind Größen mit einander gerade, wann umgekehrt proportionirt?

2) Wann stehen Größen mit mehreren anderen im zusammengesetzten, wann im quadratischen, wann im kubischen Verhältnisse?

3) a Gewichtseinheiten, z. B. Pfund, Loth einer Waare, kosten m Thaler. Wie viel kosten b Gewichtseinheiten der Waare?

4) Wenn $14\frac{3}{4}$ [p] preußische Pfund einer Waare eben so viel kosten, als $34\frac{3}{8}$ [q] preuß. Pfund einer anderen Waare, und das Kilogramm der ersteren Waare 2 Francs 45 Centimes [n Francs] kostet, was kostet das Kilogramm der letzteren Waare?

5) 1000 pariser Fuß machen 1035 preußische Fuß. Wie viel pariser Fuß machen 7113 preußische Fuß?

6) Wie viel Zinsen geben k Thaler zu p Procent in einem Jahre? wie viel in n Jahren?

7) Welches Capital gibt nach n Jahren zu p Procent z Thaler Zinsen?

8) Zu wie viel Procent stehen 288 Thaler, wenn sie eben so viel Zinsen geben, als 352 Thaler à $4\frac{1}{2}$ Procent? Wie heißt die Auflösung, wenn für 288, 352, $4\frac{1}{2}$ die allgemeinen Zeichen k, k', p gesetzt werden?

9) Ein Kaufmann kauft von einem Fabricanten Waare für 12800 Francs, und erhält auf je 100 Thaler, die er zu bezahlen hat, $4\frac{3}{4}$ Thaler Nachlaß ($4\frac{3}{4}$ Procent Rabatt in Hundert). Wie viel beträgt der Rabatt und wie viel die baare Zahlung?

10) Ein Anderer kauft Waare für den Werth von 12800 Thaler, erhält aber auf je 100 Thaler Waare für $4\frac{3}{4}$ Thaler Waare hinzu (d. h. er zahlt für je $104\frac{3}{4}$ Thaler nur 100 Thaler = $4\frac{3}{4}$ Procent Rabatt auf Hundert). Wie viel beträgt der Rabatt, wie viel die baare Zahlung?

11) Jemand kauft für a Thaler Waare. Wie viel wird in Abzug gebracht, und wie viel beträgt die Zahlung, wenn ein Rabatt von p Procent in Hundert, wie viel, wenn ein Rabatt von p Procent auf Hundert gestattet wird?

12) Ein Wechsel von a Gulden, der erst nach n Monaten fällig ist, wird mit einem jährlichen Disconto (Abzug) von p Procent bezahlt. Wie viel beträgt der Disconto, wie viel die Zahlung?

13) Jemand hat in 4 Terminen jedes Mal nach n Jahren ein Capital von k Thalern zu bezahlen. Wie viel kann er jetzt baar bezahlen, wenn jährlich p Procent auf Hundert discontirt werden?

14) Ein Kaufmann ist genöthigt, seine Waare so zu verkaufen, daß er für $43\frac{1}{2}$ Pfund eben so viel erhält, als ihm 36 Pfund gekostet haben. Wie viel Procent Schaden erleidet er?

15) Wenn Friedrichsd'or gegen Silber $13\frac{1}{3}$ Procent Agio (Aufgeld) thun, wie viel machen 10 Thaler Gold in Silbergeld aus? wie viel a Thaler Gold in Silber? wie viel n Thaler Silber in Gold?

16) Wenn ein Staatspapier zu $97\frac{3}{4}$ Procent (100 = pari) steht, wie viel sind a Thaler von jenem Papiere in Münze werth? wie viel erhält man von jenem Papiere für b Thaler?

17) Wenn die Actien auf eine Eisenbahn, welche jährlich 10 Procent reinen Gewinn abwirft, auf 168 stehen (100 = pari), zu wie viel Procent Zinsen legt man sein Geld an, wenn man Actien kauft?

18) Ein Arbeiter verdient in a Tagen so viel, als ein anderer in b Tagen. Der erstere verdient in t Tagen s Silbergroschen. Wie viel verdient der andere in derselben Zeit?

19) Ein Maurer führt, wenn er täglich 9 Stunden arbeitet, in 17 Tagen 936 Kubikfuß Mauer auf. Wie viel Stunden muß er täglich arbeiten, um in derselben Zeit 1144 Kubikfuß aufführen zu können?

20) In wie viel Jahren bringt das Capital k so viel Zinsen, als das Capital m bei gleichen Procenten in n Jahren?

21) Das Vorderrad eines Wagens hat p Fuß im Umfange, das Hinterrad q Fuß. Wie oftmal hat sich letzteres umgedreht, wenn ersteres n Umläufe gemacht hat?

22) Aus einem Behälter, der 23711 Quart Wasser enthält,

werden alle $4\frac{1}{2}$ Minute durch ein Rohr $87\frac{1}{4}$ Quart abgelassen. In welcher Zeit wird der Behälter leer?

23) Die Geschwindigkeiten zweier sich bewegenden Körper verhalten sich wie $C:c$. Der eine gebraucht zu einem Wege t Secunden; wie viel wird der andere zu demselben Wege gebrauchen?

24) In jedem Kreise ist das 113fache der Peripherie nahe dem 355fachen des Durchmessers gleich. Wie groß ist der Umfang der Erdbahn, wenn dieselbe kreisförmig angenommen wird, und wenn, den neuesten Forschungen gemäß, die Entfernung der Erde von der Sonne im Mittel zu 19846794 geographischen Meilen angenommen wird?

25) Wenn 41 Kubikfuß Wasser eben so viel als 50 Kubikfuß Weingeist, und 9 preuß. Quart Wasser 19 Pfund 6 Loth preuß. Altgewicht wiegen, wie viel wiegen 9 preuß. Quart Weingeist?

26) 24 Pfund gesponnener Flachs geben 100 Ellen Leinwand, wenn dieselbe 6 Viertel breit ist. Wie viel Ellen geben 24 Pfund, wenn dieselbe 9 Viertel breit ist?

27) Das straßburger Münster wirft am 21. Juni Mittags auf dem horizontalen Boden einen Schatten von 146 preußischen Fuß Länge; ein in der Nähe des Thurmes aufgestellter senkrechter Stab von $2\frac{2}{3}$ pariser Fuß Höhe wirft zu derselben Zeit einen Schatten von $10\frac{1}{3}$ pariser Zoll Länge. Wie läßt sich hieraus die Höhe des straßburger Münsters berechnen?

28) Um die ausgeworfene Erde eines Festungsgrabens in 12 Tagen 2561 Fuß weit zu bringen, werden 20 Arbeiter erfordert. Wie viel Arbeiter sind nöthig, um in derselben Zeit die ausgeworfene Erde 3349 Fuß weit fortzuschaffen?

29) Mittelst einer Dampfmaschine von 20 Pferdekräften werden in einer gewissen Zeit 1700 Ohm Wasser in die Höhe gepumpt. Wie viel Ohm werden mittelst einer Dampfmaschine von 29 Pferdekräften in derselben Zeit auf dieselbe Höhe gepumpt?

30) Wegen bevorstehender Ueberschwemmung eines Flusses soll ein am Ufer liegender Waarenvorrath in $2\frac{1}{2}$ Stunde an einen sicheren Ort hingeschafft werden. Hierzu sind 13 Arbeiter nöthig, wenn jeder derselben in einer Minute 135 Fuß zurücklegt. Wie viel Arbeiter sind nöthig, wenn jeder derselben in einer Minute nur 117 Fuß abmacht, und die Waaren in derselben Zeit fortgeschafft werden sollen?

31) Eine gewisse Last in einer bestimmten Zeit fortzuschaffen, sind 4 Pferde nöthig, wenn jedes 40 Centner zu ziehen im Stande ist. Wie viel Pferde sind nöthig, wenn jedes derselben nur 32 Centner fortzuziehen vermag?

32) Ein Diamant von $1\frac{3}{4}$ Karat kostet 120 Gulden. Was kostet ein Diamant von gleicher Güte und Form, der $3\frac{1}{2}$ Karat schwer ist?

Bemerkung. Die Preise der Diamanten stehen im quadratischen Verhältnisse ihrer Gewichte.

33) Wenn ein Körper in 6 Secunden $562\frac{1}{2}$ Fuß fällt, wie tief ist ein Brunnen, wenn ein in denselben fallender Stein in $3\frac{1}{4}$ Secunde den Boden erreicht?

Bemerkung. Bei fallenden Körpern verhalten sich die von Anfange an durchlaufenen Räume wie die Quadrate der Zeiten.

34) Die Erde hat 1719 Meilen Durchmesser und 9261238 Quadratmeilen Oberfläche. Die Sonne hat 184000 Meilen Durchmesser. Wie groß ist die Oberfläche der Sonne?

Bemerkung. Die Oberflächen der Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

35) In einen Weingarten gehen 3744 Stöcke, wenn dieselben quadratisch in einer Entfernung von 4 Fuß gepflanzt werden. Wie viel Stöcke können gesetzt werden, wenn die Entfernung derselben nur 3 Fuß beträgt?

Bemerkung. Man denke den Weingarten in Quadrate abgetheilt, ein Mal von 4 Fuß, ein ander Mal von 3 Fuß Länge und in die Mitte jedes Quadrates einen Weinstock gesetzt. Die Weinstöcke an den Rand des Gartens setzen zu wollen, wäre unstatthaft.

36) Ein Ochs ist auf einer Weide an einem $8\frac{1}{2}$ Fuß langen, am Ende befestigten, Seile angebunden und frißt in 2 Tagen alles Gras, welches er erreichen kann, ab. Wie viel Tage wird er mit dem Futter auskommen können, wenn das Seil $12\frac{3}{4}$ Fuß lang ist?

Bem. Kreise stehen im quadratischen Verhältnisse ihrer Halbmesser.

37) Die Stärke des Sonnenlichtes auf unserer Erde ist der Lichtstärke von 5000 Wachskerzen in 1 Fuß Entfernung gleich. Wie groß ist die Lichtstärke der Sonne a) auf dem Planeten Uranus, wie groß b) auf dem Planeten Neptun, wenn die mittleren Entfernungen dieser Planeten in Vergleich zur mittleren Entfernung der Erde von der Sonne 19,182639 und 30,03386 sind?

Bemerkung. Bei doppelter, dreifacher, vierfacher u. s. w. Entfernung ist das Licht 4, 9, 16 u. s. w. mal so schwach.

38) Ein hohler Würfel von 6 preuß. Zoll Länge faßt $3\frac{3}{8}$ preuß. Quart Wasser. Wie viel Quart enthält ein kubischer Wasserbehälter, dessen Höhe 4 Fuß 4 Zoll beträgt?

39) Eine Kanonenkugel von 24 preuß. Pfund Gewicht hat 5,5 preuß. Zoll Durchmesser. Wie schwer ist eine Kanonenkugel, deren Durchmesser 3,46 preuß. Zoll beträgt?

Bemerkung. Kugeln stehen dem körperlichen Inhalte nach im kubischen Verhältnisse ihrer Durchmesser.

40) 5 Centner 14 Meilen weit zu fahren, kostet $2\frac{1}{2}$ Thaler. Wie viel muß man bezahlen, um 21 Centner 25 Meilen weit zu fahren?

41) Um einen Canal von 735 Fuß Länge, 10 Fuß Tiefe, 21 Fuß Breite auszugraben, gebrauchen 140 Arbeiter, wenn sie täglich $7\frac{1}{2}$ Stunde arbeiten, 546 Tage. Auf welche Länge kann ein Canal von 15 Fuß Tiefe und 25 Fuß Breite in 324 Tagen durch 182 Arbeiter gegraben werden, wenn dieselben täglich $8\frac{1}{3}$ Stunde arbeiten, und wenn ihr Fleiß zu dem der ersteren sich wie 8 : 9 verhält?

42) Ein cylindrischer Wasserbehälter von $4\frac{1}{2}$ Fuß Breite und $3\frac{1}{3}$ Fuß Höhe kann in 4 Stunden ausgeleert werden. In welcher Zeit wird ein Wasserbehälter leer, der eine Breite von $3\frac{3}{4}$ Fuß und eine Höhe von $4\frac{1}{2}$ Fuß hat, wenn aus diesem in der nämlichen Zeit 5 Quart ausgeschöpft werden, in der aus jenem 6 Quart?

43) a Thaler geben in n Jahren q Thaler Zinsen. Wie viel Zinsen geben bei gleichem Zinsfuße b Francs in r Jahren?

44) Ein sich gleichförmig bewegender Körper, der alle t Minuten s Fuß zurücklegt, gelangt von einem Orte zum anderen in n Stunden. In welcher Zeit wird ein Körper denselben Raum zurücklegen, wenn er alle p Minuten q Fuß macht?

45) Zwei gezahnte Räder, von denen das erste 15, das andere 28 Zähne hat, greifen in einander. Wenn sich nun das erste in $7\frac{1}{2}$ Secunden 16 mal umdreht, wie oftmal dreht sich das zweite in 21 Secunden um? Was wird aus dem Resultate, wenn für 15, 28, $7\frac{1}{2}$, 16, 21 die allgemeinen Zeichen m, n, t, p, q, gesetzt werden?

46) Ein voller Wasserbehälter, aus dem man alle m Minuten mit einem Gefäße, welches q Quart faßt, n mal herausschöpft, wird in s Stunden leer. In welcher Zeit wird der leere Behälter angefüllt sein, wenn man mit einem Gefäße, welches q' Quart faßt, alle m' Minuten n' mal Wasser eingießt?

47) Um in einem Bergwerke Bleierz aus einer Tiefe von 525 Fuß zu fördern, sind 18 Pferde nöthig, von denen jedes in 4 Secunden 230 Pfund 9 Fuß in die Höhe zu ziehen im Stande ist. In einem anderen Bergwerke, dessen rohe Ausbeute sich zu der des ersteren wie 16 : 9 verhält, soll Erz aus einer Tiefe von 406 Fuß in die Höhe geschafft werden. Wie viel Pferde sind hierzu nöthig, wenn jedes in 15 Secunden 207 Pfund 32 Fuß hoch zu ziehen im Stande ist? Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn statt der Zahlen 525, 18, 4, 230, 9, 16, 9, 406, 15, 207, 32 bezüglich die allgemeinen Zeichen a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l gesetzt werden?

48) Verfertigt man aus Blei und aus Zinn zwei Würfel von gleichem Gewichte, so verhalten sich die Höhen derselben wie 56 : 65. Wenn nun 9 preußische Kubikzoll Zinn 79,9 preuß. Loth wiegen, wie schwer sind 13,7 preuß. Kubikzoll Blei?

49) Ein Mühlstein von Basalt, von 4 Fuß Durchmesser und 2 Fuß Dicke, ist 1740 Pfund schwer. Wie schwer ist ein Mühlstein von Quarz, von $3\frac{1}{2}$ Fuß Durchmesser und 1 Fuß 9 Zoll Dicke, wenn zwei gleich große Stücke von Basalt und Quarz sich dem Gewichte nach wie 13 : 15 verhalten?

50) Schöpft man aus einem kubischen Behälter, der $7\frac{3}{4}$ Fuß hoch ist, mit einem cylindrischen Gefäße von $8\frac{1}{2}$ Zoll Höhe und $6\frac{5}{8}$ Zoll Durchmesser Wasser aus, so wird der Behälter in $2\frac{1}{3}$ Stunde leer. In welcher Zeit wird ein kubischer Behälter leer, der $8\frac{1}{2}$ Fuß hoch ist, wenn man mit einem cylindrischen Gefäße von $9\frac{1}{4}$ Zoll Höhe und $6\frac{1}{4}$ Zoll Durchmesser in $23\frac{1}{4}$ Minute aus demselben eben so oftmal Wasser ausschöpft, als mit dem ersten Gefäße aus dem ersten Behälter in 17 Minuten?

51) Wie viel preußische Fuß machen 139 pariser Fuß, wenn 15′ par. so viel als 16′ engl., 28′ engl. so viel als 27′ österr. und 139′ österr. so viel als 140′ preuß. sind?

52) Jemand vertauscht 512 Ellen und erhält für je 7 Ellen 9 Pfund Kaffee. Den Kaffee vertauscht er gegen Zucker und erhält für je $9\frac{1}{2}$ preußische Pfund Kaffee $12\frac{3}{4}$ preußische Pfund Zucker. Den Zucker vertauscht er gegen Reiß und gibt für je $8\frac{1}{2}$ Kilogramm Reiß $3\frac{1}{2}$ Kilogramm Zucker. Den Reiß vertauscht er gegen Tabak und erhält für je 17 englische Pfund Reiß $6\frac{1}{4}$ englische Pfund Tabak. Wie viel Tabak erhält er für obige 512 Ellen?

53) Jemand will 1218 Rubel in preußischen Thalern bezahlen. Nun aber machen 14 Rubel 5 Ducaten, 6 Ducaten 17 Thaler. Wie viel hat er zu bezahlen?

54) Wie viel Ducaten machen 196 preußische Thaler, wenn 135 preußische Thaler = 100 holländische Thaler, 2 holländische Thaler = 5 holländische Florin, 1 holländischer Florin = 20 Stüber, 104 Stüber = 1 Ducaten?

55) Ein Weinhändler in Berlin kauft 12 kölnische Ohm Rheinwein für 640 Thaler in Köln. Wie theuer muß er die Ohm in Louisd'or zu 5 Thaler, die gegen Silbergeld $13\frac{3}{4}$ Procent Agio thun, verkaufen, wenn er 16 Procent gewinnen will, und 529 berliner Ohm gleich sind 500 kölnischen Ohm?

56) Eine preußische Meile verhält sich zu einer deutschen Meile, wie 2000 : 1972, eine deutsche Meile zu einer englischen Seemeile,

wie 1972 : 493, eine englische Seemeile zu einer französischen Lieue, wie 493 : 1183, und eine französische Lieue zu einer niederländischen Stunde, wie 1183 : 1503. In welchem Verhältnisse stehen je zwei der genannten Meilen zu einander?

57) Macht man aus verschiedenen Stoffen gleich große Würfel, so verhalten sich dem Gewichte nach: Eisen zu Blei, wie 23 : 36, Blei zu Kupfer, wie 35 : 26, Kupfer zu Kreide, wie 15 : 4, Kreide zu Eichenholz, wie 31 : 23, Eichenholz zu Tannenholz, wie 2 : 1. In welchem Verhältnisse stehen bei gleichem körperlichen Inhalte die Gewichte je zweier der genannten Körper?

58) Dem Durchmesser nach verhalten sich die nachstehenden Himmelskörper, wie folgt: die Sonne zur Erde, wie 542 : 5, die Erde zum Monde, wie 11 : 3, der Mond zur Venus, wie 5 : 18, die Venus zum Jupiter, wie 1 : 12, der Jupiter zum Saturn, wie 11 : 9. In welchem Verhältnisse stehen die Durchmesser je zweier der genannten Himmelskörper zu einander?

59) In einem Silbergroschen sind Silber und Kupfer in dem Verhältnisse 2 : 7 mit einander vermischt. Wie viel Silber und wie viel Kupfer hat man nöthig, um 7584 preußische Thaler in Silbergroschen zu prägen, wenn 320 Silbergroschen 3 Mark schwer sind?

60) Zu Neusilber, welches dem 12löthigen Silber am nächsten kommt, nimmt man 53,4 Theile Kupfer, 29,1 Theile Zink und 17,5 Theile Nickel. Wie viel von jedem der Metalle hat man nöthig, wenn 1200 Pfund Neusilber dargestellt werden sollen, und wenn man beim Zusammenschmelzen $1\frac{1}{2}$ Procent Verlust erleidet?

61) Das Verhältniß des Alters eines Vaters zu dem seines Sohnes ist 9 : 5. Wie alt sind Vater und Sohn, wenn ersterer 28 Jahre älter ist, als letzterer?

62) Zum Sprengen der Steine in Bergwerken bedient man sich eines Pulvers, in dem das Verhältniß des Salpeters zur Kohle 16 : 5, das des Salpeters zum Schwefel 10 : 3 ist. Wie viel hat man von den angeführten Stoffen nöthig, um 5934 Pfund Pulver zu verfertigen?

63) A, B, C, D nehmen gemeinschaftlich ein Lotterieloos. Hierzu gibt A 8 Thlr. 10 Sgr., B 12 Thlr. 25 Sgr., C 6 Thlr. 20 Sgr., D 13 Thlr. Das Loos kommt heraus mit 10000 Thlrn., wovon aber $12\frac{1}{2}$ Procent für die Lotterie-Casse und $3\frac{1}{3}$ Procent für den Einnehmer abgezogen werden. Wie viel erhält Jeder?

§. 33b. Wiederholungs-Beispiele.

1) Wie viel Jahre sind: α) von a Jahren vor Christus bis b Jahre nach Christus? β) von c Jahren vor Christus bis d Jahre vor Christus? γ) von m Jahren nach Christus bis n Jahre nach Christus?

2) Ein Thermometer zeigt Abends n Grad über Null und fällt Nachts auf p Grad unter Null. Wie viel Grad ist dasselbe gefallen?

3) Ein Ort A liegt m Fuß höher als B, B n Fuß höher als C, C p Fuß tiefer als D, D q Fuß tiefer als E, E r Fuß höher als F, und F endlich t Fuß tiefer als G. Wann wird A höher, wann tiefer als G liegen, und um wie viel liegt A höher oder tiefer als G?

4) Die folgenden Ausdrücke von 1. bis 8. sollen zu einander addirt und von der Summe sämmtliche Summanden, und zwar einzeln in der Ordnung 1., 2., 3. bis 8. subtrahirt werden, bis zuletzt nichts übrig bleibt:

1) $2\frac{1}{2}a - 3\frac{1}{4}b + 6\frac{3}{4}c - 5\frac{1}{3}d - 4\frac{1}{4}e$; 2) $1\frac{1}{3}a + 2\frac{1}{3}b - 5\frac{1}{2}c + 4\frac{3}{4}d - 3\frac{1}{3}e$;
3) $2\frac{1}{4}a + 1\frac{1}{4}b - 2\frac{3}{4}c - 1\frac{1}{3}d + 1\frac{1}{4}e$; 4) $2\frac{1}{2}a - 4\frac{3}{4}b - 6\frac{1}{3}c - 7\frac{1}{8}d - 5\frac{1}{6}e$;
5) $6\frac{3}{4}a - 7\frac{3}{4}b + 7\frac{3}{8}c + 6\frac{1}{3}d - 4\frac{1}{4}e$; 6) $5\frac{3}{4}a - 3\frac{1}{4}b - 2\frac{1}{3}c - 3\frac{3}{8}d - 5\frac{1}{4}e$;
7) $7\frac{1}{3}a - 5\frac{5}{8}b - 6\frac{2}{3}c - 7\frac{3}{4}d - 3\frac{1}{6}e$; 8) $9\frac{1}{3}a + 8\frac{1}{2}b + 4\frac{3}{4}c + 6\frac{2}{3}d - 4\frac{1}{3}e$.

5) In dem folgenden Beispiele:

$$\begin{array}{r}
7\frac{1}{2}a - 2\frac{3}{4}a - 5\frac{1}{3}a + 7\frac{3}{4}a - 6\frac{1}{3}a + 5\frac{1}{2}a \\
-3\frac{3}{4}a + 1\frac{1}{3}a + 2\frac{1}{4}a - 5\frac{1}{2}a - 6\frac{1}{4}a - 7\frac{3}{4}a \\
-2\frac{1}{3}a - 5\frac{1}{4}a - 6\frac{2}{3}a - 3\frac{3}{4}a + 2\frac{1}{3}a - 9\frac{1}{4}a \\
-3\frac{1}{2}a + 2\frac{1}{3}a - 5\frac{1}{4}a + 6\frac{3}{4}a - 7\frac{1}{2}a + 5\frac{1}{3}a \\
-6\frac{1}{3}a - 2\frac{1}{3}a - 4\frac{1}{3}a - 5\frac{1}{4}a + 6\frac{1}{8}a - 6\frac{1}{4}a \\
2\frac{1}{2}a - 1\frac{1}{4}a + 6\frac{1}{2}a + 9\frac{1}{3}a - 1\frac{1}{4}a + 3\frac{3}{4}a \\
-2\frac{3}{4}a + 1\frac{2}{3}a - 3\frac{1}{4}a - 5\frac{5}{8}a + 6\frac{1}{4}a - 7\frac{1}{8}a
\end{array}$$

soll 1) die Summe der einzelnen wagerechten Reihen genommen, das Resultat rechts daneben geschrieben werden; 2) die Summe der senkrecht übereinander stehenden Glieder mit jedesmaliger Berücksichtigung der Zeichen genommen und das Resultat unter jede Reihe geschrieben werden; 3) die Summe der neuen senkrechten Reihe sowohl, als der neuen wagerechten Reihe gebildet werden. Hat man richtig gerechnet, so wird man bei 3 zu denselben End-Resultaten gelangen.

6) Was erhalte ich, wenn ich die halbe Differenz zweier beliebigen Zahlen α) zur halben Summe dieser Zahlen addire, β) von der halben Summe subtrahire? Was erhalte ich ferner, wenn ich γ) die halbe Summe zweier Zahlen von der größeren Zahl abziehe; δ) die halbe Differenz zweier Zahlen von der größeren Zahl

abziehe; ε) wenn ich die halbe Summe zweier Zahlen um die kleinere Zahl vermindere; ζ) wenn ich die halbe Differenz zweier Zahlen zur kleineren Zahl addire; η) die Summe zweier Zahlen mit ihrer Differenz multiplicire; ϑ) zum Quadrate der Summe zweier Zahlen das Quadrat ihrer Differenz addire; ι) von der Summe der Quadrate zweier Zahlen das Quadrat der Differenz der Zahlen abziehe, oder $\varkappa$) von dem Quadrate der Summe zweier Zahlen das Quadrat der Differenz der Zahlen abziehe? λ) Was muß ich von dem Quadrate der Summe zweier Zahlen abziehen, um das Quadrat der Differenz der Zahlen zu erhalten? μ) Was muß ich zu dem Quadrate der Differenz zweier Zahlen addiren, um das Quadrat der Summe zu erhalten? Die Sätze sollen sowohl in algebraischen Zeichen, als in Worten ausgedrückt werden.

7) In den Ausdrücken: α) $([(x-10)x+35]x-50)x+24$; β) $36+[13-(13-[1+x]x)x]x$ die Klammern aufzuheben und die Ausdrücke selbst sowohl, als die ihnen gleichen für α) $x=1$, β) $x=2$, γ) $x=3$, δ) $x=4$ zu berechnen.

8) Zu berechnen: α) $(p+q)\ (p-q)$; β) $(2a-x)\ (2a+x)$; γ) $(x+1)\ (1-x)$; δ) $(y^2+y)\ (y^2-y)$; ε) $(3a-7b)\ (7b+3a)$; ζ) $(x^2+x+1)\ (x^2+x-1)$; η) $(x^2-x+1)\ (x^2+x-1)$.

9) Folgende Beispiele in §. 16 nach der Formel für $(p+q)(p-q)$ aufzulösen: Nr. 29 β), Nr. 30 α) und β), Nr. 43, 45, 46 u. 47.

10) In zwei Factoren zu zerlegen: α) x^2-y^2; β) $(a+b)^2-c^2$; γ) $[\frac{1}{2}(a+b)]^2-[\frac{1}{2}(a-b)]^2$; δ) $[\frac{1}{2}(a-b)+\frac{1}{2}(b-c)]^2-[\frac{1}{2}(c-a)]^2$.

11) α) $\left(a-\frac{ac}{b}\right)(b+c)$; β) $\left(\frac{x^2}{y}+x\right)\left(y-\frac{y^2}{x}\right)$; γ) $\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{x}-\frac{y^3}{x^3}\right)$; δ) $\left(m+\frac{mb^2}{a^2}\right)\left(n+\frac{nb}{a}\right)(a-b)$.

12) Wem ist α) $(a+b+c)^2$, wem β) $(a+b+c+d)^2$ gleich? Aus den Resultaten dieser Formeln sollen Sätze hergeleitet werden.

13) α) $(a-b+c)^2$; β) $(a+2b-3c)^2$; γ) $(a-3b-5c)^2$; δ) $(2m-3n+4p)^2$; ε) $(a-2b-3c+4d)^2$.

14) α) $(x^2+xy+y^2)\ (x-y)$; β) $(x^2-xy+y^2)\ (x+y)$; γ) $(x^3+x^2y+xy^2+y^3)(x-y)$; δ) $(x^3-x^2y+xy^2-y^3)\ (x+y)$; ε) $(2a^2x^2-2abx+b^2)\ (2a^2x^2+2abx+b^2)$.

15) Nach den Beispielen der vorigen Nummer aufzulösen: α) $(9a^2+6ab+4b^2)(3a-2b)$; β) $(25a^2-20ab+16b^2)(5a+4b)$; γ) $(27a^3+3a^2b+\frac{1}{3}ab^2+\frac{1}{27}b^3)\ (3a-\frac{1}{3}b)$; δ) $(\frac{1}{64}x^3-\frac{1}{48}x^2y+\frac{1}{36}xy^2-\frac{1}{27}y^3)\ (\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y)$; ε) Nr. 44, §. 16; ζ) Nr. 48, §. 16.

16) α) $\frac{1}{2}(a+1)\ (b+1)\ (c+1)\ +\ \frac{1}{2}(a-1)\ (b-1)\ (c-1)$;
β) $\frac{1}{2}(a+1)\ (b-1)\ (c+1)\ +\ \frac{1}{2}(a-1)\ (b+1)\ (c-1)$;
γ) $(2-x)^2\ (1+x)$; δ) $(a+x)^2\ (a-2x)$.

17) Aus $\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}+1$ soll $\frac{(a+b+c-d)(a+b-c+d)}{2(ab+cd)}$ abgeleitet werden.

18) Umzuformen: $\alpha)\ \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab-cd)}+1$;

$\beta)\ 1-\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$; $\gamma)\ 1-\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab-cd)}$.

19) $\alpha)\ \dfrac{a+b-\frac{2(a+2b)}{3}}{a-b-\frac{2(a-2b)}{3}}$; $\beta)\ \dfrac{x-y+\frac{2xy}{x-y}}{x+y-\frac{2xy}{x+y}}$;

$\gamma)\ \left(\frac{z+x}{x}-\frac{2x}{x-z}\right)\cdot\frac{x-z}{z^2+x^2}$ zu vereinfachen.

20) Was kann für $\alpha)\ 1:(1-x)$, $\beta)\ 1:(1+x)$ näherungsweise gesetzt werden, wenn x eine sehr kleine Zahl ist?

Antw.: $\alpha)\ 1+x$, $\beta)\ 1-x$.

21) Auszuführen: $\alpha)\ (p^2-q^2):(p-q)$; $\beta)\ (p^2-q^2):(p+q)$; $\gamma)\ (p^3-q^3):(p-q)$; $\delta)\ (p^4-q^4):(p+q)$; $\varepsilon)\ (p^4-q^4):(p^2-q^2)$; $\zeta)\ (p^5-q^5):(p-q)$; $\eta)\ (p^5+q^5):(p+q)$; $\vartheta)\ (p^6-q^6):(p-q)$.

22) Mit Hülfe der vorhergehenden Formeln aufzulösen: §. 25 Nr. 11 γ) und δ), 12 δ), 15 γ) und δ), 27, 28, 30 und 31.

23) $[(x+y)^4-(x-y)^4]:[(x+y)^3+(x+y)^2(x-y)+(x+y)(x-y)^2+(x-y)^3]$. Antw.: $2y$.

24) α) Es soll $1\frac{3}{4}x-1\frac{2}{3}y$ mit $3\frac{1}{3}x-5\frac{1}{4}y$ multiplicirt werden, und das Product mit $2\frac{2}{3}x+4\frac{1}{4}y$. Das letztere Product soll dann durch $3\frac{1}{3}x-5\frac{1}{4}y$, und der Quotient endlich durch $1\frac{3}{4}x-1\frac{2}{3}y$ dividirt werden; $\beta)\ (a^6-b^6):(a^2-ab+b^2)$; $\gamma)\ (4n^4y^4+p^4):(2n^2y^2+2npy+p^2)$; $\delta)\ [1\mp x+(1-2a)x^2\pm(1-a+a^2)x^3]:(1\pm ax)$; $\varepsilon)\ [(1-a)(1+a)^2+(1-3a)(1+a)x-(1+3a)x^2-x^3]:[1-(a+x)]$.

25) Auszuführen: $\left(\frac{ap^2-aq^2+2bpq}{p^2+q^2}\right)^2+\left(\frac{bq^2-bp^2+2apq}{p^2+q^2}\right)^2$.

26) In den folgenden Ausdrücken sollen sowohl die Producte, welche mit dem Factor x, als auch die, welche mit dem Factor y behaftet sind, vereinigt werden:

$\alpha)\ ax+by-\frac{1}{2}(a+b)x-\frac{1}{2}(a-b)y$;

$\beta)\ \frac{1}{2}(m+n)x-\frac{1}{2}(p-q)y+\frac{1}{2}(m-n)x+\frac{1}{2}(p+q)y$;

$\gamma)\ (a+b)2ax-(a+b)^2x+(p-q)2qy+(p-q)^2y$.

27) Auf gemeinschaftlichen Divisor zu bringen und zu vereinigen:

$\alpha)\ \frac{a^2-ab+b^2}{2b(a-b)}-\frac{a^2+ab+b^2}{2b(a+b)}$;

$\beta)\ \frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{2(a+b)a^3}+\frac{a^3-a^2b+ab^2-b^3}{2(a-b)a^3}$.

28) Es sei $y = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $z = \frac{1-x}{1+x}$, wie groß ist y bloß durch x ausgedrückt?

29) $ax+bx-cx$ für $x = d:(a+b-c)$ zu berechnen.

30) Eben so: $(a^2-x)a+bx$ für $x = a^2+ab+b^2$.

31) Eben so: $\frac{1}{a-b} + \frac{a-b}{x} - \frac{a+b}{x}$ für $x = a^2-b^2$.

32) Eben so: $\frac{x+2a}{2b-x} + \frac{x-2a}{2b+x} - \frac{4ab}{4b^2-x^2}$ für $x = \frac{ab}{a+b}$.

33) Was wird aus den beiden Formeln: α) $mx+ny$; β) $rx+sy$, wenn in jeder $x = \frac{ps-nt}{ms-rn}$, $y = \frac{mt-pr}{ms-rn}$ gesetzt wird?

34) In α) $\frac{x+y-1}{x-y+1}$, β) $\frac{y-x+1}{x-y+1}$ soll für x der Werth $\frac{a+1}{ab+1}$ und für y der Werth $\frac{a(b+1)}{ab+1}$ gesetzt werden.

35) Eben so: $x = \frac{a+b^2}{2b}$, $y = \frac{a-b^2}{2b}$ in α) $x-y$, β) x^2-y^2.

36) Zu beweisen, daß: α) $(x^2+y^2)(z^2+u^2) = (xz+yu)^2 + (xu-yz)^2$; β) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax+by+cz)^2 + (ay-bx)^2 + (bz-cy)^2 + (cx-az)^2$;
γ) $(a^2+b^2+c^2+d^2)(n^2+q^2+r^2+s^2) = (an+bq+cr+ds)^2 + (aq-bn+cs-dr)^2 + (ar-cn+dq-bs)^2 + (br-cq+as-dn)^2$.

37) Wenn $A = b\gamma+c\beta+a\alpha$, $B = c\gamma+a\beta+b\alpha$, $C = a\gamma+b\beta+c\alpha$, so ist: 1) $(a+b+c)(\alpha+\beta+\gamma) = A+B+C$, 2) $(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma) = A^2+B^2+C^2-AB-AC-BC$; 3) $(a^3+b^3+c^3-3abc)(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma) = A^3+B^3+C^3-3ABC$. Diese Formeln zu beweisen.

38) $(3-x)(5-x)-(7-x)(x-1):(2-x)$ für x gleich α) 3, β) 4, γ) 5, δ) 1, ε) 2, ζ) -3, η) -5 zu berechnen.

39) Welche Werthe erhält der Ausdruck $x^2-(2an-n)x+a(a-n)$ für α) $x = a$, β) $x = a-n$, γ) $x = a+p$, δ) $x = a-n-p$, wenn a, n, p positive Zahlen bedeuten?

40) Wenn $a>b$, $b>c$ ist, für welche Werthe von x wird der Ausdruck $(a-x)(b-x):(c-x)$ 1) positiv, 2) negativ, 3) Null, 4) unendlich?

41) Welche Werthe muß man für x nehmen, wenn das Product $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$ zu Null werden soll?

42) α) x^2-49, β) x^2-p^2 in zwei Factoren zu zerlegen und die Werthe von x anzugeben, welche das Product zu Null machen.

43) Eben so α) x^2-5x+6, β) $x^2-1\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ in Producte von zwei Factoren, und γ) x^3+10x^2+21x in ein Product von drei Factoren zu verwandeln, und die Werthe für x anzugeben, durch welche jedes der Producte zu 0 wird.

44) α) x^3-y^3, β) x^4-y^4, γ) x^5-y^5, δ) x^3+y^3, ε) x^5+y^5, ζ) x^6-y^6 in Factoren zu zerlegen.

45) Das gemeinschaftliche Maß α) zwischen $ab^2c^2-a+bc^2-c$ und b^2c^2-1; β) zwischen $ab^2+ab^2cd-abcd^2-ad^2+bcd+b-cd^2-d$ und $b^2+b^2cd-bcd^2-d^2$; γ) zwischen $x^5+5x^4+8x^3+x^2-8x-7$ und $x^4+5x^3+7x^2-3x-10$ zu suchen.

46) Der Quotient $\frac{x^2-8x+15}{x^2-10x+21}$ erlangt für den Werth $x = 3$ den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$; welches ist der wahre Werth des Quotienten? Antw.: Der obige Quotient wird $= \frac{x-5}{x-7}$, wenn man Dividend und Divisor durch den gemeinschaftlichen Theiler $x-3$ dividirt, und erlangt für den Werth $x = 3$ den Werth $\frac{1}{2}$.

47) Den Werth des Quotienten $\frac{x^3-15x^2+74x-120}{x^3-12x^2+41x-30}$ für α) $x = 5$, β) $x = 6$ anzugeben.

48) Den Werth des Quotienten $\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$ für $x=a$ anzugeben.

49) Das Product $n(n+1)(n+2)$ sowohl, als auch $n(n+1)(2n+1)$, wo n eine ganze Zahl bedeutet, ist immer durch 6 theilbar. Warum?

50) Das Product $ab(a^2+b^2)(a^2-b^2)$, wo a und b ganze Zahlen bedeuten, ist immer theilbar durch 30. Warum?

51) Die Summe aus dem größten und kleinsten Gliede einer geometrischen Proportion ist größer, als die Summe der beiden anderen Glieder. Warum?

52) Die mittlere geometrische Proportionale zweier ungleichen Zahlen a und b ist kleiner, als die mittlere arithmetische Proportionale dieser Zahlen. Warum?

53) Wenn $a : b = c : d$ ist, in welchem Falle ist auch: $(a+m) : (b+m) = (c+m) : (d+m)$?

54) Wenn $a : b = c : d$ ist, so ist auch $ab : cd = (a+b)^2 : (c+d)^2$ und $ab : cd = (a^2+b^2) : (c^2+d^2)$. Warum?

55) In welchem Falle folgt aus $a : b = c : d$ und $a' : b' = c' : d'$ die Proportion $(a+a') : (b+b') = (c+c') : (d+d')$?

56) Stellt sich bei den Multiplicationen von α) $(x-a)(x-b)(x-c)$, β) von $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, und γ) von $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)$, wenn man die Resultate nach Potenzen von x ordnet, irgend ein Gesetz heraus?

57) Es sollen ausgeführt und nach Potenzen von x geordnet werden: α) $(x^2-ax+b)(x^2-cx+d)$;
β) $(x^2-ax+b)(x^2-cx+d)(x^2-ex+f)$.

58) Die alten Mathematiker nannten befreundete Zahlen ein Paar Zahlen, deren jede gleich ist der Summe der aliquoten Theile der anderen. Michael Stifel sagt: „Es ist lustig, zu sehen, wie so eben alle Partes aliquote von 220 machen 284 und wiederumb alle Partes aliquote von 284 so eben machen 220." Van Schooten führt außer den Zahlen 220 und 284 noch als befreundete Zahlen an: 18416 und 17296; 9437056 und 9363584; ferner Euler: 10744 und 10856; 63020 und 76084. Es soll die Richtigkeit dieser Behauptungen dargethan werden.

59) Für die Theilbarkeit einer Zahl durch 7 gilt folgende Regel, deren Richtigkeit bewiesen werden soll. Man multiplicire die Zahl der Einer, Zehner, Hunderter und Tausender u. s. w. einzeln der Ordnung nach bezüglich mit 1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2 u. s. w. und nehme die algebraische Summe dieser Producte. Ist dieselbe durch 7 theilbar, so ist die ganze Zahl durch 7 theilbar. Beispiele: 278355; 111111; 387387; 1001.

Dritter Abschnitt.

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen.

A. Potenzen mit ganzen Exponenten.

§. 34.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}. \quad \text{(Vergl. §. 14. II.)}$$

1) Wie werden Potenzen von gleichen Basen (Grundzahlen, Dignanden) mit einander multiplicirt?

2) Wie wird eine Zahl mit einer Summe potenzirt?

3) α) $a^{36} \cdot a^{17}$; β) $a^{27} \cdot a^{36} \cdot b^{12} \cdot b^{13} \cdot b^{24} \cdot a^{45} \cdot b^{59}$; γ) $a^{x-y} a^y$; δ) $x^n \cdot x$; ε) $y^{n-1} \cdot y$; ζ) $y \cdot y^{n-2} \cdot y$.

4) α) $a^x a^{3x} b^{4y} a^{2x} b^y$; β) $a^{m-n} a^n b^{2m-3n} b^{4n-m}$; γ) $(a^m+a^n)(a^m-a^n)$.

5) Womit muß man $387420489 = 3^{18}$ multipliciren, um 3^{22} zu erhalten, und wie groß ist 3^{22}?

6) Wenn $13^5 = 371293$ und $13^4 = 28561$, wie groß ist 13^9?

7) α) $(x+y)^p \cdot (x+y)^q$; β) $(a-b)^{m-1} \cdot (a-b)$.
8) $(a^{2m-n}+b^{3m-7n}) \times (a^{3n-2m}+b^{7n-2m})$.
9) α) $(a^{3m-n}+a^{2m}+a^{4m-2n}) \times (a^m-a^n)$;
β) $(a^{3n}-a^{2n+m}+a^{n+2m}-a^{3m})(a^n+a^m)$.
Aufl.: α) $a^{5m-2n}-a^{2m+n}$.
10) $(a^{3m-6n}+a^{5m-8n}+a^{7m-10n}+a^{9m-12n}) \cdot (a^{m-2n}-a^{3m-4n})$.
11) $4x^m y^n : (9z^x t^{y+3}) : (16z^{y-x} t^{3-y})$.
12) $\frac{z^{3m-2n}}{4(m+n)} \cdot z^{m+6n}$. 13) $\frac{a^{8m-7n}b^{6p-5q}}{c^{4r-3s}d^{2t-u}} \cdot \frac{a^{9n-7m}b^{9q-3p}}{c^{r+9s}d^{5t+9n}}$.
14) $(x^{4n}+x^{3n}y^2+x^n y^6+y^8) \cdot (x^{2n}-x^n y^2+y^4)$.
15) α) $\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-1}}$; β) $\frac{x^{n-1}}{(x+y)^{m-1}}-\frac{x^n}{(x+y)^m}$.
Anleitung. Man bringe zuerst die beiden Quotienten auf gleichen Divisor.
Antwort zu β) $\frac{x^{n-1}y}{(x+y)^m}$.
16) $\frac{y^n}{(y-z)^n}-\frac{y^{n-1}}{(y-z)^{n-1}}$. 17) $\frac{a^m+b^m}{a^m-b^m}-\frac{a^m-b^m}{a^m+b^m}$.
18) $\frac{b}{a^{x-y}}+\frac{c}{a^{x-z}}+\frac{d}{a^{x-u}}-\frac{e}{a^x}$.
19) $\frac{a^{2x}+a^x b+b^2}{a^{4x}-a^{3x}b+a^{2x}b^2-a^x b^3+b^4}-\frac{1}{a^{2x}-a^x b+b^2}$.
20) $\frac{a^{x+y+z}-a^{x-y+z}}{a^{x-y-z}-a^{x-y+z}}-\frac{a^{x+y-z}-a^{x-y+z}}{a^{x+y+z}+a^{x+y-z}}$.

§. 35.

$a^m : a^n = a^{m-n}$ oder $= 1 : a^{n-m}$, je nach dem m $\gtrless$ n.
(Vergl. §. 14. II.)

1) Wie werden zwei Potenzen von gleichen Basen durch einander dividirt?
2) Wie wird eine Zahl mit einer Differenz potenzirt?
3) α) $a^{44} : a^{11}$; β) $c^{7x} : c^{2x}$; γ) $a^x : a^{3y-2x}$; δ) $a^x : a^{x-y}$; ε) $a^3 : a^{11}$; ζ) $a^{3x} : a^{5x}$; η) $n^{y-1} : n^y$; ϑ) $p^{x-y} : p^x$.
4) α) $a^{36}b^{42}c^{49} : (b^{38}a^{60}c^{43})$; β) $a^{5x}b^{7y}c^{3z} : (a^{2x}b^{3y}c^{4z})$.
5) Wodurch muß man $7^9 = 40353607$ dividiren, um 7^7 zu erhalten, und wem ist 7^7 gleich?
6) $1{,}2345^{20} = 67{,}5806$. Wie groß ist $1{,}2345^{18}$?
7) α) $(x+y)^p : (x+y)^q$; β) $(x-y)^n : (x-y)$.
8) $\frac{m^{4a+b}m^{6a-3b}}{m^{2a-6b}m^{4a-7b}} \cdot \frac{m^{13b-7a}}{m^{14b-13a}}$.

9) $\frac{x^{m+3n}y^{7m-8n}}{x^{4m-7n}y^{3m-11n}} : \frac{x^{2m-6n}y^{5m+6n}}{x^{6m-17n}y^{2m+4n}}$. Aufl.: $x^{m-n}y^{m+n}$.

10) $(a^{2n-m} + a^{3m-2n} - a^{4m-3n}) : a^{m-6n}$.

11) $(\frac{4}{7}a^{8m-2n}b^{3m-4n} - \frac{7}{10}a^{5m-6n}b^{7m-8n}) : (\frac{2}{5}a^{6n-m}b^{5n-m})$.

12) $[27y^{4m+8n} - 6y^{2m+4n} + \frac{1}{3}] : [3y^{2m+4n} + 2y^{m+2n} + \frac{1}{3}]$.

13) $y^{2m-4n} - 4y^{m-2n}z^{m+3n} + 4z^{2m+6n}$ in $y^{6m-12n} - 16y^{3m-6n}z^{3m+9n} + 64z^{6m+18n}$ zu dividiren.

14) $m^{x+y}n^y - 4m^{x+y-1}n^{2y} - 27m^{x+y-2}n^{3y} + 42m^{x+y-3}n^{4y}$ durch $m^x n^y - 7m^{x-1}n^{2y}$ zu dividiren.

15) $(x^n - y^n) : (x - y)$.

16) α) $(x^{2n} - y^{2n}) : (x+y)$; β) $(x^{2n+1} + y^{2n+1}) : (x+y)$.

Welche Sätze ergeben sich aus 15 und 16? Nach diesen Sätzen sollen die Resultate für folgende Divisionen angegeben werden: α) $(x^5 - y^5) : (x-y)$; β) $(x^6 - y^6) : (x-y)$; γ) $(x^6 - y^6) : (x+y)$; δ) $(x^7 + y^7) : (x+y)$.

17) $(nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1) : (x-1)^2$.

18) $x^{24m-16n} - x^{6m-4n}$ durch $x^{6m-4n} - 1$ zu dividiren.

19) $\frac{x^{4n}}{y^{6n}} - \frac{4z^{6m}u^{8m}}{y^{10n}} + \frac{14z^{5m}u^{4m}}{x^{4n}y^{8n}} - \frac{49z^{4m}}{4x^{8n}y^{6n}}$ durch $\frac{x^{2n}}{y^{3n}} + \frac{2z^{3m}u^{4m}}{y^{5n}} - \frac{7z^{2m}}{2x^{4n}y^{3n}}$ zu dividiren.

20) $0{,}094818816x^{6m+3} - 0{,}001860867x^{3m-3}$ durch $0{,}456x^{2m+1} - 0{,}123x^{m-1}$ zu dividiren.

21) Es soll zu $x^{3m} - 27y^{6n}$ und zu $x^{5m} - 9x^{3m}y^{4n}$ der größte gemeinschaftliche Divisor gesucht werden. Antw.: $x^m - 3y^{2n}$.

22) $\frac{(a^{n+x} - a^n)(a^n - a^{n-x})}{(a^{n+x} - a^n) - (a^n - a^{n-x})}$ auszuführen.

§. 36.

$a^m \cdot b^m = (ab)^m$. (Vergl. §. 14.)

1) Wie werden Potenzen von gleichen Exponenten mit einander multiplicirt?

2) Wie wird ein Product mit einer Zahl potenzirt?

3) α) $5^7 \cdot 2^7$, β) $25^9 \cdot 4^9$, γ) $2^6 \cdot 5^6 \cdot 5^6 \cdot 2^6$, δ) $125^8 \cdot 4^8 \cdot 2^8$, ε) $5^3 \cdot 2^{11}$ auf die kürzeste Art zu berechnen.

4) α) $17^7 \cdot 6^7$; β) $167^4 \cdot 6^4$; γ) $23^5 \cdot 29^5 \cdot 15^5$; δ) $19^3 \cdot 4^3 \cdot 9^3 \cdot 2^3 \cdot 17^3 \cdot 43^3$.

5) $\left(\frac{a^7}{b^y}\right)^m \cdot (b^y)^m \cdot a^m$. 6) $\left(\frac{a+b}{z-x}\right)^m \cdot \left(\frac{z+x}{a+b}\right)^m \cdot \left(\frac{z-x}{a-b}\right)^m$.

7) $(3a - 4b)^m \cdot (9a^2 + 16b^2)^m \cdot (3a + 4b)^m$.

8) α) $(1\frac{3}{7})^{10} \cdot (1\frac{2}{5})^{10}$; β) $5{,}872^4 \cdot 0{,}875^4 \cdot 0{,}0027^4$ zu berechnen.

9) Wenn $17^5 = 1419857$, wie groß ist 34^5?

10) Womit muß man $6^{10} = 60466176$ multipliciren, um 12^{10} zu erhalten, und wie groß ist 12^{10}?

11) Auszuführen: α) $[(25a)^m + (2b)^m]\,[(4c)^m - (5d)^m]$; β) $(7^x - 1)(98^x + 14^x + 2^x)$; γ) $(a^x + 1)((aa)^x - a^x + 1)$.

12) $\left(\frac{4x^n}{y^p}\right)^m \cdot \left(\frac{25y^{p+1}}{x^{n-1}}\right)^m$. 13) $(3mn)^5$.

14) $\frac{(2ab)^5 \cdot (3ab)^2 \cdot (5a)^4}{(3b)^3 \cdot (4ab)^6}$. Aufl.: $\frac{625a^5}{384b^2}$.

15) $(5anx)^{2y} \cdot (2an)^{y+2} \cdot (2nx)^{y-2}$.

16) $(ab)^{x-2y} \cdot (ac)^{5x-6y} \cdot (bc)^{9x-10y}$.

§. 37.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & a^m : b^m = (a : b)^m. \\ \text{II.} & 1 : b^x = (1 : b)^x. \end{array}\right\} \text{(Vgl. §. 14.)}$$

1) Wie werden Potenzen von gleichen Exponenten durch einander dividirt?

2) Wie wird ein Quotient mit einer Zahl potenzirt?

3) Was kann man für den reciproken Werth einer Potenz setzen?

4) Was kann man für die Potenz des reciproken Werthes einer Zahl setzen?

5) α) $12^7 : 4^7$; β) $34^5 : 17^5$; γ) $9^5 \cdot 17^5 : 51^5$.

6) α) $2{,}19905^6 : 3{,}1415^6$; β) $(11\frac{1}{5})^5 : (1\frac{3}{5})^5$.

7) $2{,}785431^3 : 19{,}876982^3$. (6 Decimalstellen.)

8) Wenn $38^7 = 114415582592$, wie groß ist 19^7?

9) Wenn $1{,}818^{20} = 155553$, wie groß ist $0{,}606^{20}$? (8 St.)

10) α) $\left(\frac{7a^2}{3b}\right)^m : \left(\frac{14a}{15b^3}\right)^m$; β) $\left(\frac{3a^2b^3c^4}{5d^5e^6f^7}\right)^m : \left(\frac{9a^4b^2c}{25d^6e^7f^2}\right)^m$.

11) $(5a^2 + 8ab - 21b^2)^x : (a + 3b)^x$.

12) $(49x^2 - 36y^2)^m : (7x - 6y)^m$.

13) α) $[(35a^5)^m]^x : [(7a^3)^m]^x$; β) $(2187^x - 1) : (3^x - 1)$.

14) α) $(\frac{3}{5})^6$, β) $(\frac{1}{10})^9$, γ) $(\frac{6}{35})^4 : (2\frac{6}{7})^4$ zu berechnen.

15) $\left(\frac{3ab}{5cd}\right)^4 \cdot \left(\frac{5c}{6a}\right)^3 \cdot \left(\frac{4b}{3d}\right)^2$ auf die kürzeste Form zu bringen.

16) Eben so: $\left(\frac{a+b}{c-d}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{a+b}\right)^2 \cdot \left(\frac{c-d}{a+b}\right)^4$.

17) Eben so: $\left(\frac{p+q}{r}\right)^{3x+1} \cdot \left(\frac{rs}{p+q}\right)^{2x-2} \cdot \left(\frac{p+q}{st}\right)^{4x-7} t^{2x}$.

18) $\frac{1}{0{,}25^4} + \frac{1}{0{,}03125^3} + \frac{1}{(1:3)^5}$ zu berechnen. Antw.: 33267.

§. 38.

$(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$. (Vergl. §. 15).

1) Wie wird eine Potenz mit einer Zahl potenzirt? Wie wird eine Zahl mit einem Producte potenzirt?

2) α) $(a^3)^5$; β) $[(x^5)^7]^9$; γ) $(a^m)^n$; δ) $[(ma)^p]^q$.

3) Wie groß ist 5^{12}, wenn $5^6 = 15625$ ist?

4) Wie groß ist $1{,}824896^{24}$, wenn $1{,}824896^8 = 123$ ist?

5) $\left(\frac{a^9 \cdot b^{28} \cdot c^{47}}{d^{10} \cdot e^{29}}\right)^{17} \cdot \left(\frac{d^9 e^{26}}{a^8 b^{25} c^{42}}\right)^{19}$. Aufl.: $abcde$.

6) $[(8x-6y)^{2a}]^{5a} : [(4x-3y)^{5a}]^{2a}$.

7) $(ax)^{3y+4z}$ soll zur Potenz $5y-6z$ erhoben werden.

8) $m^{aa} \cdot m^{bb}$ soll durch $(m^{a+b})^{a-b}$ dividirt werden.

9) $(p^{3a-5b})^{7a-4b} : (p^{2a-3b})^{4a-8b}$.

10) Die zwölfte Potenz von $(m^{2x-y})^{x-2y}$ soll durch die dritte Potenz von $(m^{2x-3y})^{6x-7y}$ dividirt werden.

11) α) Wie groß ist $(5^3)^7$, wenn $5^7 = 78125$? β) Wie groß ist $1{,}4142136^{24}$, wenn $1{,}4142136^2 = 2$ ist?

12) Wie groß ist $1{,}4422496^{24}$, wenn $1{,}4422496^3 = 3$ ist?

13) 2^{64} aus $2^{10} = 1024$ und $2^4 = 16$ zu berechnen.

14) Wovon ist α) a^{16}, β) a^{12} das Quadrat? wovon γ) a^{27}, δ) a^{12} die dritte Potenz?

15) $a^{2x}-a^{2y}$ soll nach §. 16 Nr. 21 in ein Product aus zwei Binomen verwandelt werden.

16) α) $a^{3x}-a^{3y}$, β) $a^{4x}-a^{4y}$ sollen nach §. 25 Nr. 14 in Factoren zerlegt werden.

17) $a^{pp} \cdot a^{pq} \cdot a^{qq}$ soll zur $p-q$ten Potenz erhoben werden.

18) Eben so: $(a^{xxx} \cdot a^{xyy}) : (a^{xxy} \cdot a^{yyy})$ zur $x+y$ten Potenz.

§. 39.

Potenz mit der Basis 1, mit dem Exponenten 0, der Basis 0, mit negativem Exponenten und mit negativer Basis.

Jede Potenz mit der Basis 1 ist $= 1$. Jede Potenz mit dem Exponenten 0 und mit endlicher Basis ist $= 1$; jede Potenz mit der Basis 0 und mit endlichem Exponenten ist $= 0$; der Ausdruck 0^0 ist unbestimmt. Jede Potenz mit negativem Exponenten ist dem reciproken Werthe derselben Potenz mit positivem Exponenten, oder dem reciproken Werthe der Basis, potenzirt mit dem positiven Exponenten, gleich.

1) Gelten die für ganze positive Exponenten aufgestellten fünf Sätze §§. 34—38 auch für den Exponenten 0 und für negative Exponenten, und warum?

Anleitung: 1) $a^n \cdot a^0 = a^{n+0}$. Beweis: $a^n \cdot a^0 = a^n \cdot 1 = a^n$; $a^{n+0} = a^n$, mithin $a^n \cdot a^0 = a^{n+0}$; eben so: 2) $a^n : a^0 = a^{n-0}$. 3) $a^0 \cdot b^0 = (ab)^0$. Beweis: $a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1$; $(ab)^0 = 1$, mithin $a^0 \cdot b^0 = (ab)^0$; eben so ist 4) $a^0 : b^0 = (a:b)^0$. 5) α) $(a^0)^0 = a^{0 \cdot 0}$. Beweis: $(a^0)^0 = 1^0 = 1$, $a^{0 \cdot 0} = a^0 = 1$, mithin $(a^0)^0 = a^{0 \cdot 0}$. Eben so werden bewiesen: β) $(a^0)^n = a^{0 \cdot n}$ und γ) $(a^n)^0 = a^{n \cdot 0}$. Für negative Exponenten werden die Beweise auf ähnliche Art geführt: 1) α) $a^x \cdot a^{-y} = a^{x-y}$. Beweis: $a^x \cdot a^{-y} = a^x\left(\frac{1}{a^y}\right) = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, also $a^x \cdot a^{-y} = a^{x-y}$; β) $a^{-x} \cdot a^{-y} = a^{-(x+y)}$. Beweis: $a^{-x} \cdot a^{-y} = \frac{1}{a^x} \cdot \frac{1}{a^y} = \frac{1}{a^{x+y}} = a^{-(x+y)}$. Eben so ist: 2) α) $a^x : a^{-y} = a^{x+y}$; β) $a^{-x} : a^y = a^{-(x+y)}$; γ) $(a^{-x})^{-y} = a^{xy}$. Beweis für den letzten Satz: $(a^{-x})^{-y} = \left(\frac{1}{a^x}\right)^{-y} = a^{xy}$.

2) α) 1^x, β) $1^x \cdot 1^y$, γ) $(1_x)^y$, δ) a^0, ε) $b^0 \cdot c^0$, ζ) $d^0 : e^0$, η) $(n^0)^x$, ϑ) $(q^y)^0$, ι) $(m^0)^0$ zu berechnen.

3) $a^{2p-q} \cdot b^{6p-18}$ für $p = 3$, $q = 6$ zu berechnen.

4) Die Werthe von $(m+n)^{x-y} : (p+q)^{4x-3z}$ und von $[(m+p)^{x-y}]^{4x-3x}$ für $x = 3$, $y = 3$, $z = 4$ zu berechnen.

5) Was wird aus $(m-n)^x$, wenn $m = n$ und $x > 1$?

6) Was wird aus $a^{x-y} : (x-y)^a$, wenn $x = y$?

7) Was wird aus $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^n \cdot \left(\frac{c-d}{a+b}\right)^n$, wenn $a = b$, $c = d$?

8) α) 3^{-7}, β) 7^{-3}, γ) 1^{-1}, δ) $0{,}1^{-1}$, ε) $0{,}4^{-3}$, ζ) $0{,}25^{-4}$, η) $0{,}125^{-3}$, ϑ) $0{,}625^{-4}$, ι) $(1 : 7)^{-3}$ zu berechnen.

9) Wie groß wird: α) 3^{2x-3y}, β) 7^{5x-4y}, γ) 2^{-x-y} für $x = 4$, $y = 6$; δ) was wird aus $(a:b)^n$, wenn $a < b$ und $n = \infty$?

10) α) $(\frac{a}{b})^{-1}$; β) $(\frac{2}{3})^{-1}$; γ) $(\frac{1}{3})^{-2}$; δ) $(3\frac{3}{4})^{-3}$; ε) $\frac{1}{3^{-3}}$; ζ) $\frac{1}{a^{-x}}$; η) $\frac{1}{0{,}2^{-6}}$; ϑ) $1 : 0{,}25^{-4}$; ι) $1 : 0{,}375^{-5}$; $\varkappa$) $1 : 0{,}03125^{-4}$ zu berechnen.

11) α) $a^9 \cdot a^{-3}$; β) $a^0 \cdot a^{-7}$; γ) $2^{-3} \cdot 2^{-5}$; δ) $2^3 : 2^{-5}$; ε) $a^0 : a^{-11}$; ζ) $a^{-12} : a^0$; η) $2^{-3} \cdot 25^{-3} \cdot 2^{-3}$; ϑ) $[(\frac{1}{2})^3]^{-2}$; ι) $(a^0)^{-6}$; $\varkappa$) $[(\frac{3}{4})^{-2}]^3$; λ) $(a^{-n})^0$; μ) $(2^{-2})^{-4}$ auszuführen.

12) Eben so: α) $a^{-6}b^{-7}c^{-10}a^{-4}b^2c^6$; β) $(m^{-7}n^{-3}o^{-5}p^6) \cdot (m^{-3}n^{-5}o^4p^{-7}) \cdot (m^{-1}o^{17}n^8p^{-10})$.

13) $(a^{-6}b^{-3} - a^{-7}b^{-5})(a^{-2}b + a^{-3}b^{-1}) - (a^{-4} - a^{-7} + a^{-10})(a^{-2} + a^{-5})$. A.: $a^{-8}b^{-2} - a^{-10}b^{-6} - a^{-6} - a^{-15}$.

14) In $\dfrac{n^{-8}c^5p^{-10}o^{-9}}{a^{-3}b^{-4}d^{-6}m^7}$ die negativen Exponenten zu entfernen.

15) $\dfrac{5a^{-3}b^{-0}m^{-5}p}{13c^{10}d^2n^{-1}q^{-3}}$ durch $\dfrac{15a^{-4}b^{-2}c^{-13}q^{11}}{26d^6m^0n^{-7}p^{-8}}$ zu dividiren.

16) Eben so: $\dfrac{a^{-3m}b^{-2m+1}}{c^{-4m}d^{-5m-7}}$ durch $\dfrac{a^{-2m+1}b^3}{c^{-m+3}d^{-m-3}}$.

17) $\dfrac{21m^{-1}a^{-1}}{x^3} - \dfrac{35x^{-4}p^{-1}}{2a^{-1}m^{-2}} - \dfrac{6p^3m^{-3}}{a^{-5}} + \dfrac{5a^7x^{-1}}{p^{-2}}$ durch $\dfrac{7m^2a^{-3}}{x^5} - \dfrac{2p^3x^{-2}}{a^{-3}}$ zu dividiren. Aufl.: $\dfrac{3a^2x^2}{m^3} - \dfrac{5a^4x}{2p}$.

18) $(\frac{3}{5})^{-7} \cdot (\frac{4}{11})^{-7} \cdot (2\frac{7}{24})^{-7} + (2\frac{7}{12})^{-3} : (20\frac{2}{3})^{-3}$ zu berechnen. Aufl.: 640.

19) Den Quotienten $\dfrac{2abc}{3mnp}$ zur $-x$ten Potenz zu erheben.

20) $\left(\dfrac{2ab}{3cd}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{4cd}{5ab}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{5ab}{2cd}\right)^{-4}$. Aufl.: $\dfrac{27c^5d^5}{200a^5b^5}$.

21) $[[(\frac{3}{4})^{-1}]^{-1}]^{-1} + [[(2^{-1})^{-2}]^{-3}]^{-4}$. Aufl.: $16777217\frac{1}{3}$.

22) $\left(\dfrac{a^{-3}b^{-7}c^{-0}}{m^{-5}n^{-11}p^{13}}\right)^{-4} \cdot \left(\dfrac{a^2b^{-3}c^{-4}}{m^4n^7p^0}\right)^{-2}$. Aufl.: $\dfrac{a^8b^{34}c^8p^{52}}{m^{12}n^{30}}$.

23) Was wird aus $(2a-b)^{-x}$ für $a = 3$, $b = 6$? was aus $1 : (5a-3b)^{2b-3a}$ für $a = 3$, $b = 5$?

24) $(-3)^2 + (-7)^5 - (-2)^7 + (-1)^{-1} + (-2)^{-2} - (-0{,}3)^{-3} + (-4)^0$. Aufl.: $-16632\frac{77}{108}$.

25) Was wird aus $(-1)^{2n}$, was aus $(-1)^{2n+1}$, wenn n eine beliebige ganze Zahl bedeutet? Was aus $(-1)^{-2n}$, $(-1)^{-2n-1}$?

26) $(-1)^5 \cdot (-2)^3 - (-3)^4 \cdot (-4)^3$ zu berechnen.

27) Eben so: α) $(-2a^3)^4 + (-2a^4)^3 - (-3a^6)^2 - (-5a^4)^3$; β) $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$ für 1) $x = -1$, 2) $x = -2$, 3) $x = -3$, 4) $x = -4$.

28) $(a-b)^4 : (b-a)^4 + (a-2b+3c)^5 : (2b-3c-a)^5$.
Aufl.: 0.

29) Wie lassen sich die in §. 35 Nrn. 16 und 17 erhaltenen Resultate aus dem Resultate von Nr. 15 desselben Paragraphen ableiten?

§. 40.

Potenzirung einer Summe oder einer Differenz.

Binomial-Coefficienten-Tafel.

0	1										
I.	1	1									
II.	1	2	1								
III.	1	3	3	1							
IV.	1	4	6	4	1						
V.	1	5	10	10	5	1					
VI.	1	6	15	20	15	6	1				
VII.	1	7	21	35	35	21	7	1			
VIII.	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
IX.	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
X.	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

1) Es sollen durch Multiplication nach und nach die Potenzen von $a+b$ von der ersten bis zur zehnten Potenz gebildet werden.

2) Es sollen durch Multiplicationen nach und nach die Potenzen der Summe $m+n$ bis zur zehnten Potenz mit absichtlicher Vernachlässigung der Coefficienten gebildet werden.

3) Welches Gesetz stellt sich bei der Potenzirung einer Summe $a+b$ für die Potenz-Exponenten von a und b heraus?

4) Auf welche Weise lassen sich die Coefficienten der Potenzen von a und b bei der Potenzirung der Summe $a+b$, mit Vernachlässigung der Potenzen selbst, nach und nach entwickeln? (Siehe vorstehende Binomial-Coefficienten-Tafel.)

5) Wie unterscheidet sich die Potenz einer Differenz von der Potenz einer Summe?

6) $p \pm q$ zur zweiten, dritten u. s. w. zwölften Potenz zu erheben.

7) Zu entwickeln: α) $(1+y)^{12}$; β) $(2-3y)^5$.

8) Eben so: α) $(a-2b)^6-(3a-4b)^6$; β) $(a+b)^{11} \pm (a-b)^{11}$.

9) α) $[(3a-2b)^3]^2$; β) $[(4m-3n)^{-3}]^{-2}$.

10) α) $(x^2-2xy+y^2)^6$; β) $(9a^2-6ab+b^2)^5$.

11) α) $(\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b)^7$; β) $(\frac{3}{4}m-\frac{4}{5}n)^6$; γ) $(\frac{3}{5}x-\frac{5}{3}y)^4$.

12) α) $(2ab-3bc)^4$; β) $(4mnp-5mpq)^3$.

13) α) $(2a^2-3b^3)^6$; β) $(3a^3+6b^4c^2)^5$.

14) α) $(\frac{1}{3}a^2b^2-\frac{3}{5}c^2d^3e^5)^4$; β) $(a^{-1}b^{-3}-c^{-5}d^{-6})^6$.

15) α) $(2x-\frac{1}{2}y)^{-5}$; β) $(x^{-1}y-xy^{-1})^{-4}$.

16) $(a+b)^7 \cdot (a-b)^7$. Aufl.: mit Anwendung von §. 36.

17) $(a-b)^5 \cdot (a^2+ab+b^2)^5$.

18) $13579^2 = 184389241$; wie groß ist α) 13581^2; β) 13573^2?

19) $28743^3 = 23746318288407$; wie groß ist α) 28748^3; β) 28739^3?

20) α) $99^2 = (100-1)^2$; β) 999^2; γ) 9999^2 zu berechnen.

21) Eben so: α) 999^3; β) 9999^4; γ) 99999^5.

22) Eben so: α) 9997^3; β) 99996^4.

23) Wie groß ist $(12\frac{1}{6})^5$, wenn $12^5 = 248832$?

24) Wie groß ist $(12\frac{11}{12})^5$, wenn $13^5 = 371293$?

25) Wie groß sind folgende Potenzen: α) $8{,}999993^3$; β) $17{,}999997^3$; γ) $3{,}0003^9$; δ) $27{,}998^3$; ε) $19{,}998^5$, mit Vernachlässigung der achten Decimalstelle?

26) Was kann man α) für $(a\pm k)^2$, β) für $(a\pm k)^3$ näherungsweise setzen, wenn k gegen a eine sehr kleine Zahl bedeutet?

Aufl.: α) Vernachlässigt man in $a^2\pm 2ak+k^2$ die zweite Potenz von k, die in Bezug auf $a^2\pm 2ak$, da k schon sehr klein ist, um so kleiner wird, so ist α) $(a\pm k)^2$ sehr nahe $= a^2\pm 2ak$; β) $(a\pm k)^3$ sehr nahe $= a^3\pm 3a^2k$.

27) Was kann man für $1:(1\pm k)^2$ und $1:(1\pm k)^3$ setzen, wenn k eine sehr kleine Größe bedeutet?

Antw.: $1\mp 2k$ und $1\mp 3k$.

28) Auf 5 Decimalstellen zu berechnen: α) $287{,}00006^2$; β) $317{,}00008^3$; γ) $53{,}00007^3$; δ) $291{,}99993^2$; ε) $81{,}99994^3$.

Aufl.: α) 82369,03444; β) 31855037,11736; γ) 148877,58989; δ) 85263,95912; ε) 551366,78968.

29) Ein Eisenstab nimmt durch Erhitzung vom Schmelzpuncte des Schnee's bis zur Siedehitze des Wassers (von 0°—80° R.) um den 819ten Theil der Länge zu. Um wie viel nimmt α) eine quadratische Eisenplatte, um wie viel β) ein Eisenwürfel bei derselben Erwärmung zu?

30) Wie viel beträgt α) die Flächen-Ausdehnung, wie viel β) die körperliche Ausdehnung eines Körpers von 0°—80° R., wenn die **lineare** Ausdehnung $\frac{1}{x}$ beträgt? Wie viel betragen γ) und δ) diese Ausdehnungen von 0 Grad bis p Grade über 0? wie viel ε) und ζ) die Zusammenziehungen von 0 Grad bis n Grade unter 0?

B. Wurzeln.

§. 41.
Begriff der Wurzeln.

$$\text{I.}\quad \sqrt[x]{a^x} = a. \qquad \text{II.}\quad (\sqrt[x]{a})^x = a.$$

(Vergl. §§. 8 und 17.)

1) Durch welche Rechnung wird jede der drei Zahlen: Potenz, Basis und Exponent aus den beiden übrigen abgeleitet? Warum hat die Potenz-Rechnung zwei umgekehrte Rechnungen, die Wurzel- und die Logarithmen-Rechnung, während die Additions- und die Multiplications-Rechnung jede nur eine umgekehrte Rechnung hat?

2) Was heißt aus einer Zahl die zweite, dritte, vierte u. s. w. n-te Wurzel ausziehen (sie mit n radiciren)? Wie wird die x-te Wurzel aus a bezeichnet*)? Was versteht man unter Radicand, Wurzel-Exponent und Wurzel?

3) In Zeichen auszudrücken und zu berechnen: α) die 2te Wurzel aus 49; β) die 3te Wurzel aus 27; γ) die 4te Wurzel aus 10000; δ) die 2te Wurzel aus 16+9; ε) die 2te Wurzel aus 16 nebst der 2ten Wurzel aus 9.

4) Was versteht man unter Quadrat- und Kubikwurzel?

5) In welchem Falle darf man den Wurzel-Exponenten auslassen?

6) Wie groß sind: α) $\sqrt[1]{49}$; β) $\sqrt[1]{a}$; γ) $\sqrt[3]{1}$; δ) $\sqrt[a]{1}$?

7) 1024 soll in 10 gleiche Factoren zerlegt werden.

8) Wenn m in x gleiche Factoren zerlegt wird, wie groß ist jeder Factor?

9) α) Welche Zahl gibt, zur 6ten, welche zur 3ten, welche zur 2ten Potenz erhoben, 729? β) Welche Zahl gibt, zur $y$ten Potenz erhoben, x?

10) Welcher Zahl ist $(\sqrt[3]{8})^3$, welcher $\sqrt[3]{8^3}$ gleich?

11) α) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$; $\qquad \beta$) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a}$.

---

*) Geschichtliche Bemerkung. Das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ wurde zuerst durch Christoff Rudolff vom Jawer eingeführt („Behend und Hübsch Rechnung durch die künstreichen Regeln Algebra, 1525").

12) Womit muß α) $\sqrt{7}$ multiplicirt werden, damit 7 herauskommt? womit β) $\sqrt{a}$, damit a herauskommt? γ) Was gibt $\frac{x}{\sqrt{x}}$; was $\frac{x-a}{\sqrt{x-a}}$?

Auszuführen:

13) $\sqrt[3]{a^3} - \sqrt[4]{b^4} + (\sqrt[n]{m})^n + a:(\sqrt{a:b})^2$. Aufl.: $a+m$.

14) $a + (\sqrt[7]{a-b})^7 + 5\sqrt[3]{(a-b)^3} - \sqrt{(a-b)^2} - 6(\sqrt[8]{a-b})$.

15) $(\sqrt[5]{213})^3 \cdot (\sqrt[5]{213})^2 + (\sqrt[17]{517})^9 \cdot (\sqrt[17]{517})^{-2} \cdot (\sqrt[17]{517})^{10}$.

16) $(\sqrt[x]{a})^{3y-p} \cdot (\sqrt[x]{a})^{2x-3y} \cdot (\sqrt[x]{a})^{p-x}$. Antw.: a.

17) $\sqrt[27]{(2^{-9})^{-3}} + [(\sqrt[12]{4})^{-6}]^{-2} - (\sqrt{3} \cdot \sqrt{5})^2$.

18) $(3\sqrt{x})^2 + (4\sqrt[3]{x})^3 - (2\sqrt[4]{x-y})^4$. Aufl.: $57x+16y$.

19) α) $(\sqrt[n]{x \cdot a^m} \cdot \sqrt[n]{p+q})^n$; β) $(\sqrt[n]{a^2b^2c} \cdot \sqrt[n]{a^3b^5c^{-7}} \sqrt[n]{a^{-5}b^{-7}c^6})^n$.

20) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$; $(\sqrt{m}-\sqrt{m-n})(\sqrt{m}+\sqrt{m-n})$.

21) $(\sqrt{x+y-z} + \sqrt{x-y+z})(\sqrt{x+y-z} - \sqrt{x-y+z})$.

22) $x - [x-x:(\sqrt{x:y})^2]$. Aufl.: y.

23) $(-\frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{1}{4}m^2-n})^2 + m(-\frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{1}{4}m^2-n}) + n$.

24) α) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$;

β) $(a\sqrt{x}+b\sqrt{y})(c\sqrt{x}-d\sqrt{y}) + (a\sqrt{x}-b\sqrt{y})(c\sqrt{x}+d\sqrt{y})$.

25) Läßt sich $m-n$ als die Differenz zweier Quadrate betrachten? Welchem Producte binomischer Factoren ist $m-n$ gleich?

§. 42.

$$\sqrt[x]{ab} = \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b}. \quad \text{(Vergl. §§. 19 und 36.)}$$

1) Wie wird aus einem Producte die Wurzel gezogen?

2) Wie werden Wurzeln mit gleichen Wurzel-Exponenten mit einander multiplicirt?

3) $\sqrt{49 \cdot 64} + \sqrt{100a^2b^2c^2} - \sqrt[3]{8a^3b^3c^3}$.

4) $\sqrt{18} + \sqrt{28} - \sqrt{75}$. Aufl.: $3\sqrt{2} + 2\sqrt{7} - 5\sqrt{3}$.

5) α) $\sqrt{20}+\sqrt{125}+\sqrt{63}-\sqrt{252}-\sqrt{700}+\sqrt{567}-\sqrt{605}$;
β) $\sqrt{2\frac{2}{3}} + \sqrt{3\frac{3}{8}} + \sqrt{4\frac{4}{15}} + \sqrt{5\frac{5}{24}} + \sqrt{6\frac{2}{21}}$.

6) $5\sqrt{48} + 4\sqrt{147} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{432}$. Aufl.: $-14\sqrt{3}$.

7) $\sqrt{7168} - 2\sqrt{18} - 7\sqrt{5} + 2\sqrt{45} - 26\sqrt{2} + 4\sqrt{363}$.

8) $3\frac{1}{2}\sqrt{24} - 5\frac{3}{4}\sqrt{54} + 13\frac{1}{3}\sqrt{99} + 2\frac{17}{24}\sqrt{216} - 21\sqrt{44}$.

9) $2\sqrt{2450} - 3\sqrt{2048} + 5\sqrt{13122}$. Aufl.: $379\sqrt{2}$.

10) Wenn $\sqrt{5} = 2{,}2360679$ ist, wie groß ist $\sqrt{320}$?

11) α) $\sqrt[3]{24}$; β) $\sqrt[3]{81}$; γ) $5\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54} + 8\sqrt[3]{2}$.

12) $2\sqrt[3]{40} + 3\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{500} - \sqrt[3]{320} - 2\sqrt[3]{1372}$. Aufl.: 0.

13) $\sqrt{4a^3b} + \sqrt{25ab^3} - (a-5b)\sqrt{ab}$. Aufl.: $(a+10b)\sqrt{ab}$.

14) $\frac{a}{mc}\sqrt{m^3nc^2} - \frac{b}{ne}\sqrt{4mn^3e^2} + \frac{1}{pq}\sqrt{9mnp^2q^2c^2}$.

15) $\sqrt[3]{16a^4b^4c} - \sqrt[3]{54ab^4c^4} + \sqrt[3]{250a^4bc^4}$.

16) $c\sqrt[5]{a^6b^7c^3} - a\sqrt[5]{ab^7c^8} + b\sqrt[5]{a^6b^2c^8}$. Aufl.: $abc\sqrt[5]{ab^2c^3}$.

17) $\sqrt[n]{a^{n+2}b^{n+3}} - \sqrt[n]{a^{n+3}b^{n+2}}$.

18) $\sqrt{ax^2-bx^2} + \sqrt[3]{a^2b^3c^3-d^2b^3c^3} + \sqrt{4m^3n^3-9m^2n^2}$.

19) $\sqrt[x]{a^{x+1}b^x-a^xb^{x+1}} - \sqrt[x+y]{a^{2x+y}b^{x+2y}-a^{x+2y}b^{2x+y}}$.

20) α) $\sqrt{\sqrt[3]{49^3 \cdot 64^3}} + \sqrt[3]{\sqrt[x]{27^x \cdot 64^x}}$; β) $\sqrt{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}$.

In den folgenden Beispielen die Multiplication auszuführen:

21) α) $\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} \cdot \sqrt[x]{c} \cdot \sqrt[x]{a^3} \cdot \sqrt[x]{a^{x-7}} \cdot \sqrt[x]{a^4}$; β) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{1:x}$.

22) $\sqrt[x+1]{a^3bc} \cdot \sqrt[x+1]{a^7b^xc^{13-x}} \cdot \sqrt[x+1]{a^{x-9}b^0c^{2x-13}}$. Aufl.: abc.

23) α) $\sqrt[3]{\frac{a+b}{c}} \cdot \sqrt[3]{\frac{(a+b)^2}{d}} \cdot \sqrt[3]{dc}$; β) $\sqrt{xy}\left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}}\right)$;
γ) $\left(\sqrt[3]{9-\sqrt{17}} - \sqrt[3]{\frac{1}{8}\sqrt{17}-1\frac{1}{8}}\right)\sqrt[3]{3+\frac{1}{3}\sqrt{17}}$.

24) α) $4\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{8}\cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot \frac{5}{16}\sqrt{2}$; β) $2\sqrt{245}\cdot \frac{1}{7}\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$.

25) α) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{8}-\sqrt{27})$; β) $(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})(\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3})$.

26) $2(\sqrt{11}+\sqrt{7})(\sqrt{11}-3\sqrt{7})$. Aufl.: $-20-4\sqrt{77}$.

27) $(\sqrt{3}+3\sqrt{5}-5\sqrt{7})(7\sqrt{7}-3\sqrt{5}-\sqrt{3})$.

28) $(3\sqrt{45}-7\sqrt{5})(\sqrt{1\frac{4}{5}}+2\sqrt{9\frac{4}{5}})$. Aufl.: 34.

29) α) $(\sqrt{200}-\sqrt{800})(\sqrt{0,5}-\sqrt{0,125})$;

β) $(0,1\sqrt{0,1}-0,2\sqrt{0,2})(0,4\sqrt{0,4}+0,5\sqrt{0,5})$.

30) $2\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}+4\sqrt[3]{\frac{1}{3}}-3\sqrt[3]{2})$. Aufl.: $6-6\sqrt[3]{6}$.

31) α) $(m+\sqrt{n})^2$; β) $(\sqrt[3]{ab^2c}-\sqrt[3]{a^2bc^2})^2$.

32) $\sqrt[3]{\sqrt{12}-2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{12}+2}+\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$. Aufl.: 5.

33) $\sqrt[4]{\sqrt{23}-\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{23}+\sqrt{7}}+\sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}\cdot\sqrt[6]{5\sqrt{2}+7}$.

34) α) $\sqrt{a+b+\sqrt{2ab}}\cdot\sqrt{a+b-\sqrt{2ab}}$. Aufl.: $\sqrt{a^2+b^2}$;

β) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$;

γ) $\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. Aufl.: $\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$*).

In den folgenden Beispielen den Factor **unter** das Wurzelzeichen zu bringen:

35) $a\sqrt[x]{b}$. Aufl.: $\sqrt[x]{a^x}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{a^x b}$.

36) α) $2\sqrt{2}$; β) $7\sqrt{5}$; γ) $3\frac{1}{2}\sqrt{8}$; δ) $4\sqrt{0,125}$; ε) $6\sqrt{3\frac{1}{2}}$.

37) $7\frac{1}{9}\sqrt[3]{7\frac{19}{32}}+4\sqrt[3]{0,21875}-5\sqrt[4]{0,0256}$.

38) $2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}+5\sqrt{0,2\sqrt{0,2}}$. 39) $\sqrt{0,25\sqrt{0,25\sqrt{0,25}}}$.

40) α) $2\sqrt{0,5\sqrt{0,5\sqrt{0,5\sqrt{0,5}}}}$; β) $a\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}}}}$.

41) α) $a\sqrt{\frac{b}{a}}$; β) $(a+b)\sqrt{\frac{ab}{a^2+2ab+b^2}}$; γ) $ab\sqrt{\frac{1}{ab}}$.

42) α) $(m-n)\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$; β) $(m+n)\sqrt{\frac{m^4-m^3n+m^2n^2-mn^3+n^4}{m+n}}$.

*) S. Heis Trigonometrie II. 20.

43) α) $\frac{a^3b^2}{c^2}\sqrt[3]{\frac{c^5}{a^5b^5}}$; β) $\frac{b^{-3}c^{-6}}{a^{-2}}\sqrt[4]{a^{-7}b^{13}c^{25}}$.

44) $\frac{ab^2c^3}{d^4}\sqrt[x]{\frac{d^{4x-4}}{a^{x-1}b^{2x-2}c^{3x-3}}}$. Aufl.: $\sqrt[x]{\frac{ab^2c^3}{d^4}}$.

§. 43.

I. $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$. II. $\sqrt[n]{1:a} = 1:\sqrt[n]{a}$.

(Vergl. §. 19 und §. 37.)

1) Wie wird aus einem Quotienten die Wurzel gezogen?

2) Wie werden zwei Wurzeln mit gleichen Wurzel-Exponenten durch einander dividirt?

3) Wie groß ist die Wurzel aus dem reciproken Werthe einer Zahl, und wie groß der reciproke Werth der Wurzel einer Zahl?

4) α) $\sqrt{\frac{25}{49}}$; β) $\sqrt{\frac{64}{81}}$; γ) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$; δ) $\sqrt{2\frac{14}{25}}$; ε) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$.

5) Wenn $\sqrt{13} = 3{,}6055512$, wie groß ist $\sqrt{13:9}$?

6) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} + \sqrt[3]{\frac{64}{125}} - 4\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} - 2\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} + 3\sqrt[3]{1\frac{61}{64}}$. Aufl.: $-3\frac{11}{30}$.

7) $3\sqrt{\frac{a^2m^2n^2}{x^2y^2}} - \sqrt[3]{\frac{8a^3m^3n^3}{x^3y^3}} + 2\sqrt[x]{\frac{(a+b)^x}{m^xn^x}} - 3\sqrt[x]{\frac{(a-b)^x}{(mn)^x}}$.

8) $\sqrt[3]{\frac{a^4b^2c^3}{m^3n}} + \sqrt[x]{\frac{a^{x-1}}{b}} - \sqrt[x]{\frac{a}{b^{x-1}}} + \sqrt[x]{\frac{1}{a^xb^x}}$.

9) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\frac{25^3}{64^3}}} + \sqrt[3]{\sqrt[2]{\frac{8^2}{27^2}}} - \sqrt[3]{\sqrt[x]{\frac{27^x}{125^x}}}$. Aufl.: $\frac{83}{120}$.

10) $\sqrt{\frac{m}{a^2} - \frac{n}{a^2}} + \sqrt{\frac{m}{n^2} - \frac{1}{n}}$. Aufl.: $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{n}\right)\sqrt{m-n}$.

11) $\sqrt{2\frac{(a^2+b^2)^2}{c^2} - 2\frac{(a^2-b^2)^2}{c^2}}$. Aufl.: $\frac{2ab}{c}\sqrt{2}$.

12) $\sqrt{\frac{1}{a^2b^2c^2} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{abc^2} + \frac{1}{ab^2c} + \frac{1}{a^2bc}}$.

13) $\sqrt[y]{\frac{1}{m^4n^6z^y} - \frac{m^{y-4}n^{y-6} - p^yq^y}{m^yn^yz^y}}$.

14) α) $\sqrt{a^3} : \sqrt{a}$; β) $\sqrt[6]{a^9b^8c^6} : \sqrt[6]{a^3b^2}$; γ) $\sqrt[x]{a^{3x+2}} : \sqrt[x]{a^{2x+2}}$.

15) α) $\sqrt[9]{\frac{a^{17}b^3c^5}{d^8e^5}} : \sqrt[9]{\frac{a^8c^5d}{b^6e^5}}$; β) $\sqrt[x]{\frac{a^{x-2}b^y}{c^{x-3}d^x}} : \sqrt[x]{\frac{b^{y-x}c^3}{a^2}}$.

16) $\sqrt[7]{(a^3b^2c^5)^4(a^5b^3c)^5} : \sqrt[7]{(a^2b^3c^4)^4(a^4b^2c)^2}$. Aufl.: a^3bc.

17) $\sqrt[3]{3a^2b^2c^4-4a^4b^2c^2+5a^2b^4c^2}$ durch $\sqrt[3]{\frac{3c}{ab}-\frac{4a}{bc}+\frac{5b}{ca}}$ zu dividiren. Aufl.: abc.

18) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{153}}{\sqrt{17}}-\frac{\sqrt{304}}{\sqrt{19}}+\frac{\sqrt{105}}{\sqrt{2\frac{1}{7}}}$ zu berechnen. Aufl.: 8.

19) Eben so: $0{,}06\sqrt[6]{1{,}7889984} : 0{,}12\sqrt[6]{0{,}0279531}$. Aufl.: 1.

20) α) $m : \sqrt{m}$; β) $a^2b^2c^2 : \sqrt{abc}$; γ) $m^2p^3q^4 : \sqrt[3]{mp^2q^5}$.

21) $1 : \sqrt[x]{\frac{a}{b}}$. Aufl.: $\sqrt[x]{\frac{b}{a}}$.

22) $1:\sqrt{0{,}04}$; $1:\sqrt{0{,}015625}$; $1:\sqrt[3]{0{,}008}$; $1:\sqrt[3]{0{,}001953125}$.

23) α) $1 : \sqrt{1\frac{13}{36}}$; β) $1 : \sqrt{\frac{0{,}00125}{4{,}5}}$; γ) $1 : \sqrt[3]{\frac{0{,}01357}{0{,}36639}}$.

24) $1 : \sqrt{\frac{a+2b}{a^3-3ab^2+2b^3}}$. Aufl.: $a-b$.

25) In jedem der Quotienten $\frac{a}{\sqrt{b}}$ und $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$ das Wurzelzeichen aus dem Divisor fortzuschaffen. Aufl.: $\frac{a\sqrt{b}}{b}$ und $\frac{\sqrt{mn}}{n}$.

26) In dem Quotienten $\frac{m}{n\pm\sqrt{p}}$ das Wurzelzeichen aus dem Divisor fortzuschaffen. Aufl.: $\frac{m(n\mp\sqrt{p})}{n^2-p}$.

27) Eben so in: $\frac{a}{\sqrt{m}\pm\sqrt{n}}$. Aufl.: $\frac{a(\sqrt{m}\mp\sqrt{n})}{m-n}$

In den folgenden Beispielen sollen die Wurzelzeichen aus dem Divisor fortgeschafft werden:

28) $\alpha)\ \frac{7}{\sqrt{2}}$; $\beta)\ \frac{5}{\sqrt{3}}$; $\gamma)\ \frac{2+\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$; $\delta)\ \frac{5-\sqrt{4{,}5}+3\sqrt{12{,}5}}{\sqrt{2}}$.

29) $\alpha)\ \frac{1}{\sqrt{2}-1}$; $\beta)\ \frac{1}{5+\sqrt{5}}$; $\gamma)\ \frac{1}{7-\sqrt{27}}$; $\delta)\ \frac{5}{7-\sqrt{2}}$.

30) $\alpha)\ 9:(\sqrt{19}+4)$; $\beta)\ 2{,}9:(0{,}003+0{,}5\sqrt{0{,}001})$.

31) $\alpha)\ 66:(13-7\sqrt{3})$; $\beta)\ 180:(9\sqrt{5}+21)$.

32) $\alpha)\ 81\sqrt{5\frac{9}{11}}:(7\sqrt{11}-24)$; $\beta)\ 3\sqrt{0{,}78}:(5\sqrt{0{,}23}-0{,}01)$.

33) $\alpha)\ (1+2\sqrt{3}):(5-\sqrt{3})$; $\beta)\ \sqrt{2}:(\sqrt{3}-\sqrt{5})$.

34) $(\sqrt{1\frac{1}{15}}-1):(5\sqrt{\frac{3}{5}}+4)$. Aufl.: $\frac{31}{15}\sqrt{15}-8$.

35) $(5\sqrt{7}+6\sqrt{10}):(5\sqrt{1{,}75}+6\sqrt{2{,}5})$. Aufl.: 2.

36) $\alpha)\ \frac{13\sqrt{15}-7\sqrt{21}}{13\sqrt{1\frac{2}{3}}-7\sqrt{2\frac{1}{3}}}$; $\beta)\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}-a}$.

37) $\alpha)\ \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$; $\beta)\ \frac{259}{5+\sqrt{7}+\sqrt{11}}$.

38) $23:(2\sqrt{3}-4\sqrt{5}+6\sqrt{7})$.

39) $(\sqrt{10}-\sqrt{8}+\sqrt{6}):(\sqrt{10}+\sqrt{8}-\sqrt{6})$.

40) $(2\sqrt{3}-4\sqrt{5}-6\sqrt{7}):(\sqrt{3}-3\sqrt{5}-5\sqrt{7})$.

41) $\alpha)\ \sqrt{xy}:\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$; $\beta)\ \frac{b\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}$.

42) $\alpha)\ \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$; $\beta)\ \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}}$.

43) $\frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$. 44) $\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$.

45) $\frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}$. 46) $\frac{1}{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}}$.

47) Es ist $\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{2\frac{2}{3}}=\frac{4}{\sqrt{2\frac{2}{3}}}$. Warum?

§. 44.

I. $\sqrt[x]{a^y} = \sqrt[xn]{a^{yn}} = \sqrt[x:m]{a^{y:m}}$. (Vergl. §. 18.)

II. $\sqrt[x]{a^y} = a^{y:x} = \sqrt[x:y]{a}$.

1) Warum darf man den Potenz-Exponenten und Wurzel-Exponenten (Radicand-Exponenten) einer Zahl durch dieselbe Zahl multipliciren oder dividiren?

2) $5\sqrt[12]{a^{30}} + 3\sqrt[14]{a^{35}} + 9\sqrt[16]{a^{40}} - 7\sqrt[18]{a^{45}}$. Aufl.: $10\sqrt{a^5}$.

3) $\sqrt[15]{a^7} \cdot \sqrt[15]{a^3} + \sqrt[39]{a^{57}} : \sqrt[39]{a^{31}}$. Aufl.: $2\sqrt[3]{a^2}$.

4) α) $\sqrt[mnx]{a^{nxp}}$; β) $\sqrt[7xxy]{a^{49xyy}}$; γ) $\sqrt[2(m+n)]{a^{3m+3n}}$.

5) Die Wurzeln $\sqrt[5]{a^3}$, $\sqrt[8]{a^9}$, $\sqrt[12]{a^7}$; $\sqrt[6]{a^5}$, $\sqrt[10]{a^9}$ in andere von gleichem Werthe zu verwandeln, deren Wurzel-Exponent 120 ist.

6) Die Wurzeln $\sqrt[7]{a^4}$, $\sqrt[y]{a^5}$, $\sqrt[y]{a^6}$, $\sqrt[13]{a^7}$ in andere zu verwandeln, in denen der Potenz-Exponent der Wurzelgröße 420 ist.

7) Die Wurzeln $\sqrt[x]{a^y}$, $\sqrt[ny]{a^{px}}$, $\sqrt[xy]{a^{np}}$ in andere zu verwandeln, deren Wurzel-Exponent nxy ist.

8) α) $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[r]{a^s}$. Aufl.: $\sqrt[nr]{a^{mr+ns}}$; β) $\sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[q]{a}$.

9) α) $\sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[5]{a^7}$; β) $\sqrt[4]{a^7} \cdot \sqrt[9]{a^4} \cdot \sqrt{a^3}$.

10) α) $\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[8]{a^7}$; β) $\sqrt[xy]{a^m} \cdot \sqrt[yz]{a^n}$.

11) α) $\sqrt[m]{x^r} \cdot \sqrt[n]{y} \cdot \sqrt[o]{z}$; β) $\sqrt[nx]{a^y} \cdot \sqrt[ny]{a^x} \cdot \sqrt[xy]{a}$.

12) $\sqrt[10]{x^3y^2p} \cdot \sqrt[8]{xy^3p^2} \cdot \sqrt[14]{xyp^3} \cdot \sqrt[24]{x^2y^2p^2}$.

13) α) $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{\frac{bc}{a}}$; β) $\sqrt[x-1]{\frac{m^3n^5}{p^6q^7}} \cdot \sqrt[x+1]{\frac{p^4q^7}{m^{10} \cdot n^{13}}}$; γ) $\sqrt{q} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{q}}$.

14) $\sqrt[6]{\frac{a^{-3}b^{-4}}{c^{-3}}} : \sqrt[4]{\frac{a^{-2}b^{-1}}{c}} : \sqrt[35]{\frac{a^{-3}b^{-2}}{c}}$. Aufl.: $\sqrt[420]{\frac{a^{36}c^{327}}{b^{151}}}$.

15) $\sqrt[21]{\frac{a^2b^3}{c^2}} : \sqrt[14]{\frac{a^5b^3}{c^4}} : \sqrt[6]{\frac{a^{-3}b^2}{c^{-5}}}$. Aufl.: $\sqrt[42]{\frac{a^{10}}{b^{17}c^{27}}}$.

16) $\sqrt[-3]{a^2}$. Aufl.: $\sqrt[(-3).(-1)]{a^{2.(-1)}} = \sqrt[3]{a^{-2}} = 1 : \sqrt[3]{a^2}$.

17) $\sqrt[-x]{a}$. Aufl.: $1 : \sqrt[x]{a}$ oder $\sqrt[x]{1 : a}$.

18) Was bedeutet eine Wurzel mit negativem Wurzel-Exponenten?

19) Wie wird aus einer Potenz eine Wurzel gezogen?

20) α) $\sqrt[2]{a^6}$; β) $\sqrt[3]{a^{15}}$; γ) $\sqrt[19]{a^{133}}$; δ) $\sqrt[37]{a^{703}}$.

21) α) $\sqrt[x]{a^{pqx}}$; β) $\sqrt[y]{a^{3y}}$; γ) $\sqrt[x+1]{a^{3x+3}b^{5x+5}}$.

22) α) $\sqrt[x]{a^{nx+m}}$. Aufl.: $a^n\sqrt[x]{a^m}$; β) $\sqrt[x]{a^{3x+2}b^{2x+4}}$.

23) α) $\sqrt[2]{a^7}$; β) $\sqrt[3]{a^{22}}$; γ) $\sqrt[7]{a^{39}b^{15}}$; δ) $\sqrt[13]{a^{108}b^{28}c^{65}}$.

24) $\sqrt[5y]{a^{42yz-9tyq}} . \sqrt[5y]{a^{3yz-7tyq}} . \sqrt[5y]{a^{tyq-10yz}}$. Aufl.: a^{7z-3tq}.

25) α) $\sqrt[3x+5y]{a^{21xx+8xy-45yy}}$; β) $\sqrt[11x-7y]{a^{121xx-49yy}}$.

26) $\sqrt[x]{\frac{a^{x+1}}{b^{x-2}c^{x-3}d^{x-4}}}$. Aufl.: $\frac{a\sqrt[x]{ab^2c^3d^4}}{bcd}$.

27) $\sqrt[4x+6y]{\frac{a^{28xx}a^{10xy}}{a^{48yy}}}$. Aufl.: a^{7x-8y}.

28) $\sqrt[3a-2]{(x^{5am})^3.(x^6)^2} : \sqrt[3a-2]{x^{10m}.x^{18a}}$. Aufl.: x^{5m-6}.

29) $\sqrt[12x-14y]{(a^{7x}a^{11x})^{8x}} : \sqrt[12x-14y]{(a^{5y}.a^{23y})^{7y}}$. Aufl.: $a^{12x+14y}$.

30) α) $\sqrt[7]{\frac{a^{21}b^{-35}(c+d)^{-7}}{m^{-28}n^{-14}}}$; β) $\sqrt[m]{\frac{a^{-3m+3}b^{-7m}}{c^{-9m-11}}}$.

31) α) $\sqrt[63]{a^9}$; β) $\sqrt[128]{a^8}$; γ) $\sqrt[221]{a^{17}}$; δ) $\sqrt[1739]{a^{47}}$; ε) $\sqrt[mn]{a^n}$.

32) α) $\sqrt[105]{(a^3)^5}$; β) $\sqrt[112]{(a^2)^7}$; γ) $\sqrt[360]{[(a^3)^4]^5}$.

33) α) $\sqrt[2xm]{a^m}$; β) $\sqrt[6xym]{a^{2ym}}$; γ) $\sqrt[27mnop]{(a^{3m})^{3p}}$.

34) α) $\sqrt[ax+bx]{m^{a+b}}$; β) $\sqrt[nx-mx]{a^{n-m}}$.

35) α) Die $(9a^2-49b^2)$-te Wurzel aus m^{3a-7b}; β) die $(12a^2+61ab+77b^2)$-te Wurzel aus m^{4a+11b}.

36) $\sqrt[27]{a^4} \cdot \sqrt[27]{a^5} + \sqrt[42]{a} \cdot \sqrt[42]{a^5} : \sqrt[21]{a^{-4}}$. Aufl.: $2\sqrt[3]{a}$.

37) $\sqrt[mx]{\frac{a^{x-2}b^{x-4}}{c^{x-6}}} : \sqrt[mx]{\frac{b^{-4}}{a^2c^{-6}}}$. Aufl.: $\sqrt[m]{\frac{ab}{c}}$.

§. 45.

$$\sqrt[x]{a^y} = (\sqrt[x]{a})^y. \quad \text{(Vergl. §§. 9 und 21.)}$$

1) Wie wird aus einer Potenz eine Wurzel gezogen?
2) Wie wird eine Wurzel potenzirt?

3) $\sqrt[3]{8^7} + \sqrt{25^3} + \sqrt[3]{64^8}$ zu berechnen. Aufl.: 65789.

4) Eben so: $\sqrt[3]{(45^3)^2} + \sqrt[7]{(9^7)^5} + \sqrt[5]{100000^7} + \sqrt{(1\frac{11}{25})^3}$.

5) Eben so: $\sqrt{(\frac{16}{25})^7} \cdot \sqrt{(\frac{25}{64})^6}$. Aufl.: $\frac{1}{80}$.

6) $\sqrt[3]{(4ab^2)^x} \cdot \sqrt[3]{(2a^2b)^x}$. Aufl.: $\sqrt[3]{(8a^3b^3)^x} = (2ab)^x$.

7) $\sqrt[x]{\left(\frac{a^{2x}}{a^3}\right)^z} \cdot \sqrt[x]{\left(\frac{a^{5x}}{a^9}\right)^z} \cdot \sqrt[x]{\left(\frac{a^{12}}{a^{6x}}\right)^z}$. Aufl.: a^z.

8) $\sqrt{(a^2+2ab+b^2)^3}+\sqrt{(a^2-2ab+b^2)^3}$. Aufl.: $2a^3+6ab^2$.

9) $(\sqrt[7]{a^3b^5})^3 \cdot (\sqrt[7]{a^3b^{12}})^4$. 10) $(\sqrt[x]{a^mb^n})^y \cdot (\sqrt[x]{a^nb^r})^z$.

11) α) $\left(\sqrt[3]{2^5}\right)^5 \cdot \left(\sqrt[5]{3}\right)^2$; β) $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m \cdot \left(\sqrt[p]{x}\right)^q$.

12) α) $(\sqrt[15]{a^2b^{-3}c^4})^7$; β) $\left(\sqrt[x]{\frac{a^yb^x}{c^m}}\right)^n$; γ) $\left(\sqrt{\frac{3x^{-3}}{7z^{-7}}}\right)^3$.

13) α) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[7]{8a^3}}\right)^7$; β) $\sqrt[4]{\sqrt[11]{16a^4}}$; γ) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{8a^3}}\right)^5$;

δ) $\left(\sqrt{\sqrt[9]{2\frac{14}{25}}}\right)^9$. 14) $\left[\sqrt[x]{\sqrt[y]{\frac{a^xb^x}{c^x}}}\right]^y$.

15) α) $\left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right)^2$; β) $\left(\sqrt[x]{a} + \sqrt[x]{a^2}\right)^3$.

16) α) $\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^3$; β) $\left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right)^3$.

17) $\alpha)\ \left(\sqrt[x]{a}+\sqrt[y]{b}\right)^2$; $\beta)\ \left(\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{b}\right)^3$.

18) $\alpha)\ \left(\sqrt[5]{a^2}-\sqrt[2]{a^5}\right)^5$; $\beta)\ \left(\sqrt[3]{mn^2}-\sqrt[3]{m^2n}\right)^4$.

§. 46.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$ (Vergl. §§. 10 und 22.)

1) Wie wird aus einer Wurzel eine Wurzel gezogen?
2) Wie wird eine Zahl durch ein Product radicirt?

3) $2\sqrt[12]{\sqrt[5]{7}}+3\sqrt[6]{\sqrt[10]{7}}-3\sqrt[5]{\sqrt[12]{7}}-\sqrt[10]{\sqrt[6]{7}}$. Aufl.: $\sqrt[60]{7}$.

4) $\sqrt[2x]{\sqrt[3y]{a^5}}\cdot\sqrt[6x]{\sqrt[y]{a^3}}\cdot\sqrt[x]{\sqrt[6y]{a^9}}\cdot\sqrt[6y]{\sqrt[x]{a}}$. Aufl.: $\sqrt[xy]{a^3}$.

5) $\sqrt[6]{\sqrt[8]{a^5b^7c^{-11}}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[16]{a^{-43}b^7c^{37}}}$. Aufl.: $\sqrt[24]{a^{-19}b^7c^{13}}$.

6) $\sqrt[3x]{\sqrt[4y]{\frac{a^{4x-2}b^{15-3x}}{c^{2x-9}}}}\cdot\sqrt[6y]{\sqrt[2x]{\frac{a^{8x+2}b^{15x-15}}{c^{22x+9}}}}$.

7) $\sqrt[3]{531441}=81$; wie groß $\alpha)\ \sqrt[6]{531441}$? $\beta)\ \sqrt[12]{531441}$?

8) Wenn $\sqrt[5]{282475249}=49$, wie groß ist $\sqrt[10]{282475249}$?

9) $\alpha)\ \sqrt[2]{\sqrt[3]{\tfrac{25}{49}a^2b^6c^8}}$; $\beta)\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m}}$; $\gamma)\ \sqrt[3]{a\sqrt{a}}$;

$\delta)\ \sqrt[5]{a^2\sqrt{a}}$; $\varepsilon)\ \sqrt[7]{a^2\sqrt[3]{a}}$.

10) $\sqrt{3\sqrt[3]{5}}$. Aufl.: $\sqrt[6]{135}$.

11) $\alpha)\ \sqrt[3]{5\sqrt[4]{7}}$; $\beta)\ \sqrt[x]{a\sqrt[y]{b}}$; $\gamma)\ \sqrt[n]{a^p\sqrt[r]{a^q}}$.

12) $\alpha)\ a\sqrt{\left(a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}\right)}$; $\beta)\ a\sqrt[x]{a\sqrt[x]{a}}$; $\gamma)\ 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$.

Antw.: $\alpha)\ \sqrt[32]{a^{63}}$; $\beta)\ \sqrt[xx]{a^{xx+x+1}}$; $\gamma)\ \sqrt[16]{2147483648}$.

13) $a\sqrt[n]{\left(a^{1-n}\sqrt[n]{a^{1-n}\sqrt[n]{a^{1-n}}}\right)}$. Aufl.: $\sqrt[nnn]{a}$.

14) $\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}}$. Aufl.: $\sqrt[3]{2}$. 15) $\sqrt[x-1]{\dfrac{a}{\sqrt[x]{a}}}$. Aufl.: $\sqrt[x]{a}$.

§. 47.

Potenzen und Wurzeln mit gebrochenen Exponenten *).

1) Wie entsteht eine Potenz mit gebrochenem Exponenten?

2) Wie entsteht eine Wurzel mit gebrochenem Exponenten?

3) Wie läßt sich eine Potenz oder eine Wurzel mit gebrochenem Exponenten umändern?

4) Was bedeutet eine Potenz oder Wurzel mit gebrochenem negativem Exponenten?

5) Gelten die für Potenzen und Wurzeln mit ganzen Potenz- oder Wurzel-Exponenten bewiesenen Sätze auch für Potenzen und Wurzeln mit gebrochenen Exponenten, und warum?

6) $16^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{3}{4}} + 125^{\frac{1}{3}} - 512^{\frac{5}{8}} + 100^{0,5} - 81^{0,75}$.

7) Umzuändern: $5^{\frac{3}{7}} + 7^{-\frac{3}{4}} + 5^{-\frac{3}{11}} + 9^{-\frac{1}{3}}$.

8) Zu berechnen: α) $36^{1\frac{1}{2}}$; β) $49^{3\frac{1}{2}}$; γ) $4^{-3\frac{1}{2}}$; δ) $8^{-2\frac{1}{3}}$; ε) $9^{-0,5}$.

9) Eben so: α) $(3\frac{1}{16})^{-2\frac{1}{2}}$; β) $(1\frac{24}{25})^{-1\frac{1}{2}}$; γ) $(5\frac{1}{16})^{-1,25}$.

10) Eben so: $\sqrt[\frac{1}{2}]{7} - \sqrt[\frac{2}{3}]{6\frac{1}{4}} + \sqrt[0,3]{8} - \sqrt[0,75]{27} + \sqrt[\frac{3}{4}]{64}$. Aufl.: $1232\frac{3}{8}$.

11) Eben so: α) $\sqrt[-\frac{2}{3}]{25}$; β) $\sqrt[-\frac{2}{3}]{\frac{1}{36}}$; γ) $\sqrt[-\frac{3}{4}]{\frac{8}{27}}$; δ) $\sqrt[-0,375]{8}$.

12) α) $\sqrt[3]{a^5}$, β) $\sqrt[20]{a^{15}}$, γ) $\sqrt[13]{a^{-4}}$, δ) $\sqrt[-6]{a^{17}}$ in Potenzen oder in Wurzeln mit gebrochenen Exponenten zu verwandeln.

13) Eben so: $\sqrt{a+b}$; $\sqrt{(a-b)^3}$; $1:\sqrt{(a-b)^5}$; $1:\sqrt[x]{a^{4x+3}}$.

14) Eben so: α) $\sqrt[7]{\dfrac{a^2b^3c^4}{d^5e^6}}$; β) $\sqrt[-9]{\dfrac{a^{-6}b^{12}c^{-3}}{d^5e^{-13}}}$.

15) Zu berechnen: $7^{\frac{3}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{2}} \cdot 7^{\frac{7}{4}} + 16^{1\frac{3}{17}} \cdot 16^{\frac{5}{17}} \cdot 16^{\frac{1}{34}}$. A.: 2465.

*) Potenzen mit gebrochenen Exponenten wurden zuerst durch Newton eingeführt. (S. Leibnitzens mathem. Schriften. Berlin 1849. I. S. 101.)

16) Auszuführen: α) $a^{\frac{x}{y}} \cdot a^{\frac{z}{n}}$; β) $c^{\frac{p}{q}} c^{\frac{r}{s}} c^{\frac{t}{u}}$; γ) $m^{-\frac{x}{y}} \cdot m^{\frac{n}{z}} \cdot m^{-\frac{r}{s}}$.

17) Eben so: $\left(a^{-\frac{1}{2}} - a^{\frac{3}{4}}\right) \times \left(a^{\frac{5}{8}} + a^{-\frac{7}{8}} + a\right)$.

18) Wenn $10^{2,08991} = 123$ und $10^{2,65896} = 456$, wie groß ist $10^{4,74887}$?

19) $10^{0,30103} \times 10^{-1,47712} \times 10^{0,22185} \times 10^{2,95424}$.

20) $\left(a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{2}{3}} c^{\frac{3}{4}} d^{-\frac{5}{6}}\right) : \left(a^{\frac{7}{8}} b^{-\frac{9}{10}} c^{-\frac{10}{11}} d^{\frac{11}{12}}\right)$.

21) $\left(16a^{\frac{3}{20}} - 40a^{1\frac{53}{70}} + 22a^{\frac{9}{52}} - 55a^{1\frac{71}{91}}\right) : \left(2a^{-\frac{3}{4}} - 5a^{\frac{6}{7}}\right)$.

22) $8a^{-1\frac{7}{15}} - 12a^{-\frac{4}{5}} b^{-\frac{3}{4}} - 10a^{-\frac{2}{3}} b^{-\frac{5}{6}} + 15b^{-1\frac{7}{12}}$ durch $4a^{-\frac{4}{5}} - 5b^{-\frac{5}{6}}$ zu dividiren. Antw.: $2a^{-\frac{2}{3}} - 3b^{-\frac{3}{4}}$.

23) Eben so: $a^{-1,3} + a^{-\frac{2}{15}} - a^{-0,05} - a^{\frac{1}{3}} - a^{1,5} + a^{1\frac{7}{12}} + a^{\frac{5}{14}} + a^{1\frac{11}{21}} - a^{1\frac{17}{28}}$ durch $a^{-0,5} + a^{\frac{2}{3}} - a^{0,75}$.

24) Eben so: $x^{-3,75} + y^{-4}$ durch $x^{-0,75} + y^{-0,8}$.

25) Wenn $9^{-1\frac{1}{6}} = 0,0770401$, wie groß ist $9^{-\frac{2}{3}}$?

26) $(1\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{8}{11})^{\frac{1}{2}} \cdot 11^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{2}{7})^{\frac{1}{2}}$ zu berechnen.

27) $\left(a^{\frac{3}{5}} - a^{\frac{7}{9}}\right)^{\frac{x}{y}} \times \left(a^{\frac{11}{13}} - a^{\frac{15}{17}}\right)^{\frac{x}{y}}$.

28) $\dfrac{16a^4b^{12}c^4}{81n^8p^{12}}$ zur Potenz mit dem Exponenten $\frac{3}{4}$ zu erheben.

29) Wenn $10^{0,13579} = 1,36707$ und $2^{0,13579} = 1,09869$, wie groß ist $5^{0,13579}$?

30) α) $\left(a^{\frac{3}{7}}\right)^{\frac{5}{8}}$; β) $\left(a^{-\frac{2}{5}}\right)^{1\frac{2}{3}}$; γ) $\left(a^{\frac{3}{7}}\right)^{-1\frac{2}{5}}$; δ) $3\left(a^{-1\frac{3}{11}}\right)^{-1\frac{4}{7}}$; ε) $\left(a^{\frac{x}{y}}\right)^{\frac{p}{q}}$; ζ) $\left(a^{-\frac{x}{y}}\right)^{-\frac{m}{n}}$.

31) Wie groß ist $10^{0,90309}$, wenn $10^{0,30103} = 2$ ist?

32) $10^{0,1} = 1,258925$; $10^{0,01} = 1,023293$; $10^{0,001} = 1,002305$; $10^{0,0001} = 1,000230$; wie groß α) $10^{3,2143}$; β) $10^{4,797}$; γ) $10^{1,0414}$? (Bem.: Abgekürzte Multiplication.)

33) Wenn $e^{\frac{x}{y}} = m$ und $e = v^{\frac{p}{q}}$, wie groß ist m in Bezug auf die Basis v?

34) Wenn $2{,}71828^{1{,}94591} = 7$ und $10^{0{,}43429} = 2{,}71828$, wie groß ist 7 in Bezug auf die Basis 10? Aufl.: $10^{0{,}84509}$.

35) $a^{0{,}30103} - a^{-0{,}47712}$ zur 3. und 4. Potenz zu erheben.

36) α) $\sqrt[7]{2{,}71828^{13{,}62137}}$; β) $\sqrt[-3]{10^{-3{,}8362608}}$.

§. 48.

Ueber das Vorzeichen der Wurzel.

I. $\sqrt{a^2} = \pm a$; $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \begin{Bmatrix} a-b \\ b-a \end{Bmatrix} = \pm(a-b)$.

II. $\sqrt[2n]{a} = \pm a^{\frac{1}{2n}}$
III. $\sqrt[2n+1]{-a} = -a^{\frac{1}{2n+1}}$ } wenn n eine ganze Zahl bedeutet.

IV. Aus einer negativen Zahl kann man keine Wurzel mit geradem Wurzel-Exponenten ausziehen.

(In Bezug auf das doppelte Zeichen einer Wurzel möge bemerkt werden, daß man nur in dem Falle ein doppeltes Zeichen erhält, wenn man die Art der Entstehung der Wurzelgröße nicht kennt. $a^2 - 2ab + b^2$ z. B. kann sowohl aus $(a-b)\ (a-b)$, als aus $(b-a)\ (b-a)$ entstanden sein; es ist also $\sqrt{a^2-2ab+b^2} = \pm (a-b)$; man darf aber nicht $\sqrt{(a-b)^2} = \pm (a-b)$, sondern nur $= a-b$ setzen. $\sqrt{(+a)^2}$ ist nur $= +a$ und $\sqrt{(-a)^2} = -a$.)

1) α) $\sqrt{36}$; β) $\sqrt{49}$; γ) $\sqrt{4a^2b^4c^6}$; δ) $(36x^4y^6z^8)^{\frac{1}{2}}$.

2) α) $\sqrt{m^2+n^2-2mn}$; β) $\sqrt{1-2x+x^2}$; γ) $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$.

3) $\sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{-512} - \sqrt[3]{-27} + (-\frac{64}{125})^{\frac{1}{3}} - (\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}$.

4) $4\sqrt{-(a-b)^3} - \sqrt[3]{-(5p-6q)^3} - \sqrt[3]{(-a)^3(-b)^6(-c)^{12}}$.

5) $\sqrt[4]{a^{12}b^{16}c^{20}} + \sqrt[5]{(-a)^{15}b^{-25}(-c^{35})} + \sqrt[7]{a^{-14}b^{21}c^{-28}}$.

6) $\sqrt{(-x)^2}$; $\sqrt{(-13)^2}$; $\sqrt[3]{(-a)^4}$; $\sqrt[3]{(-27)^4}$; $(-64)^{-\frac{2}{3}}$.

7) $x+\sqrt{x}$ für $x = (+4)^2$ und für $x = (-5)^2$ zu berechnen.

8) Eben so: $x - \sqrt{x}$ für $x = (-4)^2$ und $x = (+5)^2$.

9) Eben so: $x-(a+b)\sqrt{x}$ für $x = (b-a)^2$ und $x = (-2a)^2$.

10) Eben so: $x + \sqrt{25+x}$ für $x = (-14)^2-25$.

11) Eben so: $x+2(a+b)\sqrt{3(a^2+b^2)+x} + 10ab$ für $x = (b-3a)^2 - 3(a^2+b^2)$. Aufl.: 0.

§. 49.
Rechnung mit imaginären Größen.

I. $(\sqrt{-a})^2 = -a$. II. $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}$.

III. $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$. IV. $\sqrt{-a}:\sqrt{-b} = \sqrt{a:b}$.

V. $\sqrt{-a}:\sqrt{b} = \sqrt{a:b}\cdot\sqrt{-1}$. VI. $\sqrt{a}:\sqrt{-b} = -\sqrt{a:b}\cdot\sqrt{-1}$.

Bezeichnung: $\sqrt{-1}$ wird nach Gauß (Disq. arithm. 337) mit i bezeichnet *).

1) α) $\sqrt{-49} + \sqrt{-64} - \sqrt{-100} + 3\sqrt{-25} - \sqrt{-2\frac{1}{4}} - 3\sqrt{-1\frac{7}{9}} - 5\sqrt{-1\frac{9}{16}}$. Antw.: $8\frac{1}{4}\sqrt{-1}$;

β) $2\sqrt{-12} - 3\sqrt{-27}$; γ) $\sqrt{-a^2b^2} + \sqrt{-a^2-b^2-2ab}$.

2) Wie groß sind: α) $(\sqrt{-1})^1$? β) $(\sqrt{-1})^2$? γ) $(\sqrt{-1})^3$? δ) $(\sqrt{-1})^4$? ε) i^5? ζ) i^6? η) i^7? ϑ) i^8? ι) i^9?

3) $4\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3} - 3\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-1\frac{1}{5}} + \sqrt{-2}(\sqrt{-2} + \sqrt{3}) - \sqrt{-6}(\sqrt{-24} + \sqrt{6} - \sqrt{-\frac{1}{6}})$.

Antw.: $-\sqrt{6} + 9 + \sqrt{-6} - 6\sqrt{-1}$.

4) α) $a\sqrt{-a^2b^3}\cdot\sqrt{-a^4b^5}$; β) $a^2b^2\sqrt{-a^{-5}b^{-1}}\cdot\sqrt{-a^9b^5}$.

5) $(1-2\sqrt{-3})(4-5\sqrt{-6})-(7-8\sqrt{-9})(10+11\sqrt{-12})$.

6) α) $(\sqrt{-a} + \sqrt{-b})(\sqrt{-a} - \sqrt{-b})$;
β) $(x+\sqrt{-y})(x-\sqrt{-y})$; γ) Es soll $p+q$ als das Product zweier Binome dargestellt werden.

7) $(\sqrt{-17} + \sqrt{-19})\cdot(\sqrt{-119} - \sqrt{-133})$. Antw.: $2\sqrt{7}$.

8) α) $(a+\sqrt{-b^2})(a-\sqrt{-b^2})$; β) $(a+bi)(c+di)$; γ) $(x+yi)(x-yi)$.

9) $(\sqrt{-a^3b^5} + \sqrt{-a^7b^9})(\sqrt{-a^5b^7} - \sqrt{-a^9b^{11}})$.

10) $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-40}\cdot\sqrt{-5} - \sqrt{-4}\cdot\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-6}\cdot\sqrt{-2}$.

11) $\sqrt{-a^2b}\cdot\sqrt{-ab^3}\cdot\sqrt{-ab^2}$

12) $\sqrt{-m^4n^2}\cdot\sqrt{-mn^3}\cdot\sqrt{-m^3n^7}\cdot\sqrt{-m^2n}$.

*) Nach Gauß werden Zahlen von der Form $a+b\sqrt{-1}$ „laterale" Zahlen genannt. (Göttinger Gelehrte Anzeigen 1831. Apr. 23.)

13) α) $\sqrt{-176}:\sqrt{11}-\sqrt{-325}:\sqrt{-13}+\sqrt{540}:\sqrt{-15}$;
β) $(2\sqrt{8}-\sqrt{-10}):(-\sqrt{-2})$;
γ) $(3\sqrt{-4}-2\sqrt{-12}+\sqrt{6}-9):(-3\sqrt{-2})$.

14) $(18\sqrt{-30}+36\sqrt{50}-54\sqrt{70}):(9\sqrt{-10})$.

15) $(\sqrt{-1})^{4n}$, $(\sqrt{-1})^{4n+1}$, $(\sqrt{-1})^{4n+2}$, $(\sqrt{-1})^{4n+3}$ zu berechnen, wenn n eine ganze Zahl bedeutet.

16) $(\sqrt{-1})^{15}+(\sqrt{-1})^{24}-(\sqrt{-1})^{39}+(\sqrt{-1})^{44}+(\sqrt{-1})^{55}-(\sqrt{-1})^{113}-(\sqrt{-1})^{130}$ zu berechnen.

17) Eben so: α) $(\sqrt{-5})^4$; β) $(\sqrt{-3})^8$; γ) $(\sqrt{-7})^5$; δ) $(\sqrt{-2})^{25}$; ε) i^{-1}; ζ) i^{-2}; η) i^{-3}; ϑ) i^{-4}; ι) $i^{-(2n+1)}$.

18) α) Wenn $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}=J_{\prime}$ und $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}=J_{\prime\prime}$ gesetzt wird, so soll nachgewiesen werden, daß a) $J_{\prime}^3=1$, b) $J_{\prime\prime}^3=1$, c) $J_{\prime}^2=J_{\prime\prime}$, d) $J_{\prime\prime}^2=J_{\prime}$, e) $J_{\prime}^{3n}=J_{\prime\prime}^{3n}=1$, f) $J_{\prime}^{3n+1}=J_{\prime\prime}^{3n+2}=J_{\prime}$, g) $J_{\prime\prime}^{3n+1}=J_{\prime}^{3n+2}=J_{\prime\prime}$; β) Was wird aus x^2-2x+2 für $x=1\pm\sqrt{-1}$, und γ) aus $x^3-5x^2+12x-7$ für $x=2\mp\sqrt{-3}$?

19) α) $(\sqrt{-75}-5)^3$; β) $(\sqrt{-1{,}08}-0{,}6)^3$.

20) $\left(-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a}+\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}}\right)^3$. Aufl.: a.

21) $\frac{1}{1024}\left(-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{-10-2\sqrt{5}}\right)^5$. Aufl.: 1.

In folgenden Quotienten die imaginären Größen aus dem Divisor in den Dividenden zu schaffen:

22) α) $\dfrac{1}{a-\sqrt{-b}}$; β) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{-b}}$; γ) $\dfrac{\sqrt{-3}-\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}+\sqrt{-2}}$.

23) α) $\dfrac{7\sqrt{2}-5\sqrt{-3}}{9-2\sqrt{-2}}$; β) $\dfrac{83-2\sqrt{-5}}{4+5\sqrt{-5}}$; γ) $\dfrac{23-37\sqrt{-2}}{7-6\sqrt{-2}}$.

24) α) $\dfrac{m+\sqrt{-n}}{m-\sqrt{-n}}+\dfrac{m-\sqrt{-n}}{m+\sqrt{-n}}$. Aufl.: $\dfrac{2(m^2-n)}{m^2+n}$.

25) $\dfrac{69+\sqrt{-3}-6\sqrt{-5}-7\sqrt{15}}{3-\sqrt{-3}+3\sqrt{-5}}$. Aufl.: $2+\sqrt{-3}-4\sqrt{-5}$.

C. Wurzeln aus gemeinen Zahlen und algebraischen Summen.

§. 50.

Quadratwurzel aus gemeinen Zahlen.

I. $\sqrt{a^2 \pm 2ab + b^2} = a \pm b$.

II. $\sqrt{a^2 \pm k} = a \pm \frac{k}{2a}$, wenn k gegen a sehr klein ist.

1) Wie viel Ziffern kann das Quadrat einer einzifferigen, wie viel das Quadrat einer zwei-, drei- oder mehrzifferigen Zahl haben?

2) Wie viel Ziffern kann die dritte Potenz einer ein-, zwei-, drei- oder mehrzifferigen Zahl haben?

3) Wie viel Ziffern muß die zweite und dritte Wurzel aus einer ein-, zwei-, drei-, vier- u. s. w. zifferigen Zahl haben?

4) Zwischen welchen Einern liegen die Quadratwurzeln aus 3, 19, 63, 50, 99, 80, 35?

5) Zwischen welchen Zehnern liegen die Quadratwurzeln aus 200, 700, 7700, 1719, 810, 3141, 360, 9899, 4901?

6) Zwischen welchen Hunderten liegen die Quadratwurzeln aus 60000, 52000, 25000, 64000, 759121, 487312, 173191?

7) Wie wird jede Zahl, aus der die Quadratwurzel ausgezogen werden soll, in Classen abgetheilt? Wie muß die Abtheilung vorgenommen werden, wenn die Zahl eine oder mehrere Decimalstellen enthält?

8) Wie wird aus einer Zahl die Quadratwurzel gezogen?

Aus folgenden Zahlen (Nr. 9—25) die Quadratwurzel zu ziehen:

9) 169; 441; 1849; 784: 1521; 6084; 8100. Reste: 0.
10) 783; 1279; 1818; 3190; 4815; 5095; 7623. Reste: 54.
11) 15129; 207936; 622521; 185761; 163216; 40000. R.: 0.
12) 1841449; 97535376; 4401604; 9054081; 51825601. R.: 0.
13) α) 780811249; β) 900540081; γ) 3466383376. R.: 0.
14) 846398; 2619761; 2717741; 1019918. Reste: 1837.
15) α) 150229108836; β) 1524155677489. Reste: 0.
16) 9512381399; 1824998399; 1848999439. Reste: 85438.
17) 248004; 630436; 15968016; 2499700009*). Reste: 0.
18) 13,69; 5760,81; 33708,96; 227,7081; 4762,104064; 25,0007000049; 0,09; 0,2209; 0,013689; 0,00056644; 0,000000000361. Reste: 0.

*) Diese Beispiele können nach der Formel $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$ berechnet werden.

19) α) 2; β) 3; γ) 5.
Aufl.: α) 1,4142135....; β) 1,7320508....; γ) 2,236067977.....

20) α) 5,5; β) 4,9; γ) 25,16; δ) 0,9. (6 Decimalstellen.)
Antw.: β) 2,213594; γ) 5,015973.

21) α) 18439; β) 1,1029; γ) 0,00064; δ) 0,001; ε) 0,00004. (6 Decimalstellen.) Antw.: γ) 0,025298; ε) 0,006325.

22) α) $\frac{49}{64}$; β) $\frac{100}{121}$; γ) $\frac{3083536}{3108169}$; δ) $1\frac{600}{2209}$; ε) $9\frac{11104}{12769}$.

23) α) $\frac{17}{49}$; β) $\frac{1111}{8100}$; γ) $\frac{1357}{4900}$; δ) $789\frac{2785}{1841449}$. (6 Decimalstellen.)

24) $\frac{2}{3}$. Aufl.: $\sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{6} : 3 = 0,8164966$.

25) α) $\frac{3}{5}$; β) $\frac{5}{6}$; γ) $\frac{355}{113}$; δ) $\frac{1}{1719}$; ε) $97\frac{97}{99}$; ζ) $\frac{103}{120}$; η) $\frac{703}{8000}$. (5 Decimalstellen.)

Zu berechnen:

26) α) $\sqrt{\sqrt{38950081}}$; β) $\sqrt{\sqrt{47458321}}$; γ) $\sqrt{\sqrt{92236816}}$.

27) α) $\sqrt[4]{1160008396738816}$; β) $\sqrt[4]{4366651114970881}$.

28) α) $\sqrt[4]{32\frac{9569}{28561}}$; β) $\sqrt[4]{3088\frac{768}{14641}}$. Reste: 0.

29) α) $\sqrt[8]{28179280429056}$; β) $\sqrt[8]{62259690411361}$.

30) $\sqrt[8]{10}$ bis auf 5 Decimalstellen zu berechnen.

31) Eben so: α) $8\sqrt{2-\sqrt{2}}$; β) $16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$;
γ) $32\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$; δ) $64\sqrt{\left\{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\right\}}$;
ε) $12\sqrt{2-\sqrt{3}}$; ζ) $24\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; η) $48\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ *).
Aufl.: α) 6,1229349; β) 6,2428903; γ) 6,2730970; δ) 6,2806623; ε) 6,211656; ζ) 6,265257; η) 6,278697.

32) α) $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; β) $\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$;
γ) $\frac{1}{4}\left[\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right]$; δ) $\frac{1}{4}\left[\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}\right]$ **).

33) $\frac{1}{8}\left[\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{9-3\sqrt{5}}\right]+\frac{1}{8}\left[\sqrt{15+3\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right]$ **).

---

*) α), β), γ) und δ) sind die Umfänge des regulären Acht-, Sechszehn-, Zweiunddreißig- und Vierundsechszigeckes, ε), ζ) und η) die Umfänge des regulären Zwölf-, Vierundzwanzig- und Achtundvierzigeckes, wenn der Radius des umschriebenen Kreises gleich 1 ist. (Heis, ebene und sphärische Trigonometrie VIII. 130. Zus.)

**) Man vergleiche Heis, ebene und sphärische Trigonometrie VIII. 129.

34) α) $\sqrt{100{,}0002}$; β) $\sqrt{169{,}00052}$; γ) $\sqrt{15129{,}01722}$. (Bis auf 5 Decimalstellen nach Formel II. zu berechnen.)

35) $\sqrt{64\frac{1}{15}}$; $\sqrt{144\frac{4}{13}}$; $\sqrt{99\frac{9}{10}}$; $\sqrt{24\frac{23}{24}}$; $\sqrt{1023\frac{19}{35}}$.

36) Wenn $\sqrt{2954961} = 1719$, wie groß ist $\sqrt{2954900}$?

37) Wenn bei der Ausziehung der Quadratwurzel aus 123456789101112 die Zahl 11111111 herauskommt und der Rest 1446791 übrig bleibt, wie findet man aus dem Reste und der gefundenen Wurzel die zu letzterer gehörigen 5 ersten Decimalstellen?

38) $\sqrt{9{,}8696044011} = 3{,}14159$, der Rest ist $= 0{,}0000166730$. Wie heißen die 5 folgenden Decimalstellen der Wurzel?

39) Wenn $10^{\frac{1}{2048}} = 1{,}0011249$, wie groß ist α) $10^{\frac{1}{4096}}$, β) $10^{\frac{1}{8192}}$, γ) $10^{\frac{1}{16384}}$, δ) $10^{\frac{1}{32768}}$?

40) Eine quadratische Hausflur sei mit 784 quadratischen Platten belegt; wie viel Platten befinden sich an jeder Seite?

41) Ein rechtwinkeliger Acker von gleicher Länge und Breite enthält 1522756 Quadratmeter. Wie lang und breit ist derselbe?

42) Ist der Inhalt eines Kreises k, so ist der Radius desselben $\sqrt{k : 3{,}14159}$. Wie groß ist der Radius eines Kreises, dessen Inhalt 1 Quadratmeter beträgt? Aufl.: 0,56419 Meter.

43) Die Mittelglieder der Proportion $5132 : x = x : 27195$ zu suchen.

44) Nach einem merkwürdigen, von dem Astronomen Kepler entdeckten, Gesetze verhalten sich die Umlaufszeiten der Planeten wie die Quadratwurzeln aus den dritten Potenzen ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne. Wenn nun die mittleren Entfernungen der Erde und des Jupiter von der Sonne sich wie $1 : 5{,}2028$ verhalten und die Umlaufszeit der Erde 365,25637 Tage beträgt, wie läßt sich hieraus die Umlaufszeit des Planeten Jupiter berechnen? Antw.: Die Umlaufszeit beträgt 4334,64 Tage.

45) Die eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreieckes betrage 57921 Meter, die andere 98756 Meter. Wie groß ist die Hypotenuse?

46) Ein rechtwinkeliges Feld habe 712 Meter 3 Decimeter Länge und 518 Meter 7 Decimeter Breite. Wie weit ist es von der einen bis zur anderen gegenüberstehenden Ecke. Antw.: 881 Meter 1,4 Decimeter.

47) Ein rechtwinkelig behauener Stein habe 1,64 Meter Länge, 1,28 Meter Breite und 0,65 Meter Höhe. Wie weit ist es von einer Ecke zur anderen, gegenüberstehenden?

Antw.: 2,18 Meter.

48) Wenn man untersuchen will, ob irgend eine Zahl n eine Primzahl ist oder nicht, mit welchen Divisoren braucht man alsdann die Zahl nur zu dividiren? Antw.: Mit allen Zahlen, welche Primzahlen und kleiner als $\sqrt{n}$ sind.

49) Welche von den Zahlen α) 8543, β) 83731, γ) 997009, δ) 145157, ε) 394969, ζ) 11111, η) 111111 sind Primzahlen?

50) $\frac{7}{10^7}+\frac{13\sqrt{146}}{50}$ weicht erst in der zehnten Decimalstelle von der bekannten Zahl π, d. h. dem Verhältnisse des Kreisumfanges zum Durchmesser, ab. Es soll dieser Zahl-Ausdruck bis auf 10 Decimalstellen ausgerechnet werden.

51) Ist der Radius eines Kreises $= 1$, so ist α) der Umfang des eingeschriebenen regulären Zehnecks $5(\sqrt{5}-1)$, β) der Inhalt desselben $\frac{5}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, γ) der Umfang des eingeschriebenen regulären Fünfecks $\frac{5}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, δ) der Inhalt desselben $\frac{5}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, ε) der Umfang des dem Kreise umschriebenen regulären Zehnecks $4\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}$, ζ) der Umfang des dem Kreise umschriebenen regulären Fünfecks $10\sqrt{5-2\sqrt{5}}$*). Es sollen bis auf 6 Decimalstellen die obigen Zahl-Ausdrücke berechnet werden.

52) Wenn x eine sehr kleine Zahl bedeutet, so ist näherungsweise $\frac{1}{\sqrt{1\pm x}} = 1\mp\frac{x}{2}$. Warum?

Beispiel: $\frac{1}{\sqrt{0{,}9994}} = 1{,}0003$.

§. 51.

Quadratwurzel aus zusammengesetzten algebraischen Ausdrücken.

1) α) $9p^2-30pq+25q^2$; β) $9g^2-6g+1$; γ) $x^2+xy+\frac{1}{4}y^2$.

2) α) $289x^2-646xy+361y^2$; β) $17{,}64m^2+54{,}6mn+42{,}25n^2$.

3) α) $0{,}015625p^2+pq+16q^2$; β) $\frac{4}{9}a^2x^2-abxy+\frac{9}{16}b^2y^2$.

4) $\frac{25}{64}\frac{a^2b^2}{c^2d^2}-\frac{3}{5}\frac{a^2}{d^2}+\frac{144}{625}\frac{a^2c^2}{b^2d^2}$. Aufl.: $\frac{5}{8}\frac{ab}{cd}-\frac{12}{25}\frac{ac}{bd}$.

5) $\frac{1}{4}\frac{m^6n^8}{p^{10}q^{12}}-1\frac{1}{5}\frac{mn^3}{pq^3}+1\frac{11}{25}\frac{p^8q^6}{m^4n^2}$.

---

* S. Heis und Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie I. Theil, VI. 11 Zus. 2.

6) $\frac{4}{25}\frac{a^2+2ab+b^2}{m^2-2mn+n^2} - 1 + 1\frac{9}{16}\frac{m^2-2mn+n^2}{a^2+2ab+b^2}$.

7) $0{,}09a^{-4}b^{-6}-0{,}3+0{,}25a^4b^6$. Aufl.: $0{,}3a^{-2}b^{-3}-0{,}5a^2b^3$.

8) $\frac{16}{169}\frac{a^{-6}b^{10}c^{-14}}{d^{18}e^{-22}f^{26}} - \frac{56}{143}\frac{a^{-1}bc^{-1}}{de^{-1}f} + \frac{49}{121}\frac{a^4b^{-8}c^{12}}{d^{-16}e^{20}f^{-24}}$.

9) α) $a^{6m}-2a^{3m}b^{5m}+b^{10m}$; β) $9a^{2m}+24a^{m+p}+16a^{2p}$.

10) $25a^{-4m}b^{-6p}-70a^mb^{-p}+49a^{6m}b^{4p}$.

11) $\frac{9}{49}\frac{x^{-4n}y^{6m+8}}{z^{-10n-4}} - \frac{x^{-1}y^{-1}}{z^{-1}} + \frac{49}{36}\frac{x^{4n-2}y^{-10-6m}}{z^{10n+2}}$.

12) α) $x^2+4xy+6xz+4y^2+12yz+9z^2$. Aufl.: $x+2y+3z$;
β) $x^4+6x^3+25x^2+48x+64$;
γ) $(6y^2)^2+60y^3+(13y)^2+120y+144$;
δ) $(13x^2)^2+(4x^3)^2+(7x)^2+210x^3-120x^5$.

13) $4x^2y^2-20xy^2z+28x^2yz+25y^2z^2-70xyz^2+49x^2z^2$.

14) $\frac{4}{9}\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{z} - \frac{16}{15}\frac{x^2}{y^2} + \frac{9}{16}\frac{y^2}{z^2} + \frac{6}{5}\frac{yx}{z^2} + \frac{16}{25}\frac{x^2}{z^2}$.

15) $4a^4-12a+25a^{-2}-24a^{-5}+16a^{-8}$.

16) $\frac{9}{25}\frac{m^6n^4}{p^6q^8} - \frac{12}{35}\frac{m^5n^5}{p^7q^9} - \frac{332}{735}\frac{m^4n^6}{p^8q^{10}} + \frac{16}{63}\frac{m^3n^7}{p^9q^{11}} + \frac{16}{81}\frac{m^2n^8}{p^{10}q^{12}}$.

17) $a^2-6ab+10ac-14ad+9b^2-30bc+42bd+25c^2-70cd+49d^2$. Aufl.: $a-3b+5c-7d$.

18) $\frac{1}{4}\frac{m^2n^2}{o^2p^2} - \frac{2}{3}\frac{m^2}{o^2} - \frac{3}{4} - \frac{4}{5}\frac{n^2}{p^2} + \frac{4}{9}\frac{m^2p^2}{o^2n^2} + \frac{p^2}{n^2} + \frac{16}{15} + \frac{9}{16}\frac{o^2p^2}{m^2n^2} + \frac{6}{5}\frac{o^2}{m^2} + \frac{16}{25}\frac{o^2n^2}{m^2p^2}$.

19) $9a^{2m+2}+42a^{4m-2}+103a^{6m-6}+126a^{8m-10}+81a^{10m-14}$.

20) $a+2\sqrt{ab}+b$; β) $\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$.

21) α) $\sqrt{a}\pm2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}$; β) $\sqrt[3]{a}\pm2\sqrt[12]{a^2b^3}+\sqrt{b}$.

22) $\sqrt[x]{a^2}\pm2\sqrt[xy]{a^yb^x}+\sqrt[y]{b^2}$.

23) α) $a^{\frac{4}{7}}+2a^{\frac{24}{35}}+a^{\frac{4}{5}}$; β) $m^{\frac{8}{9}}-2m^{\frac{1}{63}}+m^{-\frac{6}{7}}$.

24) $a-2\sqrt[6]{a^3b^2}+\sqrt[4]{a^2c}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[12]{b^4c^3}+\frac{1}{4}\sqrt{c}$.

25) $\sqrt[m]{a^2}-2a\sqrt[mn]{a^nb^m}-2b\sqrt[mx]{a^xc^m}+a^2\sqrt[n]{b^2}+2ab\sqrt[nx]{b^xc^n}+b^2\sqrt[x]{c^2}$.

26) α) $-a\pm2\sqrt{ab}-b$; β) $m^2-2mn\sqrt{-x}-n^2x$.

27) $a^2-2ab\sqrt{-1}-2ac\sqrt{-1}-b^2-2bc-c^2$.

28) α) $\sqrt{x^2 \pm y}$; β) $\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm y}}$. Antw.: α) $x \pm \frac{y}{2x} - \frac{1}{8}\frac{y^2}{x^3} \cdots$;
β)*) $\frac{1}{x} \mp \frac{1}{2}\frac{y}{x^3} + \frac{3}{8}\frac{y^2}{x^5} \mp \frac{5}{16}\frac{y^3}{x^7} + \frac{35}{128}\frac{y^4}{x^9} \cdots$.

29) Was wird aus dem Resultate von Nr. 28, α) wenn $x = 1$, β) wenn $x = 4$, $y = 0{,}1$ gesetzt wird?

30) α) $\sqrt{82}$; β) $\sqrt{101}$; γ) $\sqrt{48}$ nach Nr. 28 α) zu berechnen.

31) α) $\sqrt{x^2+x+1}$; β) $\sqrt{x^2-x-1}$. (5 Glieder.)

32) Die Quadratwurzel aus $x^4(a^2-2ab+b^2)+x^3(2a^3-2b^3)+x^2(3a^4+3a^2b^2+3b^4)+x(2a^5+2a^4b+2a^3b^2-2a^2b^3-2ab^4-2b^5)+a^6-2a^3b^3+b^6$ zu ziehen.

§. 52.

Kubikwurzel aus gemeinen Zahlen.

I. $\sqrt[3]{a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3} = a \pm b$.

II. $\sqrt[3]{a^3 \pm k} = a \pm \frac{k}{3a^2}$, wenn k gegen a sehr klein ist.

1) Zwischen welchen Einern liegen die Kubikwurzeln aus 39, 813, 344, 578, 124, 7, 215, 98?

2) Zwischen welchen Zehnern liegen die Kubikwurzeln aus 5000, 317000, 21600, 871356, 612375, 511999?

3) Zwischen welchen Hunderten liegen die Kubikwurzeln aus 6000000, 718000000, 385321986, 72900000, 34378512, 9798766?

4) Wie wird eine Zahl, aus der die Kubikwurzel ausgezogen werden soll, in Classen abgetheilt?

5) Wie wird aus einer Zahl die Kubikwurzel gezogen?

Aus folgenden Zahlen (Nr. 6 bis Nr. 18) soll die Kubikwurzel ausgezogen werden:

6) α) 74088; β) 389017; γ) 493039; δ) 681472; ε) 912673. Reste: 0.

7) α) 18400234; β) 13998034; γ) 10360768 δ) 8121154; ε) 3308554; ζ) 3112744. (Alle Wurzeln machen mit den Resten 754 aus.)

8) α) 27027010235; β) 29704594907; γ) 125676216963; δ) 131096513234; ε) 313323546322. Reste: 1234.

*) Anleitung: Man dividire α) in 1.

9) α) 1371700969396; β) 216086087434268270338. R.: 8765.
10) α) 204409331068643; β) 527672382059550874112. R.: 0.
11) α) 1881640295202816; β) 371992652887607604559. R.: 0.
12) α) 125068187394966089429; β) 999970000299999. R.: 0.
13) α) 371,694959; β) 934,007359375; γ) 0,588480472; δ) 0,001771561; ε) 0,000007880599. Reste: 0.
14) α) 2; β) 3; γ) 5. Aufl.: α) 1,259921; β) 1,442949; γ) 1,709975.
15) α) 2515123; β) 38272712; γ) 342853020998. (3 Decimalstellen.)
16) α) 7988,005998; β) 3,2; γ) 5,12; δ) 0,27; ε) 0,0125. (4 Decimalstellen.)
17) α) $\frac{426957777}{107850176}$; β) $\frac{343.389017}{729 \cdot 912673}$; γ) $381\frac{5}{64}$; δ) $7558\frac{197}{512}$.
18) α) $\frac{5}{27}$; β) $\frac{7}{1728}$; γ) $\frac{7}{11}$: δ) $7\frac{8}{9}$; ε) $1\frac{9}{25}$.
Aufl.: α) 0,569992; β) 0,159411; γ) 0,8601384; δ) 1,990697; ε) 1,107931.
19) α) $10^{\frac{2}{3}}$; β) $(\frac{1}{11})^{-\frac{2}{3}}$; γ) $(\frac{2}{3})^{-\frac{2}{3}}$; δ) $0,007^{-\frac{1}{3}}$.
Aufl.: α) 4,641589; β) 4,946087; δ) 1,31037; δ) 5,22758.
20) α) $\sqrt[3]{(\sqrt{24137569})}$; β) $\sqrt[6]{1544804416}$. Reste: 0.
21) $\sqrt[6]{3462825991689 \times 8990607867641856}$. Aufl.: 56088.
22) $\sqrt[9]{322687697779 \times 794280046581}$. Aufl.: 399.
23) $\sqrt[27]{11925332925124920165591950081 17}$. Aufl.: 13.
24) $\sqrt[12]{491258904256726154641^5}$. Aufl.: 418195493.
25) α) $\sqrt[3]{512,0384}$; β) $\sqrt[3]{1728,093024}$. (Nach Formel II.)
26) Wenn $\sqrt[3]{2498846293} = 1357$, wie groß ist $\sqrt[3]{2501780000}$? (3 Decimalstellen.)
27) $3+\sqrt[3]{\left\{3+\sqrt[3]{\left(3+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{4,6717}}\right)}\right\}}$. (4 Decimalstellen.)
28) Wie groß ist $100+\sqrt[3]{a}$, wenn $a = 100+\sqrt[3]{b}$, $b = 100+\sqrt[3]{c}$, $c = 100+\sqrt[3]{d}$, $d = 100+\sqrt[3]{e}$ und $e = 100$ gesetzt wird? (4 St.)

29) Ein rechtwinkeliger Stein von 8 Fuß 6 Zoll Höhe, 3 Fuß 4 Zoll Breite, 2 Fuß 7 Zoll Dicke hat mit einem kubischen Steine von derselben Materie gleiches Gewicht. Wie groß ist jede Seite des kubischen Steines? Aufl.: 4 Fuß 2,1965 Zoll.

30) α) Wie groß ist die Seite eines Würfels, der doppelt so groß ist, als ein anderer Würfel von 3 Fuß 4 Zoll Höhe*)? β) Nach einer Sage ließ der König Minos seinem Sohne Glaucus ein Grabmal in Form eines Würfels errichten. Da die Bauleute dasselbe 100 Fuß lang, breit und hoch gemacht hatten, fand er es zu klein und verlangte, daß es noch einmal so groß sollte gemacht werden. Wie groß war also jede Seite des Würfels zu nehmen?

Antw.: α) 4 Fuß 2,396 Zoll; β) 125 Fuß 11,905 Zoll.

31) Wie groß ist die Seite eines Würfels, der so groß ist, als drei Würfel zusammen, von denen der erste zur Höhe 2 Fuß 3 Zoll, der zweite 5 Fuß 6 Zoll und der dritte 8 Fuß 7 Zoll hat?

Aufl.: 9 Fuß 3,866 Zoll.

32) Die unbekannten Glieder folgender Proportion zu berechnen: $37245453 : x^2 = x : 164923857$.

Aufl.: $x^2 = 33540625881$; $x = 183141$.

33) Der Radius einer Kugel, deren Inhalt p ist, ist gleich $\sqrt[3]{0{,}23873p}$. Wie groß ist der Radius einer Kugel, welche 48 Kubikzoll Inhalt hat? Aufl.: 2,254 Zoll.

34) Die spanischen Colonieen in America haben seit ihrer Entdeckung bis 1803, in 311 Jahren, gemäß Bestimmung von Alexander von Humboldt 503978168 preußische Mark Silber geliefert. Wenn nun ein preußischer Kubikfuß Silber 1423 preußische Mark wiegt, wie groß würde die Höhe eines Würfels von diesem seit 311 Jahren gewonnenen Silber sein?

Antw.: 70 Fuß 9,0078 Zoll?

35) Alexander von Humboldt schätzt die Gold-Production im spanischen America und in Brasilien, von 1492 bis 1803, zu 9756160 preußische Mark. Welchen Durchmesser würde eine Kugel von diesem Golde haben, vorausgesetzt, daß ein Kubikfuß Gold 2542 preußische Mark schwer ist? (S. Beispiel 33.)

Antw.: 19 Fuß 5,102 Zoll.

---

*) Delische Aufgabe. Eine Pest in Griechenland soll nämlich veranlaßt haben, das Orakel in Delos zu befragen, was zu thun sei. Das Orakel soll die Antwort ertheilt haben, den Altar des Apollo, welcher ein Würfel war, zu verdoppeln. Da man dieses nicht zu bewerkstelligen wußte, habe man bei Plato dazu die Anweisung gesucht.

§. 53.

Kubikwurzel aus zusammengesetzten algebraischen Ausdrücken.

Aus den folgenden Ausdrücken Nr. 1 bis 19 die Kubikwurzel zu ziehen:

1) α) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$; β) $27x^3-189x^2+441x-343$.

2) $1728x^6+1728x^4y^3+576x^2y^6+64y^9$.

3) $\frac{8}{27}a^3-1\frac{1}{15}a^2b+1\frac{7}{25}ab^2-\frac{64}{125}b^3$. Aufl.: $\frac{2}{3}a-\frac{4}{5}b$.

4) $\dfrac{27a^6b^6}{125m^3}-\dfrac{24}{25}a^3b^2m+1\frac{19}{45}\dfrac{m^5}{b^2}-\dfrac{512}{729}\dfrac{m^9}{a^3b^6}$.

5) $31{,}255875x^6y^{-12}-81{,}860625y^{-6}+71{,}465625x^{-6}-20{,}796875x^{-12}y^6$. Aufl.: $3{,}15x^2y^{-4}-2{,}75x^{-4}y^2$.

6) $0{,}000015625a^{-6}b^{-9}-0{,}00075a^{-8}b^{-11}+0{,}012a^{-10}b^{-13}-0{,}064a^{-12}b^{-15}$. Aufl.: $0{,}025a^{-2}b^{-3}-0{,}4a^{-4}b^{-5}$.

7) $\dfrac{a^3b^6}{8c^9}x^6-\dfrac{b}{2c^5}x^5+\dfrac{2}{3a^3b^4c}x^4-\dfrac{8c^3}{27a^6b^9}x^3$.

8) α) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3+3x^2z-6xyz+3y^2z+3xz^2-3yz^2+z^3$. Aufl.: $x-y+z$.

β) $8x^6-36x^5+114x^4-207x^3+285x^2-225x+125$.

γ) $1+121y^8+7y^4-72y^{10}+16y^{12}+10y^2-82y^6$.

9) $125x^6-525x^5y+60x^4y^2+1547x^3y^3-108x^2y^4-1701xy^5-729y^6$. Aufl.: $5x^2-7xy-9y^2$.

10) $$\frac{a^3b^3}{c^3}x^9+\frac{3a^3b}{c}x^8+3\left(\frac{a^3c}{b}-\frac{ab^3}{c}\right)x^7+\left(\frac{a^3c^3}{b^3}-6abc\right)x^6-3\left(\frac{ac^3}{b}-\frac{b^3c}{a}\right)x^5+3\frac{bc^3}{a}x^4-\frac{b^3c^3}{a^3}x^3.$$

11) α) $\frac{1}{125}x^3-\frac{1}{50}x^2y+\frac{1}{60}xy^2-\frac{1}{216}y^3+\frac{3}{175}x^2z-\frac{1}{35}xyz+\frac{1}{84}y^2z+\frac{3}{245}xz^2-\frac{1}{98}yz^2+\frac{1}{343}z^3$. Aufl.: $\frac{1}{5}x-\frac{1}{6}y+\frac{1}{7}z$.

β) $64y^{12}-576y^{10}+2160y^8-4320y^6+4860y^4-2916y^2+729$.

12) $a^{-6m+12}-6a^{-7m+3}+12a^{-8m-6}-8a^{-9m-15}$.

13) $x^{2\frac{1}{4}}-3x^{2\frac{1}{6}}+3x^{2\frac{1}{12}}-x^2$. Aufl.: $x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{2}{3}}$.

14) $12\frac{19}{27}x^7-27\frac{2}{3}x^3+19\frac{4}{9}x^{-1}-4\frac{17}{27}x^{-5}$.

15) $a+\sqrt[3]{27a^2b}+\sqrt[3]{27ab^2}+b$.

16) $-a\sqrt{-a}+3a\sqrt{-b}-3b\sqrt{-a}+b\sqrt{-b}$.

17) $m^3\sqrt{-x}-3m^2n\sqrt[3]{-x}\sqrt[6]{-y}+3mn^2\sqrt[6]{-x}\sqrt[3]{-y}-n^3\sqrt{-y}$.

18) $a^3-3a^2\sqrt{-2}-6a+2\sqrt{-2}$.

19) $m^3-3m^2n\sqrt{-1}-3mn^2+n^3\sqrt{-1}+3m^2p\sqrt{-1}+6mnp-3n^2p\sqrt{-1}-3mp^2+3np^2\sqrt{-1}-p^3\sqrt{-1}$.

20) Die unvollständige Kubikwurzel $\sqrt[3]{x^3 \pm y}$ zu entwickeln.

Aufl.: $x \pm \frac{1}{3}\frac{y}{x^2} - \frac{1}{9}\frac{y^2}{x^5} \pm \frac{5}{81}\frac{y^3}{x^8} - \frac{10}{243}\frac{y^4}{x^{11}} \pm \frac{22}{729}\frac{y^5}{x^{14}} \ldots$

21) Eben so: α) $\sqrt[3]{x^3+1}$; β) $\sqrt[3]{x^3-1}$; γ) $\sqrt[3]{1-y}$.

22) Nach Nr. 20 zu berechnen: α) $\sqrt[3]{27\frac{1}{5}}$; β) $\sqrt[3]{729\frac{5}{6}}$; γ) $\sqrt[3]{63,1}$; δ) $\sqrt[3]{342\frac{1}{8}}$. Aufl.: α) 3,00738919; β) 9,0034289486; γ) 3,981162; δ) 6,994043.

23) $\sqrt[3]{x^3-x^2+x-1}$ zu entwickeln. (4 Glieder.)

§. 54.

Ausziehen höherer Wurzeln aus gemeinen Zahlen und aus zusammengesetzten algebraischen Ausdrücken.

1) Wie viel Ziffern kann die vierte, fünfte, sechste, n-te Potenz einer ein-, zwei-, drei-, vier-, x-zifferigen Zahl enthalten?

2) Zwischen welchen Einern liegen die vierten Wurzeln aus 80, 82, 200, 1297, 600, 9998, 1295, 6560?

3) Zwischen welchen Einern liegen die fünften Wurzeln aus 1023, 3000, 40000, 32100, 80000, 242?

4) Zwischen welchen Einern liegen die sechsten Wurzeln aus 46656, 4097, 888888, 111111, 555555?

5) Zwischen welchen Einern liegen die siebenten Wurzeln aus 16300, 2097152, 4782970, 279999?

6) Zwischen welchen Zehnern liegen die vierten Wurzeln aus 30000, 7650000, 190000, 33333333, 78787878?

7) Zwischen welchen Zehnern liegen die fünften Wurzeln aus 24500000, 1983598764, 100000000, 6807309876?

8) Zwischen welchen Hunderten liegen die fünften Wurzeln aus 2410000000000, 227890000000000, 10008756439761, 590488888878979, 987654321987654?

9) Wie viel Ziffern hat die vierte, wie viel die fünfte Wurzel einer ein-, zwei-, drei- u. s. w. n-zifferigen Zahl?

10) Wie viel Ziffern hat die $x$te Wurzel einer n-zifferigen Zahl?

11) Wie wird eine Zahl, aus der die vierte, fünfte, sechste u. s. w. $x$te Wurzel gezogen werden soll, in Classen abgetheilt?

12) Wie wird aus einer Zahl die vierte, fünfte, sechste u. s. w. x-te Wurzel gezogen?

13) Aus α) 16807; β) 312500000; γ) 5904900000; δ) 418195493; ε) 4984209207; ζ) 95099,00499 die fünfte Wurzel zu ziehen. (Reste: 0.)

14) Eben so aus: α) 5798839393557; β) 900897818976; γ) 44840334375; δ) 0,002817036000549; ε) 3057630600,02949.

Aufl.: α) 357; β) 246; γ) 135; δ) 0,309; ε) 78,9.

15) Eben so aus:
α) 3034449277159l158368; β) 285369179871447968; γ) 19372819598708049; δ) 4601498007398557.

Aufl.: α) 7878; β) 3098; γ) 1809; δ) 1357.

16) Eben so aus: $4\frac{57297657}{90224459}$. Aufl.: $1\frac{14}{39}$.

17) Eben so aus: α) 85796,4328759; β) 1,32.

Aufl.: α) 9,6982...; β) 1,05709....

18) Eben so aus $\frac{2}{3}$ und aus $\frac{17}{19}$. Aufl.: 0,9221...; 0,978....

19) Aus α) 94931877133; β) 739056281869446093; γ) 2347652533423907989l7; δ) 4357186184021382204544 die siebente Wurzel zu ziehen.

Aufl.: α) 37; β) 357; γ) 813; δ) 1234.

20) Eben so aus: α) 123456789; β) 99,9; γ) $\frac{4}{7}$.

Aufl.: α) 14,319....; β) 1,9304..; γ) 0,92316.....

21) $10^{0,1}$. Aufl.: $\sqrt{\sqrt[5]{10}} = \sqrt{1,5848932} = 1,2589254$.

22) $10^{0,01}$. A.: 1,0232930. 23) $10^{0,001}$. A.: 1,0023052.

24) $10^{0,0001}$. Aufl.: 1,00023029.

25) $10^{0,00001}$. Aufl.: 1,00002303.

26) $10^{0,000001}$. Aufl.: 1,00000230.

27) α) $10^{0,357}$; β) $10^{0,30103}$; γ) $10^{0,148}$; δ) $10^{0,0023}$.

28) Was kann man für $\sqrt[5]{a^5+k}$, $\sqrt[6]{a^6+k}$ und $\sqrt[10]{a^{10}+k}$ näherungsweise setzen, wenn k im Vergleiche zu a sehr klein ist?

29) α) $10^{0,000004}$, β) $10^{0,000002}$ zu berechnen, wenn $10^{0,00002} = 1,00004605$.

30) $(81a^4+216a^3b+216a^2b^2+96ab^3+16b^4)$ zur Potenz $\frac{1}{4}$.

31) Eben so: $625x^4+9600x^2y^2+4096y^4-10240xy^3-4000x^3y$.

32) $(228886641m^8n^4-3394221408m^7n^5+18875182464m^6n^6-46650857472m^5n^7+43237380096m^4n^8)$ zur Potenz $\frac{1}{4}$.

33) Die fünfte Wurzel aus $16807\frac{a^{10}}{b^5} - 108045\frac{a^6}{b^3} + 277830\frac{a^2}{b} - 357210\frac{b}{a^2} + 229635\frac{b^3}{a^6} - 59049\frac{b^5}{a^{10}}$ zu ziehen.

34) Eben so aus: $\frac{32}{243}m^{-5}n^{10} + \frac{20}{27}m^{-1}n^4 + 1\frac{2}{3}m^3n^{-2} + 1\frac{7}{8}m^7n^{-8} + 1\frac{7}{128}m^{11}n^{-14} + \frac{243}{1024}m^{15}n^{-20}$.

35) Aus $32a^3 - 240a^3\sqrt[5]{a} + 720a^3\sqrt[5]{a^2} - 1080a^3\sqrt[5]{a^3} + 810a^3\sqrt[5]{a^4} - 243a^4$ die fünfte Wurzel zu ziehen.

36) Vier Glieder der unvollständigen vierten Wurzel aus x^4+y zu berechnen. Aufl.: $x+\frac{1}{4}x^{-3}y-\frac{3}{32}x^{-7}y^2+\frac{7}{128}x^{-11}y^3\ldots$

37) Eben so: vier Glieder der unvollständigen fünften Wurzel aus x^5+u. Aufl.: $x+\frac{1}{5}x^{-4}u-\frac{2}{25}x^{-9}u^2+\frac{6}{125}x^{-14}u^3\ldots$

38) $\sqrt[4]{x^4-x^3+x^2-x+1}$ zu entwickeln. (4 Glieder.)

39) Eben so: $\sqrt[5]{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}$. (3 Glieder.)

40) Zu berechnen: $\sqrt[5]{243,1}$. Aufl.: 3,00024.

41) Eben so: α) $\sqrt[5]{1023,68}$; β) $\sqrt[5]{16805,81}$.

§. 55.

Verwandlung der Summe zweier Quadratwurzeln in eine Quadratwurzel, und umgekehrt.

I. $\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2(a\pm\sqrt{a^2-b})}$.

II. $\sqrt{m\pm\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{m^2-n}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{m^2-n}}$.

In eine Wurzel zu verwandeln:

1) $\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}$. Aufl.: $\sqrt{10}$.

2) $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$.

3) $\sqrt{6+\sqrt{11}} + \sqrt{6-\sqrt{11}}$.

4) $\sqrt{37+\sqrt{280}} \pm \sqrt{37-\sqrt{280}}$. Aufl.: $2\sqrt{35}$ und $2\sqrt{2}$.

5) $\sqrt{3\sqrt{10}+9} \pm \sqrt{3\sqrt{10}-9}$. Aufl.: $\sqrt{6(\sqrt{10}\pm 1)}$.

6) $\sqrt{11+2\sqrt{10}} \pm \sqrt{11-2\sqrt{10}}$. Aufl.: $2\sqrt{10}$ und 2.

7) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} + \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$. Aufl.: $2\sqrt{a}$ u. $2\sqrt{b}$.

8) $\sqrt{8x^2+2x+8x\sqrt{x}} \pm \sqrt{8x^2+2x-8x\sqrt{x}}$.

9) α) $\sqrt{m+\sqrt{-n}} \pm \sqrt{m-\sqrt{-n}}$;

β) Was wird aus der Formel für $m = 1$, $n = 1$?

10) $\sqrt{7+\sqrt{-15}} \pm \sqrt{7-\sqrt{-15}}$. Aufl.: $\sqrt{30}$ und $\sqrt{-2}$.

11) $\sqrt{11+5\sqrt{-3}} \pm \sqrt{11-5\sqrt{-3}}$. Aufl.: $5\sqrt{2}$ u. $\sqrt{-6}$.

12) $\sqrt{2\sqrt{-14}+13} \pm \sqrt{2\sqrt{-14}-13}$.

13) $\sqrt{a-b+2\sqrt{-ab}} \pm \sqrt{a-b-2\sqrt{-ab}}$.

14) $\sqrt{m+n+\sqrt{5m^2+10mn+5n^2}} + \sqrt{m+n-\sqrt{5m^2+10mn+5n^2}}$.

Folgende Wurzeln in die Summe **zweier** Wurzeln umzuändern:

15) $\sqrt{31+\sqrt{600}}$. Aufl.: $\pm(5+\sqrt{6})$.

16) $\sqrt{\frac{9}{8}-\sqrt{\frac{9}{8}}}$, Aufl.: $\pm(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{6})$.

17) $\sqrt{11-3\sqrt{8}}$. Aufl.: $\pm(3-\sqrt{2})$.

18) $\sqrt{100-2\sqrt{2499}}$. Aufl.: $\pm(\sqrt{51}-7)$.

19) $\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$. 20) $\sqrt{9m+25n-30\sqrt{mn}}$.

21) α) $\sqrt{2p\pm 2\sqrt{p^2-q^2}}$; β) $\sqrt{2p^2+q^2+2p\sqrt{p^2+q^2}}$.

22) $\sqrt{\sqrt{32}+\sqrt{24}}$. 23) $\sqrt{\sqrt{63}-\sqrt{35}}$. 24) $\sqrt{\sqrt{27}-2\sqrt{6}}$.

25) α) $\sqrt{\sqrt{1573}+4\sqrt{78}}$; β) $\sqrt{\sqrt{18}-4}$.

26) α) $\sqrt{m-\sqrt{-n}}$; β) $\sqrt{7+\sqrt{-15}}$.

27) α) $\sqrt{4\sqrt{-6}-2}$; β) $\sqrt{12+5\sqrt{-1}}$; γ) $\sqrt{-3-\sqrt{-16}}$.

28) $\sqrt[4]{-1}$. Anleit.: $\sqrt{0+\sqrt{-1}}$ u. s. w. 29) $\sqrt{-\sqrt{-1}}$.

30) $\sqrt{a^2+2x\sqrt{a^2-x^2}}$. 31) $\sqrt{a^2+5ax-2a\sqrt{ax+4x^2}}$.

32) $\sqrt{6+\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{24}}$. Aufl.: $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

33) $\sqrt{\sqrt[3]{4000}+\sqrt[6]{221184}+\sqrt[6]{1024000}+\sqrt[6]{3456000}}$.

Aufl.: $\sqrt{\sqrt[3]{4}(10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15})} =$

$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}} = \sqrt[3]{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

D. Logarithmen.

§. 56.

Begriff eines Logarithmus.

Ist $m^x = p$, so heißt der Exponent x in Bezug auf p und m: „der Logarithmus von p zur Basis m". Die Bezeichnung ist:

$$x = {}^m log\ p,$$

was kurz „m-Logarithmus von p" ausgesprochen wird. m heißt die Basis p der Numerus oder der Logarithmand. ${}^{10}log\ a$ wird durch $log\ vulg.\ a$ oder schlechtweg durch $log\ a$ ausgedrückt. Ist die Basis eine Zahl e, welche man aus der §. 30 Nr. 27 angegebenen, aber ins Unendliche fortgehenden, Reihe erhält, wenn in derselben $x = 1$ gesetzt wird und welche $= 2{,}718281828459\ldots$ ist, so heißt der Logarithmus natürlicher. Wie in der höheren Analysis gezeigt wird, bietet sich diese Basis am natürlichsten zur Berechnung der Logarithmen dar. Statt ${}^e log\ a$ schreibt man $log\ nat.\ a$ oder kurz $l\,a$.

$$\text{I. } b^{{}^b log\ n} = n. \quad \text{II. } {}^b log\ (b^x) = x. \quad \text{III. } {}^b log\ b = 1.$$

(Vergl. §§. 8, 17 und 41.)

1) Was versteht man unter Logarithmus einer gegebenen Zahl zu einer gegebenen Basis?

2) Zu den Zahlen 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 die Logarithmen zur Basis 2, oder die Zwei-Logarithmen zu suchen.

3) Wie heißen die Logarithmen der Zahlen 9, 81, 729, 6561, 59049 α) zur Basis 3, β) zur Basis 9?

4) Wie heißen die Logarithmen von 4096 zur Basis α) 2, β) 4, γ) 8, δ) 16, ε) 64, ζ) 4096?

5) Zu berechnen: α) ${}^{123}log\ 228886641$;

β) ${}^{111}log\ 207616015289871$.

6) Eben so: α) ${}^{5}log\ 15625$; β) ${}^{25}log\ 15625$; γ) ${}^{125}log\ 15625$.

7) Eben so: ${}^{10}log\ 10$, ${}^{10}log\ 100$, ${}^{10}log\ 1000$, ${}^{10}log\ 10000$.

8) Wie groß ist der Logarithmus einer Zahl, welche mit 1 und 17 Nullen geschrieben wird, wenn die Basis 10 ist?

9) Zu welcher Potenz muß die Basis a erhoben werden, damit 1 herauskommt? Wie groß ist ${}^{n}log\ 1$, oder der n-Logarithmus von 1?

10) Wie groß ist $log\ 1$ für die Basis 1 oder 2, 3, 4, 5, 6?

11) Wie groß ist $log\ \frac{16}{81}$ zur Basis $\frac{2}{3}$? wie groß ist $log\ 4\frac{52}{243}$ zur Basis $\frac{4}{3}$? wie groß $log\ 0{,}0000157609$ zur Basis 0,00397?

12) Wie groß sind $log\ \frac{1}{2}$, $log\ \frac{1}{4}$, $log\ \frac{1}{8}$, $log\ \frac{1}{16}$, $log\ \frac{1}{32}$ zur Basis 2?

13) Wie groß sind α) $log\ \frac{9}{25}$, β) $log\ \frac{27}{125}$, γ) $log\ \frac{81}{625}$ zur Basis $\frac{5}{3}$?

14) Wie groß ist $log\ 0{,}015625$ zur Basis 4?

15) Wie groß ist $log\ 243$ zur Basis $\frac{1}{3}$?

16) Zu berechnen: ${}^{36}log\ 6$, ${}^{512}log\ 8$, ${}^{8}log\ 32$, ${}^{8}log\ 4$, ${}^{16}log\ 8$.

17) Eben so: α) $log\ \frac{1}{5}$ zur Basis 125; β) $log\ \frac{2}{3}$ zur Basis $3\frac{3}{8}$; γ) $log\ 1\frac{7}{9}$ zur Basis $\frac{27}{64}$; δ) $log\ \frac{9}{16}$ zur Basis $4\frac{52}{243}$.

18) Zwischen welchen ganzen Zahlen liegen die Logarithmen der Zahlen 5, 10, 32, 82, 215, 713, 1295, 6562, wenn die Basis 6, zwischen welchen, wenn die Basis 9 ist?

19) Zwischen welchen ganzen Zahlen liegen die Logarithmen der Zahlen 6, 48, 342, 1700, 11906, 83348 zur Basis 5 oder 7?

20) Zwischen welchen ganzen Zahlen liegen die Logarithmen der Zahlen 18, 271, 563, 1827, 13749 zur Basis 10?

21) Zwischen welchen ganzen Zahlen liegt der Logarithmus einer 2-, 3-, 7-, 11- u. s. w. n-zifferigen Zahl, wenn die Basis 10 ist?

22) Zwischen welchen negativen ganzen Zahlen liegen die Logarithmen von 0,02, 0,00197, 0,00002876 zur Basis 10? Zwischen welchen, wenn den Ziffern der Decimalstellen m Nullen vorangehen?

23) Zwischen welchen negativen ganzen Zahlen liegt der Logarithmus von $\frac{13}{579}$ zur Basis 3?

24) Wie groß ist für die Basis -6 der Logarithmus von 36?

25) Wie groß ist $\log(-343)$ zur Basis -7?

26) Welcher Zahl ist $2^{{}^2\log 512}$, welcher ${}^3\log(3^7)$ gleich?

27) Welcher Zahl ist $\log(a^x)$, welcher $\log(a^x \cdot a^y)$, welcher $\log(a^n : a^m)$ zur Basis a gleich?

28) Welcher Zahl ist $\log(a^m)^n$ α) zur Basis a^n, β) zur Basis a^m und γ) zur Basis a^{mn} gleich?

29) α) $2^{{}^{10}\log 3} \cdot 5^{{}^{10}\log 3}$, β) ${}^n\log(n^x \cdot n^y)$ zu berechnen.

30) Wenn $\log 7$ zur Basis 2,71828 gleich 1,94591 ist, und $2{,}71828 = 10^{0{,}43429}$, wie groß ist $\log 7$ zur Basis 10?

31) Wie groß ist ${}^n\log n$?

32) Läßt sich $\log a$ bestimmen, wenn die Basis 1 ist?

33) α) ${}^1\log 1$, β) ${}^a\log 1$ zu bestimmen.

34) Was versteht man unter Logarithmen-System?

35) Wie wird ${}^m\log b$ im Vergleich zu 0, je nachdem $m \gtrless 1$ und $b \gtrless 1$ ist?

36) Haben negative Zahlen einen Logarithmus, wenn die Basis positiv ist?

37) Wie groß ist α) $\log 64$, β) $\log 512$ zur Basis -8?

38) Wenn die Basis eines Logarithmen-Systems negativ ist, haben alsdann alle Zahlen ihre zugehörigen Logarithmen?

39) Eignet sich eine negative Zahl als Basis eines Logarithmen-Systems?

40) Eignet sich 1 als Basis eines Logarithmen-Systems?

41) Welche Logarithmen werden gemeine oder brigg'sche, welche natürliche genannt?

42) Welchen Vorzug haben die gemeinen Logarithmen?

43) Welche Logarithmen versteht man, wenn die Basis nicht genannt wird?

44) Wie groß ist $\log 10$, $\log 100$, $\log 1000$, $\log 10000$?

45) Was versteht man unter Kennziffer und was unter Mantisse eines Logarithmus?

46) Wenn 2 der Logarithmus der Zahl 568516 ist, wie groß ist die Basis?

47) Wenn 3 der Logarithmus der Zahl 1879080904 ist, wie groß ist die Basis?

48) Wie groß ist die Basis, wenn der Logarithmus der Zahl $20{,}08552 = 3$ ist?

49) Von welcher Zahl ist 2 der Logarithmus, wenn die Basis 10, von welcher, wenn die Basis 2,7182818 ist?

50) Von welcher Zahl ist 5 der Logarithmus, wenn die Basis $\frac{2}{5}$ ist?

51) Von welcher Zahl ist -6 der Logarithmus, wenn die Basis $\frac{1}{7}$ ist?

52) Von welcher Zahl ist n der Logarithmus, wenn die Basis $\sqrt[n]{a}$ ist?

53) Welche gleiche Ausdrücke erhält man aus $\left(n^{{}^{n}log\ x}\right)^{{}^{n}log\ y}$, wenn man den obigen Satz I. sowohl, als den Potenzsatz $(a^p)^q = (a^q)^p$ anwendet?

§. 57.

Logarithmische Sätze.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I.} & log\ (a \cdot b) & = log\ a + log\ b. \\ \text{II.} & log\ (a : b) & = log\ a - log\ b. \\ \text{III.} & log\ (a^n) & = n\ log\ a. \\ \text{IV.} & log\ \sqrt[n]{a} & = \frac{1}{n} log\ a. \end{array}\right\} \text{für jede beliebige Basis.}$$

V. ${}^{x}log\ a \cdot {}^{n}log\ x = {}^{n}log\ a.$ VI. ${}^{x}log\ y \cdot {}^{y}log\ x = 1.$

1) ${}^{2}log\ 64 = 6$, ${}^{2}log\ 128 = 7$; wie groß ist ${}^{2}log\ (64 \cdot 128)$?

2) Wenn für die Basis 2,7182818 $log\ 3 = 1{,}0986123$ und $log\ 7 = 1{,}9459101$, wie groß ist $log\ 21$ zu derselben Basis?

3) Wenn für die Basis 3,1415926 der Logarithmus von $9 = 1{,}9194258$ und der Logarithmus von $11 = 2{,}0947253$, wie groß ist für dieselbe Basis $log\ 99$?

4) $log\ 2 = 0{,}30103$, $log\ 3 = 0{,}47712$. Wie groß ist $log\ 6$?

5) $log\ 13 = 1{,}11394$, $log\ 17 = 1{,}23045$. Wie groß ist $log\ 221$?

6) Wenn $log\ 7 = 0{,}84510$, $log\ 9 = 0{,}95424$ und $log\ 11 = 1{,}04139$, wie groß sind die Logarithmen von 63, 77, 99, 693?

7) Wie groß ist $log\ (2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11)$?

8) Von 20, 200, 2000, 20000 die Logarithmen anzugeben.

9) Ebenso von 13, 130, 1300, 13000, 1300000, 13000000000.

10) $log\ (a \cdot 10^n)$.

11) $\alpha)$ $log\ nat.\ (ez)$; $\beta)$ $log\ nat.\ (ze^n)$.

12) $log\ (100abcd)$.

13) $\alpha)$ $log\ (p+q)\ (r+s)$; $\beta)$ $log\ (m^2-n^2)$.

14) $log\ (1409 : 654)$ anzugeben, wenn $log\ 1409 = 3{,}14891$ und $log\ 654 = 2{,}81558$ ist.

15) Zu berechnen: $\alpha)$ $log\ \frac{11}{3}$; $\beta)$ $log\ \frac{17}{11}$; $\gamma)$ $log\ 1\frac{4}{9}$; $\delta)$ $log\ 1\frac{2}{11}$.

16) $log\ 5$ und $log\ 25$. (Siehe Nr. 4.)

17) $log\ [(abc) : (de)]$. 18) $log\ [(a+b) : (c-d)]$.

19) $\alpha)$ $log\ \frac{1}{7}$; $\beta)$ $log\ \frac{1}{11}$; $\gamma)$ $log\ \frac{1}{a}$ auszuführen.

20) Wie groß ist der Logarithmus eines Quotienten, dessen Dividend 1 ist?

21) *log* 0,1, *log* 0,01, *log* 0,001, *log* 0,0001, *log* 0,00000001.

22) *log* 0,7, *log* 0,07, *log* 0,007, *log* 0,0007 u. *log* 0,0000007.

23) $\log (a : 10^n)$. 24) $\log \frac{11}{17}$. Aufl.: $\overline{1},81094$.

25) Wie läßt sich der Logarithmus einer Zahl, wenn er negativ ist, so umändern, daß die Kennziffer allein negativ, die Mantisse dagegen positiv wird? Die Logarithmen in Nr. 22 sollen in andere, mit negativen Kennziffern und positiven Mantissen, umgeändert werden.

26) Was bedeutet das Zeichen Minus über der Kennziffer eines Logarithmus?

27) Von $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{130}$, $\frac{9}{1100}$, $\frac{11}{1300000}$, $\frac{13}{17 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}$ die Logarithmen so anzugeben, daß die Mantissen positiv und die Kennziffern negativ werden.

28) Zu berechnen: $\log \frac{11}{3} + \log \frac{3}{13}$. Aufl.: $\overline{1},92745$.

29) $\log \frac{7}{170} + \log \frac{17}{90}$. Aufl.: $\overline{3},89086$.

30) $\log \frac{2}{17} + \log \frac{11}{7} + \log \frac{7}{1300} + \log \frac{17000}{11.13}$.

31) $\log \frac{2}{13} + \log \frac{9}{2000} + \log \frac{11}{3000} + \log \frac{17}{700}$.

32) $\log \frac{7000}{17} - \log \frac{13}{900}$. Aufl.: 4,45495.

33) $\log \frac{11}{2000} - \log \frac{300}{11}$. Aufl.: $\overline{4},30463$.

34) α) $\log \frac{6}{7} - \log \frac{2}{7}$; β) $\log \frac{2}{3} - \log \frac{3}{4}$.

35) $\log \frac{1}{2} - \log \frac{2}{3} - \log \frac{3}{7} - \log \frac{7}{9} - \log \frac{9}{11} + \log \frac{11}{4}$. Aufl.: 0,87866.

36) α) $\log (7^5)$; β) $\log (11^9)$; γ) $\log (17^3)$.

37) Wie groß sind die Logarithmen von 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, wenn $\log 3 = 0,4771213$ ist?

38) Wie groß ist α) $\log [(a+b)^{x+y}]$; β) $\log [a^x b^y]$?

39) Wie groß ist $\log (3^{10})$ zur Basis 2,7182818? (S. Nr. 2.)

40) $\log [(17^5 13^{14}) : (11^3 \cdot 9^2 \cdot 7)]$ Aufl.: 15,86966.

41) α) $\log 11^{-7}$; β) $\log (\frac{13}{7})^{-3}$. A.: α) $\overline{8},71027$; β) $\overline{1},19348$.

42) α) $\log 13^{\frac{5}{11}}$; β) $\log \left(17^{\frac{4}{7}} \cdot 9^{\frac{4}{11}}\right)$.

43) α) $\log \left(11^{-\frac{2}{5}} \cdot 9^{-\frac{3}{11}}\right)$; β) $\log \left(9^{-\frac{3}{4}} : 10^{-\frac{5}{9}}\right)$.
Aufl.: α) $\overline{1},323197$; β) $\overline{1},83988$.

44) $\log \{1 : (13^{-5} \cdot 17^{-10})\}$. Aufl.: 17,87420.

45) $\log (\frac{3}{7})^5$. Aufl.: $\overline{2},16010$.

46) $\log \left(\frac{13}{9 \cdot 17}\right)^7$. Aufl.: $\overline{8},50475$.

47) $\log \left(\frac{9}{11 \cdot 13 \cdot 17}\right)^{17}$. Aufl.: $\overline{42},66382$.

48) $\log \left[\left(\frac{2}{7 \cdot 13}\right)^{11} \cdot \frac{9^{13}}{7^{25}}\right]$. Aufl.: $\overline{10},48417$.

49) α) $\log [(p+q)^x : (r+s)^{y-z}]$;
β) $\log (1 : [(a-b)^{x-y} : (c-d)^{m-n}])$.

50) α) $\log \frac{a^{-x+y}b^z}{c^{-u}d^{-m-n}}$; β) $\log \frac{1}{m^{-x}n^{-y-z}}$;

γ) $\log \frac{(a+b)^{m:n}(a \cdot b)^{m-n}}{(a-b)^{m \cdot n}(a:b)^{m+n}}$.

51) $\log [(a^x b)^z \cdot m^{np} \cdot r]^u$.

52) α) $\log \sqrt[10]{10}$, β) $\log \sqrt[7]{7}$, γ) $\log \sqrt[9]{9}$, δ) $\log \sqrt[11]{2}$, ε) $\log \sqrt[25]{100}$.

53) Wie groß ist $\log \sqrt[10]{2,7182818}$ zur Basis 2,7182818?

54) Wie groß ist $\log \sqrt[7]{\frac{9}{13}}$? Aufl.: $\overline{1},97719$.

55) α) $\log \sqrt[9]{\frac{11}{17}}$; β) $\log \sqrt[5]{\frac{13}{11000}}$; γ) $\log \sqrt[-3]{\frac{2}{7000000}}$.

56) α) $\log \frac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[y]{ab}}$; β) $\log \sqrt{(c^2-d^2)^{-3} \cdot (c-d)^{-\frac{2}{5}} : (c^3 : d^5)^{cd}}$.

57) α) $\log \frac{\sqrt[x]{a+b} \cdot \sqrt[x]{ab}}{\sqrt[x+n]{a-b}\sqrt[xn]{a:b}}$; β) $\log \sqrt[x]{\frac{(a+b-c)\,(a+c-b)}{(a+b+c)\,(b+c-a)}}$.

58) α) $\log \sqrt[x]{\left\{a\sqrt[x]{b\sqrt[x]{c}}\right\}}$; β) $\log 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$.

59) α) $\log (\log 10^{xy})$; β) $\log (\log \sqrt[m]{10^n})$; γ) $\log (\log a^x)$.

60) $\log \log \log [10^{(10^{mn})}]$.

61) Von welchem Ausdrucke ist $\log x - \log y - \log z$ der Logarithmus?

62) Wovon ist α) $7 \log a - 9 \log b$, wovon β) $\frac{2}{3} \log a + 1$ der Logarithmus?

63) Den Ausdruck zu bestimmen, dessen Logarithmus gleich $\frac{m}{n} \log (a+b) \pm \frac{n}{m} \log (a-b)$ ist.

64) Den Ausdruck anzugeben, dessen Logarithmus gleich $\frac{a}{b} \log c - \left(\frac{a}{c} \log b + \frac{b}{c} \log a\right)$ ist.

65) Von welchem Ausdrucke ist der Logarithmus
$$(a+b)\,(a-b)\,[\log\,(a+b) + \log\,(a-b)]?$$
66) Von welchem Ausdrucke ist der Logarithmus
$$\frac{a+b}{a-b}[\log\,(a+b) - \log\,(a-b)]?$$
67) Es soll der Ausdruck angegeben werden, dessen Logarithmus
$$\log a + \frac{1}{a}\left\{\log a + \frac{1}{a}\left(\log a + \frac{1}{a}\left[\log a + \frac{1}{a}\log a\right]\right)\right\}$$ ist.

68) Von welcher Zahl ist der Logarithmus des Logarithmus gleich z?

69) Von welchem Ausdrucke ist der Logarithmus des Logarithmus gleich $n \log n + \log (\log n)$?

70) a) Womit muß man die Drei-Logarithmen der auf einander folgenden Zahlen multipliciren, um α) die 9-Logarithmen, β) die 27-Logarithmen derselben Zahlen zu erhalten? b) Wenn $a^x = p$, $b^y = p$, $b = a^m$, in welcher Beziehung steht alsdann x zu y, wie läßt sich der b-Logarithmus von p aus dem a-Logarithmus von p, wie allgemein der b-Logarithmus irgend einer Zahl aus dem a-Logarithmus derselben Zahl ableiten?

71) Wem ist α) ${}^3\log 100 \cdot {}^{10}\log 3$; β) ${}^x\log a \cdot {}^a\log x$, γ) ${}^y\log m \cdot {}^x\log n \cdot {}^n\log y$ gleich?

72) Womit muß man ${}^7\log 9$ multipliciren, um α) ${}^5\log 7$, β) ${}^9\log 4$ zu erhalten?

73) Womit muß man den natürlichen Logarithmus einer Zahl a zur Basis e α) multipliciren, β) dividiren, um den brigg'schen Logarithmus derselben Zahl zu erhalten? Antw.: α) Mit $\log e$ zur Basis 10; β) mit $\log 10$ zur Basis e.

74) Die natürlichen Logarithmen der Zahlen 2, 3, 7, 10 sind: 0,693147181, 1,09861229, 1,94591015, 2,30258509, wie groß sind die brigg'schen Logarithmen dieser Zahlen? Wie groß ist der brigg'sche Logarithmus der Basis e?

§. 58.

Gebrauch der logarithmischen Tafeln*).

Die Logarithmen nachstehender Zahlen (von Nr. 1 bis 5 und von Nr. 8 bis 11) sollen angegeben werden:

1) α) 1; β) 3; γ) 23; δ) 513; ε) 699; ζ) 1837; η) 9870; ϑ) 9999.

---

*) Mit Recht kommen in den Schulen jetzt mehr und mehr die bequemen fünfstelligen Logarithmen statt der weitläufigen siebenstelligen Logarithmen

2) α) 700000; β) 27000; γ) 437900000; δ) 88880000000.

3) α) 191900; β) 19190; γ) 1919; δ) 191,9; ε) 19,19; ζ) 1,919; η) 0,1919; ϑ) 0,01919; ι) 0,001919.

4) 10851; 10852; 10857; 21584; 21587; 21764; 43116.

5) α) 43450; β) 43451; γ) 43452; δ) 71538; ε) 87654; ζ) 314150000; η) 798990000000.

6) **Wie groß sind die Unterschiede der Logarithmen je zweier auf einander folgenden Zahlen von 83555 bis 83572?**

7) **Warum sind die Unterschiede der Logarithmen der auf einander folgenden ganzen Zahlen, wenn dieselben sehr groß sind, fast constant?**

Antw.: Es seien $log\ n$, $log\ (n+1)$, $log\ (n+2$ die Logarithmen dreier auf einander folgenden Zahlen, alsdann ist: $log\ (n+1) - log\ n = log\ \frac{n+1}{n}$ und $log\ (n+2) - log\ (n+1) = log\ \frac{n+2}{n+1}$. Vergleicht man die beiden Quotienten $\frac{n+1}{n}$ und $\frac{n+2}{n+1}$ mit einander, so erhält man $\frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$; der Unterschied zwischen den beiden Quotienten $\frac{n+1}{n}$ und $\frac{n+2}{n+1}$ wird also sehr klein, wenn n eine große Zahl ist, so daß man innerhalb gewisser Gränzen $\frac{n+1}{n} = \frac{n+2}{n+1}$ und also auch $log\ (n+1) - log\ n = log\ (n+2) - log\ (n+1)$ setzen kann.

8) 434340; 434341; 434342; 434343; 434344; 434347; 434349. Aufl.: 5,6378298; 5,6378308; 5,6378318 u. s. w.

9) 123456; 208518; 26,8337; 0,341032; 0,000400006.

10) 458156; 49,4399; 5,66247; 68559,3.

11) α) 1365147; β) 7130358; γ) 8073579; δ) 3,1415927; ε) 2,7182818; ζ) 1,1111987. Aufl.: α) 6,1351794; β) 6,8531114; γ) 6,9070661; δ) 0,4971499; ε) 0,4342945; ζ) 0,0457917.

12) α) $log\,.(log\ 123456)$; β) $log\cdot[log\ (log\ 24680000000)]$; γ) $log\,[5+log\ (5+log\ [5+log\ 5{,}7604569])]$ zu berechnen.

---

in Gebrauch. Bei den meisten astronomischen Rechnungen kommen jene als vollkommen hinreichend in Anwendung. Die mathematische Section der Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner hat sich bei ihrer 23. Versammlung im Jahre 1864 in Hannover fast einstimmig für den Gebrauch fünfstelliger Logarithmen, statt siebenstelliger, ausgesprochen. In Oesterreich sind nach der Ministerial-Verordnung vom 25. Juni 1865, §. 10, fünfstellige Logarithmentafeln vorgeschrieben.

Zu folgenden Logarithmen die zugehörigen Zahlen aufzusuchen:

13) α) 0,90309; β) 2,39794; γ) 0,72403; δ) 3,90819; ε) 3,5485; ζ) 6,8948697; η) 2,1331875; ϑ) 0,990019; ι) 6,4771068.

14) α) 0,38991—2 (oder $\overline{2}$,38991); β) 0,09028—1; γ) 9,8450980; δ) —0,30103.

15) 4,1328678; 0,8908512; 0,9190048—2; 3,9370010.

16) α) —2,5228787; β) 3,8157909; γ) 0,6260096—1.

17) 6,96341; 5,09034; 3,05444; 7,6020598; 1,234.

18) $\overline{1}$,23456; 0,02020—2; $\overline{4}$,32143; —5,8794362.

Zu berechnen:

19) $\log (2{,}3578 \times 4{,}321 \times 87654 \times 1{,}119791)$. Aufl.: 6.

20) $\log (0{,}007532 \cdot 2798{,}54 \cdot 0{,}000026598)$.

21) $\log (88576 \times 29735 : 42764)$.

22) α) $\log \frac{13}{7}$; β) $\log 19\frac{4}{11}$; γ) $\log 1\frac{98}{253}$; δ) $\log 3\frac{883}{1487}$.

23) $\log [58749 : 0{,}00079254]$.

24) $\log [0{,}0073964 : 0{,}00005846]$. Aufl.: 2,1021616.

25) $\log [0{,}000089346 : 0{,}0079356]$.

26) $\log [0{,}0097531 : 8642]$. 27) $\log [21{,}7395 : 0{,}004723]$.

28) $\log [2{,}758763 \times 9{,}98752 : 0{,}00098765]$. Aufl.: 4,4455690.

29) $\log [0{,}075432 \times 0{,}00092137 : (0{,}007534 \times 0{,}26583)]$.

30) α) $\log 7^{11}$; β) $\log 2^{64}$; γ) $\log (\frac{1}{1719})^{36}$; δ) $\log (\frac{217}{58764})^{17}$.

31) α) $\log \sqrt{7}$; β) $\log \sqrt[3]{19}$; γ) $\log \sqrt[10]{10}$; δ) $\log \sqrt[9]{0{,}003719}$. Aufl.: δ) $\overline{1}$,7300474.

32) α) $\log \sqrt[11]{\frac{12}{3798}}$; β) $\log \sqrt[43]{0{,}000864}$; γ) $\log (3{,}7156^{-\frac{2}{3}})$.

§. 59 a.

A. Berechnung gegebener Zahlen-Ausdrücke mit Hülfe der Logarithmen.

1) $\frac{49876 \times 0{,}037542 \times 68{,}7075}{7{,}81649 \times 578{,}93 \times 28{,}4299}$. Aufl.: 1.

2) 8,759236 : 0,0576438. Aufl.: 151,9545.

3) 0,000798543 : 0,000000965438. Aufl.: 827,130.

4) $1{,}357245^{10}$. A.: 21,2121. 5) $1{,}26677^{25}$. A.: 369,356.

6) α) $0{,}877058^{9}$; β) $8095{,}371^{-3}$; γ) $0{,}085463^{-7}$. Aufl.: α) 0,307082; β) 0,0000000000018849; γ) 30029861.

7) α) $4\pi r^2$; β) $\frac{4}{3}\pi r^3$ für $\pi = 3{,}1415927$ und $r = 2{,}06668$.
Aufl.: α) 53,67305; β) 36,975.

8) $\frac{1}{3}\pi h r^2$ für $h = 18{,}7965$ und $r = 0{,}07913698$.
Aufl.: 0,123272.

9) $\frac{4}{3}a^2 b\pi$ für $a = 19{,}630146$, $b = 19{,}565784$. A.: 31581,5.

10) $214204^{\frac{7}{11}}$. A.: 2467,998. 11) $39{,}679^{3\frac{3}{4}}$. A.: 987649.

12) α) $0{,}00234^7$; β) $0{,}09975^{24}$.

13) $(3390 \cdot 4{,}3401 : 13814{,}4)^{11}$. Aufl.: 2,00005.

14) $0{,}098756^{\frac{3}{7}}$. Aufl.: 0,370765.

15) $\left(\frac{37}{2939}\right)^{1\frac{2}{3}}$. Aufl.: 0,000681297.

16) $\left(\frac{1402}{3999}\right)^{-3\frac{4}{5}}$. Aufl.: 53,6751.

17) $2{,}71828^{4{,}60517}$. Aufl.: 99,9997.

18) $(12{,}34^{5{,}67} \cdot 8{,}9^{-2{,}345}) : (67{,}89^{1{,}23} \cdot 45{,}67^{-8{,}9})$.
Aufl.: 30132300000000000.

19) α) $(-3{,}5879)^7$; β) $(-0{,}083514)^{11}$. Antw.: α) $-7653{,}89$.

20) α) $\left(-\frac{1}{1{,}89265}\right)^6$; β) $(-0{,}396548)^{-7}$.

21) $\left(-\frac{1}{0{,}5486397}\right)^{-11}$. Aufl.: $-0{,}001355686$.

22) α) $\sqrt{2}$; β) $\sqrt{0{,}5}$; γ) $\sqrt[3]{7}$; δ) $\sqrt[7]{9{,}38765}$.

23) α) $\sqrt[6]{117649000000}$; β) $\sqrt[11]{3{,}1866}$. A.: α) 70; β) 1,11111.

24) $\sqrt[22]{102\frac{124}{125}}$. A.: 1,2345. 25) $\sqrt[7]{0{,}0664723}$. A.: 0,6789.

26) Das vierte Glied der folgenden Proportion zu berechnen: $2{,}7195 : 0{,}48736 = 87{,}9321 : x$. Aufl.: $x = 15{,}75826$.

27) Die mittlere Proportionale zu den beiden Zahlen 3,8573 und 0,48926 zu berechnen. Aufl.: 1,373762.

28) $11{,}11^{2{,}2} \cdot 3{,}33^{-4{,}4} : \sqrt[55]{6666}$. Aufl.: 0,85564.

29) $\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$ für $a = 5{,}68608$, $b = 4{,}9243$, $c = 2{,}84304$ zu berechnen. Aufl.: 7.

30) $$\frac{a^2b^2c^2}{\sqrt{(ab+ac+bc)(ab+ac-bc)(ab-ac+bc)(-ab+ac+bc)}}$$
für $a = 4{,}26$, $b = 3{,}58$, $c = 2{,}13$ zu berechnen. Aufl.: 10,21738.

31) α) $\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}}$; β) $\sqrt{\frac{(c+b-a)(c+a-b)}{ab}}$
für $a = 51{,}693$, $b = 61{,}693$, $c = 68{,}6868$ zu berechnen.
Aufl.: α) 1,59749; β) 1,20334.

32) $\sqrt[9]{\tfrac{8}{7}\sqrt[6]{54321}}$. A.: 1,24202. 33) $7^7 : \sqrt[7]{7\sqrt[7]{7}}$. A.: 599392.

34) $\sqrt[10]{2\sqrt[10]{2} : \sqrt{10}}$. Aufl.: 0,961863.

35) $\sqrt[17]{17^{1,22687652}}$. Aufl.: 1,2268752.

36) $(\sqrt[3]{3})^{2,478062}$. Aufl.: 2,478062.

37) $\sqrt[13]{2,459^{6,5} + 8,74^{2,3}}$. Aufl.: 1,611188.

38) $\sqrt[10]{2,1663 - \sqrt[11]{4920,1}}$. Aufl.: 0,45976.

39) $\sqrt{1,75488 + \sqrt{1,75488 + \sqrt{1,75488 + \sqrt{1,75488}}}}$.
Aufl.: 1,90481.

40) $\sqrt[10]{10 + \sqrt[10]{m}}$ für $m = 10 + \sqrt[10]{10 + \sqrt[10]{n}}$ und $n = 10 + \sqrt[10]{10 + \sqrt[10]{10}}$ zu berechnen. Antw.: 1,27411.

41) Nach Deluc findet man die Erhebung eines Ortes über einen anderen in pariser Fußen, wenn die an ersterem Orte beobachtete Barometerhöhe mit b und die am letzteren Orte gleichzeitig beobachtete mit B bezeichnet wird, durch die Formel: $60000\,[log\ B - log\ b]$*). Zu Köln, auf dem Drachenfelsen und auf dem Oelberge (beide letztere im Siebengebirge) wurden einst gleichzeitige Barometer-Beobachtungen angestellt, und zwar stand das Barometer in Köln auf 28 Zoll 3,2 Linien, auf dem Drachenfelsen auf 27 Zoll 4,7 Linien und auf dem Oelberge auf 26 Zoll 11,1 Linien. Wenn nun die Höhe des Beobachtungsortes zu Köln 135,4 pariser Fuß über der der Nordsee liegt, wie läßt sich hieraus die Höhe des Drachenfelsens und des Oelberges über der Nordsee berechnen?

Aufl.: Die Höhe des Drachenfelsens beträgt 954,8 und die des Oelberges 1402,5 pariser Fuß über der Nordsee.

---

*) Bei einer Mittel-Temperatur der Luft von 16¾ Grad Réaumur. Für jeden Grad über dieser Temperatur hat man den 215ten Theil der Höhe zu subtrahiren, für jeden niedrigern Grad eben so viel zu addiren.

42) Nach **Hutton** verhalten sich die Tiefen des Eindringens der Kanonenkugeln in dieselbe Materie, wie die Logarithmen der Ladungen. Wenn nun eine 24pfündige Kugel bei einer Ladung von 10 Pfund Pulver auf 400 Schritte in festen Boden 8 Fuß 10 Zoll eindringt, wie tief dringt die Kugel bei derselben Entfernung in denselben Boden ein, wenn die Ladung nur 8 Pfund beträgt?

Aufl.: 7 Fuß $11\frac{3}{4}$ (11,7275) Zoll.

43) **Laplace** gibt zur Berechnung der Spannung des Wasserdampfes bei verschiedenen Temperaturen folgende Formel: $\log e = \log 0{,}76 + 0{,}0154547\,(t - 100) - 0{,}0000625826\,(t - 100)^2$, wo e den Quecksilberdruck des Dampfes in Metern und t die Temperatur in hunderttheiligen Graden bedeutet. Wie groß ist hiernach die Spannung des Dampfes bei 110, 120, 130, 140 Graden?

Aufl.: 1,0693, 1,4618, 1,9415, 2,5054 Meter.

44) Nach **Egen** erhält man die Spannung der Wasserdämpfe in Atmosphären nach der Formel $t = 100 + 64{,}29512 \log e + 13{,}89479\,(\log e)^2 + 2{,}909769\,(\log e)^3 + 0{,}1742634\,(\log e)^4$, wobei t hunderttheilige Grade und e die Spannung des Wasserdampfes in Atmosphären bedeutet. Bei wie viel Graden ist nach dieser Formel die Spannung gleich α) $1\frac{1}{2}$, β) 2, γ) 3 Atmosphären?

B. Berechnung der Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Zahlen aus den Logarithmen der Zahlen nach den Gaussischen Tabellen*).

$$\text{I.} \quad \log (a+b) = \log a + \log \left(1 + \tfrac{b}{a}\right).$$

$$\text{II.} \quad \log (a-b) = \log a - \log \frac{1}{1 - \frac{b}{a}}.$$

Bemerkung: Die Tabellen enthalten zu dem Argumente $\log \frac{b}{a}$, wo $a > b$, die Werthe von $\log\left(1 + \frac{b}{a}\right)$ und $\log \dfrac{1}{1 - \frac{b}{a}}$.

$\log (a+b)$ zu berechnen:

45) α) $\log a = 3{,}27654$, $\log b = 3{,}13854$.

Aufl.: $\log a - \log b = A = 0{,}138$; $B = 0{,}23749$; $\log (a+b) = \log a + B = 3{,}51403$.

β) $\log a = 4{,}63369$, $\log b = 2{,}75869$. Aufl.: 4,63944.

*) Diese Tabellen finden sich in den neueren von Hülsse besorgten Auflagen der Vega'schen Logarithmen-Tabellen, so wie auch in den Tafeln der 5stelligen Logarithmen von Wittstein und der 4stelligen von Müller u. A. Ueber die Theorie sehe man **Heis**, Ebene und sphärische Trigonometrie II. Kap. 30—32.

46) *log a* = 4,10373, *log b* = 3,47873. Aufl.: 4,19615.
47) *log a* = 0,73276, *log b* = 0,72376. Aufl.: 1,02931.
48) *log a* = 3,78564, *log b* = 2,78564. Aufl.: 3,82703.
49) *log a* = 4,84237, *log b* = 4,65927. Aufl.: 5,06143.
50) *log a* = 5,03227, *log b* = 4,62877. Aufl.: 5,17682.
51) *log a* = 1,64132, *log b* = 1,56145. Aufl.: 1,90424.
52) *log a* = 3,26451, *log b* = 2,79874. Aufl.: 3,39231.
53) *log a* = $\overline{1}$,31769, *log b* = $\overline{1}$,17325. Aufl.: $\overline{1}$,55248.
54) *log a* = $\overline{1}$,20199, *log b* = $\overline{2}$,98323. Aufl.: $\overline{1}$,40727.
55) *log a* = 0,43688, *log b* = 0,16693. Aufl.: 0,62358.
56) *log a* = 4,26526, *log b* = 3,78567. Aufl.: 4,38958.
57) *log a* = 1,38940, *log b* = 0,73564. Aufl.: 1,47645.
58) *log a* = 1,93091, *log b* = 1,42139. Aufl.: 2,04798.
59) *log a* = 1,98425, *log b* = 1,68808. Aufl.: 2,16196.
60) *log a* = 4,55138, *log b* = 3,89764. Aufl.: 4,63844.
61) *log a* = 1,86502, *log b* = 0,81947. Aufl.: 1,90246.
62) *log a* = 1,98446, *log b* = 0,77693. Aufl.: 2,01059.

log (a—b) zu berechnen:

63) *log a* = 3,06475, *log b* = 2,78564; *log a* — *log b* = 0,27911 = *B*; *C* = 0,32411; *log (a—b)* = *log a*—*C* = 2,74064.
64) *log a* = 4,97545, *log b* = 4,87569. Aufl.: 4,28769.
65) *log a* = 0,64968, *log b* = 0,59472. Aufl.: $\overline{1}$,72472.
66) *log a* = 3,44004, *log b* = 2,75863.
Aufl.: *log a*—*log b* = 0,68141 = *C*; *B* = 0,10141; *log (a—b)* = *log a* — *B* = 3,33863.
67) *log a* = 3,64139, *log b* = 2,75583. Aufl.: 3,58083.
68) *log a* = 1,15896, *log b* = 1,62798. Aufl.: 1,14598.
69) *log a* = 3,94484, *log b* = 3,72465. Aufl.: 3,54440.
70) *log a* = 2,13271, *log b* = 1,87375. Aufl.: 1,78508.
71) *log a* = 0,21251, *log b* = 0,08765. Aufl.: $\overline{1}$,61021.
72) *log a* = 1,42769, *log b* = 0,87321. Aufl.: 1,28565.
73) *log a* = 1,19554, *log b* = 0,08763. Aufl.: 1,16027.
74) *log a* = 1,89505, *log b* = 1,87354. Aufl.: 0,57904.

Zu berechnen:

75) *log (a+b+c)*, wenn *log a* = 1,85505, *log b* = 1,55210, *log c* = 1,79003. Aufl.: 2,22773.

76) $\log (ab+ac+bc)$, wenn $\log a = 0{,}75643$, $\log b = 0{,}87254$, $\log c = 0{,}49832$. Aufl.: 1,92440.

77) $\log \sqrt{a^2+b^2}$, wenn $\log a = 0{,}78241$, $\log b = 0{,}63575$. Aufl.: 0,87174.

78) $\log \sqrt{a^2-b^2}$, wenn $\log a = 2{,}87655$, $\log b = 2{,}79287$. Aufl.: 2,62898.

79) $\log \left(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right)$, wenn $\log a = 1{,}28643$, $\log b = 0{,}85794$. Aufl.: 1,81746.

80) $\log \frac{1}{3} h \left(a + b + \sqrt{ab}\right)$, wenn $\log h = 0{,}87432$, $\log a = 0{,}47655$, $\log b = 0{,}36954$. Aufl.: 1,29956.

81) $\log \frac{1}{3} h \pi (r^2+\varrho^2+r\varrho)$, wenn $\log h = 0{,}87456$, $\log \pi = 0{,}49715$, $\log r = 1{,}75846$, $\log \varrho = 1{,}48763$. Aufl.: 4,67237.

82) $\log \sqrt{1-s^2}$, wenn $\log s = \overline{1},75823$. Aufl.: $\overline{1},91354$.

83) $\log \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, wenn $\log t = \overline{1},57466$. Aufl.: $\overline{1},54601$.

84) $\log \sqrt{a^2+b^2-2abc}$, wenn $\log a = 3{,}27859$, $\log b = 2{,}98654$. $\log c = \overline{1},38765$. Aufl.: 3,28103.

85) $\log \left(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right)$, wenn $\log x = \overline{1},77319$, $\log y = \overline{1},57700$. Aufl.: $\overline{1},93108$ und $\overline{1},38970$.

86) $\log 2x\sqrt{1-x^2}$, wenn $\log x = \overline{1},44559$. Aufl.: $\overline{1},72902$.

87) $\log \left(\frac{1}{2} a - \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - b}\right)$, wenn $\log a = 0{,}96026$, $\log b = 0{,}98864$. Aufl.: 0,09149.

88) Es soll zu den beiden Zahlen 3 und 5 sowohl das arithmetische, wie das geometrische Mittel gesucht werden; aus den beiden gefundenen Zahlen bestimme man ebenfalls das arithmetische und geometrische Mittel u. s. w. fort, bis beide Mittel zusammenfallen*). (Arithmetisch-geometrisches Mittel.) A.: 3,9362.

89) Eben so verfahre man mit den Zahlen 23 und 7. Aufl.: 13,820.

90) Eben so mit 1357 und mit 2468. Aufl.: 1871.

91) Eben so mit 474,4059 und 1,0995. Aufl.: 100.

92) Wenn $\log tang.\ \alpha^2 = 0{,}67835$, wie groß ist $\log cosec.\ \alpha^2$, und $\log sec.\ \alpha^2$? Aufl.: Ist $\log tang.\ \alpha^2 = A$, so ist $\log cosec.\ \alpha^2 = B = 0{,}08269$, $\log sec.\ \alpha^2 = C = 0{,}76104$.

---

*) S. Gauss, Determinatio attractionis etc. Göttingen 1820.

§. 59 b.

Wiederholungs-Beispiele.

1) α) $\dfrac{adfk+adgh+bcgh+bcfk}{bdgk}$ soll in ein Product aus der Summe zweier Quotienten, multiplicirt mit der Summe zweier anderen Quotienten, verwandelt werden.

β) $\left(1+\dfrac{b}{2a+b}\right):\left(1-\dfrac{b}{2a+b}\right)$ soll in einen einfachen Quotienten verwandelt werden.

γ) Es soll gezeigt werden, daß das Verhältniß $(a-x):(x-b)$ dem Verhältnisse $a:b$ gleich ist, wenn $x=(2ab):(a+b)$ ist.

δ) $[1\mp x+(1-2a)x^2\pm a(1-a+a^2)x^3]:[1\pm ax]$.

ε) $(1-a)(1+a)^2+(1-3a)(1+a)x-(1+3a)x^2-x^3$ durch $1-(a+x)$ zu dividiren.

ζ) $\dfrac{bc}{(a+b)(a+b+c)}+\dfrac{ac}{(a+b)(a+b+c)}+\dfrac{bc}{(a+c)(a+b+c)}$ $+\dfrac{ab}{(a+c)(a+b+c)}+\dfrac{ac}{(b+c)(a+b+c)}+\dfrac{ab}{(b+c)(a+b+c)}$ zu vereinigen.

η) $x^5\pm ax^4+bx^3\pm bx^2+ax\pm 1$ soll durch $x\pm 1$ dividirt werden. Wie läßt sich im Voraus erkennen, daß die Division ohne Rest aufgeht?

ϑ) Wenn $x=\frac{1}{2}(\sqrt{b+2a}+\sqrt{b-2a})$, $y=\frac{1}{2}(\sqrt{b+2a}-\sqrt{b-2a})$, wie groß ist alsdann α) xy, wie groß β) x^2+y^2?

ι) Es soll sowohl xy als auch x^2+y^2+xy berechnet werden, wenn $x=\frac{1}{2}[\sqrt{b+a}+\sqrt{b-3a}]$, $y=\frac{1}{2}[\sqrt{b+a}-\sqrt{b-3a}]$.

$\varkappa$) $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)(1-2x+x^2)$.

λ) $(8x^9-9x^8+1):(x^2-2x+1)$.

μ) $mx^{m+1}-(m+1)x^m+1$ läßt sich, wenn m eine positive ganze Zahl ist, durch x^2-2x+1 ohne Rest theilen. Wie heißt der Quotient?

ν) Eben so: $[a-(a-d)x-(a+[p+1]d)x^{p+1}+(a+pd)x^{p+2}]:[x^2-2x+1]$.

2) α) $\left(y-\dfrac{m-yx}{y-x}\right)\left(x+\dfrac{m-yx}{y-x}\right)+\left(\dfrac{m-yx}{y-x}\right)^2=m$. Warum?

β) Wenn A, B, C, D vier auf einander folgende Puncte auf einer geraden Linie AD sind, so soll algebraisch bewiesen werden, daß:

$$AB\,.\,CD-AC\,.\,BD+BC\,.\,AD=0.$$

3) α) $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2 = 1.$ Warum?

β) $\frac{a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4}{a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5}$ soll in den Quotienten zweier Binome verwandelt werden.

γ) Zu beweisen, daß $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2[(a-b)(a-c) + (b-c)(b-a) + (c-a)(c-b)]$.

4) Warum ist $\frac{a^{m+x}+a^m b^y - a^x b^m - b^{m+y}}{b^{m+y}+a^m b^y + a^{m+x}+a^x b^m} = \frac{a^m-b^m}{a^m+b^m}$?

5) Wenn $\frac{b^2+c^2-d^2}{2bc} = A$, $\frac{e^2+f^2-d^2}{2ef} = B$, $\frac{e^2+c^2-a^2}{2ec} = C$, $\frac{e^2+d^2-f^2}{2ed} = D$, $\frac{c^2+d^2-b^2}{2cd} = E$ ist, zu zeigen, daß:

$$1 - \left[AB + \frac{d^2}{bf}(C-DE)\right]^2 = \frac{(ad+be+cf)(ad+be-cf)(ad-be+cf)(be+cf-ad)}{4b^2c^2e^2f^2}.$$

6) Auszuführen: α) $\left(a^x+b^y+\sqrt[x]{a}\right)\left(a^y+a^{-x}+\sqrt[x]{b^{-1}}\right)$

β) $\left(x^2-\sqrt{2}\cdot xy+y^2\right)\left(x^2+\sqrt{2}\cdot xy+y^2\right)$;

γ) $\sqrt{\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{2b\sqrt{ac}}\right)\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}-\sqrt{2b\sqrt{ac}}\right)}$.

7) Eben so: $[a^{xxxx}\cdot a^{xxx}\cdot a^{xx}\cdot a^x\cdot a]^{x-1}$.

8) $[a^{4x}+a^{3x-y}+a^{2x-2y}+a^{x-3y}+a^{-4y}]\,[a^x - a^{-y}]$.

9) $[a^{2x} + (ab)^x + b^{2x}]\,[a^x - b^x]$.

10) $[a^{3x} - (a^2b)^x + (ab^2)^x - b^{3x}]\,[a^x + b^x]$.

11) $[a^{7x} - a^{-7y}] : [a^x - a^{-y}]$.

12) α) $[64a^{6x} - 729b^{-6x}] : [2a^x - 3b^{-x}]$;

β) $(x^4+4y^4) : (x^2-2xy+2y^2)$.

13) α) $\left(a+\sqrt{ac}+c\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)$; β) $\sqrt[3]{a^2-2ab+b^2}\,\sqrt[3]{a-b}$.

14) α) $\left(x-\sqrt{\frac{x}{y}}+\frac{1}{y}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$; β) $(2-\sqrt{x})^2(1+\sqrt{x})$;

γ) $(x+y+2\sqrt{xy})^{\frac{1}{3}}(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{\frac{1}{3}}$.

15) $[x+\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})+y]\,[\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}]$.

16) $a-b$ α) in 2, β) in 3 ungleiche Factoren zu zerlegen.

17) $[x^2+xy+y^2+(x+y)\sqrt{xy}]\,[\sqrt{x}-\sqrt{y}]$.

18) $[9z^2+36uz+144u^2-(18z+72u)\sqrt{uz}]\,[\sqrt{3z} + \sqrt{12u}]$.

19) $[x\sqrt{x}+x\sqrt{y}+y\sqrt{x}+y\sqrt{y}]\,[\sqrt{x}-\sqrt{y}]$.

20) $[x\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2y^2}+y\sqrt[3]{y}]\,[\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}]$.

21) $[x\sqrt{y}-\sqrt{xy}\sqrt[4]{xy}+y\sqrt{x}]\,[\sqrt{x}\sqrt[4]{y}+\sqrt{y}\sqrt[4]{x}]$.

22) $[p\sqrt{q}+\sqrt{pq}\sqrt[4]{pq}+q\sqrt{p}]\,[\sqrt[4]{q^{-1}}-\sqrt[4]{p^{-1}}]$.

23) $[x^2+x\sqrt{xy}+xy+y\sqrt{xy}+y^2]\,[\sqrt{x}-\sqrt{y}]$.

24) $[x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}]\,[\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}]$.

25) $[y-y^2]:[\sqrt[3]{y^2}+y+y\sqrt[3]{y}]$. 26) $[x+1]:[\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}]$.

27) $[\sqrt{\tfrac{1}{2}(x+y)}+\sqrt{\tfrac{1}{2}(x-y)}]\,[\sqrt{\tfrac{1}{2}(x+y)}-\sqrt{\tfrac{1}{2}(x-y)}]$.

28) $[\sqrt{y}+\sqrt{\tfrac{1}{2}(y-z)}]\,[\sqrt{y}-\sqrt{\tfrac{1}{2}(y-z)}]$.

29) $\tfrac{1}{2}\sqrt{(a\pm 1)(b+1)(c+1)}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(a-1)(b\mp 1)(c\mp 1)}$ soll zum Quadrat erhoben werden.

30) In folgenden Quotienten die Wurzeln aus dem Divisor fortzuschaffen: $\alpha)\ \dfrac{a}{x-\sqrt[3]{y}}$; $\beta)\ \dfrac{c}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$; $\gamma)\ \dfrac{d}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{y}}$; $\delta)\ \dfrac{e}{x-\sqrt[4]{y}}$;

$\varepsilon)\ \dfrac{a}{\sqrt[2n]{x}\pm\sqrt[2n]{y}}$; $\zeta)\ \dfrac{a}{\sqrt[2n+1]{x}\pm\sqrt[2n+1]{y}}$; $\eta)\ \dfrac{\sqrt{2+\frac{2}{5}\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$;

$\vartheta)\ \dfrac{42-2\sqrt{2}-40\sqrt{6}+29\sqrt{10}+6\sqrt{15}-10\sqrt{30}}{7\sqrt{2}-3\sqrt{5}-5\sqrt{6}+2\sqrt{10}+\sqrt{30}}$ *).

31) Zwei oder mehrere Ausdrücke von der Form $a+b\sqrt{-1}$ geben, mit einander multiplicirt oder durch einander dividirt, wieder einen Ausdruck von derselben Form $a'+b'\sqrt{-1}$. Warum?

32) $\alpha)$ $x+y\sqrt{-1}$ soll zur 2., 3., 4., 5. Potenz erhoben und das Resultat auf die Form $x'+y'\sqrt{-1}$ gebracht werden; $\beta)$ $-\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{-3})$ soll zur 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8. und 9. Potenz erhoben werden.

33) Aus $a^3\pm a^2\sqrt{3b}+ab\pm\sqrt{\tfrac{1}{27}b^3}$ die 3. Wurzel zu ziehen

34) $\alpha)$ $[a^2+ab\sqrt{-1}-b^2]\,[a-b\sqrt{-1}]$;

*) Man multiplicire zuerst im Dividend und Divisor mit $(7\sqrt{2}-5\sqrt{6})+(3-2\sqrt{2}-\sqrt{6})\sqrt{5}$. S. Grebe „Ueber das Rationalmachen von Nennern mit unbestimmt vielen irrationalen Gliedern" in Grunert's Archiv XIII. S. 68.

β) $[a^3+a^2\sqrt{-1}-a-\sqrt{-1}]\,[a-\sqrt{-1}]$;

γ) Es soll gezeigt werden, daß:

$$\left(a+b\sqrt{-1}\right)\left(c-d\sqrt{-1}\right)\left(a-b\sqrt{-1}\right)\left(c+d\sqrt{-1}\right)=$$
$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2;$$

δ) $\left(x+y+y\sqrt{2}\right)\left(x+y-y\sqrt{2}\right)\left(x-y+y\sqrt{2}\right)\left(-x+y+y\sqrt{2}\right)$ zu entwickeln.

35) $[p^2+q^2]:[p+q\sqrt{-1}]$.

36) $[m+\sqrt{n-m^2}\sqrt{-1}]\,[m-\sqrt{n-m^2}\sqrt{-1}]$.

37) α) $[y^4-1]:[y+\sqrt{-1}]$; β) $[1-x^5\sqrt{-1}]:[1-x\sqrt{-1}]$;
γ) Nachzuweisen, daß

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2} \quad \text{ist.}$$

38) Es soll bewiesen werden, daß, wenn a, b u. c ungleiche positive Zahlen bedeuten, stets $abc > (a+b-c)\,(a+c-b)\,(b+c-a)$ sei.

39) Es soll bewiesen werden, daß $2ab \overline{\gtrless} a^2+b^2$ ist, d. h. daß das doppelte Product zweier Zahlen immer entweder eben so groß oder kleiner als die Summe ihrer Quadrate ist.

40) Die Summe eines Bruches und seines reciproken Werthes ist immer größer als 2. Warum?

41) Wenn die Zahlen a, b, c nicht alle einander gleich sind, so ist immer: $9(a^3+b^3+c^3) > (a+b+c)^3 > 27abc$.

Anleitung. Es sei $a>b>c$, $a-b=d$, $b-c=e$ u. s. w.

42) α) Das um 1 verminderte Quadrat einer Primzahl, die größer als 3 ist, ist stets durch 12 theilbar. Warum? β) Die Summe zweier unmittelbar auf einander folgenden Potenzen von 2 ist stets durch 6 theilbar. Warum? γ) Von der Summe, der Differenz oder dem Producte zweier Zahlen ist wenigstens eines dieser Resultate durch 3 theilbar. Warum?

43) Wenn a und b zwei relative Primzahlen sind, so können a^2-ab+b^2 und $a+b$ keinen anderen gemeinschaftlichen Primfactor als 3 haben. Warum?

44) Sind m und n zwei absolute Primzahlen, so gibt es $(m-1)\,(n-1)$ Zahlen, welche kleiner als das Product mn und zu demselben relative Primzahlen sind. Warum?

45) Dividirt man das Polynom $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$ durch ein Binom von der Form $x-n$, so erhält man zum Quotienten ein Polynom von der Form ax^3+bx^2+cx+d und einen Rest e. Welche Beziehungen finden Statt zwischen n, den Coefficienten A, B, C, D, E und a, b, c, d und dem Reste e?

Antw.: Es sei $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=$
$$(ax^3+bx^2+cx+d)\,(x-n)+e.$$

Nach ausgeführter Multiplication und beiderseitiger Vergleichung erhält man $a = A$; $b = a \cdot n + B$; $c = b \cdot n + C$; $d = c \cdot n + D$; $e = d \cdot n + E$.

Beispiel: $2x^4+7x^3+15x^2+13x+9$ soll durch $x-3$ dividirt werden. $a = 2$, $b = 2 \cdot 3+7 = 13$, $c = 13 \cdot 3+15 = 54$, $d = 54 \cdot 3+13 = 175$, $e = 175 \cdot 3+9 = 534$.

Nach folgendem, leicht einzusehenden, Schema erhält man aus den Coefficienten des gegebenen Polynoms die des gesuchten und den Rest e:

$+2$	$+7$ $+6$	$+15$ $+39$	$+13$ $+162$	$+9$ $+525$
$+2$ a	$+13$ b	$+54$ c	$+175$ d	$+534$ e,

wo $6 = 2 \cdot 3$, $39 = 13 \cdot 3$, $162 = 54 \cdot 3$, $525 = 175 \cdot 3$.

46) Die oben aufgestellte Regel soll erweitert werden für ein Polynom von der Form:

$$Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F,$$

welches 1) durch $x-n$, 2) durch $x+n$ dividirt werden soll.

47) Das nachfolgende Schema zu erklären, welches man bei der Division von $2x^5-17x^4+23x^3-18x^2+29x-6$ durch $x-7$ erhält:

$$\begin{array}{cccccc} 2 & -17 & +23 & -18 & +29 & -6 \\ & +14 & -21 & +14 & -28 & +7 \\ \hline 2 & -3 & +2 & -4 & +1 & +1. \end{array}$$

48) Es soll $3x^7-5x^6+3x^5-2x^4+6x^3-5x^2+2x-8$ durch $x-8$ dividirt und Quotient und Rest bestimmt werden; der Quotient soll durch $x+6$ dividirt, der sich hier ergebende Quotient ohne Rücksicht des Restes durch $x-5$, dann durch $x+4$, ferner durch $x-3$ und $x+6$ dividirt werden. Wie heißen sämmtliche Quotienten und die bei denselben sich ergebenden Reste?

49) Wird eine gegebene positive Zahl in zwei Summanden zerlegt, so ist die Summe der Kuben ein Minimum, wenn die Summanden einander gleich sind. Warum?

Anleitung. Man bezeichne die gegebene Zahl mit 2a, den einen Summanden mit a+x, den anderen mit a−x u. s. w.

50) Zerlegt man eine Zahl $2a$ in zwei Summanden, so ist das Product der Zahlen ein Maximum, wenn die Summanden einander gleich sind. Wie heißt der Satz, wenn die Zahl in drei Summanden zerlegt wird, und wie wird derselbe bewiesen?

51) Es soll die Richtigkeit folgender Gleichungen nachgewiesen werden: α) $32a^2b^2(a^2+b^2)^2 + (a^2-b^2)^4 +$

$$8ab(a^2+b^2)\sqrt{16a^2b^2(a^2+b^2)^2 + (a^2-b^2)^4} = (a+b)^8;$$

β) $(a^6+7a^3b^3+b^6)^2 = (a^4+2ab^3)^3 + (b^4+2a^3b)^3 + (3a^2b^2)^3.$

52) Ist $a = \frac{1}{2}(m+n+p+q)$, $b = \frac{1}{2}(m+n-p-q)$, $c=\frac{1}{2}(m-n+p-q)$, $d=\frac{1}{2}(m-n-p+q)$, so ist $a^2+b^2+c^2+d^2 = m^2+n^2+p^2+q^2$. Warum?

53) Das geometrische Mittel zwischen zwei Zahlen ist kleiner als das arithmetische Mittel; die Differenz beträgt weniger als das Quadrat der Differenz der Zahlen, dividirt durch die achtfache kleinere Zahl. Warum?

Vierter Abschnitt.

Gleichungen.

§. 60.

Begriff und Eintheilung der Gleichungen.

1) Was versteht man unter Gleichung?

2) Was versteht man unter Seiten einer Gleichung?

3) Was ist eine identische Gleichung? Was eine algebraische oder synthetische Gleichung (Bestimmungs-Gleichung)?

4) Welche von den Gleichungen:

α) $a+b-x = a-x+b$, β) $(x+y)^2 = x^2+y^2$,

γ) $a^3-x^3 = (a^2+ax+x^2)(a-x)$,

δ) $\sqrt{x^2-9} = x-3$,

ε) $x^y = y^x$, ist eine identische, welche eine algebraische?

5) Welche Veränderungen kann man mit einer Gleichung durch Addition, Subtraction, Multiplication, Potenzirung u. s. w. vornehmen?

6) Was heißt eine Gleichung auflösen? Was heißt eine Gleichung in Bezug auf eine in ihr enthaltene Größe auflösen?

7) Wie viele Aufgaben sind in der Gleichung $5a+(b-8)c = \frac{d-1}{n}$ enthalten?

8) Was versteht man unter einer unentwickelten, was unter einer entwickelten Gleichung? Was heißt eine Gleichung ordnen? Wie geschieht das Ordnen?

9) Wie werden die Gleichungen in Hinsicht der Anzahl der unbekannten Größen eingetheilt?

10) Wie werden die Gleichungen in Hinsicht des Potenz-Exponenten, mit dem die unbekannte Größe behaftet ist, eingetheilt? Was hat man zuvor zu thun, um über den Grad einer Gleichung urtheilen zu können?

11) Von welchem Grade sind nachstehende Gleichungen:

I. $ax+b = c$. II. $\frac{1}{x} - x = 2$. III. $(x+a)^2 = x^2+b$.

IV. $\frac{1}{ax+c} = \frac{1}{dx-e}$. V. $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = 1$.

VI. $(3x+4)^2+(4x-5)^2 = (5x-6)^2$. VII. $x^2-ax+b = 0$.

VIII. $(x+m)x = n$. IX. $x^3-mx^2+nx-c = 0$.

X. $[(x+3)^3-(x+2)^3] - [(x+2)^3-(x+1)^3] = 100$.

XI. $1 : \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 : \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$.

XII. $1 : \left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1 : \left(1 - \frac{1}{x}\right) = x$.

XIII. $\sqrt{x^2-9} = x-3$. XIV. $\sqrt{x+a} = x+b$.

A. Gleichungen vom ersten Grade.

§. 61.

Gleichungen vom ersten Grade mit einer unbekannten Größe *).

Die einfachen Gleichungen (1—42) werden am besten durch Anwendung der in §. 2 Nr. 5 und 7, ferner in §. 4 Nr. 6 und 13 angedeuteten, unten zusammengestellten, Sätze gelöst. Bei den übrigen Gleichungen geschieht die Auflösung durch Anwendung der in 5 des vorigen Paragraphen angegebenen Veränderungen.

$\begin{cases} x + a = b \\ x = b - a. \end{cases}$ $\begin{cases} x - a = b \\ x = b + a. \end{cases}$ $\begin{cases} a - x = b \\ x = a - b. \end{cases}$

$\begin{cases} x \cdot a = b \\ x = b : a. \end{cases}$ $\begin{cases} x : a = b \\ x = b \cdot a. \end{cases}$ $\begin{cases} a : x = b \\ x = a : b. \end{cases}$

1) α) $x + 19 = 37$; β) $3\frac{1}{3} + x = 5\frac{1}{4}$; γ)* $x + 3a = 7a$.

2) α) $x+p = q$; β) $x + \frac{1}{2}(a-b) = a$; γ) $x+b = \frac{1}{2}(a+b)$; δ) $\frac{1}{2}(a+b)+x = a$; ε) $\frac{1}{2}(a-b)+x = \frac{1}{2}(a+b)$.

3) α) $x-45 = 72$; β) $x-1\frac{1}{4} = \frac{2}{3}$; γ)* $x-3a = 2a$.

4) α) $x-m = n$; β) $x - \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(a-b)$; γ) $x-\frac{1}{2}(a-b) = b$; δ) $x-\frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}(a+b)$; ε) $x-b = \frac{1}{2}(a-b)$; ζ)* $x-3a+2b = 2(b-a)$.

---

*) Von der 18. Auflage (1867) an sind die mit * bezeichneten Beispiele theils hinzugefügt, theils zweckmäßig verändert worden.

5) α) $78-x = 43$; β) $1\frac{3}{5}-x = 1\frac{1}{2}$. γ)* $7m-x = 2m$.
6) α) $q-x = p$; β) $b = \frac{1}{2}(a+b)-x$;
γ) $a-x = \frac{1}{2}(a-b)$; δ) $\frac{1}{2}(a+b)-x = b$;
ε) $\frac{1}{2}(a+b) = a-x$; ζ)* $5m-x = 4m+n$.
7) α) $5{,}4321-x = 4{,}321$; β)* $5a-x+3a = 7a$.
8) α) $x+(3a+5b-7c) = 4a+3b-4c$;
β) $(a-b)^2+x = (a+b)^2$; γ) $(p+q)^2-x = (p-q)^2$.
9)* $28-(7+x) = 12$. 10)* $3 = 8-(18-x)$.
11) α)* $7a-(5a+x) = a+b$; β)* $6m-2n = 5m-(3n-x)$.
12) $x-[2a-5b+6c] = a+2b-3c$.
13) $p+2s-(2q+4r) = x-(7r-6s)$.
14) α) $c+3a-x+2b = 2a-(b-c)+4b$.
β)* $x-(a-x) = b$; γ) $a-(b+x) = x$.
15) α)* $9-[8-(7-x)] = 2$; β)* $7-[7+(7-[7+x])] = 7$.
16) $7x = 56$. 17) $g \cdot x = h$. 18) α) $x \cdot 63 = 7$; β) $5x = 1\frac{1}{4}$.
19) α)* $\frac{x}{9} = 8$; β) $\frac{x}{11} = 17$; γ) $\frac{1}{7}x = 7$.
20) α) $\frac{x}{i} = k$; β)* $\frac{x}{m+n} = m-n$; γ)* $\frac{x}{2a-3b} = 3a-2b$.
21) α)* $\frac{56}{x} = 8$; β) $\frac{437}{x} = 23$; γ)* $\frac{1}{x} \cdot 91 = 13$.
22) α) $e:x = d$; β)* $5a:x = 2\frac{1}{2}a$. 23) $x:1{,}357 = 0{,}02468$.
24) $x:(-8\frac{2}{3}) = -9\frac{3}{4}$. 25) $63 = 9:x$.
26) $-1\frac{2}{3}x = -8\frac{1}{18}$. 27) $(a^2-b^2):x = a+b$.
28)* $43 = 12x-9$. 29)* $2b-3a = 6x-9a+8b$.
30) α) $a^3+a^2b+ab^2+b^3 = (a^4-b^4):x$;
β) $[a^2-7a+10]:x = a-5$. γ)* $(9a^2-1):x = 3a-1$.
31) $a^3-b^3 = (a-b)x$. 32) $354 = 7x-17$.
33) α) $mx-n = p$; β)* $ax+b = a+b$.
34) $\frac{1}{9}x+17 = 80$.
35) α) $\frac{x}{a}-b = c$; β)* $\frac{a+b}{x}-a = b$.
36) $-5 = \frac{21}{x}-8$. 37) $10-\frac{3}{x} = 25$. 38) $\frac{n}{x} \pm p = q$.
39) α) $1{,}111-0{,}1111x = 0{,}3333$; β)* $100-\frac{1}{3}x = 63$.
40) α) $7{,}77 = 2{,}48x-11{,}4996$; β)* $1{,}1 = 1{,}1x-0{,}11$.
41) α) $12\frac{3}{4}-\frac{1}{5}x = 67\frac{8}{9}$; β) $1\frac{2}{3}x+4\frac{5}{6} = 7\frac{8}{9}$.
42) α)* $9x+8 = 3x+50$; β)* $5x-12 = 132-7x$;
γ)* $13x-5a+2b = 6x+2a-5b$;
δ)* $6x+5(m+n) = 15x-2(29m-34n)$.

43) $ax+bx-cx = d.$ 44) $ax+b = cx+d.$

45) $m^2-mx = n^2-nx.$ 46) $ab-ax = bx-ab.$

47) $1\tfrac{2}{3}x-99\tfrac{13}{27} = 4\tfrac{5}{6}-7\tfrac{8}{9}x.$ 48) $\tfrac{2}{7}x+15-\tfrac{3}{5}x+29 = 0.$

49) $mx+n-px-1 = nx-x-m+p.$

50) $7-\dfrac{x}{9} = \dfrac{x}{13}-11.$ 51) $m+\dfrac{x}{a} = n-p-\dfrac{x}{b}.$

52) $\alpha)^*$ $\dfrac{mx}{n}+p = q;$ $\beta)^*$ $a-\dfrac{bx}{c} = d-\dfrac{ex}{g}.$

53) $\tfrac{1}{2}x-\tfrac{3}{4}+\tfrac{5}{6}x-\tfrac{7}{8} = \tfrac{9}{10}+\tfrac{11}{12}x-\tfrac{13}{14}-\tfrac{15}{16}x.$

54) $x:(a\pm x) = p:q.$ (Prop.) 55) $f:x = g:(g+x).$

56) $\dfrac{a}{bx}-c+\dfrac{d}{ex}-f = \dfrac{g}{hx}-k+\dfrac{m}{nx}-o.$

57) $\alpha)$ $1-\dfrac{2}{3x}+4-\dfrac{5}{6x} = 7-\dfrac{8}{9x}+10-\dfrac{11}{12x};$

$\beta)$ $\tfrac{2}{3}[a-(b-x)]-\tfrac{3}{4}[x-(b-a)]-\tfrac{4}{5}[b-(a+x)] = \tfrac{5}{6}[x+a-b].$

58) $\alpha)$ $(m+n)x+a = px;$ $\beta)$ $a(x-a^2) = b(x-b^2).$

59) $\alpha)$ $2b-(b+c)x = (b-c)x;$

$\beta)$ $a(2x+19b-10a) = b(x+7b);$

$\gamma)$ $ax = bx+cx;$ $\delta)$ $a(x-b) = c(x-b);$

$\varepsilon)$ $c(b+x)-ac = d(b+x)-ad.$

60) $\alpha)$ $p-(r+s)x = q-sx;$

$\beta)$ $2a^2b-(a-b)x = 2b(b^2+2a^2)-(a+b)x;$

$\gamma)$ $(a+b-c)x-(a-b-c)x-(a^2+b^2+c^2) = 2(ab+ac+bc)-(a-b+c)x;$

$\delta)$ $1 = \dfrac{a}{b}\left(1-\dfrac{a}{x}\right)+\dfrac{b}{a}\left(1-\dfrac{b}{x}\right);$ $\varepsilon)^*$ $\dfrac{m-x}{x-n} = \dfrac{m}{n};$

$\zeta)$ $m^2(m-x)-n^2(n+x) = mnx;$

$\eta)^*$ $1-\dfrac{x}{2}\left(1-\dfrac{3}{4x}\right) = \dfrac{5x}{6}\left(7-\dfrac{6}{7x}\right)-35\tfrac{51}{56}.$

61) $\alpha)$ $\dfrac{x}{p+q}-m = n+x;$ $\beta)$ $\dfrac{1+x}{1-x} = a;$ $\gamma)$ $\dfrac{1-x}{1+x} = a.$

62) $\alpha)$ $a-\dfrac{m+n}{x} = b-\dfrac{m-n}{x};$ $\beta)$ $\dfrac{x}{ab}-(c+x)d = e-\dfrac{x+m}{an}.$

63) $9{,}87-(6{,}54-3{,}21x) = 2{,}46x+3{,}57.$

64) $2\tfrac{7}{8}-[3\tfrac{7}{8}-(4\tfrac{1}{4}-4\tfrac{3}{8}x)] = 6\tfrac{7}{8}-(7\tfrac{5}{8}-3\tfrac{5}{8}x).$

65) $\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3}[\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3}[\tfrac{1}{3}x-1]-1)-1]-1)-1 = 0.$ **)

66) $\alpha)$ $\tfrac{1}{9}(\tfrac{1}{7}[\tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3}[x+2]+4)+6]+8) = 1$ **);

$\beta)$ $4x+\tfrac{1}{2}(x-2)-2[2x-(\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{18}[16-\tfrac{1}{2}(x+4)])] = \tfrac{2}{3}(x+2).$

**) Die Klammern sind von innen aus nicht aufzulösen. Man versuche die Beispiele 65 und 66 im Kopfe zu behandeln.

67) α) $a-(x-m)n = (n-x)m$;
β) $ap(x-an-mb) = b(naq-q[x-mb])$;
γ) $a-x\left(a-\frac{a}{x}\right) = (a+x)\left(a+\frac{a}{x}\right)+a\left(a-\frac{a}{x}\right)-a.$

68) $7{,}1-(13{,}4-2{,}5x)4\frac{3}{4} = 39{,}7625-(0{,}45+8x)9.$

69) $9{,}45x-(0{,}945+9{,}45x)0{,}945 = 0{,}945x-(9{,}45-0{,}945x)9{,}45.$

70) $\frac{5b-6c}{4a^2}x+2a-\frac{5b-4a}{3b-4c}x-\frac{3b-5n}{2a} = \frac{5n-4c}{2a}-\frac{6c-4a}{3b-4c}x.$

71) α) $2-\frac{5+x}{7} = 1-\frac{9-x}{14}$; β) $3 = 12-\frac{1}{3}\left(47-\frac{60}{x}\right)$;
γ) $4 = 12-\frac{1}{4}\left(47-\frac{60}{x}\right)$; δ) $5 = 12-\frac{1}{5}\left(47-\frac{60}{x}\right)$.

72) α) $a^2b-\frac{a+x}{b} = ab^2-\frac{b+x}{a}$;
β) $\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x} = \frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{x}$;
γ) $\frac{1}{3\frac{(m+n)^2}{p^2x}-\frac{m+n}{p}} = \frac{p}{2(m+n)}$;
δ) $\frac{(a+b)^2(x+1)-(a+b)(x+1)+(x+1)}{a+b+1} = (a+b)^2-(a+b)+1.$

73) $\frac{2x-3}{15}-\frac{4x-9}{20} = \frac{8x-27}{30}-\frac{16x-81}{24}-\frac{9}{40}.$

74) α) $\frac{a^4-b^4}{a^2(a-b)}-\frac{a^2x+b^3}{a^2} = 2b+\frac{b^2}{a}$;
β) $\frac{a+b}{2b}-\frac{1}{2}c\frac{a-b}{bx} = \frac{bc}{(a+b)x}+\frac{a}{a+b}$;
γ) $a^3(x+1)-a^2(x+1)+a(x+1) = a^4+x$ **).

75) α) $3-[\frac{1}{5}(4+x)-\frac{1}{7}(6-x)] = \frac{1}{9}(8+x)-10$;
β) $111(x-111) = \frac{1}{111}(x-111)-x+111.$

76) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+x}-\frac{2}{3} = \frac{2}{3}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+x}.$

**) Anleitung zur Auflösung: Man setze $(a+1)(a^3-a^2+a-1) = a^4-1$, suche zuerst $x+1$, dann x.

77) α) $\dfrac{1}{1{,}4142 - \frac{1}{x}} = 1{,}4142;$

β) $\frac{1}{14}(14x-1) - 14(14x-1) + 14x = 1.$

78) α) $\dfrac{a}{m+x} - b = c;$ β) $b = \dfrac{x-a}{1-ax}.$

79) α) $n - \dfrac{p+x}{q+x} = \dfrac{nx}{q+x} - m;$ β) $\dfrac{ax}{b(x+c)} + \dfrac{bx}{a(x+c)} = 1;$

γ) $\dfrac{1}{ab-ax} + \dfrac{1}{bc-bx} = \dfrac{1}{ac-ax}.$

80) α) $(m+n)^2 = 3m^2 + n^2 - \dfrac{(m^2-n^2)m}{x};$

β) $(m-n)^2 = 3m^2 + n^2 - \dfrac{(m^2-n^2)m}{x}.$

81) α) $b^2 = \dfrac{b^3-c^3}{b-c} - \dfrac{bc(b+c)}{x};$

β) $c^2 = \dfrac{b^3-c^3}{b-c} - \dfrac{bc(b+c)}{x};$

γ) $(b+c)^2 = \dfrac{b^3-c^3}{b-c} + \dfrac{bc(b+c)}{x}.$

82) α) $(m-x)(n-x) = (p+x)(x-q);$

β) $(x+2) : (20-x) = (x+20) : (46-x).$

83) $8x - 28 = (4x+21)\dfrac{6x-22}{3x+14}.$

84) $(5x-7) : (4x-2) = (15x-125) : (12x-97).$

85) $[(a^2-b^2)x - ab]\,[a-(a+b)x] = [(a+b)^2x + ab]\,[b-(a-b)x].$

86) $\dfrac{a+bx}{c+dx} - \dfrac{e-fx}{c} = \dfrac{dfx^2}{c(c+dx)}.$

87) $(8-3x)^2 + (4-4x)^2 = (9-5x)^2.$

88) $[(a^2-b^2)x-1]^2 + [2abx-1]^2 = [(a^2+b^2)x+1]^2.$

89) $\dfrac{1+3x}{5+7x} - \dfrac{9-11x}{5-7x} = 14\,\dfrac{(2x-3)^2}{25-49x^2}.$

90) $\dfrac{7x-6}{35} - \dfrac{x-5}{6x-101} = \dfrac{x}{5}.$

91) $\dfrac{16x+7}{24} + \dfrac{x-16}{177-9x} = \dfrac{2x+1}{3}.$

92) α) $\dfrac{9x+10}{11x-12} - \dfrac{8+5x}{40} = \frac{12}{13} - \frac{1}{8}x;$

β) $\dfrac{25-\frac{1}{3}x}{x+1} + \dfrac{16x+4\frac{1}{5}}{3x+2} = 5 + \dfrac{23}{x+1}.$

93) $(63x-2) : \dfrac{374-77x}{676-143x} = 117x-28.$

94) $\dfrac{1-2x}{3-4x} - \dfrac{5-6x}{7-8x} = \dfrac{8}{3} \cdot \dfrac{1-3x^2}{21-52x+32x^2}.$

95) $\dfrac{9x+4}{5x-48} + \dfrac{4x-19}{51} = \dfrac{5x+32}{17} - \dfrac{11x+13}{51}.$

96) α) $\dfrac{x+2a}{2b-x} + \dfrac{x-2a}{2b+x} = \dfrac{4ab}{4b^2-x^2}$;

β) $\dfrac{(a+b)x+c}{(a-b)x+d} - \dfrac{(a-b)x+e}{(a+b)x+m} = \dfrac{4ab}{(a+b)(a-b)}.$

97) $\dfrac{x^{n+}-x^n-x^{n-1}}{2} - 2\dfrac{2x^n+x^{n-1}}{2x-7} = \frac{1}{6}[3x(x^n-x^{n-1})-47x^{n-1}].$

98) $\dfrac{4x^{n+1}+3x^{n+2}}{24} + \dfrac{2x^{n+1}+x^n}{2x-1} = \frac{1}{6}x^{n+1} + \dfrac{x^{n+2}+24x^n}{8}.$

99) $\dfrac{4x^{-16}+7x^{-17}}{6x-37} = \dfrac{6x^{-15}-30x^{-16}+21x^{-17}}{3x-16} - 2x^{-16}.$

100) $\dfrac{\left(x^{6\frac{4}{5}}-x^{5\frac{4}{5}}\right)(x^2-x)}{8} + \dfrac{x^{4\frac{4}{5}}-x^{3\frac{4}{5}}}{x-2} - \dfrac{5x^{6\frac{4}{5}}(x^2+1)-8x^{3\frac{4}{5}}}{40} = \frac{1}{4}\left(5x^{3\frac{4}{5}}-x^{7\frac{4}{5}}\right).$

101) $(9+7x) : \sqrt{x} = 7\frac{1}{4}\sqrt{x}.$

102) $\sqrt{x+4} = 7.$

103) $10 = 2\sqrt{\frac{1}{3}x\sqrt{3}}.$

104) $5 = 3\sqrt{x} - 5.$

105) $\sqrt{36+x} = 18+\sqrt{x}.$

106) $\sqrt{36+x} = 2+\sqrt{x}.$

107) $\sqrt{x+4ab} = 2b+\sqrt{x}.$

108) $\sqrt{x+4ab} = 2a+\sqrt{x}.$

109) $\frac{1}{11}(17-5\sqrt{x}) = -3.$

110) $\sqrt{4x^2-7x-6} = 9-2x.$

111) $\sqrt{2x-3n} = 3\sqrt{n} - \sqrt{2x}.$

112) $\sqrt{4p+x} = 2\sqrt{q+x} - \sqrt{x}.$

113) $(\sqrt{9x}-6)(\sqrt{x}+25) = (5+3\sqrt{x})(\sqrt{x}+3).$

114) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{m}}{\sqrt{x}-\sqrt{m}} = \dfrac{p}{m}.$

115) $\dfrac{\sqrt{x}+4m}{\sqrt{x}+3n} = \dfrac{\sqrt{x}+2m}{\sqrt{x}+n}.$

116) $(3x-1) : (\sqrt{3x}+1) = 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{3x}-1)$ **).

117) α) $\sqrt{x} + \sqrt{2+x} = \dfrac{4}{\sqrt{2+x}}$; β) $\sqrt{a+x} = a\sqrt{x}$;

γ) $\sqrt{x} + \sqrt{a+x} = m : \sqrt{a+x}$; δ)* $m\sqrt[5]{x-p} = n\sqrt[6]{x-p}.$

**) Man setze $3x-1 = (\sqrt{3x}+1)(\sqrt{3x}-1).$

118) $x = \sqrt{a^2 + x\sqrt{b^2 + x^2 - a^2}} + a.$

119) $\frac{1}{n} - \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{x}\sqrt{\frac{4}{n^2} - \frac{7}{x^2}}}.$

120) $\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}.$ 121) $5\sqrt[3]{\tfrac{4}{25}x^2 - \tfrac{8}{125}x^3} + 2x = 1\tfrac{2}{3}.$

122) $\sqrt[2n]{m^2x^2 - mnx} = \sqrt[n]{mx - n}.$

123)* $\sqrt[3]{\frac{n^2 + mx}{m^2 - nx}} = \sqrt{\frac{n^2 + mx}{m^2 - nx}}.$ 124) $\frac{50\sqrt[10]{x+24} - 9}{3 + 5\sqrt[10]{x+24}} = 7.$

125) $[12(13580 - x) - 9]^2 + [5(13580 - x) - 1]^2 = [13(13580 - x) - 8]^2$ **).

Exponential-Gleichungen.

I. $x^m = a.$ Aufl.: $x = \sqrt[m]{a}.$

II. $m^x = a.$ Aufl.: $x = {}^b\!\log a : {}^b\!\log m$, wo b die Basis eines beliebigen Logarithmensystems bedeutet, oder $x = {}^m\!\log a$.

126) $\alpha)$ $m^x = n$; $\beta)$ $x^x = x$; $\gamma)$ $a^x = 1$; $\delta)$ $a^x = m^x$.

127)***) $(a^{5x+1})^5 = (a^{7x-1})^7 \cdot (a^{x-6})^9.$ 128) $\sqrt[3+x]{a^{20}} : a^2 = a^3.$

129) $(m^{15x-3})^{7-4x} = (m^{20x-7})^{9-3x}.$

130) $c^3\sqrt[x]{c^{7+5x}} = \sqrt[x]{c^{23}}.$ 131) $\sqrt{a^{3-4x}} : \sqrt[5]{a^{6-7x}} = \sqrt[8]{a^{9-10x}}.$

132) $\frac{\sqrt[a-x]{m^{b+x}}}{\sqrt[a+x]{m^{b-x}}} = \sqrt[aa-xx]{m^2}.$ 133) $a^{-\frac{1}{2}-x} a^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^{-\frac{5}{6}}}.$

134) $\alpha)$ $\sqrt{a^{3-4x}} : \sqrt[5]{a^{6-7x}} \cdot a^{4,5} = 1$;

$\beta)$ $\sqrt{a^{3-4x}} : \left(\sqrt[5]{a^{6-7x}} \cdot a^{4,5}\right) = 1.$

135) $m^x = p \cdot q.$ 136) $n^{2x-3} \cdot p^{-4x+5} = q^{-6x+}$.

137) $a^{mx+n} \cdot b^{px+q} = a^{(m-1)x-n} b^{(p+1)x-q}.$

138) $10^x = 2,7182818.$ 139) $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2,7182818}} = 0,6922006.$

**) Man setze $13580 - x = y$, bestimme zuerst y und hierauf x.

***) Die Beispiele 127—134 lassen sich einfach ohne Logarithmirung nach dem Satze behandeln, daß, wenn Potenzen gleich sind und gleiche Basen haben, auch ihre Exponenten einander gleich sind.

140) α) $3^{2,478062} = 2,478062^x$; β) $(2\tfrac{1}{4})^{3\frac{3}{8}} = (3\tfrac{3}{8})^x$;
γ) $(3\tfrac{13}{81})^{2\frac{10}{27}} = x^{3\frac{13}{81}}$.

141) $(1,226875^x)^{3,57} = (17^{3,57})^{1,226875}$.

142) $(-1,23)^x = -2,8153057$.

143) $1,23^x = -4,2592760$. 144) $(-4,56)^x = 432,3738$.

145) $(-7,89)^x = -3875,324$.

146) $(1\tfrac{2}{3})^{4+\frac{5}{6}x} = 151,884$. 147) $0,12345^{\frac{6}{7}x} = 1697365$.

148) $0,0002^{-\frac{3}{5}x} = 0,00002^{-\frac{7}{9}x+13}$.

149) $\sqrt[10]{10} = \sqrt[x]{1,37129}$. 150) $\sqrt[x]{3^{5x+7}} = \sqrt[7x]{5^{3x+1}}$.

151) $\sqrt[x]{14,67799} = 1,467799$. 152) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{x}} = \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{9}{x}+11}$.

153) $\left(\frac{234}{567}\right)^{8-\frac{9}{10}x} = \left(\frac{987}{654}\right)^{3-2x} \cdot 1,572145^{2x-1}$.

154) $3125^{\frac{x+1}{x+2}} \cdot 15625^{-\frac{x+2}{x+3}} = 0,2$.

155) $3^{(5^x)} = 7$. 156) $a^{(b^x)} = c$.

Zusatz.

157) $\frac{x-5}{4} = \frac{7x-3}{6} - 7\tfrac{1}{6}$.

158) $\frac{x+2}{3} - \frac{4x+5}{6} = \frac{x+2}{6} - \frac{7x-8}{9}$.

159) $a^3 - x - a^2x = 1 + ax$. 160) $\frac{7a-5(2+x)}{a-x} = a$.

161) $q^3(x-q) = p^3(x-p) - pqx(p-q)$.

162) $\tfrac{1}{2}(2x-1) + \tfrac{1}{4}(3x-2) + \tfrac{1}{8}(5x-4) = 1 - \tfrac{1}{8}(7x-6)$.

163) $a\frac{2x-a}{a+2b} + b\frac{2x-b}{b+2a} = x$.

164) $\frac{a(x-a)}{b+c} + \frac{b(x-b)}{a+c} + \frac{c(x-c)}{a+b} = x$.

165) $a\frac{a-x}{b} - b\frac{b+x}{a} = x$.

166) $\frac{x}{a+b} + abx = a + b + \frac{1}{ab}$.

167) $11 - \tfrac{1}{4}(3x-1) - \tfrac{1}{3}(2x+1) = 10 - \tfrac{1}{3}(2x-5) - \tfrac{1}{8}(7x-1)$.

168) $21 - \tfrac{2}{5}(3x+4) - \tfrac{5}{6}(7x-1) = 8 + \tfrac{9}{10}(3x-1) - \tfrac{5}{3}(5x-2)$.

169) $c(a-b-x) = d(a-b-x)$.

170) $a - \frac{x}{a+b} - \frac{x-4ab}{a-b} - \frac{2b(a+b)}{a-b} = b - \frac{x}{a-b}.$

171) $p - \frac{x-np}{m} = \frac{x-mp}{n} - \frac{x-mn}{p} - p.$

172) $\frac{x-b^2+2ac}{a+c} - \frac{x-a^2+2bc}{b+c} = \frac{x-c^2-2ab}{a-b}.$

173) $\frac{x}{ab} + \frac{x}{ac} + \frac{x}{bc} - 1 = abc - x(a+b+c).$

174) $mx - \frac{mn^2}{2} - nx - \frac{6nx-5m^2}{2m} = \frac{m^2-3nx}{m} - \frac{nx+4m}{4}.$

175) $a - \frac{b(c-x)}{d} - \frac{e(f+x)}{g} = h - \frac{k(m+x)}{n} - \frac{p(r-x)}{s}.$

176) $\frac{1-x}{1-a} - \frac{1-x}{1-a^2} + \frac{1-x}{1-a+a^2-a^3} - 2 =$

$$2 - \frac{1-x}{1+a} - \frac{1-x}{1+a^2} - \frac{1-x}{1+a+a^2+a^3}.$$

177) $\frac{1}{x-6} - \frac{2}{11-x} = \frac{3}{x-1}.$ 178) $\frac{6}{x-3} - \frac{2}{7-x} = \frac{8}{x-1}.$

179) $\frac{p}{x-a} + \frac{q}{x-b} = \frac{p+q}{x-c}.$

180) $\frac{a}{x-m} + \frac{b}{x-n} + \frac{c}{x-p} = \frac{a}{x-n} + \frac{b}{x-p} + \frac{c}{x-m}.$

181) $\frac{x-9}{x-5} - \frac{x-7}{x-2} - \frac{x-9}{x-4} = \frac{x-8}{x-5} - \frac{x-7}{x-4} - \frac{x-8}{x-2}.$

182) $\frac{4}{x-4} - \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-5}.$

183) $\frac{4}{x+3} - \frac{1}{x+5} = \frac{4}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$

184) $\frac{4}{1+x} - \frac{3}{3+x} = \frac{3}{1-x} - \frac{4}{2-x}.$

185) $\frac{m-q}{x-n} + \frac{n-p}{x-q} = \frac{m-q}{x-p} + \frac{n-p}{x-m}.$

186) $\frac{4}{x-1} - \frac{9}{x-3} + \frac{6}{x-5} = \frac{1}{x-7}.$

187) $\frac{6}{x-3} - \frac{9}{x-2} + \frac{4}{x-1} = \frac{1}{x-4}.$

188) $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+2} = \frac{4}{7(x-3)} - \frac{11}{7(x+4)}.$

189) $\frac{a(m-q)}{x-n} + \frac{b(m-q)}{x-p} + \frac{a(n-m)+b(p-m)}{x-q}$
$= \frac{a(n-q)+b(p-q)}{x-m}$.

190) $\frac{m(a-b)+c(m+n)}{x-a} - \frac{n(a-b)+c(m+n)}{x-b}$
$= \frac{m(a-b)}{x-(a+c)} - \frac{n(a-b)}{x-(b-c)}$.

191) $\frac{c(a+b)+a^2}{x-a} - \frac{c(a+b)-b^2}{x-b} = \frac{a^2}{x-(a+c)} + \frac{b^2}{x-(b-c)}$.

192)* $[x-(a+b)](c+d) = 0$**). 193)* $(5x-20)(m+n) = 0$.

194)* $(7x-42)13 = (7x-42)15$.

195)* $(a-r)\left[\frac{x}{n-o} - \frac{1}{p-q}\right] = (b-r)\left[\frac{x}{n-o} - \frac{1}{p-q}\right]$.

196)* $\frac{7}{8}[(x-m)+(n-o)] - \frac{3}{5}[(n-o)-(m-x)] - \frac{2}{7}[(x+n)-(o+m)]$
$= \frac{5}{6}[x-(m-n+o)] - \frac{3}{4}[(x-o)-(m-n)]$.

197)* Auf wie vielfache Weise wird der folgenden Gleichung Genüge geleistet: $(3x-12)(5x-25)(7x-42) = 0$?

198)* Auf wie vielfache Weise der Gleichung:
$(x-a-b)(x-a+b)(x+a+b) = 0$?

§. 62.

Auflösungen der Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Größe.

$x =$

1) α) 18; β) $1\frac{11}{12}$; γ) $4a$.
2) α) $q-p$; β) $\frac{1}{2}(a+b)$; γ) $\frac{1}{2}(a-b)$; δ) $\frac{1}{2}(a-b)$; ε) b.
3) α) 117; β) $1\frac{11}{12}$; γ) $5a$.
4) α) $n+m$; β) a; γ) $\frac{1}{2}(a+b)$; δ) a; ε) $\frac{1}{2}(a+b)$; ζ) a.
5) α) 35; β) $\frac{1}{10}$; γ) $5m$.
6) α) $q-p$; β) $\frac{1}{2}(a-b)$; γ) $\frac{1}{2}(a+b)$; δ) $\frac{1}{2}(a-b)$; ε) $\frac{1}{2}(a-b)$; ζ) $m-n$.
7) α) $= 1{,}1111$; β) a.

$x =$

8) α) $a-2b+3c$; β) $4ab$; γ) $4pq$.
9) 9. 10) 13.
11) α) $a-b$; β) $m+n$.
12) $3a-3b+3c$.
13) $p-2q+3r-4s$.
14) α) $a-b$; β) $\frac{1}{2}(a+b)$; γ) $\frac{1}{2}(a-b)$.
15) α) 6; β) 7.
16) 8. 17) $\frac{h}{g}$.
18) α) $\frac{1}{9}$; β) $\frac{1}{4}$.

**) Man benutze bei 192—198 den Satz, daß ein Product zu 0 wird, wenn einer der Factoren zu Null wird. Die Beispiele 194—196 müssen erst auf die Form $= 0$ gebracht werden.

19) α) 72; β) 187; γ) 49.
20) α) ik; β) m^2-n^2; γ) $6a^2-13ab+6b^2$.
21) α) 7; β) 19; γ) 7.
22) α) $e:d$; β) 2.
23) 0,03349076.
24) $84\frac{1}{2}$. 25) $\frac{1}{7}$. 26) $4\frac{5}{6}$.
27) $a-b$. 28) $4\frac{1}{3}$. 29) $a-b$.
30) α) $a-b$; β) $a-2$; γ) $3a+1$.
31) a^2+ab+b^2. 32) 53.
33) α) $(p+n):m$; β) 1.
34) 567. 35) α) $(c+b)a$; β) 1.
36) 7. 37) $-\frac{1}{5}$. 38) $n:(q\mp p)$.
39) α) 7; β) 111.
40) α) 7,77; β) 1,1.
41) α) $-275\frac{25}{36}$; β) $1\frac{5}{6}$.
42) α) 7; β) 12; γ) $a-b$; δ) $7(m-n)$.
43) $d:(a+b-c)$.
44) $\frac{b-d}{c-a}$ oder $\frac{d-b}{a-c}$.
45) $m+n$. 46) $2ab:(a+b)$.
47) $10\frac{11}{12}$. 48) 140.
49) $\frac{-n+1-m+p}{m-p-n+1}$. 50) $95\frac{8}{11}$.
51) $(n-p-m)ab:(a+b)$.
52) α) $\frac{(q-p)n}{m}$; β) $\frac{(a-d)cg}{bg-ec}$.
53) $1\frac{407}{2275}$. 54) $\frac{pa}{q\mp p}$. 55) $\frac{fg}{g-f}$.
56) $\frac{aehn+bdhn-begn-behm}{behn(c+f-k-o)}$.
57) α) $\frac{11}{432}$; β) $b-a$.
58) α) $\frac{a}{p-m-n}$; β) a^2+ab+b^2.
59) α) 1; β) $5a-7b$; γ) 0; δ) b; ε) $a-b$.
60) α) $(p-q):r$; β) a^2+b^2; γ) $a+b+c$; δ) $a+b$; ε) $2mn:(m+n)$; ζ) $m-n$; η) 6.

61) α) $(n+m)(p+q):(1-p-q)$; β) $\frac{a-1}{a+1}$; γ) $\frac{1-a}{1+a}$.
62) α) $2n:(a-b)$; β) $\frac{b(an[e+cd]-m)}{n+b-abdn}$.
63) $\frac{8}{25}$. 64) $\frac{1}{2}$. 65) 363.
66) α) 1; β) 10.
67) α) $a:(n-m)$; β) $na+mb$; γ) $1-a$. 68) 1,1.
69) 9,45. 70) $\frac{2a(3b-4c)}{5b-6c}$.
71) α) $4\frac{1}{3}$; β) 3; γ) 4; δ) 5.
72) α) a^2b^2-a-b; β) a^2-b^2; γ) $\frac{m+n}{p}$; δ) $a+b$.
73) 6. 74) α) $a-b$; β) c; γ) a.
75) α) $26\frac{115}{143}$; β) 111.
76) $\frac{2}{3}$. 77) α) 1,4142....; β) $\frac{1}{14}$.
78) α) $\frac{a-bm-cm}{b+c}$; β) $\frac{a+b}{1+ab}$.
79) α) $\frac{p-mq-nq}{m-1}=\frac{p-(m+n)q}{m-1}$; β) $abc:(a^2-ab+b^2)$; γ) $b(a-b+c):a$.
80) α) $\frac{1}{2}(m+n)$; β) $\frac{1}{2}(m-n)$.
81) α) b; β) c; γ) $b+c$.
82) α) $\frac{mn+pq}{m+n+p-q}$; β) 7.
83) 7. 84) 11.
85) $\frac{ab(a+b)}{a^3+a^2b-3ab^2-b^3}$.
86) $\frac{c(a-e)}{de-cf-bc}=\frac{c(e-a)}{cf+bc-de}$.
87) $\frac{1}{10}$. 88) $\frac{1}{4a(a+b)}$.
89) $\frac{83}{84}$. 90) 11. 91) 17.
92) α) 7; β) $3\frac{3}{8}$.
93) 3. 94) $\frac{2}{3}$. 95) 100.
96) α) $ab:(a+b)$.

96) $\beta)\ \dfrac{(a^2-b^2)\,(de-cm)+4abdm}{(a+b)^2[(a-b)c-(a+b)d]+(a-b)^2[(a-b)m-(a+b)e]}$.

97) 5*). 98) 1*). 99) 7*).
100) 22*). 101) 36.
102) $(+7)^2-4 = 45$ **).
103) $(+5)^2\sqrt{3} = 43{,}30127$.
104) $(+3\frac{1}{3})^2 = 11\frac{1}{9}$.
105) $(-8)^2 = 64$.
106) $(+8)^2 = 64$.
107) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$.
108) $(b-a)^2 = a^2-2ab+b^2$.
109) $(+10)^2 = 100$.
110) 3. 111) $2n$.
112) $(q-p)^2 : (2p-q)$.
113) $(+3)^2 = 9$.
114) $m\left(\dfrac{p+m}{p-m}\right)^2$. 115) $\left(\dfrac{mn}{m-n}\right)^2$.
116) $\frac{1}{3}(+3)^2 = 3$. 117) $\alpha)$ $\frac{2}{3}$; $\beta)$ $\dfrac{a}{a^2-1}$ ***); $\gamma)$ $\dfrac{(m-a)^2}{2m-a}$; $\delta)$ $\dfrac{pm^{30}+n^{30}}{m^{30}}$ (auch $x = p$).
118) $\dfrac{5a^2-b^2}{4a}$.
119) $2n$ (auch $x = \infty$).
120) $\left[\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a}\right]^n$.
121) $\frac{5}{18}$. 122) $n : m$.
123) $m-n$ (auch $x = -n^2 : m$).
124) 1000. 125) 13579 $\cdot (y=1)$.
126) $\alpha)$ $log\ n : log\ m$; $\beta)$ 1; $\gamma)$ wenn $a \gtrless 1$ ist, ist $x = 0$; für $a = 1$ ist x jeder beliebigen Zahl gleich; $\delta)$ wenn $a \gtrless m$ ist, ist $x = 0$; für $a = m$ ist x jeder beliebigen Zahl gleich.
127) 2. 128) 1. 129) 0,5.
130) 2. 131) $1\frac{7}{26}$.
132) $\dfrac{1}{a+b}$. 133) $-2\frac{1}{12}$.
134) $\alpha)$ 8; $\beta)$ -7.
135) $\dfrac{log\ p + log\ q}{log\ m}$.
136) $\dfrac{3\ log\ n - 5\ log\ p + 7\ log\ q}{2\ log\ n - 4\ log\ p + 6\ log\ q}$.
137) $\dfrac{log\ (a^{2n}b^{2q})}{log\ b - log\ a}$.
138) 0,4342945. 139) 2,718281.
140) $\alpha)$ 3; $\beta)$ $2\frac{1}{4}$; $\gamma)$ $2\frac{10}{27}$.
141) 17. 142) 5.
143) Die Auflösung ist unmöglich; für $1{,}23^x = 4{,}2592760$ ist $x = 7$.
144) 4.
145) Die Auflösung ist unmöglich; für $(-7{,}89)^x = 3875{,}324$ ist $x = 4$.
146) 7. 147) -8.
148) 42,5581. 149) 1,37129.
150) $-1{,}553174$. 151) 7.
152) 0,072298. 153) 11.
154) 3. 155) 0,355206.
156) $\dfrac{log\ log\ c - log\ log\ a}{log\ b}$.
157) 7. 158) 5. 159) $a-1$.
160) $a-2$. 161) $p+q$.
162) 1. 163) $a+b$.
164) $a+b+c$. 165) $a-b$.
166) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$. 167) 7.
168) 7. 169) $a-b$.

---

*) Für 97), 98) und 100) genügt auch noch $x = 0$, und für 99) $x = \infty$.
**) In Betreff des Werthes für x in dieser und in den folgenden Gleichungen sehe man die Bemerkung in §. 48.
***) Es ist also z. B. $\sqrt{2^2/_3} = 2\sqrt{^2/_3}$, $\sqrt{3^3/_8} = 3\sqrt{^3/_8}$, $\sqrt{4^4/_{15}} = 4\sqrt{^4/_{15}}$ u. s. w.

170) $(a+b)^2$. 171) $mn+mp+np$. 172) $a^2+b^2+c^2$.

173) $\frac{abc}{a+b+c}$. 174) $\frac{2m(n^2-5)}{4m-3n}$.

175) $\frac{(h-a)dgns+bcgns+efdns-kmdgs-prdgn}{bgns-edns+kdgs-pdgn}$.

176) a^4. 177) 7. 178) 5. 179) $\frac{bp(a-c)+aq(b-c)}{p(a-c)+q(b-c)}$.

180) $\frac{pa(m-n)+mb(n-p)+nc(p-m)}{a(m-n)+b(n-p)+c(p-m)}$.

181) 8. 182) 7. 183) 1. 184) $\frac{1}{3}$.

185) $\frac{np-mq}{n+p-m-q}$. 186) 9. 187) 5. 188) 7.

189) $\frac{pa(m-n)(n-q)+nb(m-p)(p-q)}{a(m-n)(n-q)+b(m-p)(p-q)}$.

190) $[m(b-c)-n(a+c)]:[m-n]$.

191) $[a^2(b-c)+b^2(a+c)]:[a^2+b^2]$.

192) $a+b$. 193) 4. 194) 6.

195) $(n-o):(p-q)$. 196) $m-n+o$.

197) Sowohl durch $x=4$, als durch $x=5$, als durch $x=6$.

198) Durch $x=a+b$, $x=a-b$ und durch $x=-a-b$.

§. 63.

Aufgaben als Anwendungen der Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Größe *).

1) Addire ich 12 zu einer Zahl, die ich im Sinne habe, so erhalte ich 49. Wie heißt die Zahl?

2) Welche Zahl gibt, um 19 vermindert, 17?

3) Ziehe ich von 63 eine gewisse Zahl ab, so ist der Rest 27. Wie groß ist jene Zahl?

4) Welche Zahl gibt, mit 79 multiplicirt, zum Producte 4187?

5) α) Durch welche Zahl muß man 7 [91] dividiren, um 56 [7] zu erhalten? β) In welche Zahl muß man 7 [91] dividiren, um 56 [7] zu erhalten? **)

*) Man löse die folgenden Beispiele sowohl durch Ansatz einer Gleichung, als auch ohne denselben durch bloße Verstandesschlüsse.

**) Die bei mehreren Beispielen vorkommenden eingeklammerten Zahlen gelten für ein zweites Beispiel. In Nr. 5 α) heißt es also: Durch welche Zahl muß man 91 dividiren, um 7 zu erhalten?

6) α) Welche Zahl gibt, durch $2\frac{1}{4}$ dividirt, zum Quotienten $2\frac{2}{3}$? β) Welche Zahl gibt, in $2\frac{1}{4}$ dividirt, zum Quotienten $2\frac{2}{3}$?

7) Von welcher Zahl ist das Neunfache um 2 kleiner, als 74?

8) Das Siebenzehnfache einer Zahl beträgt zusammen mit ihrem Sechszehnfachen 2211. Wie heißt die Zahl?

9) Subtrahire ich das $1\frac{3}{7}$fache [5 fache] einer gedachten Zahl von 68 [42], so erhalte ich 18 [7]. Wie heißt die gedachte Zahl?

10) Addire ich zum eilften [sechsten] Theile einer Zahl $13\frac{1}{4}$ [9], so erhalte ich $13\frac{41}{44}$ [13]. Wie heißt die Zahl?

11) Dividire ich eine gedachte Zahl in 0,35786 [60], subtrahire den Quotienten von 0,2468 [12], so erhalte ich 0,1234 [7]. Wie heißt die Zahl?

12) Subtrahire ich den $m$ten Theil einer gedachten Zahl von a, so erhalte ich b. Wie heißt die gedachte Zahl?

13) Wenn man eine gewisse Zahl mit 12 multiplicirt, dann das Product um 34 vermehrt, und das, was herauskommt, durch 56 dividirt, erhält man zum Quotienten 78. Wie heißt die Zahl?

14) Wenn ich zu 98 [12] das $\frac{5}{7}$fache [$\frac{3}{5}$fache] einer gedachten Zahl addire, so erhalte ich diese Zahl selbst. Wie heißt die gedachte Zahl?

15) Es soll dasselbe herauskommen, wenn man eine Zahl mit 7 [p] multiplicirt, oder wenn man dieselbe um 7 [p] vermehrt. Wie heißt die Zahl?

16) α) Es soll einerlei sein, ob man eine Zahl durch n [3] dividirt, oder ob man n [3] von derselben abzieht. Wie heißt die Zahl? β) Es soll einerlei sein, ob man eine Zahl durch n [3] dividirt, oder ob man diese Zahl von n [3] subtrahirt. Wie heißt diese Zahl?

17) Von welcher Zahl ist das 15fache [12fache] ihrem 8fachen [5fachen] nebst 56 [28] gleich?

18) α) Das $5\frac{3}{4}$fache einer Zahl nebst $7\frac{1}{3}$ ist dem $7\frac{1}{2}$fachen derselben Zahl weniger $1\frac{2}{3}$ gleich. Wie groß ist die Zahl? β) Wie groß ist die Zahl, deren $m$faches nebst n ihrem $p$fachen nebst q gleich ist?

19) α) Von einer bestimmten Zahl, die ich im Sinne habe, nehme ich die Hälfte, subtrahire davon 1, subtrahire vom dritten Theile des Restes wieder 1, vermindere alsdann den vierten Theil des neuen Restes wieder um 1 und erhalte hierdurch 1. Wie heißt die von mir gedachte Zahl? β) Von einer bestimmten Zahl, die ich im Sinne habe, nehme ich die Hälfte, subtrahire dieselbe von 1, nehme den dritten Theil des Restes, subtrahire denselben von 1, nehme alsdann den vierten Theil des Restes und subtra-

hire diesen von 1. Wenn ich nun zuletzt $\frac{13}{16}$ erhalte, wie groß ist die gedachte Zahl?

20) Welche Zahlen geben, von einander subtrahirt, 30 [12], und zu einander addirt, 124 [30]?

21) α) In beiden Taschen habe ich zusammen 54 Kreuzer; in der linken 6 mehr, als in der rechten. Wie viel habe ich in jeder Tasche? β) In beiden Taschen habe ich zusammen 5 Thlr. 18 Sgr.; in der linken 1 Thlr. 24 Sgr. mehr, als in der rechten. Wie viel habe ich in jeder Tasche?

22) α) Mitte Winters ist zu St. Petersburg die Nacht 13 Stunden länger als der Tag. Wie viel Stunden zählt der Tag, wie viel die Nacht? Um wie viel Uhr geht die Sonne auf, um wie viel Uhr unter? β) Auf Spitzbergen (unter 77° nördlicher Breite) geht eine bestimmte Zeit lang im Winter die Sonne gar nicht auf, eben so lange geht sie im Laufe des Sommers gar nicht unter. Die Zeit, in welcher Abwechselung von Tag und Nacht innerhalb 24 Stunden Statt findet, beträgt $1\frac{1}{2}$ Monat mehr als die Zeit der andauernden Nacht. Wie viel Monate beträgt hiernach die anhaltende Nacht?

23) In einer Schule von 4 Classen und 123 Schülern befinden sich in der zweiten Classe 4 [5] Schüler mehr, als in der ersten, in der dritten 8 [6] Schüler mehr, als in der zweiten, in der vierten 3 Schüler mehr [4 Schüler weniger], als in der dritten. Wie viel Schüler befinden sich in jeder Classe?

24) In einem Garten befinden sich Apfelbäume, Birnbäume und Kirschbäume, Johannisbeersträuche und Stachelbeersträuche, im Ganzen 51 Stück. Der Bäume sind 5 mehr, als der Sträuche; der Kirschbäume 3 weniger, als der Apfelbäume, und 2 mehr, als der Birnbäume; der Johannisbeersträuche 7 weniger, als der Stachelbeersträuche. Wie viel von jeder Sorte*)?

25) Ein Pfosten steht mit $\frac{1}{4}$ seiner ganzen Länge in der Erde, mit $\frac{1}{3}$ seiner Länge im Wasser und ragt 10 Fuß über das Wasser hervor. Welche Länge hat der Pfosten?

26) α) Jemand zahlt für eine Summe von 600 Thlr. 90 Stück Friedrichsd'or und 91 Thaler. Wie hoch wurde der Friedrichsd'or gerechnet? β) Wenn $3\frac{3}{16}$ preußische Fuß und 7 Meter zusammen $25\frac{1}{2}$ preußischen Fuß ausmachen, in welchem Verhältnisse steht der preußische Fuß zu dem Meter?

27) Zwei rechtwinkelige Gärten haben gleichen Inhalt. Der eine

*) Man bestimme zuerst durch eine Gleichung die Anzahl der Bäume und Sträuche und aus diesen die Anzahl der Kirschbäume u. s. w.

hat zur Länge 143 Fuß bei einer Breite von 323 Fuß; der zweite hat zur Länge 247 Fuß. Wie breit ist der letztere?

28) α) Die atmosphärische Luft besteht aus zwei mit einander gemengten Luftarten, aus einem Raumtheile Sauerstoffluft und aus vier Raumtheilen Stickstoffluft. Wie viel von jeder Luftart ist in einem Zimmer enthalten, welches 12 Fuß breit, 14 Fuß lang und $7\frac{1}{2}$ Fuß hoch ist? β) Wie würde die Antwort heißen, wenn man das genauere Verhältniß der Gemengtheile beachtet, wonach auf 21 Raumtheile Sauerstoffluft 79 Raumtheile Stickstoffluft kommen?

29) Zinnober hat zwei Bestandtheile: Schwefel und Quecksilber, und zwar kommen auf 7 Gewichtstheile Schwefel 44 Gewichtstheile Quecksilber. Wie viel Quecksilber erhält man durch chemische Trennung aus $178\frac{1}{2}$ Loth Zinnober?

30) Eine Festung hat eine Garnison von 3520 Mann; darunter sind drei mal so viel Artilleristen, als Cavalleristen, und vier mal so viel Infanteristen, als Artilleristen. Wie viel Mann von jeder Truppengattung befinden sich nun darin?

31) Man theilt die Erdoberfläche in 5 Zonen: eine heiße, zwei gemäßigte und zwei kalte; jede gemäßigte enthält $\frac{15}{23}$ der heißen, jede kalte $\frac{7}{44}$ einer gemäßigten. Wie groß ist der Flächen-Inhalt jeder Zone, wenn jener der ganzen Erde zu 9261238 Quadratmeilen gerechnet wird?

32) Ich habe drei Fässer, zwei kleine und ein großes. Von den beiden kleinen hält das erste nur $\frac{3}{16}$, das zweite nur $\frac{5}{24}$ des dritten großen. Gieße ich den Inhalt des vollen zweiten Fasses in das leere erste, so bleiben mir in jenem noch 10 Quart übrig. Wie viel Quart enthält jedes der drei Fässer?

33) α) In der rechten Tasche habe ich 6 Silbergroschen mehr als in der linken. Bringe ich aus der rechten so viel in die linke, als in der letzteren ist, hierauf aus der linken in die rechte so viel, als jetzt in dieser ist, und zuletzt wieder aus der rechten in die linke so viel, als nun in der letzteren ist, so habe ich in beiden Taschen gleich viel. Wie viel hatte ich Anfangs in jeder der beiden Taschen? β) In meiner rechten Tasche befindet sich eine gewisse Anzahl Kreuzer mehr, als in der linken. Nach fünfmaliger, in der vorhergehenden Aufgabe angegebenen, abwechselnd vorgenommenen, Operation befindet sich in jeder der beiden Taschen gleich viel, nämlich 64 Kreuzer. Wie viel Kreuzer befanden sich zu Anfange in jeder der beiden Taschen?

34) α) Wie groß ist ein Capital, welches zu $4\frac{3}{4}$ pCt. am Ende eines Jahres mit den Zinsen 1923 Thlr. 6 Sgr. $3\frac{3}{8}$ Pfg. beträgt? β) Wenn der Holzbestand eines Forstes während 17 Jahren

jährlich um $1\frac{3}{4}$ pCt. seines anfänglichen Bestandes zugenommen hat und am Schlusse dieses Zeitraumes 16608 Klafter betrug, wie viel Klafter würde der Forst vor 17 Jahren geliefert haben?

35) Ein Kaufmann verkauft Waare für 1472 Francs 58 Centimes mit 19 pCt. Schaden. Wie viel hatte ihm die Waare gekostet?

36) Ein Quart Wein wurde zu 22 Kreuzern s. W. mit einem Nutzen von $37\frac{1}{2}$ pCt. verkauft. Wie viel kostete eine Ohm (à 120 Quart)?

37) Ein Fabricant verkauft Waaren für eine bestimmte Summe mit 8 pCt. Rabatt in Hundert*), und erhält als baare Zahlung 8050 Thlr. Wie hoch standen die Waaren?

38) Wie heißt die Auflösung der vorigen Aufgabe, wenn für 8 und 8050 die allgemeinen Zeichen p und k gesetzt werden?

39) Ich hatte für Jemanden $5206\frac{1}{2}$ Thaler eingenommen, die ich ihm mit der Post senden sollte. Das Postgeld, welches $\frac{1}{8}$ pCt. betrug, bezahlte ich am Orte der Absendung und brachte ihm dasselbe in Abrechnung. Wie viel mußte ich ihm nun schicken?

40) Ein Kaufmann erhält Waare für die baare Zahlung von 880 Thalern mit $8\frac{3}{4}$ pCt. Rabatt auf Hundert**). Wie viel hätte er ohne bewilligten Rabatt bezahlen müssen?

41) Wie heißt die Auflösung der vorigen Aufgabe, wenn für $8\frac{3}{4}$ und 880 die allgemeinen Zahlzeichen p und k gesetzt werden?

42) Wie groß ist ein Capital, welches zu p pCt. nach n Jahren mit den Zinsen k Thaler macht?

43) Es verleiht Jemand ein Capital von 5200 Thalern auf $5\frac{1}{2}$ Jahr und erhält an Zinsen und Capital $6415\frac{1}{2}$ Thaler zurück. Zu wie viel Procent hat er das Capital ausgeliehen?

44) Die rückständigen Zinsen von 6024 Francs Capital zu $3\frac{1}{2}$ pCt. machen mit dem Capital 7658 Francs 1 Centime. Wie lange sind keine Zinsen gezahlt worden?

45) Jemand zahlt für eine gewisse Summe, die er nach einem Jahre zu zahlen schuldig ist, sogleich $1538\frac{1}{2}$ Thaler mit $9\frac{1}{2}$ pCt. Disconto***). Wie viel war er zu zahlen schuldig?

46) Für einen Wechsel wird 54 Tage vor der Verfallzeit mit 9 pCt. Disconto die Summe von 1775 Thlrn. 21 Sgr. bezahlt. Auf welche Summe lautete der Wechsel?

---

*) S. Beispiel 9, §. 33a.

**) S. Beispiel 10 in §. 33a.

***) Wenn ein Schuldner eine Schuld vor der Verfallzeit abträgt, so wird bei Geschäftsleuten für diese frühere Zahlung ein Abzug von der Zahlungssumme gestattet, den man Disconto nennt. Der Disconto wird in Procenten angegeben und bezieht sich auf ein Jahr. Der Monat wird hierbei zu 30 und das Jahr zu 360 Tagen berechnet.

47) Für eine Summe, die man nach n Jahren zu zahlen schuldig ist, zahlt man jetzt mit p pCt. Disconto s Thaler. Wie hoch beläuft sich die Schuld?

48) Ein Capital ist zu $6\frac{1}{2}$ pCt. jährlichen Zinsen ausgeliehen. In wie viel Jahren werden die Zinsen zusammen das $1\frac{5}{8}$fache des Capitals ausmachen?

49) Zu wie viel Procent ist ein Capital ausgeliehen, wenn dessen 19jährige Zinsen zusammengenommen so groß sind, als das $1\frac{3}{16}$fache des Capitals?

50) Ein Kaufmann assecurirt Waare für 14100 Thaler, die er über See kommen läßt, und zahlt als Prämie 6 pCt. Damit er aber im Falle, daß die Waare verunglückt, nicht allein seine Waare, sondern auch die im Voraus bezahlte Prämie zurück erhalte, gibt er, seiner Meinung nach mit Recht, den Werth der Waare höher an. Welche Prämie wird er zahlen müssen?

51) Ein Landwirth hat eine Herde Gänse und eine Herde Schafe, im Ganzen 432 Stück. Da er sich mit der Gänsezucht nicht weiter befassen will, so tauscht er sämmtliche Gänse gegen Schafe um und erhält für je 32 der ersteren 3 der letzteren. Hierdurch sieht er sich im Besitze von 200 Schafen. Wie viel Gänse hat er umgetauscht*)?

52) Von drei Brüdern hat der zweite im Vermögen eben so viel Silbergroschen, der dritte aber nur eben so viel Pfennige, wie der älteste Thaler. Zusammen haben sie 115 Thaler 3 Pfennige. Wie viel hat jeder von ihnen?

53) Ich habe zusammen 86 Thaler 4 Silbergroschen 6 Pfennige in dreierlei Geldsorten bei mir, nämlich $3\frac{1}{2}$ mal so viel Silbergroschen, als Pfennige, und $1\frac{1}{3}$ mal so viel Thaler, als Silbergroschen. Wie viel habe ich von jeder Geldsorte?

54) Eine Summe von 9728 Thalern soll unter drei Brüder, A, B und C, nach dem Verhältnisse ihres Alters getheilt werden. Nun ist A 36, B 24, und C 16 Jahre alt. Wie viel erhält jeder derselben?

55) Eine Waldfläche von 1911 Morgen ist mit Eichen, Buchen und Kiefern bepflanzt. Wenn nun die Fläche der Kiefern 104 Morgen mehr als $\frac{7}{15}$ jener der Buchen beträgt, und der Eichenwald 90 Morgen mehr enthält als $\frac{7}{9}$ der Fläche des Buchenwaldes, wie viel Morgen kommen auf jede der genannten Baumarten?

---

*) Man versuche dieses Beispiel auch ohne Ansatz zu lösen. Durch die Umtauschung von Gänsen verliert der Landwirth 232 Stück (= 432—200). Bei jedesmaligem Umtausche von 32 Gänsen verliert er 29 Stück u. s. w.

56) Wie groß ist das Capital, dessen achtjährige Zinsen zusammengenommen 1914 Thaler betragen, wenn dasselbe im ersten Jahre $3\frac{1}{4}$ pCt., in jedem folgenden aber $\frac{1}{4}$ pCt. mehr, als in dem vorhergehenden, einbringt?

57) Ein Capitalist hat $\frac{2}{5}$ seines Geldes auf Eisenbahn-Actien, $\frac{1}{3}$ desselben auf Ländereien und den Rest auf Bergwerks-Actien verwendet. Durch die ersten erhält er einen jährlichen Gewinn von 13 pCt., durch die Ländereien einen Gewinn von 9 pCt., dagegen muß er zu den Bergwerken eine jährliche Zubuße von 3 pCt. geben. Wenn ihm nun im Ganzen aus seinem Gelde ein jährlicher Gewinn von 888 Thalern erwächst, wie groß ist sein Capital?

58) Ein Capital von 4800 Thlrn. ist nach einer gewissen Reihe von Jahren auf 6972 Thaler angewachsen. $\frac{1}{3}$ der Zeit stand es zu $3\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ der Zeit zu $3\frac{3}{4}$, die übrige Zeit zu 4 pCt. Wie lange stand das Capital?

59) Zwei Haushaltungen lassen sich zusammen 2 Centner (à 100 Pfund) Zucker kommen, wovon die erste 113 Pfund, die andere den Rest nimmt. Wenn nun die erste wöchentlich $3\frac{1}{2}$, die andere $2\frac{1}{5}$ Pfund gebraucht, nach wie viel Wochen wird der Vorrath in beiden Haushaltungen gleich sein?

60) Jemand kommt in eine ansehnliche Gesellschaft und bittet um einen Beitrag zur Wiederaufbauung seines abgebrannten Hauses. Jedes Mitglied dieser Gesellschaft gibt ihm 5 Thlr., worüber der Abgebrannte eine so große Freude hat, daß er ausruft: „Ach, wenn es in unserer Stadt so viel solcher Gesellschaften gäbe, wie hier Personen sind, und ich von jedem Mitgliede eben so viel erhielte, wie ich jetzt erhalten habe, so könnte ich davon mein ganzes Haus wieder aufbauen, welches eben so viel Hunderte gekostet hat, als hier Personen versammelt sind!“ Wie viel hat also das Haus gekostet?

61) „Trefflichster Künd'ger der Zeit, welch' Theil ist des Tages*) verlaufen?“
„„Nimm des Verlaufs zwei Drittel; es bleibt dann doppelt so viel noch.““

62) Einst sprach Kypris zu Eros, der niedergeschlagen daher kam:
Was für ein Kummer beschwert Dich, o Sohn? Er entgegnete also:
Hierher stürzend und dort wegschleppten die Musen die Aepfel,
Raffend sie mir aus dem Schooß; sie holt' ich vom Helikon eben.
Kleio das Fünftel mir nahm; Euterpe das Zwölftel der Aepfel;

*) Der Tag wurde bei den Alten, er mochte kurz oder lang sein, in 12 Stunden getheilt.

Aber das Achtel Thaleia, die hehre; das Zwanzigstel dann noch
Packte Melpomene auf; Terpsichore stahl mir das Viertel;
Doch ein Siebentel drauf griff Erato sich zu dem Antheil;
Aber Polymnia auch hat Aepfel mir dreißig geraubet;
Hundert und zwanzig erhaschte Urania; mächtig belastet
Schlich sich Kalliope fort mit dreimal Hundert der Aepfel.
Heim nun komm ich zu Dir, schau her! mit leichteren Händen:
Ließen die Göttinnen doch bloß fünfzig der Aepfel mir übrig.

63) Ein Müßiggänger hat von seinem 18ten Jahre an bis zu seinem Lebensende $\frac{3}{8}$ der Zeit verschlafen, $\frac{1}{16}$ mit Essen und Trinken zugebracht, $\frac{1}{4}$ mit Spazierengehen vertrieben, $\frac{3}{16}$ mit Spielen verdorben, $\frac{1}{16}$ im Lehnstuhle vergähnt und im Ganzen nur zwei Jahre sich der Arbeit gewidmet. Wie alt ist dieser Mensch geworden?

64) Edler Pythagoras, du Helikonischer Sprößling der Musen,
Sage mir Fragendem an, wie viel auf der Wissenschaft Ringplatz
Jünger dir weilen im Haus, ganz eifrig erstrebend den Kampfpreis.
Ich will sagen es dir, o Polykrates. Siehe! die Hälfte
Treibet die treffliche Mathematik; dagegen das Viertel
Mühet sich um die Natur, die unsterbliche; aber das Siebtel
Gänzliches Schweigen befolgt, im Herzen die Lehre bewahrend;
Zähl' drei Frauen hinzu, aus denen Theano hervorragt:
So viel leite zu Priestern ich an der Pierischen Musen.

65) Hier das Grabmal deckt Diophantos — ein Wunder zu schauen —:
Durch arithmetische Kunst lehret sein Alter der Stein.
Knabe zu bleiben verlieh ein Sechstel des Lebens ein Gott ihm;
Fügend das Zwölftel hinzu, ließ er ihm sprossen die Wang';
Steckte ihm drauf auch an in dem Siebtel die Fackel der Hochzeit.
Und fünf Jahre nachher theilt er ein Söhnlein ihm zu.
Weh! unglückliches Kind, so geliebt! Halb hat' es des Vaters
Alter erreicht, da nahm's Hades, der schaurige, auf.
Noch vier Jahre den Schmerz durch Kunde der Zahlen besänft'gend
Langte am Ziele des Seins endlich er selber auch an.

66) Einem Knaben, der eine kleine Anzahl Schafe hütete, begegnete ein anderer und sprach neckend: Gib mir die Hälfte von Deinen hundert Schafen. Aufgebracht erwiderte der erstere: Hätte ich noch*) fünf mal so viel, und $\frac{2}{3}$- und $\frac{3}{4}$- und $\frac{5}{6}$-mal so viel, als ich habe, und Dich dazu, so hätte ich erst 100 Stück. Wie viel Schafe hütete der Knabe?

*) Auf den Sprachgebrauch im Deutschen „noch einmal so viel, noch zweimal so viel u. s. w." ist zu achten.

67) α) Eine Bäuerin bringt eine gewisse Anzahl Eier zu Markte. Zuerst verkaufte sie die Hälfte [zwei Drittel] aller Eier und noch ein halbes [ein Drittel] dazu, ohne eines zu zerbrechen; hierauf die Hälfte [zwei Drittel] des Restes und abermals ein halbes [ein Drittel] Ei dazu; eben so zum dritten, vierten, fünften Male. Zuletzt bleibt ihr **ein** Ei übrig. Wie viel Eier bot sie zum Verkaufe aus? β) Ein Knabe legte eine gewisse Menge Nüsse, die er sorgfältig abzählte, in eine Schachtel. Ein anderer nimmt heimlich die Hälfte der Nüsse und noch 10 Stück und bald darauf abermals die Hälfte des Restes und noch 4 Stück dazu. Später aber reute ihn sein Vergehen und er beschließt, den Fehler wieder gut zu machen. Er legt erst 10 Stück zu und verdoppelt darauf die Anzahl der vorhandenen Nüsse, setzt alsdann 4 Stück hinzu und verdoppelt wieder die Anzahl. Der rechtmäßige Besitzer der Nüsse, der einige Zeit nachher seine Nüsse nachzählt, findet 108 Nüsse und ist erstaunt, einige Nüsse mehr in der Schachtel zu finden, als er hineingelegt hatte. Wie viel hatte er hineingelegt?

68) Ein Spieler verlor zuerst $\frac{1}{6}$ [$\frac{1}{10}$] seines Geldes, alsdann 16 Thaler [89 Gulden] und sah sich hierauf im Besitze von so viel **Silbergroschen** [Neukreuzern], als er zu Anfange des Spieles **Thaler** [Gulden] bei sich hatte. Wie viel Geld hatte derselbe, als er zu spielen anfing?

69) Der Neubau eines Wohnhauses ist zu einer gewissen Summe veranschlagt. Die Erdarbeit kostet $\frac{1}{128}$, die Mauerarbeit $\frac{1}{8}$ der ganzen Summe. Die Werksteine nebst der Steinmetzarbeit kosten $\frac{2}{3}$ der Mauerarbeit; die Dachdeckerarbeit kostet 13 Thaler mehr, als die Erdarbeit. Die Zimmerarbeit beträgt $\frac{1}{30}$ des ganzen Kosten-Anschlags, die Tischlerarbeit $\frac{1}{6}$ der ganzen Summe weniger 32 Thaler; die Schlosserarbeit $\frac{3}{8}$ der Tischlerarbeit nebst 50 Thalern; die Glaser-, Anstreicher- und Klempnerarbeit zusammen so viel, als die Zimmerarbeit; das Material des Maurers, Dachdeckers und Zimmermanns $\frac{1}{3}$ der Summe; der Transport der verschiedenen Materialien $\frac{1}{8}$ der ganzen Summe nebst 36 Thalern. Für unvorhergesehene Fälle endlich sind 50 Thaler bestimmt. Wie viel beträgt die ganze Summe, zu der das Haus veranschlagt ist?

70) Das Anlage-Capital eines Geschäftes, welches jährlich 50 pCt. reinen Gewinn abwirft, hat sich, obgleich zu Ende eines jeden Jahres 895 Thlr. herausgenommen werden, nach 5 Jahren verdoppelt. Welche Summe wurde zu dem Geschäfte verwandt?

71) Ich kenne eine sechszifferige Zahl, deren letzte Ziffer linker Hand 1 [4] ist. Bringe ich diese Ziffer an die erste Stelle rechter Hand, so erhalte ich das Dreifache [$\frac{3}{4}$fache] der ersten Zahl. Wie heißt die Zahl?

72) Es gibt eine sechszifferige Zahl von der Eigenschaft, daß, wenn man die erste Ziffer rechter Hand, welche eine 2 ist, links an die letzte Stelle setzt, eine Zahl entsteht, welche nur ein Drittel der ersten Zahl beträgt. Wie heißt die Zahl?

73) Von welcher Zahl ist der zehnte [siebente] Theil um 13 größer [2 kleiner], als der siebenzehnte [zehnte] Theil der um 18 verminderten [29 vermehrten] Zahl?

74) Multiplicire ich eine Zahl, welche ich im Sinne habe, mit $7\frac{8}{9}$, subtrahire das Product von $4\frac{5}{6}$, und dividire, was herauskommt, in $1\frac{2}{3}$, so erhalte ich $1\frac{7}{8}$. Wie heißt die Zahl?

75) Welche Zahl hat die Eigenschaft, daß $\frac{1}{4}$ zum Vorscheine kommt, wenn ich sie zu $\frac{1}{4}$ addire, das, was herauskommt, in $\frac{1}{4}$ dividire und von dem Quotienten $\frac{1}{4}$ abziehe?

76) Vermindere ich 3751 um das $38\frac{1}{2}$fache einer gewissen, um 55 verminderten Zahl, so erhalte ich das 33fache der um 11 vermehrten Zahl. Wie heißt die Zahl?

77) Man versuche die Jahreszahl der Erbauung einer weltbekannten Stadt aus folgenden Angaben zu bestimmen: subtrahire ich die Hälfte der Zahl von 468, ziehe hierauf den Rest von 135 ab und dividire zuletzt das übrig Bleibende in 79, so erhalte ich $1\frac{35}{44}$.

78) Multiplicire ich die Zahl meiner Jahre mit $\frac{2}{3}$, addire hierzu $\frac{4}{5}$, dividire, was herauskommt, in $\frac{13}{15}$ und subtrahire den Quotienten von $\frac{7}{24}$, so erhalte ich $\frac{1}{4}$. Welches ist mein Alter?

79) An der Aufführung einer Mauer waren 3 Meister, 17 Gesellen und 5 Handlanger beschäftigt und erhielten täglich zusammen 9 Thlr. 25 Sgr. Jeder Meister erhielt 5 Sgr. mehr, als jeder Gesell; jeder der letzteren 4 Sgr. mehr, als jeder Handlanger. Wie groß war der Lohn eines Meisters?

80) Ein Landwirth sah sich genöthigt, 60 Ochsen wegen Mangels an Futter zu verkaufen; der Vorrath reichte nämlich, statt für 20 Wochen, nur für 14 Wochen hin. Wie viel Stück Ochsen besaß der Landwirth?

81) Eine Magd erhielt jährlich 21 [a] Thlr. und ein Kleid zum Lohne. Nach $7\frac{1}{2}$ [m] Monat verließ dieselbe ihren Dienst und empfing, weil sie das Kleid schon zuvor erhalten hatte, nur 12 [b] Thlr. Lohn. Wie hoch wurde das Kleid gerechnet?

82) Eine Frau wollte aus einigen Pfunden Flachs ein Stückchen Leinwand spinnen lassen. Ihre erste Magd erklärte, daß sie in 36 Tagen damit fertig werden wollte; die zweite hingegen gebrauchte 48 dazu. Da sie aber schnell damit fertig sein mußte, so gab sie sich selbst mit den beiden Mägden daran und spann täglich noch $\frac{1}{8}$ Pfd. mehr, als die zweite Magd, wodurch sie zusammen in 8 Tagen fertig wurden. Wie viel Flachs war es?

83) Ein Bauer bringt Eier zu Markte und bietet 25 Stück für 5 Sgr. aus. Ein Vorübergehender zerbricht ihm aus Ungeschicklichkeit 15 Eier. Als der Bauer Ersatz erhalten hatte, beschließt er, von den noch übrigen Eiern je 22 für 5 Sgr. zu verkaufen, weil er auf diese Weise für die noch übrigen eben so viel einnehmen würde, als er vorher aus seiner ganzen Anzahl gelöset hätte. Wie viel Eier brachte der Bauer zu Markte?

84) Ein Oekonom hatte eine gewisse Anzahl Morgen Wiesenland und befindet sich nach Vertauschung von $\frac{1}{4}$ derselben gegen Weinberge, von $\frac{1}{5}$ derselben gegen Waldungen, von $\frac{1}{8}$ derselben gegen Ackerland, im Besitze von 574 Morgen Land im Ganzen. Wenn nun 5 Morgen Wiesen denselben Werth, wie 3 Morgen Weinberge, 6 Morgen Weinberge denselben Werth, wie 25 Morgen Wald, und 5 Morgen Wald denselben Werth, wie 4 Morgen Ackerland haben, wie viel Wiesenland besaß der Oekonom vor der Vertauschung?

85) Eine Griechin ging in den Tempel Jupiters und bat, er möge das Geld, welches sie bei sich trug, verdoppeln. Er that es, und sie opferte zum Danke zwei Drachmen. Mit dem Uebrigen ging sie in den Tempel Apollo's, bat um das Nämliche und erhielt es auch, weßhalb sie wieder zwei Drachmen opferte. Nun zählte sie ihr Geld und hatte gerade doppelt so viel, als Anfangs. Wie viel Geld hatte sie bei sich?

86) Eine Waldfläche von 7406 Morgen soll unter 3 Gemeinden, A, B und C, nach Maßgabe ihrer Bevölkerung, vertheilt werden, und außerdem soll A durch besondere Begünstigung $\frac{1}{20}$ des Antheils der beiden Gemeinden B und C zusammen erhalten. Wenn nun die Bevölkerungen der Gemeinden A und B sich wie 7 : 11, und die der Gemeinden B und C sich wie 5 : 8 verhalten, wie viel bekommt jede der 3 Gemeinden an Waldfläche?

87) Von der Spitze eines 412 Fuß hohen Berges steigt ein Luftball bis zu einer gewissen Höhe über der Spitze, fällt alsdann um $\frac{1}{4}$ derselben und steigt hierauf wieder um $\frac{1}{10}$ der zuletzt erreichten Höhe. Nachdem derselbe um $\frac{19}{20}$ der zum ersten Male erlangten Höhe sich gesenkt, kommt er am Fuße des Berges an. Bis zu welcher Höhe, von der Spitze des Berges an gerechnet, stieg der Luftball?

88) Ein Spieler verliert bei dem ersten Spiele $\frac{7}{10}$ seiner mitgebrachten Baarschaft, gewinnt hierauf $\frac{1}{5}$ dessen, was ihm übrig bleibt; verliert alsdann wieder $\frac{7}{12}$ seiner vergrößerten Summe; gewinnt hierauf $\frac{1}{8}$ seines Restes und hört, nachdem er $\frac{4}{5}$ seiner letzten Summe verloren, endlich auf zu spielen, indem er sich nun im Besitze eines einzigen Thalers sieht. Wie viel besaß er vor dem Spiele?

89) Ein Schiff, welches von einem Orte A nach einem westlich gelegenen Orte B segelte, wurde bei einer Entfernung von nur 4 Meilen von dem Orte seiner Bestimmung durch widrigen Wind um den 19ten Theil des abgemachten Weges zurückgeworfen. Hierauf segelte dasselbe um den 24ten Theil der zuletzt erlangten Entfernung vom Orte A wieder nach Westen und wurde alsdann nochmals um den 20ten Theil des hierauf erreichten Abstandes von A zurückgetrieben. Nachdem dasselbe nun noch den 9ten Theil der zuletzt erlangten Entfernung abgemacht, lief es in den lang ersehnten Hafen ein. Wie weit ist der Ort A von B entfernt, und wie viel Meilen legte das Schiff im Ganzen zurück?

90) Wie weit ist A von B entfernt, wenn statt der Zahlen 4, 19, 24, 20, 9 des vorhergehenden Beispieles die allgemeinen Zeichen n, a, b, c, d gesetzt werden?

91) Aus einem Wasserbehälter, der bis zu einer gewissen Höhe gefüllt ist, werden durch eine Röhre $\frac{5}{12}$ des Inhaltes und 40 Quart ausgelassen, alsdann 20 Quart weniger als $\frac{4}{13}$ des Restes hinzugesetzt und zuletzt 20 Quart weniger als $\frac{7}{11}$ des Restes herausgenommen. Wenn nun der Wasserbehälter 700 Quart weniger, als zu Anfang enthält, mit wie viel Quart war derselbe angefüllt?

92) Eine Summe von 17000 Thalern soll unter 5 Personen A, B, C, D und E, wie folgt, vertheilt werden: B soll $1\frac{1}{2}$ mal so viel als A, weniger 300 Thaler haben; C $\frac{3}{4}$ von dem, was A und B zusammen bekommen, nebst 113 Thalern; D das $\frac{4}{7}$fache dessen, was A und C zusammen erhalten, weniger $\frac{3}{5}$ des Antheils von B; E endlich $\frac{1}{6}$ des Antheils der vier ersten nebst 627 Thalern. Wie viel erhält jede Person?

93) In dem ersten zweier an einander stoßenden Zimmer befinden sich 4mal so viel Personen, als in dem zweiten; gehen aber aus dem ersten 13 in das zweite, so sind in diesem $1\frac{1}{3}$ mal so viel als in jenem. Wie viel Personen befanden sich Anfangs in dem ersten Zimmer?

94) In meiner rechten Tasche sind so viele Thaler, als in der linken Silbergroschen. Bringe ich aber aus der rechten in die linke 6 Thlr. 23 Sgr., so kehrt sich das Verhältniß um: ich habe in der linken Tasche so viele Thaler, wie in der rechten Silbergroschen. Wie viel Geld habe ich in der rechten Tasche?

95) A hat so viele Thlr. [fl. österr.], wie B Silbergroschen [Neukreuzer]; gibt er aber an B 11 Thlr. 29 Sgr. [99 fl. 99 Nkr.] ab, so hat letzterer so viele Silbergroschen [fl.], wie ersterer Pfennige [Nkr.]. Wie viel Thaler [fl.] besitzt A?

96) Sechs kleine Ortschaften: A, B, C, D, E und F, welche hinter einander an einer Landstraße liegen, und zwar A von B

$\frac{3}{8}$, B von C $\frac{5}{16}$, C von D $\frac{5}{8}$, D von E $\frac{1}{4}$, und E von F $\frac{1}{8}$ Meile, lassen gemeinschaftlich ein Schulhaus bauen, und zwar soll dasselbe zwischen C und D so errichtet werden, daß die Summe der Entfernungen desselben von den drei Ortschaften A, B und C so groß werde, als die Summe der Entfernungen von den drei Ortschaften D, E und F. In welchem Abstande von C muß das Schulgebäude aufgeführt werden?

97) Ein Vater ist 30, sein Sohn 2 Jahre alt. Nach wie viel Jahren wird der Vater 8mal, nach wie viel Jahren 5mal so alt sein, als sein Sohn? Vor wie viel Jahren war der Vater 57mal so alt, als sein Sohn?

98) A ist jetzt m, B n Jahre alt. Nach wie viel Jahren wird A $q$mal so alt sein, als B, oder vor wie viel Jahren war A $q$mal so alt, als B? In welchem Falle ist die Auflösung der Aufgabe unmöglich?

99) Eine Mutter ist jetzt 6mal so alt, als ihre Tochter, und wird über 5 Jahre $3\frac{1}{2}$mal so alt sein, als dieselbe. Wie alt ist jetzt die Mutter?

100) A ist jetzt $n$mal so alt und wird über m Jahre $p$mal so alt sein, als B. Wie alt ist A? Welche Beziehung muß zwischen den Größen m, n und p Statt finden, wenn die Auflösung der Aufgabe einen Sinn haben soll?

101) Seit 50 Jahren, sagt ein alter Beamter, habe ich mir jährlich 200 Thaler erspart; eben so viel ersparte jährlich jeder meiner 4 Söhne, und zwar der älteste seit 27, der zweite seit 24, der dritte seit 19 und der vierte seit 16 Jahren. Vor wie viel Jahren betrug das Ersparniß des Vaters im Ganzen so viel, als das seiner 4 Söhne zusammengenommen?

102) Nach wie viel Jahren wird, wenn Alles wie in der vorhergehenden Aufgabe bleibt, das Ersparniß des Vaters die Hälfte dessen betragen, was seine Söhne zusammen zurückgelegt haben werden?

103) Aus vier hinter einander auf einer Landstraße liegenden Ortschaften, A, B, C und D, reisen 4 Personen mit dem Eilwagen nach demselben Orte E. A ist von B 19 Meilen, B von C 3 Meilen, und C von D 5 Meilen entfernt. Beim Nachrechnen findet sich, das die in A eingestiegene Person an Postgeld so viel bezahlt hat, als die übrigen drei zusammengenommen. Wie läßt sich hieraus die Entfernung des Ortes D von E berechnen?

104) Durch 5 hinter einander liegende Städte, A, B, C, D und E, geht eine gerade Straße, und zwar ist A von B 37, B von D 34 und D von E 14 Meilen entfernt. Ein Kaufmann in der zwischen B und D liegenden Stadt C läßt sich durch einen

Fuhrmann von A 8 Centner, von B 6 Centner kommen. Durch einen zweiten Fuhrmann, der für denselben Preis fährt, wie der erste, läßt er von D 11 Centner und von E 9 Centner Waare kommen, und bezahlt diesem im Ganzen an Fracht eben so viel als jenem. Wie läßt sich hieraus die Entfernung der Stadt B von C berechnen?

105) Eine Frau brachte ihr gesponnenes Garn zum Weber, um sich daraus Leinwand machen zu lassen. Der Weber sagte zu ihr: Wollt Ihr 10 Ellen mehr haben, als 100, so müßt Ihr mir noch 9 Stränge bringen. Wollt Ihr aber 10 Ellen weniger haben als 100, so kann ich Euch gleich 9 Stränge wieder zurückgeben. Wie viel Stränge waren es demnach?

106) Ein Kaufmann hat eine bestimmte Menge Waaren. Verkauft er das Pfund zu 6 Sgr. 2 Pfg., so hat er im Ganzen 3 Thlr. 20 Sgr. Nutzen. Verkauft er dagegen das Pfund zu 4 Sgr. 9 Pfg., so hat er im Ganzen 1 Thlr. 15 Sgr. 10 Pfg. Schaden. Wie viel Waare besitzt der Kaufmann, und welches ist der Einkaufspreis?

107) Fließen in einen leeren Behälter alle 3 Minuten 20 Quart, so werden nach einer gewissen Zeit noch 40 Quart an der vollständigen Füllung fehlen. Fließen aber in denselben alle 5 Minuten 52 Quart, so werden nach derselben Zeit 72 Quart Wasser übergelaufen sein. Wie viel Quart Wasser faßt der Behälter, und wie viel Quart müssen jede Minute demselben zufließen, wenn er nach derselben Zeit bis an den Rand gefüllt sein soll?

108) Ein Maurer würde, wenn er täglich 10 Stunden arbeitet, wöchentlich eben so viel über 888 Kubikfuß Mauer aufführen, als er jetzt bei $8\frac{1}{2}$ Stunde täglicher Arbeit unter 888 Kubikfuß liefert. Wie viel Kubikfuß Mauer führt er jetzt wöchentlich auf?

109) Nach einer gewissen Zeit habe ich 670 Francs zu bezahlen und $4\frac{1}{2}$ Monat später 980 Francs. Ich zahle sogleich für beide Summen, mit $4\frac{4}{5}$ pCt. Disconto, 1594 Francs 41 Centimes. Nach wie viel Monaten habe ich die erste Summe zu bezahlen?

110) Wie viel Procent Rabatt auf Hundert sind n Procent Rabatt in Hundert*)?

111) Wie viel Procent Rabatt in Hundert sind n Procent Rabatt auf Hundert*)?

112) Ein Kaufmann erhielt ein Faß Oel und ein Faß Reiß, beide von gleichem Brutto-Gewichte. Das Netto-Gewicht der ersten Waare betrug bei einem gewissen Procente Tara, vom Brutto-Gewichte berechnet, 536 Pfund; bei $6\frac{7}{8}$ Procent weniger Tara betrug

*) S. §. 33a. Beisp. 9 u. 10.

das Netto-Gewicht der zweiten Waare 580 Pfund. Zu wie viel Procent wurde bei dem Fasse Oel die Tara gerechnet?

113) Ich habe zwei gleiche Summen zu bezahlen, die eine nach 9, die andere nach 15 Monaten. Bezahle ich dieselben auf der Stelle, mit einem für beide Summen gleichen Disconto, so muß ich für die erste Summe 1208, für die zweite 1160 Thaler bezahlen. Wie groß ist jede der beiden Summen, und zu wie viel Procent wird der Disconto berechnet?

114) Wie heißen die Resultate der vorigen Aufgabe, wenn für 9 und 15 Monate m und n Jahre, für 1208 und 1160 die allgemeinen Zeichen s und s' gesetzt werden?

115) Ein Kaufmann gewinnt 8 pCt., wenn er eine Ohm Oel zu 36 Thaler verkauft. Wie viel pCt. gewinnt oder verliert er, wenn er die Ohm zu 32 Thaler verkauft?

116) Wenn der Preis der Waare p ist, gewinnt man n pCt. Wie viel pCt. gewinnt oder verliert man, wenn der Preis der Waare p' ist?

117) α) Ein Kaufmann verliert $2\frac{1}{2}$ pCt., wenn er einen Ballen Kaffee zu 39 Thaler verkauft. Wie viel pCt. gewinnt oder verliert er, wenn er den Ballen Kaffee zu $41\frac{1}{2}$ Thaler verkauft? β) Jemand verliert n pCt., wenn der Preis der Waare p ist; wie viel pCt. gewinnt oder verliert er, wenn der Preis der Waare p' ist?

118) Ein Antrag, über welchen 600 Personen abgestimmt hatten, war durchgefallen. Als dieselben Personen über den nämlichen Antrag zum zweiten Male abgestimmt hatten, ging er mit zwei mal so viel Stimmen durch, als durch welche er zuvor gefallen war, und die jetzige Majorität verhält sich zu der früheren, wie $8 : 7$. Wie viele hatten ihre Meinung geändert?

119) Das sächsische Haus lieferte zur Zeit fünf deutsche Kaiser hinter einander, Heinrich I., Otto I., Otto II., Otto III. und Heinrich II. Von diesen regierte Heinrich I. 7 Jahre länger als Otto II., Otto I. regierte doppelt so lange als Otto II. und dazu noch so lange als Heinrich I. Hätte Otto I. noch ein Jahr länger regiert, so hätte er doppelt so lange als Otto III. regiert. Heinrich II. endlich regierte 3 Jahre länger als sein Vorgänger und starb im Jahre 2^{10} nach Christus. Die sämmtlichen fünf Kaiser aus dem sächsischen Hause regierten eine Anzahl Jahre, welche durch das Product von vier auf einander folgenden ungeraden Zahlen angegeben wird. Es soll aus diesen Angaben bestimmt werden, um welche Zeit jeder der genannten Kaiser regierte.

Bewegungs-Aufgaben.

120) Ein Bote geht von einem Orte A nach einem Orte M und macht täglich 5 [$4\frac{3}{4}$] Meilen. Zu derselben Zeit geht ein anderer Bote von einem um 12 [$7\frac{1}{2}$] Meilen mehr rückwärts gelegenen Orte B nach demselben Orte M und macht täglich 7 [$6\frac{1}{4}$] Meilen. Nach wie viel Tagen und in welcher Entfernung vom Orte B werden beide Boten zusammentreffen?

121) Zwei Körper bewegen sich von zwei Puncten, A und B, deren Entfernung d Fuß ist, nach derselben Richtung. Der eine legt in jeder Zeiteinheit (z. B. Secunde, Minute) c Fuß, der zweite, nachfolgende, in jeder Zeiteinheit c' Fuß zurück. Wann und wo werden beide Körper zusammentreffen? In welchem Falle ist die Auflösung der Aufgabe unmöglich?

122) Zwei Freunde, welche 78 [73] Meilen von einander entfernt sind, verabreden sich, in einer gewissen, zwischen ihren Wohnorten liegenden, Stadt zusammenzutreffen. Beide reisen gleichzeitig ab, und der eine macht täglich $5\frac{1}{4}$ [$8\frac{3}{4}$], der andere täglich $7\frac{3}{4}$ [$9\frac{1}{2}$] Meilen. Wann und in welcher Entfernung von ihrem Wohnorte treffen sie zusammen?

123) Zwei Körper bewegen sich von zwei Orten, deren Entfernung d ist, gegen einander; der eine legt in jeder Zeiteinheit c, der andere in jeder Zeiteinheit c' Raumeinheiten zurück. Wann werden beide Körper zusammentreffen? Wie läßt sich das Resultat dieser Aufgabe aus dem Resultate der 121. Aufgabe ableiten?

124) Von einem Orte A wird nach einem anderen B ein Courier abgesandt, der alle Stunden $1\frac{1}{4}$ Meile zurücklegt. $1\frac{1}{2}$ Stunde nach seiner Abreise wird ihm ein anderer von demselben Orte A nachgeschickt, der, um jenen einzuholen, stündlich $1\frac{5}{8}$ Meilen machen muß. Wie viel Stunden nach Abgang des ersten und in welcher Entfernung wird der zweite Courier den ersten einholen?

125) Um 6 Uhr Morgens fährt ein Eilwagen aus einem Orte A nach einem Orte B und macht jede Stunde $1\frac{1}{3}$ Meile. 20 Minuten nach 2 Uhr verläßt ein Dampfwagen den Ort B, fährt nach A und langt auf einer neben der Landstraße liegenden Eisenbahn, indem er jede Stunde 6 Meilen zurücklegt, zu derselben Zeit in A an, zu welcher der Eilwagen an dem Orte B ankommt. Wie weit ist A von B entfernt?

126) Zwei Körper gehen von demselben Orte S aus und bewegen sich beide nach derselben Richtung hin. Der eine legt in jeder Zeiteinheit c Raumeinheiten, der andere, der den Ort S n Zeiteinheiten später verläßt, legt in jeder Zeiteinheit c' Raumeinheiten zurück. In welcher Zeit nach dem Abgange des zweiten

Körpers werden beide zusammentreffen? Welche Beziehung muß zwischen den Größen c, c' und n Statt finden, wenn die Auflösung der Aufgabe möglich sein soll?

127) Zwei Fußgänger, von denen der eine alle 3 Minuten 52 Ruthen, der andere jede Minute 16 Ruthen zurücklegt, gehen von zwei, um $7\frac{1}{2}$ Meilen (à 2000 Ruthen) von einander entfernten Dörfern einander entgegen, und zwar der erstere $2\frac{1}{2}$ Stunde früher als der zweite. Nach welcher Zeit*) werden beide Fußgänger einander begegnen?

128) Wie heißt die Auflösung der 126. Aufgabe, wenn die beiden Körper sich von zweien um d Raumeinheiten von einander entfernten Orten gegen einander bewegen?

129) Einem Boten, der täglich gleich viel abmacht, wird 5 Tage nach seiner Abreise ein anderer nachgeschickt, der, um den ersten in 8 Tagen einzuholen, täglich $2\frac{1}{2}$ Meile mehr machen muß. Wie viel Meilen legte der erste Bote täglich zurück?

130) Ein feindliches Corps ist vor zwei Tagen von einem gewissen Orte aufgebrochen und macht täglich $4\frac{1}{2}$ Meile. Man will ihm von dem nämlichen Orte aus nachsetzen, und zwar so schnell, daß man es in 6 Tagen erreicht habe. Wie viel Meilen müssen zu dem Ende täglich gemacht werden?

131) Von A aus wird ein Courier nach einem Orte B geschickt; 3 Stunden später wird ihm ein anderer nachgesandt, der jenen einholen soll. Wenn nun die Geschwindigkeit des ersten zu der des zweiten sich wie 5 : 7 verhält, in welcher Zeit werden beide zusammentreffen?

132) Zwei sich hinter einander bewegende Körper gehen von demselben Orte aus; der zweite aber t Zeiteinheiten später, als der erste. Die Geschwindigkeit des ersten verhält sich zu der des zweiten wie $m : n$. Nach welcher Zeit werden beide Körper zusammentreffen?

133) Ein Fußgänger, der alle 7 Stunden 4 Meilen zurücklegt, geht aus einem Orte B ab; ein Reiter verläßt zu gleicher Zeit einen um 8 Meilen mehr rückwärts gelegenen Ort A und macht alle 3 Stunden 4 Meilen. Wenn nun jeder derselben auf der Reise im Ganzen nur $1\frac{1}{2}$ Stunde zum Ausruhen verwendet, in wie viel Stunden wird der Reiter den Fußgänger einholen?

134) Ein Körper, der alle a Minuten m Fuß zurücklegt, verläßt einen Ort A; t Minuten später oder früher geht von

*) Als unbekannte Größe kann man entweder die Zeit nach Abgang des ersten oder nach Abgang des zweiten Fußgängers wählen. Eine ähnliche Bemerkung gilt für die Nrn. 128, 131, 132, 134.

einem um d Fuß **rückwärts** oder **vorwärts** gelegenen Orte ein zweiter Körper nach derselben Richtung und macht alle b Minuten n Fuß. In wie viel Minuten wird der zweite Körper den ersten einholen? Welche Beziehung muß zwischen den Größen a, m, t, d, b und n Statt finden, wenn die Auflösung der Aufgabe möglich sein soll?

135) Vor einer totalen und centralen Sonnenfinsterniß *), die an einem Orte vorfiel, standen, der Berechnung zufolge, um 9 Uhr 13 Minuten Vormittags die Mittelpuncte der Sonnen- und Mondscheibe noch $5\frac{7}{8}$ Mondbreiten von einander. Beide Scheiben hatten dieselbe scheinbare Größe und bewegten sich nach derselben Richtung hin von Westen nach Osten. Der Mond legte auf seiner Bahn in einer Stunde $1\frac{1}{16}$, die Sonne dagegen in derselben Zeit nur $\frac{1}{12}$ Mondbreite zurück. Um wie viel Uhr fielen die Mittelpuncte beider Scheiben zusammen (totale Finsterniß)? Um wie viel Uhr berührten sich die Scheiben mit ihren Rändern zum ersten und um wie viel Uhr zum zweiten Male (Anfang und Ende der Finsterniß)?

136) Zwei Boten gehen zu gleicher Zeit von den beiden Ortschaften A und B einander entgegen. Der eine würde den ganzen Weg in $6\frac{1}{4}$ [12], der andere in $9\frac{3}{8}$ [15] Stunden zurücklegen. Nach wie viel Stunden werden beide einander begegnen?

137) Wie heißt die Auflösung der vorigen Aufgabe, wenn für $6\frac{1}{4}$ und $9\frac{3}{8}$ die allgemeinen Zeichen m und n gesetzt werden?

138) Um 8 Uhr Morgens fahre ich mit dem Eilwagen von A nach B; zu gleicher Zeit bewegt sich ein Dampfwagen auf einer neben der Landstraße liegenden Eisenbahn von B nach A. Um halb 10 Uhr treffe ich mit dem Dampfwagen zusammen, halte mich gegen Mittag eine halbe Stunde auf und komme Abends um 6 Uhr in B an. Um wie viel Uhr langte der Dampfwagen in A an?

139) Ein Bote geht von einem Orte A über einen Ort B nach einem Orte C, ein zweiter zu derselben Zeit von B nach demselben Orte C. Der erste macht in $1\frac{1}{4}$ Stunde den Weg von A nach B, der andere aber in derselben Zeit nur $\frac{3}{4}$ der Länge des Weges. Wann wird der erste Bote den zweiten einholen?

140) Wie heißt die Auflösung der vorigen Aufgabe, wenn für $1\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ die allgemeinen Zeichen p und q gesetzt werden?

141) Morgens um 6 Uhr fährt von Köln ein Dampfschiff nach Coblenz, und Mittags um 12 Uhr ein anderes von Coblenz nach

---

*) Eine Sonnenfinsterniß heißt **central**, wenn die Mittelpuncte der Sonnen- und Mondscheibe im Verlaufe der Finsterniß zusammenfallen; dieselbe kann **total** oder **ringförmig** sein.

Köln. Das erste kommt um 6 Uhr Abends in Coblenz, und das zweite um 5 Uhr Abends in Köln an. Um wie viel Uhr und in welcher Entfernung von Köln begegnen die Dampfschiffe einander, wenn die Strecke zwischen Köln und Coblenz zu Wasser $12\frac{1}{2}$ Meile beträgt?

142) Zwei sich gleichförmig bewegende Körper laufen zu gleicher Zeit von zwei um 18 Fuß von einander entfernten Puncten hinter einander. Der vorangehende legt alle 6 Minuten 5 Fuß, der nachfolgende alle 8 Minuten 7 Fuß zurück. Nach wie viel Minuten wird ihre wechselseitige Entfernung 15 Fuß betragen?

143) Zwei sich gleichförmig bewegende Körper gehen von zwei um d Fuß von einander entfernten Orten A und B zu gleicher Zeit nach derselben Richtung hin; der vorangehende macht in jeder Secunde c, der nachfolgende in jeder Secunde c' Fuß. In welcher Zeit wird ihre Entfernung l Fuß sein? Was wird aus dem Resultate, wenn $d = l$, wenn $d < l$ und $c' > c$ ist?

144) Zwei Körper bewegen sich zu gleicher Zeit von zwei um 243 Fuß von einander entfernten Puncten gegen einander; der eine legt jede Minute 5, der andere jede Minute 7 Fuß zurück. In welcher Zeit wird ihre Entfernung 39 Fuß betragen?

145) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 243, 5, 7 und 39 die allgemeinen Zeichen d, c, c' und l gesetzt werden? Was wird aus dem Resultate, wenn $d = l$, was, wenn $d < l$ ist?

146) Wie heißt das Resultat der vorhergehenden Aufgabe, wenn die beiden Körper nicht gegen einander, sondern von einander laufen?

147) Zwei Körper, von denen der nachfolgende jede Minute sich um n Fuß schneller bewegt, als der vorangehende, laufen zu gleicher Zeit aus zwei Puncten A und B nach derselben Richtung und haben nach t Minuten die Entfernung l. Wie groß ist der Abstand der Puncte A und B? Wann waren die Körper beisammen oder werden sie beisammen sein?

148) Ein Dampfschiff und ein Segelschiff fahren beide von einem Orte M nach einem Orte N; das erste macht alle 3 Stunden 7, das zweite in derselben Zeit nur 2 Meilen. Das Segelschiff hat schon $3\frac{1}{3}$ Meile zurückgelegt, ehe das Dampfschiff abfährt, und kommt 5 Stunden später an, als das zweite. Wie viel Zeit gebraucht das Dampfschiff von M bis N, und wie weit ist der erste Ort von dem zweiten entfernt?

149) Ein Fußgänger und ein Reiter machen beide denselben

Weg von C nach D. Der erste, der $5\frac{3}{4}$ Stunden früher abgeht, legt alle 7 Stunden 3 Meilen, der zweite aber alle 5 Stunden 6 Meilen zurück. Nach welcher Zeit wird der Fußgänger doppelt so viel Weg zurückgelegt haben, als der Reiter? nach welcher Zeit der Reiter doppelt so viel Weg als der Fußgänger?

150) Ein Dampfschiff und ein Segelschiff fuhren beide von einem Orte C nach einem stromabwärts gelegenen Orte D, und letzteres hatte, ehe ersteres abging, bereits eine halbe Meile zurückgelegt. Das Dampfschiff kam in D an, hielt sich daselbst $1\frac{1}{2}$ Stunde auf und langte, obschon es *gegen* den Strom nur mit *halber* Geschwindigkeit fahren konnte, zu derselben Zeit am Orte C an, zu der das andere Schiff den Ort D erreichte. Wenn man nun weiß, daß das Dampfschiff stromabwärts stündlich $2\frac{1}{3}$, das Segelschiff aber stündlich nur $\frac{2}{3}$ Meilen zurücklegt, wie läßt sich hiernach die Entfernung der Orte C und D bestimmen?

151) Von einer Stadt C fährt ein Dampfschiff stromaufwärts nach einer Stadt M. Eine Stunde später fährt aus M ein Dampfschiff nach C. Das erste Dampfschiff legt alle 4 Stunden 5 Meilen, das zweite alle 3 Stunden $8\frac{1}{2}$ Meile zurück. Nach einiger Zeit treffen sich beide Dampfschiffe, und es findet sich, daß das stromabwärts fahrende einen doppelt so großen Weg zurückgelegt hat als das andere. Wie läßt sich hiernach die Entfernung der beiden Städte C und M bestimmen?

152) Ein Dampfwagen geht von einem Orte A nach einem westlich gelegenen Orte B, der mit ihm gleiche geographische Breite hat, und macht jede Stunde 32 englische Meilen. Wegen Verschiedenheit der Ortsuhren gewinnt der Wagen außerdem bei je 10 Meilen, die er zurücklegt, eine Minute an Zeit. Wenn nun der aus A Morgens um 9 Uhr, nach der Ortszeit, abgehende Wagen in B Nachmittags 4 Uhr 6 Minuten, nach der Uhr des Ortes B, anlangt, wie weit sind beide Orte von einander entfernt?

153) Ein Eilwagen, der alle 4 Stunden 5 Meilen macht, ging von einer Stadt A nach einer Stadt B, hielt sich daselbst eine Stunde auf und kehrte wieder nach A zurück. Ein Fußgänger, der im Durchschnitte alle 3 Stunden 2 Meilen zurücklegte, ging zu gleicher Zeit mit dem Eilwagen aus der Stadt A und begegnete demselben auf dessen Rückkehr nach 9 Stunden. Wie weit ist A von B entfernt und wie viel Meilen hatte der Fußgänger noch abzumachen?

154) Um 12 Uhr stehen die beiden Zeiger einer Uhr über ein-

ander. Wann und wie oft werden die Zeiger in den nächsten zwölf Stunden über einander stehen *)?

155) α) Wie oftmal und wann werden die beiden Zeiger einer Uhr in gerader Linie einander gegenüber stehen? β) Wann und wie oftmal werden die beiden Zeiger einen rechten Winkel mit einander bilden? γ) Eine Uhr habe drei Zeiger, einen Stunden-, Minuten- und Secunden-Zeiger. Um wie viel Uhr zum ersten Male nach halb ein Uhr wird 1) der Secundenzeiger den Stundenzeiger einholen, 2) der Secundenzeiger gerade in der Mitte zwischen dem Stunden- und Minutenzeiger stehen, 3) der Secundenzeiger den Minutenzeiger einholen?

156) α) Zwei Körper laufen hinter einander auf der Peripherie eines Kreises, welcher eine Länge von m Raumeinheiten hat. Ihre Entfernung beträgt d Raumeinheiten. Der vorangehende bewegt sich t Zeiteinheiten früher oder später als der folgende; jener macht in jeder Zeiteinheit c, dieser c' Raumeinheiten. Wann werden diese Körper zum ersten, zweiten, dritten u. s. w. n-ten Male zusammentreffen? β) Wie heißt das Resultat der Aufgabe, wenn die beiden Körper gegen einander laufen?

157) Zwei Körper, deren Entfernung 9 Fuß ist, bewegen sich gleichförmig hinter einander auf der Peripherie eines Kreises. Zum ersten Male treffen sie sich nach 2, zum zweiten Male nach 10 Minuten. Wie groß ist die Peripherie des Kreises?

158) Zwei Körper bewegen sich gleichförmig hinter einander auf der Peripherie eines Kreises. Zum ersten Male treffen sie sich nach t, zum zweiten Male nach t' Secunden. Wann werden sie sich zum dritten Male treffen?

159) Von drei Pendeluhren gibt die erste ganz genau die mittlere Sonnenzeit an, die zweite geht täglich 5 ihrer Minuten vor, die dritte bleibt täglich 8 ihrer Minuten zurück. Heute Mittag Punct 12 Uhr zeigte die zweite 11 Uhr 40 Minuten, die dritte 12 Uhr 48 Minuten. Nach welcher Zeit werden die beiden letzteren Uhren, welche übrigens einen gleichmäßigen Gang beibehalten, genau in der Angabe der Zeit übereinstimmen, und wie viel zeigen dieselben?

160) α) Von der Erde aus gesehen, vollendet der Mond seinen Lauf am Himmel in 27 Tagen 7 Stunden 43 Minuten 4,68 Secunden; die Sonne dagegen vollendet ihren scheinbaren Lauf in 365 Tagen 5 Stunden 48 Minuten 47,8 Secunden. Beide Himmels-

*) Diese Aufgabe läßt sich nach der 143. Aufgabe lösen, wenn man nur $d = 0$ und l entweder 60 oder 120, oder 180 u. s. w. Bogenminuten gleich setzt.

körper schreiten durch die Sternbilder des Thierkreises Widder, Stier, Zwillinge u. s. w., von Westen gegen Osten fort. Wie viel Tage verfließen von einem Neumonde (Zusammenkunft des Mondes mit der Sonne) bis zu einem anderen? β) Der Planet Venus läuft in derselben Zeit, in welcher die Erde 5 Mal um die Sonne sich bewegt, also in 5 Jahren, nahe 8 Mal um die Sonne. Er kommt von Zeit zu Zeit zwischen Sonne und Erde (untere Conjunction der Venus mit der Sonne), und zu einer anderen Zeit befindet er sich auf der Verlängerung der Linie von der Erde zur Sonne (obere Conjunction mit der Sonne). a) Welche Zwischenzeit verfließt zwischen zwei auf einander folgenden Conjunctionen mit der Sonne; b) zwischen einer unteren und der nächstfolgenden oberen Conjunction mit der Sonne? Wie viel Monate erscheint demnach c) Venus als Morgenstern, wie viel d) als Abendstern?

161) α) Ein sich gleichförmig fortbewegender Körper beschreibt die Peripherie eines Kreises in t Secunden und wird von einem anderen Körper, der sich ebenfalls gleichförmig nach derselben Richtung fortbewegt, alle t' Secunden eingeholt. In welcher Zeit vollendet der zweite Körper einen Umlauf? β) Von drei auf einander folgenden in gerader Linie liegenden Puncten, A, B und C, bewegen sich drei Körper mit den bezüglichen Geschwindigkeiten c', c'' und c''' nach derselben Richtung über C hinaus; B sei von A m, C von A n Längeneinheiten entfernt. Nach wie viel Zeiteinheiten wird der Körper von A sich gerade in der Mitte zwischen den Körpern von B und C befinden? Liegt diese Zeit gerade in der Mitte zwischen den beiden Zeiten, in welchen er mit den beiden letzteren Körpern zusammentrifft? Beispiel $m = 24$, $n = 36$, $c' = 8$, $c'' = 4$, $c''' = 6$.

162) Ein Hase, der von einem Hunde verfolgt wird, hat 90 Sprünge voraus und macht in derselben Zeit 5 Sprünge, in welcher der Hund deren 4 macht. Wenn nun 7 Hasensprünge an Größe so viel betragen, als 5 Hundesprünge, wie viel Sprünge muß der Hund noch machen, um den Hasen einzuholen?

163) An einer Mauer, welche eine Länge von 80 Fuß, eine Breite von 3 Fuß und eine Höhe von 12 Fuß hat, arbeiten zwei Maurer, von denen der eine, wenn er täglich 9 Stunden arbeitet, in einem Tage eine Schachtruthe (à 144 Kubikfuß), der andere, wenn er täglich 11 Stunden arbeitet, in 9 Tagen 10 Schachtruthen aufzuführen im Stande ist. In welcher Zeit wird die Mauer fertig, wenn jeder der Maurer täglich 10 Stunden arbeitet und der erste 5 Tage, der zweite aber nur 2 Tage versäumt?

164) Aus einem Wasserbehälter, der 1054 Quart Wasser faßt und bis zur Hälfte gefüllt ist, fließen durch eine Röhre in je 7

Minuten 51 Quart Wasser aus. Durch eine andere Röhre fließen in denselben Behälter in je 4 Minuten 47 Quart Wasser hinzu. Wenn nun die letzte Röhre 11 Minuten später geöffnet wird als die erste, nach welcher Zeit wird der Wasserbehälter angefüllt sein?

165) Bacchus trank einst mit Silen um die Wette; ersterer hatte schon 6 Becher voraus, als dieser zu trinken anfing, und leerte in derselben Zeit 5 Becher, in welcher Silen nur 3 Becher zu leeren im Stande war. Recht viel zwar konnten Beide vertragen, Bacchus gerade noch einmal so viel als Silen, doch es erlagen, nachdem sie manchen Becher geleert, Beide erschöpft zu gleicher Zeit. Wie viel Becher hatte jeder von ihnen geleert?

166) α) Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden. Durch die erste kann solches in 4, durch die zweite in 10, durch die dritte in 15 Stunden geschehen. In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt sein, wenn alle drei Röhren zugleich fließen? β) Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für 4, 10 und 15 die allgemeinen Zeichen m, n und p gesetzt werden?

167) An einem Mühlenteiche befinden sich drei Schleusen: zwei zum Zuflusse und die dritte zum Abflusse. Ist der Teich leer, so kann er durch Oeffnung der ersten Schleuse in $1\frac{1}{4}$ Tag, durch Oeffnung der zweiten Schleuse in $1\frac{3}{4}$ Tagen angefüllt werden; ist aber der Teich voll, so kann ihn die dritte Schleuse in $\frac{3}{4}$ Tagen ausleeren. In wie viel Tagen wird der leere Teich angefüllt sein, wenn alle drei Schleusen zugleich geöffnet werden?

168) Ein Wasserbehälter kann, wenn er leer ist, durch eine von drei Röhren in m Stunden, durch eine andere in n Stunden gefüllt, und wenn er voll ist, durch eine dritte in p Stunden ausgeleert werden. In wie viel Stunden wird der leere Wasserbehälter gefüllt, oder der volle ausgeleert sein, wenn alle drei Röhren gleichzeitig geöffnet werden, die beiden ersten zum Zuflusse, die dritte zum Abflusse? Wie können die beiden Resultate dieser Aufgabe aus einander und aus dem Resultate der 166. Aufgabe abgeleitet werden?

169) Aus zwei kreisrunden Oeffnungen eines Behälters von verschiedener Größe fließt das Wasser mit ungleichen Geschwindigkeiten aus. Man weiß, daß die Durchmesser der Oeffnungen sich wie $3:7$*), die Geschwindigkeiten der Wasserströme aber wie $7:9$ verhalten; man weiß ferner, daß aus der einen Oeffnung in einem gewissen Zeitraume 1458 Quart Wasser weniger flossen, als aus der anderen. Wie viel Wasser gab nun jede Oeffnung in diesem Zeitraume?

170) Zwei Fußgänger gehen zu gleicher Zeit von einem Orte A

*) Siehe Bemerkung zu Beispiel 36 in §. 33a.

nach einem Orte B ab. Ihre Schritte verhalten sich in Hinsicht ihrer Größe, wie 5 : 6, und in Hinsicht ihrer Anzahl während derselben Zeit, wie 7 ; 6. Nach einer gewissen Zeit erreicht der zweite Fußgänger den Ort der Bestimmung, während der erste noch um 200 seiner Schritte zurück ist. Wie viel Schritte macht jeder derselben von A nach B?

171) Zwei Maurer führen in einer gewissen Zeit zusammen 34 Schachtruthen Mauerwerk aus; ihr beiderseitiger Fleiß steht in dem Verhältnisse 4 : 5, ihre Ausdauer in dem Verhältnisse 10 : 9. Wie viel Schachtruthen führt jeder der beiden Maurer aus?

172) α) Acht Pferde haben in 7 Wochen eine Wiese von 400 Quadratruthen so abgeweidet, daß sie sowohl das Gras, welches im Anfange bereits da stand, als auch jenes abfraßen, welches während dieser Zeit darauf gewachsen war. Auf dieselbe Weise haben bei gleichem Futter 9 Pferde in 8 Wochen eine Wiese von 500 Quadratruthen abgeweidet. Wie viel Pferde können auf diese Art 12 Wochen lang auf einer Wiese von 600 Quadratruthen weiden?*) β) Wie heißt allgemein die Auflösung der Aufgabe, wenn für die Zahlen 8, 7, 400, 9, 8, 500, 12 und 600 die Zeichen a, c, b, d, f, e, h und g gesetzt werden?

173) In einem Bergwerke befinden sich zur Herausschaffung des Grubenwassers an verschiedenen Orten zwei Dampfmaschinen, welche Tag und Nacht hindurch arbeiten. Die eine schafft alle 5 Minuten 11 Ohm Wasser aus einer Tiefe von 465 Fuß. Die zweite bringt alle 10 Minuten 31 Ohm auf eine Höhe von 264 Fuß. Beide Dampfmaschinen zu ersetzen, hätte man 54 Pferde nöthig. Wie viel Pferde ersetzt jede Dampfmaschine einzeln?

174) Man beabsichtigt das Grundwasser eines Bergwerkes aus einer Tiefe von $830\frac{1}{2}$ Fuß zu heben, und wendet zu diesem Zwecke zwei Dampfmaschinen an, von welchen die eine, unterirdisch angebracht, das Wasser bis auf eine gewisse Höhe in einen großen Behälter bringen, die andere aber, über der Erde stehend, dasselbe aus jenem Behälter völlig in die Höhe schaffen soll. Die erste Maschine ist im Stande, alle 6 Minuten 13 Ohm Wasser 504 Fuß zu heben, die zweite vermag alle 3 Minuten 10 Ohm 216 Fuß hoch zu fördern. In welcher Höhe über der Sohle ist der Wasserbehälter anzubringen?

175) In einem Kohlenbergwerke befanden sich zur Förderung der Steinkohlen zwei Dampfmaschinen. Die erste brachte in je 5 Stunden 1728 Centner auf eine Höhe von 625 Fuß, die zweite in je 3

*) Man suche aus den beiden ersten Aufgaben zuerst den Zuwachs, den je 100 Quadratruthen in einer Woche erleiden u. s. w.

Stunden 1600 Centner auf eine Höhe von 540 Fuß. Beide Dampfmaschinen wurden an denselben Ort hingebracht, und es fand sich, daß, nachdem die erste bereits $1\frac{3}{4}$ Stunden gearbeitet hatte, ehe die zweite anfing, diese doch nach 7 Stunden 225 Centner mehr lieferte, als jene. Wie läßt sich aus diesen Angaben die Tiefe berechnen, aus der beide Maschinen die Steinkohlen zu Tage förderten?

176) In einem Bergwerke befinden sich 3 Dampfmaschinen: die erste schafft alle 2 Minuten 7 Ohm Wasser aus einer Tiefe von 261 Fuß, die zweite alle 4 Minuten 9 Ohm Wasser aus einer Tiefe von 464 Fuß, die dritte endlich alle 3 Minuten $7\frac{1}{4}$ Ohm aus einer Tiefe von 324 Fuß. In welcher Zeit würden alle 3 Maschinen vereinigt 2436 Ohm Wasser auf eine Höhe von 810 Fuß zu bringen im Stande sein?

177) Vier Ursachen bringen einzeln in den Zeiten t, t', t'' und t''' die Wirkungen e, e', e'' und e''' hervor. In welcher Zeit bringen die vier Ursachen, gleichzeitig wirkend, die Wirkung E hervor?

---

178) Jemand soll 2007 Thlr. nach 5 Monaten, 3395 Thlr. nach 7 Monaten, 6740 Thlr. nach 13 Monaten zahlen. Nach wie viel Monaten ist die ganze Summe von 12142 Thlrn. zu bezahlen?*)

179) Jemand soll in 5 Terminen folgende Summen bezahlen: a Thaler nach p, b Thaler nach q, c Thaler nach r, d Thaler nach s und e Thaler nach t Monaten. Nach wie viel Monaten kann er die Summe $a+b+c+d+e$ auf ein Mal entrichten?

180) Jemand hat 3 Summen zu bezahlen, und zwar 1013 Thaler nach $3\frac{1}{2}$ Monat, 431 Thaler 4 Monate später und die letzte Summe endlich wieder 4 Monate später. Wie groß ist diese letzte Summe, wenn er die drei Summen zusammen in $6\frac{1}{4}$ Monat, ohne Nutzen und Schaden zu haben, bezahlen kann?

181) Jemand hat 1980 Thlr. nach $5\frac{1}{2}$ Monat zu zahlen; da er aber diese Summe nicht auf einmal entrichten kann, so bezahlt er nach 3 Monaten 440 Thaler, $1\frac{1}{2}$ Monat später 550 Thaler und wieder 2 Monate später 770 Thaler. Wie lange kann er den Rest von 220 Thalern noch in Händen behalten?

182) Jemand übernimmt ein Geschäft mit der Bedingung, in 10 Monaten eine gewisse Summe zu bezahlen. Er kommt mit dem Eigenthümer des Geschäftes überein, ihm nach einer bestimmten Zeit, und zwar in 4 Terminen von 3 zu 3 Monaten jedes Mal den vierten Theil der Summe abzutragen. Nach wie viel Monaten beginnt die erste Zahlung?

*) Der Disconto werde bei diesem Beispiele, wie bei den folgenden, jedesmal wie gebräuchlich in Hundert gerechnet. Man vergleiche die Beispiele 22 u. 23 in §. 105, bei welchen der Disconto auf Hundert gerechnet wird.

183) Jemand hat eine Summe von 1698 Thlrn. nach $4\frac{1}{2}$ Monat abzutragen. Er kommt mit dem Gläubiger überein, nach einer bestimmten Zeit 324 Thlr. zu zahlen, 3 Monate später 384 Thlr., alsdann 2 Monate später 530 Thlr. und zuletzt nach $1\frac{1}{2}$ Monat den Rest abzutragen. Nach wie viel Monaten beginnt die Zahlung?

184) Jemand kauft ein Haus für 6300 Thaler unter der Bedingung, diese Summe nach 15 Monaten zu zahlen. Er kommt mit dem Verkäufer überein, nach 3 Monaten 700 Thaler, und nach dieser Zeit in 5 gleichen Terminen jedes Mal 1120 Thaler abzutragen. In welchen Terminen erfolgen die Zahlungen?

185) Jemand hat eine bestimmte Summe in 10 Monaten zu zahlen. Er kommt mit dem Gläubiger überein, in vier Terminen, von denen jeder um $2\frac{1}{2}$ Monat länger sei, als der ganze vorhergehende, jedes Mal den vierten Theil der Summe abzutragen. Wie viel Monate muß der erste Termin umfassen, wenn der Disconto in Hundert gerechnet wird und keiner der Betheiligten Nutzen oder Schaden erleiden soll?

186) Jemand hat eine Summe von 2000 Thalern nach 14 Monaten zu zahlen; er kommt mit dem Gläubiger überein, in 5 Terminen, von welchen jeder um $1\frac{1}{2}$ Monat länger sei, als der ganze vorhergehende, die Schuld abzutragen, und zwar bei dem ersten Termine 200 Thaler und bei jedem folgenden 100 Thaler mehr. Nach welcher Zeit muß der erste Termin angesetzt werden, wenn den Betheiligten weder Nutzen noch Schaden erwachsen soll?

187) Jemand hat eine bestimmte Summe nach einer gewissen Zeit zu zahlen. Er kommt mit dem Gläubiger überein, die Summe in vier gleichen Terminen, von denen jeder $\frac{1}{3}$ der festgesetzten Zeit betragen soll, zu entrichten, und zwar in jedem folgenden Termine 100 Thaler mehr, als in dem vorhergehenden. Wie groß ist die zu bezahlende Summe?

188) α) Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte gibt A 200 Thaler auf 4 Monate, B 160 Thaler auf 6 Monate, und C 120 Thaler auf 8 Monate. Wie viel bekommt Jeder von 136 Thalern Gewinn? β) Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für die Zahlen 200, 4, 160, 6, 120, 8 und 136 bezüglich die allgemeinen Zeichen $m, p, n, q, o, r,$ und S gesetzt werden?

189) Jemand vermachte kurz vor seinem Absterben durch ein Legat einer weitwohnenden Witwe nebst ihrem Kinde eine Summe von 3800 Thalern. Da ihm nicht bekannt war, ob das Kind ein Sohn oder eine Tochter sei, so bestimmte er, daß, falls die Witwe einen Sohn habe, die Mutter $\frac{2}{5}$, der Sohn $\frac{3}{5}$ des Legates erhalten solle; besitze aber die Mutter eine Tochter, so solle umgekehrt, die Mutter $\frac{3}{5}$, die Tochter $\frac{2}{5}$ der genannten Summe

erhalten. Auf Nachfrage ergibt sich, was dem Erblasser nicht bekannt war, daß die Erbin Mutter zweier Kinder war, eines Sohnes und einer Tochter. In welcher Weise war nun nach dem Willen des Erblassers das Legat von 3800 Thalern zu vertheilen?

190) Drei Fuhrleute haben zusammen 136 Thaler verdient. A hat 30 Centner 10 Meilen weit, B 12 Centner 15 Meilen weit, C 25 Centner 8 Meilen weit gefahren. Wie viel kommt Jedem zu?

191) Ein Arbeiter verdient, wenn er täglich 9 Stunden arbeitet, in 8 Tagen so viel, als ein anderer in 7 Tagen, wenn er täglich 10 Stunden arbeitet. Einige Zeit hindurch haben beide gemeinschaftlich jeden Tag gleich viel Stunden gearbeitet und zusammen 16 Thlr. 17 Sgr. verdient. Wie viel gebührt jedem derselben?

192) Drei Kaufleute, A, B und C, legen zu einem Geschäfte gemeinschaftlich bei und kommen überein, den Gewinn verhältnißmäßig nach den Einlagen, den Verlust aber im umgekehrten Verhältnisse der Einlagen zu theilen. Wenn nun A 2970 Gulden, B 6930 Gulden und C 3080 Gulden einlegt und nach einem Jahre sich ein Verlust von 2345 Gulden ergibt, wie viel hat jeder der Theilnehmer am Verluste zu tragen?

193) Ein Kaufmann A handelt 6 Monate lang mit 3000 Gulden, darauf läßt er den B und C an seinem Handel Theil nehmen. B trägt 1800 Gulden, C 2000 Gulden bei. Nachdem sie 10 Monate gehandelt hatten, tritt ein Vierter, D in die Gesellschaft, kauft dem A 1200 Gulden, dem B 400 Gulden ab, und schießt außerdem noch 600 Gulden dazu. Nach 8 Monaten nehmen diese einen Fünften, E, in ihre Gesellschaft auf, der dem A 200 Gulden, dem B ebenfalls 200 Gulden abkauft und noch 1000 Gulden besonders beiträgt. Vier Monate nachher trennen sich die Mitglieder der Gesellschaft und haben 13272 Gulden Gewinn unter sich zu theilen. Wie viel fällt auf Jeden, wenn A und C außerdem wegen besonderer Dienstleistungen so vergütet werden sollen, daß A $12\frac{1}{2}$ pCt. und C 5 pCt. mehr erhalten, als ihnen sonst nach dem Verhältnisse ihrer Einlagen zukommen würde?

194) Drei Bauern miethen für 180 Gulden eine Wiese zur Weide für ihr Vieh. A treibt eine bestimmte Menge Vieh 12 Wochen lang, B 11 Stück mehr, als A, 10 Wochen lang, und C endlich 50 Stück 13 Wochen lang auf dieselbe. Wenn nun C $97\frac{1}{2}$ Gulden bezahlt, wie viel müssen A und B einzeln bezahlen?

195) Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte gibt A 2000 Thaler; 5 Monate später tritt B mit 5000 Thalern, und wieder 5 Monate später C mit 4000 Thalern ein. Nachdem sie einige Zeit zusammen gehandelt haben, trennen sie sich. Wenn nun von dem

gemeinschaftlichen Gewinne von 6956 Thalern C 1924 Thaler erhält, wie lange befand sich C im Geschäfte, und wie viel erhalten A und B?

196) α) Zu einer gemeinschaftlichen Mahlzeit gibt Cajus 7, Sempronius 8 Schüsseln, jede von gleichem Werthe. Ehe sie die Mahlzeit beginnen, kommt Titus hinzu und setzt sich mit zu Tische. Nachdem er gegessen, zahlt er 30 Silberlinge und vertheilt dieselben unter Cajus und Sempronius nach Verhältniß der Anzahl der Schüsseln, welche Jeder mitbrachte; ersterem zahlt er 14, letzterem 16 Silberlinge. Sempronius, hiermit nicht zufrieden, verlangt richterlichen Ausspruch. Wie lautet derselbe? β) Drei Knaben setzen sich unter einen Baum, um ihr mitgebrachtes Obst zu verzehren. Der erste legte 17, der zweite 14, der dritte 11 Pflaumen vor sich hin. Als sie eben anfangen wollten, kam ein anderer Knabe hinzu. Darf ich mitessen? — Recht gern! war die Antwort, und sie verzehrten die sämmtlichen Pflaumen zu gleichen Theilen. Der vierte Knabe legte dafür 42 Nüsse hin, welche die Zurückbleibenden unter sich in der Weise vertheilten, daß der erste 17, der zweite 14, der dritte 11 erhielt. War die Vertheilung richtig? Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für 17, 14, 11 und 42 die allgemeinen Zeichen a, b, c und $a+b+c$ gesetzt werden?

---

197) Welche Zahl muß zu jeder der Zahlen 3 und 7 addirt werden, wenn das Verhältniß der Summen dem Verhältnisse der Zahlen 3 : 4 gleich werden soll?

198) Um welche Zahl muß ich die beiden Glieder des Verhältnisses 339 : 355 vermehren oder vermindern, damit das Verhältniß sich in das Verhältniß 21 : 22 verwandele?

199) Welche Zahl muß vom Nenner und Zähler des Bruches $\frac{79}{87}$ subtrahirt werden, damit der Werth desselben gleich $\frac{3}{4}$ wird?

200) Vier Orte, A, B, C und D, liegen hinter einander auf einer Landstraße. Gehe ich gleichmäßig fort, so gebrauche ich von A bis B $2\frac{1}{4}$ Stunde, von C bis D 5 Stunden. Die Zeit, die ich von A bis C gebrauche, verhält sich zu der, die ich von B bis D nöthig habe, wie 3 : 5. In wie viel Stunden mache ich den Weg von B bis C?

201) α) Um welche Größe muß jede der Größen a und b vermehrt oder vermindert werden, damit das Verhältniß der Summen oder Differenzen dem Verhältnisse $p : q$ gleich werde?

β) Zu zwei Zahlen, a und b, eine dritte Zahl zu suchen, so daß der Unterschied zwischen der ersten und dritten sich zum Unterschiede zwischen der dritten und zweiten verhält, wie die erste zur zweiten.

Bemerkung. Eine solche Zahl heißt das harmonische Mittel der beiden Zahlen. Der reciproke Werth des harmonischen Mittels zweier Zahlen ist gleich der halben Summe der reciproken Werthe der beiden Zahlen. Warum?

202) Von welcher Zahl muß ich die beiden Größen $a-b$ und $a+b$ abziehen, damit das Verhältniß der beiden Differenzen dem Verhältnisse $a:b$ gleich werde?

203) Ein Bote, der von einem Orte A nach einem anderen B geht, findet einige Zeit nach seiner Abreise, daß das Verhältniß des abgemachten Weges zu dem noch zurückzulegenden gleich dem Verhältnisse 2 : 3 ist, und daß, wenn er noch 8 Meilen weiter reiset, genanntes Verhältniß in das von 6 : 5 übergehen muß. Wie weit ist A von B entfernt?

204) Durch 5 hinter einander liegende Dörfer, A, B, C, D und E, geht eine Landstraße; A ist von B $3\frac{1}{2}$ Meile, D von E $\frac{1}{4}$ Meile entfernt. Die beiden Entfernungen BC und CD stehen in dem Verhältnisse 2 : 3, und die beiden Entfernungen AC und CE in dem Verhältnisse 3 : 2. Wie weit ist B von C und C von D entfernt?

205) Vermehre ich das erste Glied des Verhältnisses $m:n$ um eine gewisse Zahl, und vermindere das zweite Glied um das $p$fache derselben Zahl, so ist das Verhältniß der beiden veränderten Glieder dem Verhältnisse $r:s$ gleich. Wie heißt jene Zahl?

206) Drei Spieler, A, B und C, spielen Karten; A brachte 10, B 57, C 29 Thaler mit. Nach dem Spiele verhält sich der Antheil des A zu dem des B, wie 1 : 3, und der Antheil des C verhält sich zu dem Gewinne des A, wie 3 : 1. Wie viel hatte C gewonnen oder verloren?

Mischungs-Aufgaben.

207) Ein Kaufmann hat zweierlei Sorten Tabak; von der einen kostet das Pfund 20 Sgr., von der anderen 12 Sgr. Er will beide Sorten mit einander vermengen, so daß er das Pfund ohne Nutzen und Schaden zu 17 Sgr. verkaufen kann. Wie viel muß er, um 64 Pfund zu erhalten, von jeder Sorte nehmen?

208) Wie heißt die Auflösung der vorigen Aufgabe, wenn für 20, 12, 17 und 64 die allgemeinen Zeichen m, n, p und a gesetzt werden? Ist die Auflösung immer möglich?

209) Ein Essighändler will seinen zu starken Essig mit Wasser verdünnen. Unvermischt würde er die Ohm (à 120 Quart) zu

$7\frac{1}{4}$ Thaler verkaufen. Wie viel Wasser muß er zu $29\frac{1}{2}$ Ohm hinzusetzen, um das Quart zu $1\frac{1}{2}$ Sgr. verkaufen zu können?

210) Jemand will zwei Weinsorten in dem Verhältnisse 3 : 2 mit einander vermischen. Die Ohm der einen Weinsorte kostet 48 Thaler. Von welchem Preise muß er die zweite Weinsorte nehmen, um Wein zu erhalten, von dem die Ohm 42 Thlr. kostet? Von welchem Preise muß aber die Ohm der zweiten Sorte sein, wenn die Ohm der ersten Sorte 70 Thlr. kostet?

211) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für die Zahlen 3, 2, 48 und 42 die allgemeinen Zeichen a, b, m und p gesetzt werden, und in welchem Falle ist die Auflösung der Aufgabe unmöglich?

212) $94\frac{1}{2}$ Pfund einer aus 3 Theilen Silber und 4 Theilen Kupfer bestehenden Mischung sollen so mit Kupfer versetzt werden, daß auf 7 Theile Kupfer 2 Theile Silber kommen. Wie viel Kupfer muß zu der Mischung gesetzt werden?

213) In 255 Pfund eines Weingeistes sind Wasser und Alkohol (wasserfreier Weingeist) dem Gewichte nach in dem Verhältnisse 2 : 3 gemischt. Wie viel Wasser muß dem Weingeiste durch Destilliren entzogen werden, damit das Gewichtsverhältniß des Wassers und des Alkohols 3 : 17 wird?

214) Wie viel Procent Wasser muß dem Wasser einer 6löthigen Salzsoole (d. i. Salzwasser, welches in 100 Loth 6 Loth Salz enthält), entzogen werden, wenn dieselbe 18löthig werden soll?

215) Wie viel 24löthige Salzsoole muß zu 3715 Pfund einer 6löthigen Salzsoole hinzugesetzt werden, wenn die Mischung 16löthig werden soll?

216) Wie viel 14löthiges Silber und wie viel 10löthiges Silber müssen zusammengeschmolzen werden, um 15 Mark 13löthiges Silber zu erhalten?

217) Wie heißt die Auflösung der vorigen Aufgabe, wenn für 14, 10, 15 und 13 die allgemeinen Zeichen a, b, m und c gesetzt werden? Welche Beziehung muß zwischen den Größen a, b und c Statt finden, wenn die Auflösung der Aufgabe möglich sein soll?

218) Wie viel $14\frac{1}{4}$löthiges Silber muß zu 5 Mark $10\frac{1}{2}$löthigen Silber gesetzt werden, wenn die Mischung 12löthig werden soll?

219) Wie viel Kupfer muß zu 47 Mark $14\frac{1}{2}$löthigen Silber hinzugesetzt werden, wenn die Mischung $11\frac{3}{4}$löthig werden soll?

220) α) Zu 24 Mark $13\frac{1}{2}$löthigen Silber werden 12 Mark eines Metalls hinzugesetzt. Von welchem Gehalte ist das hinzugesetzte Metall, wenn die Mischung $13\frac{3}{4}$löthig, und von welchem Gehalte, wenn die Mischung 9löthig wird? β) Wie heißt die

Auflösung der Aufgabe, wenn für 24, $13\frac{1}{2}$, 12 und $13\frac{3}{4}$ die Zeichen a, m, b und q gesetzt werden? In welchem Falle ist die Auflösung der Aufgabe unmöglich?

221) Wie viel preuß. Thaler und wie viel Silberg. des älteren Gepräges müssen zusammengeschmolzen werden, um 31920 $\frac{1}{6}$-Thalerstücke (à 5 Sgr.), wie viel um a $\frac{1}{6}$-Thalerstücke zu erhalten?*)

Bemerkung. Gemäß dem Münzgesetze vom 30. September 1821 enthalten 14 Thaler eine feine Mark Silber. Von demselben Feingehalte sind die $\frac{1}{6}$-Thalerstücke, von denen also 84 eine feine Mark enthalten. In 30 Sgr. befindet sich 1 Loth Feinsilber. Das Verhältniß des Silbers zu Kupfer ist in den Thalern 3 : 1, in den $\frac{1}{6}$-Thalerstücken 25 : 23, und in den Silbergroschen 2 : 7.

222) Nach dem Münzvertrage vom 24. Januar 1857 soll das Neupfund ($\frac{1}{2}$ Kilogramm) als ausschließliches Münzgewicht eingeführt werden. Der Feingehalt der Silbermünzen soll nicht mehr, wie bisher, in Lothen, der des Goldes in Karaten angegeben werden, sondern der Feingehalt des Silbers und Goldes wird, wie es bisher in Frankreich üblich war, in Tausendtheilen angegeben. Folgende Aufgaben sollen hiernach gelös't werden:

α) Wie viel Silber von dem Feingehalte 700 [520] und wie viel von dem Feingehalte 900 [950] hat man zu nehmen, um 78 [100] Pfund Silber von dem Feingehalte 750 [821] zu erhalten?

β) Wie viel Pfund reines Silber hat man zu 1000 Pfund von dem Feingehalte 750 der alten preußischen Thaler hinzu zu setzen, damit Silber von dem Feingehalte 900 der neuen preuß. Thaler entstehe?

γ) Wie viel Pfund Kupfer hat man zu 1000 Pfund von dem Feingehalte der alten preußischen Thaler zu setzen, um Silber von dem Feingehalte 520 der neuen preuß. $\frac{1}{6}$-Thalerstücke zu erhalten?

δ) Wie viel Pfund Kupfer hat man mit 1000 Pfund Friedrichsd'or, welche im Gehalte $21\frac{2}{3}$karatig sind, zusammen zu schmelzen, um Gold von dem Gehalte 900, dem Gehalte der neuen Kronen, zu erhalten?

---

223) Vermindert man jeden der Factoren der beiden ungleichen Producte $52 \cdot 45$ und $66 \cdot 37$ um dieselbe Zahl, so werden die neuen Producte einander gleich. Wie heißt die Zahl?

224) Ein Schüler hat eine geometrische Proportion zwischen vier Zahlen. Da ihm die Zahlen zu groß dünken, so zieht er zur bequemeren Uebersicht von jedem der vier Glieder Gleiches ab und erhält hierdurch die falsche Proportion $41 : 93 = 7 : 51$. Wie heißt die ursprünglich richtige Proportion?

*) Als unbekannte Größe nehme man das Gewicht der zu suchenden Thaler.

225) Es soll eine Zahl von der Eigenschaft angegeben werden, daß, wenn man jedes der Glieder der Proportion $a : b = c : d$ um dieselbe vermehrt oder um dieselbe vermindert, eine zweite richtige Proportion zum Vorscheine kommt.

226) Zwei Zahlen, die zusammen 70 ausmachen, stehen in einem gewissen Verhältnisse. Das Verhältniß kehrt sich um, wenn die eine Zahl um 14 vermehrt, die andere um 14 vermindert wird. Wie heißen die Zahlen?

227) α) Das Quadrat einer gedachten Zahl ist um 1188 größer, als das Quadrat der um 6 kleineren Zahl. Wie groß ist die gedachte Zahl? β) Das Quadrat des Dreizehnfachen einer gedachten Zahl, weniger das Quadrat des um 3 vermehrten Zwölffachen, ist dem Quadrate des um 9 verminderten Fünffachen derselben Zahl gleich. Wie groß ist die gedachte Zahl?

228) In einer alten chinesischen Arithmetik, Kiu tschang benannt, welche 2600 vor Christus von Tsin Kiu Tschaou verfaßt sein soll, kommen folgende zwei Beispiele vor: 1) Im Mittelpuncte eines quadratischen Teiches von 10 Fuß Länge und Breite wächst ein Schilf, das sich einen Fuß hoch über dem Wasser erhebt. Als man dasselbe an das Ufer, nach der Mitte einer Seite zog, reichte es nur bis an den Rand des Teiches. Welche Tiefe hat das Wasser? 2) Ein 10 Fuß hoher Bambus ist nach oben hin gebrochen. Berührt nun beim Umbiegen die Spitze des Rohres den Boden, so ist sie 3 Fuß vom untersten Ende des Bambus entfernt. In welcher Höhe befindet sich der Bruch?*)

229) Vermehre ich eine Zahl, die ich im Sinne habe, um 2 und ziehe aus der Summe die Quadratwurzel, so erhalte ich 2. Wie heißt jene Zahl?

230) α) Lege ich eine bestimmte Anzahl Thaler, die ich besitze, in Form eines Quadrates neben einander, so fehlen mir 25 Thlr.; vermindere ich aber jede Seite des Quadrats um 2, so bleiben mir 31 Thaler übrig. Wie viel Thaler besitze ich? β) Eine bestimmte Anzahl Nüsse, die ich besitze, habe ich in Form eines gleichseitigen Dreieckes neben einander gelegt. Ich gewinne eine gewisse Menge, mit welcher ich versuche, das gleichseitige Dreieck zu vergrößern. Lege ich zwei Reihen dazu, so habe ich 9 Nüsse übrig, will ich drei Reihen hinzulegen, so fehlen mir eben so viel Nüsse, als ich vorhin übrig ließ. a) Wie viel Nüsse lagen

*) Bei beiden Beispielen kommt der pythagorische Lehrsatz in Anwendung. Ueber die Arithmetik der Chinesen vergleiche man Biernatzki in Crelle's Journal, B. 52, S. 76.

an jeder Seite? b) Wie viel Nüsse besaß ich Anfangs? c) Wie viel Nüsse habe ich gewonnen?

231) Ein Weinbauer will einen rechtwinkeligen Weingarten, dessen Länge sich zur Breite wie 7 : 5 verhält, mit Weinstöcken bepflanzen. Setzt er dieselben in gleichen Entfernungen neben einander, so bleiben ihm von einer gewissen Anzahl Stöcke 2832 übrig. Setzt er dieselben näher zusammen, so daß auf die längere Seite 14, auf die kürzere 10 Stöcke mehr kommen, so bleiben ihm nur 172 übrig. Wie viel Stöcke hat er zum Verpflanzen?*)

---

232) Ich habe drei hohle Würfel von verschiedener Größe; der erste ist 5 Zoll höher, als der zweite, und der zweite 5 Zoll höher, als der dritte. Fülle ich den zweiten leeren aus dem ersten vollen Würfel, und hierauf den dritten leeren aus dem zweiten vollen, so befinden sich im ersten Würfel 1350 Kubikzoll Wasser mehr als im zweiten. Wie viel Kubikzoll enthält jeder der drei Würfel?

233) Bilde ich von vier auf einander folgenden Zahlen die vierten Potenzen, subtrahire je zwei auf einander folgende von einander, ziehe hierauf je zwei der drei auf einander folgenden Differenzen und endlich die beiden letzten Differenzen von einander ab, so erhalte ich 204. Wie heißen die vier Zahlen?

234) α) Verkauft Jemand jede Ohm Wein für 44 Thaler $22\frac{1}{2}$ Silbergroschen, so verliert er ein gewisses Procent; hingegen gewinnt er eben so viel Procent, wenn er jede Ohm um so viel Thaler theurer verkauft, als er bei dem ersten Preise an je 100 Thalern verliert. Wie viel Procent verliert er bei dem ersten Preise**)? β) Wie heißt das Resultat der Aufgabe, wenn der Preis jeder Ohm Wein zu p gesetzt wird?

235) Welchen Zahlenwerth hat man in dem Producte: $(a^2+ab+xb^2)\ (a^2-ab+xb^2)$ für x zu setzen, damit das Product das einfache Resultat $a^4+x^2b^4$ gebe?

236) Welchen Zahlenwerth hat man in dem Producte: $(a^2+xab+xb^2)\ (a^2-xab+xb^2)$ für x zu setzen, damit aus demselben das Resultat $a^4+x^2b^4$ werde?

§. 64.

Auflösungen der Aufgaben in §. 63.

1) 37. 2) 36. 3) 36. 4) 53.

5) α) durch $\frac{1}{8}$ [13]; β) in 392 [637].

---

*) Man vergleiche die Bemerkung zu 35 in §. 33a.

**) Diese Aufgabe führt eigentlich auf eine Gleichung vom zweiten Grade.

6) α) 6; β) $\frac{27}{32}$. 7) Von 8. 8) 67. 9) 35 [7]. 10) $7\frac{1}{2}$ [24].
11) 2,9 [12]. 12) $(a-b)m$. 13) $361\frac{1}{8}$. 14) 343 [30].

15) $1\frac{1}{8}\left[\frac{p}{p-1}\right]$. 16) α) $\frac{n^2}{n-1}$ $[4\frac{1}{2}]$; β) $\frac{n^2}{n+1}$ $[2\frac{1}{4}]$. 17) 8 [4.]

18) α) $5\frac{1}{7}$; β) $\frac{n-q}{p-m}$ oder $\frac{q-n}{m-p}$. 19) α) 56; β) $\frac{1}{2}$.

20) 77 und 47 [21 und 9].

21) α) In der rechten 24, in der linken 30 Kreuzer; β) In der rechten 1 Thlr. 27 Sgr., in der linken 3 Thlr. 21 Sgr.

22) α) Die Nacht dauert 18 Stunden 30 Minuten, der Tag 5 Stunden 30 Minuten; Sonnenaufgang erfolgt um 9 Uhr 15 Minuten Morgens, Sonnenuntergang um 2 Uhr 45 Minuten Nachmittags; β) die anhaltende Nacht dauert $3\frac{1}{2}$ Monat*).

23) In der ersten Classe 23 [25], in der zweiten 27 [30], in der dritten 35 [36], in der vierten 38 [32] Schüler.

24) 12 Apfelbäume, 7 Birnbäume, 9 Kirschbäume, 8 Johannisbeersträuche und 15 Stachelbeersträuche. 25) 24 Fuß.

26) α) Zu 5 Thaler 19 Silbergroschen 8 Pfennigen; β) In dem Verhältnisse 16 : 51. 27) 187 Fuß.

28) α) 252 Kubikfuß Sauerstoffluft und 1008 Kubikfuß Stickstoffluft; β) $264\frac{3}{5}$ Kubikfuß Sauerstoffluft, $995\frac{2}{5}$ Kubikfuß Stickstoffluft. 29) 154 Loth.

30) 220 Cavalleristen, 660 Artilleristen und 2640 Infanteristen.

31) Die heiße Zone $3687007\frac{531}{1271}$, jede der gemäßigten Zonen $2404570\frac{70}{1271}$ und jede der kalten $382545\frac{300}{1271}$ Quadratmeilen.

32) Das erste 90, das zweite 100 und das dritte 480 Quart.

33) α) In der rechten Tasche 11, in der linken 5 Silbergroschen; β) In der rechten Tasche 86, in der linken 42 Kreuzer.

34) α) 1836 Thaler; β) 12800 Klafter.

35) 1818 Francs. 36) 32 Gulden. 37) 8750 Thaler.

38) $\frac{100}{100-p}k$. 39) 5200 Thaler. 40) 957 Thaler.

41) $\frac{100+p}{100}k = k + \frac{p}{100}k$ Thlr. 42) $\frac{100}{100+pn}k$ Thlr.

43) Zu $4\frac{1}{4}$ Procent. 44) In $7\frac{3}{4}$ Jahren. 45) 1700 Thlr.

46) Auf 1800 Thlr. 47) $\frac{100}{100-np}s$ Thlr. 48) In 25 Jahren.

49) Zu $6\frac{1}{4}$ Procent. 50) 900 Thlr. 51) 256.

*) Wegen der Refraction ist genau genommen die Zeit der völligen Abwesenheit der Sonne etwas geringer, als die der anhaltenden Anwesenheit

52) Der älteste hat 111 Thlr., der zweite 3 Thlr. 21 Sgr. und der dritte 9 Sgr. 3 Pfg.

53) 84 Thlr., 63 Sgr. und 18 Pfg.

54) A erhält 4608, B 3072 und C 2048 Thaler.

55) 765 Morgen auf Buchen, 685 auf Eichen und 461 auf Kiefern.

56) 5800 Thaler. 57) 12000 Thaler. 58) 12 Jahre.

59) Nach 20 Wochen. 60) 2000 Thlr. 61) $5\frac{1}{7}$ Stunde*).

62) Die Anzahl der Aepfel, welche Eros zu Anfange besaß, war 3360*).

63) 50 Jahre. 64) 28*). 65) 84 Jahre*). 66) 12.

---

*) Die Aufgaben 61, 62, 64 und 65 sind entnommen den „Arithmetischen Epigrammen der griechischen Anthologie", welche von Professor Zirkel in Bonn (siehe Programm des Gymnasiums zu Bonn, 1853) eine sorgfältige Bearbeitung erlitten haben. Die griechischen Originale lauten:

61) *Ὡρονόμων ὄχ' ἄριστε, πόσον παρελήλυθεν ἠοῦς;*
ὅσσον ἀποιχομένοιο δύο τρίτα, δὶς τόσα λείπει.

62) *Ἁ Κύπρις τὸν Ἔρωτα κατηφιόωντα προσηύδα·*
Τίπτε τοι, ὦ τέκος, ἄλγος ἐπέχραεν; ὃς δ' ἀπάμειπτο·
Πιερίδες μοι μῆλα διήρπασαν ἄλλυδις ἄλλη,
αἰνύμεναι κόλποιο, τὰ δὴ φέρον ἐξ Ἑλικῶνος.
Κλειὼ μὲν μήλων πέμπτον λάβε· δωδέκατον δὲ
Εὐτέρπη· ἀτὰρ ὀγδοάτην λάχε δῖα Θάλεια·
Μελπομένη δ' εἰκοστὸν ἀπαίνυτο· Τερψιχόρη δὲ
τέτρατον· ἑβδομάτην δ' Ἐρατὼ μετεκίαθε μοίρην·
ἡ δὲ τριηκόντων με Πολύμνια νόσφισε μήλων·
Οὐρανίη δ' ἑκατόν τε καὶ εἴκοσι· Καλλιόπη δὲ
βριθομένη μήλοισι τριηκοσίοισι βέβηκε.
σοὶ δ' ἄρα κουφοτέρῃσιν ἐγὼ σὺν χερσὶν ἱκανω,
πεντήκοντα φέρων τάδε λείψανα μῆλα θεάων.

64) *Ὄλβιε Πυθαγόρη, Μουσέων Ἑλικώνιον ἔρνος,*
εἰπέ μοι εἰρομένῳ, ὁπόσοι σοφίης κατ' ἀγῶνα
σοῖσι δόμοισιν ἔασιν, ἀεθλεύοντες ἄριστα.
Τοιγὰρ ἐγὼν εἴποιμι, Πολύκρατες· ἡμίσεες μὲν
ἀμφὶ καλὰ σπεύδουσι μαθήματα· τέτρατοι αὖτε
ἀθανάτου φύσεως πεπονήαται· ἑβδομάτοις δὲ
σιγὴ πᾶσα μέμηλε καὶ ἄφθιτοι ἔνδοθι μῦθοι·
τρεῖς δὲ γυναῖκες ἔασι, Θεανὼ δ' ἔξοχος ἄλλων.
τόσσους Πιερίδων ὑποφήτορας αὐτὸς ἀγινῶ.

65) *Οὗτος τοι Διόφαντον ἔχει τάφος. ἆ μέγα θαῦμα·*
καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.
ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην·
δωδεκάτην δ' ἐπιθείς, μῆλα πόρεν χλοάειν·

67) α) 63 [364]; β) 96.
68) 20 Thlr. [100 fl.]. 69) 4800 Thlr. 70) 2110 Thlr.
71) 142857 [428571]. 72) 857142. 73) Von 290 [21].
74) $\frac{1}{2}$. 75) $\frac{1}{4}$. 76) 77. 77) 754. 78) 30 Jahre.
79) Der Lohn eines Meisters 17 Sgr. 80) 200 Stück.
81) 3 Thlr. [$(am-12b):(12-m)$ Thlr.].
82) $2\frac{1}{4}$ Pfund. 83) 5 Viertel. 84) 420 Morgen. 85) 3 Drachmen.
86) A erhält 1686, B 2200 und C 3520 Morgen.
87) Zu einer Höhe von 3296 Fuß. 88) 32 Thlr.
89) A ist von B 100 Meilen entfernt. Im Ganzen legte das Schiff $119\frac{11}{19}$ Meilen zurück.

90) $$\frac{n(a-1)\,(b+1)\,(c-1)\,(d+1)}{(a-1)\,(b+1)\,(c-1)\,(d+1)\;-\;abcd}$$ Meilen.

91) Mit 960 Quart.

92) A erhält 2800, B 3900, C 5138, D 2196 und E 2966 Thaler. 93) 28. 94) 7 Thaler. 95) 13 Thaler [101 fl.]
96) In einer Entfernung von $\frac{1}{4}$ Meile.
97) Nach 2 Jahren wird der Vater 8 mal, nach 5 Jahren 5 mal so alt sein, als sein Sohn, und vor $1\frac{1}{2}$ Jahr war der Vater 57 mal so alt, als sein Sohn.

98) Entweder nach $\frac{m-qn}{q-1}$ Jahren, oder vor $\frac{qn-m}{q-1}$ Jahren, je nachdem $\frac{m}{n} \gtreqless q$ und $q \gtreqless 1$ oder $\frac{m}{n} \lesseqgtr q$ und $1 \gtreqless q$ ist. Die Auflösung der Aufgabe ist unmöglich: 1) wenn für den Fall, daß $(m:n) < q$ und $q > 1$, oder $(m:n) > q$ und zugleich $q < 1$, das Resultat $\frac{qn-m}{q-1}$ größer ist, als m oder n; 2) wenn $q = 1$ und zugleich $qn \gtrless m$ ist. Ist aber $q = 1$ und $qn = m$, oder $n = m$, so wird das Resultat $\frac{0}{0}$; letzterer Quotient ist in diesem Falle ganz unbestimmt und bezeichnet jede beliebige Anzahl Jahre.
99) 30 Jahre.

100) $mn\frac{p-1}{n-p}$. Soll die Auflösung Sinn haben, so darf das

---

τῇ δ᾽ ἄρ᾽ ἐφ᾽ ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ᾽ ἐπένευσεν ἔτει.
αἴ, αἴ, τηλύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρὸς
δέκτ᾽ ἀΐδης κρυερὸς μέτρον ἑλὸν βιότου.
πένθος δ᾽ αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς
τῆδε πόσου σοφίῃ τέρμ᾽ ἐπέρησε βίου.

Resultat **nicht negativ***) werden; es muß also zugleich $p \lesseqgtr 1$ und $n \lesseqgtr p$ sein; eben so darf n nicht $= p$ und zugleich $p > 1$, $m > 0$ sein. Ist $n = p$ und zugleich $p = 1$, mithin auch $n = 1$, so erhält man als Resultat den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$, d. h. jedes beliebige Alter genügt der Anforderung. Denselben Ausdruck $\frac{0}{0}$ erhält man, wenn $m = 0$ und $n = p$ gesetzt wird.

101) Vor 12 Jahren. 102) Nach 7 Jahren.

103) 7 Meilen. 104) 15 Meilen. 105) 90 Stränge.

106) Er besitzt 110 Pfund. Der Einkaufspreis beträgt für das Pfund 5 Sgr. 2 Pfg.

107) Der Behälter faßt 240 Quart und muß jede Minute 8 Quart Zufluß erhalten.

108) 816 Kubikfuß. 109) Nach $5\frac{5}{7}$ Monaten.

110) $100n : (100-n)$. 111) $100n : (100+n)$.

112) Zu $16\frac{1}{4}$ Procent. 113) Jede der Summen beträgt 1280 Thaler und der Disconto $7\frac{1}{2}$ Procent.

114) $\frac{ns-ms'}{n-m}$ und $\frac{100(s-s')}{ns-ms'}$. 115) Er verliert 4 pCt.

116) Man **gewinnt** $[(100+n)p'-100p] : p$ pCt., oder **verliert** $[100p-(100+n)p'] : p$ pCt., je nachdem $100p \lesseqgtr (100+n)p'$ ist. Man gewinnt und verliert **nichts**, wenn $(100+n)p' = 100p$ ist.

117) α) Er gewinnt $3\frac{3}{4}$ pCt.;

β) Er **gewinnt** entweder $[(100-n)p'-100p] : p$ pCt. oder **verliert** $[100p-(100-n)p'] : p$ pCt.

118) 150.

119) Heinrich I. 919—936; Otto I. 936—973; Otto II. 973—983; Otto III. 983—1002; Heinrich II. 1002—1024.

---

*) Ein **negatives** Resultat, als Antwort auf eine Frage hat nicht **immer** Bedeutung, sondern zeigt nur an, daß es nicht möglich ist, unter den aufgestellten Bedingungen die Aufgabe zu lösen. Ein **negativer** Werth genügt nur in **arithmetischer** Hinsicht, indem er, an die Stelle von x gesetzt, die beiden Seiten der aus den gegebenen Größen construirten Gleichung einander gleich macht. **Zuweilen** kann man das gefundene **negative** Resultat in ein entsprechendes **positives** verwandeln und somit jenem Bedeutung geben; wenn man nämlich im Stande ist, durch **Umänderung der aufgestellten** Frage den Ansatz der Gleichung so einzurichten, daß allenthalben $+x$ in $-x$ und $-x$ in $+x$ sich verwandelt. **Häufig** geschieht dieses dadurch, daß man die Frage nach **Vermögen** in die nach **Schuld**, die Frage nach **Fortschreiten** im **Raume** und in der **Zeit** in die nach **Rückschreiten** im **Raume** und in der **Zeit** u. s. w., und umgekehrt, verändert. So kann z. B. das erste Resultat in Nr. 68 als **allgemeine** Antwort auf beide Fragen dienen, wobei in dem Falle, daß $\frac{m-qn}{q-1}$ **negativ** wird, die Antwort sich auf die **vergangene** Zeit bezieht. In dem Beispiele 100 dagegen kann ein **negatives** Resultat gar nicht gedeutet werden.

120) Nach 6 [5] Tagen werden beide zusammentreffen, und zwar in einer Entfernung von 42 [31¼] Meilen vom Orte B.

121) Nach $d:(c'-c)$ Zeiteinheiten wird der zweite Körper den ersten einholen, in einem Abstande von $c'd:(c'-c)$ Raumeinheiten von dem entfernteren Orte. Die Auflösung der Aufgabe ist unmöglich, wenn $c' = c$ und $d > 0$ ist, in welchem Falle das Resultat $= \infty$ wird. Ist aber zugleich $c' = c$ und $d = 0$, so erhält man als Resultat den Ausdruck $\frac{0}{0}$, der alsdann jede beliebige Zeit bedeutet, wie es sich auch aus der Natur der Sache ergibt. Ist endlich $c' < c$, so wird $d:(c'-c)$ negativ und bedeutet im Allgemeinen einen unmöglichen Werth. Beginnen nämlich die beiden Körper an den Orten A und B ihre Bewegungen, so werden sie natürlich nicht zusammentreffen können, wenn der folgende eine kleinere Geschwindigkeit hat als der vorhergehende. Wird aber die Frage der Aufgabe allgemein so gestellt: „Wenn von zwei sich gleichförmig nach derselben Richtung hin bewegenden Körpern der eine in jeder Zeiteinheit c, der andere nachfolgende aber c' Fuß zurücklegt, und zu einer gewissen Zeit ihre wechselseitige Entfernung d ist, nach wie viel Zeiteinheiten werden sie zusammentreffen?", so deutet für den Fall, daß $c' < c$, das negative Resultat $d:(c'-c)$ darauf hin, daß man die Frage: „Nach wie viel Zeiteinheiten werden sie zusammentreffen?", in die: „Vor wie viel Zeiteinheiten waren sie beisammen?" umzuändern habe. Das Resultat als Antwort auf die letztere Frage wird alsdann ein positives sein.

122) Nach 6 [4] Tagen in einer Entfernung von 31½ [35] Meilen vom Wohnorte des ersteren.

123) Nach $\dfrac{d}{c'+c}$ Zeiteinheiten. Dieses Resultat läßt sich aus dem der 121. Aufgabe ableiten, wenn man c negativ nimmt.

124) Nach 6½ Stunde, in einer Entfernung von 8⅓ Meile von A.

125) 12½ Meile. 126) Nach $nc:(c'-c)$ Zeiteinheiten.

127) In 8 Stunden 42 Minuten nach Abgang des ersten, oder in 6 Stunden 12 Minuten nach Abgang des zweiten Fußgängers.

128) In $(d+nc'):(c'+c)$ Zeiteinheiten nach Abgang des ersten oder in $(d-nc):(c'+c)$ Zeiteinheiten nach Abgang des zweiten Körpers.

129) 4 Meilen. 130) 6 Meilen.

131) 10½ Stunde nach Abgang des ersten, oder 7½ Stunde nach Abgang des zweiten Couriers.

132) In $nt:(n-m)$ Zeiteinheiten nach Abgang des ersten, oder in $mt:(n-m)$ Zeiteinheiten nach Abgang des zweiten Körpers.

133) Nach 12 Stunden.

134) In $(\pm c't \pm d):(c'-c)$*) Minuten nach Abgang des ersten Körpers, oder in $(\pm ct \pm d):(c'-c)$ Minuten nach Abgang des zweiten Körpers, wenn $c = m:a$ und $c' = n:b$ gesetzt wird. Die Auflösung ist möglich, wenn $an \lesseqgtr bm$ und $\pm mt \pm ad \lesseqgtr 0$ ist; unmöglich, wenn $an = bm$ und $\pm mt \pm ad \lesseqgtr 0$ ist; unbestimmt, wenn $\pm mt \pm ad = 0$ und zugleich $an - bm = 0$. Das Resultat wird endlich negativ und läßt eine Deutung zu, wenn $bm \lesseqgtr an$ und $\pm mt \pm ad \lesseqgtr 0$ ist.

135) Um 3 Uhr 13 Minuten Nachmittags fielen die Mittelpuncte beider Scheiben zusammen. Um 2 Uhr $11\frac{34}{47}$ Minuten berührten sich die Scheiben zum ersten und um 4 Uhr $14\frac{13}{47}$ Minuten zum zweiten Male.

136) Nach $3\frac{3}{4}$ [$6\frac{2}{3}$] Stunden. 137) Nach $mn:(m+n)$ Stunden.

138) Um 9 Uhr $46\frac{7}{8}$ Min. 139) In 5 St. 140) $p:(1-q)$.

141) Um 1 Uhr $45\frac{15}{17}$ Minuten in einer Entfernung von $8\frac{3}{34}$ Meilen von Köln.

142) Entweder nach einer Stunde und 12 Minuten oder nach 13 Stunden und 12 Minuten; im ersten Falle vor, im zweiten Falle nach ihrem Zusammentreffen.

143) Nach $\frac{d-l}{c'-c}$ Secunden vor und nach $\frac{d+l}{c'-c}$ Secunden nach ihrem Zusammenstoßen.

144) Sowohl nach 17, als nach $23\frac{1}{2}$ Minuten.

145) Sowohl nach $\frac{d-l}{c'+c}$, als nach $\frac{d+l}{c'+c}$ Min. 146) $\frac{l-d}{c'+c}$.

147) Die Entfernung der Puncte A und B ist $nt + l$, wenn die Körper die Entfernung l vor ihrem Zusammenstoßen haben, dagegen $nt-l$, wenn sie die Entfernung l nach ihrem Zusammenstoßen haben. Im ersten Falle findet das Zusammentreffen nach $t + \frac{l}{n}$, im zweiten Falle nach $t - \frac{l}{n}$ Minuten Statt.

148) Das Dampfschiff gebraucht 4 Stunden, und die Entfernung von M bis N beträgt $9\frac{1}{3}$ Meile.

149) Im ersten Falle nach $1\frac{1}{4}$ Stunde, im zweiten nach $14\frac{3}{8}$ Stunden nach Abgang des Reiters.

150) Die Entfernung der Orte C und D beträgt $10\frac{1}{2}$ Meile.

151) $31\frac{7}{8}$ Meilen. 152) 240 Meilen.

*) Die Zeichen + oder − vor $c't$ beziehen sich auf die Fragen: t Minuten später oder früher, so wie die Zeichen + oder − vor d auf die Fragen: d Fuß rückwärts oder vorwärts.

153) A ist von B 8 Meilen entfernt. Nach dem Zusammentreffen hatte der Fußgänger noch 2 Meilen abzumachen.

154) Zum ersten Male um 1 U. $5\frac{5}{11}$ Min., zum zweiten Male um 2 U. $10\frac{10}{11}$ Min. u. s. w., jedes Mal 1 Stunde $5\frac{5}{11}$ Min. später. Im Ganzen werden sie 11 mal über einander stehen.

155) a) 11 mal, und zwar nach 12 Uhr zum ersten Mal um 12 Uhr $32\frac{8}{11}$ Minuten, hierauf um 1 Uhr $38\frac{2}{11}$ Minuten, um 2 Uhr $43\frac{7}{11}$ Min., um 3 Uhr $49\frac{1}{11}$ Min., um 4 Uhr $54\frac{6}{11}$ Min., gerade um 6 Uhr u. s. w., jedes Mal 1 Stunde $5\frac{5}{11}$ Min. später;

b) 22 mal, jedes Mal nach $32\frac{8}{11}$ Minuten, um 3 Uhr, 3 Uhr $32\frac{8}{11}$ Minuten, 4 Uhr $5\frac{5}{11}$ Minuten u. s. w.

c) 1) $2\frac{362}{719}$, 2) $16\frac{568}{1427}$, 3) $30\frac{30}{59}$ Secunden nach halb ein Uhr.

156) α) Nach $\frac{d \pm ct}{c'-c}$, $\frac{d \pm ct + m}{c'-c}$, $\frac{d \pm ct + 2m}{c'-c}$ u. s. w. $\frac{d \pm ct + (n-1)m}{c'-c}$ Zeiteinheiten.

β) Nach $\frac{d \mp ct}{c'+c}$, $\frac{d \mp ct + m}{c'+c}$, $\frac{d \mp ct + 2m}{c'+c}$ u. s. w. $\frac{d \mp ct + (n-1)m}{c'+c}$ Zeiteinheiten.

157) 36 Fuß. 158) Nach $2t'-t$ Secunden.

159) Nach 5 Tagen Nachmittags 5 Uhr $32\frac{4}{13}$ Min. mittlerer Sonnenzeit. Beide Uhren zeigen auf 5 Uhr $38\frac{6}{13}$ Min. Nachm.

160) α) 29 Tage 12 Stunden 44 Minuten 2,8 Secunden;
β) a) 20 Monate, b), c) und d) 10 Monate.

161) α) Nach $tt' : (t+t')$ Secunden;

β) nach $\frac{m+n}{2c'-c''-c'''}$ Zeiteinheiten. Im Allgemeinen ist diese Zeit nicht das arithmetische Mittel der beiden Zeiten, $\frac{m}{c'-c''}$ und $\frac{n}{c'-c'''}$ für das Zusammenstoßen des Körpers A mit den beiden Körpern B und C. Nur in dem besonderen Falle, wo $c'' = c'''$ oder $m : n = (c' - c'') : (c' - c''')$ ist, findet dieses Statt. Für dieses Beispiel ist $x = 10$; das Mittel aus den beiden Zeiten 6 und 18 des Zusammenstoßens würde 12 geben.

162) 600. 163) In 13 Tagen.

164) In 2 Stunden 27 Min. nach Oeffnung der ersten Röhre.

165) Bacchus 36 und Silen 18 Becher.

166) α) In 2 St. 24 Min.; β) in $mnp : (mn+mp+np)$ St.

167) In $26\frac{1}{4}$ Tag.

168) Der leere Wasserbehälter wird in $mnp:(mp+np-mn)$ Stunden voll, oder der volle in $mnp:(mn-mp-np)$ Stunden leer, je nachdem $mn \lesseqgtr mp+np$ ist.

169) Die eine 243, die andere 1701 Quart.

170) Der erste 7000, der zweite 6000.

171) Der eine 16, der andere 18.

172) α) 8; β) $\dfrac{bdgf(h-c)-aceg(h-f)}{beh(f-c)}$ *).

173) Die eine 30, die andere 24 Pferde.

174) In einer Höhe von $500\frac{1}{4}$ Fuß über der Sohle.

175) Die Tiefe beträgt 560 Fuß. 176) In 12 Stunden.

177) In der Zeit $\dfrac{Ett't''t'''}{et't''t'''+e'tt''t'''+e''tt't'''+e'''tt't''}$.

178) Nach 10 Monaten. 179) Nach $\dfrac{ap+bq+cr+ds+et}{a+b+c+d+e}$ Mon.

180) 428 Thaler. 181) 3 Monate. 182) Nach $5\frac{1}{2}$ Monat.

183) Nach einem halben Monate.

184) In Terminen von $4\frac{1}{2}$ Monat.

185) $1\frac{1}{2}$ Monat. 186) Nach $1\frac{3}{4}$ Monat. 187) 1000 Thaler.

188) α) A bekommt 40, B 48 und C 48 Thaler; β) A bekommt $mpS:(mp+nq+or)$, B $nqS:(mp+nq+or)$ und C $orS:(mp+nq+or)$ Thaler.

189) Die Mutter 1200 Thaler, die Tochter 800 Thaler, der Sohn 1800 Thaler.

190) Dem A 60, dem B 36, dem C 40 Thaler.

191) Dem ersten 8 Thlr. 5 Sgr., dem zweiten 8 Thlr. 12 Sgr.

192) A verliert 980, B 420 und C 945 Gulden.

193) A erhält 5418, B 2380, C 3234, D 1848 und E 392 Gulden. 194) A muß 36, B $46\frac{1}{2}$ Gulden bezahlen.

195) C befand sich 13 Monate im Geschäfte. A erhielt 1702, B 3330 Thaler.

196) α) Dem Cajus gebühren 12, dem Sempronius 18 Silberlinge; β) Nein. Dem ersten gebührten 26, dem zweiten 14, dem dritten 2 Nüsse. Allgemein erhält der erste $3a-b-c$, der zweite $3b-a-c$, der dritte $3c-a-b$ Nüsse.

197) 9. 198) Man muß beide Glieder um 3 vermindern.

199) 19. 200) In $1\frac{1}{4}$ Stunde.

---

*) Newton, Arithmetica universalis III. 2. 11.

201) α) Beide muß man entweder um $\frac{aq-bp}{p-q} = \frac{bp-aq}{q-p}$ vermehren oder um $\frac{bp-aq}{p-q} = \frac{aq-bp}{q-p}$ vermindern; β) $\frac{2ab}{a+b}$.

202) Von $(a^2+b^2):(a-b)$. 203) 55 Meilen.

204) B von C $2\frac{1}{2}$ und C von D $3\frac{3}{4}$ Meilen.

205) $(nr-ms):(pr+s)$. 206) C hatte 5 Thlr. verloren.

207) Von der besseren Sorte 40, von der schlechteren 24 Pfund.

208) Ist m der Preis der bessern Sorte, also $m > n$, so muß man von der bessern Sorte $\frac{a(p-n)}{m-n}$, von der schlechtern $\frac{a(m-p)}{m-n}$ Pfund nehmen. 209) 6 Ohm $17\frac{1}{2}$ Quart.

210) Im ersten Falle muß die Ohm der schlechtern Sorte 33 Thaler kosten, im zweiten Falle stellt sich für den Preis der schlechtern Sorte 0 heraus, d. h. er muß statt Wein reines Wasser hinzusetzen. 211) $[(a+b)p-am]:b$.

212) $87\frac{3}{4}$ Pfund. 213) 75 Pfund.

214) $70\frac{130}{141}$ Procent. 215) $4643\frac{3}{4}$ Pfund.

216) $11\frac{1}{4}$ Mark 14löthiges und $3\frac{3}{4}$ Mark 10löthiges Silber.

217) $\frac{(c-b)m}{a-b}$ Mark $a$löthiges und $\frac{(a-c)m}{a-b}$ Mark $b$löth. Silber.

218) $3\frac{1}{3}$ Mark. 219) 11 Mark.

220) α) Ist die Mischung $13\frac{3}{4}$löthig, so ist das hinzugesetzte Metall $14\frac{1}{4}$löthig, ist aber die Mischung 9löthig, so enthält das hinzugesetzte Metall gar kein Silber.

β) $[(a+b)q-am]:b$ ist die Löthigkeit der hinzugesetzten Metall-Legirung. Die Auflösung der Aufgabe ist unmöglich, 1) wenn $(a+b)q < am$, oder $bq < a(m-q)$ ist; 2) wenn $[(a+b)q-am]:b > 16$, oder wenn $a(q-m) > b(16-q)$ ist.

221) 4334 (genau: 4334,4) Thaler und 33792 Silbergroschen; allgemein hat man $\frac{129}{950}a$ Thaler und $\frac{704}{665}a$ Silbergroschen nöthig, um a $\frac{1}{6}$-Thalerstücke zu erhalten.

222) α) $58\frac{1}{2}$ [30] Pfund von dem ersteren, $19\frac{1}{2}$ [70] Pfund von dem zweiten; β) 1500 Pfund; γ) $442\frac{4}{13}$ Pfund; δ) $3\frac{7}{81}$ Pfund.

223) 17. 224) $221:273 = 187:231$.

225) Löſ't man die Gleichung auf, so erhält man als Resultat $\frac{ad-bc}{b+c-a-d}$, wenn die Zahl addirt, oder $\frac{bc-ad}{b+c-a-d}$, wenn die Zahl subtrahirt wird. Wegen der Gleichheit der beiden Producte bc und ad werden beide Quotienten zu Null, wenn

$b+c \gtrless a+d$ ist. In diesem Falle gibt es also keine Zahlen von verlangter Eigenschaft. Ist aber $b+c = a+d$, so erhält man als Resultat $\frac{0}{0}$, d. i. jede beliebige Zahl.

226) Die eine Zahl 28, die andere 42. 227) α) 102; β) 5.
228) α) 12 Fuß; β) In einer Höhe von $4\frac{11}{20}$ Fuß.
229) 2. 230) α) 200; β) a) 15, b) 120, c) 42.
231) 14172.
232) Der erste 2744, der zweite 729, der dritte 64 Kubikzoll.
233) 7, 8, 9 und 10. 234) $10\frac{1}{2}$ Procent. 235) $100-2p$.
236) $\frac{1}{2}$. 237) 2.

§. 65.

Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren unbekannten Größen.

1) Wie viele von einander unabhängige Gleichungen müssen gegeben sein, wenn zwei oder mehrere unbekannte Größen in denselben vorkommen?

2) Lassen sich aus folgenden Gleichungen die unbekannten Größen bestimmen?

$$\text{I.} \begin{cases} x+y = 17, \\ 3x+3y = 51. \end{cases} \qquad \text{II.} \begin{cases} x-y = m, \\ ax-ay = n. \end{cases}$$

$$\text{III.} \begin{cases} 2x+3y-7z = 19, \\ 5x+8y+11z = 24, \\ 7x+11y+4z = 43. \end{cases} \qquad \text{IV.} \begin{cases} x+y-z = a+b, \\ x-y+z = a-b, \\ y-z = b. \end{cases}$$

3) Wie werden Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren unbekannten Größen aufgelös't? Worin besteht die Substitutions-, Combinations-, Additions- oder Subtractions- und die Bézout'sche (französische) Methode?

4) $x+y = 6912,$ $x-y = 4444.$

5) $x+y = s,$ $x-y = d.$

6) $x+13y = 176,$ $x+7y = 98.$

7) $x+1\frac{2}{3}y = 26\frac{1}{12},$ $4\frac{5}{6}y-x = 44\frac{7}{8}.$

8) $x+ay = b,$ $cx+y = d.$

9) $mx+y = p,$ $nx+y = p.$

10) $x+17y = 300,$ $11x-y = 104.$

11) $2\frac{3}{7}x-\frac{3}{4}y = 116,$ $1\frac{3}{5}x-y = 40.$

12) $1{,}543689x-y = 1{,}543689,$ $x-0{,}8392867y = 0{,}8392867.$

13) $\frac{x+5143}{3y+11} = 37,$ $\frac{3262-x}{2y-11} = 43.$

14) $\frac{4x+81}{10y-17} = 6,$ $\frac{12x+97}{15y-17} = 4.$

15) $x+\frac{1}{11}y = 71,$ $y-\frac{1}{13}x = 61.$

16) $\frac{x}{3{,}14159} + 3{,}14159y = 3{,}14159^2+1,$
$3{,}14159x - \frac{y}{3{,}14159} = 3{,}14159^2-1.$

17) $13x+11y = 194,$ $13x-11y = 40.$

18) $\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b},$ $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b}.$

19) $\frac{1}{x} = m - \frac{1}{y},$ $\frac{1}{y} = \frac{1}{x} - n.$

20) α) $\frac{x+a}{n} + y-b = 2a,$ $x+a+\frac{y-b}{a} = 1+na.$

β) $\sqrt{x+y} = a+b,$ $x-y = (a-b)\sqrt{x+y}.$

21) $mx-ny = 0,$ $x-y = d.$

22) $mx+ny = p,$ $rx+sy = t.$

Welche besonderen Werthe können die Unbekannten x und y erhalten?

23) $abx \mp cdy = e,$ $afx - cgy = h.$

24) $17x-13y = 144,$ $23x+19y = 890.$

25) $5x-7y = 20,$ $9x-11y = 44.$

26) $nx+\frac{1}{n}y = n,$ $\frac{1}{n}x+ny = n.$

27) $1209\frac{1}{3} = 60x+77y,$ $24x-35y = -152\frac{1}{3}.$

28) $0{,}077x = 0{,}66y-2{,}1516,$ $0{,}053y = 0{,}08x+0{,}0842.$

29) $\frac{x}{9} + \frac{y}{7} = 6{,}3,$ $\frac{x}{3} + \frac{53y}{56} = 39{,}2.$

30) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{c},$ $\frac{x}{m} - \frac{y}{n} = \frac{1}{p}.$

31) $1\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{3}y+4\frac{5}{12},$ $4\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y-21\frac{7}{12}.$

32) $1\frac{2}{3}x-4\frac{5}{6} = 7\frac{8}{9}y-10\frac{11}{12},$ $24{,}6-1\frac{3}{5}x+7\frac{9}{11}y = 31\frac{10}{11}.$

33) $1\frac{2}{3}x = -4\frac{5}{6}y+7,$ $8\frac{9}{10}x = 11\frac{12}{13}y+14.$

34) α) $(a+b)x - (a-b)y = 4ab,$ $(a-b)x + (a+b)y = 2a^2-2b^2.$

$\beta)$ $\frac{1}{2}(a+b-c)x+\frac{1}{2}(a-b+c)y = a^2+(b-c)^2,$
$\frac{1}{2}(a-b+c)x+\frac{1}{2}(a+b-c)y = a^2-(b-c)^2.$

35) $(a+b)x+(c-2b)^2 = (b+c)y+a(a-4b)+4b^2,$
$(a-c)x-a(a+b-c) = 5bc-4c^2-2b^2-(b-c)y.$

36) $\alpha)$ $\dfrac{13+x}{7}+\dfrac{3x-8y}{3} = x+y-5\frac{1}{3},$

$\dfrac{11-x}{2}+\dfrac{4x+8y-2}{9} = 8-(y-x).$

$\beta)$ $\frac{1}{3}(3x-2y)+1+\frac{1}{8}(11y-10) = \frac{1}{7}(4x-3y+5) + \frac{1}{5}(45-x),$

$45-\frac{1}{3}(4x-2) = \frac{1}{18}(55x+71y+1).$

37) $\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y} = c,$
$\dfrac{m}{x}-\dfrac{n}{y} = p.$

38) $ax+by = 2(a^2-b^2),$
$\dfrac{y}{a-b}-\dfrac{x}{a+b} = \dfrac{a^2+b^2}{ab}.$

39) $\dfrac{5y}{6}-\dfrac{4y-19}{3} = \dfrac{x}{6}+\dfrac{20-2y}{3},$

$\dfrac{x+5y}{6}+5 = \dfrac{2y+21}{3}.$

40) $\dfrac{7y+13-5x}{4}+y = 2x-\dfrac{3y+2x-16}{3},$

$x+\dfrac{5y+2x}{6}-\dfrac{3x-12+8y}{5} = 4-\dfrac{15+2y-4x}{3}.$

41) $\dfrac{13}{x+2y+3} = -\dfrac{3}{4x-5y+6},$

$\dfrac{3}{6x-5y+4} = \dfrac{19}{3x+2y+1}.$

42) $\dfrac{29-x}{6} : \left(20-\dfrac{4x+5y}{9}\right) = \dfrac{1}{3},$

$x-\dfrac{3x+4y}{7}-\dfrac{9x-3y-1}{13} = 2y-x-16.$

43) $10[x+9(y-8[x+7])] = 6,$
$5[x+4(y-3[x+2])] = 1.$

44) $(x+y):(y-x) = 15:8,$

$9x-\dfrac{3y+44}{7} = 100.$

45) $(5x+7y):(3x+11) = 13:7,$
$(11x+27):(7x+5y) = 19:11.$

46) $(ax+by):(cx+d) = m:n,$
$(e+fy):(gx+hy) = p:q.$

47) $(mx+ny):(px-qy) = a:b,$
$(rx+sy):(tx-uy) = c:d.$

48) $\alpha)$ $ax = by + \frac{a^2+b^2}{2},$
$(a-b)x = (a+b)y.$

$\beta)$ $\frac{x}{m-a} + \frac{y}{m-b} = 1,$
$\frac{x}{n-a} + \frac{y}{n-b} = 1.$

49) $\frac{m}{n+y} = \frac{n}{m-x},$
$\frac{p}{q-x} = \frac{q}{p+y}.$

50) $\frac{x+y-1}{x-y+1} = a,$
$\frac{y-x+1}{x-y+1} = ab.$

51) $\frac{a}{a+c}x - y = \frac{a-c}{b} - \frac{a}{a+c}y,$
$\frac{x}{c} + \frac{y}{a} = \frac{b}{ac}.$

52) $\frac{x}{n^2-1} - \frac{y}{a^2-1} = a^2-n^2,$
$\frac{x}{a^2+1} + \frac{y}{n^2+1} + 2 = a^2+n^2.$

53) $(a+2b)x - (a-2b)y = 6ac,$
$(a+3c)y - (a-3c)x = 4ab.$

54) $\frac{2(a^2-b^2)}{x} - a = b\frac{y}{x},$
$\frac{1}{(a-b)x} - \frac{1}{(a+b)y} = \frac{a^2+b^2}{abxy}.$

55) $1+x = y-1+2\frac{(a-b)^2-2b^2}{a^2-b^2},$
$by-ax = \frac{ab(3a+b)}{a^2-b^2} - (a+b) + \frac{ab}{a+b}.$

56) $\frac{306a^3+324a^2b-1015ab^2-810b^3}{120ab(3a+2b)(7a+6b)xy} - \frac{1}{(3a+2b)y} = -\frac{1}{(7a+6b)x},$
$\frac{1026a^4-393a^2b^2-430b^4}{120abxy} - \frac{7a^2-6b^2}{x} = \frac{3a^2-2b^2}{y}.$

57) $x^2-y^2 = a,$
$x-y = b.$

58) $(x+1)(y-2) = (3-x)(4-y)-1,$
$\frac{2x-3}{4y-5} - \frac{3x-4}{6y-7} = \frac{5}{2(4y-5)(7-6y)}.$

59) $2x : y = 29 : 14,$

$$y+4x+6 = \frac{4y^2+13xy-12x^2}{4y-3x-1}.$$

60) $$\frac{7+8x}{10} - \frac{3x-6y}{2x-8} = 4 - \frac{9-4x}{5},$$

$$\frac{6y+9}{4} = 3\tfrac{1}{4} + \frac{3y+4}{2} - \frac{3y+5x}{4y-6}.$$

61) $$\frac{4x^2+2xy+288-6y^2}{2x+13-2y} = 2x+3y-131,$$

$$5x-4y = 22.$$

62) $$\frac{48+11y}{4x+2} = \frac{16x^2+12xy-8x+5y+28}{4x-2} - (4x+3y),$$

$$2x+4 = \frac{8x^2-18y^2+108}{4x+6y+3} + 3y.$$

63) α) $$3y - \frac{151-16y}{4x-1} = \frac{9xy-110}{3x-4},$$

$$\frac{6y^2+130-24x^2}{2y-4x+3} = 6x+3y+1.$$

β) $$\frac{4x-8y+5}{2} = \frac{10x^2-12y^2-14xy+2x}{5x+3y+3} + 2,$$

$$\sqrt{6+x} : \sqrt{6-y} = 3 : 2.$$

γ) $$\sqrt{y} - \sqrt{y-x} = \sqrt{20-x},$$

$$\sqrt{y-x} : \sqrt{20-x} = 3 : 2.$$

64) $$x - \frac{2xy}{2y+5} = \frac{15x+4y}{6y-2x} + \frac{5x^2+4y^2+105}{(x-3y)(2y+5)},$$

$$3 - \frac{7x+2y}{5x} = 5 - \frac{5y+9}{3x}.$$

65) $$(10x+12y-14)(x+1\tfrac{1}{2}y+2)-(2x-3y+4)(5x-6y+7) = 54xy+12,$$

$$(15x-4y)^2 - (10x-6y)^2 - (11x+1)^2 + (4y-3)^2 - 5^2 = (3-2x)^2 - (2y-1)^2 - 91.$$

66) $$\frac{10}{2x+3y-29} + \frac{9}{7x-8y+24} = 8,$$

$$\frac{2x+3y-29}{2} = \frac{7x-8y}{3} + 8\text{ *)}.$$

---

*) Man setze $\frac{1}{2x+3y-29} = z$, $\frac{1}{7x-8y+24} = u$.

67) $\dfrac{8}{2x-3y+17} + 5x - 8y + 44 = 5,$

$\dfrac{5}{2x-3y+17} + 16y = 10x + 88\tfrac{1}{2}.$

68) $\dfrac{1}{1-x+y} - \dfrac{1}{x+y-1} = \dfrac{2}{3},$

$\dfrac{1}{\dfrac{1}{1-x+y} - \dfrac{1}{1-x-y}} = \dfrac{3}{4}.$

69) $\dfrac{1}{x + \dfrac{1}{y - \dfrac{a}{x}}} = \dfrac{1}{x - \dfrac{1}{y - \dfrac{b}{x}}},$

$\dfrac{1}{y}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1.$

70) $\sqrt{72+x^2+4y^2+4xy} = x+2y+2,$

$\sqrt{x+1} + \sqrt{y+2} = \sqrt{x+y+\sqrt{60+4xy}+3}.$

71) $y = -\sqrt{x^2 - y\sqrt{y^2+8x}} + x,$

$x = \sqrt{x\sqrt{x^2-4xy+y\sqrt{16y^2-x-y+4}}+y^2} + y.$

72) $5\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 8,$

$3\sqrt{x} - 7 = -4\sqrt{y}.$

73) $3\sqrt[3]{x} = 16 + 5\sqrt[3]{y},$

$7\sqrt[3]{y} = 9\sqrt[3]{x} - 8.$

74) $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}} - \dfrac{1}{\sqrt{y-2}} = \dfrac{1}{6},$

$\sqrt{\dfrac{2-y}{3+x}} \cdot \sqrt{\dfrac{3+x}{3-x}} = 1\tfrac{1}{2}.$

75) α) $\dfrac{1}{2\sqrt{x-y}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x+y}} = \dfrac{1}{15},$

$15\sqrt{x+y} + 15\sqrt{x-y} = 8\sqrt{x^2-y^2}$ *).

β) $\sqrt{x} - \sqrt{m-y} = \sqrt{x-y},$

$\sqrt{x-y} + \sqrt{m-y} = \tfrac{5}{2}\sqrt{m-y}.$

---

*) Man setze $\sqrt{x+y} = z$, $\sqrt{x-y} = u$, bestimme zuerst z und u, und mit Hülfe der gefundenen Werthe die Unbekannten x und y.

$\gamma)^* \sqrt{a-x} - \sqrt{y-x} = \sqrt{y}.$
$\sqrt{b-x} + \sqrt{y-x} = \sqrt{y}.$

---

76) $x+y = 16,$
$x+z = 22,$
$y+z = 28.$

77) $x+2y = 23,$
$3x+4z = 57,$
$5y+6z = 94.$

78) $x = 21-4y,$
$z = 9-\frac{2}{3}x,$
$y = 64-7\frac{1}{2}z.$

79) $3{,}4x-1{,}2y = -8{,}16,$
$5{,}6x+1{,}2z+13{,}44 = 0,$
$5{,}6y = 38{,}08+3{,}4z.$

80) $ax+by = m,$
$cx+dz = n,$
$ey+fz = p.$

81) $x+y-z = 1320,$
$x-y+z = 654,$
$-x+y+z = -12.$

82) $x+y+z = m,$
$ax+by = n,$
$cx+dy = p.$

83) $x+y+z = 5,$
$3x-5y+7z = 75,$
$9x-11z+10 = 0.$

84) $\frac{1}{2}x-2\frac{3}{4}y+4\frac{5}{8}z = 31\frac{25}{144},$
$6\frac{7}{8}x-8\frac{9}{10}z = -61\frac{443}{480},$
$11x = -2y.$

85) $x-y+z = 6,$
$3\frac{1}{2}x-4\frac{3}{4}y+5\frac{1}{2}z = 32,$
$10\frac{1}{2}x-9\frac{1}{2}y+11z = 71.$

86) $3x-5y+4z = 5,$
$7x+2y-3z = 2,$
$4x+3y-z = 7.$

87) $\alpha)$ $a'x+b'y+c'z = m',$
$a''x+b''y+c''z = m'',$
$a'''x+b'''y+c'''z = m'''.$

$\beta)$ $\frac{a'}{x}+\frac{b'}{y}+\frac{c'}{z} = m',$
$\frac{a''}{x}+\frac{b''}{y}+\frac{c''}{z} = m'',$
$\frac{a'''}{x}+\frac{b'''}{y}+\frac{c'''}{z} = m'''.$

88) $\frac{x}{5}+\frac{y}{7}+\frac{z}{9} = 258,$
$\frac{x}{7}+\frac{y}{9}+\frac{z}{5} = 304,$
$\frac{x}{9}+\frac{y}{5}+\frac{z}{7} = 296.$

89) $\alpha)$ $x : y : z = a : b : c,$
(Proportion)
$mx+ny+pz = s.$

$\beta)$ $\frac{x}{a+b}+\frac{y}{b-c}+\frac{z}{c+a} = 2c,$
$\frac{x}{a-b}-\frac{y}{b-c}+\frac{z}{c-a} = 2a,$
$\frac{x}{a-b}-\frac{y}{b-c}-\frac{z}{c+a} = 2a-2c.$

90) $x : y : z = 5 : 12 : 13$ (Proportion),
$5x + 12y = 12z + 13.$

91) $(x+2y) : (3y+4z) : (5x+6z) = 7 : 8 : 9$ (Proportion),
$x + y - z = 126.$

92)
$$(5-4x) : (6y+1) = (55-2x) : (3y+74),$$
$$(3+x) : (3z-2) = (2x+9) : 6z,$$
$$(3y-1) : (3z+1) = (7y+3) : (7z+21).$$

93)
$$\frac{5x-8y+3z}{2} - \frac{7y-2z-3x}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3y-5x+1}{4} - \frac{7z-3x}{9},$$
$$\frac{x-2y+3z}{3} - \frac{4x+5y+6}{5} - \frac{7x+8z+9}{8} = \frac{10y+11z+12}{13} - 12,$$
$$\frac{10x-9y}{4} - \frac{8y-7z}{5} = \frac{6z-5x}{13} + \frac{x+y-z}{3} - 2.$$

94) α)
$$(c+a)x - (c-a)y = 2bc,$$
$$(a+b)y - (a-b)z = 2ca,$$
$$(b+c)z - (b-c)x = 2ab.$$

β)
$$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{b+c} = b-a,$$
$$\frac{y}{c-a} + \frac{z}{c+a} = c+a,$$
$$\frac{x}{b-c} - \frac{z}{a-b} = b-c.$$

95) α)
$$\frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} = a+b,$$
$$\frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} = b+c,$$
$$\frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} = c+a.$$

β)
$$(a-x)(b-y) = z,$$
$$(a'-x)(b'-y) = z,$$
$$(a''-x)(b''-y) = z.$$

96)
$$\frac{bx+ay}{c} = \frac{a-b}{(b-c)(a-c)},$$
$$\frac{cy+bz}{a} = \frac{b-c}{(c-a)(b-a)},$$
$$\frac{az+cx}{b} = \frac{c-a}{(a-b)(c-b)}.$$

97)
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = m,$$
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = n,$$
$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = p.$$

98) $m = \dfrac{xy}{ay+bx}$,

$n = \dfrac{yz}{cz+dy}$,

$p = \dfrac{zx}{ez+fx}$.

99) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z} = a$,

$\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = b$,

$-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = c$.

100) α) $\dfrac{(a-b)c}{z} + \dfrac{(b-c)a}{x} + \dfrac{(c-a)b}{y} = 0$,

$\dfrac{c}{z} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{a}{x} = a+b+c$,

$\dfrac{c}{z} - \dfrac{b}{y} + \dfrac{a}{x} = 3b-(a+c)$.

β) $x+y+z = (a+b+c)^2$,
$ay+bz+cx = 3(ab^2+bc^2+ca^2)$,
$ax+by+cz = a^3+b^3+c^3+6abc$.

101) α) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} + \dfrac{4}{z} = 2{,}9$,

$\dfrac{5}{x} - \dfrac{6}{y} - \dfrac{7}{z} = -10{,}4$,

$-\dfrac{8}{x} + \dfrac{9}{y} + \dfrac{10}{z} = 14{,}9$.

β) $\dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{5y} + \dfrac{1}{z} = 7\tfrac{3}{8}$,

$\dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{2y} + \dfrac{2}{z} = 10\tfrac{1}{8}$,

$\dfrac{4}{5x} - \dfrac{1}{2y} + \dfrac{4}{z} = 16\tfrac{1}{10}$.

102) $xy+yz+zx = 9xyz$,
$yz+2zx-3xy = -4xyz$,
$3yz-2zx+xy = 4xyz$.

103) $\dfrac{27yz-10y^2-18z^2+16x}{x-2y+3z} = 4x+5y-6z$,

$\dfrac{4+x^2+xy-xz-zy}{x-1+y} = x+1-z$,

$\dfrac{xy}{x+1} = y-1$.

104) $(z+x)a-(z-x)b = 2yz$,
$(x+y)b-(x-y)c = 2zx$,
$(y+z)c-(y-z)a = 2xy$ **).

**) Statt aus den bekannten Größen a, b und c die unbekannten Größen x, y, z zu entwickeln, suche man umgekehrt die Größen a, b, c durch x, y, z auszudrücken und benutze dann die sich ergebenden drei Gleichungen zur Bestimmung von x, y und z.

105) α) $ax+by-cz = 2xy,$
$-ax+by+cz = 2yz,$
$ax-by+cz = 2zx.$

β) $(a-b)x+(b-c)y+(c-a)z = 2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc),$
$(a-b)y+(b-c)z+(c-a)x = ab+ac+bc-a^2-b^2-c^2,$
$x+y+z = 0.$

106) α) $115(113-x)+719(y-219)-590(337-z) = 27,$
$\frac{5(113-x)+2}{2(y-219)} = 2,$
$\frac{337-z}{y-221} = 4$ **).

β) $\frac{12}{2x+3y} - \frac{7{,}5}{3x+4z} = 1,$
$\frac{30}{3x+4z} + \frac{37}{5y+9z} = 3,$
$\frac{222}{5y+9z} - \frac{8}{2x+3y} = 5.$

107)* $a_1x+b_1y+c_1z+d_1u = m_1,$
$a_2x+b_2y+c_2z+d_2u = m_2,$
$a_3x+b_3y+c_3z+d_3u = m_3,$
$a_4x+b_4y+c_4z+d_4u = m_4.$

108) $1\frac{2}{3}x+2\frac{3}{4}y = 105,$
$3\frac{4}{5}x+4\frac{5}{6}z = 317,$
$5\frac{6}{7}z+6\frac{7}{8}u = 741,$
$7\frac{8}{9}u+8\frac{9}{10}x = 835.$

109) $x-2y+3z-4u = -10,$
$-5x+6y-7z+8u = 18,$
$9x-10y-11z+12u = 4,$
$-13x+14y+15z-16u = -4.$

110) $0{,}12x-0{,}23y+0{,}34z = 2{,}071,$
$0{,}45y-0{,}56z+0{,}67u = -8{,}044,$
$0{,}78z-0{,}89u+0{,}87x = 9{,}560,$
$0{,}65u-0{,}43x+0{,}21y = -4{,}881.$

111) α) $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{7}+\frac{u}{9} = 2800,$
$\frac{x}{5}+\frac{y}{7}+\frac{z}{9}+\frac{u}{11} = 2144,$
$\frac{x}{7}+\frac{y}{9}+\frac{z}{11}+\frac{u}{13} = 1744,$
$\frac{x}{9}+\frac{y}{11}+\frac{z}{13}+\frac{u}{15} = 1472.$

β) $x+y+z = 3a+b+c,$
$x+y+t = a+3b+c,$
$x-z-t = a+b-c,$
$y+z-t = 3a-b-c.$

**) Man setze $113-x = x'$, $y-219 = y'$, $337-z = z'$ und bestimme aus x', y', z' die Unbekannten x, y und z.

112) α) $x+y+z+t+u = a,$
$x+y+z+t+v = b,$
$x+y+z+u+v = c,$
$x+y+t+u+v = d,$
$x+z+t+u+v = e,$
$y+z+t+u+v = f.$

β) $x+y+z+t+u+v = (a+b+c)^2,$
$x+y+t = (a+b)^2,$
$ct+bu+av = 6abc,$
$(t-u)(b+c) = 2a(y-z),$
$(u-v)(a+b) = 2c(x-y),$
$ax+by+cz = a^3+b^3+c^3.$

113) α) $yztu+xztu+xytu+xyzu+xyzt = xyztu,$
$yztv+xztv+xytv+xyzv+xyzt = xyztv,$
$yzuv+xzuv+xyuv+xyzv+xyzu = xyzuv,$
$ytuv+xtuv+xyuv+xytv+xytu = xytuv,$
$ztuv+xtuv+xzuv+xztv+xztu = xztuv,$
$ztuv+ytuv+yzuv+yztv+yztu = yztuv.$

β) $x+ay+a^2z+a^3t = m,$
$x+by+b^2z+b^3t = n,$
$x+cy+c^2z+c^3t = o,$
$x+dy+d^2z+d^3t = p$ **).

Exponential-Gleichungen.

114) $a^x a^{5y} = (a^7)^4$ ***), $a^{7x} : a^6 = (a^y)^3.$

115) $\sqrt[3]{m^x} \cdot \sqrt[7]{m^y} = m^7,$ $\sqrt[4]{m^x} : \sqrt[3]{(m^2)^y} = \frac{1}{m^{11}}.$

116) $\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[y]{a} = \sqrt[12]{a^7},$ $\sqrt[x]{a^3} : \sqrt[y]{a^4} = 1.$

117) $\sqrt[x+1]{a^3} \cdot a^{y+2} = \sqrt[4]{(a^3)^9},$ $\sqrt[x+1]{a^7} : a^{y-5} = a^2\sqrt[4]{a^3}.$

118) $\sqrt[3]{m^{x-5}} : \sqrt[5]{m^{y-3}} = 1,$ $\sqrt[4]{m^{3x-1}} \cdot \sqrt[8]{m^{5y-1}} = m^{16}.$

119) $a^x b^y = p,$ $c^x d^y = q.$

120) $\sqrt[x]{a} : \sqrt[y]{b} = m,$ $\sqrt[x]{c} : \sqrt[y]{d} = n.$

121) $3^x \cdot 4^y = 3981312,$ $2^y \cdot 5^x = 400000.$

**) Gleichungen von dieser Form kommen bei der Interpolation der Reihen vor.
***) Die Gleichungen 114—118 und 130 sind ohne Hülfe der Logarithmen zu behandeln.

122) $\sqrt[3]{2^x} \cdot \sqrt[5]{3^y} = 36,$ 123) $\sqrt[x]{5} \cdot \sqrt[y]{0{,}2} = 1,$

$\sqrt{4^{-x}} : \sqrt[-10]{256^y} = 4.$ $\sqrt[x]{4{,}92} : \sqrt[y]{1{,}23} = 4.$

124) $\sqrt[x]{59049} : \sqrt[y]{1296} = 1{,}5,$

$\sqrt{\sqrt[x]{1048576} : \left(\sqrt[y]{4096}\right)^{-2}} = 256.$

125) $\sqrt[x]{64} \cdot 3^y = 36,$ 126) $x^y = 243,$

$\sqrt[x]{1728} \cdot 5^y = 300.$ $\sqrt[y]{1024} = (\frac{2}{3}x)^2.$

127) $\sqrt[x]{x+y} = 2,$ 128) $\left[\frac{1}{x}\right]^{\frac{1}{y}} = 0{,}6922006,$

$(x+y)3^x = 279936.$ $x^{2,802585} = 10^y : 52{,}27352.$

129) $2^x \cdot 3^y = 18,$ 130) $(a^z)^y \cdot (a^y)^x \cdot (a^x)^z = a^{16xyz},$

$4^x \cdot 5^z = 500,$ $(a^z)^y : [(a^y)^x : (a^x)^z] = a^{14xyz},$

$6^y \cdot 7^z = 12348.$ $(a^z)^y \cdot (a^y)^x : (a^x)^z = a^{6xyz}.$

§. 66.

Auflösungen der Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren unbekannten Größen in §. 65.

4) $x = 5678,\ y = 1234.$ 5) $x = \frac{1}{2}(s+d),\ y = \frac{1}{2}(s-d).$

6) $x = 7,\ y = 13.$ 7) $x = 7\frac{3}{8},\ y = 10\frac{11}{12}.$

8) $x = \dfrac{ad-b}{ac-1},\ y = \dfrac{bc-d}{ac-1}.$ 9) $x = 0,\ y = p.$

10) $x = 11,\ y = 17.$ 11) $x = 70,\ y = 72.$

12) $x = 1{,}54369,\ y = 0{,}83929.$ 13) $x = 37,\ y = 43.$

14) $x = 2\frac{1}{4},\ y = 3\frac{1}{8}.$ 15) $x = 65,\ y = 66.$

16) $x = 3{,}14159,\ y = 3{,}14159.$ 17) $x = 9,\ y = 7.$

18) $x = \dfrac{a}{a-b},\ y = \dfrac{b}{a+b}.$ 19) $x = \dfrac{2}{m+n},\ y = \dfrac{2}{m-n}.$

20) $\alpha)\ x = na-a,\ y = a+b;\ \beta)\ x = a(a+b),\ y = b(a+b).$

21) $x = \dfrac{nd}{n-m},\ y = \dfrac{md}{n-m}.$ 22) $x = \dfrac{ps-nt}{ms-nr},\ y = \dfrac{mt-pr}{ms-nr}.$

23) $x = \dfrac{eg \mp dh}{a(bg \mp df)},\ y = \dfrac{ef-bh}{c(bg \mp df)}.$

24) $x = 23,\ y = 19.$ 25) $x = 11,\ y = 5.$

26) $x = n^2 : (n^2+1),\ y = n^2 : (n^2+1).$

27) $x = 7\frac{3}{4}$, $y = 9\frac{2}{3}$. 28) $x = 1{,}2$, $y = 3{,}4$.
29) $x = 6{,}3$, $y = 39{,}2$.

30) $x = \frac{(bp+cn)am}{(an+bm)cp}$, $y = \frac{(ap-cm)bn}{(an+bm)cp}$.

31) $x = -5\frac{1}{2}$, $y = -9\frac{1}{2}$. 32) $x = 24\frac{3}{4}$, $y = 6$.
33) $x = 2\frac{19774}{49053}$, $y = \frac{30394}{49053}$.
34) α) $x = a+b$, $y = a-b$; β) $x = a+b-c$, $y = a-b+c$.
35) $x = a-2b+3c$, $y = 3a-2b+c$.
36) α) $x = 1$, $y = 2$; β) $x = 5$, $y = 6$.
37) $x = (an-bm):(cn-bp)$, $y = (an-bm):(cm-ap)$.
38) $x = (a^2-b^2):a$, $y = (a^2-b^2):b$.
39) $x = 5$, $y = 7$. 40) $x = 5$, $y = 4$.
41) $x = 7$, $y = 8$. 42) $x = 11$, $y = 11$.
43) $x = -9\frac{678}{925}$, $y = -20\frac{662}{925}$.
44) $x = 14$, $y = 46$. 45) $x = 1$, $y = 3$.

46) $x = \frac{dm(hp-fq)-benq}{(an-cm)(hp-fq)-bgnp}$,

$y = \frac{eq(an-cm)-dgmp}{(an-cm)(hp-fq)-bgnp}$.

47) Den Gleichungen genügen die Werthe $x = 0$ und $y = 0$, wenn $(bn+aq)(ct-dr)$ ungleich $(ap-bm)(ds+cu)$ ist. Sind die beiden Producte einander gleich, so genügen alle Werthe von x und y, welche in der Beziehung zu einander stehen, daß $y = \frac{ct-dr}{ds+cu}x$ ist.

48) α) $x = \frac{1}{2}(a+b)$, $y = \frac{1}{2}(a-b)$;

β) $x = -\frac{(a-m)(a-n)}{(a-b)}$, $y = \frac{(b-m)(b-n)}{(a-b)}$.

49) $x = \frac{(q^2-p^2)n-(m^2-n^2)p}{nq-mp}$, $y = \frac{(m^2-n^2)q-(q^2-p^2)m}{nq-mp}$.

50) $x = (a+1):(ab+1)$, $y = a(b+1):(ab+1)$.

51) $x = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, $y = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

52) $x = (a^2+1)(n^2-1)$, $y = (a^2-1)(n^2+1)$.
53) $x = a-2b+3c$, $y = a+2b-3c$.
54) $x = (a^2-b^2):a$, $y = (a^2-b^2):b$.
55) $x = (a-b):(a+b)$, $y = (a+b):(a-b)$.

56) $x = \frac{3a}{4b} - \frac{5b}{6a}$, $y = \frac{9a}{10b} + \frac{7b}{8a}$.

57) $x = \frac{a+b^2}{2b}$, $y = \frac{a-b^2}{2b}$. 58) $x = 1\frac{1}{2}$, $y = 2\frac{1}{2}$.
59) $x = 29$, $y = 28$. 60) $x = 9$, $y = 7$.
61) $x = 26$, $y = 27$. 62) $x = 3$, $y = 2$.
63) α) $x = 2$, $y = 9$. β) $x = 3$, $y = 2$.
γ) $x = 16$, $y = 25$. 64) $x = 2$, $y = 3$.
65) $x = 1$, $y = 2$. 66) $x = 5$, $y = 7$.
67) $x = 9$, $y = 11$. 68) $x = 2$, $y = 2$.
69) $x = \frac{1}{2}(a+b+2)$, $y = (a+b):(a+b+2)$.
70) $x = 3$, $y = 7$. 71) $x = 3$, $y = 1$. Außer diesen Werthen genügen noch $x = 0$, $y = 0$.
72) $x = (+1)^2 = 1$, $y = (+1)^2 = 1$.
73) $x = (-3)^3 = -27$, $y = (-5)^3 = -125$.
74) $x = (+2)^2+3 = 7$, $y = (+3)^2+2 = 11$.
75) α) $x = 17$, $y = 8$; β) $x = \frac{5}{4}m$, $y = \frac{4}{5}m$;
γ) $x = \frac{ab}{a+b}$, $y = \frac{a+b}{4}$.
76) $x = 5$, $y = 11$, $z = 17$. 77) $x = 7$, $y = 8$, $z = 9$.
78) $x = 1\frac{2}{3}$, $y = 4\frac{5}{6}$, $z = 7\frac{8}{9}$.
79) $x = -1{,}2$, $y = 3{,}4$, $z = -5{,}6$.
80) $x = \frac{bfn+dem-bdp}{ade+bcf}$, $y = \frac{adp+cfm-afn}{ade+bcf}$,
$$z = \frac{aen+bcp-cem}{ade+bcf}.$$
81) $x = 987$, $y = 654$, $z = 321$.
82) $x = \frac{nd-pb}{ad-bc}$, $y = \frac{pa-nc}{ad-bc}$,
$$z = \frac{mad-mbc-nd+pb-pa+nc}{ad-bc}.$$
83) $x = 5$, $y = -5$, $z = 5$.
84) $x = \frac{1}{2}$, $y = -2\frac{3}{4}$, $z = 4\frac{5}{8}$.
85) $x = 2$, $y = 4$, $z = 8$. 86) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.
87) α) $x = \frac{m'(b''c'''-b'''c'')+m''(b'''c'-b'c''')+m'''(b'c''-b''c')}{a'(b''c'''-b'''c'')+a''(b'''c'-b'c''')+a'''(b'c''-b''c')}$,
$$y = \frac{m'(c''a'''-c'''a'')+m''(c'''a'-c'a''')+m'''(c'a''-c''a')}{b'(c''a'''-c'''a'')+b''(c'''a'-c'a''')+b'''(c'a''-c''a')},$$
$$z = \frac{m'(a''b'''-a'''b'')+m''(a'''b'-a'b''')+m'''(a'b''-a''b')}{c'(a''b'''-a'''b'')+c''(a'''b'-a'b''')+c'''(a'b''-a''b')}.$$
Bemerkung: Der Werth von x läßt sich auch unter der Form
$$x = \frac{\Sigma\, m'(b''c''' - b'''c'')}{\Sigma\, a'(b''c''' - b'''c'')}$$

darstellen, wenn man auf das cyklische Fortrücken der kommatisirten Buchstaben achtet, wonach a'' auf a', a''' auf a'' und a' auf a''' folgt. Aus $m'(b''c'''-b'''c'')$ erhält man durch cyklisches Fortrücken das folgende Glied $m''(b'''c'-b'c''')$, hieraus das dritte $m'''(b'c''-b''c')$. In derselben Weise läßt sich das zweite Glied des Divisors aus dem ersten und hieraus das dritte ableiten. Die Summe aller Ableitungen wird durch das Zeichen Σ angedeutet. Durch cyklisches Fortrücken der Buchstaben in der Reihenfolge $a, b, c, a..$ und $x, y, z, x..$ erhält man aus dem Werthe von x den von y, hieraus den von z. Eine besondere Auflösungs-Methode der Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen ist die durch Determinanten. Man sehe: Theorie und Anwendung der Determinanten von Dr. Baltzer (2. Aufl., Leipzig 1864); ferner: „Die Determinanten als Gegenstand des Gymnasial-Unterrichts, von Dr. Dölp." Abhandlung im Programme des Gymnasiums zu Gießen 1865.

β) Die Wurzelwerthe sind die reciproken der in 87 α) gefundenen.

88) $x = 315,\quad y = 630,\quad z = 945.$

89) α) $x = as:(ma+nb+pc),\quad y = bs:(ma+nb+pc),$
$z = cs:(ma+nb+pc);$

β) $x = a^2-b^2,\quad y = b^2-c^2,\quad z = c^2-a^2.$

90) $x = 5,\quad y = 12,\quad z = 13.$

91) $x = 51,\quad y = 76,\quad z = 1.$

92) $x = 0,\quad y = 1,\quad z = 2.$

93) $x = 1,\quad y = 2,\quad z = 3.$

94) α) $x = b+c-a,\quad y = a+c-b,\quad z = a+b-c;$

β) $x = (a+b)(b-c),\ y = (b+c)(c-a),\ z = (c+a)(a-b).$

95) α) $x = b^2-c^2,\quad y = c^2-a^2,\quad z = a^2-b^2;$

$$\beta)\ x = \frac{ab(a'-a'') + a'b'(a''-a) + a''b''(a-a')}{b(a'-a'') + b'(a''-a) + b''(a-a')},$$

$$y = \frac{ab(b'-b'') + a'b'(b''-b) + a''b''(b-b')}{a(b'-b'') + a'(b''-b) + a''(b-b')},$$

$$z = -\frac{(a-a')(a'-a'')(a''-a)(b-b')(b'-b'')(b''-b)}{[(ab'-a'b) + (a'b''-a''b') + (a''b-ab'')]^2}.$$

96) $x = \dfrac{1}{b-c},\quad y = \dfrac{1}{c-a},\quad z = \dfrac{1}{a-b}.$

97) $x = \dfrac{2}{m+p-n},\quad y = \dfrac{2}{m+n-p},\quad z = \dfrac{2}{n+p-m}.$

98) $x = \dfrac{mnp(bde+acf)}{cfnp+bdmn-bfmp},\quad y = \dfrac{mnp(bde+acf)}{denp+afmp-admn},$
$z = \dfrac{mnp(bde+acf)}{bemp+acmn-cenp}.$

99) $x = \dfrac{2}{a+b},\quad y = \dfrac{2}{a+c},\quad z = \dfrac{2}{b+c}.$

100) α) $x = \dfrac{a}{b+c-a},\quad y = \dfrac{b}{a-b+c},\quad z = \dfrac{c}{a+b-c};$

β) $x = a^2+2bc,\quad y = b^2+2ca,\quad z = c^2+2ab.$

101) α) $x = 3\frac{1}{3}$, $y = 1\frac{3}{7}$, $z = \frac{10}{11}$; β) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{4}$.
102) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{4}$. 103) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.
104) $x = \frac{1}{2}(b+c)$, $y = \frac{1}{2}(c+a)$, $z = \frac{1}{2}(a+b)$.
105) α) $x = \frac{1}{2}(b+c-a)$, $y = \frac{1}{2}(a+c-b)$, $z = \frac{1}{2}(a+b-c)$;
β) $x = a-b$, $y = b-c$, $z = c-a$.
106) α) $x = 111$, $y = 222$, $z = 333$; β) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

107) $$x = \frac{\Sigma m_1[b_2(c_3d_4-c_4d_3)+b_3(c_4d_2-c_2d_4)+b_4(c_3d_2-c_2d_3)]}{\Sigma a_1[b_2(c_3d_4-c_4d_3)+b_3(c_4d_2-c_2d_4)+b_4(c_3d_2-c_2d_3)]}.$$

Ueber die Bedeutung von Σ und über die Ableitung von y, z und u aus dem Werthe für x sehe man die Antwort zu 87.

108) $x = 30$, $y = 20$, $z = 42$, $u = 72$.
109) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $u = 4$.
110) $x = 0{,}1$, $y = -2{,}3$, $z = 4{,}5$, $u = -6{,}7$.
111) α) $x = 315$, $y = 3465$, $z = 9009$, $u = 6435$;
β) $x = a+b+c$, $y = a+b-c$, $z = a-b+c$,
$t = -a+b+c$.

112) α) Setzt man $a+b+c+d+e+f = s$, so ist $x = \frac{1}{5}s-f$, $y = \frac{1}{5}s-e$, $z = \frac{1}{5}s-d$, $t = \frac{1}{5}s-c$, $u = \frac{1}{5}s-b$, $v = \frac{1}{5}s-a$;
β) $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$, $t = 2ab$, $u = 2ca$, $v = 2bc$.

113) α) $x = 5$, $y = 5$, $z = 5$, $t = 5$, $u = 5$, $v = 5$;
β) Zieht man die zweite Gleichung von der ersten, die dritte von der zweiten, die vierte von der dritten ab, so gelangt man zu Resultaten, welche bezüglich durch $a-b$, $b-c$, $c-d$ theilbar sind. Setzt man: $\frac{m-n}{a-b} = m'$, $\frac{n-o}{b-c} = n'$, $\frac{o-p}{c-d} = o'$, $\frac{m'-n'}{a-c} = m''$, $\frac{n'-o'}{b-d} = n''$, $\frac{m''-n''}{a-d} = m'''$, so wird: $t = m'''$, $z = m'' - (a+b+c)m'''$, $y = m'-m''(a+b) + m'''(ab+bc+ca)$, $x = m-m'a+m''ab-m'''abc$.

114) $x = 3$, $y = 5$. 115) $x = 12$, $y = 21$.
116) $x = 3$, $y = 4$. 117) $x = 3$, $y = 4$.
118) $x = 11$, $y = 13$.

119) $$x = \frac{\log b \cdot \log q - \log d \cdot \log p}{\log b \cdot \log c - \log a \cdot \log d},$$
$$y = \frac{\log c \cdot \log p - \log a \cdot \log q}{\log b \cdot \log c - \log a \cdot \log d}.$$

120) $$x = \frac{\log b \cdot \log c - \log a \cdot \log d}{\log b \cdot \log n - \log d \cdot \log m},$$
$$y = \frac{\log b \cdot \log c - \log a \cdot \log d}{\log a \cdot \log n - \log c \cdot \log m}.$$

121) $x = 5$, $y = 7$. 122) $x = 6$, $y = 10$.

123) $x = 1$, $y = 1$. 124) $x = 5$, $y = 4$.
125) $x = 3$, $y = 2$. 126) $x = 3$, $y = 5$.
127) $x = 7$, $y = 121$. 128) $x = 2{,}71828..$, $y = 2{,}71828...$
129) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. 130) $x = 0{,}1$, $y = 0{,}2$, $z = 1$.

§. 67.

Aufgaben als Anwendungen der Gleichungen des ersten Grades mit mehreren unbekannten Größen*).

1) Zwei Zahlen zu suchen, deren Summe 857142 [$67\frac{3}{4}$] und deren Differenz 571428 [$25\frac{5}{6}$] ist.

2) In einer Versammlung von 48 Personen wird ein Vorschlag mit einer Stimmenmehrheit von 18 Personen angenommen. Wie viele haben für und wie viele gegen den Vorschlag gestimmt?

3) Wenn der mit dem Winde gehende Schall einer Kanone in einer Secunde 1062,2 Fuß, der gegen den Wind gehende Schall aber nur 1035,2 Fuß in derselben Zeit zurücklegt, wie viel Fuß legt der Schall allein, wie viel der Wind allein in einer Secunde zurück?

4) Von Köln geht um 2 Uhr 13 Minuten [7 U. 6 M.] kölner Zeit eine telegraphische Nachricht nach Berlin, welche daselbst um 3 Uhr 14 Minuten [7 U. 39 M.] berliner Zeit vollständig anlangt. Von Berlin geht hierauf mit derselben Geschwindigkeit um 4 U. 15 M. [7 Uhr 45 Minuten] berliner Zeit eine Nachricht durch den Telegraphen nach Köln, welche am letzteren Orte um 4 Uhr 24 Minuten [7 U. 26 M.] kölner Zeit anlangt. In welcher Zeit wurde die telegraphische Nachricht von Berlin nach Köln gebracht, und um wie viel waren die kölner und berliner Uhr von einander verschieden?

5) Der Planet Venus und die Erde vollenden beide in verschiedenen Zeiten ihren Umlauf um die Sonne, daher sie zuweilen einander sehr nahe stehen, zuweilen dagegen weit von einander entfernt sind. Wenn nun die größte Entfernung von einander 34172000 Meilen, die kleinste aber nur 5486000 Meilen beträgt, und angenommen wird, daß beide Himmelskörper sich in kreisförmigen Bahnen um die Sonne als Mittelpunct bewegen, wie lassen sich hieraus die Entfernungen der Venus und der Erde von der Sonne berechnen, wenn man außerdem weiß, daß ersterer Planet der Sonne näher steht, als letzterer?

6) Eine Schuld von 4 Thlrn. 6 Sgr. zu bezahlen, gebe ich

*) Die leichteren Aufgaben dieses Paragraphen können auch als Anwendungen von Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Größe (§. 63) behandelt werden.

einen Friedrichsd'or und erhalte ein Fünffrankenstück und 4 Sgr. 2 Pfg. zurück. Zu dem Fünffrankenstücke lege ich noch einen Friedrichsd'or hinzu, bezahle eine Schuld von 6 Thlrn. 28 Sgr. und erhalte 1 Sgr. zurück. Wie hoch wurde der Friedrichsd'or und das Fünffrankenstück in preußischem Gelde gerechnet?

7) Schwer bepackt ein Eselchen ging und des Eselchens Mutter;
Und die Eselin seufzete sehr; da sagte das Söhnlein:
Mutter, was klagst und stöhnest du doch wie ein jammerndes Mägdlein?
Gib ein Pfund mir ab, so trag' ich doppelte Bürde;
Nimmst du es aber von mir, gleich viel dann haben wir beide.
Rechne mir aus, wenn Du kannst, mein Bester, wie viel sie getragen.

8) Ein Knabe spricht zu einem andern: Gib mir 5 [a] von deinen Nüssen, so habe ich dreimal [$n$mal] so viel, als du. Nein, erwiederte dieser, gib du mir lieber 2 [b] von deinen Nüssen, so habe ich fünfmal [$p$mal] so viel, als du. Wie viel hat Jeder?

9) Jemand hat zwei Becher nebst einem auf beide passenden Deckel; setzt er den Deckel auf den ersten Becher, so ist derselbe noch einmal so viel werth, als der zweite; setzt er dagegen den Deckel auf den zweiten Becher, so ist letzterer $1\frac{1}{3}$ mal so viel werth, als ersterer. Wenn nun ohne Deckel jeder Becher 10 Thlr. weniger werth ist, als mit Deckel, wie viel kostet jeder der beiden Becher?

10) In einer Familie waren mehrere Kinder, Knaben und Mädchen. Auf die Frage, wie groß ihre Zahl sei, antwortete das älteste Mädchen: „Ich habe so viele Schwestern, wie Brüder." Der älteste Knabe aber sagte: „Ich habe nur halb so viel Brüder wie Schwestern." Wie viel Knaben, wie viel Mädchen waren es?

11) α) Welcher Bruch erhält den Werth $\frac{1}{4}$ [m], wenn man den Zähler um 1 [a] vermehrt, dagegen den Werth $\frac{1}{5}$ [n], wenn man den Nenner um 1 [b] vermehrt? β) Einen Bruch zu suchen von der Eigenschaft, daß der Werth $\frac{1}{2}$ entsteht, wenn man Nenner und Zähler um 1 vermehrt, dagegen der Werth $\frac{1}{3}$, wenn man Nenner und Zähler um 1 vermindert.

12) A und B geben zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte zusammen 10000 Gulden her. A läßt sein Geld 1 Jahr 3 Monate, B das seinige 2 Jahre 11 Monate stehen. Wenn nun nach diesen Zeiten der Gewinn für Beide gleich groß ist, wie viel betrug eines Jeden Einlage?

13) Zwei Zahlen geben, zu einander addirt, zur Summe 47 [s], durch einander dividirt, zum Quotienten 5 [q] und zum Reste 5 [r]. Wie heißen die beiden Zahlen?

14) Zwei Zahlen zu suchen, deren Differenz und Quotient 5 [a] ist.

15) Zwei Zahlen zu finden, deren Summe und Quotient a ist.

16) Dividire ich die größere zweier Zahlen in die kleinere, so erhalte ich zum Quotienten 0,21 und zum Reste 0,04162. Dividire ich die kleinere in die größere, so erhalte ich zum Quotienten 4 und zum Reste 0,742. Wie heißen die beiden Zahlen?

17) Dividire ich eine von zwei Zahlen durch die andere, so erhalte ich zum Quotienten $a-b^2$, zum Reste $b+b^4$. Dividire ich die zweite Zahl durch die erste, so erhalte ich zum Quotienten $b-a^2$ und zum Reste $a+a^4$. Wie heißen die beiden Zahlen.

18) Ich kenne zwei dreizifferige Zahlen, deren Summe, um 1 vermehrt, gerade 1000 ausmacht. Schreibe ich die beiden Zahlen hinter einander und trenne dieselben durch ein Decimalkomma, so entsteht eine sechsmal so große Zahl, wenn die kleinere Zahl nach der größeren, als wenn die größere Zahl nach der kleineren gesetzt wird. Wie heißen die beiden Zahlen?

19) Ein Vater sagt zu seinem Sohne: Vor 7 Jahren war ich 7 mal so alt, als du damals warest, und über 3 Jahre werde ich 3 mal so alt sein, als du alsdann sein wirst. Wie alt ist der Vater, wie alt der Sohn?

20) Ein Capital, zu einem gewissen Procente auf Zinsen ausgethan, wächst in 8 Jahren mit den Zinsen zu 6486 Thalern an. Dasselbe Capital würde, wenn es 1 Procent Zinsen mehr trüge, in 5 Jahren mit den Zinsen $6051\frac{1}{4}$ Thlr. ausmachen. Wie groß ist das Capital, und wie viel Procent betragen die Zinsen?

21) Jemand zahlt für eine gewisse Summe, die er nach 3 Monaten zu zahlen schuldig ist, mit einem gewissen Procente einfachen Disconto $3523\frac{1}{2}$ Thlr. Ein Anderer zahlt für eine gleiche Summe, die er nach 11 Monaten zu zahlen schuldig ist, mit demselben Procente Disconto $3319\frac{1}{2}$ Thlr. Wie viel Thaler waren die Beiden zu zahlen schuldig, und wie viel Procent betrug der jährliche Disconto?

22) A sagt zu B: Gib mir $\frac{3}{4}$ deines Geldes, so habe ich gerade 100 Thlr. Nein, sagte hierauf B zu A, gib du mir nur die Hälfte deines Geldes, so habe ich 100 Thlr. Wie viel hatte A, wie viel B?

23) Einst wurde ein Pferd zum Verkaufe ausgeboten. A sagte zu B: Gib du mir die Hälfte deines Geldes, so kann ich mir das Pferd kaufen. B sagte: Ich möchte mir das Pferd kaufen, aber es fehlt mir $\frac{1}{3}$ *deines* Geldes. Der Kauf unterblieb. Bald darauf wurde ein zweites Pferd zum Verkaufe ausgestellt, welches 12 Thaler wohlfeiler war, als ersteres. Es wollte aber weder B hierzu dem A $\frac{3}{8}$ seines Geldes, noch A dem B $\frac{1}{6}$ seines Geldes abtreten*), und somit konnte der Kauf zum zweiten Male nicht

*) Diese zweite Bestimmung, daß A dem B $1/6$ seines Geldes abgeben muß, ist eigentlich überflüssig, und würde, wenn für $1/6$ irgend eine andere Zahl gesetzt wäre, einen Widerspruch in sich enthalten.

vor sich gehen. Wie viel besaß A, wie viel B, und zu welchem Preise war das erste Pferd ausgestellt?

24) Jemand hat zwei Fässer und in jedem eine gewisse Quantität Wein. Um in beide gleich viel zu bekommen, gießt er aus dem ersten Fasse so viel in das zweite, als schon darin ist, gießt hierauf wieder aus dem zweiten in das erste so viel, als nun darin ist, und endlich wieder aus dem ersten in das zweite so viel, als noch darin übrig ist. Am Ende hat er in jedem Fasse 80 Quart Wein. Wie viel Quart waren Anfangs darin?

25) Wie heißt die Auflösung der vorigen Aufgabe, wenn das Ausgießen auf dieselbe Weise noch einmal wiederholt wird und zuletzt n Quart in jedem Fasse übrig bleiben?

26) Das 3fache einer Zahl nebst dem 7fachen einer anderen Zahl gibt 58; das 7fache der ersteren Zahl nebst dem 3fachen der zweiten Zahl gibt 42. Wie heißen die beiden Zahlen?

27) Zwei Zahlen von der Eigenschaft zu finden, daß sich die erste zur zweiten, wie ihre Summe zu 5 [a], und wie ihre Differenz zu 3 [b] verhält.

28) Die Quersumme einer 3zifferigen Zahl ist = 9. Die Ziffer auf der ersten Stelle links beträgt den achten Theil der aus den beiden anderen Ziffern bestehenden Zahl, und die Ziffer auf der ersten Stelle rechts ebenfalls den achten Theil der aus den beiden anderen Ziffern bestehenden Zahl. Welches ist demnach die Zahl?

29) Vermehrt man die beiden Glieder eines Verhältnisses um 5, so ist das veränderte Verhältniß dem Verhältnisse 9 : 11 gleich. Vermindert man aber die beiden Glieder des gegebenen Verhältnisses um 5, so wird dasselbe dem Verhältnisse 2 : 3 gleich. Wie heißen die Glieder des gegebenen Verhältnisses?

30) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn an die Stelle der Zahlen 5, 9, 11, 5, 2, 3 die allgemeinen Zeichen d, m, n, d, p, q gesetzt werden?

31) Zwei Zahlen stehen in dem Verhältnisse 3 : 5. Setzt man zu der einen 10 hinzu und zieht von der anderen 10 ab, so kehrt sich das Verhältniß der beiden Zahlen um. Wie heißen die Zahlen?

32) Zwei Zahlen von folgender Beschaffenheit zu finden: Dividirt man die eine durch 6, die andere durch 5, so ist die Summe der Quotienten 52; dividirt man aber die eine durch 8, die andere durch 12, so ist die Summe der Quotienten 31.

33) Die Summe der reciproken Werthe zweier Zahlen ist 5. Die Hälfte der einen Zahl nebst $\frac{1}{3}$ der anderen Zahl ist dem doppelten Producte der Zahlen gleich. Wie heißen beide Zahlen?

34) Jemand hat zwei volle Fässer und ein drittes, größeres, leeres Faß. Um das leere zu füllen, bedarf es entweder des Inhaltes des ersteren nebst einem Fünftel des Inhaltes des zweiten oder des Inhaltes des zweiten nebst einem Drittel des Inhaltes des ersteren. Alle drei Fässer zusammen können 1440 Quart fassen. Wie viel faßt jedes derselben?

35) Eine zweizifferige Zahl gibt es, welche zur Quersumme 10 hat. Kehrt man die Ziffern um, so entsteht eine Zahl, welche um 36 kleiner ist. Wie heißt die Zahl?

36) Für 7 Friedrichsd'or und 9 Ducaten erhielt ich von einem Geldwechsler 68 Thlr. 5 Pfg., und für 11 Friedrichsd'or und 3 Ducaten 71 Thlr. 20 Sgr. 7 Pfg. Wie hoch wurde jede der beiden Geldsorten in preußischem Gelde berechnet?

37) Jemand zahlt für 10 Pfund Kaffee und 14 Pfund Zucker 8 Thlr. $15\frac{1}{2}$ Sgr., und für 18 Pfund Kaffee und 7 Pfund Zucker 9 Thlr. 17 Sgr. Wie viel kostet das Pfund einer jeden Waare?

38) Ein Meister und ein Gesell erhielten zusammen 11 Thlr. 11 Sgr. zum Arbeitslohne. Der Meister arbeitete 7, der Gesell 12 Tage; dabei bekam der Meister für 3 Arbeitstage 9 Sgr. mehr, als der Gesell für 4 Arbeitstage. Wie groß war Beider Tagelohn?

39) Ein Capital macht mit den 7jährigen Zinsen zusammen 2101 Francs 95 Centimes; ein drei mal so großes Capital bei gleichen Procenten nach 5 Jahren mit den Zinsen 5892 Francs 75 Centimes. Wie groß sind beide Capitalien, und zu wie viel Procent stehen dieselben aus?

40) Jemand bringt zu einem Weinhändler zwei große Krüge und läßt dieselben mit Wein füllen, und zwar den einen mit Wein, wovon das Quart 12 Sgr., den anderen mit Wein, wovon das Quart 16 Sgr. kostet. Für beide Krüge will er zusammen 3 Thlr. 28 Sgr. bezahlen, erhält aber 5 Sgr. zurück, indem es sich ergibt, daß eine Verwechselung zwischen den Krügen Statt gefunden. Wie viel Quart faßt jeder der Krüge?

41) Zwei Capitalien, von denen das eine zu 5 Procent, das andere zu $4\frac{1}{2}$ Procent ausgeliehen wurde, gaben in einem Jahre 284 Thlr. 12 Sgr. Zinsen. Wäre das erste Capital zu den Procenten des zweiten, und das zweite zu den Procenten des ersten ausgeliehen worden, so würde man $4\frac{1}{2}$ Thaler weniger Zinsen erhalten haben. Wie groß waren die beiden Capitalien?

42) Von zwei Capitalien geben $\frac{1}{4}$ des ersteren, zu $3\frac{3}{4}$ Procent, und $\frac{3}{8}$ des zweiten, zu $4\frac{1}{4}$ Procent, zusammen in 6 Jahren 327 Gulden 90 Neukreuzer Zinsen. Der Rest des ersteren Capitals, zu $5\frac{1}{2}$ Procent, und der Rest des zweiten, zu $4\frac{3}{4}$ Procent, geben

in 2 Jahren zusammen 277 Gulden 20 Neukreuzer. Wie groß ist jedes der beiden Capitalien?

43) α) Ein Weinhändler hat zweierlei Wein. Vermischt er 9 Quart des schlechtern mit 7 Quart des bessern, so kann er das Quart zu $13\frac{3}{4}$ Sgr. verkaufen. Mischt er aber 3 Quart des schlechteren mit 5 Quart des besseren, so kann er das Quart zu $14\frac{1}{2}$ Sgr. verkaufen. Was kostet das Quart einer jeden Sorte? β) Wie heißt die Auflösung der vorigen Aufgabe, wenn für die Zahlen 9, 7, $13\frac{3}{4}$, 3, 5, $14\frac{1}{2}$ die allgemeinen Zeichen a, b, p, c, d, q gesetzt werden? Welche besonderen Werthe kann das Resultat der allgemeinen Auflösung erhalten?

44) Eine Hausfrau miethete zwei Mägde, jede für 40 Gulden Lohn; außerdem versprach sie jeder ein neues Kleid und ein Paar Schuhe zu bestimmten Preisen. Die eine Magd verließ, nachdem sie bereits das Kleid voraus erhalten hatte, nach 8 Monaten ihren Dienst und erhielt $26\frac{1}{2}$ Gulden Lohn; die zweite, welche das Paar Schuhe voraus erhalten hatte, verließ nach $9\frac{1}{2}$ Monat ihren Dienst und erhielt $35\frac{1}{2}$ Gulden Lohn. Wie hoch war das Kleid, wie hoch das Paar Schuhe berechnet?

45) Wie schwer ist ein Kubikzoll Blei und ein Kubikzoll Zinn, wenn 11 Kubikzoll Zinn eben so viel wiegen, als 7 Kubikzoll Blei, und wenn 11 Kubikzoll Blei und 7 Kubikzoll Zinn zusammen $214\frac{1}{2}$ Loth schwer sind?

46) Die jährliche Pacht eines Gutes betrug 320 Thaler. Die Ausgaben des Pächters für seine Haushaltung und für die Steuern waren der Art, daß derselbe im ersten Jahre nur 280 Thaler bezahlen konnte. Das nächste Jahr wurde das Pachtgeld um 5 pCt. erniedrigt, die Ausgaben für den Haushalt wurden um $\frac{1}{8}$ vermindert, auch die Steuern um $\frac{1}{4}$ verringert. Da nun noch außerdem der Ertrag des Pachtgutes sich um $\frac{1}{10}$ vermehrt hatte, so war der Pächter nicht allein im Stande, die vorigjährige Schuld zu tilgen, sondern er behielt noch 42 Thaler übrig. Im dritten Jahre, wo das Pachtgut sich noch um $\frac{1}{8}$ des Ertrages des zweiten Jahres vermehrt hatte, behielt er sogar, obgleich er seine Ausgaben für den Haushalt um $\frac{1}{10}$ der Ausgaben des vorhergehenden Jahres vermehrt hatte, noch 139 Thaler übrig. Wie viel betrugen im ersten Jahre die Ausgaben für die Haushaltung und für die Steuern, wie groß war der Ertrag des Gutes?

47) Zwei Körper haben die Entfernung d Fuß. Bewegen sie sich mit gleichförmigen Geschwindigkeiten gegen einander, so treffen sie nach m Secunden zusammen; bewegen sie sich aber mit denselben Geschwindigkeiten hinter einander, so treffen sie nach n Secunden zusammen. Wie viel Fuß legt jeder der Körper in einer Secunde zurück?

48) Ein Körper geht mit gleichförmiger Geschwindigkeit von einem Puncte A nach einem 301 Fuß entfernt gelegenen Puncte B und geht, ohne zu ruhen, mit derselben Geschwindigkeit, in entgegengesetzter Richtung von B nach der Richtung von A hin zurück. 11 Secunden später geht ein zweiter Körper von B nach A mit ebenfalls gleichförmiger, aber geringerer Geschwindigkeit, und trifft in 10 Secunden nach seinem Abgange zum ersten Male und in 45 Secunden nach seinem Abgange zum zweiten Male mit dem ersten Körper zusammen. Wie viel Fuß legt jeder der Körper in einer Secunde zurück?

49) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 301, 11, 10 und 45 die allgemeinen Zeichen d, t, m und n gesetzt werden?

50) Wenn aber der zweite Körper den Ort B t Secunden früher verläßt, als der andere, wie heißt alsdann das Resultat der vorhergehenden Aufgabe?

51) Zwei Boten, A und B, gehen von zwei Städten, deren Entfernung $11\frac{1}{2}$ Meile beträgt, einander entgegen. Geht A $5\frac{3}{4}$ Stunden früher ab, als B, so treffen sie in $6\frac{1}{8}$ Stunde nach Abgang des B zusammen; geht aber B $5\frac{3}{4}$ Stunden früher ab, als A, so treffen sie in $5\frac{5}{8}$ Stunden nach Abgang des A zusammen. Wie viel Meilen legt A, wie viel B in jeder Stunde zurück?

52) Zwei Körper B und C, gehen von zwei Puncten, deren wechselseitige Entfernung d Fuß beträgt, einander entgegen. Geht B t Secunden früher ab, als C, so treffen sie sich in m Secunden nach Abgang des C; geht aber C u Secunden früher ab, als B, so treffen sie sich in n Secunden nach Abgang des B. Wie viel Fuß legt jeder der Körper in einer Secunde zurück?

53) Ein Teich von 99000 Kubikfuß Raum-Inhalt kann durch 2 Schleusen angefüllt werden. Oeffnet man die erste Schleuse 10, die zweite 14 Stunden, so wird der Teich angefüllt; eben so wird derselbe voll, wenn man die erste Schleuse 18 und die zweite 12 Stunden laufen läßt. Wie viel Kubikfuß Wasser schickt jede Schleuse in einer Stunde dem Teiche zu, und in wie viel Stunden wird der Teich voll werden, wenn man beide Schleusen gleich lange öffnet?

54) A und B machen einen Wettlauf nach einem Pfahle hin und wieder zurück. Bei der Rückkehr trifft A den B 270 Fuß vor dem Pfahle und erreicht den Ausgangspunct 3 Minuten eher als dieser. Wenn er nun wieder zurückgekehrt wäre, so würde er den B in einer Entfernung vom Ausgangspuncte getroffen haben, die gleich $\frac{1}{8}$ der ganzen Entfernung war. Es soll die Länge der Bahn und die Dauer des Wettlaufs berechnet werden.

55) Jemand hat zwei Sorten Silber: vermischt er 10 Mark des einen mit 5 Mark des anderen, so erhält er Silber von dem Gehalte $687\frac{1}{2}$, vermischt er aber $7\frac{1}{2}$ Mark des einen mit $1\frac{1}{2}$ Mark des anderen, so erhält er Silber von dem Gehalte 625. Von welchem Gehalte sind die Silbersorten?

56) Wenn 21 Zweithalerstücke ($3\frac{1}{2}$-Guldenstücke) und 49 Thalerstücke [preuß. alte] zusammen 4 Pfund wiegen und zusammengeschmolzen 13löthiges Silber geben, und wenn in den Zweithalerstücken Silber und Kupfer in dem Verhältnisse 9 : 1, in den Thalerstücken in dem Verhältnisse 3 : 1 legirt sind, wie viel Zweithalerstücke und wie viel Thalerstücke gehen auf 5 Pfund?

57) Ein Kaufmann kauft 120 Ellen Tuch für 54 französische Kronenthaler und 316 Thlr., und verkauft hiervon zuerst 84 Ellen mit einem Gewinne von 18 Procent, und hierauf den Rest mit einem Gewinne von $12\frac{1}{2}$ Procent. Der Erlös beträgt im Ganzen 153 französische Kronenthaler und 227 Thlr. 12 Sgr. Wie viel bezahlte der Kaufmann für jede Elle Tuch, und zu wie viel wurde der französische Kronenthaler in preußischem Gelde gerechnet?

58) Ein Kaufmann hat zweierlei Waare: die eine verkauft er mit einem Nutzen von 8 Procent, die andere dagegen mit einem Schaden von 12 Procent. Von beiden Waaren setzt er eine bestimmte Menge an einen Kaufmann B ab und erhält 20 Thaler mehr, als ihm dieselben zusammen gekostet haben. Einem anderen Kaufmanne, C, verkauft er von der ersten Waare drei mal so viel, und von der zweiten Waare sieben mal so viel, als er an den Kaufmann B abgesetzt hat, und erhält im Ganzen 84 Thaler weniger, als der Einkaufspreis beider Waaren zusammen betrug. Wie viel mußte ihm der Kaufmann B für jede der Waaren bezahlen?

59) Zwei Kaufleute, A und B, haben zu drei verschiedenen Zeiten mit einander gemeinschaftlichen Handel getrieben. Bei dem ersten Handel gab A sein Capital 4, B das seinige 5 Monate lang her; der Gewinn war 3458 Gulden. Zum zweiten Male gab A sein Capital auf 7 Monate, B das seinige auf 4 Monate ins Geschäft; der Gewinn war 3591 Gulden. Zum dritten Male gab A sein Capital und außerdem noch 500 Gulden auf $7\frac{3}{4}$ Monate, B das seinige auf 11 Monate her. Der gemeinschaftliche Gewinn war 7651 Gulden. Wenn nun bei allen drei Geschäften der Gewinn verhältnißmäßig gleich groß war, wie lassen sich hieraus die Capitalien der beiden Kaufleute A und B berechnen?

60) Mit einem Metallgemische von 300 Pfund, welches aus 2 Theilen Zink, 3 Theilen Kupfer und 4 Theilen Zinn besteht,

werden 200 Pfund eines anderen, aus denselben Stoffen bestehenden Metallgemisches zusammengeschmolzen. In der hiedurch erhaltenen Legirung finden sich 3 Theile Zink, 4 Theile Kupfer und 5 Theile Zinn. In welchem Verhältnisse befinden sich Zink, Kupfer und Zinn in dem hinzugesetzten Metallgemische?

61) Ein volles Weinfaß enthält 465 preußische Quart und $532\frac{1}{2}$ Litre (französisches Flüssigkeitsmaß). Wenn nun 31 preuß. Quart und 142 Litres ein Sechstel des Fasses anfüllen, wie viel preußische Quart enthält das Faß, und in welchem Verhältnisse stehen Quart und Litre?

62) Ein Dampfschiff legt a Meilen stromaufwärts und b Meilen abwärts, zusammen in der Zeit t zurück; ein ander Mal legt dasselbe a' Meilen aufwärts und b' Meilen abwärts in der Zeit t' zurück. Wie viel Meilen legt das Schiff 1) in einem ruhigen Wasser, bloß durch die Kraft seiner Maschine, 2) ohne Maschine, bloß durch den Strom getrieben, in der Zeiteinheit im Mittel zurück?

63) Ein viereckiger rechtwinkeliger Garten wird in 6 gleiche Theile getheilt. Gibt man jedem Theile zur Länge $\frac{1}{3}$ der Länge, und zur Breite die Hälfte der Breite des ganzen Gartens, so beträgt der Umfang eines jeden Theiles 54 Ruthen. Nimmt man aber zur Länge die Hälfte der Länge und zur Breite $\frac{1}{3}$ der Breite des Gartens, so beträgt der Umfang eines jeden Theiles 56 Ruthen. Wie lang und wie breit ist der zu theilende Garten?

64) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 6, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 54 und 56 bezüglich die allgemeinen Zeichen ab, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, m und n gesetzt werden?

65) Ein Landwirth hat eine gewisse Anzahl Ochsen und für eine bestimmte Anzahl Tage Futter. Verkauft er 75 Ochsen, so wird er 20 Tage länger mit dem Futter-Vorrathe auskommen. Kauft er dagegen 100 Ochsen hinzu, so wird sein Vorrath 15 Tage kürzer reichen. Wie viel Ochsen besitzt der Landwirth, und auf wie viele Tage reicht das Futter hin?

66) Eine Anzahl Arbeiter verdient bei einem gewissen, für Alle gleichen, Lohn eine bestimmte Summe. Wären 7 Arbeiter mehr, und erhielte jeder $2\frac{1}{2}$ Sgr. mehr, so würden sie im Ganzen 6 Thlr. $6\frac{1}{2}$ Sgr. mehr erhalten. Wären aber 4 Arbeiter weniger, und erhielte jeder $1\frac{1}{2}$ Sgr. weniger, so würde ihnen im Ganzen 3 Thlr. 2 Sgr. weniger zu Theil. Wie viel Arbeiter sind vorhanden, und wie viel erhält jeder zum Lohne?

67) Ein Wasserbehälter, der eine bestimmte Menge Wasser enthält, kann durch eine Röhre angefüllt und durch eine andere aus-

geleert werden. Die erste Röhre gibt in jeder Minute 4 Quart mehr als die zweite. Oeffnet man beide Röhren, die erste aber eine Stunde früher als die zweite, so erhält der Wasserbehälter in einer bestimmten Zeit 1760 Quart. Oeffnet man aber die zweite Röhre eine Stunde früher als die erste, so verliert der Behälter in derselben Zeit halb so viel, als er im ersten Falle erhält. Wie viel Wasser liefert jede der beiden Röhren in einer Minute, und wie lange Zeit war jede Röhre geöffnet?

68) Jemand läßt sich drei Kleider von derselben Größe anfertigen. Zu dem zweiten gebraucht er 3 Ellen mehr, als zu dem ersten, indem das Tuch 2 Viertel-Ellen schmäler ist, als das des ersten Kleides. Das dritte Kleid dagegen erfordert 4 Ellen weniger, als das zweite Kleid, indem das Tuch zu jenem 3 Viertel-Ellen breiter ist, als das zu diesem. Wie viel Tuch und von welcher Breite ist zu dem ersten Kleide erforderlich?

69) Eine gewisse Anzahl Arbeiter schafft einen Haufen Steine in 6 Stunden von einem Orte zum andern. Wären der Arbeiter 2 mehr gewesen, und hätte jeder bei dem Gange 4 Pfund mehr getragen, so wäre der Haufen in 5 Stunden fortgeschafft worden. Wären der Arbeiter 3 weniger gewesen, und hätte jeder bei jedem Gange 5 Pfund Steine weniger getragen, so würde der Haufen in 8 Stunden fortgeschafft worden sein. Wie viel Arbeiter waren beschäftigt und wie viel trug jeder bei einem Gange?

70) Ein Wagen gebraucht eine gewisse Zeit, um von einem Orte A nach einem Orte B zu gelangen. Ein zweiter Wagen, der alle 4 Stunden eine Meile weniger zurücklegt, als ersterer, gebraucht zu demselben Wege 4 Stunden mehr, als ersterer. Ein dritter Wagen, der alle 3 Stunden $1\frac{3}{4}$ Meile mehr, als der zweite, zurücklegt, gebraucht zu dem Wege 7 Stunden weniger, als der zweite. Wie weit ist A von B entfernt, und wie viel Zeit gebraucht jeder Wagen zur Zurücklegung des Weges?

71) Zwei Zahlen zu suchen, deren Differenz a mal und deren Product b mal so groß ist, als ihre Summe.

72) Ein Quadrat liegt mit der einen Ecke in der Ecke eines größeren Quadrats. Der Ueberschuß der Seite des größeren Quadrats über der des kleineren ist 118 Fuß, der Ueberschuß der Quadrate selbst 26432 Quadratfuß. Wie viel Inhalt hat jedes der beiden Quadrate*)?

73) Zwei Zahlen anzugeben, deren Summe, Differenz und Product im Verhältnisse 5 : 1 : 18 stehen.

*) Diese Gleichung kann auch als Gleichung des ersten Grades mit einer unbekannten Größe betrachtet werden.

74) Zwei Zahlen stehen im Verhältnisse 7 : 3, und ihre Differenz verhält sich zu ihrem Producte, wie 1 : 21. Wie heißen die beiden Zahlen?

75) α) Die reciproke Differenz zweier Zahlen nebst der reciproken Summe der Zahlen ist 3; die reciproke Differenz der Zahlen, vermindert um die reciproke Summe der Zahlen, ist 1. Wie heißen die beiden Zahlen? β) Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für 3 und 1 die allgemeinen Zeichen a und b gesetzt werden?

76) Eine zweizifferige Zahl gibt durch die Quersumme der Ziffern dividirt 7 zum Quotienten. Subtrahire ich 27 von der Zahl, so erhalte ich eine Zahl, deren Ziffern in umgekehrter Ordnung geschrieben sind. Wie heißt die Zahl?

77) Drei Städte, A, B und C, liegen in einem Dreiecke. Von A über B nach C sind 82, von B über C nach A 97 und von C über A nach B 89 Meilen. Wie weit sind A, B, C von einander entfernt?

78) Die Zahl 96 in drei Theile zu zerlegen, so daß, wenn man den ersten Theil durch den zweiten dividirt, 2 zum Quotienten und 3 zum Reste herauskommt, wenn man aber den zweiten Theil durch den dritten Theil dividirt, 4 zum Quotienten und 5 zum Reste herauskommt. Wie heißen die drei Theile?

79) Ein Vater sagte zu seinen beiden Söhnen, von denen der eine 4 Jahr älter war, als der andere: Nach 2 Jahren werde ich doppelt so alt sein, als ihr beide zusammen; und vor 6 Jahren war ich 6 mal so alt, als ihr beide zusammen. Wie alt war der Vater, wie alt jeder der Söhne?

80) α) Drei Zahlen von folgender Beschaffenheit zu finden: Dividirt man die erste in 6, die zweite in 9, die dritte in 12, so erhält man zur Summe der Quotienten 9; dividirt man die erste in 9, die zweite in 12, die dritte in 6, so erhält man zur Summe der Quotienten 10; dividirt man endlich die erste in 12, die zweite in 6, die dritte in 9, so erhält man zur Summe der Quotienten $10\frac{1}{4}$; β) Drei Zahlen stehen in dem Verhältnisse 3 : 4 : 5. Das 5fache der ersten Zahl nebst dem 4fachen der zweiten Zahl nebst dem 3fachen der dritten Zahl ist 345. Wie heißen die 3 Zahlen?

81) Auf dem Personenzuge einer Eisenbahn haben für die Strecke von dem Orte A nach dem Orte B in der zweiten und dritten Wagenclasse zusammen 359 Personen mehr als in der ersten Wagenclasse Billette genommen. Der Ertrag für die gelös'ten Billette belief sich im Ganzen auf 299 Thlr. 13 Sgr., und zwar für die zweite Classe 45 Thlr. 15 Sgr. mehr, als für die erste, und 40 Thlr. 22 Sgr. weniger, als für die dritte Classe. Jedes Billet auf der ersten Classe kostet doppelt so viel, als ein

Billet auf der zweiten und dreimal so viel, als eines auf der dritten Wagenclasse. Wie viel betrug hiernach die Personenzahl auf jeder der drei Wagenclassen*)?

82) Drei Knaben spielen mit Nüssen. A sagte zu B: Gib mir 5 Nüsse, so habe ich doppelt so viel, als dir bleibt. B sagte zu C: Gib mir 13 Nüsse, so habe ich drei mal so viel, als dir bleibt. C sagte zu A: Gib mir drei Nüsse, so habe ich sechs mal so viel, als du behältst. Wie viel Nüsse hatte jeder Knabe?

83) Die Entfernungen der drei Planeten Mars, Ceres und Jupiter von der Sonne lassen sich annäherungsweise durch folgende Angabe berechnen: Man denke sich der Reihe nach zuerst Mars und Ceres, hierauf Mars und Jupiter und zuletzt Jupiter und Ceres noch ein mal so weit von der Sonne sich entfernen, als sie von derselben abstehen; zu gleicher Zeit aber lasse man jedes Mal den dritten Planeten der Sonne um so viel in Meilen sich nähern, als die beiden anderen in Meilen zusammen sich entfernen. Durch diese Veränderungen kommen alle drei Planeten in die gleiche Entfernung von 64 Millionen Meilen von der Sonne.

84) Man soll 232 in drei Zahlen zerlegen, so daß, wenn die erste von der Summe der beiden anderen die Hälfte, die zweite von der Summe der beiden anderen den dritten Theil, die dritte von der Summe der beiden übrigen den vierten Theil erhält, die 3 Zahlen unter einander gleich werden.

85) Ein Dampfwagen und ein Eilwagen gehen beide von zwei entgegengesetzten Städten, A und B, ab, letzterer 2 Stunden früher, als ersterer, und treffen nach 6 Stunden nach Abgang des ersteren zusammen. Legt jeder derselben jede Stunde $\frac{1}{4}$ Meile mehr zurück, so treffen sie nach $5\frac{1}{2}$ Stunde zusammen; legt aber jeder derselben jede Stunde $\frac{1}{4}$ Meile weniger zurück, und geht der Eilwagen 2 Stunden später ab, so treffen sie nach 7 Stunden 5 Minuten nach Abgang des Dampfwagens zusammen. Wie viel Meilen legt jeder der Wagen in einer Stunde zurück, und wie viel Meilen ist A von B entfernt?

86) 4 Metalle sind in dem Verhältnisse 1 : 3 : 5 : 7 mit einander verbunden. Setzt man zu dem Gewichte der Quantität noch das $2\frac{3}{8}$fache einer anderen, aus denselben Metallen bestehenden Legirung hinzu, so ändert sich das genannte Verhältniß der Metalle in das 3 : 4 : 5 : 6 um. In welchem Verhältnisse stehen die Metalle der hinzugesetzten Legirung?

*) Ein ähnliches Beispiel findet sich unter den Gleichungen des 2. Grades mit mehreren Unbekannten §. 75, Nr. 37.

87) Ein Behälter faßt an Wasser zusammen 62 preuß. Pfund (Altgewicht), 174 Kilogramm und 622 engl. Pfd. Troy-Gewicht. 93 preuß. Pfd., 145 Kilogramm und 311 engl. Pfd. füllen nur $\frac{7}{10}$ desselben an, und 155 preuß. Pfd., 87 Kilogramm und $155\frac{1}{2}$ engl. Pfd. nur die Hälfte. Wie viel preuß. Pfd. faßt der Behälter, und in welchem Verhältnisse stehen die genannten Gewichte?

88) Zwei Körper bewegen sich gleichmäßig von zwei Puncten, A und B, einander entgegen. 15 Secunden nach ihrem Abgange haben sie die Entfernung 35 Fuß, und 17 Secunden nach ihrem Abgange, also 2 Secunden später, wieder dieselbe Entfernung 35 Fuß. Hätten beide Körper sich hinter einander, statt gegen einander, bewegt, so würde 21 Secunden nach ihrem Abgange der vorangehende, mit kleinerer Geschwindigkeit sich bewegende, Körper um 35 Fuß von dem nachfolgenden entfernt sein. Wie groß ist die Entfernung der Puncte A und B, und wie viel Fuß legt jeder der Körper in einer Secunde zurück?

89)* Ein Wasserbehälter kann durch die Röhren a und b in 35 Minuten, durch a und c in 42 Minuten und durch b und c in 70 Minuten gefüllt werden. In wie viel Zeit kann er durch jede Röhre einzeln, in wie viel Zeit durch alle drei Röhren gefüllt werden?

90) Drei Röhren führen in einen Behälter, der bis auf eine gewisse Höhe gefüllt ist; die erste Röhre würde ihn in 7, die zweite in 5, die dritte in $8\frac{3}{4}$ Stunden füllen. Wenn man die erste fließen läßt und stündlich 28 Ohm herausnimmt, so wird der Behälter in 40 Stunden leer; wenn man aber die zweite öffnet und stündlich 39 Ohm herausnimmt, so wird er in 120 Stunden leer. Wann wird er leer, wenn die dritte Röhre fließt und stündlich 23 Ohm herausgenommen werden? Wie viel Ohm sind in dem Behälter enthalten, und wie viel Ohm liefert die erste Röhre stündlich?

91) Eine dreizifferige Zahl, deren Quersumme 6 [3] ist, zu finden, so daß die Ziffer auf der ersten Stelle links $\frac{1}{5}$ [$\frac{1}{2}$] der Zahl ist, welche aus den beiden übrigen Ziffern gebildet wird, und die Ziffer auf der ersten Stelle rechts $\frac{1}{2}$ [$\frac{1}{5}$] der aus den beiden übrigen gebildeten Zahl ist. Wie heißt die Zahl?

92) Ein Rechenmeister gab seinen drei Schülern zwei Zahlen zum Multipliciren auf. Nach verrichteter Multiplication mit den einzelnen Ziffern des Multiplicators vergaß der Eine bei der Summation, auf irgend einer Stelle eine Eins im Sinne zu behalten; er machte die Probe auf die Rechnung, indem er das Resultat durch die kleinere Zahl dividirte, und erhielt zum Quotienten 971, zum Reste 214; der Zweite beging zwar an derselben Stelle keinen Fehler, an der nächstfolgenden aber vergaß er bei der Addition eine Zwei herüberzuziehen; er machte ebenfalls die Probe durch

die Division und erhielt zum Quotienten 965, zum Reste 198; der Dritte endlich fehlte um eine Eins auf der nächstfolgenden Stelle (ebenfalls von der Rechten zur Linken gerechnet) und erhielt, indem er auch die Probe machte, zum Quotienten 940, zum Reste 48. Welches waren die beiden Zahlen, die mit einander multiplicirt wurden, und bei welchen Stellen wurde von den drei Rechnern gefehlt?

93) Durch die vier in einem Vierecke liegende Städte A, B, C, D geht eine je zwei derselben mit einander verbindende gerade Straße. Fahre ich von A über B und C nach D, so bezahle ich 20 Thlr. 10 Sgr. Postgeld; fahre ich von A über D und C nach B, so bezahle ich 18 Thlr. 10 Sgr. Postgeld. Von A über B nach C zahle ich eben so viel, als von A über D nach C; dagegen von B über A nach D 1 Thlr. 10 Sgr. weniger, als von B über C nach D. Wie lassen sich aus diesen Angaben die Entfernungen AB, BC, CD, DA berechnen, wenn man außerdem weiß, daß für die Meile 10 Sgr. Postgeld bezahlt wird?

94) Drei Bauern, A, B, C, haben ihr Vieh abwechselnd auf 4 Weiden geschickt, und auf jeder derselben gleich viel für die Woche und für jedes Stück bezahlt. A schickte seine Herde 5 Wochen auf die erste, 6 Wochen auf die zweite, 8 Wochen auf die dritte und 9 Wochen auf die vierte; B schickte seine Herde 8 Wochen auf die erste, 12 auf die zweite, 3 auf die dritte und 5 Wochen auf die vierte Weide; C endlich schickte seine Herde 8 Wochen auf die erste, 3 auf die zweite, 10 auf die dritte und 7 Wochen auf die vierte Weide. Auf der ersten Weide zahlen sie gemeinschaftlich 130 Thlr. 12 Sgr., auf der zweiten 116 Thlr. 12 Sgr., auf der dritten 138 Thlr. 8 Sgr. Wie viel Stück Vieh hat jeder der drei Bauern, wenn sie zusammen 138 Stück besitzen? wie viel mußten sie zusammen für die vierte Weide zahlen?

95) Vier Spieler, A, B, C und D, machen 4 Kartenspiele mit einander. Bei dem ersten Spiele gewinnen A, B, C, und zwar jeder so viel, als er besitzt; bei dem zweiten Spiele gewinnen A, B, D, und zwar wiederum jeder so viel, als er besitzt; eben so gewinnen beim dritten Spiele A, C, D, und endlich bei dem vierten Spiele B, C, D. Hierauf zählen sie ihr Geld und finden, daß Jeder 2 Thlr. 4 Sgr. hat. Wie viel hatte Jeder vor dem Spiele?

96) In jedem von sieben Körben befindet sich eine gewisse Anzahl Aepfel. Lege ich aus dem ersten Korbe in jeden der übrigen so viel, als sie enthalten, hierauf aus dem zweiten in jeden der übrigen so viel, als sie enthalten, u. s. w. bis zum letzten hin

so enthält jeder gleich viel, nämlich 128 Aepfel. Wie viel Aepfel enthielt jeder Korb vor der Vertheilung?

97) n Zahlen von der Eigenschaft zu bestimmen, daß, wenn die erste an alle übrigen so viel abgibt, als jede groß ist, und eben so hierauf die zweite an alle übrigen so viel abgibt, als jede nun groß geworden, u. s. w. bis zur n-ten, zuletzt n Zahlen entstehen, die alle a gleich sind.

98) Den Quotienten $\frac{27+34z}{(3+4z)(6+7z)}$ in die Summe zweier Quotienten zu zerlegen, deren Divisoren $3+4z$ und $6+7z$ sind.

99) Eben so den Quotienten $\frac{a-bz}{(c-dz)(e-fz)}$ in die Summe zweier Quotienten zu zerlegen, deren Divisoren $c-dz$ und $e-fz$ sind.

100) Den Quotienten $\frac{306x^2-450x+162}{(8x-7)(5x-4)(2x-1)}$ in die Summe dreier Quotienten zu zerlegen, deren Divisoren $8x-7$, $5x-4$ und $2x-1$ sind.

§. 68.

Auflösungen der Aufgaben in §. 67.

1) Die eine Zahl ist 714285 [$46\frac{19}{24}$], die andere 142857 [$20\frac{23}{24}$].

2) 33 Personen stimmten dafür und 15 dagegen.

3) Der Schall 1048,7, der Wind 13,5 Fuß.

4) Die Nachricht wurde in 35 [7] Minuten mitgetheilt, und die berliner Uhr ging 26 Minuten vor der kölner Uhr.

5) Die Entfernung der Erde von der Sonne beträgt 19829000, und die der Venus von der Sonne 14343000 Meilen.

6) Der Friedrichsd'or zu 5 Thlr. 19 Sgr. 7 Pfg., das Fünffrankenstück zu 1 Thlr. 9 Sgr. 5 Pfg.

7) Die Mutter 5, das Söhnchen 7 Pfund*).

*) Das griechische Original dieser Aufgabe heißt:

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορέουσαι σῖτον ἔβαινον·
αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ' ἄχθεϊ φόρτου ἑοῖο·
τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ἐκείνη·
μῆτερ, τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι, ἠΰτε κούρη;
εἰ μέτρον ἓν μοι δοίης, διπλάσιον σέθεν ἦρα.
εἰ δὲ ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις.
εἰπὲ τὸ μέτρον, ἄριστε γεωμετρίης ἐπιΐστορ.

8) Der eine 4, der andere 8 Nüsse. Allgemein der eine $\frac{bn(p+1) + a(n+1)}{pn-1}$, der andere $\frac{ap(n+1) + b(p+1)}{pn-1}$.

9) Der erste 18, der zweite 14 Thlr.

10) 3 Knaben und 4 Mädchen.

11) α) $\frac{5}{24}$. Allgemein der Zähler $\frac{n(mb+a)}{m-n}$ und der Nenner $\frac{nb+a}{m-n}$; β) $\frac{3}{7}$. 12) Die des A 7000, die des B 3000 Gulden.

13) 40 u. 7 ($[sq+r] : [q+1]$ u. $[s-r] : [q+1]$).

14) $6\frac{1}{4}$ u. $1\frac{1}{4}$ ($a^2 : [a-1]$ u. $a : [a-1]$).

15) $\frac{a^2}{a+1}$ u. $\frac{a}{a+1}$. 16) 1,234 u. 5,678. 17) a^2+b u. $a+b^2$.

18) 857 u. 142. 19) Der Vater 42, der Sohn 12 Jahre.

20) Das Capital 4700 Thaler, die Zinsen $4\frac{3}{4}$ Procent.

21) Jeder hatte 3600 Thaler zu bezahlen, und der Disconto betrug $8\frac{1}{2}$ Procent jährlich. 22) A hatte 40, B 80 Thlr.

23) A besaß 72, B 96 Thlr. Der Preis des ersten Pferdes war 120 Thaler.

24) In dem einen 110, in dem anderen 50 Quart.

25) In dem einen $\frac{21}{16}n$, in dem anderen $\frac{11}{16}n$ Quart.

26) Die eine 3, die andere 7.

27) 16 und 4. Allgemein: $(a+b)^2 : [2(a-b)]$ und $\frac{1}{2}(a+b)$.

28) 324. 29) 13 : 17.

30) $\frac{d(2mp-np-mq)}{np-mq} : \frac{d(np+mq-2nq)}{np-mq}$.

31) 15 und 25. 32) 168 und 120. 33) $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$.

34) Das erste 480, das zweite 400, das dritte 560 Quart.

35) 73. 36) Der Friedrichsd'or zu 5 Thlr. 19 Sgr. 8 Pfg., der Ducaten zu 3 Thlr. 4 Sgr. 9 Pfg.

37) Ein Pfund Kaffee $12\frac{1}{4}$, ein Pfund Zucker $9\frac{1}{2}$ Sgr.

38) Der des Meisters 23 Sgr., der des Gesellen 15 Sgr.

39) Das eine Capital ist 1620, das andere 4860 Francs. Beide stehen zu $4\frac{1}{4}$ Procent aus.

40) Der eine $3\frac{1}{2}$, der andere $4\frac{3}{4}$ Quart.

41) Das eine 3420, das andere 2520 Thaler.

42) Das eine 1840, das andere 2200 Gulden.

43) α) Das Quart der schlechteren Sorte 12, der besseren 16 Sgr.; β) $\frac{(d+c)bq-(a+b)pd}{bc-ad}$ und $\frac{(a+b)cp-(d+c)aq}{bc-ad}$.

44) Das Kleid $5\frac{1}{2}$ Gulden, das Paar Schuhe $2\frac{1}{2}$ Gulden.

45) Ein Kubikz. Zinn wiegt 8,83, ein Kubikz. Blei 13,88 Loth.

46) Im ersten Jahre betrugen die Ausgaben 240 Thlr., die Steuern 40 Thlr. und der Ertrag des Gutes 560 Thlr.

47) Der eine $\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$, der andere $\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)$.

48) Der eine 11, der zweite 7 Fuß.

49) Der erste $\frac{d(n+m)}{2mn+t(n+m)}$, der zweite $\frac{d(n-m)}{2mn+t(n+m)}$ Fuß.

50) Der erste $\frac{d(n+m)}{2mn-t(n+m)}$, der zweite $\frac{d(n-m)}{2mn-t(n+m)}$ Fuß.

51) A legt jede Stunde $\frac{3}{5}$, B jede Stunde $\frac{5}{7}$ Meile zurück.

52) Der erste $\frac{d(u+n-m)}{t(u+n)+mu}$, der zweite $\frac{d(t+m-n)}{t(u+n)+mu}$ Fuß.

53) Die erste Schleuse schickt stündlich 1500, die zweite 6000 Kubikfuß Wasser. Werden beide Schleusen zugleich geöffnet, so wird der Teich in $13\frac{1}{5}$ Stunden voll.

54) Die Länge 3240 Fuß, die Dauer im Ganzen $19\frac{1}{2}$ Minute.

55) Die eine von dem Gehalte $562\frac{1}{2}$, die andere v. d. Geh. $937\frac{1}{2}$.

56) 63 Zweithalerstücke und 105 Thalerstücke.

57) Jede Elle Tuch kostete 3 Thlr. 10 Sgr., und der französische Kronenthaler wurde zu 1 Thlr. 16 Sgr. 8 Pfg. gerechnet.

58) Für die erste Waare 756, für die zweite 264 Thaler.

59) Das des A 3100, das des B 7400 Gulden.

60) In dem Verhältnisse 7 : 8 : 9.

61) 930 Quart. 1 Quart : 1 Litre = 71 : 62.

62) 1) $\frac{1}{2}(a'b-ab')\frac{(b-a)t'-(b'-a')t}{(a't-at')(bt'-b't)}$;

2) $\frac{1}{2}(a'b-ab')\frac{(b+a)t'-(b'+a')t}{(a't-at')(bt'-b't)}$.

63) 36 Ruthen lang und 30 Ruthen breit.

64) Die Länge beträgt $\frac{ab(an-bm)}{2(a^2-b^2)}$, die Breite $\frac{ab(am-bn)}{2(a^2-b^2)}$.

65) Er besitzt 300 Ochsen und der Vorrath reicht auf 60 Tage hin.

66) Der Arbeiter sind 20, und der Lohn eines jeden beträgt 17 Silbergroschen.

67) Die eine Röhre liefert jede Minute 24, die andere jede Minute 20 Quart. Im ersten Falle war die eine 2 St. 20 Min., die andere 1 St. 20 Min. lang geöffnet; umgekehrt im zweiten Falle.

68) 9 Ellen von 8 Vierteln Breite.

69) Der Arbeiter waren 18, und jeder trug 50 Pfund.

70) Die Entfernung AB beträgt 12 Meilen. Der erste Wagen gebraucht 12, der zweite 16, der dritte 9 Stunden.

71) $2b : [1-a]$ und $2b : [1+a]$.

72) Das eine 29241, das andere 2809 Quadratfuß.

73) 9 und 6. 74) 28 und 12.

75) α) $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{4}$; β) $2a : [a^2-b^2]$ und $2b : [a^2-b^2]$.

76) 63. 77) A von B 37, B von C 45 und C von A 52 M.

78) 61, 29, 6. 79) Der Vater war 42, der eine Sohn 11, der andere 7 Jahre alt. 80) α) 2, 3 und 4; β) $22\frac{1}{2}$, 30 und $37\frac{1}{2}$.

81) Auf der ersten 43, auf der zweiten 117, auf der dritten 328.

82) A hatte 7, B 11, C 21 Nüsse.

83) Mars 32, Ceres 56, Jupiter 104 Millionen Meilen. Die drei Zahlen 32, 56, 104 ändern sich zuerst in die Zahlen 64, 112, 16, hierauf in die Zahlen 128, 32, 32, und zuletzt in die Zahlen 64, 64, 64 um.

84) Der erste Theil ist 40, der zweite 88, der dritte 104.

85) Der Dampfwagen legte jede Stunde $5\frac{1}{2}$, der Eilwagen jede Stunde 1 Meile zurück; die Entfernung beträgt 41 Meilen.

86) In dem Verhältnisse 8 : 9 : 10 : 11.

87) Der Behälter faßt 930 preußische Pfund (Altgewicht). Das preußische Pfund verhält sich zum Kilogramm, wie 29 : 62, das preußische Pfund zum englischen Troy-Pfund, wie 311 : 248.

88) α) 560 Fuß; β) der eine Körper legt in jeder Secunde 5, der andere in jeder Secunde 30 Fuß zurück.

89) Durch a in $52\frac{1}{2}$, durch b in 105, durch c in 210 Minuten, durch sämmtliche Röhren in 30 Minuten.

90) In 10 Stunden; $7\frac{1}{2}$ Ohm; $27\frac{13}{16}$ Ohm. 91) 105 [102].

92) Die beiden mit einander zu multiplicirenden Zahlen waren 314 und 972. Der erste Schüler hatte auf der dritten, der zweite auf der vierten und der dritte auf der fünften Stelle von der Rechten zur Linken gefehlt.

93) A ist von B 21, B von C 17, C von D 23, D von A 15 Meilen entfernt.

94) A hatte 42, B 37, C 59 Stück Vieh; für die vierte Weide mußten sie zusammen 130 Thlr. 4 Sgr. bezahlen.

95) A hatte 20 Sgr., B 1 Thlr. 6 Sgr., C 2 Thlr. 8 Sgr. D 4 Thlr. 12 Sgr.

96) Der erste 449, der zweite 225, der dritte 113, der vierte 57, der fünfte 29, der sechste 15, der siebente 8 Aepfel.

97) Die erste ist $\frac{2^{n-1} \cdot n+1}{2^n} \cdot a$, die zweite $\frac{2^{n-2} \cdot n+1}{2^n} \cdot a$,

die dritte $\frac{2^{n-3} \cdot n+1}{2^n} \cdot a$, u. s. w., die p=te $\frac{2^{n-p} \cdot n+1}{2^n} \cdot a$, die $(n-2)$=te $\frac{4n+1}{2^n} \cdot a$, die $(n-1)$=te $\frac{2n+1}{2^n} \cdot a$, und die n=te $\frac{n+1}{2^n} \cdot a$. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht ohne Ansatz am einfachsten, wenn man rückwärts verfährt. Die letzte Operation gibt die Zahlen $a, a, a, a, a \ldots a$; die vorletzte gibt $\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, \ldots \frac{n+1}{2}a$ u. s. w.

98) $\frac{2}{3+4z} + \frac{5}{6+7z}$. 99) $\frac{bc-ad}{cf-de}$ u. $\frac{af-bc}{cf-de}$ sind die Dividenden.

100) $\frac{9}{8x-7} + \frac{6}{5x-4} + \frac{3}{2x-1}$.

B. Gleichungen vom zweiten Grade.

§. 69.

Gleichungen vom zweiten Grade mit einer unbekannten Größe.

1) Was versteht man unter einer reinen, was unter einer gemischten quadratischen Gleichung?

A. Reine quadratische Gleichungen.

2) Wie wird eine reine quadratische Gleichung aufgelös't?

3) $7x^2 = 105903$. 4) $16x^2 = 1210000$.

5) $x^2 - m = 0$. Wie läßt sich diese Gleichung als das Product zweier Gleichungen des ersten Grades darstellen?

6) $12ab + x^2 = 4a^2 + 9b^2$. 7) $10000 - \frac{36}{49}x^2 = 199$.

8) $11 - \frac{x+25}{x^2} = 3 - \frac{x-25}{x^2}$.

9) $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} = \frac{2(a^2+1)}{(1+a)(1-a)}$.

10)* $\frac{x-m}{x+m} = \frac{n-x}{n+x}$.

11) $\sqrt{\frac{5}{x^2}+49}-\sqrt{\frac{5}{x^2}-49} = 7.$

12) $x+\sqrt{x^2-17} = 4:\sqrt{x^2-17}.$

13) $x+\sqrt{a+x^2} = (a^2+a):\sqrt{4a+4x^2}.$

14) $\sqrt{\frac{3m^2}{x^2}+m^2-3} = m+1-\sqrt{\frac{3m^2}{x^2}-2}.$

15) $\sqrt{a-\frac{b}{x^2}}+\sqrt{d-\frac{b}{x^2}} = c.$

16) $\sqrt{\frac{560}{x^2}+29}-\sqrt{\frac{560}{x^2}-34} = 7.$

17) $\sqrt[3]{0,125x^3-6x} = \sqrt{0,25x^2-8}.$

18) $(1-\sqrt{1-x^2})^{-1}-(1+\sqrt{1-x^2})^{-1} = x^{-2}\sqrt{3}.$

19) $(x+\sqrt{2-x^2})^{-1}+(x-\sqrt{2-x^2})^{-1} = x.$

20) $\alpha)$ $\frac{\sqrt[n]{m+x^2}}{m}+\frac{\sqrt[n]{m+x^2}}{x^2} = \sqrt[n]{x^2};$

$\beta)^*$ $\sqrt[m-1]{m}\cdot\sqrt[m+1]{x-m} = \sqrt[m+1]{m\sqrt[m-1]{x-m}}.$

21)* $\frac{x+m-2n}{x+m+2n} = \frac{n+2m-2x}{n-2m+2x}.$

22) $\frac{49}{64}\left(x-\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{25}{81}.$ 23) $\frac{2}{x-10}+10-x = \frac{2}{10-x}.$

24) $\frac{a(a-b)}{x-a-b}+a+b-x = \frac{(b-a)b}{a+b-x}.$

25) $\alpha)$ $m^2 = \frac{(x+b-c)(x-b+c)}{(b+c+x)(b+c-x)};$ $\beta)$ $\frac{(a-x)(x-b)}{(a-x)-(x-b)} = x.$

B. Gemischte quadratische Gleichungen.

26) Wie wird eine gemischte quadratische Gleichung aufgelös't? $x^2+px = q$ aufzulösen.

27) $x^2+6x = 7.$

28) $x^2-8x = -12.$

29) $x^2+10x = -21.$

30) $x^2-mx+n = 0.$

31) $x^2+mx+n = 0.$

32) $x^2-mx-n = 0.$

33) $x^2+mx-n = 0.$ 34) $x^2+10x-24 = 0$ **).
35) $x^2-10x-24 = 0.$ 36) $x^2+10x+24 = 0.$
37) $x^2-10x+24 = 0.$ 38) $986x = 145080-x^2.$
39) $x^2-986x = -145080.$ 40) $26x-x^2+120 = 0.$
41) $x^2+26x+120 = 0.$ 42) $x(9999-x) = 10816010.$
43) $557x = 5801\frac{1}{4} + 8x^2.$
44) $840478{,}2+(4x)^2 = (8027+6x)x.$
45) $699230{,}07-3(100x-31x^2) = 100x(60+x).$
46) $px^2-qx+r = 0.$

47) In welchem Falle sind die Wurzeln der Gleichung $px^2-qx+r = 0$ reell, in welchem Falle imaginär?

48) In welchem Falle sind die beiden Wurzelwerthe der Gleichung $px^2-qx+r = 0$ einander gleich, oder hat die quadratische Gleichung nur einen Wurzelwerth?

49) Wann sind die Wurzeln der Gleichung $x^2-ax+b = 0$ beide positiv, wann beide negativ, wann ist die größere Wurzel positiv und die kleinere negativ, und wann die kleinere positiv und die größere negativ?

50) $x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2x}.$

51) $x^2 = 1 - x.$ 52) $(7x)^2 - 7x = 1.$
53) $(5x)^2 - 33333x = 24x^2+11111x+701060205.$
54) $12x^2 = 21 + \frac{1}{4}x.$ 55) $57x-18x^2+145 = 0.$

56) $\frac{x}{100} - \frac{21}{25x} = \frac{1}{4}.$ 57) $\frac{x}{100} + \frac{21}{25x} = -\frac{1}{4}.$

58) $\frac{15}{x} - \frac{72-6x}{2x^2} = 2.$

59) $x + \frac{3{,}3512972}{x} = -3{,}8259.$ 60) $\frac{9}{16} + \frac{64}{81x^2} = \frac{4}{3x}.$

61) $(\frac{1}{3}x)^2 + 1 = (\frac{5}{13})^2 - \frac{10}{13}x - (\frac{1}{4}x)^2.$
62) $\alpha)$ $\frac{3}{4}x^2-9x = 0;$ $\beta)$ $x^2 = x.$
63) $ax^2-a^2(x+b^2) = ab(x-ab).$
64) $(x-a)^2-b(x-a-c) = bc.$ 65) $x^2-2x = -2.$

66) $\frac{x}{4} + \frac{25}{x} = 3.$ 67) $\frac{1}{x+\frac{1}{x}} = 1.$

68) $x^2 = 2x\sqrt{-1} - 1.$ 69) $x^2+a^2 = b^2+c^2-2bc+2ax.$

**) Mehrere der nachfolgenden Gleichungen lassen sich, wenn sie auf die Form $= 0$ gebracht werden, nach Anleitung von §. 28 Nr. 43 und 50 durch ein Product zweier Factoren darstellen. Setzt man nach einander die einzelnen Factoren $= 0$, so erhält man die beiden Wurzelwerthe für x.

70) $x^2-(a+b)x+ab = 0.$ 71) $x^2+1 = x\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\sqrt{mn}.$

72) $2b^2 = 2x\sqrt{a^2+b^2} - x^2.$

73) $\frac{x^2}{(m+n)^2} - \frac{4mn}{(m+n)^2}x - (m-n)^2 = 0.$

74) $x^2-(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)ab = 0.$

75) $x^2-(a^2+b^2)x-(a^2-b^2)ab = 0.$

76) α) $(x-3\frac{1}{2})(x+5\frac{1}{2}) = 0$; β) $(3x-25)(7x+29) = 0.$

77) α) $\sqrt{1+4x} + \sqrt{1-4x} = 4\sqrt{x}$;

β) $\sqrt{2abx} - \sqrt{a^2-bx} = \sqrt{a^2+bx}.$

78) $\left(x-\sqrt{-7}\right)\left(x-\sqrt{-11}\right) = 0.$

79)* $(m-x)^2 + (x-n)^2 = (m-n)^2.$

80) $\left(p+mx\sqrt{-1}\right)(1+nx) = 0.$

81)* $x^2-5x = 6\sqrt{-3}-16.$

82)* $x^2+\left(5+2\sqrt{-1}\right)x = 24+6\sqrt{-1}.$

83)* $x^2-\left(8-2\sqrt{-1}\right)x = 38\sqrt{-1}-31.$

84)* $x^2-2x = 2\sqrt{-6}-6.$

85)* $\sqrt{x-a} + \sqrt{b-x} = \sqrt{b-a}.$

86)* $\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}} = \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}.$

87) $\frac{2+3x}{1-4x} - \frac{6-5x}{7x-25} = \frac{16-x}{28x-193}.$

88) α) $\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a+x} = \frac{3+x^2}{a^2-x^2}$;

β) $(a-1)^2x^2+2(3a-1)x = 4a-1.$

89) $x:(a+x) + (a+x):x = 2\frac{1}{2}.$

90) $\frac{12x^3-11x^2+10x-78}{8x^2-7x+6} = 1\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}.$

91) $\frac{(a-x)^2-(x-b)^2}{(a-x)(x-b)} = \frac{4ab}{a^2-b^2}.$

92)* $\frac{ax+b}{bx+a} = \frac{cx-d}{dx-c}.$

93)* $\frac{ax+b}{a+bx} + \frac{cx+d}{c+dx} = \frac{ax-b}{a-bx} + \frac{cx-d}{c-dx}.$

94) $(m-n)x^2 - nx = m.$

95) $x^2 + \frac{a-b}{ab^2} = \frac{14a^2-5b(a+2b)}{18a^2b^2} + \frac{2a-3b}{2ab}x.$

96) $\frac{x}{a-b} = \frac{1}{2\sqrt{a-x}}.$

97) $15x^2-(5a+3b-3c)(50b-12a-90c+15x) = 15bc+324ac-169ab.$

98) $\sqrt[3]{8x^3+12x^2+18x+27} = \sqrt{4x^2+4x+9}.$

99) $\frac{x^3-1}{x-1} = 0.$ 100) $x^{2n} + ax^n = b.$

101) $x^4+28224 = (25x)^2.$ 102) $(13x^2)^2 + (12x)^2 = 5^2.$

103) $(65x)^4 + (65^2x)^2 + 1848^2 = 0.$

104) α) $x^4-ax^2+b^2 = 0$; β) $x^4+4abx^2 = (a^2-b^2)^2.$

105) $4m^2 = (a+b+x)(a+b-x)(x+a-b)(x-a+b).$

106) $(2{,}5-x)^4 + 0{,}5625 = 2{,}5(2{,}5-x)^2.$

107) $25x^2 - \sqrt{x^4-6x^2} = 25x^2 - 3\sqrt{-1}.$

108) $(x^2-8x+11)^2 + (x-4)^2 = 25.$

109) $x^6+27 = 28x^3.$ 110) $x^8-97x^4+1296 = 0.$

111) $\sqrt{x-1} = x-1.$

112) α) $x + \sqrt{x} = 20$; β) $x - \sqrt{x} = 20.$

113) α) $\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 2x\sqrt{1-x^2}$; β) $\sqrt{x^2} + \sqrt{x^3} = 6\sqrt{x}.$

114) α) $(a+x)^{\frac{2}{3}} + 6(a-x)^{\frac{2}{3}} = 5(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}$;

β) $\frac{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{a+x-\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{c}{x}.$

115) $x - (a+b)\sqrt{x} = 2a(a-b).$

116) $x + ab = (a+b)\sqrt{x} + 2(a-b)^2.$

117) $\frac{\sqrt{x}}{21-\sqrt{x}} + \frac{21-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2\tfrac{1}{2}.$

118) $\sqrt{2x+2} + \sqrt{7+6x} = \sqrt{7x+72}.$

119) $\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \frac{4}{x^2-x}.$ 120) $x+\sqrt{25+x} = 157.$

121) $x + 2(a+b)\sqrt{3(a^2+b^2)+x} + 10ab = 0.$

122) $\sqrt{x^2-8x+31} + (x-4)^2 = 5.$

123) $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x} = 20.$ 124) $\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2-1}-2x\sqrt{x^2-1} = 0{,}25$**).

**) Man setze $\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2-1} = y.$

125) $\sqrt[3]{x} + 7\sqrt[3]{x^2} = 350.$ 126)* $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{-x} = n(n+1).$

127)* $x^{1\frac{3}{5}} + x^{3\frac{1}{5}} = 43053282.$ 128)* $12x^{-\frac{3}{4}} - x^{-\frac{3}{8}} = 2^{-4}.$

129)* α) $\sqrt{(x-1)\ (x-2)} + \sqrt{(x-3)\ (x-4)} = \sqrt{2};$

β) $\sqrt{(x-a)\ (x-b)} + \sqrt{(x-c)\ (x-a+b-c)} = \sqrt{(a-c)\ (b-c)}.$

130)* α) $(x+\sqrt{x})^4 - (x+\sqrt{x})^2 = 20592;$

β) $(ax^{2m}+bx^m+c)^{2n}+p(ax^{2m}+bx^m+c)^n = q;$

γ) $(x^{2m}+a^m x^m-a^{2m})^{2n}+a^{2mn}(x^{2m}+a^m x^m-a^{2m})^n=2a^{mn}.$

131)* α) $\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x-a} = m$ **);

β) $\sqrt[3]{x+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{x-\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

132)* $\sqrt[3]{a-x} - \sqrt[3]{b-x} = \sqrt[3]{a-b}.$

133)* $\sqrt[3]{m-x} - \sqrt[3]{n-x} = p.$

134)* α) $\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{x-b} = \sqrt[4]{a-b};$

β) $\sqrt[5]{a-x} + \sqrt[5]{x-b} = \sqrt[5]{a-b}.$

135)* $\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{x-b} = m.$

136)* α) $9(x^2-7x+12) = 7(x^2-7x+12)$ ***);

β) $a(x-b)\ (x-c) = (a+1)\ (x-b)\ (c-x).$

Exponential-Gleichungen.

137) $\sqrt[x]{1{,}37129^{-10}} + \sqrt[x]{1{,}37129^{-20}} = 0{,}11.$

138) $(4^{3-x})^{2-x} = 1.$ 139) $10^{(5-x)\,(6-x)} = 100.$

140) $\sqrt[x]{a} = a^x.$ 141) $\sqrt[x]{0{,}707107} = 0{,}707107^{x+0{,}707107}.$

142) $\sqrt[x+1]{2} = 3^{x+2}.$ 143) $a \cdot b^x = \sqrt[x]{c}.$

**) Die Gleichungen 131—135 werden am einfachsten dadurch gelöst, daß man beide Seiten zur 3., 4. oder 5. Potenz erhebt und berücksichtigt, daß: $(p-q)^3 = p^3-q^3-3pq(p-q)$, $(p+q)^4 = p^4+q^4+4pq(p+q)^2 - 2p^2q^2$, $(p+q)^5 = p^5+q^5+5pq(p+q)^3 - 5p^2q^2(p+q)$ ist.

***) Man vergleiche die Bemerkung zu §. 62 Nr. 192.

144) $100 \cdot 10^x = \sqrt[x]{1000^5}$. 145) $x^{\log x} = 10$.
146) $x^{2+\log x} = 15{,}20153$. 147) $(2 \cdot 3^x)^{x+4} = 5$.
148) $\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x+1]{b} = c$. 149) $\sqrt[x+2]{117649} : \sqrt[x+3]{2401} = 7$.
150) α) $625^{\frac{x+1}{x+2}} : 15625^{\frac{4x-3}{5x-4}} = 0{,}04$; β) $m = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.
151) $7^{\frac{x+1}{x+2}} = 6{,}70375^{\frac{x+3}{x+4}}$. 152) $10^{0{,}289623} = x^{\log x}$.
153) α) $(10000x)^{(\log x)^2 - 5\log x} = 1$;
β) $\sqrt[x]{2} \cdot \sqrt[x+1]{3} \cdot \sqrt[x+2]{4} = 1$.

154) Wenn x_1 und x_2 die Wurzeln der Gleichung $x^2 - px + q = 0$ sind, wem ist α) $x_1 + x_2$; β) $x_1 x_2$; γ) $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$; δ) $x_1^3 + x_2^3$; ε) $x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + x_2^4$ gleich?

155) Welche Gleichung hat α) die Wurzeln 123 und 789; β) die Wurzeln $-\ 12\frac{3}{4}$ und $+\ 56\frac{7}{8}$?

156) Welche Gleichung hat α) die Wurzeln $a-2b$ und $3a-4b$; β) die Wurzeln $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$?

157) Welche Gleichung hat α) die Wurzeln $ab\sqrt{a:b}$ und $-ab\sqrt{a:b}$, welche β) die zwei Wurzeln beide gleich 13?

158) Welche Gleichung hat die Wurzeln $a+b+c\sqrt{-1}$ und $a+b-c\sqrt{-1}$?

159) In welche Factoren lassen sich die Gleichungen α) $x^2 - px + q = 0$, β) $x^2 - 6x + 8\frac{7}{16} = 0$, γ) $x^2 - x - 15\frac{3}{4} = 0$ zerlegen und wie heißen die Wurzeln? Die Gleichungen Nr. 27, 28, 29, 34, 35, 36, 37, 40, 41 sollen mittels Zerlegung aufgelöf't werden.

160) Für welche Zahlenwerthe von x wird der Ausdruck $x^2 - 18x + 77$ positiv, für welche negativ?

161) Für welche Zahlenwerthe von x wird α) der Ausdruck $x^2 + 3\frac{1}{12}x + 2\frac{1}{3}$, für welche β) der Ausdruck $x^2 - 5x + 6\frac{1}{4}$ positiv, für welche negativ?

162) Die Gleichung $x^2 - 4{,}2527x + 3{,}4906520649 = 0$ hat die eine Wurzel 1,11111. Wie heißt die andere?

163) Die eine Wurzel der Gleichung $x^2 + 444\frac{61}{66}x = 975406\frac{5}{66}$ ist $-\ 1234\frac{5}{6}$. Wie groß ist die andere?

164) Die eine Wurzel der Gleichung
$x^2 - (5p - 7q + 9r)x + 4p^2 + 18pr + 18r^2 = 13pq - 10q^2 + 27qr$
ist $4p - 5q + 6r$. Wie heißt die andere Wurzel?

165) In den Gleichungen $x^2 - 714x + 78165 = 0$ und $x^2 - 444x - 78165 = 0$ ist die eine Wurzel bei beiden dieselbe; dagegen ist die zweite Wurzel der einen Gleichung, negativ genommen, gleich der zweiten Wurzel der anderen Gleichung. Wie heißen die Wurzeln beider Gleichungen?

Trigonometrische Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grade*).

166) Welche Formen nehmen die Wurzeln der Gleichung $x^2 \pm px = q$ an, wenn $\frac{2\sqrt{q}}{p} = tang\,\lambda$ gesetzt wird?

167) Welche Formen nehmen die Wurzeln x_1 und x_2 der Gleichung $x^2 \pm px = -q$ an, wenn α) für den Fall, daß $4q \leqq p^2$ ist, $2\sqrt{q} : p = sin\,\lambda$, β) für den Fall daß $4q > p^2$ ist, $p : (2\sqrt{q}) = cos\,\vartheta$ gesetzt wird?

168) $x^2 + 1{,}1102x = 3{,}3594$.

169) $x^2 + 0{,}42331x = 8{,}53972$.

170) α) $x^2 + 9{,}125571x + 9{,}74192654 = 0$;
β) $x^2 - 10{,}83945x + 26{,}991104 = 0$.

171) $7{,}3527x^2 - 148{,}87107 = 33{,}81507x$.

172) $x^2 : 1{,}2345 - 1{,}54994x + 0{,}6789 = 0$.

173) Was wird aus dem Resultate der Gleichung:

$$c^2 = (a+mx)^2 + (d+nx)^2,$$

wenn $n : m = tang\,\alpha$, $p : q = tang\,\beta$, $p^2 = c^2 - a^2 - d^2$, und $q = a\,cos\,\alpha + d\,sin\,\alpha$ gesetzt werden**)?

174) $1930{,}58^2 = (1605{,}8 + 2604{,}8x)^2 + (111{,}8x - 616{,}1)^2$.

175) Wenn die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 - mx + n = 0$ mit $tang\,\varphi$ und $tang\,\varphi'$ bezeichnet werden, durch welche Formeln lassen sich die Winkel φ und φ' bestimmen?

176) $x^2 - 24{,}691x + 61{,}6 = 0$.

177) $x^2 - 2{,}3927x - 5{,}757312 = 0$.

178) $x^2 + 0{,}43555x - 0{,}2016 = 0$.

179) $x^2 + 0{,}91931x + 0{,}2112 = 0$.

180) $7{,}285x^2 + 19{,}749x - 115{,}638 = 0$.

181) $x^2 - 138{,}72274x + 8016 = 0$.

182) $x^2 + 9{,}859006x + 32{,}59 = 0$.

Reciproke Gleichungen höheren Grades, die sich auf Gleichungen des zweiten Grades zurückführen lassen.

183) $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$***).

---

*) Man vergleiche Heis, Lehrbuch der Trigonometrie VIII. 112.

**) Diese Gleichung kommt bei Berechnung von Sonnenfinsternissen in Anwendung.

***) Trigonometrische Lösung s. Heis, Trigonometrie VIII. 115.

Anleitung. Dividirt man die ganze Gleichung durch x^2, so ist: $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0$. Setzt man $x + \frac{1}{x} = z$, so ist $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2-2$. Die gegebene Gleichung verwandelt sich also in: $z^2+az+b-2 = 0$.

184) $x^4+1\frac{1}{2}x^3-8x^2+1\frac{1}{2}x+1 = 0$**).
185) $x^4-3\frac{1}{3}x^3+2x^2-3\frac{1}{3}x+1 = 0$.
186) $x^4-4\frac{1}{3}x^3+5\frac{1}{3}x^2-4\frac{1}{3}x+1 = 0$.
187) α) $x^4 + \left(n - \frac{1}{n}\right)x^3-2n^2x^2 + \left(n - \frac{1}{n}\right)x+1 = 0$;
β) $(x-1)^2\,(x^2+1) = a^2x^2$.
188) $x^4+ax^3+bx^2+cx+(c^2:a^2) = 0$. Anl.: $x = y\sqrt{c:a}$.
189) $x^4+5x^3+10x^2+15x+9 = 0$.
190) $x^4+3x^3-41\frac{9}{25}x^2+6x+4 = 0$.
191) $x^4+2x^3-21\frac{1}{9}x^2+10x+25 = 0$.
192) $x^3\pm ax^2\pm ax+1 = 0$.
Anleitung: $x^3\pm ax^2\pm ax+1 = x^3+1\pm ax(x+1) = (x+1)\,(x^2-x+1\pm ax)$, u. s. w.
193) $x^3+3\frac{1}{2}x^2+3\frac{1}{2}x+1 = 0$.
194) $x^3-1\frac{1}{6}x^2-1\frac{1}{6}x+1 = 0$. 195) $x^3+2x^2+2x+1 = 0$.
196) $x^5+ax^4+bx^3+bx^2+ax+1 = 0$.
197) $x^5+3x^4+2\frac{3}{4}x^3+2\frac{3}{4}x^2+3x+1 = 0$.
198) $x^5-4\frac{13}{21}x^4+4x^3+4x^2-4\frac{13}{21}x+1 = 0$.
199) $x^3+ax^2+bx + (b^3:a^3) = 0$. Anleit.: $x = \frac{b}{a}y$.
200) $x^3+3x^2-6x-8 = 0$.
201) $x^3+2x^2+x+\frac{1}{8} = 0$.
202) $x^5+ax^4+bx^3+cx^2 + (c^3a:b^3)x + (c^5:b^5) = 0$.
203) α) $x^5-2\frac{1}{2}x^4+x^3+2x^2-20x+32 = 0$;
β) $x^5+2x^4+3x^3+6x^2+16x+32 = 0$.
204) α) $x^6+ax^5+bx^4-bx^2-ax-1 = 0$;
β) $x^6-5\frac{5}{6}x^5+9\frac{1}{3}x^4-9\frac{1}{3}x^2+5\frac{5}{6}x-1 = 0$;
γ) $x^7+4x^6+2x^5+5x^4+5x^3+2x^2+4x+1 = 0$;
δ) $x^7+ax^6+bx^5+(a+b-1)x^4+(a+b-1)x^3+bx^2+ax+1 = 0$.

Zusatz.

205) $x^2-2mx = (n-p+m)\,(n-p-m)$.
206) $x^2-(m+n)x = \frac{1}{4}[p+q-m-n]\,[p+q+m+n]$.
207) $x^2-(c-b)x = (a-b)\,(a-c)$.
208) $2(a^2+b^2)x-x^2 = (a^2-b^2)^2$.

**) Trigonometrische Lösung s. Heis, Trigonometrie VIII. 115.

209) $(a^2+1)x-ax^2 = a.$ 210) $(ac+b^2)x-bcx^2 = ab.$

211) $abx^2-(a+b)\,(ab+1)x+(a^2+1)\,(b^2+1) = 0.$

212) $mnx^2-(m+n)(mn+1)x+(m+n)^2 = 0.$

213) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2x = 2x^2+\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}.$

214) $2ab\sqrt{ab} = (a+b)x[\sqrt{ab}-x]+2abx.$

215)* $\dfrac{(11x^2+5x+1)\,(x^2+5x+11)}{(2x^2+5x+1)\,(x^2+5x+2)} = 4.$

216)* $\sqrt{(m+x)(x+n)}+\sqrt{(m-x)(x-n)} = 2\sqrt{nx}.$

217)* α) $\dfrac{\sqrt{(m+x)(x+n)}+\sqrt{(m-x)(x-n)}}{\sqrt{(m+x)(x+n)}-\sqrt{(m-x)(x-n)}} = \sqrt{\dfrac{m}{n}}.$

β) $\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}+\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}} = a;$

γ) $\sqrt[3]{\dfrac{a-x}{b+x}}+\sqrt[3]{\dfrac{b+x}{a-x}} = c.$

218)* $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2+x}-\dfrac{1}{3+x}-\dfrac{1}{4+x}+\dfrac{1}{5+x}$
$-\dfrac{1}{6+x}+\dfrac{1}{7+x} = 0.$

219)* $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x-2}+\dfrac{c}{x-3}+\dfrac{b}{x-4}+\dfrac{a}{x-5} = 0.$

220)* $\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x+b}+\dfrac{1}{x+c}+\dfrac{1}{x+a+b-c} = 0.$

221)* $\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x+b}+\dfrac{1}{x+c}+\dfrac{1}{x+d}+\dfrac{1}{x+a+b-c}$
$+\dfrac{1}{x+a+b-d} = 0.$

222) $\dfrac{1}{x-a}+x-a = \dfrac{1}{x-b}+x-b.$

223) $\dfrac{m}{mx-n}+\dfrac{mx-n}{m} = \dfrac{n}{nx-m}+\dfrac{nx-m}{n}.$

224) $(a+2x-\sqrt{a^2-4x^2})a = 5x(a+2x+\sqrt{a^2-4x^2}).$

225) $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{b}.$

226) $\sqrt[3]{(1+x)^2}-\sqrt[3]{(1-x)^2} = \sqrt[3]{1-x^2}.$

227) $1+x^4 = a(1+x)^4$. 228) $1+x^5 = a(1+x)^5$.

229) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a}} = \dfrac{n^2a}{x-a}$.

230)* $\sqrt[5]{\dfrac{a-x}{b+x}} + \sqrt[5]{\dfrac{b+x}{a-x}} = c$.

231) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{x^2+a^2x}+\sqrt{x^2-a^2x}}+\sqrt{\sqrt{x^2+a^2x}-\sqrt{x^2-a^2x}}}{\sqrt{\sqrt{x^2+a^2x}+\sqrt{x^2-a^2x}}-\sqrt{\sqrt{x^2+a^2x}-\sqrt{x^2-a^2x}}} = \sqrt{1+a}$.

§. 70.

Auflösungen der Aufgaben in §. 69.

(Der eine Wurzelwerth der Gleichung ist mit x_1, der andere mit x_2 bezeichnet.)

3) $x = \pm 123$. 4) $x = \pm 275$. 5) $x = \pm\sqrt{m}$.
6) $x = \pm(2a-3b)$. 7) $x = \pm 115\frac{1}{2}$. 8) $x = \pm 2\frac{1}{2}$.
9) $x = \pm 1$. 10) $x = \pm\sqrt{mn}$. 11) $x = \pm\frac{2}{7}$.
12) $x = \pm 4\frac{1}{5}$. 13) $x = \pm\frac{1}{2}(a-1)$. 14) $x = \pm m$.
15) $x = \pm 2c\sqrt{b : [4c^2d-(c^2+d-a)^2]} =$
$\pm 2c\sqrt{b : [4ac^2-(c^2+a-d)^2]}$. 16) $x = \pm 4$.
17) $x = \pm 6{,}53197$. 18) $x = \pm\frac{1}{2}$.
19) x_1 u. $x_2 = \pm\sqrt{2}$, $x_3 = 0$.
20) α) $x = \pm[m:(m^{\frac{n}{n+1}}-1)]^{\frac{1}{2}}$; β) $x_1 = 2m$, $x_2 = 0$.
21) $x = \pm\sqrt{m^2+n^2}$. 22) $x_1 = 1\frac{26}{63}$, $x_2 = \frac{1}{7}$.
23) $x_1 = 8$, $x_2 = 12$. 24) $x_1 = 2a$, $x_2 = 2b$.
25) α) $x = \pm\sqrt{[(b+c)^2m^2 + (b-c)^2] : [m^2+1]}$;
β) $x = \pm\sqrt{ab}$.
26) $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$ **). 27) $x_1 = 1$, $x_2 = -7$.
28) $x_1 = 6$, $x_2 = 2$. 29) $x_1 = -3$, $x_2 = -7$.
30) $x = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{1}{4}m^2-n}$. 31) $x = -\frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{1}{4}m^2-n}$.
32) $x = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{1}{4}m^2+n}$. 33) $x = -\frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{1}{4}m^2+n}$.

**) Formel von Bramagupta und Mohammed ben Musa. (Bramagupta [650] and Brascara, translated by Colebrooke. London 1817. Mohammed ben Musa [† 812] Alchowaresmi, algebra oualmokabala, publ. by Rosen, London 1831.)

34) $x_1 = 2$, $x_2 = -12$. 35) $x_1 = -2$, $x_2 = 12$.
36) $x_1 = -6$, $x_2 = -4$. 37) $x_1 = 6$, $x_2 = 4$.
38) $x_1 = 130$, $x_2 = -1116$. 39) $x_1 = 806$, $x_2 = 180$.
40) $x_1 = 30$, $x_2 = -4$. 41) $x_1 = -6$, $x_2 = -20$.
42) $x_1 = 8765$, $x_2 = 1234$. 43) $x_1 = 56\frac{7}{8}$, $x_2 = 12\frac{3}{4}$.
44) $x_1 = 678,9$, $x_2 = 123,8$. 45) $x_1 = 99,9$, $x_2 = -999,9$.
46) $x = \left(q \pm \sqrt{q^2 - 4pr}\right) : (2p)$. 48) Wenn $q^2 = 4pr$ ist.

49) Die Wurzelwerthe der Gleichung $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$ und $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$ sind beide positiv, wenn a und b beide positiv sind, beide negativ, wenn a negativ, b dagegen positiv ist. Die größere Wurzel wird negativ, die kleinere positiv, wenn a und b beide negativ sind; dagegen wird die größere Wurzel positiv, die kleinere negativ, wenn a positiv, b negativ ist.

50) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -1$.
51) $x_1 = 0,6180340$, $x_2 = -1,6180340$.
52) $x_1 = 0,2311477...$ $x_2 = -0,0882905....$
53) $x_1 = 56789$, $x_2 = -12345$.
54) $x_1 = 1\frac{1}{3}$, $x_2 = -1\frac{5}{16}$.
55) $x_1 = 4\frac{5}{6}$, $x_2 = -1\frac{2}{3}$. 56) $x_1 = 28$, $x_2 = -3$.
57) $x_1 = -4$, $x_2 = -21$. 58) $x_1 = 6$, $x_2 = 3$.
59) $x_1 = -1,3579$, $x_2 = -2,468$.
60) $x_1 = 1\frac{5}{27} = x_2$. 61) $x_1 = -2\frac{14}{65} = x_2$.
62) α) $x_1 = 12$, $x_2 = 0$, β) $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.
63) $x_1 = a+b$, $x_2 = 0$. 64) $x_1 = a+b$, $x_2 = a$.
65) $x = 1 \pm \sqrt{-1}$. 66) $x = 6 \pm 8\sqrt{-1}$.
67) $x = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{-3}\right) = 0,5 \pm 0,8660254\sqrt{-1}$.
68) $x_1 = \sqrt{-1} + \sqrt{-2} = 2,4142135\sqrt{-1}$,
$x_2 = \sqrt{-1} - \sqrt{-2} = -0,4142135\sqrt{-1}$.
69) $x_1 = a+b-c$, $x_2 = a-b+c$.
70) $x_1 = a$, $x_2 = b$. 71) $x_1 = \sqrt{m:n}$, $x_2 = \sqrt{n:m}$.
72) $x = \sqrt{a^2+b^2} \pm \sqrt{a^2-b^2}$.
73) $x_1 = (m+n)^2$, $x_2 = -(m-n)^2$.
74) $x_1 = (a-b)a$, $x_2 = (a+b)b$.
75) $x_1 = (a+b)a$, $x_2 = (b-a)b$.
76) α) $x_1 = 3\frac{1}{2}$, $x_2 = -5\frac{1}{2}$. β) $x_1 = 8\frac{1}{3}$, $x_2 = -4\frac{1}{7}$.
77) α) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{5}$. β) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2a^3}{(1+a^2)b}$.
78) $x_1 = \sqrt{-7}$, $x_2 = \sqrt{-11}$. 79) $x_1 = m$, $x_2 = n$.
80) $x_1 = \frac{p}{m}\sqrt{-1}$, $x_2 = -\frac{1}{n}$.
81) $x_1 = 4+2\sqrt{-3}$, $x_2 = 1-2\sqrt{-3}$.

82) $x_1 = 8, \quad x_2 = -8-2\sqrt{-1}.$
83) $x_1 = 7+4\sqrt{-1}, \quad x_2 = 1-6\sqrt{-1}.$
84) $x_1 = 1+\sqrt{-2}-\sqrt{-3}, \quad x_2 = 1-\sqrt{-2}+\sqrt{-3}.$
85) $x_1 = a, \quad x_2 = b.$ 86) $x = \frac{1}{2}(a+b)\pm\frac{1}{4}(a-b)\sqrt{2}.$
87) $x_1 = 8, \quad x_2 = -2\frac{111}{178}.$
88) $\alpha)$ $x = 1\pm\sqrt{-2}$; $\beta)$ $x = [1-3a\pm2a\sqrt{a}]:(a-1)^2.$
89) $x_1 = a, \quad x_2 = -2a.$ 90) $x_1 = 5, \quad x_2 = -4\frac{2}{7}.$
91) $x_1 = \frac{1}{2}(a^2+b^2):a, \quad x_2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2):b.$
92) $x = \dfrac{\sqrt{(a-b)(c+d)}\pm\sqrt{(a+b)(c-d)}}{\sqrt{(a-b)(c+d)}\mp\sqrt{(a+b)(c-d)}}.$
93) x_1 u. $x_2 = \pm 1, \quad x_3$ u. $x_4 = \pm\sqrt{(ac):(bd)}.$
94) $x_1 = m:(m-n), \quad x_2 = -1.$
95) $x_1 = [4a-5b]:[6ab], \quad x_2 = [a-2b]:[3ab].$
96) $x_1 = \sqrt{a}+\sqrt{b}, \quad x_2 = \sqrt{a}-\sqrt{b}.$
97) $x_1 = 4a+5b-6c, \quad x_2 = a-2b+3c.$
98) $x_1 = \frac{1}{6}[-1+4\sqrt{-5}], \quad x_2 = \frac{1}{6}[-1-4\sqrt{-5}]$ *).
99) $x_1 = \frac{1}{2}[-1+\sqrt{-3}], \quad x_2 = \frac{1}{2}[-1-\sqrt{-3}]$ **).
100) $x = \left(\frac{1}{2}[-a\pm\sqrt{4b+a^2}]\right)^{\frac{1}{n}}.$
101) x_1 u. $x_2 = \pm 24$; x_3 u. $x_4 = \pm 7.$
102) $x_1 = \pm\frac{5}{13}, \quad x_2 = \pm\sqrt{-1}.$
103) $x_1 = \pm\frac{33}{65}\sqrt{-1}, \quad x_2 = \pm\frac{56}{65}\sqrt{-1}.$
104) $\alpha)$ $x = \pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{a+2b}\pm\frac{1}{2}\sqrt{a-2b}\right)$; (Nach §. 55.)
$\beta)$ x_1 und $x_2 = \pm(a-b)$,
x_3 und $x_4 = \pm(a+b)\sqrt{-1}.$
105) $x = \pm\sqrt{a^2+b^2\pm2\sqrt{(ab+m)(ab-m)}}.$
106) $x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3.$
107) $x = \pm\sqrt{3}.$ 108) $x_1 = 7, \; x_2 = 1, \; x_3 = 4, \; x_4 = 4.$
109) $x_1 = 3, \quad x_2 = 1.$ Aus Beispiel 99 folgt, daß es außer den beiden genannten Wurzelwerthen 3 und 1 noch **vier** Wurzeln gibt, welche der Gleichung Genüge leisten, nämlich:
x_3 u. $x_4 = \frac{1}{2}[-1\pm\sqrt{-3}], \quad x_5$ und $x_6 = \frac{3}{2}[-1\pm\sqrt{-3}].$

*) Die Gleichung ist eigentlich eine vom **vierten** Grade, welche außer den genannten beiden Wurzeln x_1 und x_2 noch die Wurzeln $x_3 = 0$ und $x_4 = 0$ hat.

**) Es ist also $[\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3})]^3 = 1.$ (S. §. 49 Nr. 20.)

110) $x_1 = \pm 3\sqrt{\pm 1}$, $x_2 = \pm 2\sqrt{\pm 1}$. (8 Werthe.)
111) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.
112) α) $x_1 = (+4)^2 = 16$, $x_2 = (-5)^2 = 25$;
β) $x_1 = (+5)^2 = 25$, $x_2 = (-4)^2 = 16$.
113) α) $x_1 = \pm 0{,}92388$, $x_2 = \pm 0{,}38268$;
β) $x_1 = 0$, $x_2 = (+2)^2 = 4$, $x_3 = (-3)^2 = 9$.
114) α) $x_1 = \frac{7}{9}a$, $x_2 = \frac{13}{14}a$;
β) $x_1 = 0$, x_2 u. $x_3 = \pm\sqrt{c(2a-c)}$.
115) $x_1 = (b-a)^2$, $x_2 = (+2a)^2$.
116) $x_1 = (2a-b)^2$, $x_2 = (2b-a)^2$.
117) $x_1 = (+14)^2 = 196$, $x_2 = (+7)^2 = 49$.
118) $x_1 = 7$, $x_2 = -11\frac{42}{47}$.
119) $x_1 = (+2)^2 = 4$, $x_2 = (-1)^2 = 1$,
$x_3 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-7}$, $x_4 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-7}$.
120) $x_1 = (13)^2 - 25 = 144$, $x_2 = (-14)^2 - 25 = 171$.
121) $x_1 = (a-3b)^2 - 3(a^2+b^2) = -2a^2 - 6ab + 6b^2$,
$x_2 = (b-3a)^2 - 3(a^2+b^2) = -2b^2 - 6ab + 6a^2$.
122) $x_1 = 4 + \sqrt{(+4)^2 - 15} = 5$, $x_2 = 4 - \sqrt{(+4)^2 - 15} = 3$,
$x_3 = 4 + \sqrt{(-5)^2 - 15} = 4 + \sqrt{10} = 7{,}16228\ldots$,
$x_4 = 4 - \sqrt{(-5)^2 - 15} = 4 - \sqrt{10} = 0{,}83772\ldots$.
123) $x_1 = (+4)^4 = 256$, $x_2 = (-5)^4 = 625$.
124) x_1 u. $x_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\sqrt{15}} = \pm 0{,}99203$,
x_3 u. $x_4 = \pm\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\sqrt{15}} = \pm 0{,}126006$.
125) $x_1 = 343$, $x_2 = -364\frac{148}{343}$.
126) $x_1 = n^3$, $x_2 = -(n+1)^3$.
127) $x_1 = 243$, $x_2 = (-6562)^{\frac{5}{8}} = 243{,}0231\sqrt{-1}$.
128) $x_1 = 256$, $x_2 = (-24)^{\frac{8}{3}} = 4792{,}5$.
129) α) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$; β) $x_1 = a$, $x_2 = c$.
130) α) $x_1 = (+3)^2 = 9$, $x_2 = (-4)^2 = 16$,

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = \left(-0{,}5 \mp \sqrt{-11{,}75}\right)^2 = -11{,}5 \pm \sqrt{-11{,}75},$$

$$x_5 \text{ und } x_6 = 0{,}5 + \sqrt{-143} \mp \sqrt{0{,}25 + \sqrt{-143}},$$

$$x_7 \text{ und } x_8 = 0{,}5 - \sqrt{-143} \mp \sqrt{0{,}25 - \sqrt{-143}};$$

$$\beta)\ x = \left[-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{1}{a}\left(-\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + q}\right)^{\frac{1}{n}} - \frac{c}{a}}\right]^{\frac{1}{m}};$$

$\gamma)$ $x_1 = a, \quad x_2 = a\sqrt[m]{-2},$

x_3 und $x_4 = a\left[-\frac{1}{2} \pm \sqrt{1\frac{1}{4} + (-2)^{\frac{1}{n}}}\right]^{\frac{1}{m}}.$

131) $\alpha)$ $x = \pm\sqrt{[(2a-m^3):3m]^3 + a^2}$; $\beta)$ $x = \pm\sqrt{2}$.

132) $x_1 = a, \quad x_2 = b.$

133) $x = n + \frac{1}{8}\left[p \mp \sqrt{[4(m-n)-p^3]:[3p]}\right]^3 =$
$\frac{1}{2}(m+n) \pm \sqrt{[(m-n-p^3):(3p)]^3 + \frac{1}{4}(m-n)^2}.$

134) $\alpha)$ $x_1 = a, \; x_2 = b, \; x_3$ u. $x_4 = \frac{1}{2}(a+b) \pm \frac{3}{2}(a-b)\sqrt{-7}.$
$\beta)$ $x_1 = a, \; x_2 = b, \; x_3$ u. $x_4 = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b)\sqrt{-3}.$

135) $x = \frac{1}{2}(a+b) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a-b)^2 - \left[m^2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}(a-b+m^4)}\right]^4}.$

136) $\alpha)$ $x_1 = 4, \quad x_2 = 3$; $\beta)$ $x_1 = b, \quad x_2 = c.$

137) $x = 1{,}371293.$ Gibt es noch einen zweiten Wurzelwerth?

138) $x_1 = 3, \quad x_2 = 2.$ 139) $x_1 = 7, \quad x_2 = 4.$

140) $x_1 = 1, \quad x_2 = -1.$

141) $x_1 = 0{,}7071068\ldots, \quad x_2 = -1{,}4142136\ldots.$

142) $x_1 = -0{,}5614215, \quad x_2 = -2{,}4385785.$

143) $x = [-\log a \pm \sqrt{4 \log b \cdot \log c + (\log a)^2}] : (2 \log b).$

144) $x_1 = 3, \quad x_2 = -5.$ 145) $x_1 = 10, \quad x_2 = 0{,}1.$

146) $x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{1}{300}.$

147) $x_1 = -4{,}38974\ldots, \quad x_2 = -0{,}24118\ldots.$

148) $x = \left[-\log\frac{c}{ab} \pm \sqrt{\left(\log\frac{c}{ab}\right)^2 + 4 \log a \cdot \log c}\right] : [2 \log c].$

149) $x_1 = 1, \quad x_2 = -4.$ 150) $\alpha)$ $x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{3}$;
$\beta)$ $x = \log(m \pm \sqrt{1+m^2}) : \log e.$ 151) $x_1 = 7, \; x_2 = -12.$

152) $x_1 = 3{,}45276, \quad x_2 = 0{,}289623.$

153) $\alpha)$ $x_1 = 0{,}0001, \; x_2 = 1, \; x_3 = 172{,}2138, \; x_4 = 0{,}0058068$;
$\beta)$ $x_1 = -0{,}292968, \quad x_2 = -1{,}488926.$

154) $\alpha)$ p; $\beta)$ q; $\gamma)$ $p^2 - q$; $\delta)$ $p(p^2-3q)$; $\varepsilon)$ $(p^2-q)(p^2-3q).$

155) $\alpha)$ $x^2 - 912x + 97047 = 0$; $\beta)$ $x^2 - 44\frac{1}{8}x - 725\frac{5}{32} = 0.$

156) $\alpha)$ $x^2 - (4a-6b)x + 3a^2 - 10ab + 8b^2 = 0$; $\beta)$ $x^2 + 1 = 0.$

157) $\alpha)$ $x^2 - a^3b = 0$; $\beta)$ $x^2 - 26x + 169 = 0.$

158) $x^2 - 2(a+b)x + (a+b)^2 + c^2 = 0.$

159) $\alpha)$ $\left(x - \frac{1}{2}p + \sqrt{-q + \frac{1}{4}p^2}\right)\left(x - \frac{1}{2}p - \sqrt{-q + \frac{1}{4}p^2}\right)$;
$\beta)$ $(x - 2\frac{1}{4})(x - 3\frac{3}{4})$; $\gamma)$ $(x + 3\frac{1}{2})(x - 4\frac{1}{2}).$

160) Der Ausdruck wird positiv für alle Werthe, welche > 11, so wie für alle, welche < 7, negativ für alle Werthe, welche > 7 und < 11 sind.

161) Der Ausdruck $\alpha)$ wird positiv sowohl für alle Werthe, welche $> -1\frac{1}{3}$, als auch für alle, welche $< -1\frac{3}{4}$ sind; ne-

gativ für alle Werthe, welche $< -1\frac{1}{3}$ und $> -1\frac{3}{4}$ sind. Der Ausdruck β) wird für alle Werthe von x immer positiv.

162) 3,14159. 163) $789\frac{10}{11}$. 164) $p-2q+3r$.

165) 579 und 135 sind die Wurzeln der ersten, und 579 und -135 die Wurzeln der zweiten Gleichung.

166) $x_1 = \sqrt{q}\ tang\ \frac{1}{2}\lambda,\quad x_2 = \mp\sqrt{q}\ cot\ \frac{1}{2}\lambda.$

167) α) $x_1 = \mp\sqrt{q}\ tang\ \frac{1}{2}\lambda,\quad x_2 = \mp\sqrt{q}\ cot\ \frac{1}{2}\lambda;$

β) $x_1 = \mp\sqrt{q}(cos\ \vartheta + sin\ \vartheta\sqrt{-1})$

$= \mp(\frac{1}{2}p + \sqrt{q}\ sin\ \vartheta\sqrt{-1}),$

$x_2 = \mp\sqrt{q}(cos\ \vartheta - sin\ \vartheta\sqrt{-1})$

$= \mp(\frac{1}{2}p - \sqrt{q}\ sin\ \vartheta\sqrt{-1}).$

168) $\lambda = 73^0 9' 2'',1;\quad x_1 = 1,35998,\ x_2 = -2,47018.$

169) $\lambda = 85^0 51' 26'',7;\quad x_1 = 2,71828,\ x_2 = -3,14159.$

170) α) $\lambda = 43^0 9' 41'',4;\quad x_1 = -1,23456,\ x_2 = -7,891011.$

β) $\lambda = 73^0 27' 13'',8,\quad x_1 = 3,87625,\ x_2 = 6,9632.$

171) $\lambda = 62^0 55' 52'',9;\quad x_1 = 7,35270,\ x_2 = -2,75370.$

172) $\lambda = 73^0 7' 10'',56;\quad x_1 = 1,2345,\ x_2 = 0,6789.$

173) $x_1 = \frac{p}{n} sin\ \alpha\ tang\ \frac{1}{2}\beta,\quad x_2 = -\frac{p}{n} sin\ \alpha\ cot\ \frac{1}{2}\beta.$

174) $\alpha = 2^0 27' 27'',6,\ p^2 = 768966,2864,\ q = 1577,904;$

$\beta = 29^0 3' 46'',\ x_1 = 0,0871803,\ x_2 = -1,297601.$

175) Aus der gegebenen Gleichung ergibt sich $tang\ \varphi + tang\ \varphi' = m,\quad tang\ \varphi \cdot tang\ \varphi' = n,\quad tang\ (\varphi+\varphi') = m : [1-n],$

$$cos(\varphi-\varphi') = \frac{1 + tang\ \varphi\ tang\ \varphi'}{tang\ \varphi + tang\ \varphi'} sin\ (\varphi+\varphi') = \frac{1+n}{m} sin\ (\varphi+\varphi').$$

Aus $\varphi+\varphi'$ und $\varphi-\varphi'$ lassen sich φ und φ' einzeln und hieraus die Wurzeln $tang\ \varphi$ und $tang\ \varphi'$ bestimmen.

176) $\varphi + \varphi' = 157^0 49' 55'',0,\ \varphi-\varphi' = 16^0 55' 59,6'';$

$\varphi = 87^0 22' 57,3'',\quad \varphi' = 70^0 26' 57,7'';$

$x_1 = 21,875,\quad x_2 = 2,816.$

177) $\varphi = 123^0 57' 35'',7,\quad \varphi' = 75^0 32' 19'',1;$

$x_1 = -1,4848,\quad x_2 = 3,8775.$

178) $\varphi = 144^0 22' 1'',3,\quad \varphi' = 15^0 42' 31'',1;$

$x_1 = -0,7168,\quad x_2 = 0,28125.$

179) $\varphi = 155^0 44' 44'',1,\quad \varphi' = 154^0 53' 6'',6;$

$x_1 = -0,45056,\quad x_2 = -0,46875.$

180) $\varphi = 70^0 41' 1'',36,\quad \varphi' = -79^0 48' 39'',39;$

$x_1 = 2,852952,\quad x_2 = -5,563863.$

181) $\vartheta = 39^0 13' 16'',7;\quad x = 69,36137 \pm 56,61272\sqrt{-1}.$

182) $\vartheta = 30^0 17' 18'',4;\quad x = -4,929503 \pm 2,879236\sqrt{-1}.$

183) $z = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{2-b+\frac{1}{4}a^2}$; $x = \frac{1}{2}z \pm \sqrt{\frac{1}{4}z^2-1}$,
$x = -\frac{1}{4}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{2-b+\frac{1}{4}a^2} \pm \sqrt{\frac{1}{8}a^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}b \mp \frac{1}{4}a\sqrt{2-b+\frac{1}{4}a^2}}$.

184) $z_1 = 2\frac{1}{2}$, $z_2 = -4$; $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, x_3 u. $x_4 = -2 \pm \sqrt{3} = -0{,}2679492$ u. $-3{,}7320508$.

185) $z_1 = 3\frac{1}{3}$, $z_2 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$, x_3 u. $x_4 = \pm\sqrt{-1}$.

186) $z_1 = 3\frac{1}{3}$, $z_2 = 1$; $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$, x_3 u. $x_4 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3} = 0{,}5 \pm 0{,}8660254\sqrt{-1}$.

187) α) $z_1 = n + \frac{1}{n}$, $z_2 = -2n$; $x_1 = n$, $x_2 = \frac{1}{n}$, x_3 und $x_4 = -n \pm \sqrt{n^2-1}$.

β) x_1 u. $x_2 = \frac{1}{2}[1+\sqrt{1+a^2} \pm \sqrt{a^2+2\sqrt{1+a^2}-2}]$,

x_3 u. $x_4 = \frac{1}{2}[1-\sqrt{1+a^2} \pm \sqrt{a^2-2\sqrt{1+a^2}-2}]$.

188) $z = [-a\sqrt{ac} \pm \sqrt{8c^2-4abc+a^3c}] : 2c$;

$y = \frac{1}{2}z \pm \sqrt{\frac{1}{4}z^2-1}$; aus y und z erhält man x.

189) $z_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $z_2 = -\frac{4}{3}\sqrt{3}$; $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, x_3 und $x_4 = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-11}) = -\frac{0}{5} \mp 1{,}658^{31}\sqrt{-1}$.

190) $z_1 = 2{,}7\sqrt{2}$, $z_2 = -4{,}2\sqrt{2}$; $y_1 = 2{,}5\sqrt{2}$, $y_2 = 0{,}2\sqrt{2}$; $x_1 = 5$, $x_2 = 0{,}4$; $y_3 = -2{,}1\sqrt{2} \pm \sqrt{7{,}82}$; x_1 u. $x_2 = -4{,}2 \pm 0{,}2\sqrt{391}$, $x_3 = -0{,}245256$, $x_4 = -8{,}154744$.

191) $z_1 = \frac{14}{15}\sqrt{5}$, $z_2 = -\frac{4}{3}\sqrt{5}$; $y_1 = \frac{3}{5}\sqrt{5}$, $y_2 = \frac{1}{3}\sqrt{5}$; $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{5}{3}$; $y_3 = -\frac{2}{3}\sqrt{5} \pm \frac{1}{3}\sqrt{11}$, $x = -\frac{10}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{55}$, $x_3 = -0{,}8612672$, $x_4 = -5{,}8053995$.

192) Das Product $(x+1)(x^2-x+1+ax)$ wird zu 0, 1) wenn $x+1 = 0$, 2) wenn $x^2-x+1+ax = 0$ gesetzt wird. Es ist also $x_1 = -1$, x_2 u. $x_3 = \frac{1}{2}(1-a \pm \sqrt{a^2-2a-3})$.

193) $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -2$.

194) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{2}{3}$.

195) $x_1 = -1$, x_2 u. $x_3 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

196) Dividirt man die Gleichung durch $x+1$, so erhält man $x^4+(a-1)x^3+(b-a+1)x^2+(a-1)x+1 = 0$.

$z = -\frac{1}{2}(a-1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a-b+1\frac{1}{4}}$; vier Wurzelwerthe liefert $x = \frac{1}{2}z \pm \sqrt{\frac{1}{4}z^2-1}$, $x_5 = -1$.

197) $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -2$, x_4 und $x_5 = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{-15}) = -0{,}25 \pm 0{,}968246\sqrt{-1}$.

198) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = \frac{1}{3}$, x_4 u. $x_5 = \frac{1}{7}(8 \pm \sqrt{15})$, $x_4 = 1{,}6961405$, $x_5 = 0{,}5895738$.

199) $y_1 = -1,\quad y_2 = \left(-a^2+b\pm\sqrt{a^4-2a^2b-3b^2}\right):2b;$
$x_1 = -b:a,\ x_2$ u. $x_3 = \frac{1}{2}[b-a^2\pm\sqrt{a^4-2a^2b-3b^2}]:a.$

200) $x_1 = 2,\quad x_2 = -4,\quad x_3 = -1.$

201) $x_1 = -\frac{1}{2},\quad x_2 = -1{,}309017,\quad x_3 = -0{,}190983.$

202) $x = \frac{c}{b}y;\ y^5 + \frac{ab}{c}y^4 + \frac{b^3}{c^2}y^3 + \frac{b^3}{c^2}y^2 + \frac{ab}{c}y+1 = 0.$

Dividirt man durch $y+1$, so ist:

$$y^4 + \left(\frac{ab}{c}-1\right)y^3 + \left(\frac{b^3}{c^2}-\frac{ab}{c}+1\right)y^2 + \left(\frac{ab}{c}-1\right)y+1 = 0,$$

$$z = \frac{c-ab\pm\sqrt{(c+ab)^2+4(c^2-b^3)}}{2c};\ x = \frac{c}{2b}\left(z\pm\sqrt{z^2-4}\right).$$

203) α) $x = 2y,\ z_1 = 2,\ z_2 = \frac{1}{4},\ y_1$ u. $y_2 = 1\pm 0;\ y_3 = \frac{1}{8}\pm\frac{3}{8}\sqrt{-7},$
$x_1 = 2,\quad x_2 = 2,\quad x_3$ u. $x_4 = \frac{1}{4}\pm\frac{3}{4}\sqrt{-7},\ x_5 = -2;$

β) $z = \pm\frac{1}{2}\sqrt{5};\quad y = \pm\frac{1}{4}[\sqrt{5}\pm\sqrt{-11}];\quad x_1$ u. $x_2 =$
$\frac{1}{2}[\sqrt{5}\pm\sqrt{-11}],\quad x_3$ und $x_4 = -\frac{1}{2}[\sqrt{5}\pm\sqrt{-11}]$. Diese 4 Wurzelwerthe lassen sich auch darstellen unter der Form:

$$\pm\sqrt{-1\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-55}}\ \text{(s. §. 55)};\quad x_5 = -2.$$

204) α) Die Gleichung hat die beiden Wurzelwerthe $x = \pm 1$. Dividirt man dieselbe durch x^2-1, so erhält man die reciproke Gleichung $x^4+ax^3+(b+1)x^2+ax+1$. (S. 183.)

β) $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2,\ x_4 = \frac{1}{2},\ x_5 = 3,\ x_6 = \frac{1}{3}.$

γ) $x_1 = -1;\ x_2$ u. $x_3 = \pm\sqrt{-1};\ x_4$ u. $x_5 = \frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3};$
x_6 u. $x_7 = -2\pm\sqrt{3},\ x_6 = -0{,}267949,\ x_7 = -3{,}732051.$

δ) $x_1 = -1,\ x_2$ u. $x_3 = \pm\sqrt{-1}$. Setzt man $x+\frac{1}{x} = z$, so wird $z_1 = 0,\quad z_2 = -\frac{1}{2}(a-1)\pm\sqrt{\frac{1}{4}(a+1)^2+2-b}$
$x = \frac{1}{2}z\pm\sqrt{\frac{1}{4}z^2-1}.$

205) $x_1 = m+n-p,\quad x_2 = m-n+p.$

206) $x_1 = \frac{1}{2}(m+n+p+q),\quad x_2 = \frac{1}{2}[m+n-p-q].$

207) $x_1 = a-b,\quad x_2 = c-a.$

208) $x_1 = (a+b)^2,\quad x^2 = (a-b)^2.$

209) $x_1 = a,\quad x_2 = \frac{1}{a}.$ 210) $x_1 = \frac{a}{b},\quad x_2 = \frac{b}{c}.$

211) $x_1 = a+\frac{1}{a},\quad x_2 = b+\frac{1}{b}.$

212) $x_1 = m+n,\quad x_2 = \frac{1}{m}+\frac{1}{n}.$

213) $x_1 = \frac{1}{2}(a+b),\quad x_2 = \sqrt{ab}.$

214) $x_1 = 2ab : (a+b), \quad x_2 = \sqrt{ab}.$

215) $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-18+2\sqrt{77}}.$ 216) $x = \pm \sqrt{mn}.$

217) α) $x = \pm \sqrt{mn}$; β) $x = \pm \frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{a-2}{a+2}}$;

γ) $x = \frac{a-b}{2} \pm \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+1}{c-1}\sqrt{\frac{c-2}{c+2}}.$

218) Man addire zuerst die von den Enden gleich weit entfernten Quotienten. Aus dem gemeinschaftlichen Factor $7+2x=0$ erhält man den Wurzelwerth $x = -3\frac{1}{2}$. Setzt man $x^2+7x = y$, so reducirt sich die Gleichung auf $y^2+18y+90 = 0$. Hiernach erhält man für x die 4 Werthe: $x = -3\frac{1}{2} \pm \sqrt{3\frac{1}{4} \pm 3\sqrt{-1}}$. Ein sechster Wurzelwerth endlich ist $= \infty$.

219) $x_1 = \infty$, $x_2 = 2\frac{1}{2}$; die 4 übrigen Wurzelwerthe sind: $2\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(5a + 13b + 17c \pm \sqrt{(a-3b-2c)^2 + 12ab}\right) : (a+b+c)}$.

220) $x_1 = \infty, \quad x_2 = -\frac{1}{2}(a+b),$

x_3 und $x_4 = -\frac{1}{2}(a+b) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}[(a+b-2c)^2 + (a-b)^2]}$.

221) Nach zweckmäßiger Vereinigung je zweier Glieder tritt der Factor $2x+a+b$ heraus. Setzt man $x^2+x(a+b) = y$, ferner $a(b+c)+c(b-c) = m$, $d(a+b-d) = n$, so wird $y = -\frac{1}{2}(m+n) \pm \frac{1}{3}\sqrt{m^2+n^2-mn-3ab(m-ab)}$, $x_1 = \infty$, $x_2 = -\frac{1}{2}(a+b)$, x_3 u. $x_4 = \frac{1}{2}\left(-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 + 4y}\right)$.

222) $x = \frac{1}{2}[a+b \pm \sqrt{(a-b)^2+4}].$

223) $x_1 = (m^2+n^2) : (mn), \quad x_2 = 0.$

224) $x_1 = -\frac{1}{2}a, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{2}{5}a, \quad x_4 = -\frac{2}{5}a.$

225) $x = \pm\frac{1}{3}(a+b)\sqrt{(8a-b) : (3b)}.$

226) Setzt man $\sqrt[3]{(1-x):(1+x)} = y$, so ist $y = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$; $x = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)$, $x_1 = 0{,}618034$, $x_2 = -1{,}618034$.

227) Setzt man $[-2a \pm \sqrt{2(a+1)}] : [a-1] = p$, so ist $x = \frac{1}{2}\left(p \pm \sqrt{p^2-4}\right)$.

228) $x = -1$. Ist $\frac{1}{2}[-4a-1 \pm \sqrt{20a+5}] : (a-1)$ gleich p, so erhält man für x noch die Werthe $\frac{1}{2}\left(p \pm \sqrt{p^2-4}\right)$.

229) $x_1 = a(1+n^2) : (1+2n), \quad x_2 = a(1-n)^2 : (1-2n).$

230) $x = \frac{a-b}{2} \pm \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c^2+c-1}{c^2-c-1}\sqrt{\frac{c-2}{c+2}}.$

231) $x_1 = 0, \quad x_2 = a^2+8a+8.$

§. 71.

Anwendungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit einer unbekannten Größe.

A. Reine quadratische Gleichungen.

1) Multiplicire ich die Anzahl der Thaler, welche ich in der Tasche habe, mit sich selbst, so erhalte ich $132\frac{1}{4}$. Wie viel Thaler habe ich bei mir?

2) Eine Zahl zu finden, deren fünfter Theil mit ihrem siebenten Theile multiplicirt, 4235 gibt.

3) Multiplicire ich das $3\frac{4}{7}$fache einer gedachten Zahl mit dem 8,68fachen derselben Zahl, so erhalte ich 5239. Wie heißt die gedachte Zahl?

4) Zwei Zahlen zu finden, die in dem Verhältnisse 11 : 13 stehen und die, mit einander multiplicirt, 7007 geben.

5) Jemand kauft eine gewisse Anzahl Pfirsichen und bezahlt für jedes Stück so viel Pfennige, als er Pfirsichen kauft. Wie viel Stück sind es, wenn er im Ganzen 1 Thlr. 22 Sgr. 1 Pfg. bezahlen muß?

6) Multiplicire ich den dritten Theil einer Zahl mit dem vierten Theile, und das Product mit dem fünften Theile derselben Zahl, so erhalte ich den sechsten Theil der Zahl. Wie heißt die Zahl?

7) Drei Zahlen zu finden, die in dem Verhältnisse $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ stehen und deren Quadratsumme 10309 ausmacht.

8) Ein rechtwinkeliges Feld, dessen Länge 3367 und dessen Breite 37 Meter beträgt, hat mit einem anderen, dessen Länge sich zur Breite wie 13 : 7 verhält, gleichen Inhalt. Wie groß ist des letzteren Länge und Breite?

9) α) Die Zahl a in zwei Factoren zu zerlegen, die in dem Verhältnisse $p : q$ zu einander stehen. β) Drei einander gleiche Zahlen zu finden, deren Summe gleich ihrem Producte.

10) Jemand kauft eine gewisse Anzahl Pfunde Salz, 4 mal so viel Zucker und 8 mal so viel Kaffee, und bezahlt für jedes Pfund der drei Waaren so viel Silbergroschen, als die Anzahl der Pfunde beträgt, welche er von der Waare nimmt; zusammen bezahlt er 10 Thlr. 24 Sgr. Wie viel Pfunde Kaffee hat er gekauft?

11) Ein rechtwinkeliger Garten hat zur Breite 37, zur Länge 259 Meter. Die Breite wird um eine gewisse Anzahl Meter vermehrt; und die Länge um das Siebenfache der Anzahl vermindert; hiedurch vermindert sich der Inhalt um 63 Quadratmeter. Wie groß ist die Anzahl der Meter, um welche die Breite vermehrt wird?

12) Vermehrt man eine Zahl um 3, und vermindert sie auch um 3, so ist die Summe der Quotienten, die man erhält, wenn man die größere Zahl durch die kleinere und wenn man die kleinere Zahl durch die größere dividirt, gleich $3\frac{1}{3}$. Wie heißt die Zahl?

13) Jemand erhält den Auftrag, Pomeranzen zu kaufen, und zwar 18 Stück, wenn jedes 18 Kreuzer kostet; sei aber jedes Stück theurer oder wohlfeiler, als 18 Kreuzer, so solle er eben so viel weniger oder mehr, als 18 Stück bringen, als jedes mehr oder weniger kostet, als 18 Kreuzer. Wenn nun im Ganzen $5\frac{1}{4}$ Gulden, südd. W. (à 60 Kreuzer), bezahlt werden, wie viel Pomeranzen wurden gekauft?

14) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 18 und $5\frac{1}{4}$ a und b gesetzt werden?

15) Mit einer Schnur von einer bestimmten Länge kann ich ein Quadrat umspannen; verkürze ich die Schnur um 8 Meter, so kann ich mit derselben ein anderes Quadrat umspannen, welches $\frac{16}{25}$ des ersten beträgt. Wie lang ist die Schnur, welche das erste Quadrat umspannt?

16) Die Zahl 20 in zwei Theile zu zerlegen, so daß sich die Quadrate der Theile wie $1 : 2\frac{1}{4}$ verhalten.

17) Wie groß ist die Seite eines Quadrats, dessen Inhalt um das $\frac{9}{16}$fache größer wird, wenn die Seite sich um 3 Met. verlängert?

18) Zwei Bäuerinnen bringen zusammen 260 Eier zu Markte und lösen beide gleich viel. „Hätte ich deine Eier gehabt," sagte die eine zur anderen, „und hätte sie zu meinem Preise verkauft, so hätte ich daraus gerade einen Thaler gelös't." „Das mag wohl sein," erwiderte die andere; „hätte ich aber deine Eier gehabt und sie zu meinem Preise verkauft, so hätte ich gar 1 Thlr. 10 Sgr. 10 Pfg. gelös't." Wie viel Eier brachte jede zu Markte?

19) Jemand kauft 133 Pfund einer Waare und verkauft sie mit einem gewissen Procente Nutzen. Für alles eingelös'te Geld kauft er sich von einer zweiten Waare, und verkauft dieselbe wieder mit demselben Nutzen, wie zum ersten Male. Hiedurch ist er im Stande, mit allem eingelös'ten Gelde von einer dritten Waare, welche 14 Procent im Preise höher steht, als die erste, 168 Pfund zu kaufen. Mit wie viel Procent Nutzen verkaufte er die Waare?

20) In einem quadratischen Weingarten, der ringsum von anderen Weingärten umgeben ist, sind die Stöcke rechtwinkelig so gesetzt, daß je zwei neben einander stehende 4 Fuß von einander entfernt sind (so daß auf jeden Stock 16 Quadratfuß Bodenfläche kommen). Derselbe soll so umgepflanzt werden, daß die Stöcke nur $3\frac{1}{2}$ Fuß von einander abstehen (daß also auf jeden Stock $12\frac{1}{4}$ Quadratfuß Oberfläche kommen). Wenn nun hierzu noch

8640 Stöcke nöthig sind, wie viel Fuß Länge hat jede Seite des Weingartens?*)

21) In einem rechtwinkeligen Dreiecke, dessen eine Kathete das $3\frac{3}{7}$fache der anderen beträgt, ist die Hypotenuse 1000 Meter lang. Wie groß ist jede der beiden Katheten?

22) Die Länge eines Rechteckes verhält sich zur Breite wie $15 : 8$; die Diagonale desselben ist 323 Meter. Wie groß ist die Länge und Breite?

23) Köln, Aachen und Düsseldorf liegen in einem nahezu rechtwinkeligen Dreiecke, so daß Köln an der Spitze des rechten Winkels sich befindet. Die Entfernungen von Aachen nach Düsseldorf und von Aachen nach Köln stehen in dem Verhältnisse $19 : 17$, und die Entfernung von Köln nach Düsseldorf beträgt $4\frac{1}{4}$ Meile. Wie viel Meilen beträgt die Entfernung zwischen Aachen und Köln, und die zwischen Aachen und Düsseldorf?

24) Zwei Wanderer gehen zu gleicher Zeit von demselben Orte aus, der eine nach Ost, der andere nach Nord. Der eine legt täglich $4\frac{1}{2}$, der andere täglich 6 Meilen zurück. Nach wie viel Tagen werden beide 30 Meilen von einander entfernt sein?

25) Zwei Körper bewegen sich gleichzeitig auf den Schenkeln eines rechten Winkels, von dem Scheitelpuncte aus; der eine legt jede Secunde c, der andere jede Secunde c' Meter zurück. Nach wie viel Secunden wird ihre Entfernung d Meter sein?

26) Zwei Körper, deren Entfernung d Met. beträgt, bewegen sich auf den Schenkeln eines rechten Winkels mit gleicher und gleichförmiger Geschwindigkeit nach dem Scheitelpuncte desselben. Der erste geht t Secunden früher ab als der zweite und trifft mit diesem in n Secunden nach seinem Abgange in dem Scheitelpuncte des rechten Winkels zusammen. Wie viel Met. legt jeder der Körper in einer Secunde zurück?

B. Gemischte quadratische Gleichungen.

27) Das Quadrat einer Zahl nebst dem 13fachen derselben Zahl gibt 264. Wie heißt die Zahl?

28) Der Inhalt eines Rechteckes, dessen eine Seite um 7 Met. länger ist, als die andere, beträgt 494 Quadratmet. Wie lang ist jede Seite?

29) Eine Linie von a Met. Länge in zwei Theile zu theilen, so daß das Rechteck aus den beiden Theilen einem gegebenen Recht-

*) Bei der Auflösung beachte man die Bemerkung zu 35) in §. 33 a.

ecke von n Quadratmeter Inhalt gleich wird. Wie heißen die Theile? In welchem Falle ist die Auflösung der Aufgabe unmöglich?

30) Auf der Verlängerung einer Linie von a Centimeter Länge einen Punct zu bestimmen, so daß das Rechteck aus der Entfernung dieses Punctes von den Endpuncten der Linie einem Rechtecke von n Quadratcentimeter Inhalt gleich wird.

31) Verlängert man die eine Seite eines Quadrats um 53 Centimeter, so beträgt der Inhalt des Rechteckes, welches zur Länge die vergrößerte Seite des Quadrats und zur Breite die Seite des Quadrats hat, 58590 Quadratcentimeter. Wie groß ist die Seite des Quadrats?

32) Vermehre ich den ersten Factor des Products $6 \cdot 52$ um eine gewisse Zahl, und vermindere ich den zweiten Factor um dieselbe Zahl, so erhalte ich zum Producte der beiden neuen Factoren das 35fache der Zahl, um welche der erste Factor vermehrt wurde. Wie heißt die Zahl?

33) Welche Zahl gibt, zu ihrem reciproken Werthe addirt, α) 2,9, β) m?

34) Welche Zahl gibt, von ihrem reciproken Werthe subtrahirt, α) 6,09? β) n?

35) Eine Linie von a Centimeter Länge in zwei ungleiche Theile zu theilen, so daß der eine Theil die mittlere Proportionale zwischen a und dem anderen Theile wird*).

36) Zwei Hausfluren, beide von quadratischer Form, die eine 7 Fuß breiter, als die andere, erfordern zusammen zum Belegen 1429 Platten, jede von der Größe eines Quadratfußes. Wie viel Platten erfordert eine jede derselben?

37) α) Ein Spiegelglas von 99 Centimeter Höhe und 66 Centim. Breite soll ringsum mit einem Rahmen von gleicher Breite umgeben werden, so daß der Rahmen mit dem Glase gleiche Oberfläche habe. Wie viel Centim. muß die Breite des Rahmens haben? β) Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für 99 und 66 die allgemeinen Zeichen a und b gesetzt werden und verlangt wird, daß die Oberfläche des Rahmens das p-fache der Oberfläche des Spiegels werden soll?

38) Zur Beschaffung einer Summe von 336 Thlrn. sollen die Mitglieder einer Gesellschaft gleichmäßig beitragen. Eine gleiche Summe mußte die Gesellschaft schon früher aufbringen. Weil aber damals 3 Mitglieder weniger da waren, so betrug der Beitrag eines jeden 2 Thlr. mehr als jetzt. Wie viele Mitglieder zählt die Gesellschaft?

*) Der goldene Schnitt.

39) Hinter einem Hause befindet sich ein umzäunter Garten von 70 Meter Länge und $52\frac{1}{2}$ Met. Breite. Der Hausherr wünscht denselben mit Blumen zu bepflanzen, die Hausfrau dagegen sähe ihn lieber in einen Grasplatz verwandelt. Um Beider Wünsche in gleichem Maße zu befriedigen, erhält der Gärtner den Auftrag, in der Mitte einen rechtwinkeligen, überall gleich weit von der Umzäunung entfernten Grasplatz abzustecken, der eben so viel an Inhalt habe, als der übrig bleibende Theil. Wie lang und wie breit wird derselbe werden?

40) In ein Rechteck, dessen Länge a Centimeter und dessen Breite b Centim. beträgt, soll ein anderes eingezeichnet werden, dessen Seite von denen des ersten gleich weit abstehen, und dessen Inhalt dem n-ten Theile des Inhalts des übrig bleibenden Theiles gleich ist. Um wie viel stehen die Seiten des zweiten Rechtecks von denen des ersten ab?

41) Ein Krämer kauft für 88 Thaler Kaffee und für eine gleiche Summe Zucker, und erhält von letzterem 90 Pfund mehr, als von ersterem. Er verkauft 29 Pfund Kaffee und 57 Pfund Zucker, und löſ't bei 20 Procent Nutzen im Ganzen 31 Thaler. Wie viel Pfund Kaffee und wie viel Pfund Zucker kaufte er?

42) α) 60 Pfund einer Waare kosten 4 Gulden weniger, als 60 Pfund einer anderen Waare. Nehme ich von jeder Waare für $8\frac{2}{5}$ Gulden, so erhalte ich von der ersten Waare 8 Pfund mehr, als von der zweiten. Was kostet das Pfund jeder Waare? β) Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für 60 Pfund, 4 Gulden, $8\frac{2}{5}$ Gulden und 8 Pfund die allgemeinen Zeichen n Pfund, a Gulden, b Gulden und q Pfund gesetzt werden?

43) α) Welche Zahl gibt, in n dividirt, dasselbe Resultat, als von n subtrahirt? β) Was ist das für eine zweizifferige Zahl, die durch das Product ihrer Ziffern dividirt, 3 zum Quotienten gibt und, um 18 vermehrt, ihre Ziffern in umgekehrter Ordnung erscheinen läßt?

44) Jemand kauft ein Pferd und bezahlt dafür eine gewisse Summe, verkauft es nachher wieder für 144 Thaler und gewinnt dann gerade so viel Procent, als ihm das Pferd in Thalern gekostet hat. Wie hoch kam ihm das Pferd zu stehen?

45) Ein Kaufmann kauft eine gewisse Anzahl Centner Waare für 216 Thaler; für dieselbe Summe kauft er ein anderes Mal von derselben Waare, erhält aber, weil unterdessen jeder Centner um einen Thaler im Preise gestiegen ist, drei Centner weniger als er früherhin erhalten hatte. Wie viel Centner kaufte er zum ersten Male?

46) Bei einem Wagen laufen, wenn dieser 360 Fuß vorwärts

geht, die vorderen Räder 6 mal öfter um, als die Hinterräder; würde man aber den Umfang eines jeden der 4 Räder um 3 Fuß vergrößern, so würden die Vorderräder auf diesen Strecken nur 4 Mal öfter umlaufen, als die Hinterräder. Wie groß ist die Peripherie eines Vorder-, wie groß die eines Hinterrades?

47) Welcher Quotient, dessen Dividend um $2\frac{1}{2}$ [n] kleiner als sein Divisor ist, gibt zu seinem reciproken Werthe addirt, $2\frac{1}{2}$ [n]?

48) A und B gaben zu einem Geschäfte zusammen 3400 Thaler her, und zwar A auf 12, B auf 16 Monate. Bei der Theilung erhielt A 2070 Thaler Capital sammt Gewinn, und eben so B 1920 Thaler. Wie groß war eines Jeden Einlage?

49) Ein Kaufmann hat für Waaren nach einiger Zeit 1760 Gulden zu zahlen, und zwar den einen Theil der Summe $1\frac{1}{4}$ Monat früher, als den anderen. Mit 19 Procent Disconto p. a. bezahlt er auf der Stelle für die eine Summe $465\frac{3}{10}$ Gulden, für die andere $1061\frac{19}{60}$ Gulden. Welche Summen waren zu bezahlen und nach welcher Zeit?

50) Ein Fabricant hat einem Capitalisten nach 7 Monaten 8800 und nach einem Jahre 5940 Thaler zurück zu zahlen. Nach wie viel Monaten kann er dem Capitalisten die ganze Summe von 14740 Thalern zurückbezahlen, wenn für die Summe, die er später bezahlt, die Zinsen zu 5 Procent für das Jahr vergütet werden und für die Summe, die er früher bezahlt, ein Rabatt zu 5 Procent auf Hundert für das Jahr abgezogen wird?

51) Jemand hat nach t Jahren das Capital a, und nach t' Jahren das Capital b zu zahlen. Nach wie viel Jahren kann er die ganze Summe $a+b$ auf ein Mal bezahlen, wenn für die Summe, die er später bezahlt, die Zinsen zu p Procent für das Jahr vergütet werden und für die Summe, die er früher bezahlt, ein Rabatt zu p Procent auf Hundert für das Jahr abgezogen wird?

52) Von einem rechtwinkeligen Dreieck ist die Summe der beiden Katheten gleich b, ferner die Summe der Hypotenuse und der Höhe auf sie gleich a. Man soll die drei Seiten und die Höhe bestimmen.

53) Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren gefüllt werden, durch die eine 2 Stunden früher, als durch die andere. Durch beide Röhren zusammen wird der Behälter in $1\frac{7}{8}$ Stunde gefüllt. In wie viel Stunden wird der Behälter voll werden, wenn die Röhren einzeln fließen?

54) Eine Mauer wird von zwei Maurern, von denen der eine $1\frac{1}{2}$ Tag später zu arbeiten anfängt, als der andere, in $5\frac{1}{2}$ Tag

ausgeführt. Um die Mauer allein zu vollenden, würde der erste 3 Tage weniger gebrauchen, als der zweite. In wie viel Tagen bringt jeder einzeln die Mauer zu Stande?

55) Die erste, zweite und dritte Classe einer Schule geben zu einem wohlthätigen Zwecke Beiträge, jeder Schüler in jeder einzelnen Classe zwar gleich viel, aber ein Schüler der ersten Classe so viel, als ein Schüler der zweiten und dritten zusammen. Die erste Classe, welche 6 Schüler weniger hat, als die zweite, brachte $11\frac{9}{10}$ Gulden auf, die zweite Classe, welche 5 Schüler weniger hat, als die dritte, brachte, $9\frac{1}{5}$ Gulden zusammen, die dritte Classe endlich lieferte $8\frac{2}{5}$ Gulden Beitrag. Wie läßt sich hiernach die Anzahl der Schüler jeder der drei Classen berechnen?

56) Die Diagonale eines Rechteckes, dessen Breite um 119 Met. kürzer ist, als die Länge, beträgt 221 Met. Wie groß ist die Länge, wie groß die Breite des Rechteckes?

57) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 119 und 221 die allgemeinen Zeichen d und h gesetzt werden?

58) α) Der Umfang eines rechtwinkeligen Feldes beträgt 1034 Met.; von einer Ecke zur gegenüberstehenden anderen sind 407 Met. Wie groß ist die Länge, wie groß die Breite des Feldes? β) Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für 1034 und 407 die allgemeinen Zeichen u und d gesetzt werden?

59) Zwei Bäuerinnen, A und B, gehen auf den Markt; die erste mit Eiern, die zweite mit dreimal so viel Aepfeln. Jede hat den Preis ihrer Waare dergestalt festgesetzt, daß, wenn A der B ihre Eier für die Aepfel gibt, A 10 Kreuzer verliert. Aus diesem Grunde behält A noch $\frac{2}{5}$ von den Eiern und läßt sich von B alle Aepfel geben, wobei aber B um 6 Kreuzer zu kurz kommt. B beschließt deßhalb, die Eier zu einem höheren Preise zu verkaufen, als A es bestimmt hatte, und indem sie sofort jedes Ei um drei Kreuzer verkauft, gewinnt sie noch den Preis von 12 Aepfeln hinzu. Wie viel Eier und Aepfel haben A und B gebracht und welche Preise waren dafür bestimmt?

60) Ein Courier geht von einem Orte A nach einem Orte B in 14 Stunden; zu gleicher Zeit geht von einem um $2\frac{1}{2}$ Meile mehr rückwärts gelegenen Orte ein zweiter Courier nach demselben Orte B, und sucht, um mit dem ersteren zu gleicher Zeit daselbst zusammenzutreffen, bei je 5 Meilen eine halbe Stunde an Zeit zu gewinnen. Wie weit ist A von B entfernt?

61) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 14, $2\frac{1}{2}$, 5, $\frac{1}{2}$ die allgemeinen Zeichen t, s, n, g gesetzt werden?

62) Von zwei Städten, A und B, welche 26 Meilen von einander entfernt sind, gehen zu gleicher Zeit zwei Eilwagen einander

entgegen und treffen sich nach $10\frac{1}{2}$ Stunde. Der eine gebraucht zu jeder Meile $\frac{1}{8}$ Stunde mehr, als der andere. Wie viel Zeit gebraucht jeder zu einer Meile?

63) Zwei Körper gehen zu gleicher Zeit von zwei Puncten, deren Entfernung e ist, einander entgegen und treffen sich nach t Secunden. Wenn nun der eine zu jeder Raumeinheit n Secunden mehr gebraucht, als der andere, in wie viel Secunden legt der letztere eine Raumeinheit zurück?

64) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn die beiden Körper, statt gegen einander zu laufen, sich hinter einander bewegen?

65) Zwei Boten gehen zu gleicher Zeit von zwei Städten, A und B, ab, der erste nach B, der andere nach A, und als sie einander begegnen, hat der erste Bote 12 Meilen mehr gemacht, als der zweite, und dabei findet sich, daß, wenn jeder dieselbe Geschwindigkeit, welche er vorhin hatte, beibehält, der erste Bote in 9 Tagen nach dem Zusammentreffen in der Stadt B, der zweite in 16 Tagen in der Stadt A eintreffen wird. Wie weit sind A und B von einander entfernt?

66) Zwei Boten gehen von den beiden Dörfern A und B einander entgegen, und zwar geht der eine zwei Stunden früher ab, als der andere. $2\frac{1}{12}$ Stunde nach Abgang des zweiten treffen beide zusammen und gelangen zu derselben Zeit in den Dörfern B und A an. In wie viel Stunden hat jeder der Boten den Weg abgemacht?

67) α) Zwei Körper laufen von zwei Puncten, A und B, deren wechselseitige Entfernung 910 Meter beträgt, mit gleichförmiger Geschwindigkeit gegen einander. Geht der erste 56 Secunden früher ab, als der zweite, so treffen sie auf der Mitte des Weges zusammen; gehen beide Körper aber gleichzeitig von A und B ab, so haben sie nach 20 Secunden eine Entfernung von 550 Met. In wie viel Secunden legt jeder der Körper den Weg von A nach B zurück? β) Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für 910, 56, 20, 550 die allgemeinen Zeichen d, n, t, l gesetzt werden?

68) Von zwei Puncten, deren wechselseitige Entfernung 1800 Met. beträgt, gehen zwei Körper einander entgegen, der erste 5 Secunden später, als der zweite, und treffen in der Mitte des Weges zusammen. Wenn nun der erste in jeder Secunde 6 Met. mehr abmacht, als der zweite, wie viel Met. legt jeder in einer Secunde zurück?

69) A und B gehen mit derselben Geschwindigkeit von einem Orte M nach einem Orte R. A reis't früher ab als B. Beim dritten Meilensteine vor R holt A eine vor ihm hertrabende Heerde von Gänsen ein, welche jede Stunde $\frac{1}{6}$ Meile zurücklegt; eine

halbe Stunde später stößt er auf eine Heerde Schafe, welche jede Stunde $\frac{1}{6}$ Meile zurücklegt. B erreicht die Gänse $2\frac{1}{2}$ Meile vor R, die Schafe 10 Minuten früher, als er den zweiten Meilenstein vor R erreicht. Es ist die Frage, mit welcher Geschwindigkeit die beiden Fußgänger A und B die Reise zurücklegen.

70) Auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen sich von der Spitze aus zwei Puncte mit gleichförmigen Geschwindigkeiten. Der eine, welcher 22 Secunden später abgeht, als der andere, legt in jeder Secunde 7 Met., der andere in jeder Secunde 8 Met. zurück. Nach wie viel Secunden werden beide Körper 275 Met. von einander entfernt sein?

71) Zwei Körper bewegen sich mit gleichförmigen Geschwindigkeiten auf zweien, sich unter einem rechten Winkel durchschneidenden, geraden Linien. Der eine legt jede Secunde c Met. zurück und erreicht den Durchschnittspunct beider Linien t Secunden später, als der andere; der andere macht jede Secunde c' Met. Wie viel Secunden nach der Zeit, wo der erste Körper den Durchschnittspunct erreicht, werden beide Körper die Entfernung d haben?

72) Zwei Körper bewegen sich mit gleichförmigen Geschwindigkeiten auf zweien, sich unter einem rechten Winkel durchschneidenden, geraden Linien nach dem Durchschnittspuncte hin. Ihre Entfernungen von dem Durchschnittspuncte sind a und b, und ihre bezüglichen Geschwindigkeiten (d. h. die Anzahl der Raumeinheiten, welche sie in der Zeiteinheit zurücklegen) sind c und c'. Wann werden beide Körper die Entfernung d haben? Welche Beziehung muß zwischen den Größen a, b, c, c' Statt finden, wenn die Auflösung der Aufgabe möglich sein soll?

73) Welche Beziehung muß zwischen den Größen a, b, c, c' der vorhergehenden Aufgabe Statt finden, wenn die beiden sich bewegenden Körper im Durchschnittspuncte der beiden Linien zusammentreffen sollen?

74) Zwei Körper bewegen sich gleichförmig mit den Geschwindigkeiten c und c' auf zweien, sich senkrecht durchschneidenden, geraden Linien nach dem Durchschnittspuncte, und sind von letzterem bezüglich a und b Raumeinheiten entfernt. Nach wie viel Zeiteinheiten werden sie die kürzeste Entfernung von einander haben?

75) Zwei Kreise, der eine mit einem Radius von 36 Centimeter, der andere mit einem Radius von 16 Centim., bewegen sich gleichförmig mit ihren Mittelpuncten auf den Schenkeln eines rechten Winkels nach dem Scheitelpuncte desselben. Der eine legt jede Secunde 2 Centim. zurück und ist 38 Centim. vom Scheitelpuncte entfernt, der zweite macht jede Secunde 18 Centim. ab und ist 210 Centim. vom Scheitelpuncte entfernt. Wann werden beide

Kreise einander berühren, und in welcher Entfernung befinden sich die Mittelpuncte, wenn dieselben einander am nächsten sind?

76) Der Mittelpunct eines festen Kreises, dessen Radius 1009 Centimeter beträgt, befindet sich auf einer horizontalen geraden Linie; in derselben Ebene, gerade über dem Mittelpuncte, in verticaler Richtung, in einer Entfernung von 50 Centim. befindet sich der Mittelpunct eines zweiten beweglichen Kreises, der einen Radius von 945 Centim. hat, und der nach verticaler Richtung abwärts, jede Secunde sich 180 Centim. bewegt, nach horizontaler Richtung aber, also parallel mit der festen Linie, jede Secunde 2000 Centim. fortschreitet. Nach wie viel Secunden werden beide Kreise einander berühren und nach wie viel Secunden einander am nächsten sein?

77) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 1009, 50, 945, 180 und 2000 die allgemeinen Zeichen ϱ, d, r, b und l gesetzt werden*)?

78) Aus jedem von zwei Beuteln, welche eine verschiedene Anzahl von Kugeln enthalten, nimmt A eine Handvoll. Jetzt ist die Anzahl der Kugeln in dem größern Beutel gleich dem Kubus der Zahl in dem kleinern und gleich dem Quadrate einer Handvoll. A nimmt dann aus dem größern so viele Kugeln heraus, daß die Anzahl der übrig bleibenden gleich dem Quadrate der Anzahl Kugeln in dem kleinern Beutel wird, schüttet jetzt den ganzen Inhalt des größern in den kleinern und findet, daß die ursprüngliche Anzahl des kleinern um 2 Drittel vermehrt ist. Man soll die Anzahl der Kugeln finden, welche Anfangs in jedem Beutel waren, und die Anzahl, welche in einer Handvoll herausgenommen wurden.

79) α) Aus einem mit 360 Liter Weingeist gefüllten Fasse nehme ich eine bestimmte Menge heraus und ersetze das Fehlende durch Wasser. Von der gehörig vermischten Flüssigkeit nehme ich zum zweiten Male eben so viel Liter heraus, wie zum ersten Male, und noch 84 Liter dazu, und fülle das Faß wieder mit Wasser. Nach der zweiten Mischung enthält die Flüssigkeit eben so viel Wasser, wie Weingeist. Wie viel Liter wurden zum ersten Male herausgenommen? β) Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für 360 und 84 die allgemeinen Zeichen a und b gesetzt werden und außerdem angenommen wird, daß in der letzten Flüssigkeit nur $\frac{1}{n}$ der anfänglichen Menge des Weingeistes enthalten ist?

80) Ein Capitalist verleiht sein Capital von 160000 Thalern zu einem gewissen Procente auf Zinsen. Am Ende des ersten Jahres nimmt er für seinen Unterhalt 2400 Thaler heraus und vermehrt

*) Diese Aufgabe findet ihre Anwendung in der Astronomie, bei Berechnung der Sonnen- und Mondfinsternisse.

mit dem Ueberschusse der Zinsen sein Capital. Zu demselben Zinsfuße verleiht er im zweiten Jahre sein Capital und sieht sich nach Abzug von abermals 2400 Thalern im Besitze von 168987 Thalern. Zu wie viel Procent hatte er sein Capital ausstehen?

81) α) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn das Capital mit k bezeichnet wird, jährlich b Thlr. herausgenommen werden und am Ende von 2 Jahren k' Thlr. übrig bleiben? β) Wie ändert sich das Resultat der Aufgabe, wenn jährlich b Thaler hinzugesetzt werden?

82) Jemand verkauft von einer Waare A eine gewisse Anzahl Centner, von der Waare B $2\frac{1}{3}$ Centner weniger, von der Waare C $2\frac{2}{3}$ Centner mehr als von der Waare A. Von der ersten Waare A lös't er nicht allein so viel, als von B und C zusammen, wenn er die Waaren sämmtlich verkauft, nämlich von der ersten 100, der zweiten 40 und der dritten 60 Thlr., sondern er lös't auch von der Waare A so viel, wie von B und C, wenn er von jeder nur 1 Centner verkauft. Es soll aus diesen Angaben berechnet werden, wie viel Centner er von jeder Waare besitzt.

83) Ein Landmann hat a Scheffel Weizen ausgesä't; im zweiten Jahre sä't er das Geärntete weniger b Scheffel und erhält bei gleicher Fruchtbarkeit das $c$fache seiner Aussaat nebst d Scheffeln. Wie viel hat er das erste Mal geärntet?

84) In welche Summanden muß man eine Zahl a zerlegen, so daß das Product aus denselben ein Größtes wird, d. h. größer, als das Product aus irgend zwei anderen Summanden, in welche sich die Zahl a zerlegen läßt?

85) In welche Factoren muß die Zahl a zerlegt werden, so daß die Summe derselben ein Minimum wird, d. h., daß die Summe derselben kleiner wird, als die Summe irgend zweier anderen Factoren, in welche die Zahl a zerlegt werden kann?

86) Welchen Inhalt hat das größte Rechteck, welches ich mit einer Schnur von 36 Meter Länge umspannen kann?

87) Welchen Inhalt hat das größte Rechteck, dessen Umfang n Meter beträgt?

88) Die Seite eines Würfels ist um $2\frac{1}{2}$ Fuß länger, als die eines anderen, der $2501\frac{3}{8}$ Kubikfuß weniger Inhalt hat. Wie groß ist jeder der Würfel?

89) Ein von allen Seiten geschlossener, innen hohler, aus $\frac{1}{6}$ Zoll dickem Eisenbleche verfertigter Würfel wird dadurch, daß er auf allen 6 Seiten mit $\frac{1}{10}$ Zoll dicken Bleiplatten belegt wird, noch einmal so schwer. Wenn man nun weiß, daß zwei gleich große, aus Eisen und Blei verfertigte, Würfel dem Gewichte nach

sich wie 7,788 : 11,445 verhalten, wie läßt sich hieraus die Höhe des aus Eisenblech verfertigten Würfels berechnen?

90) Wie läßt sich die Summe der unendlichen Reihe
$\sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{(2 \ldots)}}}$ bestimmen?

91) Wie groß ist die unendliche Reihe $\sqrt{(a + \sqrt{(a + \sqrt{(a \ldots)}}}$?

92) Es ist näherungsweise:

$\sqrt[3]{a^3 \pm b} = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 \pm \frac{1}{3}\frac{b}{a}}$, und zwar um so genauer, je kleiner b gegen a ist. Warum? Es soll mit Hülfe dieser Formel $\sqrt[3]{2}$ berechnet werden.

§. 72.

Auflösungen der Gleichungen in §. 71.

1) $11\frac{1}{2}$ Thaler. Der zweite Wurzelwerth $-11\frac{1}{2}$ ist zu verwerfen. 2) ± 385. 3) ± 13. 4) ± 77 und ± 91.
5) 25. 6) $\pm\sqrt{10} = \pm 3{,}16227766\ldots$ 7) 78, 52, 39.
8) Die Länge 481, die Breite 259 Meter.

9) α) $\pm\sqrt{\frac{ap}{q}}$ und $\pm\sqrt{\frac{aq}{p}}$; β) $\pm\sqrt{3}$ u. 0. 10) 16 Pfd.

11) 3. Der zweite Wurzelwerth -3 bezieht sich darauf, daß man ebenfalls 63 Quadratmet. weniger Inhalt erhält, wenn man die Breite um 3 Met. vermindert und die Länge um 21 Met. vermehrt. 12) 6 und -6. 13) Entweder 15 oder 21 Stück.

14) $a \mp \sqrt{a^2 - b}$. 15) 40 Meter. 16) 8 und 12.
17) 12 Meter. 18) Die eine 120, die andere 140.
19) Mit 20 Procent Nutzen. Der zweite Werth ist unbrauchbar und bezieht sich nicht auf 220 Procent Schaden.
20) 672 Fuß. 21) Die eine 960, die andere 280 Meter.
22) Die Länge 285, die Breite 152 Meter.
23) Die Entfernung zwischen Aachen und Köln 8,5147, zwischen Aachen und Düsseldorf 9,5165 Meilen.
24) Nach 4 Tagen. 25) Nach $d : \sqrt{c^2 + c'^2}$ Secunden.

26) $\frac{d}{\sqrt{n^2 + (n-t)^2}}$. Der negative Wurzelwerth hat keine Bedeutung; er kann sich nicht auf eine entgegengesetzte Richtung beziehen, da unmöglich die Körper im Scheitelpuncte zusammenstoßen können, wenn beide sich nach entgegengesetzten Richtungen bewegen.
27) 11 oder -24. 28) Die eine 26, die andere 19.
29) Der eine Theil ist $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - n}$, der andere $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - n}$.

30) Die Entfernung des Punctes von dem einen Endpuncte ist $-\frac{1}{2}a+\sqrt{n+\frac{1}{4}a^2}$, von dem anderen $\frac{1}{2}a+\sqrt{n+\frac{1}{4}a^2}$ Centimeter.

31) 217 Centim. 32) 24. 33) α) $\frac{2}{5}$ oder $2\frac{1}{2}$; β) $\frac{1}{2}m\pm\sqrt{\frac{1}{4}m^2-1}$.

34) α) $\frac{4}{25}$ oder $-6\frac{1}{4}$; β) $-\frac{1}{2}n\pm\sqrt{\frac{1}{4}n^2+1}$.

35) Der eine Theil ist $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\,a = 0{,}61803399\,a$, der andere $\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\,a = 0{,}38196601a$ Centimeter.

36) Die eine 529, die andere 900.

37) α) 16,5 Centim.; β) $\frac{1}{4}\left(\sqrt{(a+b)^2+4abp}-(a+b)\right)$.

38) 24 Mitglieder. 39) $52\frac{1}{2}$ Met. lang und 35 Met. breit.

40) Um $\frac{1}{4}(a+b)-\frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2-nab:(n+1)}$ Centimeter.

41) 240 Pfund Kaffee und 330 Pfund Zucker.

42) α) Das Pfund der einen $\frac{7}{30}$, das der anderen $\frac{3}{10}$ Gulden;

$$\beta)\ \frac{\sqrt{4abnq+a^2q^2}-aq}{2nq} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{4abnq+a^2q^2}+aq}{2nq}.$$

43) α) $\frac{1}{2}\left(n\pm\sqrt{n^2-4n}\right)$; β) 24. 44) 80 Thaler.

45) 27. 46) Ein Vorderrad 12 und ein Hinterrad 15 Fuß.

47) $\frac{2\frac{1}{2}}{5}$; allgemein ist der Dividend des Quotienten:

$$\pm\frac{n}{2}\left(\sqrt{\frac{n+2}{n-2}}-1\right), \text{ der Divisor } \pm\frac{n}{2}\left(\sqrt{\frac{n+2}{n-2}}+1\right).$$

48) Die des A 1800, die des B 1600 Thaler.

49) 528 Gulden nach $7\frac{1}{2}$ Monat und 1232 Gulden nach $8\frac{3}{4}$ Monaten. Die Gleichung gibt außerdem als Resultat für die Zeit, nach welcher die erstere Summe zu zahlen ist, $62\frac{119}{152}$ Monate. Aus diesem zweiten Resultate ergibt sich für die erstere Summe $78366\frac{6}{19}$, für die zweite Summe $-76606\frac{6}{19}$ Gulden; beide Werthe sind aber zu verwerfen.

50) Nach 9 Monaten. Der zweite Wurzelwerth der Gleichung gibt 412 Monate, ist aber nicht brauchbar.

51) Setzt man $[100(a+b)+ap(t+t')]:[2ap]=M$, ferner $[100(at+bt')+aptt']:[ap]=N$, so erhält man als Resultat $M\pm\sqrt{M^2-N}$ Jahre, wo M^2-N gleich:
$[10000(a+b)^2+200ap(a-b)\;(t'-t)+a^2p^2(t'-t)^2]:[4a^2p^2]$.
Was nun die Wurzelwerthe betrifft, so sind zwar beide positiv, jedoch ist in diesem Falle der größere positive Werth $M+\sqrt{M^2-N}$ zu verwerfen, wie sich aus folgender Betrachtung ergibt. Eine der Zeiten, t z. B., sei die kleinere; alsdann muß offenbar die gesuchte Zeit kleiner als t' und größer als t sein. Setzt man nun

in dem $\sqrt{M^2-N}$ gleichen Ausdrucke $(a-b)^2$ an die Stelle von $(a+b)^2$, so erhält man:

$$M+\sqrt{M^2-N} > \frac{100(a+b)+ap(t+t')}{2ap} + \frac{100(a-b)+ap(t'-t)}{2ap},$$

d. i.: $> (200a+2apt'):(2ap)$ oder $(100:p)+t' > t'$.

52) Die Höhe $= \sqrt{a^2-b^2}$, die Hypotenuse $= a - \sqrt{a^2-b^2}$, die beiden Katheten $= \frac{1}{2}b \mp \sqrt{a^2-\frac{3}{4}b^2-a\sqrt{a^2-b^2}}$.

53) Durch die eine in 3, durch die andere in 5 Stunden.

54) Der erste in 8, der zweite in 11 Tagen.

55) In der ersten Classe sind 17, in der zweiten 23 und in der dritten 28 Schüler.

56) Die Länge beträgt 204, die Breite 85 Meter.

57) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2h^2-d^2}+d\right)$, und $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2h^2-d^2}-d\right)$.

58) α) Die Länge 385, die Breite 132 Meter;

β) $\frac{1}{4}\left(u+\sqrt{8d^2-u^2}\right)$, und $\frac{1}{4}\left(u-\sqrt{8d^2-u^2}\right)$ Meter.

59) A 20 Eier, B 60 Aepfel. Ein Ei kostet 2 Kreuzer, ein Apfel $\frac{1}{2}$ Kreuzer.

60) $17\frac{1}{2}$ Meile. 61) $\sqrt{\frac{nts}{g}+\frac{1}{4}s^2}-\frac{1}{2}s$ Meilen.

62) Der eine $\frac{7}{8}$, der andere $\frac{3}{4}$ Stunde.

63) In $\frac{1}{2}\left[2t-ne+\sqrt{n^2e^2+4t^2}\right]:e$ Secunden; der zweite Wurzelwerth der Gleichung ist negativ und läßt keine Deutung zu.

64) In $\sqrt{\frac{1}{4}n[4t+ne]:e}-\frac{1}{2}n$ Secunden. Der zweite Wurzelwerth ist unbrauchbar.

65) 84 Meilen. 66) Der eine in 7, der andere in 5 Stunden.

67) α) Der eine in 182, der andere in 70 Secunden; β) nimmt man an, daß die beiden sich bewegenden Körper die Entfernung l vor ihrem Zusammenstoßen haben, so erhält man für die Zeit, welche der erste Körper gebraucht,

$$\left[td+n(d-l)+\sqrt{n^2(d-l)^2+t^2d^2}\right]:[d-l],$$

für die, welche der zweite gebraucht,

$$\left[td-n(d-l)+\sqrt{n^2(d-l)^2+t^2d^2}\right]:[d-l]$$

Secunden. Außer diesen beiden Werthen erhält man noch die Werthe

$$\left[td+n(d-l)-\sqrt{n^2(d-l)^2+t^2d^2}\right]:[d-l] \text{ und}$$

$$\left[td-n(d-l)-\sqrt{n^2(d-l)^2+t^2d^2}\right]:[d-l],$$

von denen der erste positiv, der zweite negativ ist, denen man aber keine Bedeutung geben kann. Nimmt man an, daß beide Körper die Entfernung l nach ihrem Zusammentreffen erlangen, so erhält man für die Zeit, welche der erste Körper gebraucht,

$$[td + n(d+l) + \sqrt{n^2(d+l)^2 + t^2d^2}] : [d+l]$$

Secunden, und für die, welche der zweite gebraucht,

$$[td - n(d+l) + \sqrt{n^2(d+l)^2 + t^2d^2}] : [d+l]$$

Secunden. Die beiden anderen Wurzelwerthe sind in diesem Falle eben so, wie in dem ersten, zu verwerfen. In dem 67ten Beispiele ist dieser zweite Fall nicht anwendbar, indem die Körper die Entfernung 550 Fuß offenbar vor ihrem Zusammenstoßen erreichen.

68) Der erste 36, der zweite 30 Meter.

69) Jeder der Reisenden legt in einer Stunde entweder $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{10}$ Meile zurück.

70) In 11 Secunden nach Abgang des ersten. Der zweite Wurzelwerth $-35\frac{104}{113}$ deutet an, daß die beiden Körper vor $35\frac{104}{113}$ Secunden die Entfernung von 275 Met. hatten, wenn man annimmt, daß dieselben mit den angegebenen Geschwindigkeiten sich bewegten, bevor sie die Spitze des rechten Winkels erreichten.

71) Die Auflösung der Gleichung gibt zwei Resultate, ein positives, $\frac{\sqrt{(d^2-t^2c'^2)(c^2+c'^2) + t^2c'^4} - tc'^2}{c^2+c'^2}$ und ein negatives, $-\frac{\sqrt{(d^2-t^2c'^2)(c^2+c'^2)+t^2c'^4} + tc'^2}{c^2+c'^2}$. Letzteres bezieht sich auf die vergangene Zeit und gibt an, daß die beiden Körper vor der genannten Zeit die Entfernung d hatten. Die Auflösung ist allgemein nur dann möglich, wenn $d > cc't : \sqrt{c^2+c'^2}$.

72) Nach $[ac + bc' \pm \sqrt{d^2(c^2+c'^2) - (ac'-bc)^2}] : [c^2+c'^2]$ Zeiteinheiten. Soll die Auflösung möglich sein, so muß $d^2(c^2+c'^2) \geqq (ac'-bc)^2$ sein, oder es darf $d\sqrt{(c^2+c'^2)}$ nicht kleiner sein, als die positive Differenz der Producte ac' und bc. Einer der beiden Wurzelwerthe muß immer positiv sein; der andere Werth wird positiv, Null oder negativ sein, je nachdem

$$(ac+bc')^2 \gtreqless d^2(c^2+c'^2) - (ac'-bc)^2 \text{ oder}$$

$$a^2c^2 + b^2c'^2 \gtreqless d^2(c^2+c'^2) - a^2c'^2 - b^2c^2, \text{ oder endlich}$$

$\sqrt{a^2+b^2} \gtreqless d$ ist. Es ist aber $\sqrt{a^2+b^2}$ offenbar die wechselseitige Entfernung der beiden Puncte zu der Zeit, wo sie die Entfernungen a und b von dem Durchschnittspuncte der beiden Linien haben. Ist also diese Entfernung größer als d, so ist der zweite Wurzelwerth positiv; ist diese Entfernung gleich d, so ist der zweite Wurzelwerth 0, wie sich auch aus der Natur der Sache ergibt; ist aber endlich diese Entfernung kleiner als d, so erhält man ein negatives Resultat, welches sich aber deuten läßt, wenn man nur annimmt, daß die beiden Puncte schon in Bewegung waren, ehe sie die Entfernungen a und b von dem Durchschnittspuncte der Linien erlangten; das negative Resultat bezieht sich in diesem Falle auf vergangene Zeit.

73) Es muß $d = 0$ sein. Gemäß der Determination der vorhergehenden Aufgabe $d^2(c^2+c'^2) \geqq (ac'-bc)^2$ muß für den besonderen Fall, daß $d = 0$ ist, $0 = (ac'-bc)^2$, also $ac' = bc$ sein, oder es müssen sich die Geschwindigkeiten der Puncte wie ihre Entfernungen vom Durchschnittspuncte verhalten, wie es sich übrigens auch aus der Natur der Aufgabe ergibt. Das Resultat der vorhergehenden Aufgabe ändert sich für diesen besonderen Fall in $b : c'$ oder $a : c$.

74) Da nach Nr. 72 $d\sqrt{c^2+c'^2}$ nicht kleiner sein darf, als die positive Differenz der beiden Producte ac' und bc, so ergibt sich für d als Minimum $\dfrac{bc-ac'}{\sqrt{c^2+c'^2}}$ oder $\dfrac{ac'-bc}{\sqrt{c^2+c'^2}}$, je nachdem $ac' \lesseqgtr bc$ ist. Ist $ac' = bc$, so erhält man als Minimum 0, wie in der vorhergehenden Aufgabe. Die Zeit, wo beide Körper das Minimum ihrer Entfernung erreichen, ist also $[ac+bc'] : [c^2+c'^2]$; diese Zeit ist offenbar der halben Summe der beiden Wurzelwerthe der 72ten Aufgabe gleich. Heißt also t die Zeit, wo die beiden Körper die Entfernung d zum ersten Male, und t' die Zeit, wo sie die Entfernung d zum zweiten Male haben, so ist $\frac{1}{2}(t+t')$ die Zeit, wo beide Körper das Minimum ihrer Entfernung erreichen. Das Resultat kann auch auf folgende Weise gefunden werden: Es sei d die Entfernung nach x Zeiteinheiten, alsdann ist: $(a-cx)^2 + (b-c'x)^2 = d^2$, daher

$$(c^2+c'^2)x^2 - (2ac+bc')x + a^2+b^2 = d^2, \text{ oder}$$
$$[x(c^2+c'^2) - (ac+bc')]^2 + (bc-ac')^2 = d^2(c^2+c'^2);$$

d wird also ein Minimum, wenn $x(c^2+c'^2) = ac+bc'$, oder $x = [ac+bc'] : [c^2+c'^2]$.

75) Zum ersten Male werden beide Kreise einander auswärts nach 9 Secunden, zum zweiten Male einwärts nach 11 Secunden, zum dritten Male einwärts nach $12\frac{21}{41}$ Secunden und zum vierten Male auswärts nach $14\frac{21}{41}$ Secunden berühren. Nach $11\frac{31}{41}$ Secunden werden beide Kreise einander am nächsten sein; der Abstand der Mittelpuncte beträgt um diese Zeit 14,577 Centimet.

76) Vor 0,9705... Secunde berührten beide Kreise einander zum ersten Male nach außen, und nach 0,9750... Secunde werden beide Kreise einander zum zweiten Male nach außen berühren. Vor 0,0178 Secunde berührten beide Kreise einander zum ersten

Male nach *innen*, und nach 0,0222 Secunde werden beide Kreise einander zum zweiten Male nach *innen* berühren. Nach 0,0022 Secunde werden die Kreise einander am nächsten sein.

77) Nach $[db \pm \sqrt{[(r+\varrho)^2-d^2]\,[l^2+b^2] + [d^2b^2]}] : [l^2+b^2]$ Secunden findet die Berührung der beiden Kreise nach *außen*, und nach $[db \pm \sqrt{[(r-\varrho)^2-d^2]\,[l^2+b^2] + [d^2b^2]}] : [l^2 + b^2]$ Secunden die Berührung derselben nach *innen* Statt. Ein *negativer* Werth hat in beiden Fällen Bedeutung und bezieht sich auf die *verflossene* Zeit. Zwei äußere und zwei *innere* Berührungen finden Statt, wenn $d^2b^2 > [d^2 - (r\pm\varrho)^2]\,[l^2+b^2]$ oder $(r\pm\varrho)^2\,(l^2 + b^2) > d^2l^2$, oder auch, wenn nur $(r - \varrho)^2\,(l^2+b^2) > d^2l^2$. *Zwei* äußere Berührungen und *eine* innere Berührung finden Statt, wenn $(r - \varrho)^2\,(l^2+b^2) = d^2l^2$. *Zwei* äußere Berührungen und *keine* innere Berührung finden Statt, wenn $(r + \varrho)^2\,(l^2+b^2) > d^2l^2$ und $(r-\varrho)^2\,(l^2+b^2) < d^2l^2$. Bloß *eine* äußere Berührung findet Statt, wenn $(r+\varrho)^2\,(l^2+b^2) = d^2l^2$. *Gar keine* Berührung findet endlich Statt, wenn $(r+\varrho)^2\,(l^2+b^2) < d^2l^2$. Einander am nächsten werden beide Kreise nach $bd : (l^2+b^2)$ Secunden sein.

78) Der größere Beutel enthielt 72, der kleinere 12 Kugeln; die Anzahl der mit einer Handvoll herausgenommenen Kugeln betrug 8.

79) α) 60 Liter. Einen zweiten Werth gibt die Gleichung, nämlich 576 Liter, der aber offenbar zu verwerfen ist;

β) $a - \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{a^2}{n} + \frac{1}{4}b^2}$. Der zweite Wurzelwerth ist größer, als a, und deßhalb nicht zu gebrauchen.

80) Zu $4\frac{1}{4}$ Procent.

81) α) Zu $100\,[b-2k + \sqrt{(k'+b)4k+b^2}] : [2k]$ Procent;

β) Zu $100\,[-b - 2k + \sqrt{(k'-b)4k+b^2}] : [2k]$ Proc. Die Auflösung ist nur dann möglich, wenn der Wurzelwerth *positiv* ist, wenn also $4kk'-4bk+b^2 > (b+2k)^2$, oder $4kk'-4bk > 4bk+4k^2$, oder $k'-k > 2b$ ist. Ist $k'-k = 2b$, so erhält man das Resultat 0, d. h., das Capital wurde ohne Zinsen verliehen.

82) Von A $9\frac{1}{3}$, von B 7, von C 12 Centner.

83) $\frac{1}{2}\left(ca + b + \sqrt{(ca - b)^2 + 4ad}\right)$. Der zweite Wurzelwerth $\frac{1}{2}\left(ca + b - \sqrt{(ca - b^2) + 4ad}\right)$ ist, auch wenn er positiv ist, unbrauchbar; denn zieht man, gemäß Bedingung der Aufgabe, von dem Ertrage nach dem ersten Jahre b Scheffel ab,

so erhält man für die Aussaat zu Anfange des zweiten Jahres $\frac{1}{2}\left((ca-b)-\sqrt{(ca-b)^2+4ad}\right)$, einen Ausdruck, der offenbar negativ ist und deßhalb verworfen werden muß.

84) Der eine Theil von a sei $\frac{1}{2}a+x$, der andere $\frac{1}{2}a-x$; das Product derselben $\frac{1}{4}a^2-x^2$ wird ein Maximum, wenn $x=0$ ist, wenn also beide Theile $\frac{1}{2}a$ sind.

85) In zwei gleiche Factoren $\sqrt{a}$ und $\sqrt{a}$. 86) 81 Quadratmeter.

87) $\frac{1}{16}n^2$. 88) Der eine $7414\frac{7}{8}$, der andere 4913 Kubikfuß.

89) Die Höhe beträgt 4,2598 Zoll. Der zweite aus der Gleichung sich ergebende Wurzelwerth 0,0502 Zoll ist nicht brauchbar.

90) 2. 91) $\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+a}$.

92) Setzt man $\sqrt[3]{a^3+b}=a+e$, so wird $b=3a^2e+3ae^2+e^3$, oder mit Vernachlässigung von e^3, wenn e sehr klein ist, $b=3a^2e+3ae^2$. Durch Auflösung der quadratischen Gleichung erhält man alsdann $\sqrt[3]{a^3+b}=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{3}\frac{b}{a}}$; eben so ist $\sqrt[3]{a^3-b}=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{3}\frac{b}{a}}$.

$\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{1+1}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{7}{12}}=1{,}26;\qquad 1{,}26^3=2{,}000376.$

$\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2{,}000376-0{,}000376}=0{,}63+\sqrt{0{,}3969-\frac{0{,}000376}{3{,}78}}=$
$0{,}63+\sqrt{0{,}3968005291005291}=1{,}259921049895.$

§. 73.

Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren unbekannten Größen.

1) $x^2+y^2=13,\quad x^2-y^2=-10{,}12.$

2) $(13x)^2+2y^2=177,\quad (2y)^2-13x^2=3.$

3) $xy=a,\quad \frac{x}{y}=b.$

4) $(x+y):(x-y)=193:111,\quad 19:\frac{1}{9}x=\frac{1}{8}y:41.$

5) $(x^2+y^2):(x^2-y^2)=25:7,\quad xy=48.$

6) $14x^2-122y^2=100,\quad x=3y.$

7) $x^2+xy=a,\quad xy+y^2=b.$

8) $\frac{a}{x^2}-by^2=(a-b)^3,\quad \frac{b}{x^2}+ay^2=(a^2-b^2)(a-b).$

9) $2(x+4)^2 - 5(y-7)^2 = 75,$
$7(x+4)^2 + 15(y-7)^2 = 1075.$

10) $\left(\frac{9}{x}\right)^2 = \left(\frac{25}{y}\right)^2 - 16,$
$\frac{9}{x^2} = \frac{25}{y^2}.$

11) $\left(\frac{24}{x}\right)^2 + (y-4)^2 = 65,$
$\left(\frac{12}{x}\right)^2 + 9 = (5y-20)^2.$

12) $(x-2)(y-3) = 1,$
$(x-2):(y-3) = 1.$

13)* $x = a\sqrt{x+y},$
$y = b\sqrt{x+y}.$

14) α) $x^2 + y\sqrt{xy} = 336,$
$y^2 + x\sqrt{xy} = 112$ **)

β) $x^2 - y\sqrt{xy} = 336,$
$y^2 - x\sqrt{xy} = 112$ **).

15) $x+y = s,$
$xy = p$ ***).

16) $x-y = d,$
$xy = p$ ***).

17) α) $x+y = 1{,}25,$
$xy = 0{,}375.$

β) $x+y = a,$
$xy = \frac{1}{4}(a^2-b^2).$

18) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5},$
$\frac{10}{xy} = \frac{1}{18}.$

19) $(7+x)(6+y) = 80,$
$x+y = 5.$

20) $(x^2+2y^2)(3x^2-4y^2) = 48,$
$2x^2 - y^2 = 7.$

21) $6 : x = y : 10,$
$x - y = 11.$

22) α) $\frac{1}{742xy} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{7326};$

β)* $x(a-x) = y(a-y),$
$xy = a^2.$

23) α) $x - y = \frac{a^2-b^2}{(a+1)(b+1)},$
$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{a^2-b^2}{(a-1)(b-1)};$

β) $x - \frac{1}{y} = a,$
$y - \frac{1}{x} = \frac{1}{a}.$

24)* $x+y = a,$
$x^2+y^2 = b$ †).

25)* $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 100.$
$x+y = 14.$

26) α) $xy = a,$
$x^2+y^2 = b$ ††).

β) $xy = 1,$
$x^2+y^2 = (a^2+b^2):(ab).$

27)* $\frac{x+y}{x-y} = \frac{a}{b},$
$x^2+y^2 = m^2.$

28)* $\frac{ax-by}{cx-dy} = \frac{m}{n},$
$x^2+y^2 = p^2.$

**) Man setze $\sqrt{x} = z\sqrt{y}$.
***) Trigonometrische Lösung s. Heis Trigonometrie. VIII. 110 und 111.
†) Man suche zuerst $x-y$ zu bestimmen; trigonometrische Lösung, s. Heis Trigonometrie VIII. 113.
††) Man suche sowohl $x+y$ als $x-y$ zu bestimmen. Trigonometrische Lösung, siehe Heis Trigonometrie VIII. 114.

29)* $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \frac{a}{b}(\sqrt{x}-\sqrt{y})$, $x^2-y^2 = m^2$.

30)* $x^2+xy+y^2 = 2a$, $x^2-xy+y^2 = 2b$.

31)* $x^3+y^3 = (a+b)(x-y)$, $x^2-xy+y^2 = a-b$.

32) $12xy = 1$, $x^2+y^2 = 25x^2y^2$.

33) $12 : x = y : 3$, $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 5$.

34) $xy+x = a$, $xy-y = b$.

35) $x^2-y^2+x+y = 0{,}375$, $x^2-y^2-(x-y) = 0{,}125$.

36) $(3x+4y)(7x-2y)+3x+4y = 44$, $(3x+4y)(7x-2y)-7x+2y = 30$.

37) α) $xy = a$, $x^2+y^2+xy = b$. β) $xy = a(x+y)$, $x^2y^2 = b^2(x^2+y^2)$.

38) $xy(a^2-b^2) = 1$, $(x^2+y^2+xy)(a^2-b^2)^2 = 3a^2+b^2$.

39) $x^2-y^2 = m$, $y(x+y) = n$.

40) α) $x+y = xy = x^2+y^2$; β)* $x-y = x:y = x^2-y^2$.

41) α) $x+y = xy = x^2-y^2$; β)* $x+y = x^2+y^2 = x^3+y^3$.

42) $ax+by = m$, $xy = n$.

43) α) $ax+by = p$, $cx^2+dy^2 = q$.

43) β) $\frac{1}{2}(x+y) = \sqrt{mx}+\sqrt{ny} = m+n$.
γ) $x+y = a$, $x^2+y^2 = bxy$.

44) α) $ax+by = m$, $cxy+dx+ey = n$. β) $ax+by = m$, $cx^2+dxy+ey^2+fx+gy = n$.

45) α) $x^2 = ax+by$, $y^2 = ay+bx$. β) $x(bc-xy) = y(xy-ac)$, $xy(ay+bx-xy) = abc(x+y-c)$.

46) $-x^2+6xy-9y^2+4x-12y = 4$, $x^2-2xy+3y^2-4x+5y = 53$.

47) $-5x^2+7y^2+20x+13y = 449$, $3(x-2)^2+4y^2-17y = 80$.

48) $x^2+y^2+2xy-2x(a+b)-2y(a+b) = -4ab$, $x^2+y^2-2xy+2x(a-b)-2y(a-b) = 4ab$.

49) $x^2+axy+by^2 = m$, $x^2+cxy+dy^2 = n$.

50) α) $x+y = a$, $x^3+y^3 = b$ **). β) $x-y = a$, $x^3-y^3 = b$.
γ) $ax+by = c$, $a^3x^3+na^2bx^2y+nab^2xy^2+b^3y^3 = d$.

**) Man suche zuerst xy zu bestimmen.

51)* $(x^3+y^3)+xy(x+y) = a,$
$(x^2+y^2)x^2y^2 = b.$

52) $(x^6+1)y = a(y^2+1)x^3,$
$(y^6+1)x = a(x^2+1)y^3.$

53) $(x^3+x^2y+xy^2+y^3)(x+y) = a,$
$(x^3-x^2y+xy^2-y^3)(x-y) = b.$

54) α) $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{3}{4},$
$2x^3+6xy^2 = \frac{9}{64}(x^2-y^2)^3.$

β)* $x^3+y^3 = a,$
$xy = b.$

55) α) $x+y = a,$
$x^4+y^4 = b.$

β) $x-y = d,$
$x^4+y^4 = m.$

56) α) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 12,$
$x^2 + y^2 = 3026.$

β)* $x+y+\sqrt{x+y} = 12,$
$x^3+y^3 = 189.$

57) α) $\sqrt{x}-\sqrt{y} = \sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y}),$
$(x+y)^2 = 2(x-y)^2.$

β)* $(x-y)^3 = \frac{4}{49}(x^3-y^3),$
$7x+1 = 12y.$

58) α) $(x^2+y^2)(x^3+y^3) = 455,$
$x+y = 5.$

β) $x+y = a,$
$(x^2+y^2)(x^3+y^3) = b.$

59) α) $x-y = m,$
$x^5-y^5 = n.$

β) $x+y = p,$
$x^5+y^5 = q.$

γ) $x+y = m,$
$x^5+ax^4y+bx^3y^2+bx^2y^3+axy^4+y^5 = n.$

60) $(x^4+2bx^2y+a^2y^2)(y^4+2bxy^2+a^2x^2) =$
$4(a^2-b^2)(b+c)^2x^2y^2,$
$x^3+y^3 = 2cxy.$

61) $x^3+y^3 = a,$
$xy(x+y) = b.$

62) $xy(x+y) = a,$
$x^5+y^5 = bxy.$

63) $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4 = a,$
$x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4 = b.$

64) α) $x^3+y^3 = (x+y)xy = axy.$

β) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{x+y}{x^2+y^2}, \quad \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{x-y}{y^2}.$

γ)* $(x:y)+(y:x) = axy = x+y.$

65) $(x^2-y^2)(x-y) = 16xy, \quad (x^4-y^4)(x^2-y^2) = 640x^2y^2.$

66) α) $\frac{17}{\sqrt{x+y}} - 7\frac{\sqrt{x+y}}{x} = 10\frac{x}{\sqrt{(x+y)^3}},$
$\sqrt{x-y} = y-1.$

β) $\frac{y}{x} - \frac{9\sqrt{x}}{y} - \frac{81}{xy} = (2y+9)\frac{\sqrt{x}}{y},$
$\frac{\sqrt{y}}{x} + 3\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{9}{x\sqrt{y}} + \sqrt{x}.$

67) $x^4+9y^4-6x^2y^2-x^2+3y^2 = 132,$
$y^4-10y^2x+25x^2 = 1.$

68) α) $ax+by = 2(x^2-y^2),$
$\dfrac{b}{x-y} - \dfrac{a}{x+y} = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ **);

β) $(a+x)^2-m^2 = y^2,$
$(b-y)^2+n^2 = x^2;$

γ)* $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{2}{3}} = 3x,$
$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{3}} = x.$

69) α) $a-b = \dfrac{x^2-y^2}{(x+1)(y+1)},$
$\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{x^2-y^2}{(x-1)(y-1)}$ ***);

β) $\dfrac{y}{2x} + \dfrac{2}{3}\dfrac{y-\sqrt{x-1}}{y^2-2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x},$
$\frac{1}{4}y^4 = y^2x-1.$

70) α) $\dfrac{(2x-1)(2y-1)+1}{x^2-y^2+2y-1} = a+b, \quad \dfrac{y^2-(x-1)^2}{x^2-(y-1)^2} = ab;$

β) $x = y+2, \quad \dfrac{x}{y} + \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2} = 6\frac{3}{4};$

γ)* $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = m, \quad x+y = n.$

71) α) $nx = py =$
$\frac{1}{2}\sqrt{(m+x+y)(m+x-y)(m-x+y)(-m+x+y)};$

β) $\dfrac{1+x}{1-y} + \dfrac{1+y}{1-x} = a,$
$\dfrac{1+x}{1+y} + \dfrac{1-y}{1-x} = b;$

γ) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x+y},$
$\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}.$

δ) $xy(5\frac{5}{6}-x-y) = x+y,$
$x^2y^2+x^2+y^2+1 = 8\frac{1}{3}xy.$

72)* α) $x+ay+(y^2:x) = m,$
$x^2+by^2+(y^4:x^2) = n;$

β)* $x+ay+(y^2:x) = m,$
$x^3+by^3+(y^6:x^3) = m^3.$

73)* α) $x(y+z) = m,$
$y(z+x) = n,$
$z(x+y) = o;$

β)* $(y+z)(x+y+z) = m,$
$(z+x)(x+y+z) = n,$
$(x+y)(x+y+z) = p.$

**) Anleitung. Man suche aus beiden Gleichungen a und b durch x und y auszudrücken und entwickele aus den für a und b gefundenen Werthen die x und y.

***) Vergleiche Beispiel 23 α) dieses Paragraphen.

74)* α) $y+z = -(c-a)^2xyz,$ $z+x = -(a-b)^2xyz,$ $x+y = -(b-c)^2xyz;$ β)* $(x+y)(x+z) = a,$ $(x+y)(y+z) = b,$ $(x+z)(y+z) = c.$

75)* α) $x-y = a(n-z),$ $x^2-y^2 = b(n^2-z^2),$ $x^3-y^3 = c(n^3-z^3);$ β)* $x+y = a,$ $z+x = b,$ $x^2 = y^2+z^2;$

γ)* $x+y+z = a,$ $yz = bx,$ $x^2 = y^2+z^2;$ δ)* $x+y+z = a,$ $x^2+y^2-z^2 = b,$ $x^3+y^3+z^3 = c.$

76)* α) $x+y = u+v,$ $xy = uv,$ $xv+yu = ayv,$ $x^2+y^2+u^2+v^2 = b^2;$

β)* $xu = uz = a,$ $x+y+u+z = b,$ $x^2+y^2+u^2+z^2 = c;$ γ)* $xy = uz = a,$ $x+y+u+z = b,$ $x^3+y^3+u^3+z^3 = c.$

77) $a^x \cdot a^y : a^5 = a^{13},$ $(a^x)^y = a^{77}.$ 78) $(a^{x+2})^{y-2} = (a^2)^{-4},$ $a^{3x-4} : a^{5y-3} = a^{x-7} : a^{3y-10}.$

79) $\sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[y]{a:b} = \left(\sqrt[15]{a^2}\right)^4 : \sqrt[y]{b},$ $\sqrt[y]{a^x} = a^2 : \sqrt[y]{a^7}.$ 80) $xy = a,$ $x^{\log y} = b.$

81)* $y^x = 32768,$ $\sqrt[x]{y} = 1{,}5.$

§. 74.

Auflösungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren unbekannten Größen in §. 73.

(Die mit gleichen Ziffern bezeichneten x und y sind zusammengehörende Werthe.)

1) $x = \pm 1{,}2,$ $y = \pm 3{,}4.$ (Vier Paar Werthe).

2) $x = \pm 1,$ $y = \pm 2.$ (Vier Paar Werthe.)

3) $x_1 = \sqrt{ab},$ $y_1 = \sqrt{a:b};$ $x_2 = -\sqrt{ab},$ $y_2 = -\sqrt{a:b}.$

4) $x_1 = 456,$ $y_1 = 123;$ $x_2 = -456,$ $y_2 = -123.$

5) $x_1 = 8,$ $y_1 = 6;$ $x_2 = -8,$ $y_2 = -6;$
$x_3 = 8\sqrt{-1},$ $y_3 = -6\sqrt{-1};$ $x_4 = -8\sqrt{-1},$ $y_4 = 6\sqrt{-1}.$

6) $x_1 = 15,$ $y_1 = 5;$ $x_2 = -15,$ $y_2 = -5.$

7) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{a}{\sqrt{a+b}},$ $\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{b}{\sqrt{a+b}}.$

8) $x = \pm \frac{1}{a-b},$ $y = \pm(a-b).$ (Vier Paar Werthe.)

9) $x_1 = 6,\quad y_1 = 12;\quad x_2 = -14,\quad y_2 = 12;$
$x_3 = 6,\quad y_3 = 2;\quad x_4 = -14,\quad y_4 = 2.$
10) $x = \pm 3,\quad y = \pm 5.$ (Vier Paar Werthe.)
11) $x_1 = 3,\quad y_1 = 5;\quad x_2 = -3,\quad y_2 = 5;$
$x_3 = 3,\quad y_3 = 3;\quad x_4 = -3,\quad y_4 = 3.$
12) $x_1 = 1,\quad y_1 = 2;\quad x_2 = 3,\quad y_2 = 4.$
13) $x_1 = 0,\quad y_1 = 0;\quad x_2 = a(a+b),\quad y_2 = b(a+b).$
14) α) $z = +3;\quad y_1 = 2,\quad x_1 = (+3)^2 \cdot 2 = 18;$
$y_2 = -2,\quad x_2 = (+3)^2 \cdot (-2) = -18$ **).
β) $z = -3,\quad y_1 = 2,\quad x_1 = (-3)^2 \cdot 2 = 18;$
$y_2 = -2,\quad x_2 = (-3)^2 \cdot (-2) = -18.$

15) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2},\quad \left.\begin{matrix} y_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}.$

16) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 + 4p}}{2},\quad \left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 + 4p}}{2}.$

17) α) $x_1 = 0{,}5,\quad y_1 = 0{,}75;\quad x_2 = 0{,}75,\quad y_2 = 0{,}5.$
β) x_1 u. $y_2 = \frac{1}{2}(a+b),\quad y_1$ u. $x_2 = \frac{1}{2}(a-b).$
18) $x_1 = 6,\quad y_1 = 30;\quad x_2 = 30,\quad y_2 = 6.$
19) $x_1 = 1,\quad y_1 = 4;\quad x_2 = 3,\quad y_2 = 2.$
20) $x_1 = \pm 2,\ y_1 = \pm 1.$ (Vier Paar Werthe.)

$\left.\begin{matrix} x_2 = \pm\sqrt{4{,}4} = \pm 2{,}0976177. \\ y_2 = \pm\sqrt{1{,}8} = \pm 1{,}3416408. \end{matrix}\right\}$ (Vier Paar Werthe.)

21) $x_1 = 15,\quad y_1 = 4;\quad x_2 = -4,\quad y_2 = -15.$
22) α) $x_1 = \frac{333}{106},\quad y_1 = \frac{22}{7};\quad x_2 = -\frac{22}{7},\quad y_2 = -\frac{333}{106}.$
β) $x_1 = y_2 = \frac{1}{2}a\left(1 + \sqrt{-3}\right),\ x_2 = y_1 = \frac{1}{2}a\left(1 - \sqrt{-3}\right).$
$x_3 = y_3 = a,\quad x_4 = y_4 = -a.$

23) α) $x_1 = \frac{a-1}{b+1},\ y_1 = \frac{b-1}{a+1};\ x_2 = -\frac{b-1}{a+1},\ y_2 = -\frac{a-1}{b+1}.$

β) x_1 u. $x_2 = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)a,\quad y_1$ u. $y_2 = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)\frac{1}{a}.$

24) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{a + \sqrt{2b - a^2}}{2},\quad \left.\begin{matrix} y_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{a - \sqrt{2b - a^2}}{2}.$

25) $x_1 = 12,\quad y_1 = 2,\quad x_2 = 10,\quad y_2 = 4.$

26) α) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}},\quad \left.\begin{matrix} y_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}};$

x_3 und $y_4 = -x,\qquad y_3$ und $x_4 = -y_1;$
β) x_1 und $y_2 = \pm\sqrt{a : b},\qquad y_1$ und $x_2 = \pm\sqrt{b : a}.$

**) Man substituire die in 14 α) und β) gefundenen Werthe den bezüglichen Gleichungen und sehe zu, ob den Gleichungen Genüge geleistet wird.

27) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{(a+b)m}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}, \quad \left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{(a-b)m}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}.$

28) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{(bn-dm)p}{\sqrt{(bn-dm)^2+(an-cm)^2}},$

$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{(an-cm)p}{\sqrt{(bn-dm)^2+(an-cm)^2}}.$

29) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{(a+b)^2m}{2\sqrt{2ab(a^2+b^2)}}, \quad \left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{(a-b)^2m}{2\sqrt{2ab(a^2+b^2)}}.$

30) $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3a-b} \pm \sqrt{3b-a}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3a-b} \mp \sqrt{3b-a}\right).$

31) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \pm a\sqrt{\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}}, \quad \left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \pm b\sqrt{\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}}.$

32) $x_1 = y_2 = -x_3 = -y_4 = \frac{1}{3},$
$x_2 = y_1 = -x_4 = -y_3 = \frac{1}{4}.$

33) x_1 und $y_2 = 9, \quad y_1$ u. $x_2 = 4,$
x_3 und $y_4 = 36, \quad x_4$ u. $y_3 = 1.$

34) x und $y = \frac{1}{2}[a-b+1 \pm \sqrt{(a-b+1)^2-4a}].$

35) $x_1 = x_2 = 0{,}125, \quad y_1 = 0{,}625, \quad y_2 = 0{,}375.$

36) $x_1 = 1, \; y_1 = 2, \quad x_2 = 1\frac{7}{17}, \quad y_2 = -\frac{1}{17}.$

37) α) x_1 und $y_2 = \frac{1}{2}[\sqrt{a+b} + \sqrt{b-3a}],$
y_1 und $x_2 = \frac{1}{2}[\sqrt{a+b} - \sqrt{b-3a}].$
x_3 und $y_4 = -\frac{1}{2}[\sqrt{a+b} + \sqrt{b-3a}],$
y_3 und $x_4 = -\frac{1}{2}[\sqrt{a+b} - \sqrt{b-3a}];$

β) $x_1 = 0, \quad y_1 = 0,$
x_2 und $x_3 = ab[b \pm \sqrt{2a^2-b^2}] : [b^2-a^2],$
y_2 und $y_3 = ab[b \mp \sqrt{2a^2-b^2}] : [b^2-a^2].$

38) x_1 und $y_2 = 1:(a-b), \quad y_1$ und $x_2 = 1:(a+b),$
x_3 und $y_4 = -1:(a+b), \quad y_3$ und $x_4 = -1:(a-b).$

39) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{m+n}{\sqrt{m+2n}}, \quad \left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \pm \frac{n}{\sqrt{m+2n}}.$

40) α) $x_1 = y_1 = 0; \quad x_2$ und $y_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3},$
x_3 u. $y_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}.$

β) $x_1 = y_1 = 0; \; x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-1}, \; y_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-1}.$

41) α) $x_1 = y_1 = 0; \quad x_2$ u. $x_3 = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5},$
y_2 u. $y_3 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}.$

β) $x_1 = y_1 = y_2 = x_3 = 0; \; x_2 = y_3 = x_4 = y_4 = 1.$

42) $\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\} = \frac{m \pm \sqrt{m^2-4abn}}{2a}$, $\left.\begin{matrix}y_1\\y_2\end{matrix}\right\} = \frac{m \mp \sqrt{m^2-4abn}}{2b}$.

43) α) $\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\} = \frac{adp \pm b\sqrt{(a^2d+b^2c)q-cdp^2}}{a^2d+b^2c}$,

$\left.\begin{matrix}y_1\\y_2\end{matrix}\right\} = \frac{bcp \mp a\sqrt{(a^2d+b^2c)q-cdp^2}}{a^2d+b^2c}$;

β) x_1 u. $x_2 = (\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2$; y_1 u. $y_2 = (\sqrt{n} \mp \sqrt{m})^2$;

γ) $x = \frac{1}{2}a\left(1 \pm \sqrt{\frac{b-2}{b+2}}\right)$; $y = \frac{1}{2}a\left(1 \mp \sqrt{\frac{b-2}{b+2}}\right)$.

44) α) $\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\} = \frac{bd+cm-ae \pm \sqrt{4ac(em-bn)+(bd+cm-ae)^2}}{2ac}$;

$\left.\begin{matrix}y_1\\y_2\end{matrix}\right\} = \frac{ae+cm-bd \mp \sqrt{4bc(dm-an)+(ae+cm-bd)^2}}{2bc}$ **);

β) Setzt man $2aem-bdm+abg-b^2f = M$, so erhält man:

$\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\} = \frac{M \pm \sqrt{4(b^2n-em^2-bgm)(a^2e-abd+b^2c)+M^2}}{2(a^2e-abd+b^2c)}$;

setzt man ferner $2bcm-adm+abf-a^2g = N$, so erhält man:

$\left.\begin{matrix}y_1\\y_2\end{matrix}\right\} = \frac{N \mp \sqrt{4(a^2n-cm^2-afm)(a^2e-abd+b^2c)+N^2}}{2(a^2e-abd+b^2c)}$ **).

45) α) $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = a+b$, $y_2 = a+b$,

x_3 und $x_4 = \frac{1}{2}[a-b \pm \sqrt{(a-b)(a+3b)}]$;

y_3 und $y_4 = \frac{1}{2}[a-b \mp \sqrt{(a-b)(a+3b)}]$.

β) x_1 und $x_2 = \pm\sqrt{ac}$, y_1 und $y_2 = \pm\sqrt{bc}$;

x_3 und $x_4 = \frac{1}{2}[a+c-b \pm \sqrt{(a+c-b)^2-4ac}$;

y_3 und $y_4 = \frac{1}{2}[b+c-a \pm \sqrt{(b+c-a)^2-4bc}]$.

46) $x_1 = 11$, $y_1 = 3$; $x_2 = -7\frac{1}{2}$, $y_2 = -3\frac{1}{6}$.

47) $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, y_1 und $y_2 = 7$; x_3 und $x_4 = 2 \pm 7{,}26022\sqrt{-1}$, y_3 und $y_4 = -5\frac{36}{41}$.

48) $x_1 = a+b$, $y_1 = a-b$; $x_2 = 0$, $y_2 = 2a$;

$x_3 = 2b$, $y_3 = 0$; $x_4 = b-a$, $y_4 = a+b$.

**) Die in den Werthen für x und y unter den Wurzelzeichen stehenden Ausdrücke in 44 α) und β) sind identisch.

49) Setzt man $y = xz$, so erhält man für z die beiden Werthe:
$$\frac{cm-an \pm \sqrt{(cm-an)^2 + 4(m-n)(bn-dm)}}{2(bn-dm)}, \text{ ferner:}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{m}{1+az+bz}}, \quad y = \pm z\sqrt{\frac{m}{1+az+bz}}.$$

50) α) $\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[a \pm \sqrt{\frac{4b-a^3}{3a}}\right], \quad \left.\begin{matrix}y_1\\y_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[a \mp \sqrt{\frac{4b-a^3}{3a}}\right].$

β) $\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}} + \frac{a}{2}, \quad \left.\begin{matrix}y_1\\y_2\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}} - \frac{a}{2}.$

γ) $abxy = [d-c^3] : [c(n-3)]$;
$$x = \frac{1}{2a}\left[c \pm \sqrt{\frac{c^3(n+1)-4d}{c(n-3)}}\right],$$
$$y = \frac{1}{2b}\left[c \mp \sqrt{\frac{c^3(n+1)-4d}{c(n-3)}}\right].$$

51) Setzt man $xy = z$, so ist $z = \left(b^2 \pm b\sqrt{a^2b+b^2}\right)^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{2}{3}}$,
$$\left.\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right\} \text{ und } \left.\begin{matrix}y_2\\x_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\,\frac{az^2 \pm \sqrt{a^2z^4 - 4b^2z}}{2b}.$$

52) Setzt man $x + \frac{1}{x} = z, \quad y + \frac{1}{y} = u$, so wird

z_1 und $z_2 = \pm\sqrt{3-a}$, u_1 und $u_2 = \mp\sqrt{3-a}$;

z_3 und $z_4 = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{3-2a} + \sqrt{3+2a}\right)$,

u_3 und $u_4 = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{3-2a} - \sqrt{3+2a}\right)$;

z_5 und $u_5 = 0$; $z_6 = u_6 = \pm\sqrt{3+a}$.

53) $x = \pm\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[4]{8(a+b)}}, \quad y = \pm\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{8(a+b)}}.$

54) α) $x_1 = 3$, $y_1 = -1$; $x_2 = 3$, $y_2 = 1$; $x_3 = y_3 = 0$;

β) $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2-4b^3}\right)}, \quad y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(a \mp \sqrt{a^2-4b^3}\right)}.$

55) α) $\left.\begin{matrix}x_1 \text{ und } x_3\\x_2 \text{ und } x_4\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[a \pm \sqrt{-3a^2 \mp \sqrt{8(a^4+b)}}\right]$;

$\left.\begin{matrix}y_1 \text{ und } y_3\\y_2 \text{ und } y_4\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[a \mp \sqrt{-3a^2 \mp \sqrt{8(a^4+b)}}\right].$

56) α) x_1 u. $y_2 = (+7)^2 = 49$, y_1 u. $x_2 = (+5)^2 = 25$;

x_3 u. $y_4 = \pm 176{,}77103\sqrt{-1} - 181$,

y_3 u. $x_4 = \mp 176{,}77103\sqrt{-1} - 181$.

β) x_1 u. $y_2 = 5,\quad y_1$ u. $x_2 = 4;$

x_3 u. $y_4 = 8 + \frac{1}{12}\sqrt{-2505},$

y_3 u. $x_4 = 8 - \frac{1}{12}\sqrt{-2505}.$

57) α) $x_1 = 0,\quad x_2 = (\sqrt{2}+1)^2,\quad x_3 = (\sqrt{2}-1)^2.$

$y_1 = 0,\quad y_2 = (\sqrt{2}+1)^4,\quad y_3 = (\sqrt{2}-1)^4.$

β) $x_1 = 5,\quad y_1 = 3;\quad x_2 = \frac{1}{13},\quad y_2 = \frac{5}{39};\quad x_3 = y_3 = \frac{1}{3}.$

58) α) $x_1 = 3,\quad y_1 = 2;\quad x_2 = 2,\quad y_2 = 3;$

x_3 und $x_4 = 2{,}5 \pm 2{,}9297326\sqrt{-1},$

y_3 und $y_4 = 2{,}5 \mp 2{,}9297326\sqrt{-1}.$

β) $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{6}\sqrt{-6a^2 \mp 3\sqrt{(a^5+24b):a}},$ (4 Werthe.)

$y = \frac{1}{2}a \mp \frac{1}{6}\sqrt{-6a^2 \mp 3\sqrt{(a^5+24b):a}}.$ (4 Werthe.)

59) α) $\left.\begin{matrix} x_1 \text{ und } x_2 \\ x_3 \text{ und } x_4 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[m \pm \sqrt{-m^2 \pm 2\sqrt{\frac{4n+m^5}{5m}}}\right],$

$\left.\begin{matrix} y_1 \text{ und } y_2 \\ y_3 \text{ und } y_4 \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}\left[m \mp \sqrt{-m^2 \pm 2\sqrt{\frac{4n+m^5}{5m}}}\right].$

β) Das Resultat ähnlich wie in α); γ) $xy =$

$$\frac{(5-a)m^3 \pm \sqrt{(5-a)^2m^6 + 4m(n-m^5)(b-3a+5)}}{2(b-3a+5)m}$$

60) $x_1 = y_1 = 0;\quad x_2 = y_3$ und $x_3 = y_2$ gleich

$[a^2-2bc-2b^2]^{\frac{1}{3}}[c \pm \sqrt{c^2-a^2+2bc+2b^2}]^{\frac{1}{3}}.$

61) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\right\}$ u. $\left.\begin{matrix} y_2 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \dfrac{\sqrt{a+3b} \pm \sqrt{a-b}}{2\sqrt[6]{a+3b}}.$

62) $\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \dfrac{a \pm \sqrt{2n-a^2}}{\sqrt[3]{4(a^2-n)}};\quad n = \sqrt{5a^2+4ab}.$

63) $\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \dfrac{\sqrt{n-2b} \pm \sqrt{2a-n}}{2\sqrt[4]{n-a-b}};\quad n = \sqrt{5a^2-6ab+5b^2}.$

64) α) $x_1 = y_1 = 0,\quad x_2 = y_2 = 0,\quad x_3 = y_3 = \frac{1}{2}a.$

β) $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0;$

x_3 u. $x_4 = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{2},\quad y_3 = y_4 = \frac{1}{4}.$

γ) $x_1 = y_1 = 0$; $\quad x_2 = y_3 = \frac{1}{a-1}\left(1 + \sqrt{\frac{2}{a} - 1}\right)$;

$x_3 = y_2 = \frac{1}{a-1}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{a} - 1}\right)$.

65) $x_1 = y_1 = 0$; $\quad x_2 = y_3 = 9$; $\quad x_3 = y_2 = 3$.

66) α) $x_1 = 7,\ y_1 = 3$; $\quad x_2 = \frac{7}{9},\ y_2 = \frac{1}{3}$; $\quad x_3 = 1,\ y_3 = 0$;

β) $x_1 = 0,\ y_1 = 9$; $\quad x_2 = 4,\ y_2 = 25$;

x_3 und $x_4 = \pm\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt{-1}$; $\quad y_3$ und $y_4 = -9$.

67) $x_1 = 1,\ y_1 = \pm 2$; $\quad x_2 = 14,\ y_2 = \pm\sqrt{69}$;

$x_3 = \frac{1}{2}[15 + \sqrt{193}],\quad y_3 = \pm\sqrt{38{,}5 + 2{,}5\sqrt{193}}$;

$x_4 = \frac{1}{2}[15 - \sqrt{193}],\quad y_4 = \pm\sqrt{38{,}5 - 2{,}5\sqrt{193}}$;

$x_5 = \frac{1}{2}[15 + 3\sqrt{29}],\quad y_5 = \pm\sqrt{36{,}5 + 7{,}5\sqrt{29}}$;

$x_6 = \frac{1}{2}[15 - 3\sqrt{29}],\quad y_6 = \pm\sqrt{36{,}5 - 7{,}5\sqrt{29}}$;

$x_7 = \frac{1}{2}[15 \pm \sqrt{285}],\quad y_7 = \pm\sqrt{38{,}5 \pm 2{,}5\sqrt{285}}$.

68) α) $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = b^2a : (b^2 - a^2)$, $y_2 = ba^2 : (b^2 - a^2)$.

β) Setzt man $a^2 - b^2 = p^2$,
$N^2 = (m+n+p)(m+n-p)(m-n+p)(m-n-p)$,
so ist: $x = [a(m^2 - n^2 - p^2) \pm bN] : (2p^2)$,
$y = [b(m^2 - n^2 + p^2) \pm aN] : (2p^2)$.

γ) $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = 4$, $y_2 = 8$; $x_3 = (-1)^2$, $y_3 = 8$.

69) α) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1 + ab \pm 2a}{1 - ab}$, $\quad \left.\begin{matrix} y_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1 + ab \pm 2b}{1 - ab}$.

β) $x_1 = 1\frac{1}{4}$, $y_1 = \pm 2$; $\quad x_2 = -2\frac{13}{36}$, $y_2 = \frac{2}{3}\sqrt{-1}$.

70) α) $x_1 = (a+1) : (ab+1)$, $\quad y_1 = a(b+1) : (ab+1)$;
$x_2 = (b+1) : (ab+1)$, $\quad y_2 = b(a+1) : (ab+1)$.

β) $x_1 = 4$, $y_1 = 2$; $\quad x_2 = -2$, $y_2 = -4$;

$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\frac{3}{11}} + 1$, $\quad \left.\begin{matrix} y_3 \\ y_4 \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\frac{3}{11}} - 1$.

γ) $x = \frac{1}{2}n\left[1 \pm \sqrt{(m + 6 \mp 2\sqrt{4m+9}) : m}\right]$,

$y = \frac{1}{2}n\left[1 \mp \sqrt{(m + 6 \mp 2\sqrt{4m+9}) : n}\right]$.

71) α) $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \pm p\frac{n\sqrt{(m+p)(m-p)} \pm p\sqrt{(m+n)(m-n)}}{(n+p)(n-p)}$,

$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \pm n\frac{n\sqrt{(m+p)(m-p)} \pm p\sqrt{(m+n)(m-n)}}{(n+p)(n-p)}$.

$\beta)\ y = \dfrac{a-b}{a+b},\quad x = \dfrac{ab \pm \sqrt{(a+b-ab)^2+4ab}}{a+b}.$

$\gamma)\ \left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}a(\sqrt{-1} \pm \sqrt{3}),\quad \left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}a(\sqrt{-1} \mp \sqrt{3}).$

$\delta)\ x_1 = x_5 = y_2 = y_6 = 2,\quad x_2 = x_8 = y_1 = y_7 = 3,$

$x_3 = x_7 = y_4 = y_8 = \frac{1}{2},\quad x_4 = x_6 = y_3 = y_5 = \frac{1}{3}.$

72) Setzt man sowohl in $\alpha)$ als $\beta)$ $x:y = z$, $z + \frac{1}{z} = u$, so wird

$\alpha)\ u = [an \pm m\sqrt{a^2n+(2-b)(m^2-n)}] : [m^2-n].$

$\beta)\ u = [3(1-a^2) \pm \sqrt{9(1-a^2)^2 + 12a(b-a^3)}] : [6a].$

73) $\alpha)$ Setzt man $M^2 = \frac{1}{2}(m+n-o)(m-n+o)(-m+n+o)$, so ist: $x = M:(-m+n+o)$, $y = M:(m-n+o)$, $z = M:(m+n-o)$.

$\beta)$ Setzt man $1 : \sqrt{2(a+b+c)} = N$, so ist:

$x = (-m+n-p)N,\quad y = (m-n+p)N,\quad z = (m+n-p)N.$

74) $\alpha)$ $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, x_2 u. $x_3 = \pm 1 : (c-a)$, y_2 u. $y_3 = \pm 1 : (a-b)$, z_2 u. $z_3 = \pm 1 : (b-c)$.

$\beta)\ x = (-bc+ca+ab) : (2\sqrt{abc}),\quad y = (bc-ca+ab):(2\sqrt{abc}),$

$z = (bc+ca-ab) : (2\sqrt{abc}).$

75) $\alpha)\ z = n\dfrac{a^4+2ac-3b^2 \pm 2\sqrt{3a(a^3-c)(ac-b^2)}}{a^4-4ac+3b^2},$

$x = \frac{1}{2}[(b+a^2)n + (b-a^2)z] : a,\quad y = \frac{1}{2}[(b-a^2)n + (b+a^2)z] : a.$

$\beta)\ x = a+b \pm \sqrt{ab},\quad y = \pm\sqrt{ab}-b,\quad z = \pm\sqrt{ab}-a.$

$\gamma)$ $x = \frac{1}{2}a^2 : (a+b)$, hieraus y und z.

$\delta)\ z = \dfrac{a^3-3ab+2c}{3(a^2-b)},\quad x+y = \dfrac{2(a^3-c)}{3(a^2-b)},$

$2xy = \dfrac{a^4+3b^2-4ac}{3(a^2-b)}$; hieraus erhält man x und y.

76) $\alpha)$ x_1 u. $x_2 = u_1$ u. $u_2 = \pm\frac{1}{2}ab\sqrt{2:(a^2+4)}$, y_1 u. $y_2 = v_1$ u. $v_2 = \pm b\sqrt{2:(a^2+4)}$;

$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix} x_5 \\ x_6 \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} v_3 \\ v_4 \end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix} v_5 \\ v_6 \end{matrix}\right\} = \pm\frac{1}{2}b\sqrt{1 \pm \frac{1}{a}\sqrt{a^2-4}},$

$\left.\begin{matrix} y_3 \\ y_4 \end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix} y_5 \\ y_6 \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} u_3 \\ u_4 \end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix} u_5 \\ u_6 \end{matrix}\right\} = \pm\frac{1}{2}b\sqrt{1 \mp \frac{1}{a}\sqrt{a^2-4}}.$

$\beta)$ und $\gamma)$ Man setze $x+y = s$, $y+z = t$, u. s. w.

77) $x_1 = 7$, $y_1 = 11$; $x_2 = 11$, $y_2 = 7$.

78) $x_1 = 0,\ y_1 = -2;\quad x_2 = 2,\quad y_2 = 0.$
79) $x_1 = 3,\ y_1 = 5;\quad x_2 = -4\frac{3}{8},\ y_2 = 1\frac{5}{16}.$
80) $log\ x_1$ u. $log\ y_2 = \frac{1}{2}\left(log\ a + \sqrt{(log\ a)^2 - 4\ log\ b}\right),$
$log\ y_1$ u. $log\ x_2 = \frac{1}{2}\left(log\ a - \sqrt{(log\ a)^2 - 4\ log\ b}\right).$
81) $x_1 = 5{,}06386,\quad y_1 = 7{,}79294;$
$x_2 = -5{,}06386,\quad y_2 = 0{,}128321.$

§. 75.

Anwendungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren unbekannten Größen.

1) Zwei Zahlen zu finden, die, mit einander multiplicirt, 576 und durch einander dividirt, $2\frac{1}{4}$ geben.

2) Das Product zweier Zahlen ist p, der Quotient q. Wie heißen die Zahlen?

3) Eine bestimmte Anzahl Thaler, welche ich besitze, kann ich sowohl in Form eines Quadrates, als auch in Form zweier Quadrate auf den Tisch hinlegen; im ersten Falle kommen an jede Seite 29 Thaler zu liegen, im zweiten Falle erhält das zweite Quadrat im Ganzen 41 Thaler mehr, als das erste. Wie viel Thaler kommen an jede Seite der beiden kleineren Quadrate zu liegen?

4) Bilde ich ein rechtwinkeliges Dreieck mit zwei gegebenen Linien, so daß dieselben Katheten werden, so erhalte ich zur Hypotenuse 17 Centimeter. Construire ich aber ein rechtwinkeliges Dreieck, so daß die eine Linie Hypotenuse, die andere Kathete wird, so enthält das über der anderen Kathete beschriebene Quadrat 161 Quadratcentimeter. Wie groß sind beide Linien?

5) Zwei Zahlen stehen in dem Verhältnisse 11 : 13 und geben zur Summe der Quadrate 14210. Wie heißen die Zahlen?

6) Das Product aus Summe und Differenz zweier Zahlen ist a, das Verhältniß der Summe der Zahlen zu ihrer Differenz ist dem Verhältnisse $p : q$ gleich. Wie heißen die Zahlen?

7) Jemand hat zwei quadratische Plätze, die er mit Bäumen, und zwar in Form von Quadraten, bepflanzen will. Setzt er auf dem ersten Platze die Bäume 5, auf dem zweiten $4\frac{1}{2}$ Fuß von einander, und zwar so, daß auf jeden Baum des ersten Platzes 25 Quadratfuß, auf jeden des zweiten Platzes $20\frac{1}{4}$ Quadratfuß Bodenfläche kommen, so gebraucht er zusammen 11113 Stück; setzt er aber auf dem ersten Platze die Bäume $5\frac{1}{2}$, auf dem zweiten 6 Fuß von einander, so hat er im Ganzen 7816 Stück nöthig.

Wie viel Fuß Länge hat jeder der beiden mit Bäumen zu besetzenden Plätze? *)

8) Ich habe zwei Bretter, beide von gleicher Größe und von quadratischer Form; das eine bedecke ich mit $\frac{1}{6}$-Thalerstücken, das andere mit Silbergroschen, und gebrauche hierzu im Ganzen 808 Stück. Wenn nun eilf Silbergroschen, neben einander gelegt, dieselbe Länge geben, wie neun $\frac{1}{6}$-Thalerstücke, wie viel $\frac{1}{6}$-Thalerstücke liegen in jeder Reihe auf dem ersten, und wie viel Silbergroschen in jeder Reihe auf dem zweiten Brette?

9) Der Fußboden meines Zimmers hat 273, die eine Seitenwand 189, die andere, an diese anstoßende, 117 Quadratfuß Oberfläche. Wie lang, breit und hoch ist das Zimmer?

10) Länge, Breite und Höhe eines rechtwinkelig behauenen Steines stehen in dem Verhältnisse 5 : 3 : 1. Die ganze Oberfläche des Steines beträgt 15 Quadratfuß 94 Quadratzoll. Welches ist die Länge, Breite und Höhe des Steines?

11) Drei Zahlen anzugeben, so daß das Product der ersten und zweiten m, das Product der ersten und dritten n, das Product der zweiten und dritten p ist.

12) Vier Zahlen anzugeben, so daß die Producte je dreier von ihnen der Reihe nach m, n, p, q sind.

13) Die Diagonalen dreier an einander stoßenden Seitenflächen eines rechtwinkeligen Parallelepipeds sind a, b, c. Welchen Inhalt hat jede der drei Seitenflächen?

14) Die Summe zweier Zahlen ist 50, die Summe der Quadrate derselben 1258. Wie heißen die Zahlen?

15) Zwei kubische Gefäße haben zusammen 407 Kubikcentimeter Inhalt. Die Höhe des einen nebst der Höhe des anderen beträgt 11 Centimeter. Welchen Inhalt hat jedes der beiden Gefäße?

16) Zwei Zahlen zu finden, deren Summe, Product und Differenz der Quadrate einander gleich sind.

17) α) Vermehre ich den Zähler eines gewissen Bruches um 2, und vermindere den Nenner um 2, so erhalte ich den reciproken Werth des Bruches. Vermindere ich aber den Zähler des Bruches um 2, und vermehre ich den Nenner um 2, so erhalte ich zum Quotienten eine Zahl, die, um $1\frac{1}{15}$ vermehrt, dem reciproken Werthe des zu suchenden Bruches gleich wird. Wie heißt der Bruch? β) Wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für 2 und $1\frac{1}{15}$ die Zeichen a und b gesetzt werden?

18) Ich kenne eine zweizifferige Zahl von folgender Eigenschaft: Das Product aus den beiden Ziffern ist gerade die Hälfte der

---

*) Man vergleiche die Aufgaben 35) in §. 33 und 20) in §. 71.

Zahl. Kehre ich die Ziffern der Zahl um und subtrahire die gegebene Zahl von der neuen Zahl, so erhalte ich zum Reste das $1\frac{1}{2}$fache des Products der beiden gegebenen Ziffern der Zahl. Wie heißt die Zahl?

19) Die Zahl 102 in drei Summanden zu zerlegen, so daß das Product aus dem ersten und dritten Summanden dem 102fachen des zweiten Summanden gleich wird, und daß der dritte Summand das $1\frac{1}{2}$fache des ersten wird.

20) Eine Linie von *a* Centim. Länge in drei Stücke zu theilen, daß dieselben mit der ganzen Linie in Proportion stehen, und zwar so, daß die beiden äußeren Stücke die äußeren Glieder, und das mittlere Stück und die ganze Linie die mittleren Glieder bilden*), und daß außerdem das dritte Stück das *n*fache des ersten Stückes wird.

21) Kehre ich die Ziffern einer gegebenen zweizifferigen Zahl um, und multiplicire diese neue Zahl mit der ersten, so erhalte ich zum Producte 5092. Dividire ich aber die erste durch die zweite, so erhalte ich zum Quotienten 1 und zum Reste eine einzifferige Zahl **). Wie heißt die gegebene Zahl?

22) Vertausche ich die erste Stelle einer sechszifferigen Zahl mit der vierten, die zweite mit der fünften, die dritte mit der sechsten, so erhalte ich eine zweite sechszifferige Zahl, welche mit der ersteren multiplicirt, 122448734694 gibt, und welche, um die erstere vermindert, einen Rest hervorbringt, der dem 5fachen der ersten Zahl gleich kommt. Wie heißt die Zahl?

23) Die Diagonale eines Rechtecks beträgt 20,4 Meter. Vermehrt man die Länge des Rechtecks um 14,0 und vermindert die Breite um 2,4 Meter, so nimmt die Diagonale um 12,4 Meter zu. Wie groß sind Länge und Breite des Rechtecks?

24) Die Diagonale eines Rechtecks von bestimmter Länge und Breite beträgt *a* Meter. Vermehrt man die Länge um *n* die Breite um *p* Meter, so wird die Diagonale *b* Meter lang, Welche Länge und Breite hat das Rechteck?

25) Auf einer Strecke von 1732,5 Meter macht das Vorderrad eines Wagens 165 Umläufe mehr, als das Hinterrad. Vergrößert man den Umfang eines jeden Rades um 0,75 Meter, so wird auf derselben Strecke das Vorderrad 112 Umläufe mehr machen, als das Hinterrad. Welchen Umfang hat jedes der beiden Räder?

26) Ein Stück Tuch zieht sich bei der Benetzung mit Wasser in der Länge um den 8ten, in der Breite um den 16ten Theil zu-

*) Diese Theilung einer Linie ist in der Geometrie unter dem Namen „harmonische Theilung" bekannt.

**) Man sehe §. 28, Nr. 25 nach.

sammen. Wenn nun ein Stück Tuch dem Inhalte nach um 3,68 Quadrat-Meter, dem Umfange nach um 3,4 Meter kleiner wird, wie groß sind Länge und Breite des Tuches?

27) Eine vom Feinde belagerte Festung kann sich, der Berechnung nach, wegen Mangels an Nahrungsmitteln, nur noch 12 Tage halten. Ziehen 120 Mann ab, und erhält jeder täglich $\frac{2}{8}$ Pfund Brod weniger, so kann die Festung sich 16 Tage lang halten; eben so lange wird sie sich halten können, wenn 200 Mann abziehen und jeder täglich $\frac{1}{8}$ Pfund Brod weniger erhält. Wie stark ist die Besatzung der Festung, und wie viel Brod erhält jeder täglich?

28) Eine gewisse Anzahl Arbeiter schafft einen Haufen Steine in 8 Stunden von einem Orte zum anderen. Wären der Arbeiter 8 mehr und trüge jeder bei jedem Gange 5 Pfund weniger, so würde der Haufen in 7 Stunden fortgeschafft sein. Wären aber der Arbeiter 8 weniger, und trüge jeder bei jedem Gange 11 Pfund mehr, so würde der Haufe in 9 Stunden fortgeschafft sein. Wie viel Arbeiter sind zum Fortbringen der Steine beschäftigt, und wie viel trägt jeder von ihnen?

29) Die mehrjährigen Zinsen eines zu 8 Procent ausgeliehenen Capitals betragen mit dem Capitale 2574 Thaler. Die Zinsen eines um 975 Thaler kleineren Capitals betragen, wenn es $12\frac{1}{2}$ Jahre länger aussteht, als das erstere, zu 8 Procent mit dem Capitale ebenfalls 2574 Thaler. Wie groß ist das erste Capital, und wie lange hat dasselbe ausgestanden?

30) Zwei Knaben laufen von der Spitze des rechten Winkels eines dreieckigen Feldes aus in entgegengesetzten Richtungen längs den Seiten mit Geschwindigkeiten, die sich wie 13 : 11 verhalten. Sie begegnen zum ersten Male einander auf der Mitte der Gegenseite und zum zweiten Male 20 Meter vom Ausgangspuncte. Die Längen der drei Seiten des Feldes sollen berechnet werden.

31) Bacchus fand den Silen neben einem vollen Weinfasse schlafend; er benutzte die Gelegenheit und trank während zweier Drittel der Zeit, welche Silen gebraucht hätte, um das ganze Faß zu leeren. Nachdem Silen erwacht war, trank er den von Bacchus übrig gelassenen Rest. Hätten Beide zusammen getrunken, so würden sie um 2 Stunden früher mit diesem Fasse fertig geworden sein; Bacchus hätte aber alsdann nur halb so viel getrunken, als er vorher dem Silen übrig gelassen hatte. In welcher Zeit hätte jeder **allein** das Faß geleert?

32) Ein Behälter, der bis zur Hälfte mit Wasser gefüllt ist, kann durch eine von zwei Röhren in einer bestimmten Zeit gefüllt und durch die zweite in einer anderen Zeit ausgeleert werden. Läßt man beide Röhren 12 Stunden offen, so wird der Behälter

ausgeleert. Macht man beider Röhren Oeffnungen kleiner, so daß die eine zur Füllung, die andere zur Ausleerung eine Stunde mehr gebraucht, so wird bei gleichzeitiger Oeffnung beider Röhren der Behälter in $15\frac{3}{4}$ Stunden leer. In welcher Zeit wird der leere Behälter durch die erste Röhre allein gefüllt, in welcher Zeit der volle Behälter durch die zweite Röhre allein ausgeleert werden?

33) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 12 und $15\frac{3}{4}$ die allgemeinen Zeichen t und u gesetzt werden?

34) Ein rechtwinkeliges Feld hat zur Länge 119, zur Breite 19 Meter. Wie viel muß man der Breite zusetzen und wie viel von der Länge wegnehmen, wenn der Inhalt des Rechteckes derselbe bleiben und der Umfang um 24 Meter zunehmen soll?

35) Ein Rechteck, dessen eine Seite 23 und dessen andere Seite 18 Meter lang ist, soll durch zwei rechtwinkelig sich durchschneidende Linien in vier Rechtecke zerlegt werden, daß der Inhalt eines der Rechtecke 90 Quadratmeter enthält, und daß die eine Seite des demselben gegenüberstehenden Rechteckes, welche der Seite 23 parallel ist, zu der andern, in dem Verhältnisse 2 : 3 stehe. Wie groß sind die beiden Seiten des letzteren Rechteckes?

36) α) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 23, 18, 90, 2 und 3 die allgemeinen Zeichen m, n, p, r und s gesetzt werden? wie β), wenn statt des Inhaltes p des einen Rechteckes die Diagonale desselben $= d$ Meter bekannt ist?

37)* Auf dem Personenzuge einer Eisenbahn haben für die Strecke von dem Orte A nach dem Orte B in der zweiten Wagenclasse 64 Personen mehr als in der ersten, und in der dritten 166 Personen mehr als in der zweiten Wagenclasse Billete genommen. Der Ertrag für die gelösten Billete belief sich im Ganzen auf 223 Thlr. 6 Sgr., und zwar für die zweite Classe 54 Thlr. 12 Sgr. mehr, als für die erste und 13 Thlr. 18 Sgr. weniger, als für die dritte Classe. Jedes Billet auf der ersten Classe kostet so viel als ein Billet auf der zweiten und dritten Wagenclasse zusammen. Wie viel betrug hiernach 1) die Personenzahl auf jeder der drei Wagenclassen, 2) der Preis des Billetes in jeder Wagenclasse?

38) Zwei Puncte bewegen sich mit gleichförmigen Geschwindigkeiten auf den Schenkeln eines rechten Winkels nach dem Scheitelpuncte, von dem der eine um 50, der andere um $136\frac{1}{2}$ Meter entfernt ist. Nach 7 Secunden beträgt die gegenseitige Entfernung der beiden Puncte 85, und nach 9 Secunden 68 Meter. Welche Geschwindigkeiten haben beide Puncte?

39) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 50, $136\frac{1}{2}$, 7, 85, 9 und 68, a, b, t, d, u und e gesetzt werden?

40) Zwei Puncte bewegen sich mit gleichförmigen Geschwindigkeiten auf zweien, unter einem rechten Winkel sich durchschneidenden, geraden Linien nach dem Durchschnittspuncte hin, von welchem der eine a Meter, der andere b Meter entfernt ist. Nach t Secunden haben sie die Entfernung d Meter, und nach t' ($> t$) Secunden erlangen sie ihre kürzeste Entfernung. Welche Geschwindigkeiten haben beide Puncte?

41) Zwei Puncte bewegen sich mit gleichförmigen Geschwindigkeiten auf zweien, unter einem rechten Winkel sich durchschneidenden geraden Linien nach dem Durchschnittspuncte hin, von welchem der eine a, der andere b Meter entfernt ist. Nach t Secunden haben beide Körper die Entfernung d Met. und stehen am nächsten beisammen. Welche Geschwindigkeiten haben beide Körper*)?

42) Auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen sich von der Spitze aus zwei Puncte mit gleichförmigen Geschwindigkeiten, und zwar geht der erste n Secunden früher ab, als der zweite. In t Secunden nach Abgang des zweiten beträgt die wechselseitige Entfernung beider Puncte d, und in t' Secunden nach Abgang des zweiten d' Meter. Wie viel Meter legt jeder Punct in einer Secunde zurück?

43) Die Oberfläche eines rechtwinkeligen Parallelepipeds beträgt 576 Quadrat-Centimeter; die Länge desselben übertrifft die Summe der Breite und Höhe um 5 Centimeter, und die von einer Ecke zur gegenüberstehenden gezogene Linie mißt 13 Centimeter. Wie lassen sich aus diesen Angaben Länge, Breite und Höhe des Parallelepipeds berechnen?

44) Wie groß sind Länge, Breite und Höhe eines rechtwinkeligen Parallelepipeds, wenn die Diagonale a Centimeter, die Oberfläche b Quadrat-Centim. enthält, und wenn die Länge die Summe der Breite und Höhe um c Centimeter übertrifft?

45) Ein rechtwinkeliges Feld, dessen Länge 317 und dessen Breite 119 Meter beträgt, soll durch zwei, mit den Seiten parallel laufende, Linien in vier rechtwinkelige Theile getheilt werden, und zwar so, daß der in der einen Ecke liegende Theil 8370, der in der anderen, gegenüberstehenden, Ecke liegende Theil aber 10374 Quadratmeter enthält. Wie groß sind Länge und Breite eines jeden dieser beiden gegenüberstehenden Rechtecke?

46) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 317, 119, 8370 und 10374 a, b, m und n gesetzt werden?

47) In einer geometrischen Proportion ist die Summe der beiden inneren Glieder a, die Summe der beiden äußeren Glieder

*) Siehe §. 71, Aufgabe 74.

b, und die Summe der Quadrate aller Glieder *c*. Wie heißt die Proportion?

48) In einer geometrischen Proportion ist das Product der beiden äußeren oder inneren Glieder *a*, die Summe aller vier Glieder *b*, und die Summe ihrer Quadrate *c*. Wie heißt die Proportion?

49) In einer geometrischen Proportion ist das Product der beiden äußeren Glieder *a*, die Summe aller Glieder *b*, die Differenz zwischen der Quadratensumme der äußeren und der Quadratensumme der inneren Glieder *c*. Welches ist die Proportion?

50) Es werden drei Zahlen in stätiger Proportion gesucht, deren Summe *a*, und Summe der Quadrate *b* ist.

51) In einer stätigen Proportion ist die Summe aller drei Glieder *a*, und der Rest, welchen man erhält, wenn man von der Summe der Quadrate der äußeren Glieder das Quadrat des mittleren Gliedes abzieht, *b*. Wie heißt die Proportion?

52) In einer geometrischen Proportion ist die Summe der inneren Glieder *a*, die Summe der äußeren Glieder *b*, die Summe der Kuben aller vier Glieder *c*. Welches ist die Proportion?

53) In einer geometrischen Proportion ist die Summe aller Glieder *a*, die Summe ihrer Quadrate *b*, die Summe ihrer Kuben *c*. Welche Proportion ist es?

54) In einer geometrischen Proportion ist das Product der beiden äußeren Glieder *a*, die Summe aller Glieder *b*, und die Summe ihrer Kuben *c*. Wie heißt die Proportion?

55) Eine dreizifferige Zahl hat zur Quersumme 16. Kehrt man die Ziffern der Zahl um, so erhält man eine zweite Zahl, die um 69 • kleiner ist, als die erstere, wo • an der Stelle einer ausgelassenen Ziffer steht. Multiplicirt man die erste Zahl mit der zweiten, so erhält man zum Producte 1·5038*), wo • ebenfalls an der Stelle einer ausgelassenen Ziffer steht. Wie heißt die dreizifferige Zahl?

56) Von vier Zahlen, die in einer stätigen geometrischen Proportion stehen, $x : y = y : z = z : u$, ist die Summe der ersten und vierten Zahl *a*, der zweiten und dritten *b*. Wie heißen die Zahlen?

57) Die reellen Werthe für x und y zu finden, so daß $(x+y\sqrt{-1})^2 = a+b\sqrt{-1}$. Beispiel: $(x+y\sqrt{-1})^2 = -5+12\sqrt{-1}$.

---

*) Ueber die ausgelassenen Stellen vergleiche man §. 28, Nr. 25 und 26.

§. 76.

Auflösungen der Aufgaben in §. 75.

1) 36 und 16, oder auch -36 und -16.

2) $\sqrt{pq}$ und $\sqrt{\frac{p}{q}}$, oder auch $-\sqrt{pq}$ und $-\sqrt{\frac{p}{q}}$.

3) An der einen 21, an der anderen 20 Thlr. 4) 15 u. 8 Centim.

5) 77 und 91, oder auch -77 und -91.

6) $\pm\frac{1}{2}(p+q)\sqrt{a:(pq)}$ und $\pm\frac{1}{2}(p-q)\sqrt{a:(pq)}$.

7) Der eine 385, der andere 324 Fuß.

8) Auf dem ersten liegen in jeder Reihe 18 $\frac{1}{6}$-Thalerstücke, auf dem zweiten in jeder Reihe 22 Silbergroschen.

9) 21′ l., 13′ br. und 9′ hoch. 10) 35, 21 und 7 Zoll.

11) $\sqrt{mn:p}$, $\sqrt{mp:n}$ und $\sqrt{np:m}$.

12) Die Zahlen sind $\sqrt[3]{\frac{mnp}{q^2}}$, $\sqrt[3]{\frac{mnq}{p^2}}$, $\sqrt[3]{\frac{mpq}{n^2}}$ und $\sqrt[3]{\frac{npq}{m^2}}$.

13) Die Flächen, welche a, b und c zur Diagonale haben, sind bezüglich $\frac{1}{2}\sqrt{a^4-(b^2-c^2)^2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{b^4-(c^2-a^2)^2}$ u. $\frac{1}{2}\sqrt{c^4-(a^2-b^2)^2}$.

14) 23 und 27. 15) Das eine 343, das andere 64 Kubikcentim.

16) $\frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) = 2{,}618034$ und $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) = 1{,}618034$.

17) α) $\frac{x_1}{y_1} = \frac{5}{7}$, $\frac{x_2}{y_2} = \frac{-1{,}5}{0{,}5}$, $\frac{x_3}{y_3} = \frac{+2}{-2}$; $\frac{x_4}{y_4} = \frac{-2}{+2}$.

β) $\left[\frac{a}{b}\left(2-b\pm\sqrt{4-2b+b^2}\right)\right] : \left[\frac{a}{b}\left(2\pm\sqrt{4-2b+b^2}\right)\right]$.

18) 36; ein zweiter Wurzelwerth würde 00 geben.

19) Der erste Summand ist 34, der zweite 17, der dritte 51.

20) Das erste Stück ist $\frac{a}{2n}\left(\sqrt{n^2+6n+1}-n-1\right)$,

das zweite $\frac{a}{2n}\left(n^2+4n+1-(n+1)\sqrt{n^2+6n+1}\right)$,

das dritte $\frac{1}{2}a\left(\sqrt{n^2+6n+1}-n-1\right)$ Centimeter.

21) 76. 22) 142857. 23) 18 und 9,6 Meter.

24) Setzt man zur Abkürzung: $M = b^2-a^2-n^2-p^2$, so sind

$$[Mn\mp p\sqrt{4a^2(p^2+n^2)-M^2}] : [2(p^2+n^2)] \text{ und}$$

$[Mp\pm n\sqrt{4a^2(p^2+n^2)-M^2}] : [2(p^2+n^2)]$ Met. Länge und Breite.

25) Das Vorderrad 3 Meter, das Hinterrad 4,2 Meter.

26) Die Länge 12,8, die Breite 1,6 Meter.

27) Die Besatzung der Festung ist 1200 Mann stark, und jeder derselben erhält täglich $3\frac{3}{4}$ Pfund. Die beiden anderen aus der

Gleichung sich ergebenden Werthe, 80 für die Stärke der Besatzung und $\frac{1}{4}$ Pfund für die tägliche Ration, sind zu verwerfen.

28) Der Arbeiter sind 28, und jeder trägt 45 Pfund; oder 36, und jeder trägt 77 Pfund.

29) Das Capital beträgt 2145 Thaler und stand $2\frac{1}{2}$ Jahr.

30) 60, 80 u. 100 M. 31) Bacchus in 6, Silen in 3 Stunden.

32) Durch die erste Röhre allein wird der leere Behälter in 8 Stunden gefüllt, und durch die zweite Röhre allein der volle Behälter in 6 Stunden geleert.

33) $\dfrac{4t+1+\sqrt{16tu+1}}{4u-4t-2}$ und $\dfrac{4t-1+\sqrt{16tu+1}}{4u-4t+2}$. Die beiden anderen Werthe sind allezeit negativ und zu verwerfen.

34) Man muß von der Länge 102 Meter wegnehmen und zu der Breite 114 Meter hinzusetzen. 35) 8 Meter und 12 Meter.

36) α) $[sm+rn \pm \sqrt{(sm-rn)^2+4prs}] : [2s]$ und

$[sm+rn \pm \sqrt{(sm-rn)^2+4prs}] : [2r]$ Meter.

β) $r[mr+ns \pm \sqrt{(r^2+s^2)d^2-(ms-nr)^2}] : [r^2+s^2]$ und

$s[mr+ns \pm \sqrt{(r^2+s^2)d^2-(ms-nr)^2}] : [r^2+s^2]$ Met.

37) 1) 24, 88 und 254 Personen, 2) 1 Thlr. 12 Sgr., 1 Thlr., 12 Sgr. 38) 2 und $8\frac{1}{2}$, oder $3\frac{81455}{84529}$ und $7\frac{131987}{169058}$ Meter.

39) $$b\,\frac{a^2tN \pm \sqrt{(a^2+b^2)\,[d^2-a^2-(b-taN)^2]+a^4t^2N^2}}{t(a^2+b^2)}$$ und

$$a\,\frac{b^2tN \pm \sqrt{(a^2+b^2)\,[d^2-b^2-(a-tbN)^2]+b^4t^2N^2}}{t(a^2+b^2)}$$ Meter,

wenn $N = [(a^2+b^2)(u^2-t^2)-d^2u^2+e^2t^2] : [2abtu(u-t)]$.

40) Gemäß Lösung der 74ten Aufgabe in §. 71 liegt die Zeit, wo die Puncte die kürzeste Entfernung erlangen, in der Mitte zwischen den Zeiten, wo die Puncte zwei gleiche Entfernungen von einander haben. Haben also die Puncte nach t Secunden die Entfernung d, und nach t' Secunden die kürzeste Entfernung, so müssen sie offenbar nach $t'+(t'-t)$ oder nach $2t'-t$ Secunden ebenfalls die Entfernung d haben. Die Aufgabe wird demnach auf die 39-te zurückgeführt. Setzt man $t'(a^2+b^2-d^2) : [abt(2t'-t)] = N$, so erhält man für die Geschwindigkeiten der beiden Körper:

$$b\,\frac{a^2tN \pm \sqrt{(a^2+b^2)\,[d^2-a^2-(b-taN)^2]+a^4t^2N^2}}{t(a^2+b^2)},$$

und $$a\,\frac{b^2tN \pm \sqrt{(a^2+b^2)\,[d^2-b^2-(a-tbN)^2]+b^4t^2N^2}}{t(a^2+b^2)}$$ Meter.

41) $[a(a^2+b^2-d^2) - db\sqrt{a^2+b^2-d^2}] : [t(a^2+b^2)]$ und $[b(a^2+b^2-d^2) + da\sqrt{a^2+b^2-d^2}] : [t(a^2+b^2)]$ Meter.

42) Der erste $\sqrt{[d^2t'^2 - d'^2t^2] : [(t+n)^2t'^2 - (t'+n)^2t^2]}$, der zweite $\sqrt{[d'^2(t+n)^2 - d^2(t'+n)^2] : [t'^2(t+n)^2 - t^2(t'+n)^2]}$ Meter. Es muß zugleich $d(t'+n) \gtrless d'(t+n)$ und $t \gtrless t'$ sein.

43) 12, 4 und 3, oder 12, 3 und 4 Centimeter.

44) Die Länge beträgt: $\frac{1}{2}\left(c+\sqrt{a^2+b}\right)$, die Breite und Höhe oder umgekehrt: $\frac{1}{4}\left(\sqrt{a^2+b}-c\pm\sqrt{5a^2-3c^2-3b-2c\sqrt{a^2+b}}\right)$ C.

45) Die Länge des einen Rechteckes beträgt 135, die Breite 62; die Länge des anderen, gegenüberstehenden, 182, die Breite 57 Meter. Eben so genügen für das erste Rechteck $165\frac{19}{119}$ und $50\frac{215}{317}$; für das zweite Rechteck $151\frac{100}{119}$ und $68\frac{102}{317}$ Meter.

46) Die mit a parallel laufende Seite des einen Rechteckes ist:

$$[ab + m - n \pm \sqrt{(ab+m-n)^2 - 4abm}] : [2b],$$

die andere Seite desselben Rechteckes ist:

$$[ab + m - n \mp \sqrt{(ab+m-n)^2 - 4abm}] : [2a],$$

die mit a parallel laufende Seite des zweiten Rechteckes ist:

$$[ab + n - m \mp \sqrt{(ab+n-m)^2 - 4abn}] : [2b],$$

die andere Seite desselben Rechteckes ist:

$$[ab + n - m \pm \sqrt{(ab+n-m)^2 - 4abn}] : [2a].$$

47) $\frac{1}{2}\left(b\mp\sqrt{c-a^2}\right) : \frac{1}{2}\left(a\mp\sqrt{c-b^2}\right) =$

$$\frac{1}{2}\left(a\pm\sqrt{c-b^2}\right) : \frac{1}{2}\left(b\pm\sqrt{c-a^2}\right).$$

48) Setzt man $\pm\sqrt{8a+2c-b^2} = M$, so ist die gesuchte Proportion:

$$\frac{1}{4}\left(b+M-\sqrt{2c-8a+2bM}\right) : \frac{1}{4}\left(b-M-\sqrt{2c-8a-2bM}\right) =$$
$$\frac{1}{4}\left(b-M+\sqrt{2c-8a-2bM}\right) : \frac{1}{4}\left(b+M+\sqrt{2c-8a+2bM}\right).$$

49) $\frac{b^2+c-\sqrt{(b^2+c)^2-16ab^2}}{4b} : \frac{b^2-c-\sqrt{(b^2-c)^2-16ab^2}}{4b} =$

$$\frac{b^2-c+\sqrt{(b^2-c)^2-16ab^2}}{4b} : \frac{b^2+c+\sqrt{(b^2+c)^2-16ab^2}}{4b}.$$

50) Die Zahlen sind: $[a^2 + b - \sqrt{(3b-a^2)(3a^2-b)}] : [4a]$, $[a^2-b] : [2a]$ und $[a^2+b + \sqrt{(3b-a^2)(3a^2-b)}] : [4a]$.

51) Das mittlere Glied $m = \frac{1}{2}\left(-a\pm\sqrt{3a^2-2b}\right)$, die äußeren Glieder: $\frac{1}{2}\left(a-m\pm\sqrt{a^2-2am-3m^2}\right)$.

52) Heißt das Product der inneren oder äußeren Glieder p, so ist: $p = [a^3+b^3-c] : [3(a+b)]$, und die Proportion ist:

$$\tfrac{1}{2}\left(b-\sqrt{b^2-4p}\right) : \tfrac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2-4p}\right) =$$
$$\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-4p}\right) : \tfrac{1}{2}\left(b+\sqrt{b^2-4p}\right).$$

53) Heißt das Product der inneren oder äußeren Glieder p, und die Differenz zwischen der Summe der beiden äußeren und der Summe der beiden inneren d, so ist:

$$p = (a^3-3ab+2c) : (6a),\quad d = \pm\sqrt{(a^3-6ab+8c) : (3a)}$$

und die verlangte Proportion:

$$\tfrac{1}{4}\left(a+d-\sqrt{(a+d)^2-16p}\right) : \tfrac{1}{4}\left(a-d-\sqrt{(a-d)^2-16p}\right) =$$
$$\tfrac{1}{4}\left(a-d+\sqrt{(a-d)^2-16p}\right) : \tfrac{1}{4}\left(a+d+\sqrt{(a+d)^2-16p}\right).$$

54) Setzt man der Kürze wegen $\pm\sqrt{[4c+12ab-b^3]:[3b]} = M$, so ist die gesuchte Proportion:

$$\tfrac{1}{4}\left(b+M-\sqrt{(b+M)^2-16a}\right) : \tfrac{1}{4}\left(b-M-\sqrt{(b-M)^2-16a}\right) =$$
$$\tfrac{1}{4}\left(b-M+\sqrt{(b-M)^2-16a}\right) : \tfrac{1}{4}\left(b+M+\sqrt{(b+M)^2-16a}\right).$$

55) 871.

56) Setzt man $\sqrt{(a-b) : (a+3b)} = n$, so ist: $y = \tfrac{1}{2}b(1\pm n)$, $z = \tfrac{1}{2}b(1\mp n)$, $x = \tfrac{1}{8}(a+3b)(1\pm n)^3$, $u = \tfrac{1}{8}(a+3b)(1\mp n)^3$.

57) $x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}$, $y = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}$. Für den besonderen Fall ist $x = \pm 2$, $y = \pm 3$.

C. Diophantische Gleichungen.**)

§. 77.

Folgende Gleichungen sollen für ganze positive Werthe der unbekannten Größen aufgelös't werden*).**

1) $x+y = 10$. 2) $x+y+z = 6$. 3) $2x+3y = 25$.
4) $5x+7y+4 = 56$. 5) $y = 13+\tfrac{4}{13}(15-x)$.
6) $\dfrac{123x+567y}{5028} = 1$. 7) $\dfrac{2373}{13x+24y} = 1$.

**) Diophanti arithmeticorum libri VI. Diophantus lebte nach Abulfarag um 340 n. Chr. in Alexandrien.

***) Eine besondere Methode zur Auflösung der diophantischen Gleichungen besteht in der Anwendung der Kettenbrüche (s. §. 87) und der Kettenreihen (§. 83. 33). Die älteste Methode des Indiers Aryabhatta (um 350) besteht in dem Aufsuchen des gemeinschaftlichen Theilers der Coefficienten der beiden Unbekannten (vergl. Euler, Algebra, II. §. 227).

8) $3875x+2973y = 122362.$ 9) $3x+5y = 10.$

10) $5x+8y = 29.$ 11) $16x+4y = 1830.$

12) $17x+53y-123 = 441-19x+15y.$

13) $3x+5y+7z = 67.$

14) $x+3y+5z = 44,$
$3x+5y+7z = 68.$

15) $x+2y+3z = 50,$
$4x-5y-6z = -66.$

16) $x+y-4z = -19,$
$3x+7y-8z = 3.$

17) $x+y+2z = 17,$
$x+3y+4z = 28.$

18) $x-y = 17.$ 19) $8x = 11y.$

20) $91x = 221y.$ 21) $5x = 7y = 9z.$

22) $12x = 15y = 20z.$ 23) $391x = 493y = 667z.$

24) $3x = 5y+1.$ 25) $17x = 11y+86.$

26) $89x-144y = 1.$ 27) $11x-13y = 36y-3x-133.$

28) $\frac{73x+17}{19} = \frac{58y-56}{21}.$

29) $8x+3y-2z = 8,$
$7x+2y-z = 8.$

30) $2x+5y-7z = 22,$
$3x+4y-8z = 0.$

31) $x+2y+3z = 14,$
$2x+3y+4t = 24,$
$3x+4z+5t = 35.$

§. 78.

Auflösungen der Gleichungen in §. 77.

2)
$$\begin{array}{rl|l|l|l|l|l|l|l|l|l} x = & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ y = & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ z = & 4 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1. \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{rl|l|l|l} x = & 2 & 5 & 8 & 11 \\ y = & 7 & 5 & 3 & 1. \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{rl|l} x = & 2 & 9 \\ y = & 6 & 1. \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{rl|l|l|l|l} x = & 2 & 15 & 28 & 41 & 54 \\ y = & 17 & 13 & 9 & 5 & 1. \end{array}$$

6) $x = 4$, $y = 8.$

7)
$$\begin{array}{rl|l|l|l|l|l|l|l} x = & 9 & 33 & 57 & 81 & 105 & 129 & 153 & 177 \\ y = & 94 & 81 & 68 & 55 & 42 & 29 & 16 & 3. \end{array}$$

8) $x = 17$, $y = 19.$

9) Will man den Werth 0 mitrechnen, so genügen nur $x = 0$, $y = 2$. 10) $x = 1$, $y = 3$. 11) Auflösung unmöglich.

12) $x = 3$, $y = 12$.

13)
$$\begin{array}{rl|l|l|l|l|l|l|l|l|l|l|l|l|l} x = & 15 & 10 & 5 & 16 & 11 & 6 & 1 & 2 & 7 & 12 & 3 & 8 & 4 & 9 \\ y = & 3 & 6 & 9 & 1 & 4 & 7 & 10 & 8 & 5 & 2 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ z = & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl|l|l} x = & 5 & 1 & 2 \\ y = & 2 & 3 & 1 \\ z = & 6 & 7 & 8. \end{array}$$

14)
$$\begin{array}{rl|l|l} x = & 1 & 2 & 3 \\ y = & 6 & 4 & 2 \\ z = & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

15) $x = 7$, $y = 8$, $z = 9.$

16)

$x =$	1	6	11	16	21	26	31	36
$y =$	8	7	6	5	4	3	2	1
$z =$	7	8	9	10	11	12	13	14.

17) Aufl. unmöglich.

20) $x = 17$, $y = 7$, allgemein $x = 17n$, $y = 7n$. 24) $x = 2+5n$, $y = 1+3n$. 25) $x = 7+11n$, $y = 3+17n$. 26) $x = 89+144n$, $y = 55+89n$. 29) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. 30) $x = 8+12n$, $y = 18+5n$, $z = 12+7n$. 31) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $t = 4$.

§. 79.

Aufgaben als Anwendungen der diophantischen Gleichungen.

1) 71 in zwei Zahlen zu zerlegen, von denen die eine durch 5, die andere durch 8, ohne Rest, sich theilen läßt.

2) 131 in zwei Theile zu zerlegen, so daß der eine Theil, durch 7 dividirt, zum Reste 3, und der andere, durch 11 dividirt, zum Reste 5 läßt.

3) Eine bestimmte Anzahl Flaschen Mosel- und Rheinwein hat 10 Thlr. 14 Sgr. gekostet. Jede Flasche Moselwein kostet 12, jede Flasche Rheinwein 26 Sgr. Wie viel Flaschen von jeder Weinsorte waren es?

4) Jemand kauft 124 Stück Vieh, nämlich Schweine, Ziegen und Schafe, für 400 Thlr. Ein Schwein kostet $4\frac{1}{2}$, eine Ziege $3\frac{1}{8}$, und ein Schaf $1\frac{1}{4}$ Thlr. Wie viel Stück von jeder Gattung sind es?

5) Jemand will eine Schuld von 136 Gulden 3 Kreuzern südd. Währung in preußischen Thalern und französischen Kronenthalern bezahlen. Wie viel hat er von jeder Geldsorte nöthig, wenn der preußische Thaler zu 1 Gulden 45 Kreuzer, und der französische Kronenthaler zu 2 Gulden 42 Kreuzer gerechnet wird?

6) Einer kauft Pferde und Ochsen, zahlt für ein Pferd 47, für einen Ochsen aber 33 Thaler, und es findet sich, daß die Ochsen überhaupt 6 Thaler mehr gekostet haben, als die Pferde. Wie viel Ochsen und Pferde sind es gewesen?

7) Den Bruch $\frac{128}{117}$ in die Summe zweier Brüche zu verwandeln, deren Nenner 9 und 13 sind.

8) α) Die Peripherie eines Kreises kann man sowohl in 6, als auch in 5 gleiche Theile theilen. Wie bestimmt man mit Hülfe dieser Theile $\frac{1}{15}$ der Peripherie? β) Man ist im Stande, die Peripherie eines Kreises mit Hülfe einer elementar-geometrischen Construction in 3, 5 und in 17*) gleiche Theile zu theilen. Wie

*) Der berühmte Mathematiker Gauß zeigte zuerst in dem 1801 erschienenen Werke: „Disquisitiones arithmeticae" (VII., 353), daß ein reguläres

bestimmt man mit Hülfe dieser Theile $\frac{1}{51}$, $\frac{1}{85}$, und $\frac{1}{255}$ der Peripherie eines Kreises?

9) In einer dreizifferigen Zahl beträgt die Ziffer auf der äußersten Stelle links den achten Theil der aus den beiden anderen Ziffern gebildeten Zahl und die Ziffer auf der äußersten Stelle rechts ebenfalls den achten Theil der aus den beiden anderen Ziffern gebildeten Zahl. Wie heißt die dreizifferige Zahl?

10) Hätte ich 8 mal so viel Eier, als ich jetzt habe, spricht eine Bäuerin zur anderen, und du 7 mal so viel, als du jetzt hast, und gäbe ich dir alsdann ein Ei, so hätten wir beide gleich viel Eier. Wie viel Eier hatte jede der Bäuerinnen?

11) Jemand will einem Kaufmanne eine Schuld von 17 Thlrn. 8 Sgr. bezahlen. Der erste hat nur Friedrichsd'or zu 5 Thaler 20 Sgr., der Andere nur französische Kronenthaler zu 1 Thaler 17 Sgr. Wie viel Friedrichsd'or hat der Erste dem Zweiten zu bezahlen, und wie viel Kronenthaler hat der Zweite dem Ersten zurückzugeben?

12) Ein gezahntes Rad mit 17 Zähnen greift in die Zahnlücken eines anderen Rades von 13 Zähnen ein. Wie viel Umdrehungen wird jedes der Räder machen müssen, wenn jeder Zahn des ersten Rades wieder in dieselben Zahnlücken des zweiten Rades eingreifen soll?

13) Die Zähne eines gezahnten Rades, welches mit einem anderen in Verbindung steht, sind, der Ordnung nach, mit den Zahlen 1, 2, 3 bis 35 bezeichnet; eben so sind die Zahnlücken des zweiten Rades nach einander mit den Zahlen 1, 2, 3 bis 47 bezeichnet. Wenn nun der erste Zahn in die erste Zahnlücke eingreift, wie viel Umdrehungen wird jedes der Räder gemacht haben, wenn der erste Zahn des ersten Rades in die achte Zahnlücke des zweiten Rades eingreift?

14) Wenn ein gezahntes Rad 27, ein anderes 35 Zähne hat, wird alsdann nach und nach jeder Zahn des ersten Rades in jede Zahnlücke des zweiten Rades kommen? Wird dieses auch geschehen, wenn das erste Rad 28, das zweite 35 Zähne hat? Von welcher Art muß die Anzahl der Zähne bei zwei in einander greifenden Rädern sein, wenn alle Zähne des einen nach und nach in alle Zahnlücken des anderen Rades gelangen sollen?

Vieleck von siebenzehn Seiten, oder überhaupt von 2^n+1 Seiten bloß mit Hülfe einer geraden Linie und eines Kreises sich construiren lasse, wenn 2^n+1 eine Primzahl ist, also auch ein Vieleck von 257 Seiten. Ueber die Construction des reg. Siebenzehnecks sehe man Heis, Lehrbuch der Trigonometrie VIII., 132.

15) Welche Zahl gibt, durch 4 dividirt, 1, und durch 5 dividirt, 3 zum Reste?

16) Welche Zahl gibt, durch 37 dividirt, 11, und durch 10 dividirt, 0 zum Reste?

17) Welche Zahl läßt, durch 3, 5 und 7 dividirt, nach der Reihe die Reste 2, 2 und 5?

18) Welche Zahl läßt, durch 4, 10 und 24 dividirt, nach einander die Reste 1, 7 und 9?

19) Welche Zahl gibt, durch 3, 5, 7 und 11 dividirt, die Reste 1, 4, 1 und 9?

20) Ein Gärtner hat weniger als 1000 Stück Bäume. Pflanzt er dieselben in Reihen, so daß in jede Reihe 37 kommen, so bleiben ihm 8 Stück übrig; pflanzt er sie aber in Reihen, so daß in jede Reihe 43 kommen, so bleiben ihm 11 Stück übrig. Wie viel Bäume sind es?

21) Welche Zahl gibt, durch 28 dividirt, den Rest 20, durch 19 dividirt, den Rest 12, und durch 15 dividirt, den Rest 10?

22) Unter goldener Zahl eines Jahres versteht man den Rest, den die um 1 vermehrte Jahreszahl bei der Division durch 19 übrig läßt; unter Sonnenzirkel versteht man den Rest, den die um 9 vermehrte Jahreszahl bei der Division durch 28 übrig läßt; und unter Römer-Zinszahl den Rest, den die um 3 vermehrte Jahreszahl bei der Division durch 15 übrig läßt. Welches Jahr hat nun zur goldenen Zahl 14, zum Sonnenzirkel 26, und zur Römer-Zinszahl 10?

23) Welches Jahr nach oder vor Christi Geburt hat zur goldenen Zahl 19, zum Sonnenzirkel 28, zur Römer-Zinszahl 15*)?

24) Man soll 17 in drei ganze Zahlen zerlegen, die so beschaffen sind, daß, wenn man die erste mit 5, die zweite mit 4, und die dritte mit 7 multiplicirt, die Summe dieser drei Producte 80 sei. Wie heißen die Zahlen?

25) Eine Bäuerin hat Gänse, Hühner, Enten und Tauben, zusammen 76 Stück, verkauft eine Gans für 20, ein Huhn für $10\frac{1}{2}$, eine Ente für 7 und eine Taube für 4 Silbergroschen, und hat insgesammt 23 Thaler 17 Silbergroschen daraus gelös't. Wie viel Stück hat sie von jeder Gattung?

26) Ein Münzmeister hat dreierlei Silber: das erste ist 14-, das andere 11-, das dritte 9löthig. Nun braucht er 30 Mark 12löthiges

*) Diese Aufgabe findet ihre Anwendung in der Chronologie. Auf die Auflösung derselben stützt sich die Bestimmung des Anfanges der von Joseph Scaliger eingeführten Julianischen Periode, welche einen Zeitraum von $19 . 28 . 15 = 7980$ Jahren umfaßt. (Siehe Scaligeri Emendatio temporum I. V. p. 359.)

Silber. Wie viel ganze Mark muß er von jeder Sorte nehmen?

27) Dreißig Personen, Männer, Weiber und Kinder, verzehrten zusammen für 58 Thaler; ein Mann bezahlte 3 Thlr. 15 Sgr., eine Frau 1 Thlr. $11\frac{1}{4}$ Sgr., und ein Kind $7\frac{1}{2}$ Sgr. Wie viel Männer, Weiber und Kinder waren es?

28) α) Einer alten chinesischen Arithmetik, Kiu-tschang benannt,**) welche 2600 v. Chr. von Tsin-Kiu-Tschaou verfaßt sein soll, ist folgendes Beispiel entnommen: Es wird angezeigt, daß 3 Reißfässer, deren jedes gleichviel Reiß enthält, von Dieben zum Theil geleert worden sind. Man wußte nicht, wie viel Reiß im Ganzen sich darin befand, jedoch weniger als 1000 Ho (chinesisches kleines Maß), aber es ergab sich, daß in dem einen Fasse noch 1 Ho übrig gelassen war, in dem zweiten noch 11 Ho und in dem dritten noch 1 Ho. Als man der Diebe habhaft wurde, gestand A, daß er mit einer Schaufel mehrere Male aus dem ersten Fasse den Reiß in einen Sack gefüllt habe; B, daß er in der Eile einen hölzernen Schuh ergriffen und diesen mehrere Male aus dem zweiten Fasse voll geschüttet, und C, daß er eine Schüssel mehrere Male aus dem dritten Fasse gefüllt habe. Diese drei Gefäße, deren sich die Diebe bedient, sind zur Stelle, und es ergibt sich, das die Schaufel 11 Ho, der Holzschuh 17 Ho und die Schüssel 12 Ho enthalten. Wie viel Reiß befand sich in jedem Fasse? β)* In einer Rechnung steht der Posten: 1 . 3 Centner à 5 Thlr. 1 . Sgr. = . 68 Thlr. 24 Sgr. Da, wo . steht, ist die Ziffer undeutlich und verwischt. Wie heißen die verwischten Ziffern?

29) α) Zwei ganze Zahlen zu suchen, deren Summe und Product zusammen 191 ausmachen; β) Zwei ganze Zahlen anzugeben, deren Product das 6fache ihrer Summe ist.

30) Zwei ganze positive Zahlen zu suchen, α) deren Differenz, β) deren Summe ihrem Quotienten gleich ist.

31) Zwei ganze Zahlen zu suchen, deren Summe dem 24fachen der Summe ihrer reciproken Werthe gleich ist.

32) Einen Bruch von der Beschaffenheit zu suchen, daß, wenn man entweder 1 zu demselben addirt oder auch 1 davon subtrahirt, in beiden Fällen ein Quadrat herauskommt.

33) Einen Bruch x von solcher Beschaffenheit zu suchen, daß, wenn man denselben entweder zu 1 addirt oder von 1 subtrahirt, in beiden Fällen ein Quadrat herauskommt.

**) Man vergleiche Biernatzki über die Arithmetik der Chinesen in Crelle's Journal B. 52. S. 76.

34) Drei Zahlen anzugeben, so daß die Summe der Quadrate der beiden ersten dem Quadrate der dritten Zahl gleich ist.

Bemerkung. Eine der beiden ersten ganzen Zahlen ist immer durch 3, und eine der drei Zahlen durch 5 theilbar. Warum?

35) Die Summe zweier Quadrate a^2+b^2 in die Summe zweier anderen Quadrate zu verwandeln.

36) Wenn a und b Rationalzahlen sind, welche Rationalzahlen können für x und y angenommen werden, wenn die Formel $a^2x^2+by^2$ ein vollkommenes Quadrat sein soll?

37) Welchen Werth kann man der unbestimmten Größe x beilegen, wenn die Formel a^2x^2+b ein vollkommenes Quadrat werden soll?

38) Wenn a, b, c drei Rationalzahlen bedeuten, welche Rationalzahlen können für x und y angenommen werden, damit die Formel $a^2x^2+bxy+cy^2$ ein vollkommenes Quadrat werde?

39) Welchen Werth kann man für x annehmen, wenn a^2x^2+bx+c ein vollkommenes Quadrat werden soll?

40) Welchen Werth kann man der x geben, um die Formel ax^2+bx+c^2 zu einem vollkommenen Quadrate zu machen?

41) Zwei Zahlen zu finden von der Beschaffenheit: α) daß ihre Summe gleich der Summe ihrer Kubikzahlen; β) daß ihr Unterschied gleich dem Unterschiede ihrer Kubikzahlen werde.

42) Für welche ganze Zahlen ist: $x-y = z-u$, $x^2+y^2 = z^2$ $x^3+y^3+z^3 = u^3$?

43) Man soll zwei ganze Zahlen x und y finden, von der Beschaffenheit, daß das harmonische Mittel (s. §. 63, 201 β) zwischen ihnen einer gegebenen ganzen Zahl n gleich werde.

44) Für welche ganze oder gebrochene Zahlen ist $x^y = y^x$?

§. 80.

Auflösungen der Aufgaben in §. 79.

1) Die Theile sind 15 und 56, oder auch 55 und 16.

3) 24 Flaschen Mosel- und 1 Flasche Rheinwein, oder 11 Flaschen Mosel- und 7 Flaschen Rheinwein.

4) 17, 99, 8; oder 40, 60, 24; oder 63, 21, 40.

5) 33 preuß. Thaler und 29 franz. Kronenthaler. 6) Die Anzahl der Ochsen $13+47n$, die der Pferde $9+33n$. 7) $\frac{5}{9}$ und $\frac{7}{13}$.

8) α) Heißt die Peripherie des Kreises p, so ist $\frac{1}{15}p = \frac{2}{5}p-\frac{1}{3}p$, oder $\frac{1}{15}p = \frac{2}{3}p - \frac{3}{5}p$; β) Heißt die Peripherie des Kreises p, so ist: $\frac{1}{85}p = \frac{7}{17}p-\frac{2}{5}p$ oder auch $= \frac{3}{5}p-\frac{10}{17}p$; $\frac{1}{51}p = \frac{6}{17}p-\frac{1}{3}p$, oder auch $= \frac{2}{3}p-\frac{11}{17}p$; endlich ist $\frac{1}{255}p = \frac{8}{17}p+\frac{1}{3}p-\frac{4}{5}p$, oder $\frac{1}{3}p+\frac{1}{5}p-\frac{9}{17}p$, oder $\frac{8}{17}p+\frac{1}{5}p-\frac{2}{3}p$.

9) Entweder 324 oder 648. Wie läßt sich darthun, daß es außer 324 und 648 keine andere dreizifferige Zahl gibt, bei welcher die Ziffer auf der äußersten Stelle links der n-te Theil der aus den beiden anderen Ziffern gebildeten Zahl und zugleich die Ziffer auf der äußersten Stelle rechts der n-te Theil der aus den beiden anderen Ziffern gebildeten Zahl ist?

10) Die eine 2, 9, oder 16 überhaupt $2+7n$, die andere 2, 10 oder 18 überhaupt $2+8n$. 11) Der Schuldner gibt dem Kaufmanne 13 Friedrichsd'or und erhält 36 Kronenthaler zurück.

12) Nach 13 Umdrehungen des ersten, oder 17 Umdrehungen des zweiten Rades. 13) Das erste 19, das zweite 14. Ueberhaupt das erste $19+47n$, das zweite $14+35n$.

15) Jede Zahl von der Form $13+20n$. 16) Jede Zahl von der Form $270+370n$. 17) $47+105n$. 18) $57+120n$.

19) $64+1155n$. 20) 785. 21) $1000+7980n$. 22) 1837.

23) Das Jahr 3267 nach Christi Geburt, und das Jahr 4714 (chronologisch) vor Christi Geburt.

24) $x = 9, 6, 3$; $y = 7, 9, 11$; $z = 1, 2, 3$.

25) Heißt die Anzahl der Gänse x, die der Hühner y, die der Enten z, die der Tauben u, so erhält man $x = m$, $y = 2-2m+6n$, $z = 130-(m+13n)$, $u = 2m+7n-56$, wo m und n ganz positive Zahlen bedeuten und so zu nehmen sind, daß $m+13n < 130$, $2m+7n > 56$ und $m-3n < 1$. Die möglichen Werthe für n und m sind: 1) $n = 5$, $m = 11$ bis 15; 2) $n = 6$, $m = 8$ bis 18; 3) $n = 7$, $m = 4$ bis 21; 4) $n = 8$, $m = 1$ bis 24; 5) $n = 9$, $m = 1$ bis 12. Hieraus ergeben sich für x, y, z und u 70 von einander verschiedene Werthe: 1) 11 Gänse, 10 Hühner, 54 Enten, 1 Taube; 2) 12 Gänse, 8 Hühner, 53 Enten, 3 Tauben; 3) 13 Gänse, 6 Hühner, 52 Enten, 5 Tauben; 4) 14 Gänse, 4 Hühner, 51 Enten, 7 Tauben u. s. w.

28) α) 793 Ho; β) 173 Centn. à 5 Thlr. 18 Sgr. = 968 Thlr. 24 Sgr. 29) α) 1 und 95, 2 u. 63, 3 u. 47, 5 u. 31, 7 u. 23, 11 u. 15; β) 7 u. 42, 8 u. 24, 9 u. 18, 10 u. 15, 12 u. 12.

30) α) 4 und 2 sind die einzigen ganzen Zahlen; β) Auflösung nicht möglich. 31) 1 und 24, 2 und 12, 3 und 8, 4 und 6.

32) Der gesuchte Bruch ist von der Form $\frac{q^4+4}{4q^2}$, wo für q beliebige ganze oder gebrochene Zahlen gesetzt werden können. Beispiele sind: $\frac{5}{4}$, $\frac{65}{16}$, $\frac{85}{36}$ u. s. w.

33) Der gesuchte Bruch ist von der Form $4n\frac{n^2-1}{(n^2+1)^2}$, wo für

n beliebige ganze Zahlen oder unechte Brüche gesetzt werden können. Beispiele sind: $\frac{24}{25}$, $\frac{120}{169}$ u. s. w.

34) 3, 4 und 5; 5, 12 und 13; 8, 15 und 17; 7, 24 und 25; 20, 21 und 29; 9, 40 und 41; 12, 35 und 37; 11, 60 und 61; 28, 45 und 53; 33, 56 und 65 u. s. w. Bezeichnen p und q zwei willkürliche ganze Zahlen, so sind die verlangten Zahlen: p^2-q^2, $2pq$ und p^2+q^2, oder $n(p^2-q^2)$, $2npq$, $n(p^2+q^2)$.

35) Das eine Quadrat ist $\left(\frac{2an+b(n^2-1)}{n^2+1}\right)^2$, das andere $\left(\frac{2bn-a(n^2-1)}{n^2+1}\right)^2$, wo n eine beliebige rationale Zahl bezeichnet.

Zusatz. Allgemein ist: $(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

36) $x=bn^2-m^2$, $y=2amn$, wo m und n beliebige Rationalzahlen bedeuten.

37) $x=\frac{bn^2-m^2}{2amn}$. 38) $x=m^2-cn^2$, $y=bn^2-2amn$.

39) $x=\frac{m^2-cn^2}{bn^2-2amn}$. 40) $x=\frac{bn^2-2cmn}{m^2-an^2}$.

41) α) $\frac{2n-1}{n^2-n+1}$ u. $\frac{n^2-1}{n^2-n+1}$; β) $\frac{2n+1}{n^2+n+1}$ u. $\frac{n^2-1}{n^2+n+1}$.

42) $x=3$, $y=4$, $z=5$, $u=6$. Zur Auflösung benutze man die Formel in 34.

43) Es muß (§. 64, 201. β) $n(x+y)=2xy$ sein. Zerlegt man n in zwei Factoren von der Form $p+q$ und $p-q$ und setzt $x=(p+q)z$, $y=(p-q)z$, so wird $z=p$, also $x=(p+q)p$, $y=(p-q)p$. Beispiel: $n=105$; die zusammengehörigen Werthe von x und y sind 53 u. 5565, 57 und 663, 65 und 273, 77 u. 165 und umgekehrt.

44) Setzt man $y=mx$, so wird $x=\sqrt[m-1]{m}$, $y=m\sqrt[m-1]{m}$. Für m gleich 1 wird $x=y$, alsdann ist offenbar für beliebige für x gesetzte Werthe $x^y=y^x$; für $m=2$ erhält man $x=2$, $y=4$, also $2^4=4^2$. Für alle übrigen in ganzen Zahlen ausgedrückten Werthe von m erhält man für x und y keine in ganzen Zahlen ausgedrückten Werthe; für $m=3$ zum Beispiele erhält man: $5{,}19615^{1{,}73205}=1{,}73205^{5{,}19615}$. Setzt man aber $m=1+\frac{1}{n}$, so ist $x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Beispiele: $x_1=\frac{9}{4}$, $y_1=\frac{27}{8}$; $x_2=\frac{64}{27}$, $y_2=\frac{256}{81}$;
$x_3=\frac{625}{256}$, $y_3=\frac{3125}{1024}$ u. s. w.

Fünfter Abschnitt.

Progressionen, Kettenbrüche und Theilbruchreihen.

A. Progressionen.

§. 81.

1) Arithmetische Progressionen.

Das Anfangsglied heiße a, das Endglied t, der Stellenzeiger, Inder (Anzahl der Glieder) n*), die Differenz d und die Summe aller Glieder s.

$$\text{I.}\quad t = a + (n-1)d.$$

$$\text{II.}\quad s = \tfrac{1}{2}n(a+t) = \tfrac{1}{2}n[2a + (n-1)d]\text{**)}.$$

1) Was versteht man unter einer arithmetischen Progression oder Reihe***)?

2) Was versteht man unter einer zunehmenden, was unter einer abnehmenden arithmetischen Progression?

3) α) Wie heißt die Summe der ersten 1000 Zahlen? β) Wie groß ist die Summe einer arithmetischen Reihe, wenn das erste Glied 6, das letzte 2833 und die Anzahl der Glieder 38 ist? Aufl.: α) 500500; β) 53941.

4) t und s zu bestimmen, wenn $a = 17$, $d = 5\frac{1}{2}$, $n = 79$. Aufl.: $t = 446$, $s = 18288\frac{1}{2}$.

5) Eben so t und s, wenn α) $a = 29\frac{3}{4}$, $d = 7\frac{1}{4}$, $n = 711$; β) $a = -151\frac{1}{3}$, $d = 1\frac{5}{6}$, $n = 53$. Aufl.: α) $t = 5177\frac{1}{4}$, $s = 1851088\frac{1}{2}$, β) $t = -56$, $s = -5494\frac{1}{3}$.

---

*) Von einer negativen Anzahl der Glieder kann man wohl nicht sprechen; betrachtet man aber die Reihe:

$$\begin{array}{ccccccc} -n & -(n-1) & -1 & 0 & 1 & 2 & n \\ a-(n+1)d, & a-nd\dots & \dots a-2d, & a-d, & a, & a+d\dots & a+(n-1)d, \end{array}$$

und betrachtet man das Glied a als das Anfangsglied mit dem Stellenzeiger 1, so erhält $a+d$ den Stellenzeiger 2, $a+2d$ den Stellenzeiger 3, $a+(n-1)d$ den Stellenzeiger n. Rückwärts gerechnet hat $a-d$ den Stellenzeiger 0, $a-2d$ den Stellenzeiger -1, $a-3d$ den Stellenzeiger -2 u. s. w., $a-(n+1)d$ den Stellenzeiger $-n$. Vom ersten Gliede bis zum Gliede mit dem Stellenzeiger n (eingeschlossen) sind n Glieder, vom Anfangsgliede bis zum Gliede mit dem Stellenzeiger $-n$ (eingeschlossen) sind dagegen $n+2$ Glieder.

**) Diese Formel heißt die Summenformel oder das summatorische Glied der arithmetischen Progression.

***) Die Franzosen nennen die arithmetischen Reihen auch Progressions par différence, so wie die geometrischen Progressions par quotient.

6) t und s zu bestimmen, wenn α) $a = 28\frac{1}{2}$, $d = -5\frac{3}{7}$, $n = 47$; β) $a = -7\frac{3}{4}$, $d = -\frac{5}{12}$, $n = 73$.

Aufl.: α) $t = -221\frac{3}{14}$, $s = -4528\frac{1}{14}$;
β) $t = -37\frac{3}{4}$; $s = -1660\frac{3}{4}$.

7) t zu bestimmen, wenn entweder 1) a, d, n, oder 2) a, d, s, oder 3) a, n, s oder 4) d, n, s gegeben sind.

Aufl.: 1) $a+(n-1)d$; 2) $-\frac{1}{2}d \pm \sqrt{2ds+(a-\frac{1}{2}d)^2}$;
3) $\frac{2s}{n} - a$; 4) $\frac{s}{n} + \frac{(n-1)d}{2}$.

8) s zu bestimmen, wenn entweder 1) a, d, n, oder 2) a, d, t, oder 3) a, n, t, oder 4) d, n, t gegeben sind.

Aufl.: 1) $\frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$; 2) $\frac{a+t}{2} + \frac{(t+a)(t-a)}{2d}$;
3) $\frac{1}{2}n(a+t)$; 4) $\frac{1}{2}n[2t-(n-1)d]$.

9) d zu bestimmen, wenn entweder 1) a, n, t, oder 2) a, n, s oder 3) a, t, s, oder 4) n, t, s gegeben sind.

Aufl.: 1) $\frac{t-a}{n-1}$; 2) $2\frac{s-an}{n(n-1)}$; 3) $\frac{(t+a)(t-a)}{2s-a-t}$;
4) $2\frac{nt-s}{n(n-1)}$.

10) n zu bestimmen, wenn entweder 1) a, d, t, oder 2) a, d, s, oder 3) a, t, s, oder 4) d, t, s bekannt sind.

Aufl.: 1) $\frac{t-a}{d}+1$; 2) $-\frac{2a-d}{2d} \pm \sqrt{\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2}$;
3) $\frac{2s}{a+t}$; 4) $\frac{2t+d}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{2t+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}}$.

11) a zu bestimmen, wenn entweder 1) d, n, t, oder 2) d, n, s, oder 3) d, t, s, oder 4) n, t, s bekannt sind.

Aufl.: 1) $t-(n-1)d$; 2) $\frac{s}{n} - \frac{(n-1)d}{2}$;
3) $\frac{1}{2}d \pm \sqrt{(t+\frac{1}{2}d)^2-2ds}$; 4) $\frac{2s}{n} - t$.

12) α) Wie groß ist das Anfangsglied und die Summe der Glieder, wenn das letzte Glied 24, die Differenz $\frac{5}{7}$ und die Anzahl der Glieder 22 ist? β) Wie heißt das letzte Glied und die Anzahl der Glieder einer Progression, wenn das erste Glied -6, die Differenz $\frac{3}{4}$ und die Summe der Glieder $146\frac{1}{4}$ ist?

Aufl.: α) $a = 9$, $s = 363$; β) $t = 15\frac{3}{4}$ und $n = 30$.

Bemerkung. Die beiden anderen Werthe, welche sich aus der Gleichung ergeben, $t = -16\frac{1}{2}$ und $n = -13$ sind zu verwerfen. Nimmt man Rücksicht auf die Bedeutung negativer Stellenzeiger, indem man von -6 mit der Differenz $\frac{3}{4}$ rückwärts geht, so erhält man die Glieder: $-16\frac{1}{2}$, $-15\frac{3}{4}$, -15, $-14\frac{1}{4}$, $-13\frac{1}{2}$, $-12\frac{3}{4}$, -12, $-11\frac{1}{4}$,

$-10\frac{1}{2}$, $-9\frac{3}{4}$, -9, $-8\frac{1}{4}$, $-7\frac{1}{2}$, $-6\frac{3}{4}$, -6, deren Summe offenbar nicht $146\frac{1}{4}$ ist, obgleich dennoch auf diese Reihe die Summationsformel $s = \frac{1}{2}n(a+t)$ paßt, wenn $n = -13$, $a = -6$, $t = -16\frac{1}{2}$ gesetzt wird; es ist nämlich: $\frac{1}{2}(-13)(-22\frac{1}{2}) = +146\frac{1}{4}$.

13) Die Anzahl und die Summe der Glieder zu finden, wenn das erste Glied $= -\frac{3}{4}$, die Differenz $= -\frac{7}{8}$ und das letzte Glied $= -21\frac{3}{4}$. Aufl.: $n = 25$, $s = -281\frac{1}{4}$.

14) Die Differenz der Glieder und das letzte Glied zu finden, wenn das erste Glied $= 8\frac{1}{4}$, die Anzahl der Glieder $= 147$ und die Summe der Glieder $15967\frac{7}{8}$. A.: $d = 1\frac{3}{8}$, $t = 209$.

15) Die Anzahl der Glieder und das Anfangsglied zu finden, wenn die Differenz der Glieder $= 0{,}27$, das letzte Glied $= 18{,}53$ und die Summe der Glieder $= 628{,}43$.

Aufl.: $n_1 = 58$, $a_1 = 3{,}14$, oder $n_2 = 80\frac{7}{27}$, $a_2 = -2{,}87$. Letztere Werthe sind nicht brauchbar, indem der Bruch $\frac{7}{27}$ sich nicht deuten läßt.

16) Wie groß ist die Summe der n ersten ungeraden Zahlen? Antw.: n^2.

17) α) Das Anfangs- und das Endglied einer arithmetischen Progression zu finden, wenn die Differenz $8\frac{2}{3}$, die Anzahl der Glieder 58 und die Summe der Glieder $14026\frac{1}{3}$ ist.

Aufl.: $a = -5\frac{1}{6}$, $t = 488\frac{5}{6}$.

β) Das Anfangsglied einer arithmetischen Reihe sei 5, das Endglied 23, die Summe 392. Wie groß ist die Anzahl der Glieder, wie groß die Differenz? Aufl.: $n = 28$, $d = \frac{2}{3}$.

18) α) Das 7te Glied einer arithmetischen Progression ist -6, das 37te $15\frac{3}{4}$, die Anzahl der Glieder 55. Wie groß ist die Differenz, das Anfangsglied, das Endglied, die Summe aller Glieder?

Aufl.: $d = \frac{29}{40}$, $a = -10\frac{7}{20}$, $t = 28\frac{4}{5}$, $s = 507\frac{3}{8}$.

β) Das p-te Glied einer arithmetischen Progression ist r, das q-te Glied u und die Anzahl der Glieder n. Wie groß ist die Differenz, wie groß ist die Summe der Glieder, wie groß das erste, wie groß das letzte Glied?

Aufl.: $d = \dfrac{u-r}{q-p}$; $\quad s = \dfrac{2(qr-pu)+(n+1)(u-r)}{q-p} \cdot \dfrac{n}{2}$;

$$a = \frac{r(q-1)-u(p-1)}{q-p}; \qquad t = \frac{u(n-p)-r(n-q)}{q-p}.$$

19) α) Zwischen 7 und 13 sollen 8 Glieder so eingeschaltet (interpolirt) werden, daß eine arithmetische Reihe gebildet wird. Wie heißen die eingeschalteten Glieder?

Antw.: $7\frac{2}{3}$, $8\frac{1}{3}$, 9, $9\frac{2}{3}$, $10\frac{1}{3}$, 11, $11\frac{2}{3}$, $12\frac{1}{3}$.

β) Zwischen a und b sollen n Glieder einer arithmetischen Reihe interpolirt werden; wie heißt das $r$te der eingeschalteten Glieder?

Aufl.: $a+r\dfrac{b-a}{n+1}$.

20) Das 19te Glied einer Progression nebst dem 43-ten, nebst dem 57-ten Gliede macht zusammen 827, das 27-te Glied nebst dem 58-ten, nebst dem 69-ten, nebst dem 73-ten macht zusammen 1581. Wie heißt das erste Glied, wie die Differenz der Progression?

Aufl.: $a = 5$, $d = 7$.

21) Von zwei arithmetischen Reihen, welche gleiche Anfangsglieder besitzen, hat die erste zum letzten Gliede 39, und zur Summe aller Glieder 207, die zweite zum letzten Gliede 124, zur Summe 917. Wie groß ist bei beiden Reihen die Anzahl der Glieder? (Diophantische Gleichung.) Antw.: 9 und 14.

22) Von zwei arithmetischen Reihen, welche gleiche Endglieder besitzen, hat die eine zum Anfangsgliede 9 und zur Summe 25, die andere zum Anfangsgliede 8 und zur Summe 36. Wie groß ist in beiden Reihen die Anzahl der Glieder? (Diophantische Gleichung.)

Aufl.: Entweder ist die Anzahl der Glieder der ersten Reihe 2 und die der zweiten Reihe 3, oder die Anzahl der Glieder in beiden Reihen ist 5 und 8, oder 10 und 18, oder 14 und 28, oder 20 und 48, oder 25 und 72, oder 26 und 78, oder 30 und 108 u. s. w. Im ersten Falle heißen die Reihen selbst 9, 16 und 8, 12, 16; im zweiten Falle 9, 7, 5, 3, 1 und 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, im dritten Falle 9, $7\frac{5}{9}$, $6\frac{1}{9}$, $4\frac{2}{3}$, $3\frac{2}{9}$, $1\frac{7}{9}$, $\frac{1}{3}$, $-1\frac{1}{9}$, $-2\frac{5}{9}$, -4 und 8, $7\frac{5}{17}$, $6\frac{10}{17}$...., $-3\frac{5}{17}$, -4.

23) Mehrere Zahlen bilden eine harmonische Progression, wenn ihre reciproken Werthe eine arithmetische Progression bilden. Die Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{14}$, ebenso die Zahlen $1\frac{7}{9}$, $2\frac{2}{7}$, $3\frac{1}{5}$, $5\frac{1}{3}$, 16 bilden eine harmonische Progression. Es soll α) zwischen die beiden Zahlen 3 und 9, β) zwischen die Zahlen a und b ein harmonisches Glied eingeschaltet werden; ferner sollen γ) zwischen die Zahlen $2\frac{1}{2}$ und $5\frac{3}{4}$ und δ) zwischen m und n zwei, drei und vier harmonische Glieder eingeschaltet werden.

§. 82.

Aufgaben als Anwendungen der arithmetischen Progressionen.

1) α) Ich habe gerade so viel Nüsse, um daraus ein volles gleichseitiges Dreieck bilden zu können. Nun gewinne ich noch eben so viel dazu und versuche aus allen ein volles Quadrat zu bilden, welches in einer Seite eben so viel Nüsse hat, als zuvor in der Seite des Dreiecks enthalten waren, finde aber, daß mir noch 20 Nüsse übrig bleiben. Wie viel Nüsse hatte ich Anfangs?

β) Ein Herr miethet einen Bedienten und verspricht ihm an Lohn für das erste Jahr nur 28 Thaler, für jedes folgende Jahr aber immer $1\frac{1}{3}$ Thlr. mehr, als für das vorhergehende. Wie viel wird der Bediente das 11te Jahr nach dem Antritte seines Dienstes, und wie viel für alle 11 Jahre überhaupt erhalten?

Aufl.: α) 210; β) für das 11te Jahr $41\frac{1}{3}$ Thlr., für alle 11 Jahre zusammen $381\frac{1}{3}$ Thlr.

2) Einen artesischen Brunnen von 500 Meter Tiefe zu bohren, zahlt man für den ersten Meter 27 Sgr., für jeden folgenden 5 Pfg. mehr. Wie viel zahlt man für den letzten Meter? wie viel für den ganzen Brunnen? Antw.: Für den letzten Meter 7 Thlr. 24 Sgr. 11 Pfg., für den ganzen Brunnen 2182 Thlr. 19 Sgr. 2 Pfg.

3) Es setzt Jemand 1 Gulden in die Lotterie, und weil er nicht gewinnt, so setzt er das zweite Mal 2 Gulden, das dritte Mal drei Gulden und so immer einen Gulden mehr. Wenn nun die Lotterie den Einsatz des Gewinnenden 14fach bezahlt, so fragt es sich: bei welchem Spiele erhält er all sein eingesetztes Geld durch einen einzigen Treffer zurück? Antw.: Beim 27-ten Spiele.

4) Die Chronik von Nürnberg berichtet vom Jahre 1541 bei Gelegenheit der Anwesenheit Kaiser Karl's V. Folgendes: „Am 17. Februar schenkte man der Röm. Kais. Majestät einen gulden Scheuren (einen großen Becher), darinnen hundert Stück Guldes waren, also daß das erste ein Goldgulden, das andere zween, das dritte drei, und also fort hinaus bis auf das hundertste, welches hundert Goldgulden galt.“ Wie viel Goldgulden machten diese an Werth zusammen? Antw.: 5050.

5) Wenn 8600 Thlr. zu $4\frac{1}{2}$ Proc. auf einfache Zinsen ausgethan, und am Ende eines jeden Jahres 200 Thlr. zugelegt werden, wie viel betragen die Zinsen in 17 Jahren zusammen?

Antw.: 7803 Thlr.

6) Bei einem Wettrennen wurden die Prämien für die Reiter so bestimmt, daß jeder folgende 15 Thlr. weniger erhielt, als der vorhergehende. Der erste erhielt 120, und alle übrigen zusammen 330 Thaler. Wie viel Reiter waren es? Antw.: 5.

7) Nach einem Gesetze der Physik durchfällt ein Körper, abgesehen von dem Widerstande der Luft, in der ersten Secunde 4,905 Meter, in der zweiten 9,81 Meter mehr u. s. w. in jeder folgenden Secunde 9,81 Meter mehr, als in der vorhergehenden. In wie viel Secunden wird ein Körper einen Raum von 397,305 Metern durchfallen? Antw.: In 9 Secunden.

8) Nach einem Gesetze der Physik nimmt die Geschwindigkeit eines senkrecht in die Höhe geworfenen Körpers immerfort ab, und zwar beträgt die Abnahme am Ende der ersten Secunde 9,81 am Ende der zweiten Secunde $2 \cdot 9{,}81$ u. s. w., der n-ten Secunde

$n \cdot 9{,}81$ Meter. Während der ersten Secunde legt der steigende Körper 4,905 Met. weniger zurück, als er zurücklegen würde, wenn die Schwerkraft nicht auf denselben wirkte, in jeder folgenden Secunde aber 9,81 Meter weniger als in der vorhergehenden. Wenn nun ein Körper mit der anfänglichen Geschwindigkeit von 313,92 Metern senkrecht in die Höhe geworfen wird, wie lange und wie hoch wird er steigen und nach wie viel Secunden wieder den Boden erreichen? Antw.: Er wird 32 Secunden lang steigen, eine Höhe von 5022,72 Metern erreichen und nach 32 Secunden wieder am Boden anlangen.

9) Ein Körper fällt von einer Höhe herab; zu gleicher Zeit wird ein anderer Körper von einem Puncte, der 795 Meter in verticaler Richtung unter jenem liegt, senkrecht in die Höhe geschossen. Wenn nun der letztere eine anfängliche Geschwindigkeit von 318 Metern hat, nach wie viel Secunden werden beide zusammenstoßen?

Antw.: Nach $2\frac{1}{2}$ Secunde.

10) Von zwei Städten, welche um 165 engl. Meilen von einander entfernt sind, brechen gleichzeitig A und B gegen einander auf, um sich zu begegnen? A macht den ersten Tag 1 Meile, den zweiten Tag 2 Meilen u. s. w.; B legt den ersten Tag 20, den zweiten Tag 18, den dritten Tag 16 Meilen u. s. w. zurück. Wann werden sie sich begegnen? Antw.: Nach 10 Tagen.

11) Unter 28 Soldaten, die eine Schanze zuerst erstürmt haben, soll eine Summe Geldes so vertheilt werden, daß jeder folgende immer gleich viel weniger erhält, als der vorhergehende, und es erhalten der fünfte und der zwölfte Mann zusammen 10 Thaler, und der sechszehnte und der siebente zusammen 9 Thaler. Wie viel erhält jeder von diesen besonders, und wie groß ist die unter die 28 Mann vertheilte Summe? Antw.: Der fünfte $5\frac{7}{12}$, der zwölfte $4\frac{5}{12}$, der sechszehnte $3\frac{3}{4}$, der siebente $5\frac{1}{4}$ Thaler. Die vertheilte Summe war 112 Thaler.

12) Den neuesten Untersuchungen gemäß nimmt die Temperatur des Erdkörpers um so mehr zu, je mehr man sich seinem Mittelpuncte nähert. Wenn nun die Wärme bei einer Tiefe von 200 preußischen Fuß $9{,}5^0$ Reaumur beträgt, und für je 115 preußische Fuß, die man dem Mittelpuncte der Erde sich nähert, die Temperatur-Erhöhung 1^0 Reaumur ausmacht, bei welcher Tiefe wird man die Wärme des kochenden Wassers $= 80^0$, bei welcher die Hitze des schmelzenden Bleies $= 283{,}2^0$ Reaumur antreffen? Welche Temperatur würde, wenn das Gesetz für die Zunahme bis zum Mittelpuncte der Erde Statt findet, dieser Mittelpunct haben? (Der Halbmesser der Erde beträgt 859,4367 Meilen, jede Meile zu 23643 preußische Fuß gerechnet.)

Antw.: In einer Tiefe von 8307,5 Fuß ist die Hitze des kochenden Wassers, in einer Tiefe von 31675,5 Fuß die des schmelzenden Bleies. Im Mittelpuncte der Erde würde eine Hitze von 176700,5 Graden sein.

13) Ein Schiff mit 175 Passagieren hatte hinreichendes Wasser für die Reise. Nach 30 Tagen wurden in Folge des Scorbuts täglich 3 Mann hinweggerafft. Ein Sturm verzögerte die Fahrt um drei Wochen. Das Schiff erreichte den Hafen, ohne daß das Wasser ausgegangen war. Wie lange dauerte die Fahrt des Schiffes? Antw.: 79 Tage.

14) α) Wenn in der Gleichung $7x+3 = y$ statt x nach und nach die, eine arithmetische Progression bildenden, Werthe 3, 5, 7, 9 u. s. w. gesetzt werden, so bilden auch die hieraus sich ergebenden Werthe von y eine arithmetische Reihe. Warum?

β) Wenn in der Gleichung $ax + b = y$ für x nach und nach die Werthe c, $c + d$, $c + 2d$, $c + 3d$ u. s. w., die in arithmetischer Progression stehen, gesetzt werden, so bilden die hieraus sich ergebenden Werthe von y ebenfalls eine arithmetische Progression. Warum? Wie heißt die Differenz dieser Reihe?

Bemerkung. Anwendung macht man von diesem Satze in der sogenannten Regel vom falschen Satze (règle de fausse position)*). Setzt man in $ax+b = c$ statt x nach und nach die Werthe α, α', α'', α''' u. s. w., die in einer arithmetischen Progression stehen, so erhält man für $ax+b$ Werthe, die im Allgemeinen von c verschieden sind. Die Unterschiede der Werthe $c - (ax+b)$, die man die Fehler der Gleichung nennt, bilden ebenfalls eine arithmetische Progression φ, φ', φ'', φ''' u. s. w. Ist man nun im Stande, mit Hülfe zweier Glieder φ, φ', das Glied ψ der Reihe zu bestimmen, welches $= 0$ wird, so ergibt sich aus diesem der entsprechende Werth in der Reihe α, α', α'' u. s. w., d. h., der Wurzelwerth der Gleichung. Setzt man $\alpha' = \alpha+\delta$, $\alpha'' = \alpha+2\delta$, $\alpha''' = \alpha+3\delta$ u. s. w., so wird $\varphi = c - (a\alpha+b)$, $\varphi' = \varphi - a\delta$, $\varphi'' = \varphi - 2a\delta$ u. s. w. Setzt man $\psi = 0 = \varphi - na\delta$, so wird $n = \dfrac{\varphi}{a\delta} = \dfrac{\varphi}{\varphi-\varphi'}$.

Der Wurzelwerth der Gleichung ist also: $\alpha + \dfrac{\varphi\delta}{\varphi-\varphi'} = \dfrac{\alpha'\varphi-\alpha\varphi'}{\varphi-\varphi'}$.

15) Die Differenzen der Quadratzahlen der auf einander folgenden Zahlen bilden eine arithmetische Reihe. Warum?

16) Die Differenzen der Quadrate der Glieder einer arithmetischen Reihe**) bilden eine arithmetische Reihe. Warum?

17) Die Differenzen der Differenzen (zweiten Differenzen) der Kuben der natürlichen Zahlen bilden eine arithmetische Reihe, oder die dritten Differenzen sind sämmtlich einander gleich. Warum?

*) Indische Methode nach Abram ben Ezra. liber augmenti et diminutionis.

**) Diese Reihe heißt in Bezug auf die Differenzreihe die Hauptreihe.

18) Setzt man in der Function von x vom dritten Grade ax^3+bx^2+cx+d für x nach und nach die Glieder einer arithmetischen Reihe, so sind die dritten Differenzen dieser neuen Reihe constant. Warum?

19) Wenn man die Summe der 1ten, der 2ten und 3ten, der 4ten, 5ten und 6ten, der 7ten, 8ten, 9ten und 10ten u. s. w. ungeraden Zahlen bildet, so erhält man die dritten Potenzen der natürlichen Zahlen nach der Reihe. Es ist nämlich $1^3 = 1$, $2^3 = 3+5$, $3^3 = 7+9+11$, $4^3 = 13+15+17+19$, $5^3 = 21+23+25+27+29$. Warum findet dieser Satz allgemein Statt? Antw.: Die ersten Glieder der Reihen sind der Ordnung nach: $1 \cdot 0 + 1$, $2 \cdot 1 + 1$, $3 \cdot 2 + 1$, $4 \cdot 3 + 1$, $5 \cdot 4+1 \ldots . n(n-1)+1$. Die arithmetische Reihe ist allgemein: $[n(n-1)+1] + [n(n-1)+3] \ldots . + [n(n-1)+2n-1] = n^3$.

20) Mittels des vorhergehenden Satzes soll die Reihe der Kubikzahlen $1^3+2^3+3^3 \ldots . +n^3$ summirt werden. A.: $[\frac{1}{2}n(n+1)]^2$.

21) Die dreifache Summe der Quadratzahlen von 1 bis n^2, oder $3Sn^2$ läßt sich durch folgende $n$gliedrige arithmetische Progression darstellen:

$$(n^2+2) + (n^2+5) + (n^2+8) \ldots + (n^2+[3n-1]).$$

Es ist nämlich $3 \cdot 1^2 = 1^2+2$, $3(1^2+2^2)=6+9$, $3(1^2+2^2+3^2)= 11+14+17$, $3(1^2+2^2+3^2+4^2) = 3S4^2 = 18+21+24+27$ u. s. w. Wie läßt sich dieser Satz beweisen?

Aufl.: Gesetzt, der Satz gelte auch für $3Sn^2$, so gilt er auch für $3S(n+1)^2$; es ist nämlich:
$[(n+1)^2+2] + [(n+1)^2+5] \ldots + [(n+1)^2+3n-1] + [(n+1)^2 + 3(n+1)-1] = 3Sn^2+3(n+1)^2 = 3S(n+1)^2$. Da der Satz für $n=1$ gilt, so gilt er auch für $n=2$, $n=3$ u. s. w., also allgemein.

22) Welchen Ausdruck erhält man für Sn^2?

Aufl.: $Sn^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

§. 83.

2) Geometrische Progressionen.

Das Anfangsglied heiße a, das Endglied t, die Anzahl der Glieder n, der Exponent (das Verhältniß) e, und die Summe aller Glieder s, alsdann ist:

$$\text{I.} \quad t = a \cdot e^{n-1};$$

$$\text{II.} \quad s = \frac{et-a}{e-1} = \frac{a(e^n-1)}{e-1} = \frac{a(1-e^n)}{1-e}.$$

1) Was versteht man unter geometrischer Progression?

2) Das Anfangsglied einer geometrischen Progression sei 1, der Exponent 2, die Anzahl der Glieder 13. Wie groß ist das letzte Glied, wie groß die Summe der Glieder?

Antw.: Das letzte Glied ist 4096, die Summe der Glieder 8191.

3) t und s zu bestimmen, α) wenn $a = 7$, $e = 3$, $n = 11$; β) wenn $a = 1024$, $e = 5$, $n = 8$; γ) wenn $a = 8\frac{1}{2}$, $e = 2\frac{1}{2}$, $n = 11$; δ) wenn $a = 5\frac{1}{4}$, $e = 0{,}25$, $n = 6$.

Aufl.: α) 413343 und 620011; β) 80000000 und 99999744; γ) $81062\frac{640}{2048}$ und $135098\frac{390}{2048}$; δ) 0,005126953125 und 6,998291015625.

4) t und s zu bestimmen, α) wenn $a = 4096$, $e = 0{,}375$, $n = 5$; β) wenn $a = 3$, $e = -4$, $n = 7$; γ) wenn $a = -7$, $e = -3\frac{1}{2}$, $n = 6$.

Antw.: α) 81 u. 6505; β) 12288 u. 9831; γ) $3676\frac{17}{32}$ u. $2857\frac{31}{32}$.

5) Was wird aus der Formel II., wenn $n = \infty$ und $e < 1$?

Antw.: $a : (1 - e)$.

6) Wie groß ist s, wenn α) $a = 1$, $e = \frac{1}{2}$, $n = \infty$; β) $a = 1$, $e = \frac{1}{3}$, $n = \infty$?

Antw.: α) 2; β) $1\frac{1}{2}$.

7) s für $a = 11$, $e = \frac{2}{9}$, $n = \infty$ zu bestimmen. Aufl.: $14\frac{1}{7}$.

8) s für $a = 1$, $e = -\frac{1}{2}$, $n = \infty$ zu bestimmen. Aufl.: $\frac{2}{3}$.

9) t 1) aus a, e, s, 2) aus e, n, s zu bestimmen.

Aufl.: 1) $\frac{a+(e-1)s}{e}$; 2) $\frac{(e-1)se^{n-1}}{e^n - 1}$.

10) s 1) aus a, n, t; 2) aus e, n, t zu bestimmen.

Antw.: 1) $\dfrac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$; 2) $\dfrac{t(e^n - 1)}{(e-1)e^{n-1}}$.

11) a 1) aus e, n, t; 2) aus e, n, s; 3) aus e, t, s zu bestimmen.

Aufl.: 1) $\frac{t}{e^{n-1}}$; 2) $\frac{(e-1)s}{e^n - 1}$; 3) $et - (e-1)s$.

12) e 1) aus a, n, t; 2) aus a, t, s zu bestimmen.

Aufl.: 1) $\sqrt[n-1]{t : a}$; 2) $\frac{s-a}{s-t}$.

13) n 1) aus a, e, t; 2) aus a, e, s; 3) aus a, t, s; 4) aus e, t, s zu bestimmen.

Aufl.: 1) $\dfrac{\log t - \log a}{\log e} + 1$; 2) $\dfrac{\log\,[a+(e-1)s] - \log a}{\log e}$;

3) $\dfrac{\log t - \log a}{\log (s-a) - \log (s-t)} + 1$; 4) $\dfrac{\log t - \log\,[et - (e-1)s]}{\log e} + 1$.

14) Welche Gleichungen sind aufzulösen, wenn man 1) e, 2) t aus a, n, s, 3) e und 4) a aus n, t, s bestimmen will?

Aufl.: Die Gleichung des $n-1$-ten Grades

$e^{n-1} + e^{n-2} + e^{n-3} \ldots + 1 - \frac{s}{a} = 0$, welche sich auch unter der

Form $\frac{e^n-1}{e-1}-\frac{s}{a}=0$ darstellen läßt, gibt für e den gesuchten Werth.

2) Setzt man $\sqrt[n-1]{t:a}=y$, so gibt die Gleichung vom $n-1$-ten Grade $\frac{y^n-1}{y-1}-\frac{s}{a}=0$ den verlangten Werth. 3) Die Gleichung des $n-1$-ten Grades $\frac{e^n-1}{e-1}-\frac{s}{t}e^{n-1}=0$, oder: $e^{n-1}\left(1-\frac{s}{t}\right)+e^{n-2}+e^{n-3}\ldots e+1=0$. 4) Siehe 2*).

15) $a=6$, $e=\frac{3}{4}$, $s=19\frac{373}{512}$, wie groß t und n?

Antw.: $t=1\frac{217}{512}$, $n=6$.

16) $e=7$, $n=7$, $s=411771$, wie groß t und a?

Antw.: $t=352947$, $a=3$.

17) $a=\frac{1}{8}$, $t=1024$, $n=14$, wie groß s und e?

Antw.: $s=2047\frac{7}{8}$, $e=2$.

18) Wie groß ist e, α) wenn $a=20$, $n=3$, $s=95$; β) $n=3$, $t=600$, $s=834$?

Antw.: α) $1\frac{1}{2}$ oder $-2\frac{1}{2}$. Die Progression ist alsdann entweder 20, 30, 45, oder 20, -50, 125; β) $3\frac{1}{3}$ oder $-\frac{10}{13}$.

19) $a=40$, $e=\frac{3}{7}$, $s=70$, wie groß n und t?

Antw.: $n=\infty$, $t=0$.

20) Lassen sich e und s bestimmen, wenn $a=9$, $t=7$ und $n=\infty$? Antw.: $e=1$, $s=\infty$.

21) $e=\frac{7}{5}$, $t=9642{,}59$, $s=33741{,}59$ wie groß n und a?

Antw.: $n=25$, $a=3$.

22) Von n Gliedern einer geometrischen Progression heißt das erste p, das zweite q. Wie heißt das $n$te Glied und wie groß ist die Summe der n Glieder? Wie groß ist die Summe der Glieder, wenn $n=\infty$ und $p>q$?

Antw.: $p(q:p)^{n-1}$, $p^2[(q:p)^n-1]:(q-p)$, $p^2:(p-q)$.

23) α) Welcher Zahl ist die Summe der Reihe $6-12+24-48+96$ u. s. w. gleich, wenn die Anzahl der Glieder 37 ist und die einzelnen

---

*) Würde man in 1) die ganze Gleichung mit $e-1$ multipliciren, so erhielte man zur Bestimmung von e die Gleichung des n-ten Grades

$$e^n-\frac{s}{a}e+\frac{s-a}{a}=0,$$ unter welcher Form sie in den Lehrbüchern angegeben wird. Diese Gleichung erlangt aber eben durch diese Multiplication einen Wurzelwerth für e, welcher ihr nicht zugehört, nämlich den Wurzelwerth $e=1$, der nur in dem besonderen Falle, wo $na=s$, passen würde. Die Gleichung des n-ten Grades ist deßhalb zu verwerfen. Eine ähnliche Bemerkung gilt für die in den Lehrbüchern angegebenen Gleichungen zur Beantwortung der Fragen 2), 3), 4). (Grunert's Archiv VI. 105.)

Glieder abwechselnd verschiedene Vorzeichen haben? β) Welchem Ausdrucke ist die Summe der **unbegrenzten** geometrischen Reihe $m-n+(n^2:m)-(n^3:m^2)$ u. s. w. gleich, wenn $n<m$ ist?

Antw.: α) 274877906946; β) $m^2:(m+n)$.

24) Das g-te Glied einer Progression heißt m, das h-te Glied r. Wie groß ist das erste, wie groß das n-te Glied, und wie groß ist die Summe der Glieder vom g-ten bis zum h-ten?

25) Welchen Brüchen sind die unbegrenzten periodischen Decimalbrüche 0,11111... (Periode 1), 0,378378..... (Periode 378), 0,285714285714..... (Periode 285714), 0,0136986301369863...... (Periode 01369863), 0,201923076923076... (Per. 923076) gleich?

Antw.: $\frac{1}{9}$, $\frac{14}{37}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{73}$, $\frac{21}{104}$.

26) Welcher Zahl ist die unendliche Reihe $\frac{1}{8}+\frac{4}{8^2}+\frac{6}{8^3}+\frac{3}{8^4}+\frac{1}{8^5}+\frac{4}{8^6}+\frac{6}{8^7}+\frac{3}{8^8}+\frac{1}{8^9}$ u. s. w. gleich, wenn die Zähler der Brüche 1, 4, 6, 3 **periodisch** wiederkehren und die Nenner nach ganzen Potenzen von 8 fortschreiten? Antw.: $\frac{1}{5}$.

Bemerkung. Solche Reihen, in welche sich alle Brüche verwandeln lassen, wenn man für den Nenner des ersten Gliedes (**Basis** genannt) eine beliebige Zahl annimmt, heißen **Kettenreihen***).

27) Die Summe folgender periodischen Kettenreihen zu bestimmen: α) $\frac{1}{11}+\frac{3}{11^2}+\frac{5}{11^3}+\frac{7}{11^4}+\frac{9}{11^5}+\dots$ (Periode der Zähler 1, 3, 5, 7, 9); β) $\frac{1}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\frac{2}{5^5}+\frac{1}{5^6}+\frac{4}{5^7}+\dots$ (Periode der Zähler 1, 4, 3, 0, 2); γ) $\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\frac{4}{7^4}+\frac{3}{7^5}+\frac{4}{7^6}+\dots$ (Periode der Zähler 3, 4); δ) $\frac{1}{13}+\frac{2}{13^2}+\frac{3}{13^3}+\frac{5}{13^5}+\frac{8}{13^8}+\frac{10}{13^{10}}+\frac{5}{13^{12}}+\frac{8}{13^{15}}+\frac{10}{13^{17}}+\frac{5}{13^{19}}+\frac{8}{13^{22}}+\frac{10}{13^{24}}+\dots$

Aufl.: α) $\frac{773}{6442}$; β) $\frac{601}{1562}$; γ) $\frac{457}{2352}$; δ) $\frac{12426063095}{137858489652}$.

28) α) Welchem Ausdrucke ist die unbegrenzte periodische Kettenreihe $\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{a}{n^3}$ u. s. w. gleich, wenn die Periode der Zähler

*) S. Theorie der Kettenreihen von R. **Druckenmüller**. Trier, 1837.

a, b ist und alle Brüche echte sind? β) welchem die unbegrenzte periodische Kettenreihe $\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\frac{d}{n^4}+\frac{a}{n^5}+\ldots$?

Antw.: α) $\frac{an+b}{n^2-1}$; β) $\frac{an^3+bn^2+cn+d}{n^4-1}$.

29) Welchem Ausdrucke ist die unbegrenzte periodische Kettenreihe:

$$\left(\frac{a}{n}+\frac{a^2}{n^2}+\frac{a^3}{n^3}\ldots+\frac{a^{\mathrm{m}}}{n^{\mathrm{m}}}\right)+\left(\frac{a}{n^{\mathrm{m}+1}}+\frac{a^2}{n^{\mathrm{m}+2}}+\frac{a^3}{n^{\mathrm{m}+3}}\ldots+\frac{a^{\mathrm{m}}}{n^{2\mathrm{m}}}\right)$$

$+\left(\frac{a}{n^{2\mathrm{m}+1}}\ldots\frac{a^{\mathrm{m}}}{n^{3\mathrm{m}}}\right)\ldots$ gleich? Antw.: $\frac{a(a^{\mathrm{m}}-n^{\mathrm{m}})}{(a-n)\,(n^{\mathrm{m}}-1)}$.

30) Wie wird bei einer gegebenen Basis ein Bruch in eine Kettenreihe verwandelt? Welcher Kettenreihe ist der Bruch $\frac{5}{7}$ gleich, wenn die Basis 9 ist?

Aufl.: $\frac{5}{7}=\frac{6}{9}+\frac{3}{9^2}+\frac{7}{9^3}+\frac{6}{9^4}+\frac{3}{9^5}+\frac{7}{9^6}+\frac{6}{9^7}$ u. s. w.

31) Folgende Brüche in Kettenreihen zu verwandeln: $\frac{3}{7}$ (Basis 4), $\frac{97}{312}$ (Basis 5), $\frac{29}{63}$ (Basis 7), $\frac{45}{64}$ (Basis 16).

32) Wie viel von einander verschiedene Reste können bei der Verwandlung eines Bruches in eine Kettenreihe entstehen?

33) Warum müssen, wenn Nenner und Zähler des Bruches zur Basis Primzahlen sind, die Zähler der Kettenreihe eine Periode bilden, die gleich zu Anfange beginnt?

Bemerkung. Auf die Verwandlung eines Bruches in eine Kettenreihe gründet sich eine Methode der Auflösung unbestimmter Gleichungen vom ersten Grade. Es sei:

$$10y = 37x+11.$$

Verwandelt man $^{11}/_{37}$ in eine Kettenreihe, deren Basis 10 ist, so gelangt man bei dem dritten Reste zu 11, dem Zähler des Bruches $^{11}/_{37}$. Da nun der vorletzte Rest 27, mit 10 multiplicirt, bei der Division durch 37 den Quotienten 7 und den Rest 11 gibt, so ist offenbar:

$$10\cdot 27 = 37\cdot 7+11, \text{ oder es ist } x=7,\ y=27.$$

Dieses Beispiel reiche hin, die allgemeine Regel zur Auflösung der unbestimmten Gleichungen vom ersten Grade anzugeben.

34) In einer geometrischen Progression von 4 Gliedern ist die Summe aller Glieder gleich a, die Summe ihrer Quadrate gleich b. Welche Progression ist es?

Aufl.: Bezeichnet s die halbe Summe, d die halbe Differenz der beiden mittleren Glieder, so ist:

$$s=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+2a^2(a^2-b)}}{4a} \text{ und } d=s\sqrt{\frac{a-4s}{a+4s}}.$$

35) Zwischen a und b sollen zwei mittlere geometrische Proportionalen eingeschaltet werden. Wie heißen dieselben?

36) Zwischen a und b drei mittlere Proportionalen zu interpoliren.

37) Die Summe $x^9+x^8y+x^7y^2+x^6y^3 \ldots + y^9$ zu bilden.

38) Eben so die Summe von: $p\sqrt[4]{p^3}-p\sqrt[4]{p}\sqrt[4]{q}+p\sqrt[4]{p}\sqrt[4]{q}-p\sqrt[4]{q^3}+q\sqrt[4]{p^3}-q\sqrt[4]{q}\sqrt[4]{p}+q\sqrt[4]{q}\sqrt[4]{p}-q\sqrt[4]{q^3}$.

Antw.: $[p^2-q^2]:[\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q}]$.

39) Das erste Glied einer aus 5 Gliedern bestehenden geometrischen Progression ist x^2, das zweite $x\sqrt{xy}$, wie heißen die drei anderen Glieder, und wem ist die Summe dieser Glieder gleich?

40) Das erste Glied einer aus sieben Gliedern bestehenden geometrischen Progression ist p^2, der Exponent $\sqrt[3]{q:p}$, wie heißt die Progression und welches ist die Summe der Glieder?

Antw.: Die Summe der Glieder ist: $[q^2\sqrt[3]{q}-p^2\sqrt[3]{p}]:[\sqrt[3]{q}-\sqrt[3]{p}]$.

§. 84.

Aufgaben als Anwendung der geometrischen Progressionen. Zinseszinsen und Renten-Rechnung.

1) a) Ein König in Indien, Namens Shehram, verlangte von dem Erfinder des Schachspiels, Sessa Ebn Daher, daß er sich selbst eine Belohnung wählen sollte. Dieser erbat sich hierauf die Summe der Weizenkörner, die herauskomme, wenn 1 für das erste Feld des Schachbrettes, 2 für das zweite, 4 für das dritte und so immer für jedes der 64 Felder doppelt so viel Körner, als für das vorhergehende, gerechnet werde. Als zusammengezählt wurde, fand man, zum Erstaunen des Königs, eine ungeheure Summe. Welche?

Antw.: 18446744073709551615 Körner.

Bemerkung. Zur Berechnung obiger Summe in preußischen Scheffeln mögen folgende Angaben dienen: Nach einem im Jahre 1302 unter Eduard's I. Regierung abgefaßten Gesetze soll 1 Sterling (englisches Geld) so schwer sein, als 32 wohl ausgetrocknete Weizenkörner. Da 20 Sterling = 1 Unze, 12 Unzen = 1 Pfund Troy-Gewicht = 25,5234 preußische Loth Altgewicht, so gehen auf 1 preußisches Pfund Altgewicht 9629 Weizenkörner, und da ein preußischer Scheffel guten Weizens $85\frac{1}{2}$ Pfund preuß. Altgewicht wiegt, so enthält ein Scheffel demnach 823280 Körner. Obige Summe gibt somit 22406403743209 Scheffel. Denkt man sich hiermit alles feste Land der Erde (2398979 Q.-M.) gleichförmig bedeckt, so wird die Höhe der aufgeschichteten Weizenkörner $4\frac{1}{4}$ Linie (0,3565 Z.) betragen.

β) Wenn ein Mensch zwanzig Jahre hindurch jegliches Jahr durch sein Beispiel oder absichtlich nicht mehr als einen einzigen Mitmenschen von heiligen Pflichten irre führte, und jeder dieser unglückseligen Verführten jährlich so wiederum nur einen Einzigen und dieser abermals einen Einzigen auf den Abweg zum Unrechte brächte, so beträgt die Anzahl dieser Verführten, die alle jenen ersten gewissenlosen Frevler zum Stammvater ihres Fluches haben, nach zwanzig Jahren wie viel? (Einsiedel's speculum pastorum. München 1858.) Antw.: 1048575.

2) Jemand setzt bei einem Hazardspiele zum ersten Male 10 Sgr., verliert und nimmt sich vor, so lange seinen Einsatz zu verdreifachen, bis ihm das Glück günstig werde. Nach 9 unglücklichen Spielen sieht er sich genöthigt, aufzuhören, indem ihm von der mitgebrachten Baarschaft nur noch 20 Sgr. übrig bleiben. Wie viel setzte er zum 9ten Male aufs Spiel, und wie viel betrug sein mitgebrachtes Geld? Antw.: Zum 9. Male setzte er 2187 Thlr. ein und sein mitgebrachtes Geld betrug 3281 Thlr.

3) Ein anderer Spieler versuchte auf ähnliche Weise sein Glück und nahm sich vor, jedesmal den doppelten Einsatz zu wagen, wenn ihm das Glück ungünstig sei, dagegen nur jedesmal die Hälfte des vorhergehenden Einsatzes zu wagen, wenn ihm das Glück günstig sei. Zuerst verliert er achtmal, dann gewinnt er fünfmal hinter einander, und zwar jedesmal das 13fache seines Einsatzes (d. h. er erhält das 12fache seines Einsatzes und den Einsatz dazu). Da er dem Glücke nicht weiter traut, so geht er mit seinem Gewinne von $949\frac{1}{2}$ Gulden nach Hause. Wie viel setzte er zum ersten Male ein? Antw.: $\frac{1}{6}$ Gulden.

4) Angenommen, daß bei gänzlicher Schonung die vorhandenen Hasen eines Jagd-Reviers sich jährlich um das Dreifache vervielfältigt hätten, und jetzt deren 5096 vorhanden wären, wie viel Hasen würden unter dieser Voraussetzung vor 5 Jahren da gewesen sein, wenn man die Brut der mehr als einjährigen Hasen außer Rechnung läßt? Antw.: 14.

5) Jemand säet zwei Scheffel Weizen und will mehrere Jahre hindurch die ganze Aernte als Aussaat für das folgende Jahr benutzen, und zwar so lange, bis die Aernte ihm mehr als 30000 Scheffel einbringt. Nach wie viel Jahren wird sein Wunsch erfüllt sein, wenn jedes Jahr die Fruchtbarkeit sich gleich bleibt und die Aernte das Siebenfache der Aussaat beträgt? Antw.: Nach 5 Jahren, wo er 33614 Scheffel einärntet.

6) Von einem Puncte, der auf dem Schenkel eines Winkels von $\frac{2}{3}$ Rechten liegt, wird auf den anderen Schenkel eine Senkrechte gefällt, und hierauf aus dem Fußpuncte des Perpendikels

auf den ersten Schenkel, alsdann wieder aus dem Fußpuncte des letzteren Perpendikels auf den zweiten Schenkel eine Senkrechte gezogen u. s. w. bis ins Unendliche. Wenn nun die erste Senkrechte eine Länge von m Millimeter hat, wie viel beträgt die Summe der unendlichen Zahl senkrechter Linien? Antw.: $2m$ Millimeter.

7) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn der Winkel ein beliebiger ist und die erste Senkrechte eine Länge von a, die zweite eine Länge von b Millim. hat? A.: $a^2:(a-b)$.

8) Wie heißt die Auflösung der 6ten Aufgabe, wenn der Winkel $= \alpha$ und die erste Senkrechte $= m$ ist? A.: $m : (2 \sin \frac{1}{2} \alpha^2)$.

9) Eine Linie von gegebener Länge, a, liegt auf dem einen Schenkel eines Winkels α, und wird auf den zweiten Schenkel projicirt; hierauf wird die Projection auf den ersten Schenkel und alsdann die zweite Projection wieder auf den zweiten Schenkel projicirt u. s. w. bis ins Unendliche. Wie groß wird die Summe der Linie a sammt allen ihren Projectionen sein?

10) Von dreien geraden Linien durchschneiden sich die erste und zweite unter dem spitzen Winkel α, die zweite und dritte unter dem spitzen Winkel β, die dritte und erste unter dem spitzen Winkel γ. Ein Stück der ersten geraden Linie von gegebener Länge m wird auf die zweite projicirt, die Projection auf die dritte Linie, die zweite Projection auf die erste Linie, die dritte Projection auf die zweite Linie projicirt u. s. w. bis ins Unendliche. Wie groß ist die Summe der Linie m sammt allen ihren Projectionen?

Antw.: $\dfrac{m(1 + \cos\alpha + \cos\alpha\cos\beta)}{1 - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$.

11) Construirt man auf den beiden Seiten eines Dreieckes als Grundlinien zwei Dreiecke, von denen jedes an Inhalt $\frac{1}{8}$ des Inhaltes des ersten Dreiecks beträgt; construirt man alsdann über den außenliegenden Seiten der neuen Dreiecke als Grundlinien Dreiecke, welche ebenfalls an Inhalt $\frac{1}{8}$ des Inhaltes dieser Dreiecke betragen, u. s. w. fort bis ins Unendliche, wie groß ist alsdann die Summe aller dieser Dreiecke*).

Antw.: $\frac{4}{3}$ des Inhaltes des ersten Dreieckes.

12) Zwischen 1 und $\frac{1}{2}$ sollen 11 Glieder nach dem Gesetze einer geometrischen Progression eingeschaltet werden. Wie heißen die Glieder**)? Antw.: 0,9439; 0,8909; 0,8409; 0,7937; 0,7492; 0,7071; 0,6674; 0,6300; 0,5946; 0,5612; 0,5297.

---

*) Anwendung bei der Bestimmung des Inhaltes eines Parabelsegmentes.

**) Diese Aufgabe ist von besonderer Anwendung in der Akustik. Bezeichnet man den Grundton mit 1, so ist dessen Octave in Bezug auf die Dauer jeder der Vibrationen, die sie macht, gleich $\frac{1}{2}$. Die 11 zwischen jenen beiden Tönen liegenden halben Töne müssen bei der gleichschwebenden

13) Achilles verfolgt eine Schildkröte, die in einer Entfernung von 1 Stadium vor ihm hergeht, mit zwölf mal größerer Geschwindigkeit. Kommt Achilles an der Stelle an, wo die Schildkröte zu Anfang sich befand, so ist diese um $\frac{1}{12}$ Stadium weiter; durchläuft Achilles diese kleine Strecke von $\frac{1}{12}$ Stadium, so wird die Schildkröte um $\frac{1}{144}$ Stadium weiter sein u. s. w. Es wird also wohl Achilles die Schildkröte nie erreichen, obschon er sich derselben immer nähert*)?

Zinseszinsen- und Renten-Rechnung.

Die Logarithmen der Zahlen 1,01 u. s. w. bis auf 10 Decimalstellen.

log 1,01	= 0,00432 13738	log 1,04	= 0,01703 33393.
» 1,02	= 0,00860 01718	» 1,0425	= 0,01807 60636.
» 1,025	= 0,01072 38654	» 1,045	= 0,01911 62904.
» 1,0275	= 0,01178 18305	» 1,0475	= 0,02015 40316.
» 1,03	= 0,01283 72247	» 1,05	= 0,02118 92991.
» 1,0325	= 0,01389 00603	» 1,055	= 0,02325 24596.
» 1,035	= 0,01494 03498	» 1,06	= 0,02530 58653.
» 1,0375	= 0,01598 81054		

14) Ein Capital von 1200 Thlrn. steht auf Zinseszinsen zu 4 Procent. Was wird daraus nach 36 Jahren?

Antw.: 4924 Thlr. 21 Sgr.

15) Zu Norwigh in England starb im Jahre 1724 ein Richter, welcher in seinem Testamente 400 Pfund legirte, um 60 Jahre lang zu 5 Procent zu stehen; nach Ablauf dieser Zeit sollte dafür eine Schule gestiftet werden, worin 120 Zöglinge unterrichtet würden. Als 1784 diese Schule von dem dadurch entstandenen Capital gestiftet wurde, wie groß war dasselbe? A.: 7471,67 Pfund.

16) Was wird aus einem Capitale von 2400 Gulden zum Zinsfuße $4\frac{3}{4}$ nach 27 Jahren? Antw.: $8401\frac{3}{4}$ Gulden.

17) Ein Capital k steht auf Zinseszinsen zum Zinsfuße p. Was wird aus demselben nach n Jahren? Antw.: $k(1+0{,}01p)^n$.

18) Ein Wald, der $13490\frac{3}{5}$ Klaftern enthält, vermehrt sich jährlich um $2\frac{1}{4}$ Procent. Wie viel Klaftern Holz wird derselbe nach 80 Jahren liefern? Antw.: 80001 Klaftern.

19) Was würde aus einem Pfennige, der um Christi Geburt auf Zinseszinsen zu 4 Procent gelegt worden wäre, zu Anfange des Jahres 1836 geworden sein?

Temperatur, bei der jeder folgende Ton um gleich viel höher ist, als der vorhergehende, obigen Zahlenwerthen entsprechen. Ist also c = 1, $\bar{c} = \frac{1}{2}$, so ist cis oder des = 0,9439, d = 0,8909 u. s. w.

*) Das bekannte Sophisma des Zeno.

Antw.: 50104 Quadrillionen preußische Thaler oder genau:
50104 313088 782998 045900 393545 Thlr. 29 Sgr. 11 Pfg.

Die genaue Ausrechnung dieser Summe geschieht mit Hülfe der natürlichen Logarithmen nach der in den Callet'schen Logarithmen-Tafeln *) S. 108 und 110 angegebenen Anweisung. Setzt man $1{,}04^{1835} : 360 = x$, so ist:

$log\ nat.\ x = 1835\ (log\ nat.\ 26 - log\ nat.\ 25) - log\ nat.\ 360 =$ $66{,}0839046048210229683406990365592364242690$. Diese Zahl ist aber $=$ $log\ nat.\ 57 + log\ nat.\ 293 + log\ nat.\ 3 + log\ nat.\ 10^{12} +$ $log\ nat.\ 1000021 + log\ nat.\ 1000005 + log\ nat.\ y$, wo

$$log\ nat.\ y = 0{,}000000207677196274551654971491522338775 6.$$

Berechnet man y nach der Formel:

$$y = 1 + ly + \frac{1}{1.2}(ly)^2 + \frac{1}{1.2.3}(ly)^3 + \frac{1}{1.2.3.4}(ly)^4 + \ldots$$

so erhält man: $y = 1{,}0000002076772178394620740475059 7$.

x ist demnach $= 57 \cdot 293 \cdot 3 \cdot 10^{12} \cdot 1000021 \cdot 1000005 \cdot y =$
$50104313088782998045900393545{,}997328061830118$ Thlr.

Bemerkung. Die Oberfläche der Erde hat ungefähr 5175800000000000 Quadratfuß preußisch. Ein preußischer Thaler hat im Durchmesser 1,22 Zoll preußisch. Legt man Thaler genau an einander, nach Form eines gleichseitigen Dreiecks, so gehen im Durchschnitte 111,715 Stück auf einen Quadratfuß, oder 111715 Stück auf 1000 Quadratfuß; mithin gehen auf die ganze Erd-Oberfläche 578216 Billionen Stück. Um oben genannte Summe aufzunehmen, müßte die Erde eine 86653300000-fache Oberfläche, oder einen 294370-fachen Durchmesser haben. Die Sonne, deren Durchmesser das 112,21-fache des Erd-Durchmessers beträgt, müßte, zur Aufnahme obiger Summe, einen 2623-fachen Durchmesser haben. Zu Anfange des Jahres 1193 betrugen die Zinsen in preußischen Thalern gerade so viel, daß man mit denselben die Oberfläche der Erde bedecken konnte. — Wäre der Pfennig um Christi Geburt zu fünf Procent auf Zinseszinsen ausgeliehen worden, so würde er zu Anfange 1836 zu einer Summe von 2 Sextillionen 118660 Quintillionen, oder genau:
2 118660 123525 548395 390626 405395 557169 Thlr. 13 Sgr. 1,4 Pfg.
angewachsen sein. Um diese Summe auf der Oberfläche aufzunehmen, müßte die Erde eine 3664300000000000000-fache Oberfläche oder einen 1914190000-fachen Durchmesser, die Sonne einen 17 millionfachen Durchmesser haben. — Preußische Thaler in eine Masse zusammengeschmolzen, gehen ungefähr 13818 Stück auf einen preußischen Kubikfuß. Denkt man sich nun die Summe, zu welcher ein à vier Procent verzins'ter Pfennig seit Christi Geburt herangewachsen wäre, zu einer Kugel verschmolzen, so würde diese einen Durchmesser von nicht weniger als 8063 geographischen Meilen oder nahe $4^2/_3$ Erd-Durchmessern haben. Die à fünf Procent verzins'te Summe dagegen würde eine Kugel bilden, deren Durchmesser 4458920 geographischen Meilen oder 2594 Erd-Durchmessern oder 23 Sonnen-Durchmessern gleich kommt. Der Radius dieser letzteren Kugel beträgt das 44-fache der mittleren Entfernung des Mondes von der Erde. Bestände die Erde aus reinem Golde, so würden $9\frac{1}{2}$ Erde erforderlich sein, um die Summe zu decken, auf welche ein à 4 Procent auf Zinseszinsen ausgethaner Pfennig in 1866 Jahren anwächst. Zur Berechnung dieses Resultates dient die Angabe, daß 1 Pfund preuß. (Altgewicht) Gold 400 Thlr. Werth hat, 1 preuß. Kubikfuß Wasser 66 Pfund (Altgewicht) wiegt und Gold $19\frac{1}{4}$ mal so schwer als Wasser ist. Ein Kubikfuß Gold ist hiernach 508200 Thlr. werth. Der Inhalt der Erde ist 2650185000 geographische Kubikmeilen, 1 geographische Meile = 23643 Fuß preußisch.

*) Tables portatives de Logarithmes, par François Callet.

20) Aus einem Gefäße, welches 20 Maß reinen Weingeist enthält, werden drei Maß herausgenommen und durch 3 Maß Wasser ersetzt. Nachdem das Wasser mit dem Weingeiste sich vermischt, werden zum zweiten Male 3 Maß der Flüssigkeit herausgenommen und wieder 3 Maß Wasser hinzugegossen. Wenn nun das Wegnehmen und Zugießen 24 mal hinter einander fortgesetzt wird, wie viel bleibt von der ursprünglichen Flüssigkeit im Gefäße zurück? Antw.: 0,404654 Maß.

21) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 20, 3 u. 24 die allgemeinen Zeichen a, b u. n gesetzt werden?
Antw.: $a[(a-b):a]^n$ Maß.

22) Mit 76 Loth Silber werden 20 Loth Kupfer zusammengeschmolzen. Von der Mischung werden 20 Loth weggenommen und durch 20 Loth Kupfer ersetzt. Wie viel Silber wird zuletzt noch in dem Gemische enthalten sein, wenn man dieses Verfahren 24 mal hinter einander wiederholt? Antw.: 0,279146 Loth.

23) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn für 76, 20, 24 die allgemeinen Zahlzeichen a, b, n gesetzt werden?
Antw.: $a[a:(a+b)]^n$.

24) Ein Tabakfabricant hat zweierlei Sorten Tabak; von der einen Sorte kostet das Pfund 20, von der anderen 8 Sgr. Aus beiden Sorten will er 11 Mittelsorten durch Vermengung darstellen. Zu dem Zwecke mengt er 9 Theile der guten Sorte mit 2 Theilen der schlechten, hierauf wieder 9 Theile der neuen Sorte mit zwei Theilen der schlechten und so fort 11 mal hinter einander. Zu welchem Preise kann er die 11te Mittelsorte verkaufen?
Antw.: Zu $9\frac{1}{3}$ Sgr.

25) Was wird aus einem Capital von 2400 Gulden nach 27 Jahren zu $4\frac{3}{4}$ pCt., wenn die Zinsen halbjährig gerechnet werden? Antw.: $8524\frac{3}{4}$ Gulden.

Bemerkung. Werden die Zinsen in jedem kleinsten Zeitmomente zugeschlagen, so ist das Endcapital $k' = k \cdot e^{0,01pn}$ (e die Basis der natürlichen Logarithmen).

26) α) Was wird aus einem Capitale von 68000 Thalern zu 5 Procent auf Zinseszinsen nach $6\frac{1}{2}$ Jahr? β) Wie heißt das Resultat der 17ten Aufgabe, wenn n keine ganze Zahl bedeutet, sondern von der Form $a + \frac{b}{c}$ ist, wo a eine ganze Zahl oder Null, $\frac{b}{c}$ aber einen echten Bruch bezeichnet? Antw.: α) 93404,7 (nicht 93376,9) Thlr. β) $k\left(1+\frac{1}{100}p\right)^a\left(1+\frac{b}{c}\cdot\frac{1}{100}p\right)$.

27) Eine Sparcasse lehnt von Jemandem 1500 Gulden zu 3 pCt. und leiht dieses Capital wieder zu 5 pCt. aus. Wie hoch beläuft sich der Gewinn der Sparcasse am Ende des zehnten Jahres, wenn Zinseszinsen gerechnet werden? Antw.: 427 fl. 28 kr.

28) Nach 7 Jahren hat Jemand 1200 Thlr. zu zahlen. Wie viel kann er jetzt bezahlen, wenn der Disconto $3\frac{1}{2}$ pCt. beträgt und die Zinseszinsen berücksichtigt werden? A.: 943 Thlr. $5\frac{2}{3}$ Sgr.

29) Ein Capitalist, der bei mehreren Fabricanten ein Capital von $3\frac{3}{4}$ pCt. jährlich auf Zinsen stehen hatte, ließ sich alle Vierteljahre die Zinsen bezahlen und vermehrte durch dieselben sein Capital. Hiedurch wuchs dasselbe nach 9 Jahren zu 83954,2 Thlrn. an. Wie groß war das ausgeliehene Capital? A.: 60000 Thlr.

30) Ein Walddistrict, der sich jährlich um $4\frac{3}{4}$ Procent seines jedesmaligen Holzbestandes vermehrt, ist zu 12000 Klaftern Holz vermessen. Wie viel enthielt derselbe vor 12 Jahren? A.: 6876 Kl.

31) Welches ist der baare Werth eines Capitals k', welches nach n Jahren zu bezahlen ist, wenn der Zinsfuß p ist?

Antw.: $k'(1+0{,}01p)^{-n}$.

32) α) Zu wie viel Procent steht ein Capital k, welches nach n Jahren mit den Zinseszinsen k' wird? β) Zu wie viel Procent steht ein Capital von 18796 Thlrn., welches nach 10 Jahren zu 29189,6 Thlrn. anwächst? γ) Ein Wucherer leiht einem Bedrängten 600 Thlr. und läßt sich dafür einen Schuldbrief über 800 Thlr. ausstellen, zahlbar nach 3 Jahren ohne Zinsen. Wie viel Procent nahm der Menschenfreund?

Antw.: α) $100(\sqrt[n]{k':k}-1)$. β) $4\frac{1}{2}$. γ) 10,064 Proc.

33) Die Bevölkerung einer Stadt, welche 32500 Einwohner zählte, hat in 24 Jahren um 33566 Seelen zugenommen. Wie viel beträgt der jährliche Zuwachs auf 100 Seelen? Antw.: 3.

34) In einem Gefäße befinden sich 180 Quart Weingeist; eine bestimmte Menge Wasser wird hinzugesetzt und mit dem Weingeiste vermischt, und hierauf eben so viel aus der Mischung geschöpft, als vorhin Wasser zugesetzt wurde. Wenn diese Operation 25 mal hinter einander vollzogen wird, und zuletzt nur noch der 113te Theil des ursprünglichen Weingeistes übrig bleibt, wie viel Quart Wasser wurden jedesmal hinzugesetzt? Antw.: 37,468 Quart.

35) α) Nach Rickmann betrug die Bevölkerung Englands im Jahre 1760 6479730, im Jahre 1800 9187176 und im Jahre 1830 13840751 Seelen. Ist die Zunahme der Bevölkerung in diesen Zeiten eine regelmäßige oder nicht? Antw.: Im ersten Zeitraume 1760—1800 betrug die Zunahme 0,876, im zweiten 1800—1830 1,375 Procent.

β) Wenn die Bevölkerung eines Landes innerhalb 9 Jahren von 208700 auf 318500 Seelen angewachsen ist, wie stark wird die Bevölkerung, wenn sie in demselben Maße zunimmt, 15 Jahre nach diesen 9 Jahren sein? Antw.: 644299 Seelen.

36) Zu wie viel Procent muß ein Capital stehen, wenn es nach 10 Jahren sich verdoppeln soll? Antw.: Zu 7,177 Procent.

37) Jakob kam mit 69 Personen nach Aegypten, so daß also zusammen 70 waren. Beim Auszuge aus Aegypten nach 430 Jahren zählte man 660000 Menschen; wie stark mußte die jährliche Zunahme der Bevölkerung gewesen sein, wenn man annimmt, daß von 50 Menschen 3 im Durchschnitte jährlich mit Tode abgegangen sind? Antw.: 8,151 Procent, oder auf 12 Menschen mußte jährlich einer geboren werden.

38) Wie lange stand ein Capital von 12388 Thlrn., wenn es bei $3\frac{1}{2}$ Procent Zinsen zu 22232 Thlr. 13 Sgr. 5 Pfg. angewachsen ist? Antw.: 17 Jahre.

39) In wie viel Jahren verdoppelt sich ein Capital, welches α) zu 3, β) zu 4, γ) zu $4\frac{1}{2}$, δ) zu 5 Procent aussteht? Antw.: α) In 23,45 β) in 17,67 γ) in 15,75, δ) in 14,21 Jahren.

40) In wie viel Jahren wird ein Capital von 2739 Gulden eben so groß sein, als ein Capital von 3815 Gulden in 7 Jahren, wenn der Zinsfuß bei beiden $3\frac{3}{4}$ beträgt? A.: In 16 Jahren.

41) Nach wie viel Jahren wird ein Capital von 8443 Thlrn. zu 4 Procent eben so viel werth sein, als 9000 Thlr. zu 6 Procent nach 9 Jahren? Antw.: Nach 15 Jahren.

42) Nach wie viel Jahren wird ein Capital k den Werth k' erhalten, wenn der Zinsfuß p beträgt?

Antw.: Nach $(\log k' - \log k) : [\log (100+p) - 2]$ Jahren.

43) 278 Pfund blauer Farbe werden mit 213 Pfund gelber Farbe vermischt; 278 Pfund der Mischung werden hierauf zum zweiten Male mit 213 Pfund gelber Farbe vermischt u. s. w. fort. Wie oftmal muß die Mischung vorgenommen werden, wenn zuletzt nur der hundertste Theil an blauer Farbe in der Mischung übrig bleiben soll? Antw.: Ungefähr 8 mal.

44) Vor wie viel Jahren war ein Capital von $5326\frac{1}{2}$ Thlrn., welches zu 6 Procent auf Zinseszinsen stand, 5000 Thlr. werth?

Antw.: Vor $1\frac{1}{12}$ Jahr und nicht vor 1,0856 (nahe $1\frac{3}{35}$) Jahr. (Siehe Beispiel 26, β.)

45) Vor wie viel Jahren hatte ein Capital, welches zu 4 Procent aussteht, nur den dritten Theil seines jetzigen Werthes?

Antw.: Vor 28 Jahren und $\frac{1}{10}$ Monat.

46) Jemand leiht ein Capital auf Zinseszinsen zu p Procent und verleiht dasselbe zu p' Procent. Nach n Jahren gibt er das Capital wieder zurück und gewinnt m Thaler. Wie viel betrug dasselbe? Antw.: $m : [(1+0{,}01p')^n - (1+0{,}01p)^n]$.

47) Ein Capital von 16000 Gulden ist auf Zinseszinsen zu 5 Procent jährlich ausgeliehen; die Verwaltungskosten betragen für

jedes Jahr 1 Procent des vergrößerten Capitals und werden am Ende des Jahres abgerechnet. Zu welcher Summe wird das Capital in 20 Jahren anwachsen? Antw.: Zu 34722,41 Gulden.

48) α) Jemand hat ein Capital k zu p Procent auf Zinsen ausstehen, setzt jedes Jahr die Zinsen hinzu und gebraucht zu seinem Unterhalte jährlich die Summe u. Wie groß wird sein Capital nach n Jahren sein?

Antw.: $k(1+0{,}01p)^n - \frac{100}{p}u[(1+0{,}01p)^n - 1]$
$= (k - \frac{100}{p}u)\,(1+0{,}01p)^n + \frac{100}{p}u.$

Bemerkung. Aufgaben von dieser Art lassen sich entweder durch Summirung einer geometrischen Reihe, oder auch auf folgende Weise lösen: Man denke sich, der Capitalist A lasse n Jahre hindurch sein Capital nebst den Zinsen und Zinseszinsen unangetastet, leihe aber gleich zu Anfange der Zeit von einem anderen Capitalisten B ein Capital $(100 : p)u = C$, dessen jährliche Zinsen so viel betragen, als er zu seinem Unterhalte gebraucht, und gebe nach Verlauf der n Jahre das geliehene Capital sammt Zinseszinsen wieder zurück. Das ausgeliehene Capital verzinst sich in n Jahren zu $k(1+0{,}01p)^n$, das verschuldete Capital aber zu $C(1+0{,}01p)^n$. Das Vermögen des Capitalisten besteht also nach n Jahren aus dem zu p Procent verzins'ten eigenen Capitale k und aus dem geliehenen C; die Schuld aus dem geliehenen Capital C nebst seinen Zinseszinsen. Nach Abzug der letzteren erhält man also als Resultat für die Auflösung der Aufgabe:
$k(1+0{,}01p)^n + C - C(1+0{,}01p)^n = (k-C)\,(1+0{,}01p)^n + C.$

β) Wie heißt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn das Capital jährlich nicht um u vermindert, sondern um u vermehrt wird?

Antw.: $\{k + \frac{100}{p}u\}\,(1 + 0{,}01p)^n - \frac{100}{p}u.$

Bemerkung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht auf ähnliche Weise, wie die der vorigen. Man denke sich das Capital k um ein Capital $(100 : p)u$ vermehrt, dessen jährliche Zinsen mit u entrichtet werden, und welches nach n Jahren wieder zurück zu geben ist.

49) Ein Capitalist, der ein Vermögen von 200000 Thlrn. hat, zieht jährlich aus seinem Gelde 5 Procent und gebraucht hiervon zu seiner Haushaltung 2000 Thlr. Wie groß wird sein Vermögen nach 12 Jahren sein? Antw.: 327337 Thlr.

50) Von einer Schuld von 2578 Gulden, die zu 5 Procent verzinst ist, werden am Ende eines jeden Jahres 100 Gulden abgetragen. Wie viel beträgt die Schuld nach Verlauf von 10 Jahren? Antw.: $2941\frac{1}{2}$ Gulden.

51) In einem Gemeindewalde, der 10000 Klaftern Holz enthält und dessen Zuwachs jährlich 5 pCt. beträgt, werden zu Ende eines jeden Jahres 800 Klaftern Holz geschlagen. Wie viel Klaftern wird der Wald nach 10 Jahren noch enthalten? A.: 6226,6 Kl.

52) Einer hat ein Vermögen von 2817 Gulden, welches zu 4 Procent aussteht, und vermehrt dasselbe jährlich nicht allein um

die Zinsen, sondern auch noch um 420 Gulden. Wie groß wird das Capital nach 8 Jahren sein? Antw.: 7725,2 Gulden.

53) Ein Pachter ist 8 Jahre hindurch mit seiner Pacht von 280 Thlrn. zurückgeblieben. Wie viel hat er am Ende des 8ten Jahres zu bezahlen, wenn die Zinseszinsen in Anschlag gebracht werden und die Schuld zu 4 pCt. verzins't ist? A.: 2580 Thlr.

54) Einer hat sein Capital von 30000 Thlrn. zu $4\frac{1}{4}$ pCt. auf Zinsen ausstehen und gebraucht jährlich 4680 Thaler. Nach wie viel Jahren wird sein Vermögen aufgezehrt sein?
Antw.: Nach 7 bis 8 Jahren.

55) Ein Capital k steht zu p Procent Zinsen; nach wie viel Jahren wird daraus die Summe k' werden, wenn die Zinsen jährlich zum Capital geschlagen und außerdem das Capital jährlich um die Summe u vermehrt oder vermindert wird?

Antw.: Nach $\dfrac{\log\left(k' \pm \dfrac{100}{p}u\right) - \log\left(k \pm \dfrac{100}{p}u\right)}{\log(1+0{,}01p)}$ Jahren.

56) Jemand hinterläßt sein ganzes Vermögen seinen Erben unter der Bedingung, 12 Jahre hindurch am Ende eines jeden Jahres seinem treuen Diener 175 Thlr. zu zahlen. Für wie viel können die Erben diese Verpflichtung abkaufen, wenn die Zinsen zu 4 Procent gerechnet werden? Antw.: Für 1642,4 Thlr.

57) Jemand hat eine Jahrrente (Annuität) von 700 Thlrn. auf 10 Jahre zu genießen. Wie viel ist für dieselbe jetzt zu bezahlen, wenn die Zinsen zu $4\frac{1}{4}$ Procent gerechnet werden?
Antw.: 5607,7 Thlr.

58) Wie groß ist der baare Werth einer Jahrrente r, welche man n Jahre hindurch am Ende eines jeden Jahres zu genießen hat, wenn der Zinsfuß p ist?

Antw.: $\frac{100}{p}r[1-(1+0{,}01p)^{-n}]$ *).

59) Für eine n Jahre hinter einander zu beziehende Jahrrente wird zu dem Zinsfuße p baar die Summe b bezahlt. Wie groß ist die Jahrrente?

Antw.: $\dfrac{(1+0{,}01p)^n \cdot b \cdot p}{100[(1+0{,}01p)^n - 1]}$.

60) α) Eine Schuld von 3816 Thalern, welche zu 4 Procent verzinset ist, soll in 5 jährlichen Terminen zu gleichen Summen abgetragen werden. Welche Summen sind jedesmal zu zahlen?

β) Ein Staat macht ein Anlehen von 3 Millionen Gulden zu 5 Procent und will dasselbe in 25 Jahren abtragen, dadurch,

*) Dieser Ausdruck läßt sich mittelst Trigonometrie berechnen, wenn man $(1+0{,}01p)^{-n} = \sin\alpha^2$ setzt, wodurch das Resultat $100r \cdot \cos\alpha^2 : p$ wird.

daß jährlich eine bestimmte Summe, worin die Zinsen mitbegriffen sind, bezahlt wird. Wie groß ist diese Summe?

Antw.: α) 857,18 Thlr. β) 212857 fl.

61) α) Auf wie viel Jahre ist eine Jahrrente r zu genießen, deren Werth der zu p Procent verzinsten baaren Summe b gleich kommt?

β) Wie viel Jahre hindurch kann Jemand eine Jahrrente von $1001\frac{1}{2}$ Thaler genießen, wenn er baar 10000 Thaler zahlt und wenn die Zinsen zu 4 Procent gerechnet werden?

Antw.: α) Auf $\dfrac{log\ (100r) - log\ (100r-bp)}{log\ (1+0{,}01p)}$ Jahre. β) 13 Jahre.

62) α) Eine Rente von 600 fl. ist 30 Jahre lang jährlich zu beziehen. Zu welcher Zeit kann man dieselbe mit $600 \cdot 30 = 18000$ fl. auf einmal bezahlen, wenn die Zinseszinsen zu 5 pCt. gerechnet werden? β) Welches ist der mittlere Zahlungs-Termin einer Jahresrente, welche n Jahre hindurch am Ende eines jeden Jahres fällig ist, wenn die Zinseszinsen zu p Procent gerechnet werden? Antw.: α) In 13,70 Jahren.

β) $\dfrac{log\ (\frac{1}{100}np) + n\ log\ (1+0{,}01p) - log\ [(1+0{,}01p)^n - 1]}{log\ (1+0{,}01p)}$.

63) Jemand wünscht, nach seinem Tode seinen zurückbleibenden Angehörigen 4000 Thaler zu hinterlassen, und will zu dem Zwecke an eine öffentliche Lebens-Versicherungs-Anstalt jährlich postnumerando eine gewisse Summe zahlen. Welche Summe hat diese Anstalt zu fordern, wenn sie gemäß den Sterblichkeits-Registern als wahrscheinliche Lebensdauer des Versichernden 18 Jahre annimmt und wenn der Zinsfuß $3\frac{3}{4}$ pCt. beträgt?

Antw.: 159 Thlr. 17 Sgr. 7 Pfg.

64) Jemand will 21 Jahre hindurch zu Anfange eines jeden Jahres eine bestimmte Summe zahlen, damit nach Verlauf der 21 Jahre er selbst oder ein Anderer 8 Jahre hindurch eine jährliche, Ende eines jeden Jahres zu zahlende, Rente von 600 Thlrn. genieße. Wie groß ist die jährlich zu zahlende Summe, wenn die Zinsen zu $4\frac{1}{2}$ Procent p. a. gerechnet werden? und wie heißt die Auflösung der Aufgabe, wenn für 21, 8, 600 und $4\frac{1}{2}$ die allgemeinen Zeichen m, n, r und p gesetzt werden?

Antw.: α) 112,1 Thlr.; β) $\dfrac{r - \dfrac{r}{(1+0{,}01p)^n}}{[(1+0{,}01p)^m - 1]\,(1+0{,}01p)}$ *).

Bemerkung. Anwendung von dieser Aufgabe macht man bei den Berechnungen der Witwencassen.

---

*) Setzt man $1 : (1+0{,}01p)^n = sin\ \alpha^2$, $1 : (1+0{,}01p)^m = sin\ \beta^2$, so ändert sich die Formel in $r \cdot (cos\ \alpha\ tang\ \beta)^2 : (1+0{,}01p)$ um. Für das Zahlen-Beispiel ist $log\ cos\ \alpha = 9{,}7362429$, $log\ tang\ \beta = 9{,}9090437$.

65) Wenn eine Jahrrente r, welche n Jahre zu genießen ist, den baaren Werth b hat, wie viel beträgt der Zinsfuß?

Antw.: Die Auflösung führt auf die Gleichung:

$1 - \frac{1}{(1+0{,}01x)^n} = \frac{bx}{100r}$. Setzt man $\frac{1}{1+0{,}01x} = y$, so ist:

$ry^{n+1} - (r+b)y + b = 0.$

66) α) Eine Jahrrente von 600 Gulden, welche 20 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres fällig ist, soll in eine andere umgewandelt werden, die 25 Jahre lang am Ende eines jeden Vierteljahres zahlbar ist. Wie groß wird die neue Rente sein, wenn Zinseszinsen zu 4 Procent p. a. gerechnet werden? β) Wie heißt das Resultat, wenn für 600, 20, 25, $\frac{1}{4}$ und 4 die allgemeinen Zeichen r, n, t und $\frac{1}{m}$ und p gesetzt werden? γ) Eine Rente von 500 fl., am Ende eines jeden Jahres fällig, soll in eine Rente umgewandelt werden, die alle Vierteljahre fällig ist und eben so lange läuft, wie die erste. Wie hoch wird sich diese Vierteljahrsrente belaufen, wenn Zinseszinsen zu 5 Procent gerechnet werden? A.: α) 128,495 fl.

β) $\frac{100r(1+0{,}01p)^{t-n}\left[(1+0{,}01p)^{\frac{1}{m}}-1\right]\left[1+0{,}01p)^n-1\right]}{\left[(1+0{,}01p)^t-1\right]\cdot p}$. γ) 122,68 fl.

67) Es hat ein Waldbesitzer die Verpflichtung, das erforderliche Bauholz zu allen von Zeit zu Zeit vorkommenden Neubauten eines Schulgebäudes unentgeltlich herzugeben. Der Schulvorstand will aber gegen eine ihm vom Waldbesitzer zu gewährende angemessene jährliche Rente x auf diese Holzgerechtsame für immer verzichten. Es stehe nach technischen Ermittelungen fest, daß das Schulgebäude nach seiner gegenwärtigen Beschaffenheit noch n Jahre stehen könne, wenn es mit einem Holzaufwande im Werthe von k Thlrn. neugebaut und dieser Neubau alle m Jahre mit einem gleichen Aufwande wiederholt werden müsse. Wie groß ist die Rente x, wenn der Zinsfuß p ist?

Antw.: $x = \frac{pk(1+0{,}01p)^{m-n}}{100(1+0{,}01p)^m - 1}$.

Beispiel: $m = 200$, $k = 10000$, $n = 100$, $p = 4$, $x = 7{,}9229$.

68) α) Eine Jahrrente r steigt n Jahre hindurch jährlich in arithmetischer Progession r, $2r$, $3r$ u. s. w. Welches ist der baare Werth derselben, wenn der Zinsfuß p ist?

Antw.: $\frac{100}{p}\left[(1+0{,}01p)b - nr(1+0{,}01p)^{-n}\right]$, wenn b das Resultat der 58ten Aufgabe bezeichnet.

β) Eine Jahrrente r steigt n Jahre hindurch jährlich in geometrischer Progression r, er, e^2r u. s. w. Welches ist der baare Werth, wenn der Zinsfuß p ist?

Antw.: $\dfrac{r\dfrac{e^n}{(1+0{,}01p)^n}-r}{e-1-0{,}01p}$.

69) Verdünnter Weingeist, welcher in einem Liter c Liter wasserfreien Weingeistes enthält, wird n mal hinter einander mit einer $p$fachen Quantität eines anderen Weingeistes versetzt, welcher in einem Liter a Liter wasserfreien Weingeistes enthält. Wie viel wasserfreier Weingeist ist in einem Liter der letzten Mischung enthalten? Antw.: $a+(c-a):(p+1)^n$ Liter.

70) Zwei Gefäße, A und B, deren Raum-Inhalte a und a' Liter sind, seien mit einer Mischung von Wasser und Wein gefüllt, und zwar seien in dem ersten Gefäße α, in dem zweiten α' Liter Wein. Mit zwei kleineren Gefäßen, von denen jedes 1 Liter enthält, werde aus jedem Gefäße in das andere wechselseitig, und zwar gleichzeitig, von der Mischung ausgeschöpft. Wie viel Wein befindet sich in jedem Gefäße, wenn diese Operation n mal hinter einander vollzogen wird?

Antw.: In dem ersten und zweiten Gefäße:

$$a\,\frac{\alpha+\alpha'}{a+a'} \pm \frac{\alpha a'-\alpha' a}{a+a'}\left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right)^n \text{ Liter.}$$

B. Kettenbrüche und Theilbruchreihen.

§. 85. Kettenbrüche.

1) Was versteht man unter einem Ketten- oder continuirlichen Bruche?

2) Die Kettenbrüche:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}\qquad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}}\qquad \text{und}\quad \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}}$$

in gewöhnliche Brüche zu verwandeln.

3) Folgende Brüche in Kettenbrüche zu verwandeln: $\alpha)\ \frac{3}{16}$, $\beta)\ \frac{25}{56}$, $\gamma)\ \frac{151}{121}$, $\delta)\ \frac{115}{151}$, $\varepsilon)\ \frac{32280}{36931}$, $\zeta)\ \frac{9976}{6961}$, $\eta)\ \frac{76}{123}$.

4) Eben so: $\alpha)\ \dfrac{bc+1}{(ab+1)c+a}$, $\beta)\ \dfrac{bcd+d+b}{abcd+cd+ad+ab+1}$.

5) Eben so: $\alpha)\ \dfrac{a^4+6a^3+14a^2+15a+7}{a^3+6a^2+13a+10}$ und

$\beta)\ \dfrac{48n^4+236n^3+464n^2+425n+151}{48n^3+188n^2+252n+115}$.

Aufl.: Die Nenner sind: $\alpha)$ a, $a+1$, $a+2$, $a+3$; $\beta)$ $n+1$, $2n+3$, $4n+5$, $6n+7$.

6) Wie ändert sich ein Kettenbruch, wenn der letzte Bruch im Nenner ausgelassen wird? wie, wenn der letzte und vorletzte, der letzte, vorletzte und drittletzte Bruch u. s. w., ausgelassen werden?

7) Was versteht man unter Näherungs- oder Partialwerth eines Kettenbruches? Welches sind die Näherungswerthe der Brüche in Nr. 3?

8) Nach welcher Regel kann man aus zweien auf einander folgenden Näherungswerthen eines gegebenen Kettenbruches den auf dieselben folgenden Näherungswerth desselben Kettenbruches ableiten?

9) Sind $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ zwei auf einander folgende Näherungswerthe, so ist jedesmal $pq' - p'q$ entweder $+1$ oder -1. Warum? und in welchem Falle $+1$, in welchem -1?

10) Wie groß ist die Differenz zwischen zweien auf einander folgenden Näherungswerthen eines Kettenbruches?

11) Der Unterschied zwischen dem Werthe des vollständigen Kettenbruches und zwischen einem Näherungswerthe ist immer kleiner als 1 dividirt durch das Quadrat des Nenners des Näherungswerthes. Warum?

12) Warum kommt ein Näherungswerth eines Bruches dem Werthe des ganzen Kettenbruches immer näher, als jeder andere Bruch, dessen Nenner kleiner, als der Nenner des Näherungswerthes ist?

13) Von folgenden Brüchen die Näherungswerthe anzugeben: $\alpha)$ $\frac{479}{6628}$, $\beta)$ $\frac{55}{117}$, $\gamma)$ $\frac{251}{1313}$, $\delta)$ $\frac{3370}{399}$, $\varepsilon)$ $\frac{51}{16}$, $\zeta)$ $\frac{3696}{11593}$, $\eta)$ 2,718281828459.

Aufl.: $\alpha)$ $\frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{6}{83}, \frac{43}{595}$; $\beta)$ $\frac{1}{2}, \frac{7}{15}, \frac{8}{17}$; $\gamma)$ $\frac{1}{5}, \frac{4}{21}, \frac{13}{68}$; $\delta)$ $8, \frac{17}{2}, \frac{76}{9}, \frac{549}{65}$; $\varepsilon)$ $3, \frac{16}{5}$; $\zeta)$ $\frac{1}{3}, \frac{7}{22}, \frac{22}{69}, \frac{161}{505}, \frac{505}{1584}$; $\eta)$ $2, 3, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \frac{1264}{465}, \frac{1457}{536}$ u. s. w.

14) $\alpha)$ Von den beiden Quotienten in Nr. 5 die Näherungswerthe anzugeben; eben so $\beta)$ von $\frac{n^3+n^2+n+1}{n^4+n^2-1}$, und $\gamma)$ von $\frac{n^4+30n^3+276n^2+867n+741}{n^3+29n^2+246n+596}$.

15) Den Quotienten der beiden Kettenbrüche:

$$\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{3n+\cfrac{1}{5n}}} : \cfrac{1}{5n+\cfrac{1}{3n+\cfrac{1}{n}}}$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln und die Näherungswerthe anzugeben.

16) α) Die Kettenbrüche:

$$\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c - \cfrac{1}{d}}}} \quad \text{und} \quad \cfrac{a}{b + \cfrac{c}{d + \cfrac{e}{f + \cfrac{g}{h}}}}$$

in gewöhnliche Brüche zu verwandeln.

β) Die Kettenbrüche:

$$\cfrac{\frac{1}{3}}{-\cfrac{\frac{1}{5}}{-\frac{1}{5}}}, \quad \cfrac{\frac{1}{2}}{-\cfrac{\frac{1}{3}}{+\cfrac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{5}}}}, \quad \cfrac{\frac{1}{2}}{+\cfrac{\frac{3}{4}}{+\cfrac{\frac{5}{6}}{+\frac{7}{8}}}}$$

zu berechnen und in Kettenbrüche gewöhnlicher Art zu verwandeln.

17) Welche Näherungswerthe geben die unendlichen Kettenbrüche:

$$\alpha)\ \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 \ldots}}} \quad \text{und} \quad \beta)\ \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 \ldots}}}?$$

Antw.: α) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{13}{21}$, $\frac{21}{34}$, $\frac{34}{55}$, $\frac{55}{89}$, $\frac{89}{144}$; β) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{8}{21}$, $\frac{13}{34}$, $\frac{21}{55}$, $\frac{34}{89}$, $\frac{55}{144}$ *).

Folgende Verhältnisse sollen durch kleinere Zahlen dargestellt werden:

18) Das Verhältniß eines Meters (Stabes), der 443,296 par. Lin. gleich ist, zu einem preußischen Fuße, der 139,13 par. Lin. groß ist.

Aufl.: 3 : 1, 16 : 5, 35 : 11, 51 : 16, 137 : 43, 462 : 145, 2909 : 913 u. s. w.

19) Das Verhältniß eines alten preuß. Zolles zu einem Centimeter.

20) Das Verhältniß eines Stabes zu einer alten preuß. Elle (à $25\frac{1}{2}$ Zoll).

21) α) Das Verhältniß eines preußischen Fußes zu einem englischen Fuße = 120000 : 116537; β) das Verhältniß eines preußischen Fußes zu einem österreichischen Fuße à 140,127 pariser Linien; γ) das Verhältniß eines österreichischen Fußes zu einem Meter.

---

*) Die in α) und β) auf einander folgenden Brüche stehen in einer merkwürdigen Beziehung zur Pflanzenwelt. Nach den schönen Untersuchungen C. Schimper's und A. Braun's werden vorzüglich durch diese Brüche die Stellungen der Blätter und Zweige gegen den Stamm, die Anordnungen der Schuppen in den Tannenzapfen u. s. w. angegeben. Das durch einen Bruch ausgedrückte Maß der Blattstellung gibt das Verhältniß der Zahl der Umläufe zu der Zahl der spiralig den Stamm umlaufenden Blätter an. Die Blattstellung $\frac{5}{8}$ z. B. deutet an, daß nach 5maligem Umlaufe das 9te Blatt wieder in gleicher Richtung über dem ersten Blatte zu stehen kommt.

22) Das Verhältniß einer preußischen Meile zu einem Kilometer.

23) α) Das Verhältniß eines preußischen Quadratfußes zu einem Quadratmeter; β) das Verhältniß eines preußischen Morgen (à 180 Quadratruthen) zu einer französischen Are (à 100 Quadratmeter); γ) das Verhältniß eines preußischen Morgen (à 180 Quadratruthen) zu einem wiener Joch (à 1600 Quadratklafter à 36 Quadratfuß österr.).

24) α) Das Verhältniß eines Kilogrammes oder eines Doppelpfunds preußisch Neugewicht zu einem preußischen Pfunde Altgewicht 2,13807 : 1; β) das Verhältniß eines preußischen Quarts zu einem französischen Litre = 1,145 : 1; γ) das Verhältniß eines Hectoliters zu einer wiener Metze 1,625897 : 1; δ) das Verhältniß eines Litres zu einem wiener Maß 0,70665 : 1.

25) Das Verhältniß des Durchmessers eines Kreises zu seinem Umfange 1 : 3,1415926536. Aufl.: 1 : 3, 7 : 22, 106 : 333, 113 : 355, 33102 : 103993.

Bemerkung. Das Verhältniß 7 : 22 war bereits Archimedes bekannt, der angab, daß die Zahl π zwischen $3^1/_7$ und $3^{10}/_{71}$ enthalten sei. Das vierte, 113 : 355, rührt von Adrian Metius her, und gibt nur noch einen Fehler von 1 auf etwa 12 Millionen in Theilen des Umfanges. Letzteres Verhältniß läßt sich praktisch leicht auffinden, wenn man nur die drei ersten ungeraden Zahlen doppelt neben einander setzt, 113355, und die sechszifferige Zahl in zwei dreizifferige, 113 und 355 zertheilt.

26) Das Verhältniß des Durchmessers eines Kreises zur Seite des dem Kreise an Inhalt gleichen Quadrats 1 : 0,886226925.

Aufl.: 1 : 1, 8 : 7, 9 : 8, 35 : 31, 44 : 39, 123 : 109, 167 : 148, 9642 : 8545 u. s. w.

27) α) Das Verhältniß des Durchmessers einer Kugel zur Seite des ihr an Inhalt gleichen Würfels 1 : 0,805996...; β) das Verhältniß der Höhe eines Cylinders, dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Grundfläche, zur Seite eines an Inhalt gleichen Würfels 1 : 0,922635... Aufl.: α) 1 : 1, 5 : 4, 31 : 25, 67 : 54, 567 : 457, 3469 : 2796 u. s. w.; β) 12 : 11, 13 : 12, 168 : 155, 349 : 322 u. s. w.

28) Das Verhältniß des mittleren synodischen Mondmonates (d. h. der Zeit von einem Neumonde zum nächstfolgenden) = 29,530588 Tagen, zum tropischen Sonnenjahre = 365,24222 Tagen.

Aufl.: 1 : 12, 2 : 25, 3 : 37, 8 : 99, 11 : 136, 19 : 235, 334 : 4131 u. s. w.

Bemerkung. Das Verhältniß 19 : 235 ist etwas zu klein. Da 19 Sonnenjahre sehr nahe 235 synodische Monate ausmachen, so werden nach 19 Jahren demnach die Mondphasen wieder nahezu auf die nämlichen Tage des Jahres fallen. Dieses Verhältniß 19 : 235 war den Alten schon bekannt; der Athener Meton macht nämlich Ol. 86.4 die für die Zeitrechnung wichtige Entdeckung und gründete hierauf einen 19jährigen Cyklus (Mondzirkel), dessen Anfang er auf Ol. 87.1 (430 v. Chr.) festsetzte.

Das gemeine Jahr hatte 12 Mondmonate, ein Schaltjahr, deren 7 in der 19jährigen Periode eintraten, hatte 13 Mondmonate. Diese 7 Schaltjahre waren das 3., 5., 8., 11., 13., 16. und 19. des 19jährigen Cyklus. Das jedesmalige Jahr dieses Cyklus wurde in den Tempeln mit goldenen Buchstaben aufgezeichnet und hieß deshalb die goldene Zahl (siehe Beispiel 22, §. 79). Das nicht so genaue Verhältniß 8 : 99 diente ebenfalls als Grundlage eines älteren, durch Kleostratus aus Tenedos 532 vor Christus eingeführten und von den Griechen angewandten Cyklus, der so genannten Oktaëteris, welcher 5 Jahre mit 12 Mondmonaten und 3 Schaltjahre mit 13 Mondmonaten umfaßte, bei welchem das 3., 5. und 8. Jahr Schaltjahre waren.

29) Es soll mit Hülfe der in Nr. 28 bestimmten Näherungs-Verhältnisse und aus der dem Kalender zu entnehmenden Zeit des zuletzt eingetretenen Vollmondes angegeben werden, welche Phase der Mond am 28. August 1749, dem Geburtstage Göthe's, zeigte. [S. Göthe, „Dichtung und Wahrheit".]

30) Das tropische Jahr enthält, genau genommen, 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten, 47,4 Secunden. Nach wie viel Jahren von 365 Tagen hat man einen Tag oder mehrere Tage einzuschalten, damit das Sonnenjahr ein festes bleibt?

Antw.: Entweder hat man nach 4 Jahren einen Tag*) oder nach 29 Jahren 7 Tage, oder nach 33 Jahren 8 Tage**), oder nach 161 Jahren 39 Tage, oder nach 194 Jahren 47 Tage***) einzuschalten.

31) Das Verhältniß der Umlaufszeit des Planeten Mars um die Sonne, 686 Tage 23 Stunden 30 Minuten 41,4 Secunden zu der Umlaufszeit des Planeten Jupiter, 4332 Tage 14 Stunden 2 Minuten 48,7 Secunden, durch kleinere Zahlen auszudrücken.

32) Das Verhältniß der großen Achse des Erdsphäroides zur kleinen Achse = 298,152818 : 299,152818 durch kleinere Zahlen auszudrücken.

§. 86.

Theilbruchreihen.

Eine besondere Art von Näherungswerthen für vielzifferige gewöhnliche Brüche oder Decimalbrüche, welche von praktischer Anwendung sind, erhält

*) Julianische Einschaltungsmethode, von Julius Cäsar im Jahre 45 vor Christus eingeführt, welche bei den Russen und Griechen noch in Gebrauch ist. Hiervon verschieden ist die von Papst Gregor XIII. im Jahre 1582 eingeführte Schaltmethode, nach welcher alle 400 Jahre 3 Schalttage ausfallen; daher der jetzige Unterschied von 12 Tagen zwischen unserem, dem gregorianischen, Kalender und dem der Russen und Griechen.

**) Persische oder dschelalische Einschaltungsmethode, von dem Sultan Dschelal Eddin Melek Schah im Jahre 1079 nach Christus nach dem Vorschlage von Omar ben Ibrahim Alch-e-yami in Persien eingeführt.

***) In 194 Jahren 47 Tage macht in 388 Jahren 94 Tage; setzt man noch für 12 Jahre 3 Schalttage hinzu, so erhält man für 400 Jahre 97 Schalttage nach der gregorianischen Schaltmethode.

man, wenn man dieselben in eine Reihe von Brüchen verwandelt, welche alle zum Zähler 1 haben, und von welchen jeder folgende ein aliquoter Theil des unmittelbar vorhergehenden ist, nämlich in eine Reihe von der Form:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{xyz}+\frac{1}{xyzu}+\frac{1}{xyzuv}\cdots,$$

oder wenn man den ersten Bruch mit A_1, den zweiten mit A_2, den dritten mit A_3 u. s. w. bezeichnet, in eine Reihe von der Form:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}A_1+\frac{1}{z}A_2+\frac{1}{u}A_3+\frac{1}{v}A_4\ldots.$$

Solche auf einander folgende Brüche sind von dem Verfasser dieser Sammlung „Theilbrüche" und die Reihen selbst „Theilbruchreihen" genannt und zuerst zur Darstellung gewöhnlicher Brüche, der Quadrat- und Kubikwurzeln, Logarithmen (§. 87) und der Wurzeln der Gleichungen (§. 102) angewandt worden. Die an gehöriger Stelle gegebenen Anleitungen für die Theorie der Theilbruchreihen reichen für den aufmerksamen Leser vollkommen aus.

Begrenzt man diese Reihe bei irgend einer Stelle, so erhält man einen Näherungswerth, der dem wahren Werthe um so näher kommt, je mehr Brüche man hierzu nimmt.

Man könnte diese Reihe auch durch einen aufsteigenden Kettenbruch*)

$$\frac{1+\frac{1+\frac{1+\frac{1}{u}}{z}}{y}}{x}$$

bezeichnen, bei welchem der Zähler in ähnlicher Weise sich fortsetzt, wie dieses bei den gewöhnlichen Kettenbrüchen mit dem Nenner der Fall ist.

1) α) **Die Näherungswerthe der Theilbruchreihe $\frac{1}{x}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{xyz}+\frac{1}{xyzu}$ anzugeben.**

Aufl.: $\frac{1}{x}$, $\frac{y+1}{xy}$, $\frac{yz+z+1}{xyz}$, $\frac{yzu+zu+u+1}{xyzu}$.

β) **Der Bruch $\frac{1301}{5720}$ soll in eine Theilbruchreihe verwandelt werden.**

Aufl.: Es sei $\frac{1301}{5720}=\frac{1}{x}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{xyz}+\frac{1}{xyzu}\cdots$; $1301x = 5720+\frac{5720}{y}+\frac{5720}{yz}+\frac{5720}{yzu}\cdots\cdots$ Da 5720, durch 1301 dividirt, zum Quotienten 4 gibt, x aber (so wie y, z u. s. w.) eine ganze Zahl sein soll, so muß die Summe der in dem Werthe von x nach $\frac{5720}{1301}$ folgenden Quotienten wenigstens $=1$, also x wenigstens $=4+1=5$ sein. Man erhält demnach:

$6505 = 5720+\frac{5720}{y}+\cdots$, und hieraus

$785y = 5720+\frac{5720}{z}+\frac{5720}{zu}\cdots$, mithin $y = 8$;

---

*) Ueber diese Brüche vergleiche man: „Die aufsteigenden Kettenbrüche", von Alfred Kunze, Weimar 1857.

$$560z = 5720 + \frac{5720}{u} + \cdots; \qquad z = 11.$$

$$440u = 5720 + \cdots; \qquad u = 13.$$

Es ist demnach: $\frac{1301}{5720} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{5.8.11} + \frac{1}{5.8.11.13}$ $= \frac{1}{5} + \frac{1}{8}A_1 + \frac{1}{11}A_2 + \frac{1}{13}A_3$. Die Näherungswerthe sind $\frac{1}{5}$, $\frac{9}{40}$, $\frac{100}{440} = \frac{5}{22}$. Die aus dem Kettenbruche abgeleiteten Näherungswerthe sind: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{5}{22}$, $\frac{58}{255}$, $\frac{237}{1042}$, $\frac{532}{2339}$.

Zum schnellen Ausrechnen der Theiler 5, 8, 11 und 13 dient folgendes Schema:

$$\begin{array}{rrrrl}
 & & & 5720 : 1301 & = \ \ 5 = x \\
 & & & \underline{6505} & \\
 & & 5720 : & 785 & = \ \ 8 = y \\
 & & \underline{6280} & & \\
 & 5720 : & 560 & & = 11 = z \\
 & \underline{6160} & & & \\
5720 : & 440 & & & = 13 = u.
\end{array}$$

Nimmt man die Zahlen x, y, z u. s. w. so klein als möglich, d. h. um 1 größer, als die ganzen Quotienten der Divisionen 5720 : 1301, 5720 : 785 u. s. w., so müssen dieselben allmählich zunehmen, indem die Divisoren 1301, 785 u. s. w. allmählich abnehmen. Die auf diese Weise sich ergebende Theilbruchreihe ist nothwendig bei allen endlichen Brüchen eine begrenzte. Der Bruch $\frac{1301}{5720}$ läßt sich aber noch auf mehrfache Weise in eine Reihe von Theilbrüchen verwandeln, wenn man nämlich x entweder $= 6$ oder $= 7$ u. s. w. setzt. Es wird alsdann die verlangte Reihe:

$$\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}A_1 + \tfrac{1}{11}A_2 + \tfrac{1}{20}A_3 + \tfrac{1}{30}A_4 + \ldots$$
$$\text{oder } \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{6}A_2 + \tfrac{1}{10}A_3 + \tfrac{1}{20}A_4 + \ldots$$

Obgleich es im Allgemeinen am besten ist, die Zahlen x, y, z u. s. w. so klein als möglich zu nehmen, so ist es doch von praktischem Vortheile, für x, y, z solche Zahlen zu wählen, mit welchen sich bequem dividiren läßt, z. B. 10 anstatt 9, 20 anstatt 19 u. s. w. Nimmt man für x, y, z nicht die kleinsten Werthe, so kann der Bruch sich in eine periodische Theilbruchreihe verwandeln; so wird z. B.: $\frac{1}{5} = \frac{1}{7} + \frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{7}A_2 + \frac{1}{3}A_3$ u. s. w. (Periode der Theiler 7, 3), $\frac{3}{14} = \frac{1}{7} + \frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{3}A_2 + \frac{1}{3}A_3 + \ldots$.

γ) Den Bruch $\frac{M}{N}$ in eine Theilbruchreihe zu verwandeln.

Aufl.: Es sei $\frac{M}{N} = \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyzu} + \frac{1}{xyzuv} \cdots$, alsdann ist: $Mx - N = \frac{N}{y} + \frac{N}{yz} + \frac{N}{yzu} + \frac{N}{yzuv} \cdots$ Da $Mx > N$ sein muß, so nehme man die ganze Zahl x so, daß $x > \frac{N}{M}$ wird. Aus der obigen Gleichung folgt nun: $(Mx - N)y - N = \frac{N}{z} + \frac{N}{zu}$. Die ganze Zahl y wähle man so, daß $y > \frac{N}{Mx - N}$ wird, alsdann ist:

$$((Mx - N)y - N)z - N = \frac{N}{u} + \frac{N}{uv} + \cdots$$

Die ganze Zahl z erhält man aus $z > \frac{N}{(Mx-N)y-N}$ und so fort.

Sollen x, y, z möglichst klein werden, so muß $x-1 < \frac{N}{M}$,
$y-1 < \frac{N}{Mx-N}$, $z-1 < \frac{N}{(Mx-N)y-N}$ sein.

2) α) Das Beispiel: 5720 Pfund kosten 67 Thlr. 3 Sgr. 4 Pfg., was kosten 1301 Pfund? mit Hülfe der in der vorhergehenden Nummer aufgefundenen Theilbruchreihe zu berechnen.

β) Man soll den Bruch $\frac{213}{749}$ in eine Theilbruchreihe verwandeln und die Näherungswerthe bestimmen.

Aufl.: $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}A_1 + \frac{1}{10}A_2 + \frac{1}{749}A_3$. Näherungswerthe: $\frac{1}{4}$, $\frac{9}{32}$, $\frac{91}{320}$. Die Kettenbrüche geben die Näherungswerthe $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{29}{102}$, $\frac{31}{109}$, $\frac{91}{320}$.

3) Eben so die Brüche $\frac{81}{209}$ und 0,503398.

4) Eben so die Brüche in §. 85 Nr. 13.

5) Bei den Römern wurde ein As in 12 Unzen à 6 Sextulae getheilt. Es soll $\frac{1}{100}$ As in einer Reihe von Theilbrüchen einer Sextula dargestellt werden*).

Aufl.: $\frac{72}{100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{4}A_2 + \frac{1}{4}A_3 + \frac{1}{9}A_4 + \frac{1}{13}A_5 + \frac{1}{25}A_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{8}A_2 + \frac{1}{25}A_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{3}A_2 - \frac{1}{25}A_3$.

6) Man soll das Verhältniß eines Meters zu einem preußischen Fuße, 3,186199 : 1, und umgekehrt durch eine Theilbruchreihe darstellen.

Aufl.: $3{,}186199 : 1 = 3 + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}A_1 + \frac{1}{19}A_2 + \frac{1}{25}A_3 + \cdots = 3 + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}A_1 + \frac{1}{6}A_2 + \frac{1}{40}A_3 + \frac{1}{4}A_4 + \cdots$ $1 : 3{,}186199 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}A_1 + \frac{1}{11}A_2 - \frac{1}{42}A_3 \ldots$

7) Das Verhältniß eines Meters zu einem pariser Fuße und umgekehrt, eines pariser Fußes zu einem preußischen Fuße und umgekehrt, eines preußischen Altpfundes zu einem Kilogramm und umgekehrt in Reihen von Theilbrüchen zu verwandeln. (S. §. 85 Nr. 18 und 21.)

8) Die Zahlen $\pi = 3{,}1415926536$ und $1 : \pi$ in Theilbruchreihen zu verwandeln.

Aufl.: $\pi = 3 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}A_1 + \frac{1}{17}A_2 + \frac{1}{19}A_3 + \frac{1}{300}A_4 + \cdots = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{113}A_1 - \frac{1}{4739}A_2 + \frac{1}{47051}A_3 + \frac{1}{499702}A_4 \ldots = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{100}A_1 + \frac{1}{10}A_2 + \frac{1}{7}A_3 + \frac{1}{25}A_4$ (= 3,14159265306..)

$1 : \pi = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}A_1 + \frac{1}{11}A_2 + \frac{1}{50}A_3 + \frac{1}{8}A_4 = \frac{1}{3} - \frac{1}{22}A_1 + \frac{1}{118}A_2 - \frac{1}{384}A_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{25}A_1 - \frac{1}{8}A_2 - \frac{1}{70}A_3 \ldots$

9) Den Ueberschuß eines tropischen Jahres, 5 Stunden 48 Minuten 47,4 Secunden über 365 Tage, in eine Reihe von Theilbrüchen eines Tages zu verwandeln.

*) Hor. de Arte Poetica 325: „Romani pueri longis rationibus assem discunt in partes centum diducere."

Aufl.: $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}A_1 + \frac{1}{15}A_2 - \frac{1}{320}A_3 \ldots = \frac{1}{4} - \frac{1}{25}A_1 + \frac{1}{4}A_2 - \frac{1}{15}A_3$ $- \frac{1}{8}A_4 - \frac{1}{9}A_5$ *).

10) Welchem Bruche ist die Theilbruchreihe $\frac{1}{\mathrm{a}} + \frac{1}{\mathrm{b}}A_1 + \frac{1}{\mathrm{c}}A_2 + \frac{1}{\mathrm{d}}A_3 + \frac{1}{\mathrm{e}}A_4$ gleich?

11) Welchen Brüchen sind folgende periodische Theilbruchreihen gleich?

α) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}A_1 + \frac{1}{3}A_2 + \frac{1}{5}A_3 + \cdots$ (Periode der Divisoren 3, 5);
β) $\frac{1}{3} + \frac{1}{7}A_1 + \frac{1}{11}A_2 + \frac{1}{3}A_3 + \frac{1}{7}A_4 + \cdots$ (Per .3, 7, 11);
γ) $\frac{1}{5} + \frac{1}{9}A_1 + \frac{1}{12}A_2 + \frac{1}{17}A_3 + \frac{1}{5}A_4 + \cdot$ (Per. 5, 9, 12, 17);
δ) $\frac{1}{\mathrm{a}} + \frac{1}{\mathrm{b}}A_1 + \frac{1}{\mathrm{a}}A_2 + \frac{1}{\mathrm{b}}A_3 + \cdots$ (Periode a, b);
ε) $\frac{1}{\mathrm{a}} + \frac{1}{\mathrm{b}}A_1 + \frac{1}{\mathrm{c}}A_2 + \frac{1}{\mathrm{d}}A_3 + \frac{1}{\mathrm{e}}A_4 + \frac{1}{\mathrm{a}}A_5 + \ldots$
ζ) $\frac{1}{\mathrm{a}} + \frac{1}{\mathrm{b}}A_1 + \frac{1}{\mathrm{m}}A_2 + \frac{1}{\mathrm{n}}A_3 + \frac{1}{\mathrm{p}}A_4 + \frac{1}{\mathrm{m}}A_5 +$ u. s. w. (Periode m, n, p)?

Antw.: α) $\frac{3}{7}$; β) $\frac{89}{230}$; γ) $\frac{2058}{9179}$; δ) $\frac{b+1}{ab-1}$;

ε) $\frac{bcde + cde + de + e + 1}{abcde - 1}$; ζ) $\frac{(b+1)(mnp-1) + np + p + 1}{(mnp-1)ab}$.

12) $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$ in eine Theilbruchreihe zu verwandeln, so daß die Nenner der Theilbrüche Binome oder Producte aus Binomen werden.

Aufl.: $\frac{3x}{3+x^2} + \frac{28x^4}{315+270x^2}A_1 - \frac{33x^4}{1617 - 490x^2}A_2 \ldots$

§. 87.

Anwendung der Kettenbrüche zur Auflösung der unbestimmten Gleichungen und zur Auffindung der Quadratwurzeln und Logarithmen. Berechnung der Quadrat-, Kubikwurzeln u. s. w. und der Logarithmen durch Theilbruchreihen.

1) Mittels Kettenbrüche die unbestimmte Gleichung $ax - by = 1$ aufzulösen, wenn a und b relative Primzahlen sind.

2) Die unbestimmte Gleichung $ax + by = 1$ aufzulösen.

3) Die unbestimmte Gleichung $ax \mp by = c$ aufzulösen.

4) Folgende unbestimmte Gleichungen aufzulösen:

α) $7x = 11y + 1$; β) $34x - 21y = 1$;
γ) $34x = 41y + 1$; δ) $117x + 121y = 1$;

*) Die drei ersten Glieder dieser zweiten Reihe geben die gregorianische Schaltmethode an. (S. Beispiel 30, §. 85.)

$\varepsilon)$ $41x+29y = 1$; $\zeta)$ $99x-70y = 13$;
$\eta)$ $17x-19y = 23$; $\vartheta)$ $19x-11y = 112$;
$\iota)$ $222x-383y = 6533$.

Aufl.: $\alpha)$ $x = 8+11n$, $y = 5+7n$; $\beta)$ $x = 13+21n$, $y = 21+34n$; $\gamma)$ $x = 35+41n$, $y = 29+34n$; $\delta)$ $x = 30+121n$, $y = -29-117n$; $\varepsilon)$ $x = -12+29n$, $y = 17-41n$; $\zeta)$ $x = 27+70n$, $y = 38+99n$; $\eta)$ $x = 17+19n$, $y = 14+17n$; $\vartheta)$ $x = 14+11n$, $y = 14+19n$; $\iota)$ $x = 390+383n$, $y = 209+222n$.

5) Aus 47 die Quadratwurzel mit Hülfe eines Kettenbruches zu ziehen *).

Aufl.: $x = \sqrt{47} = 6 + \dfrac{\sqrt{47}-6}{1}\left(=\dfrac{1}{\alpha}\right)$,

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{47}-6} = \frac{\sqrt{47}+6}{11} = 1 + \frac{\sqrt{47}-5}{11}\left(=\frac{1}{\alpha'}\right),$$

$$\alpha' = \frac{11}{\sqrt{47}-5} = \frac{\sqrt{47}+5}{2} = 5 + \frac{\sqrt{47}-5}{2}\left(=\frac{1}{\alpha''}\right),$$

$$\alpha'' = \frac{2}{\sqrt{47}-5} = \frac{\sqrt{47}+5}{11} = 1 + \frac{\sqrt{47}-6}{11}\left(=\frac{1}{\alpha'''}\right),$$

$$\alpha''' = \frac{11}{\sqrt{47}-6} = \frac{\sqrt{47}+6}{1} = 12 + \frac{\sqrt{47}-6}{1}\left(=\frac{1}{\alpha}\right).$$

$$\sqrt{47} = 6 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{12+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{5+}\ \text{etc.}$$

Näherungswerthe 6, 7, $6\frac{5}{6}$, $6\frac{6}{7}$, $6\frac{77}{90}\ldots$

6) Warum bildet bei der Verwandlung einer Quadratwurzel in einen Kettenbruch die Reihe der Quotienten eine Periode?

7) $\alpha)$ $\sqrt{2}$, $\beta)$ $\sqrt{11}$, $\gamma)$ $\sqrt{41}$, $\delta)$ $\sqrt{47}$, $\varepsilon)$ $\sqrt{7}$, $\zeta)$ $\sqrt{31}$ in Kettenbrüche zu verwandeln und die Näherungswerthe derselben zu bestimmen.

Aufl.: $\alpha)$ 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}$, $\frac{239}{169}$ u. s. w.; $\beta)$ $3\frac{1}{3}$, $3\frac{6}{19}$, $3\frac{19}{60}$, $3\frac{120}{379}$, $3\frac{379}{1197}$. $3\frac{2394}{7561}$ u. s. w.; $\gamma)$ $6\frac{1}{2}$, $6\frac{2}{5}$, $6\frac{25}{62}$, $6\frac{52}{129}$, $6\frac{128}{320}$ u. s. w.; $\delta)$ 7, $6\frac{5}{6}$, $6\frac{6}{7}$, $6\frac{77}{90}$, $6\frac{83}{97}$, $6\frac{402}{575}$ u. s. w.; $\varepsilon)$ 3, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$, $2\frac{9}{14}$, $2\frac{11}{17}$, $2\frac{20}{31}$ u. s. w.; $\zeta)$ 6, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{4}{7}$, $5\frac{21}{37}$, $5\frac{67}{118}$, $5\frac{88}{155}$ u. s. w.

8) $\sqrt{n^2+1}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Aufl.: $\sqrt{n^2+1} = n + \dfrac{1}{x}$, $x = 2n + \dfrac{1}{x}$,

$$\sqrt{n^2+1} = n + \frac{1}{2n+}\,\frac{1}{2n\ldots}$$

*) Eine ähnliche, von Dr. Matthiessen angegebene Methode, die dritte, vierte u. s. w. Wurzel einer Zahl in einen Kettenbruch zu verwandeln, findet sich in Schlömilch's Zeitschr. f. Mathem. u. Phys., 1865, p. 315.

9) Wie groß sind die **unendlichen periodischen** Kettenbrüche

α) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ u. s. w., β) $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}\ldots$, γ) $\frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}\ldots$,

δ) $3 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \ldots$, ε) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{3}\ldots$

ζ) $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{1} + \ldots$, η) $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\ldots$?

Aufl.: α) $\frac{1}{2}(\sqrt{13}-3)$; β) $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$; γ) $\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$;
δ) $\frac{1}{38}(\sqrt{3601}+55)$; ε) $\frac{1}{18}(\sqrt{3601}-55)$;
ζ) $\frac{1}{302}(\sqrt{2235029}-1265)$.

10) Die Gleichung des zweiten Grades $x^2 - ax = b$ durch einen Kettenbruch aufzulösen.

Aufl.: $x_1 = a + \frac{b}{x} = a + \frac{b}{a} + \frac{b}{x}$

$$= a + \frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \cdots$$

Setzt man $\frac{a}{b} = c$, so wird $x_1 = a + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{c}\ldots$

Der zweite Wurzelwerth $x_2 = -\frac{b}{x_1} =$

$$-\frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \frac{b}{a\ldots} = -\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a\ldots}$$

Beispiel. $x^2 - 24x = 3$,
$x_1 = 24,\ 24\frac{1}{8},\ 24\frac{24}{193},\ 24\frac{193}{1552}$;
$x_2 = -\frac{1}{8},\ -\frac{24}{193},\ -\frac{193}{1552},\ -\frac{6656}{37393}$.

11) Den Logarithmus einer Zahl in einen **Kettenbruch** zu verwandeln.

Aufl.: a sei die gegebene Zahl, x ihr Logarithmus, b die Basis. Man bestimme die ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ so, daß

$b^{\alpha+1} > a > b^{\alpha}$, und setze $a : b^{\alpha} = c$;
$c^{\beta+1} > b > c^{\beta}$, und setze $b : c^{\beta} = d$;
$d^{\gamma+1} > c > d^{\gamma}$, und setze $c : d^{\gamma} = e$;
$e^{\delta+1} > d > e^{\delta}$ u. s. w.;

alsdann ist $x = \alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \cdots$

Für Logarithmus 195 ist $b = 10$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $\delta = 4$, $\varepsilon = 3$, $\zeta = 2$, $c = 1{,}95$, $d = 1{,}34864$, $e = 1{,}07211$, $f = 1{,}02077$. Die Näherungswerthe für den Logarithmus von 195 sind 2, $\frac{7}{3}$, $\frac{16}{7}$, $\frac{71}{31}$, $\frac{229}{100}$, $\frac{529}{231}$. Der letzte Näherungswerth $\frac{529}{231} = 2{,}29004$ gibt den Logarithmus bis auf 0,00001 genau an.

12) Den Logarithmus von 54321 zu suchen.

Aufl.: Die Näherungswerthe sind: 4, 5, $\frac{14}{3}$, $\frac{19}{4}$, $\frac{71}{15}$, $\frac{161}{34}$; $\frac{393}{83}$, $\frac{1733}{366}$.

13) Den Logarithmus von 3,1415926 zu berechnen.

Aufl.: Die Näherungswerthe sind: $\frac{1}{2}$, $\frac{87}{175}$, $\frac{349}{702}$, $\frac{436}{877}$, $\frac{785}{1579}$, $\frac{1221}{2456}$.

---

14) $\sqrt{19}$ in eine Reihe von Theilbrüchen zu verwandeln.

Aufl.: $\sqrt{19} = 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyzu} + \frac{1}{xyzuv} + \cdots$

$$19 = 16 + \frac{8}{x}\left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz}\cdots\right) + \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz}\cdots\right)^2;$$

$$3x = 8 + 8\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz}\cdots\right) + \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{yz}\cdots\right)^2;$$

$$x = 3;\quad 1 = 8\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + \cdots\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{y}\cdots\right)^2;$$

$$3 = 24\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + \cdots\right) + 1 + 2\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz}\cdots\right) + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz}\cdots\right)^2;$$

$$2 = 26\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz}\right)^2;$$

$$2y = 26 + 26\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{zu}\cdots\right) + \frac{1}{y}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{zu}\cdots\right)^2;$$

$$y(> 13) = 14.$$

$$2 = 26\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{zu} + \cdots\right) + \tfrac{1}{14}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{zu}\cdots\right)^2;$$

$$27z = 366 + 366\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{uv} + \cdots\right) + \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{uv}\cdots\right)^2;$$

$z(> 13) = 14$ u. s. w.

Schema zum abgekürzten Berechnen von $\sqrt{19}$.

Divisor.	Dividend.	Quotient.	Negativer Rest.
1)		$4 = a$	$3 = r'$
2) 3	8	$3 = x$	$1 = r''$
3) 2	26	$14 = y$	$2 = r'''$
4) 27	366	$14 = z$	$12 = r''''$
5) 167	5126	$31 = u$	$51 = r'''''$
6) 1580	158908	$101 = v$	

Erklärung. 1) $r' = 19 - 4^2$.

2) Divisor $3 = r'$; Dividend $8 = 2 \cdot a = 2 \cdot 4$;

3) Divisor $2 = x \cdot r'' - 1 = 3 \cdot 1 - 1$; Dividend $26 = 8 \cdot x + 2$;

4) Divisor $27 = y \cdot r''' - 1 = 14 \cdot 2 - 1$;
Dividend $366 = 26 \cdot y + 2 = 26 \cdot 14 + 2$;
5) $167 = 14 \cdot 12 - 1$; $5126 = 366 \cdot 14 + 2$;
6) $1580 = 31 \cdot 51 - 1$; $158908 = 5126 \cdot 31 + 2$.

$\sqrt{19}$ ist also $= 4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{14}A_1 + \frac{1}{14}A_2 + \frac{1}{31}A_3 + \frac{1}{161}A_4 + \cdots = 4{,}35889892$.

15) α) $\sqrt{5}$, β) $\sqrt{31}$ zu entwickeln.

Antw.: α) $2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}A_1 + \frac{1}{13}A_2 + \frac{1}{16}A_3 + \frac{1}{16}A_4 = 2{,}236068$;
β) $5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}A_1 + \frac{1}{12}A_2 + \frac{1}{93}A_3 + \frac{1}{881}A_4 = 5{,}56776439$.

16) Eben so: α) $\sqrt{2}$, β) $\sqrt{3}$.

Aufl.: α) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}A_1 - \frac{1}{34}A_2 - \frac{1}{1100}A_3 + \frac{1}{20}A_4 - \frac{1}{16}A_5 \ldots$
β) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{14}A_2 - \frac{1}{200}A_3 - \frac{1}{30}A_4 + \frac{1}{20}A_5 + \frac{1}{3}A_6 - \frac{1}{4}A_7$.

17) $\sqrt[3]{388}$ in eine Theilbruchreihe zu verwandeln.

Aufl.: $\sqrt[3]{388} = a + \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xyz} + \cdots,$
$a = 7$;

$$388 = 343 + 147\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{xy}\cdots\right) + 21\left(\frac{1}{x}\cdots\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\cdots\right)^3.$$

$$45x = 147 + 147\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz}\cdots\right) + \frac{21}{x}\left(1 + 2\left\{\frac{1}{y} + \frac{1}{yz}\cdots\right\} + \left\{\frac{1}{y} + \frac{1}{yz}\cdots\right\}^2\right) + \frac{1}{x^2}\left(1 + 3\left\{\frac{1}{y} + \cdots\right\} + 3\left\{\frac{1}{y}\cdots\right\}^2 + \left\{\frac{1}{y}\cdots\right\}^3\right).$$

$x = 4$ ($> 147 : 45$).

$$33 \cdot 4^2 - 21 \cdot 4 - 1 = [147 \cdot 4^2 + 21 \cdot 4 \cdot 2 + 3]\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz}\cdots\right) + [21 \cdot 4 + 3]\left(\frac{1}{y} + \cdots\right)^2 + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz}\cdots\right)^3;$$ d. i.:

$$443 = 2523\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{yz}\cdots\right) + 87\left(\frac{1}{y} + \cdots\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\cdots\right)^3$$ u. s. w.

wodurch man $y = 6$, $z = 22$, $u = 27$ erhält.

Schema zum schnellen Berechnen von $\sqrt[3]{388}$.

Divisor.	Dividend.	Quotient.	Negativer Rest.	Coefficient der 2. Potenz.
1)		$7 = a$	45	
2) 45	147	$4 = x$	33	21
3) 443	2523	$6 = y$	135	87
4) 4337	91875	$22 = z$	3539	525
5) 1701325	44490603	$27 = u$	445172	

Erklärung. 1) Rest: $45 = 388 - a^3 = 388 - 7^3$;
2) Divisor $45 =$ Rest 45; Dividend $147 = 3 \cdot a^2$; Coefficient $21 = 7 \cdot 3$;
3) $443 = 33 \cdot x^2 - 21x - 1$; $2523 = 147 \cdot x^2 + 21 \cdot x \cdot 2 + 3$;
$87 = 21 \cdot x + 3$;
4) $4337 = 135 \cdot y^2 - 87 \cdot y - 1$; $91875 = 2523 \cdot y^2 + 87 \cdot y \cdot 2 + 3$
$525 = 87 \cdot y + 3$;

5) ergibt sich auf dieselbe Weise wie 4).

Es ist demnach $\sqrt[3]{388} = 7 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}A_1 + \frac{1}{22}A_2 + \frac{1}{27}A_3 + \frac{1}{31}A_4 + \frac{1}{151}A_5 = 7 + 0{,}25 + 0{,}04166667 + 0{,}00189393 + 0{,}00007015 + 0{,}00000226 + 0{,}00000002 = 7{,}2936330(0)$.

18) Zu entwickeln: α) $\sqrt[3]{43}$; β) $\sqrt[3]{2}$; γ) $\sqrt[3]{13}$; δ) $\sqrt[3]{36}$.

Aufl.: α) $3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{148}A_1 + \frac{1}{172}A_2 = 3{,}5033981$;
β) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{26}A_1 + \frac{1}{32}A_2 + \frac{1}{65}A_3 = 1{,}2599205$;
γ) $2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{19}A_1 + \frac{1}{39}A_2 + \frac{1}{60}A_3 = 2{,}3513345$.
δ) $3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}A_1 + \frac{1}{26}A_2 = 3{,}301923$.

Bemerkung. Nach derselben Methode lassen sich die 4ten, 5ten u. s. w. Wurzeln aus Zahlen in Theilbruchreihen verwandeln.

19) Den Logarithmus von 195 in eine Theilbruchreihe zu verwandeln.

Aufl.: Es sei $195 = 10^{2 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta\gamma} + \cdots}$

$1{,}95^{\alpha} = 10 \cdot 10^{\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta\cdot\gamma} + \cdots}$; $\alpha = 4$; $1{,}95^{\alpha} = 14{,}45900625$;

$1{,}445900625^{\beta} = 10 \cdot 10^{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma\cdot\delta}}$; $\beta = 7$; $1{,}445900625^{7} = 13{,}2120\ldots$ u. s. w. Es ist also $\log 195 = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7}A_1 + \frac{1}{5}A_2 + \frac{1}{12}A_3 + \frac{1}{16}A_4 \ldots$

20) $\log 54321$.

Aufl.: $4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{17}A_2 - \frac{1}{45}A_3 = 0{,}7349673$.

Sechster Abschnitt.

Permutationen, Combinationen, Variationen, binomischer und polynomischer Lehrsatz, figurirte Zahlen, Wahrscheinlichkeitsrechnung*).

§. 88.

Permutationen.

Die Anzahl der Permutationen für eine Anzahl von n Elementen werde mit $P(n)$ oder P_n und $1.2.3\ldots n$ werde mit $n!$ **) bezeichnet.

1) Was versteht man unter einer Gruppe oder Complexion? was unter Element? was unter Zeiger (Index)? Wie werden

*) Ueber Permutationen u. s. w. vergleiche man die ausgezeichnete Schrift A. v. Ettinghausen's: „Die combinatorische Analysis. Wien, 1829."

**) Die Bezeichnung $n!$ ist durch Kramp eingeführt. Siehe „Elémens d'Arithmétique universelle. Cologne 1808."

die Elemente bezeichnet? Was versteht man unter Elementen höheren Ranges? Was versteht man unter einer gutgeordneten Complexion? Was versteht man unter Complexionen höheren Ranges?

2) Was nennt man Permutiren oder Versetzen?

3) Es sollen alle Permutationen der Complexionen α) *ab*, β) *abc*, γ) *abcd*, δ) *abcde*, gebildet werden.

4) Welches Gesetz befolgt man, um alle möglichen Permutationen einer gegebenen Complexion darzustellen?

Bemerkung. Eine besondere Methode der Permutation besteht darin, daß man nach und nach alle Permutationen durch Umtauschung von jedesmal 2 Elementen ableitet. (S. Gallenkamp Elem. der Math. §. 110.) Bei drei Elementen ergibt sich folgende Reihenfolge der Permutationen, wenn man nach und nach 3 mit 2, 2 mit 1, 1 mit 3, 3 mit 2, 2 mit 1 vertauscht:

123, 132, 231, 213, 312, 321.

5) Wie findet man $P(4)$ aus $P(3)$, $P(5)$ aus $P(4)$, und allgemein $P(n+1)$ aus $P(n)$?

6) Wie groß ist $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, $P(9)$, $P(10)$, $P(11)$, $P(12)$, und allgemein $P(n)$, wenn alle Elemente unter einander ungleich sind?

7) Wie groß ist $P(n)$, wenn unter den n Elementen p gleiche vorkommen, wie groß, wenn außer den p gleichen auch noch q gleiche und r gleiche Elemente vorkommen?

8) Wie oftmal lassen sich die Factoren der Producte α) $abcdefgh$, β) $a^2b^3 = aabbb$, γ) $a^4b^7c^2$, δ) $m^3n^3p^3$, ε) $n^7p^5qr^2$, ζ) $a^2b^2c^3d^2e$, η) $a^{n-1}b$, ϑ) $a^{n-2}b^2$, ι) $a^{n-3}b^3$, $\varkappa$) $a^{n-x}b^x$, λ) $a^{n-5}b^3c^2$, μ) $a^{n-x-y}b^xc^y$ versetzen?

9) Wenn alle Permutationen der Complexion *abcdef* lexikographisch hingeschrieben werden, die wievielte Complexion ist *dbafce*? Antw.: Die 389te.

10) Die wievielte Permutation ist *hdflaimbgeknc* von der Complexion *abcdefghiklmn*? Antw.: Die 3489840778te.

11) α) Die 76te Permutation von *abcde*, β) die 1832te Permutation von *ghiklmn*, γ) die 299318te Permutation von *opqrstuvx*, und δ) die 4237758154te Permutation von *abcdefghiklmn* zu bestimmen.

Antw.: *daceb*, *ilhkgnm*, *vrquptoxs*, *imblcdafghkne*.

12) Die wievielte Permutation ist *cbabab* von *aabbbc*?

13) Die 8757te Permutation von *aaaabbcccd* anzugeben.

Antw.: *cacacdabba*.

14) Irgend zwei Elemente einer Complexion bilden eine Inversion (dérangement, variation), wenn das voranstehende Element des Paares höher ist, als das nachstehende Element. Wie

viel Inversionen enthält hiernach α) die Complexion *bdca*, β) die Complexion *fcedab*? **Antw.:** α) 4, β) 12.

15) Die Anzahl der in einer Complexion vorhandenen Inversionen ändert sich durch Vertauschung von zwei Elementen um eine ungerade Zahl. Warum*)?

Zusatz. Nach der in der Bemerkung zu Nr. 4 angegebenen Methode der Permutation sind also die, in den auf einander folgenden Permutationen vorhandenen, Inversionen abwechselnd von gerader und ungerader Zahl. Da die Anzahl aller Permutationen gerade ist, so gibt es also eben so viele gerade Permutationen (mit gerader Anzahl von Inversionen) als ungerade Permutationen (mit ungerader Anzahl von Inversionen).

§. 89.

Combinationen und Variationen.

Die Anzahl der Combinationen von n Elementen zur $r$ten Classe ohne Wiederholung wird mit $\underset{r}{C}(n)$, und mit Wiederholung mit $^{w}\underset{r}{C}(n)$ bezeichnet.

Unter Variiren versteht man im Allgemeinen aus jeder von mehreren abgesonderten Elementarreihen, so oft es angeht, ein Element, aber jedesmal nur eines herausnehmen und zur Bildung einer Complexion verwenden.

Die Anzahl der Variationen von n Elementen zur $r$ten Classe ohne Wiederholung wird mit $\underset{r}{V}(n)$, und mit Wiederholung mit $^{w}\underset{r}{V}(n)$ bezeichnet.

Der häufig vorkommende, im Divisor und im Dividend n Factoren enthaltende Quotient:

$\frac{b\,(b-1)\;(b-2)\;(b-3)\;\ldots\;(b-n+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4\ldots\quad n}$ wird mit $\binom{b}{n}$ **) bezeichnet, und b über n gelesen. b heißt die Basis, n der Zeiger; der obige Ausdruck wird deßhalb auch „b mit dem Zeiger n" gelesen. $\binom{7}{3} = 35$.

1) Was heißt: n Elemente zu 2, 3, 4 mit oder ohne Wiederholung combiniren?

2) Die Elemente a, b, c, d zu 2 und 3 ohne Wiederholung zu combiniren.

3) Die Anzahl aller Unionen, Amben, Ternen, Quaternen und Quinternen der Elemente a, b, c, d, e, f zu bestimmen.

4) Die Anzahl aller Combinationen mit Wiederholung der Elemente a, b, c, d zur 1., 2., 3., 4. Classe anzugeben.

5) Wie oftmal lassen sich 6 Elemente zu 1, 2, 3, 4, 5, 6 α) mit, β) ohne Wiederholung combiniren?

---

*) Man vergleiche die beiden Schriften von Dr. Richard Baltzer: „Die Elemente der Mathematik, 1. Band (1865)", und „Theorie und Anwendung der Determinanten (2. Aufl. 1864)".

**) Diese Bezeichnung rührt von Euler (Acta Petrop. V. 1. p. 89) her. Andere bezeichnen diesen Quotienten mit b_n.

6) Wie viel Amben, Ternen, Quaternen und Quinternen sind in 90 Nummern enthalten?

Antw.: 4005 Amben, 117480 Ternen, 2555190 Quaternen, 43949268 Quinternen.

7) Wie groß sind $\underset{2}{C}(n)$ und ${}^w\underset{2}{C}(n)$, $\underset{3}{C}(n)$ und ${}^w\underset{3}{C}(n)$?

Antw.: $\alpha)$ $\binom{n}{2}$; $\beta)$ $\binom{n+1}{2}$; $\gamma)$ $\binom{n}{3}$; $\delta)$ $\binom{n+2}{3}$.

8) Wie groß ist $\alpha)$ $\underset{r}{C}(n)$, $\beta)$ ${}^w\underset{r}{C}(n)$? $\gamma)$ Wie viel Elemente geben eben so viel Combinationen zur *r*ten Classe ohne Wiederholungen, als *n* Elemente Combinationen mit Wiederholungen geben?

Antw.. $\alpha)$ $\binom{n}{r}$; $\beta)$ $\binom{n+r-1}{r}$; $\gamma)$ ${}^w\underset{r}{C}(n) = \underset{r}{C}(n+r-1)$.

9) $\underset{r}{C}(n) = \underset{n-r}{C}(n)$. Warum?

10) Wie läßt sich $\underset{r+1}{C}(n)$ aus $\underset{r}{C}(n)$ ableiten?

11) Die wievielte Combination zur 4ten Classe ist *ruxz* von den 25 Buchstaben des Alphabets? Antw.: Die 12569te.

12) Auf wie vielerlei Arten lassen sich *n* Elemente in mehrere Partieen so zerlegen, daß die erste α, die zweite β, die dritte γ u. s. w., die letzte μ Elemente erhält?

13) Wie oftmal läßt sich $\alpha)$ das Product *abcd*, $\beta)$ das Product *abcdef* in Producte von 2 Factoren zerlegen? Auf wie viel Arten läßt sich $\gamma)$ das Product *abcdef*, $\delta)$ das Product *abcdefghi* in Producte von drei Factoren zerlegen?

Antw.: $\alpha)$ auf 3, $\beta)$ auf 15, $\gamma)$ auf 10, $\delta)$ auf 280 Arten.

14) Auf wie viel Arten läßt sich $\alpha)$ ein aus $2n$ Factoren bestehendes Product in Producte von 2 Factoren, $\beta)$ ein aus $3n$ Factoren bestehendes Product in Producte von 3 Factoren, $\gamma)$ ein aus mn Factoren bestehendes Product in Producte von m Factoren zerlegen?

Antw.: $\alpha)$ Auf $\frac{(2n)!}{n!2^n}$, $\beta)$ auf $\frac{(3n)!}{n!6^n}$, $\gamma)$ auf $\frac{(mn)!}{n!(m!)^n}$ Arten.

15) Man bilde die Variationen für die Reihen *abc*, $\alpha\beta\gamma\delta$ u. *AB*.

16) Eben so für die Reihen *ab*, *a*, $\alpha\beta\gamma$, *ABCDE*.

17) Wie groß ist die Anzahl aller möglichen Variationen, wenn die Elementenmengen der einzelnen Reihen *m*, *n*, *p*, *q* sind?

18) Die Elemente *abc* zu 2, 3, 4 mit und ohne Wiederholung zu variiren.

19) Eben so die Elemente *abcd* zu 2 und 3, und *abcde* zu 2 mit und ohne Wiederholung.

20) Wie groß ist $\alpha)\ {}^{w}\underset{2}{V}(n)$, $\beta)\ {}^{w}\underset{3}{V}(n)$, $\gamma)\ {}^{w}\underset{r}{V}(n)$?

Antw.: $\alpha)\ n^2$, $\beta)\ n^3$, $\gamma)\ n^r$.

21) Wie groß ist: $\underset{r}{V}(n)$?

Antw.: $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \underset{r}{C}(n) \cdot P(r)$.

22) Die wievielte Variation α) mit oder β) ohne Wiederholung ist *cmdx* von den 25 Buchstaben des Alphabets?

Antw.: Die 38223te, β) die 29412te.

23) α) Die zweite, β) die dritte, γ) die vierte und δ) die fünfte Combinationsclasse der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 zur Summe a) 2, b) 3, c) 4, d) 5, e) 6 zu bilden.

24) α) Die zweite, β) die dritte, γ) die vierte, δ) die fünfte Variationsclasse der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, zur Summe a) 2, b) 3, c) 4, d) 5, e) 6 zu bilden.

25) Wie groß ist die Anzahl der Variationen der Zahlen 0, 1, 2, 3..n zur Summe n zur zweiten Classe? Antw.: $n+1$.

26) Wie groß ist die Anzahl der Variationen der Zahlen 0, 1, 2...n zur Summe n α) zur dritten Classe, β) zur vierten Classe, γ) zur fünften Classe u. s. w., δ) zur $r$ten Classe, oder

$$\overset{s=n}{V}(3),\quad \overset{s=n}{V}(4),\quad \overset{s=n}{V}(5),\quad \overset{s=n}{V}(r)?$$

Bemerkung. Wenn n^2 Elemente und zwar je n in n Reihen geordnet gegeben sind, die man am einfachsten durch doppelte Ordnungszahlen bezeichnet, z. B.:

$$\begin{array}{llll} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{array}$$

so versteht man unter Determinante*) dieses Systems das Aggregat der Producte von je n solchen Elementen, die sämmtlich verschiedenen Zeilen und Colonnen angehören. Jedes Product von der Form $a_{1,p}\, a_{2,q}\, a_{3,r} \cdots$ wird positiv oder negativ genommen, je nachdem die Complexion der Nummern $p, q, r \cdots$ zu den geraden oder ungeraden Permutationen gehört (s. §. 88, Nr. 15 Zus.). Das Anfangsglied der Determinante ist das Product der Elemente der Diagonalreihe $a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} \cdots a_{n,n}$. Aus dem Anfangsgliede werden die übrigen Glieder abgeleitet, indem man die ersten Nummern unverändert läßt und die zweiten permutirt. Die Bezeichnung der Determinante geschieht nach Cauchy oder Jacobi durch:

$$\left\{\begin{array}{llll} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{array}\right\} \text{ oder } \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} \cdots a_{n,n}.$$

*) Man sehe die auf Seite 327 angeführten Schriften des Dr. Baltzer nach.

27) Die Determinanten:

$$\alpha)\begin{Bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Bmatrix},\quad \beta)\begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Bmatrix},\quad \gamma)\begin{Bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{Bmatrix}$$

zu bilden.

Aufl.: $\alpha)$ $a_1b_2 - a_2b_1$, $\beta)$ $a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$, $\gamma)$ $abc - af^2 - bg^2 - ch^2 + 2fgh$.

28) Wie läßt sich das Resultat der 87. Aufgabe in §. 65 mit Hülfe der Determinanten darstellen?

§. 90.
Aufgaben als Anwendungen der Permutations-, Combinations- und Variations-Rechnung.

1) Die Buchstaben der Wörter $\alpha)$ EVA*), $\beta)$ ROMA**) zu versetzen. Welche Permutationen geben wieder einen Sinn?

2) Wie oftmal lassen sich die einzelnen Wörter des Hexameters: Tot tibi sunt dotes, virgo, quot sidera coelo versetzen?***)

3) Zehn Personen, welche täglich zwei mal mit einander speisen, nehmen sich vor, jeden Tag, sowohl Mittags als Abends, ihre Plätze zu wechseln. In wie viel Tagen oder Jahren werden sie ihr Vorhaben ausführen können?

4) Wie heißt die 569te Permutation von lipano?

5) Folgende Verse geben, vorwärts und rückwärts gelesen, dasselbe:

Aspice! nam raro mittit timor arma, nec ipsa,
Si se mente reget, non tegeret Nemesis †).

Wie viel mögliche Permutationen der Buchstaben lassen dieselben zu?

6) $\alpha)$ Die wievielte Permutation ist: ut tensio sic vis, von *ceiiinossstuv* ††)?

---

*) Sumens illud Ave ... mutans nomen Evae in dem schönen Lobgedichte: „Ave maris stella".

**) Außer den bekannteren, einen Wortsinn gebenden, Permutationen sind noch folgende zu bemerken: 1) rôâm, hebr. רְאָם = ihr Prophet, 2) raom, hebr. רָעוֹם = toben, 3) orma, ungarisch = ein Gipfel, 4) omra, arabisch, Plural von Emir. 5) moar, syrisch = Käufer, 6) maor, hebr. מָאוֹר = Licht, 7) amro, syr. = Wolle.

***) 3312 der Versetzungen bilden wieder einen Hexameter.

†) Anfang des Gedichtes, welches Johannes a Lasco an den Herzog Karl von Südermanland schrieb.

††) Unter dieser, nach der Reihenfolge der Buchstaben gesetzten Chiffer machte der englische Physiker Hooke den oben ausgesprochenen sehr wichtigen Satz der Elasticität bekannt. (Philos. tracts and collections. London 1679.)

β) Rheita (1645), der Erfinder des terrestrischen Fernrohres mit vierfachen convexen Ocularen, welches die Gegenstände aufrecht zeigt, machte seine Erfindung durch ein Anagramm bekannt. Er verbarg die Worte „convexa quatuor“ in dem Ungethüm „cqounavteuxoar“. Wie viel Umsetzungen läßt jenes Anagramm zu?

γ) Galilei machte in einem Briefe an Kepler am 11. December 1610 die von ihm zuerst gesehene Lichtgestalt der Venus durch folgenden unverständlichen Satz bekannt: „Haec immatura a me iam frustra leguntur o. y.“, in welchem die Buchstaben folgenden Hexameters enthalten sind: „Cynthiae figuras aemulatur mater amorum.“ Wie viel Versetzungen lassen jene 35 Buchstaben zu*)?

7) Wie viel zehnzifferige Zahlen gibt es, deren Ziffern alle von einander verschieden sind? Antw.: 3265920.

8) Auf wie vielerlei Arten können je 2, 3, 4, 5 der sechs Farben: Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau, Violet, zu neuen Farben vermischt werden?

9) Die Chemie nimmt 65 Elemente, d. h. bis jetzt unzerlegbare Körper an. Wie viel Körper gibt es möglicher Weise, die aus 2, 3 oder 4 einfachen Bestandtheilen zusammengesetzt sind?

10) Auf wie vielerlei Arten lassen sich die Zahlen 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{8}$ und $\frac{3}{5}$ mit einander zu drei combiniren? Welche Complexionen sind es, bei denen das Verhältniß je zweier der Elemente durch zwei der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 sich darstellen läßt**)?

11) Wie viel gerade Linien können zwischen 12, wie viel zwischen n Puncten gezogen werden? Wie viel Diagonalen hat ein 20-, wie viel ein n-Eck?

12) In wie viel Puncten können sich α) 4, β) 8, γ) 11, überhaupt δ) n Linien durchschneiden? ε) Wie viel begrenzte Linien werden im Allgemeinen durch den Durchschnitt von 4, ζ) 5, η) wie viel durch den Durchschnitt von n Linien gebildet?

13) In wie viel Puncten können sich n Linien durchschneiden, unter denen p einander parallel sind?

14) Wenn von 20 geraden Linien 8 durch einen Punct, 5 durch

*) Eben so machte Galilei die Entdeckung des Ringes des Saturn durch das Anagramm: „Smais mr mil me poeta levmibvnenvgtta viras“ bekannt. Diesem Anagramme lag zu Grunde der Satz: Altissimum planetam tergeminum observavi.

**) Anwendung findet diese Aufgabe in der Akustik, wo die Zahlen, 1, $^2/_3$ $^3/_4$, $^4/_5$, $^5/_6$, $^5/_8$ und $^3/_5$ den Grundton, die Quinte, Quarte, gr. Terz, kl. Terz, kl. Sext und gr. Sext darstellen. Durch die Bestimmung der Complexionen, bei denen obige Bedingung erfüllt wird, erhält man die zwischen drei der genannten Töne bestehenden Accorden-Verhältnisse.

einen anderen Punct gehen, in wie viel Puncten können sich alle Linien durchschneiden?

15) Wie viel Winkel werden gebildet, wenn sich zwei gerade Linien durchkreuzen (die flachen und erhabenen Winkel mit gerechnet)? Wie viel Mittelpunctswinkel werden gebildet, wenn von dem Mittelpuncte eines Kreises nach 12 Puncten der Peripherie Radien gezogen werden?

16) Wie viel Winkel können durch acht sich durchschneidende gerade Linien gebildet werden, von denen 5 parallel sind?

17) Wie viel Dreiecke, Vierecke und Fünfecke können durch 24, wie viel durch n sich durchschneidende gerade Linien gebildet werden? Wie viel Parallelogramme werden gebildet, wenn 4 Parallellinien von 5 Parallellinien, wie viel, wenn n Parallellinien von p Parallellinien durchschnitten werden?

18) Wie viel dreiflächige körperliche Ecken und wie viel dreiseitige Pyramiden können durch 27, wie viel durch n, sich im Raume durchschneidende, Ebenen gebildet werden?

19) Wie viel Verbindungslinien gibt es zwischen den Durchschnittspuncten von n sich durchschneidenden geraden Linien?

Antw.: $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$. Es hat also ein vollständiges Vierseit 3 und ein vollständiges Fünfseit 15 Diagonalen.

20) Auf wie vielerlei Arten können 52 Kartenblätter unter 4 bestimmte Whistspieler vertheilt werden, so daß jeder 13 erhält?

Antw.: Auf 53644737765488792839237440000 Arten.

21) Es seien 12 Kugeln in 3 Fächer so zu vertheilen, daß hiervon 3 in das erste Fach, 4 in das zweite und 5 Kugeln in das dritte kommen. Auf wie vielerlei Arten kann dieses geschehen?

Antw.: Auf 27720 Arten.

22) Befinden sich unter diesen Kugeln 2 rothe, 3 gelbe, 3 grüne und 4 blaue, und sollen von den 3 Kugeln im ersten Fache stets eine roth und 2 blau, ferner von den 4 Kugeln im zweiten Fache eine roth, eine gelb, eine grün und eine blau, endlich von den 5 Kugeln im dritten Fache 2 gelb, 2 grün und eine blau sein, auf wie viel Arten kann alsdann die Vertheilung vor sich gehen?

Antw.: Auf 216 verschiedene Arten.

23) α) Die Buchstaben des Wortes sieb zu 2, 3 und 4 zu variiren; β) die Anzahl der Variationen der 25 Buchstaben des Alphabets zu 2, 3 und 4 zu bestimmen.

24) Wie viel Variationen zur 15ten Classe hätte man höchstens zu bilden, um von Révolution française auf das schöne Anagramm: Un Corse la finira*), zu stoßen? Wie viel

*) Als Napoleon die Revolution mit dem Consulat endete, bildete man jenes Anagramm. Nach dem Sturze Napoleon's las man: La France veut son roy (roi).

Permutationen aber hätte man zu bilden, um das Anagramm: Un Corse voté la finira zu erhalten? Wie viel Permutationen hätte man zu bilden, um von Frère Jacques Clément (Mörder Heinrich's des Dritten) auf das Anagramm: C'est l'enfer qui m'a créé zu stoßen?

Bemerkung. Das schönste Anagramm, welches vielleicht jemals gedichtet worden, ist von Jablonsky, dem ehemaligen Rector der Schule zu Lissa. Die Veranlassung dazu war folgende: Als der König Stanislaus von Polen in seiner Jugend von Reisen zurückkam, versammelte sich das ganze Lescinski'sche Haus in Lissa, um seinen Stamm-Erben zu bewillkommnen. Jablonsky veranstaltete zu dieser Feierlichkeit einen Schul-Actus und ließ zum Beschlusse desselben von 13 Schülern, die als junge Helden gekleidet waren, ein Ballet tanzen. Jeder derselben hatte einen Schild, worauf einer von den Buchstaben aus den Worten Domus Lescinia mit Gold geschrieben war. Am Ende des ersten Ballets standen sie so, daß man aus ihren neben einander gehaltenen Schilden Domus Lescinia las. Nach dem zweiten Ballet standen sie in der Ordnung, daß man las: ades incolumis (unversehrt bist du hier). Nach dem dritten: omnis es lucida (ganz strahlend bist du da); nach dem vierten: lucida sis omen (strahlend sei uns Ahnung). Dann: mane sidus loci (bleib des Landes Stern); hierauf: sis columna Dei (sei eine Säule Gottes), und endlich zum Beschluß: I! scande solium (geh', besteige den Thron). Das letztere war um so schöner, da es in der Folge als eine Art Prophezeiung gerechtfertigt ward. — Noch künstlicher sind die Anagramme, die aus einem Verse wieder einen anderen bilden. So ward ein italienischer Gelehrter, welcher im Traume den Vers des Horatius: Grata superveniet, quae non sperabitur hora, sich vorgehalten sah, durch den Anagrammatismus seines Freundes: Est ventura Rhosina parataque nubere pigro bewogen, noch im hohen Alter eine Fremde, mit Namen Rosina zu heirathen. Bei den Alten finden wir bereits Anagramme; so findet sich *Πτολεμαῖος* in *ἀπὸ τὸ μέλιτος* (von Honig), *Ἀρσινόη* in *ἴον Ἥρας* (Veilchen der Here) umgesetzt.

25) Jemand hat 4 verschiedene Röcke, 7 verschiedene Westen, 5 verschiedene Beinkleider. In wie viel verschiedenen Anzügen kann er erscheinen?

26) Wie viel zwei-, drei-, vier- u. s. w. n-silbige Versfüße können durch die beiden Quantitäten – und ⏑ gebildet werden?

Antw.: 4 zweisilbige, nämlich: – – (Spondeus), – ⏑ (Trochäus), ⏑ – (Jambus), ⏑ ⏑ (Pyrrhichius); 8 dreisilbige, 16 viersilbige und 2^n n-silbige.

27) Wie viel Arten von Hexametern gibt es?

Bemerkung. Der Hexameter besteht eigentlich aus 6 Dactylen (– ⏑ ⏑), für deren letzten aber immer ein Spondeus oder Trochäus steht. Die vier ersten Stellen lassen den Spondeus statt des Daktylus ohne Unterschied zu. In die fünfte Stelle wird nur selten ein Spondeus gesetzt, und sehr selten mit vorhergehendem Spondeus.

1) – – | – – | – – | – – | – – | – ⏓ (Catull. 114. 3.)

2) – – | – – | – – | – – | – ⏑ ⏑ | – ⏓ (Virg. G. IV. 174.)

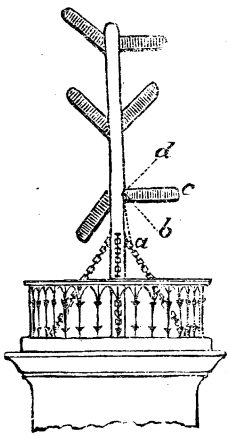
3) – – | – – | – – | – ⏑ ⏑ | – – | – ⏑

4) – – | – – | – – | – ⏑ ⏑ | – ⏑ ⏑ | – ⏓ (Virg. A. I. 15) u. s. w.

28) Auf wie vielfache Weise lassen sich in 7 Octaven je drei der Töne *c, e, g* des Dreiklanges mit einander verbinden?

Antw.: Auf 343fache Weise.

29) Vier aus einander liegende Kugeln sind der Lage nach gegeben. Wie viel Kugeln sind im Allgemeinen möglich, wenn dieselben eine jede jener vier Kugeln nach innen oder nach außen berühren sollen?



30) Der ehemals zwischen Berlin und Coblenz correspondirende optische Telegraph hatte nebenbezeichnete Einrichtung. Jeder der 6 beweglichen Arme (Indicatoren) konnte vier verschiedene Stellungen annehmen; der unten rechts stehende z. B. konnte eine verticale (*a*), schief abwärts gerichtete (*b*), horizontale (*c*) und schief aufwärts gerichtete Lage (*d*) einnehmen, eben so die übrigen. Wie viel von einander verschiedene Figuren war der Telegraph darzustellen im Stande?

Antw.: 4096.

Bemerkung. Durch Zusammenstellung von Puncten und Strichen wird bei dem Morse'schen elektrischen Schreib-Telegraphen das ganze telegraphische Alphabet gebildet. Bei dem deutsch-österreichischen Telegraphen-Verein sind die nachfolgenden Zeichen in Gebrauch:

·	*e*	· · ·	*s*	· · · ·	*h*	— · · ·	*b*
—	*t*	· · —	*u*	· · · —	*v*	— · · —	*x*
· ·	*i*	· — ·	*r*	· · — ·	*f*	— · — ·	*c*
· —	*a*	· — —	*w*	· · — —	*ü*	— · — —	*y*
— ·	*n*	— · ·	*d*	· — · ·	*l*	— — · ·	*z*
— —	*m*	— · —	*k*	· — · —	*ä*	— — · —	*q*
		— — ·	*g*	· — — ·	*p*	— — — ·	*ö*
		— — —	*o*	· — — —	*j*	— — — —	*ch.*

Die Ziffern werden bezeichnet durch:

· — — — —	1	— · · · ·	6
· · — — —	2	— — · · ·	7
· · · — —	3	— — — · ·	8
· · · · —	4	— — — — ·	9
· · · · ·	5	— — — — —	0.

31) Wenn eine Zahl von der Form $a^m b^n c^o d^p e^q f^r$ ist, wo *a, b, c, d, e, f* Primzahlen und *m, n, o, p, q, r* ganze Zahlen bedeuten, welches ist die Anzahl der Theiler der Zahl?

Antw.: $(m+1)\,(n+1)\,(o+1)\,(p+1)\,(q+1)\,(r+1) - 1$.

32) Wie oftmal können aus den Zahlen a, b, c, d, e und f Producte von Potenzen von der Form $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ gebildet werden?

Antw.: Auf $\underset{3}{C}(6) \cdot P(3) = 120$=fache Weise.

§. 91.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1) Was versteht man unter mathematischer Wahrscheinlichkeit (Probabilität)? Wie kann dieselbe dargestellt werden? Wenn unter $m+n$ gleichmöglichen Fällen n Fälle irgend einem Ereignisse günstig sind, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereigniß eintrete, wie groß die Wahrscheinlichkeit, daß dasselbe nicht eintrete? (Entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit.)

2) Was bedeutet der Wahrscheinlichkeitsbruch $\frac{p}{q}$, wenn α) $p=o$ oder β) $p = \frac{1}{2}q$ oder γ) $p = q$ ist?

3) Welche Wahrscheinlichkeit hat man, bei dem Spiele Kron oder Schrift (beim Aufwerfen einer Münze) zu gewinnen?

4) Ein Gemälde wird verloos't; der Loose sind 200. Welche Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, habe ich, wenn ich 5 Loose nehme?

5) Welche Wahrscheinlichkeit habe ich, mit einem Würfel 5, mit zwei Würfeln 3, 4 oder 12 zu werfen?

6) Welche Wahrscheinlichkeit habe ich, mit 3 Würfeln 3, 5 oder 7 zu werfen? oder 3 gleiche Zahlen (einen Pasch) oder nur 2 gleiche Zahlen oder 3 ungleiche Zahlen, oder 3 auf einander folgende Zahlen, oder endlich mit 4 Würfeln 9 zu werfen?

7) α) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 3 Ereignissen, deren Wahrscheinlichkeiten w, w', w'' seien, irgend einer der günstigen Fälle eintrete? β) Welche Wahrscheinlichkeit hat man, in einem Wurfe mit zwei Würfeln 7 oder 8 oder 9 zu werfen?

Antw.: α) $w+w'+w''$; β) $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

8) Auf einem Jahrmarkte sind verschiedene Gegenstände, unter diesen recht kostbare, welche auf den Nummern 8—48 stehen, gegen Einsatz eines einzigen Kreuzers durch Werfen mit 8 Würfeln zu gewinnen. Welche Wahrscheinlichkeit hat man, 8, 9, 10, 46, 47, 48 zu werfen, und wie viel kann der Besitzer des Spiels auf diese Nummern setzen, wenn er nur 1000 Procent gewinnen will?

9) Aus einer Urne, welche 3 schwarze, 2 weiße und 5 rothe Kugeln enthält, nehme ich blindlings 3 Kugeln heraus. Welche

Wahrscheinlichkeit ist vorhanden, daß die 3 Kugeln von verschiedener Farbe sein werden?

10) Aus einem Spiele von 52 Karten werden 3 Karten blindlings gezogen. Welche Wahrscheinlichkeit ist vorhanden, daß alle Karten Coeurs sein werden?

11) Ich ziehe aus einem Spiele von 52 Karten 2 Blätter. Welche Wahrscheinlichkeit habe ich, daß die Summe der Augen 21 ist, wenn jedes Bild und jedes Aß für 11 gilt?

12) α) Die gewöhnliche Zahlen-Lotterie enthält 90 Nummern, von denen jedes Mal 5 Nummern herausgezogen werden. Welche Wahrscheinlichkeit ist vorhanden, daß alle Nummern herauskommen, wenn man 1, 2, 3, 4 oder 5 Nummern besetzt? Wie viel Procent Nutzen nimmt die Loterie de France, wenn sie für eine einzelne Nummer (Estratto), die herauskommt, das 15fache, für eine Ambe das 270fache, für eine Terne das 5500fache, für eine Quaterne das 60000fache des Einsatzes auszahlt? β) Eine Lotterie enthalte n Nummern, von welcher bei jeder Ziehung r Nummern gezogen werden. Man hat a Nummern besetzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese a Nummern alle herauskommen?

13) Wenn unter allen N möglichen Fällen n die Zahl einer Art, n' die Anzahl einer anderen Art von Fällen bezeichnet, wie groß sind alsdann die Wahrscheinlichkeiten (relativen Wahrscheinlichkeiten) für das Eintreten eines Falles der ersten oder anderen Art in Bezug auf einander? Antw.: $n:(n+n')$ und $n':(n+n')$ oder $w:(w+w')$ und $w':(w+w')$, wenn man die absoluten Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Fälle mit w und w' bezeichnet.

14) In einer Urne befinden sich 7 weiße, 5 rothe, 9 blaue und 14 schwarze Kugeln. Welche Wahrscheinlichkeit hat man beim Herausziehen zweier Kugeln, eher eine weiße und blaue, als eine schwarze und rothe Kugel zu ergreifen?

15) Ein Knabe, der 7 Spielkugeln hat, spielt mit mir Paar oder Unpaar. Wie verhält sich die Wahrscheinlichkeit, Paar zu gewinnen, zu der, Unpaar zu gewinnen? Antw.: Wie 63 : 64.

16) α) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß 2 Ereignisse zugleich Statt finden, wenn die Wahrscheinlichkeit des ersten Ereignisses $=\frac{p}{q}$, die des anderen $=\frac{r}{s}$ ist? β) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereigniß, dessen Wahrscheinlichkeit $=\frac{p}{q}$ ist, n-mal hinter einander eintrete?

17) Wenn w und w' die Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse bezeichnen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß α) A nicht,

wohl aber B eintreffe; β) A wohl, jedoch nicht B eintreffe; γ) weder A noch B eintreffe; δ) von A und B wenigstens Eines eintreffe? Antw.: α) $(1-w)w'$; β) $w(1-w')$; γ) $(1-w)\,(1-w')$; δ) $w+w' - ww' = 1 - (1-w)\,(1-w')$.

18) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, α) mit einem Würfel 2-, 3-, 4mal hinter einander 5 zu werfen, β) bei dem Spiele Kron oder Schrift (Wappen oder Schrift, pile ou croix) 2-, 3-, 4- u. s. w. $n$mal hinter einander zu gewinnen?

19) α) Welche Wahrscheinlichkeit hat man, mit 2 Würfeln zuerst 8, dann 9 zu werfen? β) Wie groß aber ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf den ersten Wurf 9 Augen, oder, wenn dieses nicht geschieht, auf den zweiten Wurf 8 Augen zu werfen? γ) Wie groß ist endlich die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln im ersten Wurfe 7, oder, wenn dieses nicht eintrifft, im zweiten Wurfe 7, oder, wenn auch dieses nicht eintreffen sollte, doch im dritten Wurfe 7 zu werfen? Antw.: α) $\frac{5}{324}$, β) $\frac{19}{81}$, γ) $\frac{91}{216}$.

20) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit p Würfeln p mal die Zahl a zu treffen, oder $(p-1)$ mal a und 1 mal b, oder $(p-2)$ mal a und 2 mal b u. s. w., ohne Rücksicht auf die Ordnung?

21) Von 2 Urnen enthält die erste 3 weiße und 1 schwarze, die zweite 4 schwarze und 2 weiße Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man durch einen zufälligen Griff eine weiße Kugel fassen werde?

22) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf den ersten Wurf 9, oder, wenn dieses nicht geschieht, wenigstens auf den zweiten Wurf 9 zu treffen? Antw.: $\frac{17}{81}$.

23) Wenn w die Wahrscheinlichkeit ist, daß eine $a$jährige Person A, und w' die Wahrscheinlichkeit, daß eine $b$jährige Person B noch p Jahre leben wird, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit: 1) daß A und B noch p Jahre zusammen leben, oder bei Eheleuten die Ehedauer; 2) daß von diesen beiden Personen nach p Jahren eine schon todt ist; 3) daß nach p Jahren A noch lebt und B schon todt ist; 4) daß nach p Jahren A schon todt ist und B noch lebt; 5) daß nach p Jahren beide schon todt sind; 6) daß nach p Jahren beide noch nicht todt sind, sondern daß wenigstens eine oder daß beide noch leben*)?

Antw.: 1) $w \cdot w'$; 2) $1-ww'$; 3) $w(1-w')$; 4) $(1-w)w'$;
5) $(1-w)\,(1-w')$; 6) $1-(1-w)\,(1-w')$.

*) Diese Aufgabe findet Anwendung bei Berechnung der Lebensversicherungs-Anstalten, Witwen-Cassen u. s. w. Die Größen w, w' ergeben sich aus den Mortalitäts-Tabellen; so ist z. B. nach den bekannten Süßmilch'schen Tabellen die Wahrscheinlichkeit, daß eine 38jährige Person nach 12 Jahren noch lebe $= 0{,}79$, und daß eine 35jährige Person nach 12 Jahren noch lebe $= 0{,}81$.

§. 92.

Binomischer und polynomischer Lehrsatz.

Unter $\underset{2}{S}C(abcd\ldots)$, $\underset{n}{S}C(abcd\ldots)$ versteht man die Summe aller Combinationen der Elemente $a, b, c, d\ldots$ zur zweiten und n-ten Classe, wobei zugleich die neben einander gestellten Elemente als **Factoren** eines Productes betrachtet werden. Die Summe aller Combinationen zur 1ten, 2ten, 3ten, 4ten u. s. w. Classe der Elemente $a, b, c, d, e\ldots m$ werden auch von Einigen durch die Zeichen $[a]$, $[ab]$, $[abc]$, $[abcd]$ u. s. w. bezeichnet. Unter $\overset{n=1}{\underset{n=m}{S}}\underset{n}{C}(abcd\ldots)$ versteht man die Summe aller Combinationen, die man erhält, wenn statt n nach und nach 1, 2, 3... u. s. w. bis m gesetzt wird; eine ähnliche Bedeutung hat $\overset{n=1}{\underset{n=m}{S}}\binom{n}{x}$.

1) $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)(x+f)$ zu entwickeln.

Aufl.: $x^6 + x^5 \underset{1}{S}C(abcdef) + x^4 \underset{2}{S}C(abcdef) + x^3 \underset{3}{S}C(abcdef) + x^2 \underset{4}{S}C(abcdef) + x \underset{5}{S}C(abcdef) + \underset{6}{S}C(abcdef) = x^6 + \overset{n=6}{\underset{n=1}{S}} x^{6-n} \underset{n}{C}(abcdef) = x^6 + [a]x^5 + [ab]x^4 + [abc]x^3 + [abcd]x^2 + [abcde]x + abcdef.$

2) Das Product aus den α Gliedern:
$(x\pm a)(x\pm b)(x\pm c)\ldots\ldots\ldots(x\pm m)$ zu entwickeln.

Aufl.: $x^\alpha + \overset{n=\alpha}{\underset{n=1}{S}}(\pm 1)^n x^{\alpha-n} \underset{n}{C}(abcd\ldots m) =$
$x^\alpha \pm [a]x^{\alpha-1} + [ab]x^{\alpha-2} \pm [abc]x^{\alpha-3}\ldots$ 2c.

3) $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$ zu berechnen.

Antw.: $x^5-20x^4+155x^3-580x^2+1044x-720$.

4) α) $(ax\pm 1)(bx\pm 1)(cx\pm 1)(dx\pm 1)(ex\pm 1)(fx\pm 1)(gx\pm 1)$ auszuführen.

Aufl.: $\overset{n=7}{\underset{n=1}{S}} \underset{n}{C}(abcdefg)x^n(\pm 1)^{n-1} \pm 1$.

β) Eben so: $(ax\pm\alpha)(bx\pm\beta)(cx\pm\gamma)(dx\pm\delta)(ex\pm\varepsilon)(fx\pm\zeta)(gx\pm\eta)$ zu entwickeln.

5) $(x\pm a)^6$ zu entwickeln.

Aufl.: $x^6 \pm \binom{6}{1}x^5 a + \binom{6}{2}x^4 a^2 \pm \binom{6}{3}x^3 a^3 + \binom{6}{4}x^2 a^4 \pm \binom{6}{5}x a^5 + \binom{6}{6}a^6 =$
$x^6 + \left[\overset{n=6}{\underset{n=1}{S}}\binom{6}{n}\right] x^{6-n} a^n (\pm 1)^n.$

6) $(a\pm b)^n$ zu entwickeln.

Aufl.: $a^n \pm \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \pm$

$\binom{n}{3} a^{n-3} b^3 \ldots\ldots = a^n + {}^{x=n}_{x=1}S \binom{n}{x} a^{n-x} b^x (\pm 1)^n$,

oder $= a^n \pm \frac{n}{1}\frac{b}{a} A_1 + \frac{n-1}{2}\frac{b}{a} A_2 \pm \frac{n-2}{3}\frac{b}{a} A_3 + \frac{n-3}{4}\frac{b}{a} A_4 \ldots$ *).

7) $(a \pm b)^n$ für $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ und 12 zu entwickeln.

8) $(3a - 7b)^7$ zu entwickeln.

Aufl.: $2187a^7 - 35721a^6b + 250047a^5b^2 - 972405a^4b^3 + 2268945a^3b^4 - 3176523a^2b^5 + 2470629ab^6 - 823543b^7$.

9) Eben so: $(5a - 4b)^9$, $(a^3 - 3ab^2)^8$ und $\left(\frac{3a^3b^2}{c} - \frac{2c^3}{a^2b}\right)^6$.

10) Eben so: $(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^8$ und $(\sqrt{x:y} \pm \sqrt{y:x})^9$.

11) α) Das 4te Glied von $(m+n)^{17}$, β) das 14te von $(a-b)^{19}$, γ) das 5te von $(3a^2 - 7ab^3)^{30}$ zu bestimmen.

12) Wie heißen die mittleren Glieder von $(5a - 2b)^{19}$?

13) Das mittlere Glied oder die mittleren Glieder von $(a \pm b)^n$ anzugeben.

14) α) $(a+b)^n \pm (a-b)^n$, β) $(a + b\sqrt{-1})^n \pm (a - b\sqrt{-1})^n$.

15) α) $(a+b+c)^2$, β) $(a+b-c)^3$, γ) $(a+b-c)^4$, δ) $(a - b \mp c)^5$ auszuführen.

16) $(a+b+c)^n$ auszuführen.

17) $(a \pm b \pm c \pm d)^n$ für $n =$ α) 2, β) 3, γ) 4, δ) 5, und ε) allgemein für $n = n$ zu entwickeln.

18) $(2 - 5x - 7x^2 + x^3 + 3x^4)^5$ zu entwickeln.

Aufl.: $32 - 400x + 1440x^2 + 680x^3 - 11390x^4 + 1955x^5 + 47025x^6 + 5435x^7 - 111845x^8 - 71145x^9 + 108073x^{10} + 119495x^{11} - 86055x^{13} - 8165x^{14} + 31441x^{15} + 9465x^{16} - 5715x^{17} - 2565x^{18} + 405x^{19} + 243x^{20}$.

19) Wie heißt das 4te Glied von $(a - 2x + 3x^2 - 4x^3)^6$?

20) Der für ganze positive Exponenten bewiesene binomische Lehrsatz gilt auch für ganze negative, für gebrochene positive und gebrochene negative Exponenten. Warum?

21) α) $(a+b)^{-1}$, β) $(a+b)^{-2}$, γ) $(a-b)^{-3}$, δ) $(a+b)^{\frac{1}{2}}$, ε) $(a-b)^{\frac{1}{3}}$, ζ) $(a+b)^{\frac{2}{3}}$, η) $(a-b)^{\frac{3}{4}}$, ϑ) $(a-b)^{-\frac{1}{2}}$, ι) $(a-b)^{-\frac{2}{3}}$.

22) α) $\sqrt{11}$, β) $\sqrt{47}$, γ) $\sqrt{2}$, δ) $\sqrt[3]{388}$, ε) $\sqrt[3]{3}$ zu berechnen.

---

*) Ueber die Bedeutung von A_1, A_2, A_3, A_4 u. s. w. siehe §. 86.

Aufl.: α) $\sqrt{11} = 3\sqrt{1+\frac{2}{9}} = 3(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9} - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{9}A_1 + \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{9}\cdot A_2 - \frac{5}{8}\cdot\frac{2}{9}\cdot A_3 + \frac{7}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot A_4 - \frac{9}{12}\cdot\frac{2}{9}\cdot A_5 + \frac{11}{14}\cdot\frac{2}{9}\cdot A_6) = 3(1 + 0{,}1111111 - 0{,}0061728 + 0{,}0006859 - 0{,}0000953 + 0{,}0000148 - 0{,}0000025 + 0{,}0000004) = 3{,}3166248.$ Auch ist $\sqrt{11} = \frac{1}{3}\sqrt{100-1} = \frac{10}{3}\sqrt{1-0{,}01} = \frac{10}{3}(1-0{,}005-0{,}0000125 - 0{,}0000000625 - 0{,}00000000039063 - 0{,}00000000000273 - 0{,}00000000000002) = 3{,}3166247903554.$

β) $\sqrt{47} = 7\sqrt{1-\frac{2}{49}} = 7(1-0{,}0204082-0{,}0002082-0{,}0000043 - 0{,}0000001) = 6{,}8556544.$

γ) $\sqrt{2} = \frac{1}{5}\sqrt{50} = \frac{7}{5} + \frac{1}{100}A_1 + \frac{3}{200}A_2 + \frac{5}{300}A_3 + \frac{7}{400}A_4 + \frac{9}{500}A_5 + \frac{11}{600}A_6 = 1{,}4000000000000 + 0{,}0140000000000 + 0{,}0002100000000 + 0{,}0000035000000 + 0{,}0000000612500 + 0{,}0000000011025 + 0{,}0000000000202 + 0{,}0000000000003 = 1{,}4142135623730.$

δ) $\sqrt[3]{388} = \frac{22}{3}\sqrt[3]{1-\frac{43}{2662}} = \frac{22}{3}(1 - 0{,}005384422740 - 0{,}000028992008 - 0{,}000000260175 - 0{,}000000002802 - 0{,}000000000033) = 7{,}293633029775.$

ε) $\sqrt[3]{3} = \frac{1}{9}\sqrt[3]{2187} = \frac{1}{9}(13^3-10)^{\frac{1}{3}} = \frac{13}{9} - \frac{10}{6591}A_1 - \frac{10}{6591}A_2 + \frac{100}{395460}A_3 .. = 1{,}4422495872......$

23) α) $\sqrt[10]{10}$; β) $1 : \sqrt[3]{68}$ zu berechnen.

Aufl.: α) $\sqrt[10]{10} = \frac{10}{8}\sqrt[10]{\frac{8^{10}}{10^{10}}\cdot 10} = \frac{10}{8}\sqrt[10]{1{,}073741824} = \frac{10}{8}(1+0{,}007374182 - 0{,}000244704 + 0{,}000011428 - 0{,}000000611 + 0{,}000000035) = 1{,}258925412.$

β) $1 : \sqrt[3]{68} = 1 : 4\sqrt[3]{1+\frac{4}{64}} = \frac{1}{4}(1+\frac{1}{16})^{-\frac{1}{3}} = 0{,}244998652503.$

24) $(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ zu entwickeln.

Aufl.: $2a^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1.2}{3.6}\frac{b^2}{a^2} - \frac{5.8}{9.12}\frac{b^2}{a^2}A_1 + \frac{11.14}{15.18}\frac{b^2}{a^2}A_2 - \frac{17.20}{21.24}\frac{b^2}{a^2}A_3 \ldots\right)$

oder $= -2b^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\frac{a}{b} - \frac{2.5}{6.9}\frac{a^2}{b^2}A_1 + \frac{8.11}{12.15}\frac{a^2}{b^2}A_2 - \cdots\right).$

25) Ein Capital $= 1$ stehe zu p Procent auf Zinseszinsen. Wie groß ist dasselbe nach n Jahren?

Antw.: $\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = 1 + \frac{n}{100}p + \frac{n-1}{200}pA_1 + \frac{n-2}{300}pA_2 + \frac{n-3}{400}pA_3 \ldots$

§. 93.

Eigenschaften der Binomial-Coefficienten. Figurirte Zahlen.

$\binom{b}{n}$*) heißt der n-te Binomial-Coefficient, b die Basis, n der Zeiger.

1) Binomial-Coefficienten von derselben Basis, deren Zeigersummen sich zur Basis ergänzen, sind einander gleich. Warum?

2) Wie findet man aus einem Binomial-Coefficienten den nächstniedrigen, mit einem um 1 verminderten Zeiger?

3) Welchen W.rth hat $\alpha)\ \binom{b}{0}$? $\beta)\ \binom{b}{b}$? $\gamma)\ \binom{b}{b+1}$?

4) Was wird aus einem Binomial-Coefficienten, wenn der Zeiger negativ, was, wenn er größer als die Basis ist?

5) $\alpha)\ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$. Warum?

$\beta)\ \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \cdots + \binom{n}{n}(-1)^n = 0$. Warum?

Die Beweise aus $(1 \pm 1)^n$ abzuleiten.

6) Die Anzahl aller Combinationen in allen Classen aus n Elementen ist gleich $2^n - 1$. Warum?

7) $\binom{b+1}{n+1} = \binom{b}{n} + \binom{b}{n+1}$. Warum?

8) $\binom{b}{n} + \binom{b-1}{n} + \binom{b-2}{n} + \binom{b-3}{n} +$ ꝛc. $\binom{n}{n} = \binom{b+1}{n+1}$,

oder $\overset{x=b}{\underset{x=0}{S}}\binom{x}{n} = \binom{b+1}{n+1}$. Warum, und wie heißt dieser Satz in Worten?

9) $1^2+2^2+3^2+4^2 \cdots\cdots + n^2$ oder Sn^2 zu entwickeln.

Aufl.: $n^2 = (n+1)n-n = 2\binom{n+1}{2} - \binom{n}{1}$.

$$Sn^2 = 2S\binom{n+1}{2} - S\binom{n}{1} = 2\binom{n+2}{3} - \binom{n+1}{2}$$
$$= \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

10) $\alpha)\ Sn^3$; $\beta)\ Sn^4$ zu entwickeln.

---

*) Ueber die Bedeutung von $\binom{b}{n}$ sehe man §. 89. Hindenburg bezeichnet den ersten Binomial-Coefficienten von b mit ${}^b\mathfrak{A}$, den zweiten mit ${}^b\mathfrak{B}$, den dritten mit ${}^b\mathfrak{C}$, den vierten mit ${}^b\mathfrak{D}$ u. s. w.

Aufl.: α) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = (Sn)^2 = (1+2+3 \cdots\cdots + n)^2$;
β) $\frac{1}{30}n(6n^4+15n^3+10n^2-1) = \frac{1}{30}n(n+1)\,(6n^3+9n^2+n-1)$
$= \frac{1}{30}n(n+1)\,(2n+1)\,(3n^2+3n-1)$.

11) Eine gewisse Anzahl Kanonenkugeln ist in Form einer dreiseitigen Pyramide aufgeschichtet. In der obersten Schicht liegt eine Kugel, in der zweiten liegen 3, in der dritten 6 u. s. w. Wie viel Kugeln befinden sich in der 20ten Schicht? wie viel in der $n$ten? wie viel in 20 Schichten? wie viel in n Schichten zusammen?

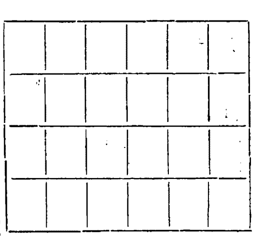
12) Wie viel Kanonenkugeln befinden sich in einer unvollständigen, dreiseitigen Pyramide, wenn an jeder Seite der untersten Schicht m, und an jeder Seite der obersten Schicht n Kugeln liegen?

13) Wie viel Kugeln enthält eine vollständige quadratische Pyramide von 20, wie viel von n Schichten?

14) Die unterste Schicht eines Kugelhaufens habe die Form eines Rechtecks, und zwar mögen sich an der einen Seite m, an der anderen n $(< m)$ Kugeln befinden; in jeder folgenden Schicht möge sich an jeder Seite eine Kugel weniger befinden. Wie viel Kugeln sind α) in einem vollständigen Haufen von n Schichten enthalten? Wie viel Kugeln befinden sich β) in einer länglichen Pyramide von n Schichten, welche an der Grundlage in der Länge m, in der Breite n Kugeln hat, und welche sich mit den beiden Enden an zwei andere vierseitige Pyramiden anlehnt? Wie viel Kugeln befinden sich γ) in einem Kugelhaufen, der ein hohles Viereck oder sogenanntes Carré bildet, wenn der Rücken im Ganzen m Kugeln enthält und die Anzahl der Schichten n beträgt? Wie viel Kugeln endlich befinden sich δ) in einem solchen hohlen Vierecke, wenn zur Bildung eines Einganges vom Rücken p Kugeln abgenommen werden?

Antw.: α) $\frac{1}{6}n(n+1)\,(3m-n+1)$; β) $\frac{1}{6}n(n+1)\,(3m+n-1)$;
γ) $\frac{mn(n+1)}{2}$; δ) $\frac{1}{6}n(n+1)\,[3(m-p)+2n+1]$.

a b



d c

15) Ein Rechteck, $abcd$, ist der Länge nach durch 3, der Breite nach durch 5 gerade Linien durchschnitten. Auf wie vielerlei Arten kann man von dem Puncte a zum Puncte c gelangen, so daß die Länge des zurückgelegten Weges dieselbe, nämlich $ad + dc$, bleibt?

16) Eine, in Form eines Rechtecks, regelmäßig gebaute, nach außen offene Stadt ist der Länge nach durch 19, der Breite nach durch 13 Straßen durchschnitten. Jemand, der an dem einen äußersten Ende der Stadt wohnt, hat täglich 4 mal den Weg zwischen

zwei diagonal gegenüberstehenden Ecken zu machen, und nimmt sich vor, jedes Mal einen anderen Weg einzuschlagen. In wie viel Tagen würde er sein Vorhaben ausführen können, vorausgesetzt, daß er keine Umwege macht? Antw.: In 347993910 Tagen.

17) Wie heißt die Auflösung der 15ten Aufgabe, wenn für 3 und 5 die allgemeinen Zeichen m und n gesetzt werden?

Antw.: $\binom{m+n+2}{m+1} = \binom{m+n+2}{n+1} = \frac{(m+n+2)!}{(m+1)!\,(n+1)!}$.

18) α) Ein Würfel ist durch 3 Ebenen parallel mit einer Seitenfläche, durch 4 Ebenen parallel mit einer anderen Seitenfläche, und durch 5 Ebenen parallel mit einer dritten Seitenfläche in 120 Parallelepipeden zertheilt. Wie oftmal kann ein sich bewegender Punct von einer Ecke des Würfels zur diagonal gegenüberstehenden, längs den Kanten der Parallelepipeden, auf dem kürzesten Wege gelangen? β) Wie heißt die Auflösung dieser Aufgabe, wenn für 3, 4, 5 die allgemeinen Zeichen m, n, p gesetzt werden, so daß der Würfel in $(m+1)$ $(n+1)$ $(p+1)$ Parallelepipeden zerlegt wird?

Antw.: α) 630630, β) $\frac{(m+n+p+3)!}{(m+1)!(n+1)!(p+1)!}$ mal.

19) *Abracadabra* ist ein magisches Wort, mit welchem ehedem der Aberglaube verschiedene Krankheiten, besonders das hartnäckige viertägige Wechselfieber, heilen zu können glaubte. Nach der Anweisung des basilidischen Arztes Q. Serenus Sammonicus ist jenes Wort so zu schreiben*):

A b r a c a d a b r a
A b r a c a d a b r
A b r a c a d a b
A b r a c a d a
A b r a c a d
A b r a c a
A b r a c
A b r a
A b r
A b
A

Wie oftmal kann man dieses magische Wort *Abracadabra* von einem *A* anfangend bis zum letzten *a* in den rechten Ecken lesen, indem man sowohl in horizontaler Richtung, als rechts aufwärts

*) Sammonicus gibt die Vorschrift:
Inscribes chartae, quod dicitur Abracadabra,
His lino nexis collum redimire memento u. s. w.

in schiefer Richtung fortgeht? Antw.: $2^{10} = 1024$ mal. Die Anzahl wird bedeutend größer, wenn man zum Theil auch in schiefer Richtung rechts abwärts fortgeht.

20) In Oviedo, in der Provinz Asturien in Spanien, befindet sich die von einem alten Fürsten Silo erbaute Kirche San Salvador. Der Grabstein des Fürsten trägt die Inschrift*):

t	*i*	*c*	*e*	*f*	*s*	*p*	*e*	*c*	*n*	*c*	*e*	*p*	*s*	*f*	*e*	*c*	*i*	*t*
i	*c*	*e*	*f*	*s*	*p*	*e*	*c*	*n*	*i*	*n*	*c*	*e*	*p*	*s*	*f*	*e*	*c*	*i*
c	*e*	*f*	*s*	*p*	*e*	*c*	*n*	*i*	*r*	*i*	*n*	*c*	*e*	*p*	*s*	*f*	*e*	*c*
e	*f*	*s*	*p*	*e*	*c*	*n*	*i*	*r*	*p*	*r*	*i*	*n*	*c*	*e*	*p*	*s*	*f*	*e*
f	*s*	*p*	*e*	*c*	*n*	*i*	*r*	*p*	*o*	*p*	*r*	*i*	*n*	*c*	*e*	*p*	*s*	*f*
s	*p*	*e*	*c*	*n*	*i*	*r*	*p*	*o*	*l*	*o*	*p*	*r*	*i*	*n*	*c*	*e*	*p*	*s*
p	*e*	*c*	*n*	*i*	*r*	*p*	*o*	*l*	*i*	*l*	*o*	*p*	*r*	*i*	*n*	*c*	*e*	*p*
e	*c*	*n*	*i*	*r*	*p*	*o*	*l*	*i*	**S**	*i*	*l*	*o*	*p*	*r*	*i*	*n*	*c*	*e*
p	*e*	*c*	*n*	*i*	*r*	*p*	*o*	*l*	*i*	*l*	*o*	*p*	*r*	*i*	*n*	*c*	*e*	*p*
s	*p*	*e*	*c*	*n*	*i*	*r*	*p*	*o*	*l*	*o*	*p*	*r*	*i*	*n*	*c*	*e*	*p*	*s*
f	*s*	*p*	*e*	*c*	*n*	*i*	*r*	*p*	*o*	*p*	*r*	*i*	*n*	*c*	*e*	*p*	*s*	*f*
e	*f*	*s*	*p*	*e*	*c*	*n*	*i*	*r*	*p*	*r*	*i*	*n*	*c*	*e*	*p*	*s*	*f*	*e*
c	*e*	*f*	*s*	*p*	*e*	*c*	*n*	*i*	*r*	*i*	*n*	*c*	*e*	*p*	*s*	*f*	*e*	*c*
i	*c*	*e*	*f*	*s*	*p*	*e*	*c*	*n*	*i*	*n*	*c*	*e*	*p*	*s*	*f*	*e*	*c*	*i*
t	*i*	*c*	*e*	*f*	*s*	*p*	*e*	*c*	*n*	*c*	*e*	*p*	*s*	*f*	*e*	*c*	*i*	*t*

Wie oftmal läßt sich von der Mitte *S* nach den 4 Ecken *t, t, t, t* die Inschrift: *Silo princeps fecit* lesen?

Antw.: Auf 45760 Arten.

*) Hispaniae illustratae scriptores varii, Tom I. J. Vasaéi Hisp. chronic. Daselbst heißt es: Ubi legitur *ducenties septuagies*: Silo princeps fecit.

Siebenter Abschnitt.

Gleichungen von höheren Graden und transscendente Gleichungen.

A. Eigenschaften der Gleichungen in Bezug auf ihre Wurzeln.

§. 94.

1) Welche Gleichung des dritten Grades hat die Wurzeln α, β, γ?
Antw.: $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma = 0$.

2) Welche Gleichung des vierten Grades hat die Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$?

3) Sind α, β, γ, δ u. s. w. die Wurzeln einer Function, $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} \ldots + t = X$, so ist X durch die Differenzen $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$ u. s. w. ohne Rest theilbar. Warum?

4) Wenn eine Gleichung vom n-ten Grade, $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} \ldots + t = 0$, n Wurzeln α, β, γ, δ, $\varepsilon \ldots \nu$ hat, in welcher Beziehung stehen die Coefficienten a, b, $c \ldots$ zu den Wurzeln α, β, $\gamma \ldots$?

5) Jede Gleichung vom n-ten Grade hat n, aber auch nur n Wurzeln*). In welche Factoren läßt sich jede Function von x von der Form $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \ldots t$ zerlegen?

6) Setzt man in eine Function von x, $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} \ldots + t$, für x nach einander die Werthe p und q, und erhält man dadurch Resultate mit entgegengesetzten Vorzeichen, so liegt zwischen p und q wenigstens eine reelle Wurzel der Function. Warum?

7) Eine Gleichung des dritten Grades hat wenigstens eine reelle Wurzel. Warum?

8) Wie wird die Gleichung des dritten Grades $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ in eine andere (reducirte) verwandelt, in welcher das zweite Glied fehlt?

*) Der streng mathematische Beweis dieses sehr wichtigen Satzes, wie ihn Gauß und Cauchy geführt haben, gehört nicht hieher.

9) Die allgemeine Gleichung $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} \ldots + t = 0$ in eine reducirte zu verwandeln.

B. Directe Auflösung der Gleichungen vom dritten Grade.

§. 95 a.

Besondere Fälle der Gleichungen des dritten Grades.

1) $x^3 - 1 = 0$. Aufl.: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3}) = J_1$, $x_3 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3}) = J_2$. (S. §. 49, Nr. 18.)

2) $x^3 + 1 = 0$. A.: $x_1 = -1$, $x_2 = -J_1$, $x_3 = -J_2$.

3) α) $x^3 \pm n^3 = 0$. A.: $x_1 = \mp n$, $x_2 = \mp nJ_1$, $x_3 = \mp nJ_2$.

β) $(a-x)^3 = (x-b)^3$. A.: $x_1 = \frac{1}{2}(a+b)$, x_2 und $x_3 = \frac{1}{2}(a+b) \pm \frac{1}{2}(a-b)\sqrt{-3}$.

4) Wenn $x^3 + Ax^2 + Bx$ die drei ersten Glieder des vollständigen Kubus einer zweitheiligen Größe enthalten soll, welche Beziehung muß alsdann zwischen A und B Statt finden?

5) Die Gleichung $x^3 + Ax^2 + \frac{1}{3}A^2x = C$ aufzulösen*).

A.: $x_1 = -\frac{1}{3}A + \sqrt[3]{C + \frac{1}{27}A^3}$ $x_2 = -\frac{1}{3}A + J_1\sqrt[3]{C + \frac{1}{27}A^3}$,

$x_3 = -\frac{1}{3}A + J_2\sqrt[3]{C + \frac{1}{27}A^3}$.

6) $x^3 - 12x^2 + 48x - 189 = 0$.

Aufl.: $x_1 = 9$, $x_2 = 1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $x_3 = 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

7) $x^3 - a^2x = 0$. A.: $x_1 = 0$, x_2 und $x_3 = \pm a$.

8) Welche Beziehung muß zwischen den Coefficienten m, n und p Statt finden, wenn die Gleichung $x^3 - 3mx^2 + nx - p = 0$ auf die Form $y^3 - qy = 0$ gebracht werden kann?

Aufl.: Es muß $m(n - 2m^2) = p$ sein; es wird alsdann $x_1 = m$, x_2 und $x_3 = m \pm \sqrt{3m^2 - n}$.

9) $x^3 - 3bx^2 + (3b^2 - a^2)x - b(b^2 - a^2) = 0$.

Aufl.: $x_1 = b$, $x_2 = b + a$, $x_3 = b - a$.

10) $x^3 - 3(m+n)x^2 + (3m^2 + 6mn + 2n^2)x - m(m^2 + 3mn + 2n^2) = 0$. Aufl.: $x_1 = m$, $x_2 = m + n$, $x_3 = m + 2n$.

---

*) Eine Methode, die allgemeine cubische Gleichung auf diese Form zu reduciren, s. Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik u. Physik VIII. 135.

§. 95 b.

1) Cardanische Formel*) und Formeln von Clausen und Hulbe.

$$x^3+px+q = 0\text{**)}.$$

$$x_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}, \text{ oder}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q}\left[\sqrt[3]{-1+\sqrt{1+\tfrac{4}{27}\tfrac{p^3}{q^2}}} - \sqrt[3]{1+\sqrt{1+\tfrac{4}{27}\tfrac{p^3}{q^2}}}\right].$$

Bezeichnet man den ersten Summanden von x_1 mit u, den zweiten mit v, so sind die beiden anderen Wurzeln $x_2 = J_1u+J_2v = -\frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(u-v)$, $x_3 = J_2u + J_1v = -\frac{1}{2}(u+v) - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(u-v)$. (Ueber die Bedeutungen von J_1 u. J_2 s. §. 95a Nr. 1.)

1) Wie ändert sich die cardanische Formel um, wenn $x^3+px-q=0$, wie, wenn $x^3-px+q=0$, wie endlich, wenn $x^3-px-q=0$ gegeben ist?

2) Wenn α eine Wurzel der Gleichung $x^3+px+q = 0$ ist, so sind die beiden anderen Wurzeln $-\frac{1}{2}\alpha\pm\sqrt{-\frac{3}{4}\alpha^2-p}$. Warum? In welchem Falle sind die beiden anderen Wurzelwerthe imaginär?

3) In welchem Falle erscheint der erste durch die cardanische Formel sich ergebende Wurzelwerth unter imaginärer Form?

4) $x^3+48x+504 = 0$.

Aufl.: $x_1 = -6$, $x_2 = 3+5\sqrt{-3}$, $x_3 = 3-5\sqrt{-3}$.

5) $3x^3+4x+7 = 0$.

Aufl.: $x_1 = -1$, x_2 und $x_3 = \frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}\sqrt{-3}$.

6) $x^3-21x-344 = 0$.

Aufl.: $x_1 = 8$, x_2 und $x_3 = -4\pm 3\sqrt{-3}$.

7) $x^3-3x+2 = 0$. A.: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

8) $x^3-12x+16 = 0$. A.: $x_1 = -4$, x_2 u. $x_3 = 2$.

9) $x^3-9x+28 = 0$.

Aufl.: $x_1 = -4$, x_2 und $x_3 = 2\pm\sqrt{-3}$.

10) $x^3-60x+671 = 0$.

Aufl.: $x_1 = -11$, x_2 und $x_3 = \frac{11}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-123}$.

---

*) Sollte eigentlich die Formel des Scipio Ferreo oder die Formel des Tartalea heißen. Nach Cardan's eigenem Berichte (Ars magna, 1545) hatte Scipio Ferreo die Methode zur Auflösung der Gleichungen des dritten Grades zuerst entdeckt; späterhin erfand dieselbe Tartalea selbstständig.

**) Erste Auflösung mittelst Kegelschnitte von Omar ben Ibrahim Alchayyami (um 1080) L'algèbre d'Omar ben Ibrahim publ. et trad. par Woepke. Paris 1851.

11) $x^3-2x-4=0$.

Aufl.: $x_1=(1+\sqrt{\tfrac{1}{3}})+(1-\sqrt{\tfrac{1}{3}})=2$; x_2 u. $x_3=-1\pm\sqrt{-1}$.

12) $x^3-26x-60=0$.

Aufl.: $x_1=6$, x_2 und $x_3=-3\pm\sqrt{-1}$.

13) $x^3-2\tfrac{3}{4}x+18\tfrac{3}{4}=0$.

Aufl.: $x_1=-3$, x_2 und $x_3=\tfrac{3}{2}\pm2\sqrt{-1}$.

14) $x^3-7x-36=0$.

Aufl.: $x_1=4$, x_2 und $x_3=-2\pm\sqrt{-5}$.

15) $x^3+3x+14=0$.

Aufl.: $x_1=-2$, x_2 und $x_3=1\pm\sqrt{-6}$.

16) $x^3+3x-5=0$.

Aufl.: $x_1=1{,}154171495$, x_2 u. $x_3=-0{,}5770857\pm1{,}99977\sqrt{-1}$.

17) $x^3+7x+3=0$.

Aufl.: $x_1=-0{,}418128$; x_2 u. $x_3=0{,}209064\pm2{,}6704\sqrt{-1}$.

18) $x^3-7x+11=0$.

Aufl.: $x_1=-3{,}2263621$, x_2 und $x_3=1{,}613181\pm0{,}898364\sqrt{-1}$.

19) $x^3-4x-5=0$.

Aufl.: $x_1=2{,}456678343$, x_2 und $x_3=1{,}228339\pm0{,}72556\sqrt{-1}$.

20) $x^3-6x^2-12x+112=0$.

Aufl.: $x=y+2$; $x_1=-4$, x_2 und $x_3=5\pm\sqrt{-3}$.

21) $x^3+12x^2+45x+50=0$.

Aufl.: $x_1=-2$, x_2 und $x_3=-5$.

22) $x^3-21x^2+159x-490=0$.

Aufl.: $x_1=10$, x_2 und $x_3=\tfrac{11}{2}\pm\tfrac{5}{2}\sqrt{-3}$.

23) $x^3+2x^2+3x+4=0$.

Aufl.: $x_1=-1{,}650630$, x_2 u. $x_3=-0{,}174685\pm1{,}546871\sqrt{-1}$.

24) α) $x^3+(b^2-3a^2)x-2a(a^2+b^2)=0$.

Aufl.: $x_1=(a+b\sqrt{\tfrac{1}{3}})+(a-b\sqrt{\tfrac{1}{3}})=2a$; x_2 u. $x_3=-a\pm b\sqrt{-1}$.

β) Wie heißen die Wurzeln der Gleichung $x^3+px+q=0$, wenn $\tfrac{1}{4}q^2=-\tfrac{1}{27}p^3$ ist?

Aufl.: $x^3+px+\tfrac{2}{3}p\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}=(x+\sqrt{-\tfrac{1}{3}p})^2(x-2\sqrt{-\tfrac{1}{3}p})$. Hieraus: $x_1=-\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}$, $x_2=-\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}$, $x_3=2\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}$.

25) Wie läßt sich die unter imaginärer Form erscheinende Wurzel der Gleichung $x^3-px+q=0$ für den Fall, daß $\tfrac{1}{4}q^2<\tfrac{1}{27}p^3$ ist, unter reeller Form darstellen? (Casus irreducibilis.)

Aufl.: Man setze nach der Formel der 24. Aufgabe des §. 92: $a=\tfrac{1}{2}q$, $b=\sqrt{\tfrac{1}{27}p^3-\tfrac{1}{4}q^2}$, und rechne nach der 1. oder 2. Reihe, je nachdem $a \gtrless b$ ist.

26) $x^3 - 19x + 30 = 0$.

Aufl.: $x_1 = -4{,}9324241\,(1 + 0{,}01433927 - 0{,}00068538 + 0{,}00005045 - 0{,}00000439 + 0{,}00000044 - 0{,}00000005) = -5$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$.

27) $x^3 - 0{,}361111x + 0{,}055556 = 0$.

Aufl.: $x_1 = -0{,}66667$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 0{,}16667$.

28) $\sqrt[4]{x^3} = 12 - \sqrt{x}$.

Aufl.: $x_1 = 16$, x_2 und $x_3 = -31{,}5 \pm 17{,}428425\sqrt{-1}$.

29) **Der Wurzelwerth der Gleichung $x^3 - px - q = 0$ läßt sich nach Clausen*) in folgenden Kettenbruch verwandeln:**

Setzt man $x = y\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, $\tfrac{1}{2}q\left(\tfrac{3}{p}\right)^{\frac{3}{2}} = a$, so wird 1) $y^3 - 3y - 2a = 0$, wo $a < 1$. Setzt man nun $y = 1 + \dfrac{2\sqrt{\frac{1}{2}(1+a)}}{y_{\prime}}$, so erhält man 2) $y_{\prime}^3 - 3y_{\prime} - 2\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+a)}$, eine Gleichung von derselben Form wie 1), wenn man $\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+a)} = a_{\prime}$ setzt. Nimmt man nun auf dieselbe Weise $\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+a_{\prime})} = a_{\prime\prime}$, $\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+a_{\prime\prime})} = a_{\prime\prime\prime}$ u. s. w., so wird:

$$y = 1 + \frac{2a_{\prime}}{1} + \frac{2a_{\prime\prime}}{1} + \frac{2a_{\prime\prime\prime}}{1} + \frac{2a_{\prime\prime\prime\prime}}{1} \ldots\ldots$$

Die Werthe $a, a_{\prime}, a_{\prime\prime} \ldots$ convergiren schnell gegen die Einheit. Für den besonderen Fall $a = 1$ ist $y = 2$. Auf dieselbe Weise entwickelt man einen Kettenbruch aus der Gleichung $y^3 - 3y + 2a = 0$.

30) $x^3 - 2100x - 24000 = 0$.

Aufl.: $a = 0{,}64793$, $a_{\prime} = 0{,}90774$, $a_{\prime\prime} = 0{,}97668$, $a_{\prime\prime\prime} = 0{,}99415$, $a_{\prime\prime\prime\prime} = 0{,}99856$, $a_{\mathrm{V}} = 0{,}99964$, $a_{\mathrm{VI}} = 0{,}99991$, $a_{\mathrm{VII}} = 9{,}99998$; $y = 1{,}9173$, $x = 50{,}726$.

31) **Die allgemeine Gleichung $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ wird nach Hulbe**) in folgender Weise behandelt.**

Man setze: $x = \dfrac{1}{z} + h$, alsdann wird:

$$z^3 + \frac{3h^2 + 2ph + q}{h^3 + ph^2 + qh + r}\,z^2 + \frac{3h + p}{h^3 + ph^2 + qh + r}\,z + \frac{1}{h^3 + ph^2 + qh + r} = 0.$$

Setzt man, um diese Gleichung, welche die Form $z^3 + Az^2 + Bz + C = 0$ hat, nach der in §. 95a. 5 angegebenen Weise lösen zu können, $B = \tfrac{1}{3}A^2$, so erhält man nach gehöriger Reduction in Bezug auf h die Gleichung:

$$h^2(3q - p^2) + (9r - pq)h = q^2 - 3pr,$$

hieraus: $$h = \frac{pq - 9r \pm \sqrt{(pq - 9r)^2 + 4(q^2 - 3pr)\,(3q - p^2)}}{2(3q - p^2)}.$$

Endlich ist: $z = -\tfrac{1}{3}A + \sqrt[3]{\tfrac{1}{27}A^3 - C}$.

Beispiel: $x^3 + 3x^2 - 177x + 751 = 0$.

---

*) Astron. Nachr. u. Grun. Arch. II. 446.

**) Analytische Entdeckungen in der Auflösungskunst der höheren Gleichungen. Berlin und Stralsund 1794 p. 95.

Die Gleichung für h vom zweiten Grade liefert die Wurzelwerthe: $h_1 = 7$, $h_2 = 6\frac{1}{2}$. Für $h_1 = 7$ erhält man:

$$z^3+6z^2+12z+\tfrac{1}{2}=0,\ z = -2+\sqrt[3]{7{,}5},\ x_1=\tfrac{1}{2}+h_1=-16{,}4928.$$

Für $h_2 = 6\frac{1}{2}$ wird $z^3-6z^2+12z+\frac{8}{15} = 0$, $z = 2-\sqrt[3]{8\frac{8}{15}}$. Der sich hieraus ergebende Werth für x ist derselbe, $-16{,}4928$, wie oben. Es ist ferner: x_2 und $x_3 = 6{,}7464 \pm 0{,}1443\sqrt{-1}$.

§. 96.

2) Trigonometrische Formel *).

I. $x^3+px\pm q = 0;\ tang\ \alpha = \frac{p}{3q}\sqrt{\tfrac{4}{3}p};\ \ tang\ \beta = \sqrt[3]{tang\ \tfrac{1}{2}\alpha};$

$$x_1 = \mp\sqrt{\tfrac{4}{3}p}\ cotg\ 2\beta,\ x_2 = \pm\frac{\sqrt{\frac{1}{3}p}}{sin\ 2\beta}(cos\ 2\beta+\sqrt{-3}),$$

$$x_3 = \pm\frac{\sqrt{\frac{1}{3}p}}{sin\ 2\beta}(cos\ 2\beta-\sqrt{-3}),\ \text{oder}$$

$$x_2 \text{ und } x_3 = -\tfrac{1}{2}x_1 \mp \tfrac{1}{2}x_1\frac{\sqrt{-3}}{cos\ 2\beta}.$$

II. $x^3-px\pm q = 0;\ \ 4p^3 \overline{\gtrless} 27q^2;\ \ sin\ \gamma = \frac{p}{3q}\sqrt{\tfrac{4}{3}p};$

$$tang\ \delta = \sqrt[3]{tang\ \tfrac{1}{2}\gamma};\ \ x_1 = \mp\sqrt{\tfrac{4}{3}p} : sin\ 2\delta;$$

$$x_2 = \pm\frac{\sqrt{\frac{1}{3}p}}{sin 2\delta}(1+cos 2\delta\sqrt{-3}),\ x_3 = \pm\frac{\sqrt{\frac{1}{3}p}}{sin 2\delta}(1-cos\ 2\delta\sqrt{-3}).$$

III. $x^3-px\pm q = 0;\ \ 4p^3 \overline{\gtrless} 27q^2;\ sin\ 3\varepsilon = \frac{3q}{p}\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}p}};$

*) Die trigonometrischen Formeln für I. und II. ergeben sich aus dem zweiten Ausdrucke der Cardanischen Formel mit Benutzung der trigonometrischen Sätze: $\sqrt{1+tg\ \alpha^2} = 1 : cos\ \alpha$, $1-cos\ \alpha = 2\ sin\ \frac{1}{2}\alpha^2$, $1+cos\ \alpha = 2\ cos\ \frac{1}{2}\alpha^2$, $tg\ \beta - cotg\ \beta = -2\ cotg\ 2\beta$, $\sqrt{1-sin\ \alpha^2} = cos\ \alpha$, $tang\ \beta+cotg\ \beta = 2 : sin\ 2\beta$. Die Werthe für x_2 und x_3 werden mit Hülfe der in §. 95b. Nr. 2 angegebenen Formeln für x_2 und x_3 erhalten. Der Formel III. endlich liegt die trigonometrische Formel: $sin\ 3\varepsilon = 3\ sin\ \varepsilon - 4\ sin\ \varepsilon^3$ zum Grunde, welche, wenn $x : r = sin\ \varepsilon$ gesetzt wird, in $x^3 - \frac{3}{4}r^2x + \frac{1}{4}r^3\ sin\ 3\varepsilon = 0$ übergeht. Durch Vergleichung dieser letzteren Formel mit der aufzulösenden Gleichung gelangt man zum Resultate. Die Werthe von x_2 und x_3 erhält man durch Aufsuchung aller derjenigen Winkel, deren Sinus mit $sin\ 3\varepsilon$ gleichen Werth haben. — Wie würde sich die Formel III. gestalten, wenn man die trigonometrische Formel für $cos\ 3\varepsilon$ zu Grunde legen wollte? Man vergleiche Heis Trigonometrie VIII. 118 und 119.

$$x_1 = \pm\sqrt{\tfrac{4}{3}p}\ \sin\varepsilon, \quad x_2 = \pm\sqrt{\tfrac{4}{3}p}\ \sin(60^0-\varepsilon),$$
$$x_3 = \mp\sqrt{\tfrac{4}{3}p}\ \sin(60^0+\varepsilon).$$

1) $x^3+3x-5 = 0$.
Aufl.: $\alpha = 21^0 48' 5'',07$; $\beta = 30^0 0' 20'',47$; $x_1 = 1,154171$;
x_2 und $x_3 = -0,57709 \pm 1,99977\sqrt{-1}$.

2) $x^3+7x+3 = 0$.
Aufl.: $\alpha = 67^0 10' 34'',56$; $\beta = 41^0 6' 14'',98$; $x_1 = -0,4181283$,
x_2 und $x_3 = 0,20906 \pm 2,67042\sqrt{-1}$.

3) $x^3-7x+11 = 0$.
Aufl.: $\gamma = 40^0 23' 38'',6$; $\delta = 35^0 37' 21'',1$;
$x_1 = -3,226362$, x_2 und $x_3 = 1,613181 \pm 0,898365\sqrt{-1}$.

4) $x^3-4x-5 = 0$.
Aufl.: $\gamma = 38^0 0' 46'',8$; $\delta = 35^0 1' 48'',0$;
$x_1 = 2,456678$, x_2 und $x_3 = -1,22834 \pm 0,72557\sqrt{-1}$.

5) $x^3-3x+2 = 0$.
Aufl.: $\varepsilon = 30^0$; x_1 und $x_2 = 1$, $x_3 = -2$.

6) $x^3-12x-16 = 0$.
Aufl.: $3\varepsilon = 90^0$; $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = -2$.

7) $x^3-7x+6 = 0$.
Aufl.: $\varepsilon = 19^0 6' 23'',8$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$.

8) $x^3-5x+4 = 0$.
Aufl.: $\varepsilon = 22^0 47' 11'',4$; $x_1 = 1$, $x_2 = 1,561553$, $x_3 = -2,561553$.

9) $x^3+2x+33 = 0$.
Aufl.: $\alpha = 1^0 53' 22'',16$; $\beta = 14^0 16' 49'',49$; $x_1 = -3$.

10) $x^3 - \frac{403}{441}x + \frac{46}{147} = 0$.
Aufl.: $3\varepsilon = 68^0 32' 18'',55$; $x_1 = 0,4285714$, $x_2 = 0,6666666$,
$x_3 = -1,095238$.

C. Directe Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade.

§. 97.

I. Ampère'sche Formel *).

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Heißen die Wurzeln dieser Gleichung x_1, x_2, x_3 und x_4, und setzt man $x_1+x_2 = y$, so ist:

$$y^6+2ay^4+(a^2-4c)y^2-b^2 = 0.$$

*) Ampère, sur la résolution des équations du IVme degré. Corr. math. et phys. par Quetelet. IX. p. 147. Grun. Arch. I. 16.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{ y \pm \sqrt{-y^2 - 2\left(a + \tfrac{b}{y}\right)}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_3 \\ x_4 \end{array}\right\} = -\tfrac{1}{2}\left\{ y \mp \sqrt{-y^2 - 2\left(a - \tfrac{b}{y}\right)}\right\} \text{*)}.$$

1) $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0.$
Aufl.: $y^6 - 50y^4 + 769y^2 - 3600 = 0$; $y_1 = 3$, $y_2 = 4$, $y_3 = 5$;
$x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = -6$.

2) $x^4 - 82x^2 - 288x - 47 = 0.$
Aufl.: $y^6 - 164y^4 + 6912y^2 - 82944 = 0$; $y_1 = 6$;
x_1 und $x_2 = 3 \pm 2\sqrt{14}$; x_3 und $x_4 = -3 \pm 2\sqrt{2}$.

3) $x^4 - 60x^2 + 40x + 396 = 0.$
Aufl.: $y = 10$; x_1 u. $x_2 = 5 \pm \sqrt{3}$, x_3 u. $x_4 = -5 \mp \sqrt{7}$.

4) $x^4 - 7x^2 - 12x + 18 = 0.$
Aufl.: $y = 4$, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, x_3 u. $x_4 = -2 \mp \sqrt{-2}$.

5) $x^4 - 4\tfrac{1}{2}x^2 - 8x + 2\tfrac{1}{16} = 0.$
Aufl.: $y = 2{,}91120$; $x_1 = 2{,}68248$, $x_2 = 0{,}22872$;
x_3 und $x_4 = -1{,}45560 \pm 1{,}11480\sqrt{-1}$.

6) $x^4 + 4 = 0.$
Aufl.: $y^6 - 16y^2 = 0$; $y = 2$; x_1 und $x_2 = 1 \pm \sqrt{-1}$;
x_3 und $x_4 = -1 \pm \sqrt{-1}$.

§. 98a.

II. Euler'sche und Cartesius'sche Formel**).

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

I. Euler'sche Formel. Heißen y_1, y_2 und y_3 die Wurzeln der Gleichung $y^3 + {}^1/_2 ay^2 + {}^1/_{16}(a^2 - 4c)y - {}^1/_{64}\, b^2 = 0$, so sind x_1 und $x_2 = -\sqrt{y_1} \mp (\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3})$ und x_3 und $x_4 = \sqrt{y_1} \mp (\sqrt{y_2} - \sqrt{y_3})$. Ist b negativ, so erhalten obige Werthe für x die entgegengesetzten Vorzeichen.

1) $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0.$
Aufl.: $y^3 - \tfrac{25}{2}y^2 + \tfrac{769}{16}y - \tfrac{225}{4} = 0$; $y_1 = \tfrac{9}{4}$, $y_2 = 4$, $y_3 = \tfrac{25}{4}$;
$x_1 = -6$, $x_2 = +3$, $x_3 = +2$, $x_4 = +1$.

---

*) Setzt man noch x_3 und $x_4 = z$, so ist: 1) $z = -y$; 2) $x_1x_2 + x_3x_4 = a - yz = a + y^2$. Da $b = -x_1x_2z - x_3x_4y = (x_1x_2 - x_3x_4)y$, so ist: 3) $x_1x_2 - x_3x_4 = b : y$. Quadrirt man die Gleichungen 2) und 3) und subtrahirt dieselben von einander, so ist: 4) $4x_1x_2x_3x_4 = (a+y^2)^2 - (b : y)^2 = 4c$. Aus dieser letzteren Gleichung erhält man die obige $y^6 + 2ay^4 + (a^2 - 4c)\,y^2 - b^2 = 0$, welche in Bezug auf y^2 vom dritten Grade ist. Da man aus einer Wurzel y' dieser Gleichung sowohl die Summe $x_1 + x_2$, als auch die Summe $x_3 + x_4$, und aus der Verbindung der Gleichungen 2) und 3) auch die Producte x_1x_2 und x_3x_4 kennt, so ergeben sich hieraus die einzelnen Werthe für x_1, x_2, x_3 u. x_4.

**) Euleri conjectatio de formis radicum aequationum. Comm. Petrop. vet. T. VI. — Cartesii geometria ed. Schooten. 1637.

2) $x^4 - 82x^2 - 288x - 47 = 0$.
Aufl.: $y_1 = 9$, y_2 u. $y_3 = 16 \pm 4\sqrt{7}$; x_1 u. $x_2 = 3 \pm 2\sqrt{14}$, x_3 und $x_4 = -3 \pm 2\sqrt{2}$.

3) $x^4 - 60x^2 + 40x + 396 = 0$.
Aufl.: $y_1 = 25$, y_2 u. $y_3 = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21}$; x_1 u. $x_2 = -5 \mp \sqrt{7}$, x_3 und $x_4 = 5 \mp \sqrt{3}$.

4) $x^4 - 7x^2 - 12x + 18 = 0$.
Aufl.: $y_1 = 4$, y_2 und $y_3 = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-2}$; $x_1 = 3$, $x_2 = 1$: x_3 und $x_4 = -2 \pm \sqrt{-2}$.

5) $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0$.
Aufl.: $x = \frac{1}{4}(z+7)$; $z^4 - 22z^2 - 24z + 45 = 0$; $y^3 - 11y^2 + 19y - 9 = 0$; $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 9$; $z_1 = 5$, $z_2 = -3$, $z_3 = -3$, $z_4 = 1$; $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

6) $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0$.
Aufl.: x_1 und $x_2 = 3 \pm \sqrt{5}$; x_3 und $x_4 = 1 \pm \sqrt{3}$.

7) $x^4 - 4\frac{1}{2}x^2 - 8x + 2\frac{1}{16} = 0$.
Aufl.: $y^3 - \frac{9}{4}y^2 + \frac{3}{4}y - 1 = 0$; $y_1 = 2{,}118778$, y_2 und $y_3 = 0{,}065611 \pm 0{,}68386\sqrt{-1}$; $x_1 = 1{,}45560 + 1{,}22688 = 2{,}68248$; $x_2 = 1{,}45560 - 1{,}22688 = 0{,}22872$; x_3 und $x_4 = -1{,}45560 \pm 1{,}11480\sqrt{-1}$.

II. Methode von Cartesius. Man setze $x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + yx + z)(y^2 - yx + t)$; alsdann wird: $t + z = a + y^2$, $t - z = b : y$. Zur Bestimmung von y dient die Gleichung: $y^6 + 2ay^4 + (a^2 - 4c)y^2 - b^2 = 0$.

8) $x^4 + 2x^2 - 16x + 77 = 0$.
Aufl.: $y^6 + 4y^4 - 304y^2 - 256 = 0$; $y = 4$. Es ist also: $(x^2 + 4x + 11)(x^2 - 4x + 7) = 0$; x_1 und $x_2 = 2 \pm \sqrt{-3}$, x_3 und $x_4 = -2 \pm \sqrt{-7}$.

9) $x^4 - 7x^2 - 12x + 18 = 0$.
Aufl.: $(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 6) = 0$. Hieraus x wie in Beispiel 4.

§. 98b.

III. Andere Lösungen der biquadratischen Gleichungen.

I. Zurückführung der Gleichung auf eine reciproke. (S. §. 69. Beispiel 183.) *)

Setzt man in der Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ für x den Werth $qy + r$, wo y die neue unbekannte, q und r noch zu bestimmende Größen bedeuten, so wird:

$$y^4 + \frac{4r+a}{q}y^3 + \frac{6r^2+3ar+b}{q^2}y^2 + \frac{4r^3+3ar^2+2br+c}{q^3}y + \frac{r^4+ar^3+br^2+cr+d}{q^4} = 0.$$

*) Von Hulbe 1794 zuerst angegeben („Analytische Entdeckungen", p. 33).

Zur reciproken Form gehören die Bedingungen:
$q^4 = r^4+ar^3+br^2+cr+d$ und $(4r+a)\,q^2 = 4r^3+3ar^2+2br+c$.
Durch Elimination von q erhält man die Gleichung des dritten Grades:
$(a^3-4ab+8c)r^3+(a^2b+2ac-4b^2+16d)r^2+(a^2c+8ad-4bc)r+a^2d-c^2=0$,
woraus ein reeller Werth von r bestimmt werden kann. Drückt man noch q durch r aus, so erhält man die verlangte reciproke Gleichung des vierten Grades.

1) $x^4-10x^3+33x^2+46x+20 = 0$.

Aufl.: $12r^3-46r^2+32r+29=0$; $r = -\frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}\sqrt{29}$

$$y^4 - \tfrac{24}{29}\sqrt{29}\;y^3 + 6\tfrac{24}{29}\,y^2 - \tfrac{24}{29}\sqrt{29}\;y+1 = 0;$$

$$y + \frac{1}{y} = z;\quad z^2 - \tfrac{24}{29}\sqrt{29}\;z + 4\tfrac{24}{29} = 0.$$

$$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{29}\sqrt{29}(7\pm2\sqrt{5}),\quad \left.\begin{matrix} y_3 \\ y_4 \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{29}\sqrt{29}(5\pm2\sqrt{-1});$$

$$x_1 \text{ u. } x_2 = 3\pm\sqrt{5};\quad x_3 \text{ u. } x_4 = 2\pm\sqrt{-1}.$$

II. Eine neue Methode zur Auflösung der Gleichungen des vierten Grades gibt L. Matthiessen *): Es seien x_1, x_2, x_3, x_4 die Wurzeln der gegebenen Gleichung $x^4+ax^3+bx^2+cx+d = 0$. Setzt man:

$$x_1x_2 = y_1,\quad x_1x_3 = y_2,\quad x_1x_4 = y_3, \text{ so wird:}$$

$$x_3x_4 = \frac{d}{y_1} = \eta_1,\quad x_2x_4 = \frac{d}{y_2} = \eta_2,\quad x_2x_3 = \frac{d}{y_3} = \eta_3.$$

Die Werthe y_1, y_2, y_3, η_1, η_2 und η_3 sind aber die Wurzelwerthe der reciproken Gleichung des sechsten Grades:

$$y^6-by^5 + (ac-d)y^4 - (a^2d+c^2-2bd)y^3 + (ac-d)dy^2 -bd^2y + d^3 = 0.$$

Aus den gefundenen Wurzeln erhält man:

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{y_1y_2y_3}{d}},\quad x_2 = \pm\sqrt{\frac{\eta_1\eta_2y_3}{d}},$$

$$x_3 = \pm\sqrt{\frac{\eta_1y_2\eta_3}{d}},\quad x_4 = \pm\sqrt{\frac{y_1\eta_2\eta_3}{d}}, \text{ je nachdem}$$

$$[y_1y_2y_3 + (y_1+y_2+y_3)d] : \sqrt{y_1y_2y_3d} = \mp a, \text{ oder}$$

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{\eta_1\eta_2\eta_3}{d}},\quad x_2 = \pm\sqrt{\frac{\eta_1y_2y_3}{d}},$$

$$x_3 = \pm\sqrt{\frac{y_1\eta_2y_3}{d}},\quad x_4 = \pm\sqrt{\frac{y_1y_2\eta_3}{d}}, \text{ je nachdem}$$

$$[y_1y_2y_3 + (y_1+y_2+y_3)d] : \sqrt{y_1y_2y_3d} = \mp(c:\sqrt{d}) \text{ ist.}$$

2) $x^4-8x^3+14x^2+4x-8 = 0$.

Aufl.: Setzt man $y+\dfrac{d}{y} = z$, so ist $z^3-14z^2+48 = 0$, $z_1 = 2$, $z_2 = 6+2\sqrt{15}$, $z_3 = 6-2\sqrt{15}$, $y_1 = 4$, $y_2 = (1+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})$, $y_3 = (1-\sqrt{3})(3+\sqrt{5})$.

*) S. Zeitschrift von Schlömilch VIII., 140 und Grun. Arch. B. 41, 231. Eine Zusammenstellung sämmtlicher algebraischen Methoden, die Gleichungen aufzulösen, findet sich in der mit vieler Umsicht und großem Fleiße ausgearbeiteten Schrift: „Ueber die algebraischen Methoden der Auflösung der litteralen Gleichungen von Dr. Ludw. Matthiessen. Leipzig 1866."

Da nun $[y_1 y_2 y_3 + (y_1 + y_2 + y_3)d] : \sqrt{y_1 y_2 y_3 d} = -(3+\sqrt{5}) - (3-\sqrt{5}) - (1+\sqrt{3}) - (1-\sqrt{3}) = -8$ ist, so ist x_1 und $x_2 = 3 \pm \sqrt{5}$, x_3 und $x_4 = 1 \pm \sqrt{3}$.

3) $x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 12\frac{5}{12}x^2 + 3\frac{11}{12}x + 1 = 0.$

Aufl.: $y^6 + 12\frac{5}{12}y^5 + 1\frac{1}{18}y^4 - 40\frac{89}{144}y^3 + 1\frac{1}{18}y^2 + 12\frac{5}{12}y + 1 = 0$; $y_1 = -2$, $y_2 = -12$, $y_3 = 1\frac{1}{2}$. Da die zweite der obigen Bedingnisse erfüllt ist, so ist: $x_1 = -\frac{1}{6}$, $x_2 = 3$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = -4$.

III. M. Job*) führt in der allgemeinen Gleichung des vierten Grades: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ für x den Werth $\varrho\,(1 \pm \sqrt{-n})$ ein, setzt die Summe der reellen Glieder gleich 0, eben so die der imaginären. Hierdurch wird eine Gleichung in ϱ erhalten, die vom sechsten Grade ist, die sich aber in drei Factoren zweiten Grades $\varrho^2 + \frac{1}{2}a\varrho + y = 0$ zerlegen läßt. Zur Bestimmung von y dient die Resolvente:

$$y^3 - \tfrac{1}{2}by^2 + \tfrac{1}{16}(ac + b^2 - 4d)y - \tfrac{1}{64}(abc - a^2d - c^2) = 0.$$

Sind y_1, y_2 und y_3 die Wurzeln dieser letzten Gleichung, so ist:

$$x_1 \text{ und } x_2 = -\tfrac{1}{4}\left[a + \sqrt{a^2 - 16y_1} \pm \left(\sqrt{a^2 - 16y_2} + \sqrt{a^2 - 16y_3}\right)\right],$$
$$x_3 \text{ und } x_4 = -\tfrac{1}{4}\left[a - \sqrt{a^2 - 16y_1} \pm \left(\sqrt{a^2 - 16y_2} - \sqrt{a^2 - 16y_3}\right)\right].$$

Für $a = 0$ sind dieses die Euler'schen Endwerthe.

4) $x^4 + 20x^3 + 98x^2 + 76x - 195 = 0.$

Aufl.: $y^3 - 49y^2 + 744y - 3456 = 0$; $y_1 = 9$, $y_2 = 16$, $y_3 = 24$; $x_1 = -3$, $x_2 = -5$, $x_3 = -3$, $x_4 = +1$.

D. Auflösung der numerischen Gleichungen von höheren Graden mit einer unbekannten Größe**).

§. 99.

1) Auflösung durch Zerlegung in Factoren.

1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$
2) $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0.$
3) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0.$
4) $x^3 + 5x^2 - 34x - 80 = 0.$
5) $x^3 + 21x^2 + 131x + 231 = 0.$
6) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0.$
7) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0.$
8) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = 0.$
9) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0.$
10) $x^4 + 2x^3 - 25x^2 - 26x + 120 = 0.$

---

*) Beitr. zur Aufl. der Gleichungen. Dresd. 1864.

**) Die Unmöglichkeit, allgemein algebraische Gleichungen von höherem Grade, als vom vierten, aufzulösen, hat Abel bewiesen. S. Crelle's Journal, I. S. 65.

11) $x^4 + 28x^3 + 42x^2 - 3452x - 19019 = 0.$
12) $x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36 = 0.$
13) $x^3 - 1\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{8}x - \frac{1}{24} = 0.$
14) $x^3 - 1\frac{11}{12}x^2 + \frac{29}{24}x - \frac{1}{4} = 0.$
15) $x^3 + \frac{29}{45}x^2 - \frac{86}{135}x - \frac{56}{135} = 0.$
16) $x^3 + 2\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0.$
17) $x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36 = 0.$
18) $x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 18x^3 + 14x^2 - 6x + 1 = 0.$

Aufl.: x_1 und $x_2 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$, x_3 und $x_4 = \frac{1}{2}(2 \pm 0)$, x_5 und $x_6 = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$.

19) $3x^4 - 4x^3 - 14x^2 - 4x + 3 = 0.$
20) $x^5 - 1 = 0.$

Aufl.: $x_1 = 1$, x_2 und $x_3 = \frac{1}{4}[-1+\sqrt{5} \pm \sqrt{(-10-2\sqrt{5})}]$; x_4 und $x_5 = \frac{1}{4}[-1-\sqrt{5} \pm \sqrt{(-10+2\sqrt{5})}]$.

21) $x^6 - 1 = 0.$

Aufl.: x_1 und $x_2 = \pm 1$, x_3 und $x_4 = \pm J_1$, x_5 und $x_6 = \pm J_2$. (S. §. 95 a.)

22) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 24.$

Aufl.: $x_1 = 1$, $x_2 = -4$, x_3 u. $x_4 = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{-15})$.

§. 100.

2) Auflösung der Gleichungen durch die Newton'sche Näherungs-Methode*).

1) Wenn der Gleichung $x^3+ax^2+bx+c = 0$ durch irgend einen für x gesetzten Werth n näherungsweise Genüge geleistet wird, um welche Größe (Correction) hat man diesen Näherungswerth n zu vermehren, um einen genaueren Werth zu erhalten?

Aufl.: Heißt die Correction h, so ist $h = -\frac{n^3+an^2+bn+c}{3n^2+2an+b}$.

2) Wie heißen die Correctionen eines Näherungswerthes n der Gleichungen $x^4+ax^3+bx^2+cx+d = 0$ und $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0$?

Aufl.: $-\frac{n^4+an^3+bn^2+cn+d}{4n^3+3an^2+2bn+c}$, $-\frac{n^5+an^4+bn^3+cn^2+dn+e}{5n^4+4an^3+3bn^2+2cn+d}$.

3) Wie heißt die Correction h des Näherungswerthes n einer Gleichung $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} \ldots + p = 0$?

4) $x^3 + 3x - 5 = 0.$

Aufl.: $n = 1{,}1$, $h = 0{,}055$; $n_1 = 1{,}155$, $h_1 = -0{,}000828$; $x_1 = 1{,}154172$, x_2 u. $x_3 = -0{,}57709 \pm 1{,}99977\sqrt{-1}$.

*) Neutonus de analysi per aequationes numero terminorum infinitas 1669. Commerc. epist. Joh. Collins. London 1712.

5) $x^3+7x+3 = 0.$
Aufl.: $n = -0{,}4$, $h = -0{,}018$; $n_1 = -0{,}418$, $h_1 = -0{,}0001283$; $x_1 = -0{,}4181283$; x_2 u. $x_3 = 0{,}20906 \pm 2{,}67042\sqrt{-1}$.

6) $x^3-7x+11 = 0.$
Aufl.: $n = -3{,}2$, $h = -0{,}026$; $n_1 = -3{,}226$, $h_1 = -0{,}000362$; $x_1 = -3{,}226362$; x_2 u. $x_3 = 1{,}613181 \pm 0{,}898365\sqrt{-1}$.

7) $x^3-4x-5 = 0.$
Aufl.: $n = 2{,}4$, $h = 0{,}05$, $h_1 = 0{,}0067$, $h_2 = -0{,}0000217$, $x_1 = 2{,}4566783$; x_2 und $x_3 = -1{,}22834 \pm 0{,}72557\sqrt{-1}$.

8) $x^3-5x+4 = 0.$
Aufl.: $n = 1{,}5$, $h = 0{,}07$, $h_1 = -0{,}008$, $h_2 = -0{,}00045$, $h_3 = 0{,}000002813$, $x_1 = 1{,}561552813$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2{,}561552813$.

9) $x^3+2x^2+3x+4 = 0.$
Aufl.: $n = -2$, $h = 0{,}3$, $h_1 = 0{,}05$, $h_2 = -0{,}00063$, $h_3 = +0{,}000000809$; $x_1 = -1{,}650629191$; x_2 und $x_3 = -1746854 \pm 1{,}5468731\sqrt{-1}$.

10) $x^4-2x^3-3x^2-4x+5 = 0.$
Aufl.: $n = 3{,}2$, $h_1 = -0{,}0176$, $h_2 = 0{,}0000777$; $x_1 = 3{,}1824777$. Durch Division erhält man die Gleichung: $x^3+1{,}182478x^2+0{,}76321022x-1{,}5711 = 0$; $n = 0{,}7$, $h = 0{,}029$, $h_2 = -0{,}000274$; $x_2 = 0{,}728726$; x_3 u. $x_4 = -0{,}955602 \pm 1{,}11480\sqrt{-1}$.

11) $16x^5-20x^3+5x = 0{,}078459095727845\ (= k)$*).
Aufl.: Da x sehr klein ist, so setze man: $5x = k$, also $x = \frac{1}{5}k$, ferner $5x = k+20x^3$; $x = \frac{1}{5}k+4(\frac{1}{5}k)^3 = 0{,}015707275+h$, $h = 0{,}0000000423118207$; $x_1 = 0{,}0157073173118207$.

12) $x^4-80x^3+1998x^2-14937x+5000 = 0.$
Antw.: $x_1 = 12{,}75644179448074402\ldots$

13) $6x^3-141x+263 = 0.$
Aufl.: Setzt man $6x^3-141x+263 = y$, so wird $y = 2$ für $x = 3$; setzt man $x_1 = 3-h$, so wird: $y = 2-21h_1+54h_1^2-6h_1^3$. Setzt man näherungsweise $2-21h_1+54h_1^2 = 0$, so sind die Wurzeln dieser Gleichung $\frac{2}{9}$ und $\frac{1}{6}$**).

1) $h_1 = 0{,}22+h_2$; $y = -0{,}070288+1{,}8888h_2+50{,}04h_2^2-6h_3^3$. Setzt man $-0{,}070288+1{,}8888h_2+50{,}04h_2^2 = 0$, so ist $h_2 = 0{,}0231$. Durch Substitution von $h_2 = 0{,}0231+h_3$ findet man $y = 0{,}000071+4{,}19h_3+\cdots$; $h_3 = -0{,}000017$. Es ist also $x = 2{,}756917$.

2) $h_1 = 0{,}17+h_2$; $y = -0{,}038878-3{,}1602h_2+50{,}94h_2^2-6h_2^3$. Der Wurzelwerth der Gleichung $-0{,}038878-3{,}1602h_2+50{,}94h_2^2$ ist $-0{,}0105$. Durch Substitution von $h_2 = -0{,}0105+h_3$ erhält

*) Formel zur Aufsuchung des Sinus eines Centesimalgrades.

**) Auf die Benutzung quadratischer Hülfsgleichungen hat Newton selbst hingewiesen. Dabei erledigen sich die Einwendungen, welche Lagrange gegen die Newton'sche Methode erhoben hat. Man vergleiche Dr. Richard Baltzer, Elemente der Mathematik, I. Band. Algebra §. 8.

man $-0{,}000087 - 4{,}23h_3 \cdots$; hieraus $h_3 = -0{,}000020$. Es ist also $x_2 = 2{,}840520$. Aus x_1 und x_2 ergibt sich leicht $x_3 = -5{,}597437$.

14) Es sei die unendliche Reihe gegeben:

$$0 = 1 - x + \frac{x^2}{(1.2)^2} - \frac{x^3}{(1.2.3)^2} + \frac{x^4}{(1.2.3.4)^2} - \cdots;$$

man soll den Wurzelwerth finden. A.: $x = 1{,}44574\ldots$

§. 101.

3) Auflösung der Gleichungen durch Kettenbrüche*).

1) $x^3 + 3x - 5 = 0$.

Aufl.: $x = 1 + \frac{1}{y}$, $y^3 - 6y^2 - 3y - 1 = 0$;

$y = 6 + \frac{1}{z}$, $19z^3 - 33z^2 - 12z - 1 = 0$;

$z = 2 + \frac{1}{t}$, $5t^3 - 84t^2 - 81t - 1 = 0$;

$t = 17 + \frac{1}{u}$, $u = 1 + \frac{1}{v}$, $v = 1 + \frac{1}{w}$ &c.

Die Näherungswerthe für x sind: $1\frac{1}{6}$, $1\frac{2}{13}$, $1\frac{35}{227}$, $1\frac{37}{240}$, $1\frac{109}{707} = 1{,}154172\ldots$

2) $x^3 + 7x + 3 = 0$.

Aufl.: Näherungswerthe: $x_1 = -\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{7}, -\frac{5}{12}, -\frac{23}{53}, -\frac{120}{287}, -\frac{143}{342} = -0{,}4181289\ldots$

3) $x^3 - 7x + 11 = 0$.

Aufl.: Näherungswerthe: $x_1 = -3\frac{1}{4}, -3\frac{2}{9}, -3\frac{5}{22}, -3\frac{7}{31}, -3\frac{12}{53}, 3\frac{79}{349} = -3{,}226361\ldots$

4) $x^3 - 4x - 5 = 0$.

Aufl.: Näherungswerthe: $x_1 = 2\frac{1}{2}, 2\frac{5}{11}, 2\frac{16}{35}, 2\frac{21}{46}, 2\frac{58}{127}, 2\frac{253}{554} = 2{,}4566786\ldots$

5) $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

Aufl.: Näherungswerthe: $x_1 = 2, \frac{9}{5}, \frac{182}{101}, \frac{373}{207}, \frac{1301}{722}, \frac{1674}{929}, \frac{11345}{6296}, \frac{115124}{68889}$ u. s. w.; $x_2 = \frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{81}{182}, \frac{166}{373}, \frac{579}{1301}, \frac{745}{1674}, \frac{5049}{11345}, \frac{53235}{115124}$; $x_3 = -1, -\frac{4}{5}, -\frac{81}{101}, -\frac{166}{207}, -\frac{579}{722}, -\frac{745}{929}, \frac{5049}{6296}, -\frac{51235}{63889}$ **).

6) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x + 5 = 0$.

Aufl.: Näherungswerthe: $x_1 = 3\frac{1}{5}, 3\frac{2}{11}, 3\frac{25}{137}, 3\frac{327}{1792} = 3{,}182477\ldots$

7) $x^3 - 5x - 3 = 0$.

Aufl.: $x_1 = 2, \frac{5}{2}, \frac{132}{53}, \frac{137}{55}, \frac{954}{383} = 2{,}49086$; $x_2 = -0{,}65662$, $x_3 = -1{,}83424$.

---

*) Methode von Lagrange. Siehe Traité de la résolution des équations numériques. Paris 1798. Eine gleichzeitige Bestimmung des größten und kleinsten Wurzelwerthes mittels oscillirender Kettenbrüche s. Zeitschrift von Schlömilch VI. p. 51.

**) Der Werth x_2 ist $= 2 \cos {}^3/_7\,\pi$, gleich der Seite des eingeschriebenen Vierzehnecks, $x_1 = 2 \cos {}^1/_7\,\pi$, $x_3 = 3 \cos {}^5/_7\,\pi$.

§. 102.

4) Auflösung der Gleichungen durch Theilbruchreihen*).

1) $x^3+3x-5 = 0.$

Aufl.: $x = 1 + \frac{1}{y}$, $y^3-6y^2-3y-1 = 0.$

$y(<7) = 7\frac{z}{z+1}$, $\frac{1}{y} = \frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{z}$.

$27z^3-339z^2-24z-1 = 0$, $z = 13\frac{t}{t+1}$.

$1715t^3-57918t^2-315t-1 = 0$, $t = 34\frac{u}{u+1}$.

$442441u^2-66974631u-10713 = 0$, $u = 152\frac{v}{v+1}$.

$42002239v^2-10180165338v-10713 = 0.$

v nahe $= \frac{10180165338}{42002239} = 242\frac{w}{w+1}$; $w = -652.$

$x = 1+\frac{1}{7}+\frac{1}{13}A_1+\frac{1}{34}A_2+\frac{1}{152}A_3+\frac{1}{242}A_4-\frac{1}{652}A_5 = 1 + 0{,}142857142857143+0{,}010989010989011 + 0{,}000323206205559 + 0{,}000002126356615 + 0{,}000000008786598 - 0{,}000000000013476 = 1{,}1541714951814(50)$. Die anderen Wurzeln der Gleichung sind: $0{,}57708574759071 \pm 1{,}9997709503\sqrt{-1}$.

2) $x^3+7x+3 = 0.$

A.: $x_1 = -(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}A_1+\frac{1}{57}A_2-\frac{1}{4113}A_3) = -0{,}4181282995(2)$; x_2 und $x_3 = 0{,}20906414975 \pm 2{,}67041634509\sqrt{-1}$.

3) $x^3-7x+11 = 0.$

A.: $x_1 = -(3+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}A_1+\frac{1}{19}A_2+\frac{1}{28}A_3-\frac{1}{74}A_4-\frac{1}{174}A_5-\frac{1}{1856}A_6) = -3{,}22636214326972201696$; x_2 und $x_3 = 1{,}61318120716 \pm 0{,}8983649090\sqrt{-1}$.

4) $x^3-4x-5 = 0.$

Aufl.: $x_1 = 2(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}A_1-\frac{1}{123}A_2+\frac{1}{1496}A_3-\frac{1}{65611}A_4) = 2{,}45667834304411108706 26$; x_2 und $x_3 = -1{,}22833917151780482 \pm 0{,}725569680220381\sqrt{-1}$.

5) $x^3-5x+4 = 0.$

Aufl.: $x_1 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}A_1-\frac{1}{66}A_2-\frac{1}{4354}A_3-\frac{1}{18957314}A_4$; $x_1 = 1{,}5615528128088302749107049280$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2{,}5615528128088302749107049280$.

6) $x^3+2x^2+3x+4 = 0.$

Aufl.: $x = -1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}A_1+\frac{1}{10}A_2-\frac{1}{27}A_3-\frac{1}{52}A_4-\frac{1}{323}A_5 = -1{,}6506291914393882.$

7) $x^4-2x^2+4x-8 = 0.$

Aufl.: $x = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}A_1-\frac{1}{10}A_2-\frac{1}{17}A_3+\frac{1}{462}A_4+\frac{1}{1357}A_5 = 1{,}611766298601.$

*) Methode des Verfassers dieser Sammlung.

§. 103.

5) Gräffe'sche Methode*).

1) Wie läßt sich die Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ in eine andere umwandeln, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln jener Gleichung sind?

Aufl.: Man setze $\sqrt{x}$ statt x, alsdann wird $x - a\sqrt{x} + b = 0$, und hieraus $x^2 - (a^2 - 2b)x + b^2 = 0$, als die verlangte Gleichung. Die Gleichung $x^2 - 7x + 12 = 0$ z. B. hat die Wurzeln 3 und 4; die Gleichung $x^2 - (7^2 - 24)x + 144 = x^2 - 25x + 144 = 0$ die Wurzeln 9 und 16.

2) Es soll die Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ (Stammgleichung) in eine andere (transformirte Gleichung) umgewandelt werden, so daß die Wurzeln der letzteren die Quadrate der Wurzeln der ersteren werden.

Aufl.: Setzt man $\sqrt{x}$ statt x, so wird $\sqrt{x^3} - ax + b\sqrt{x} - c = 0$, oder $\sqrt{x}(x+b) = ax + c$, und hieraus die verlangte transformirte Gleichung: $x^3 - (a^2 - 2b)x^2 + (b^2 - 2ac)x - c^2 = 0$.

3) α) Es soll aus der Gleichung $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$, welche die Wurzeln 3, 4 und 5 hat, eine andere Gleichung gebildet werden, welche die Wurzeln 9, 16 und 25, und hieraus eine dritte, welche die Wurzeln 81, 256 und 625 hat.

Aufl.: 1) $x^3 - 50x^2 + 769x - 3600 = 0$.
2) $x^3 - 962x^2 + 231361x - 12960000 = 0$.

Eben so sollen β) aus der Gleichung $x^3 - 2x^2 - 23x + 60$, welche die Wurzeln 3, 4 und -5, und γ) aus der Gleichung $x^3 + 2x^2 - 23x - 60$, welche die Wurzeln -3, -4 und 5 hat, andere Gleichungen abgeleitet werden, deren Wurzeln die zweiten, vierten und achten Potenzen jener Wurzeln sind.

4) Aus der gegebenen Gleichung des $n$ten Grades: $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + Ex^{n-5} + Fx^{n-6} + \ldots = 0$ eine andere abzuleiten, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Aufl.: Setzt man in der gegebenen Gleichung überall $x^{\frac{1}{2}}$ statt x, und trennt die ganze Gleichung in zwei Theile, so wird:

---

*) S. die Schrift von Gräffe: „Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen als Beantwortung einer von der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin aufgestellten Preisfrage. Zürich 1837"; so wie die Abhandlung von Encke im berliner astronomischen Jahrbuche für 1841, und in Crelle's „Journal für reine und angewandte Mathematik" XXII. Band, S. 193. Die Idee dieser Auflösung findet sich schon bei Francoeur, „Cours complet de math. §. 58 b. Paris 1809."

$$x^{\frac{n}{2}} + Bx^{\frac{n-2}{2}} + Dx^{\frac{n-4}{2}} + Fx^{\frac{n-6}{2}} + \ldots =$$

$-(Ax^{\frac{n-1}{2}} + Cx^{\frac{n-3}{2}} + Ex^{\frac{n-5}{2}} + \ldots)$ Quadrirt man auf beiden Seiten und ordnet die Gleichung, so erhält man $x^n - (A^2-2B)x^{n-1} + (B^2-2AC+2D)\,x^{n-2} - (C^2-2BD+2AE-2F)\,x^{n-3} + (D^2-2CE+2BF-2AG+2H)x^{n-4} - (E^2-2DF+2CG-2BH+2AJ-2K)x^{n-5} + \ldots = 0$. Der Coefficient einer Potenz von x in der neuen Gleichung wird demnach gebildet durch die Verbindung des Quadrats des Coefficienten derselben Potenz in der schon berechneten Gleichung mit den doppelten Producten je zweier gleich weit zu beiden Seiten von ihm abstehenden Coefficienten, die letzteren regelmäßig mit abwechselnden Zeichen genommen. Aus den Gleichungen $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ und $x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ z. B. erhält man die transformirten Gleichungen $x^4 - (A^2-2B)x^3 + (B^2-2AC+2D)x^2 - (C^2-2BD)x + D^2 = 0$ und $x^5 - (A^2-2B)x^4 + (B^2-2AC+2D)\,x^3 - (C^2-2BD+2AE)\,x^2 + (D^2-2CE)x - E^2 = 0$.

5) Wenn aus einer Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots = 0,$$

welche die n Wurzeln a, b, c, d, e u. s. w. hat, eine andere $x^n - A'x^{n-1} + B'x^{n-2} - C'x^{n-3}$ u. s. w. abgeleitet wird, deren Wurzeln die m-ten Potenzen der Wurzeln der ersten Gleichung sind, in welcher Beziehung stehen A', B', C', D' u. s. w. zu den Wurzeln der ersten Gleichung?

Antw.: $A' = a^m + b^m + c^m + d^m + \cdots = [a^m]$;
$B' = a^m b^m + a^m c^m + a^m d^m \cdots + b^m c^m + \cdots = [a^m b^m]$;
$C' = [a^m b^m c^m]$ u. s. w.

6) Wenn $a > b > c > d > e$ u. s. w. und m eine sehr große Zahl ist, was kann man alsdann ohne merklichen Fehler für $[a^m]$, $[a^m b^m]$, $[a^m b^m c^m]$ u. s. w. setzen?

Antw.: Für größer werdende m nähern sich die Quotienten

$$\frac{[a^m]}{a^m},\ \frac{[a^m b^m]}{a^m b^m},\ \frac{[a^m b^m c^m]}{a^m b^m c^m} \text{ u. s. w.}$$

immer mehr und mehr der Einheit, so daß also ohne merklichen Fehler $[a^m] = a^m$, $[a^m b^m] = a^m b^m$, $[a^m b^m c^m] = a^m b^m c^m$ u. s. w. gesetzt werden kann.

7) Welche Form erhält eine Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \text{ u. s. w.},$$

wenn sie in eine andere umgewandelt wird, deren Wurzeln die $m$ten Potenzen der nach ihren abnehmenden numerischen Werthen geordneten Wurzeln a, b, c, d u. s. w. der ersten Gleichung sind, unter der Voraussetzung, daß m eine sehr große Zahl ist?

Antw.: $x^n - a^m x^{n-1} + a^m b^m x^{n-2} - a^m b^m c^m x^{n-3} + a^m b^m c^m d^m x^{n-4} + \cdots = 0$.

8) Wie bestimmen sich aus einer transformirten Gleichung $x^n - A'x^{n-1} + B'x^{n-2} - C'x^{n-3} + \cdots$, deren Wurzeln

die $m$ten Potenzen der Wurzeln der Stammgleichung sind, die **Wurzeln der Stammgleichung** selbst, unter der Voraussetzung daß m eine sehr große Zahl ist*)?

Antw.: Der größte numerische Wurzelwerth ist ohne Rücksicht auf das Zeichen $\sqrt[m]{A'}$, der folgende $\sqrt[m]{B' : A'}$, der dritte $\sqrt[m]{C' : B'}$ u. s. w.

9) Wie läßt sich erkennen, ob der Grad der Potenz für die Wurzeln der Stammgleichung groß genug ist, so daß die m-te Potenz jeder folgenden Wurzel gegen die m-te Potenz der vorangehenden verschwindet? **Antw.**: Wenn bei fortgesetztem Quadriren der Wurzeln die Coefficienten der transformirten Gleichungen **quadratisch** wachsen, oder, was dasselbe ist, wenn die **Logarithmen** der Coefficienten sich **verdoppeln**.

Bemerkung. Ist die Wurzel $a = b$ oder $a = -b$, so wird der erste Coefficient der transformirten Gleichung gleich $a^m + b^m = 2a^m$. In diesem Falle wird, wenn m sehr groß ist, bei fortgesetztem Quadriren nicht dieser Coefficient selbst, sondern dessen Hälfte quadratisch zunehmen. Ist $b = c$, so ist der zweite Coefficient $= 2b^m c^m$ u. s. w.

10) Die Wurzel der Gleichung $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ zu bestimmen.

Aufl.: Die transformirten Gleichungen sind der Reihe nach:

1) $x^3 - 14x^2 + 49x - 36 = 0.$
2) $x^3 - 98x^2 + 1393x - 1296 = 0.$
3) $x^3 - 6818x^2 + 1686433x - 1679616 = 0.$
4) $x^3 - (num.\ log\ 7{,}63460)x^2 + (n.\ l.\ 12{,}45043)x - n.\ l.\ 12{,}45042 = 0.$
5) $x^3 - (n.\ l.\ 15{,}26788)x^2 + (n.\ l.\ 24{,}90084)x - n.\ l.\ 24{,}90084 = 0.$
6) $x^3 - (n.\ l.\ 30{,}53576)x^2 + (n.\ l.\ 49{,}80168)x - n.\ l.\ 49{,}80168 = 0.$

Die letzte Gleichung hat zu Wurzeln die 64ten Potenzen der Wurzeln der Stammgleichung, und da die Logarithmen der Coefficienten dieser Gleichung die doppelten der Logarithmen der Coefficienten der 5ten transformirten Gleichung sind, so kann man bei dieser 6ten Gleichung stehen bleiben. Es ist also:

$$log\ a = 30{,}53576 : 64 = 0{,}47712;$$
$$log\ b = \tfrac{1}{64}(49{,}80168 - 30{,}53576) = 0{,}30103;$$
$$log\ c = \tfrac{1}{64}(49{,}80168 - 49{,}80168) = 0.$$

Die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind also, wenn man noch zuvor zur Bestimmung der gehörigen Vorzeichen die leichte Probe macht, $+3$, $+2$ und $+1$.

11) $x^3 + 2x^2 - 30x + 39 = 0.$

Aufl.: 1) $x^3 - 64x^2 + 744x - 1521 = 0.$
2) $x^3 - 2608x^2 + 358848x - 2313441 = 0.$
3) $x^3 - (n.\ l.\ 6{,}7841870)x^2 + (n.\ l.\ 11{,}0670892)x - n.\ l.\ 12{,}7285170 = 0.$

*) Es wird hierbei immer angenommen, daß die Wurzeln der Gleichung reel sind. Ueber die **imaginären** Wurzeln, die sich ebenfalls durch diese Methode bestimmen lassen, sehe man die angeführten Schriften nach.

4) $x^3 - (n.\ l.\ 13{,}5656270)x^2 + (n.\ l.\ 22{,}1320965)x$
$- n.\ l.\ 25{,}4570340 = 0.$
5) $x^3 - (n.\ l.\ 27{,}1312455)x^2 + (n.\ l.\ 44{,}2641903)x$
$- n.\ l.\ 50{,}9140680 = 0.$
$log\ a = 0{,}8478514,\ log\ b = 0{,}5354045,\ log\ c = 0{,}2078087.$
Bestimmt man die zugehörigen Vorzeichen, so wird:
$a = -7{,}04452,\quad b = 3{,}43087,\quad c = 1{,}61365.$

12) $x^3 + 3{,}236068x^2 - 2{,}055728x - 0{,}763932 = 0.$

Aufl.: 1) $x^3 - 14{,}583590x^2 + 9{,}170288x - 0{,}583592 = 0.$
2) $x^3 - 194{,}34x^2 + 67{,}072x - 0{,}34058 = 0.$
3) $x^3 - 37634x^2 + 4366{,}2x - 0{,}11599 = 0.$
4) $x^3 - (n.\ l.\ 9{,}15116)x^2 + (n.\ l.\ 7{,}28002)x$
$- n.\ l.\ \overline{2}{,}12888 = 0.$
$log\ a = 0{,}57195,\quad log\ b = \overline{1}{,}88305,\quad log\ c = \overline{1}{,}42805.$
$a = -3{,}73204,\quad b = +0{,}76393,\quad c = -0{,}26795.$

13) $x^4 - 14x^3 + 59x^2 - 94x + 48 = 0.$

Aufl.: 1) $x^4 - 78x^3 + 945x^2 - 3172x + 2304 = 0.$
2) $x^4 - (n.\ l.\ 3{,}6226284)x^3 + (n.\ l.\ 5{,}6050906)x^2$
$-(n.\ l.\ 6{,}7564097)x + n.\ l.\ 6{,}7249650 = 0.$
3) $x^4 - (n.\ l.\ 7{,}2248964)x^3 + (n.\ l.\ 11{,}0583835)x^2$
$-(n.\ l.\ 13{,}4516890)x + n.\ l.\ 13{,}449930 = 0.$
4) $x^4 - (n.\ l.\ 14.4494399)x^3 + (n.\ l.\ 22{,}0840414)x^2$
$-(n.\ l.\ 26{,}8998664)x + n.\ l.\ 26{,}8998600 = 0.$
5) $x^4 - (n.\ l.\ 28{,}8988797)x^3 + (n.\ l.\ 44{,}1667624)x^2$
$-(n.\ l.\ 53{,}7997195)x + n.\ l.\ 53{,}7997200 = 0.$
$log\ a = 0{,}9030900,\ log\ b = 0{,}4771213,\ log\ c = 0{,}3010299,$
$log\ d = 0;\quad a = 8,\quad b = 3,\quad c = 2,\quad d = 1.$

14) $x^3 - 2x^2 - 36x + 72 = 0.$

Aufl.: 1) $x^3 - 76x^2 + 1584x - 5184 = 0.$
2) $x^3 - 2608x^2 + 1721088x - 26873856 = 0.$
3) $x^3 - (n.\ l.\ 6{,}5262730)x^2 + (n.\ l.\ 12{,}4505524)x$
$- n.\ l.\ 14{,}8586602 = 0.$
4) $x^3 - (n.\ l.\ 12{,}7514493)x^2 + (n.\ l.\ 24{,}9008400)x$
$- n.\ l.\ 29{,}7173204 = 0.$
5) $x^3 - (n.\ l.\ 25{,}2018666)x^2 + (n.\ l.\ 49{,}8016800)x$
$- n.\ l.\ 59{,}4346408.$

Die Logarithmen der zweiten und dritten Coefficienten verdoppeln sich, aber nicht die der ersten Coefficienten. Vermindert man aber die ersten Coefficienten der 4ten und 5ten transformirten Gleichung um $log\ 2 = 0{,}3010300$, so erhält man 12,4504193 und 24,9008366, von welchen die zweite Zahl ganz nahe doppelt so groß, als die erste ist. Die Stammgleichung hat also 2 gleiche Wurzeln, a und b*).

Es ist $log\ a = log\ b = \frac{1}{32}(25{,}2018666 - 0{,}3010300) = 0{,}7781512;\ log\ b = \frac{1}{32}(59{,}4346408 - 498016732) = 0{,}3010300;$
$a = +6,\quad b = -6,\quad c = +2.$

15) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 6x + 2 = 0.$

*) Ist $a = b$, so sind die ersten und zweiten der Coefficienten der transformirten Gleichung $x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + \cdots 2a^m$ und a^{2m}; es ist also $A'^2 = 4B'$.

Aufl.: 1) $x^4 - 26x^3 + 149x^2 - 80x + 4 = 0.$
2) $x^4 - 378x^3 + 18049x^2 - 5208x + 16 = 0.$
3) $x^4 - 106786x^3 + 321829185x^2 - 36545696x + 256 = 0.$
4) $x^4 - (n.\ l.\ 10{,}03180)x^3 + (n.\ l.\ 17{,}01522)x^2 - (n.\ l.\ 14{,}84810)x + n.\ l.\ 4{,}81648 = 0.$
$a = +4{,}2363,\quad b = -2{,}7319,\quad c = +0{,}7321,\quad d = -0{,}2361.$

16) $x^4 - 216x^3 + 16286x^2 - 499176x + 5106465 = 0.$

Aufl.: 1) $x^4 - 14084x^3 + 59802694x^2 - 82848900996x + 26075904796225 = 0.$
2) $x^4 - (n.\ l.\ 7{,}89626)x^3 + (n.\ l.\ 15{,}11223)x^2 - (n.\ l.\ 21{,}57346)x + n.\ l.\ 26{,}83248 = 0.$
3) $x^4 - (n.\ l.\ 15{,}55775)x^3 + (n.\ l.\ 30{,}03559)x^2 - (n.\ l.\ 43{,}08863)x + n.\ l.\ 53{,}66496 = 0.$
4) $x^4 - (n.\ l.\ 31{,}03651)x^3 + (n.\ l.\ 60{,}05461)x^2 - (n.\ l.\ 86{,}17435)x + n.\ l.\ 106{,}32992 = 0.$
5) $x^4 - (n.\ l.\ 62{,}06461)x^3 + (n.\ l.\ 120{,}10823)x^2 - (n.\ l.\ 172{,}34870)x + n.\ l.\ 212{,}65984 = 0.$
$a = 87,\quad b = 65,\quad c = 43,\quad d = 21.$

17) $x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{63}{13}x^5 - \frac{175}{52}x^4 + \frac{175}{143}x^3 - \frac{63}{286}x^2 + \frac{7}{429}x - \frac{1}{3432} = 0$*).

Aufl.: Setzt man, um die echten Brüche zu vermeiden, an die Stelle von x den Quotienten $x : 2432^{\frac{1}{7}}$ und schreibt statt der Coefficienten selbst die Logarithmen derselben, so wird:

$x^7 - 1{,}0491462x^6 + 1{,}6955535x^5 - 2{,}0422693x^4 + 2{,}1080148x^3 - 1{,}8683655x^2 + 1{,}2431099x - 0 = 0.$

Die transformirten Gleichungen sind:

1) $x^7 - 1{,}4180048x^6 + 2{,}3959870x^5 - 3{,}0189948x^4 + 3{,}2738401x^3 - 3{,}0739348x^2 + 2{,}2004297x - 0 = 0.$
2) $x^7 - 2{,}2735725x^6 + 4{,}0410890x^5 - 5{,}3386202x^4 + 6{,}0534451x^3 - 5{,}9093643x^2 + 4{,}3578860x - 0 = 0.$
3) $x^7 - 4{,}12268x^6 + 7{,}61495x^5 - 10{,}36176x^4 + 11{,}96640x^3 - 11{,}78333x^2 + 8{,}71441x - 0 = 0.$
4) $x^7 - 7{,}97094x^6 + 15{,}03723x^5 - 20{,}65592x^4 + 23{,}91840x^3 - 23{,}56553x^2 + 17{,}42882x - 0 = 0.$
5) $x^7 - 15{,}81746x^6 + 30{,}04231x^5 - 41{,}30800x^4 + 47{,}83679x^3 - 47{,}13106x^2 + 34{,}85764x - 0 = 0.$
6) $x^7 - 31{,}61214x^6 + 60{,}08366x^5 - 82{,}61598x^4 + 95{,}67358x^3 - 94{,}26212x^2 + 69{,}71528x - 0 = 0.$
7) $x^7 - 63{,}22365x^6 + 120{,}16732x^5 - 165{,}23196x^4 + 191{,}34716x^3 - 188{,}52424x^2 + 139{,}43056x - 0 = 0.$

$\log a = 0{,}493935,\quad \log b = 0{,}444872,\quad \log c = 0{,}352067,\quad \log d = 0{,}204025,\quad \log e = \overline{1}{,}977946,\quad \log f = \overline{1}{,}616456,\quad \log g = \overline{2}{,}910699.$ Zieht man von diesen Logarithmen den oben hinzugefügten Logarithmus $3432^{\frac{1}{7}} = 0{,}505078$ ab, so erhält man für die Wurzeln selbst folgende Werthe:

*) Gleichung, durch welche nach Gauß die Puncte auf einer gegebenen Abscissenlinie bestimmt werden, welche für die mechanische Quadratur das möglichst vortheilhafte Resultat geben, wenn man überhaupt nicht mehr als sieben Ordinaten anwenden will. (Comment. societ. Goetting Vol. III, ad A. 1814—1815.)

$a = 0{,}9747$, $b = 0{,}8705$, $c = 0{,}7031$, $d = 0{,}5000$, $e = 0{,}2971$, $f = 0{,}1292$, $g = 0{,}0254$.

Bemerkung. Durch Anwendung weitläufiger Hülfsmittel würde man erhalten: $a = 0{,}9745536$, $b = 0{,}8707656$, $c = 0{,}7029226$, $d = 0{,}5000000$, $e = 0{,}2970774$, $f = 0{,}1292345$, $g = 0{,}0254462$.

§. 104.

Auflösung der Gleichungen von höheren Graden mit mehreren unbekannten Größen.

1) Wie wird aus zwei Gleichungen, die in Bezug auf x nicht von demselben Grade sind, eine neue Gleichung abgeleitet, welche von einem um eine Einheit niedrigern Grade ist, als die höhere der beiden Gleichungen?

2) Es soll aus den beiden Gleichungen $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + fg = 0$ und $mx^2 + nx + py = 0$ eine dritte vom vierten Grade in Beziehung auf x abgeleitet werden.

Aufl.: $(mb - na)x^4 + (mc - apy)x^3 + mdx^2 + mex + mfy = 0$.

3) Aus den beiden Gleichungen $2x^4 - 3yx^3 + 4y^2x^2 - 5y^3x + 6y^4 = 0$ und $7x^2 - 8yx - 9y^2 = 0$ soll eine neue Gleichung des zweiten Grades abgeleitet werden.

Aufl.: $141x^2 - 145yx + 147y^2 = 0$.

4) Wie wird aus zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Größen, welche in Bezug auf die zu eliminirende Größe von gleichem Grade sind, diese Größe gänzlich eliminirt?

5) In den beiden Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ und $a_,x^2 + b_,x + c_, = 0$ soll die Größe x eliminirt werden.

Aufl.: $(ac_, - a_,c)^2 - (ab_, - ba_,)(bc_, - b_,c) = 0$.

6) Welche Endgleichung erhält man durch Elimination der x aus $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ und $a_,x^3 + b_,x^2 + c_,x + d_, = 0$?

Aufl.: $(ad_, - a_,d)^3 - [(ac_, - a_,c)(bd_, - b_,d) + 2(ab_, - a_,b)(cd_, - c_,d)][ad_, - a_,d] + (ab_, - a_,b)(bd_, - b_,d)^2 + (cd_, - c_,d)(ac_, - a_,c)^2 - (ab_, - a_,b)(bc_, - b_,c)(cd_, - c_,d) = 0$.

7) Von welchem Grade in Bezug auf y sind die Endgleichungen in 5) und 6), wenn die Gleichungen in Nr. 5 in Bezug auf x und y vom zweiten und in Nr. 6 vom dritten Grade sind?

Antw.: Die Endgleichung in 5) ist höchstens vom 4ten, in 6) höchstens vom 9ten Grade.

8) Welche Gleichung in Bezug auf x erhält man aus den beiden Gleichungen: $mx^2 + nxy + py^2 + qx + ry + s = 0$ und $m_,x^2 + n_,xy + p_,y^2 + q_,x + r_,y + s_, = 0$?

Aufl.: $[(mp_, - m_,p)^2 - (np_, - n_,p)(mn_, - m_,n)]x^4 + [2(mp_, - m_,p)(p_,q - pq_,) - (p_,r - pr_,)(mn_, - m_,n) - (np_, - n_,p)(n_,q - nq_,$

$+mr_{,} - m_{,}r)]x^3 + [(p_{,}q - pq_{,})^2 + 2(p_{,}m - pm_{,})(p_{,}s - ps_{,})$
$-(p_{,}r - pr_{,})(n_{,}q - nq_{,} + mr_{,} - m_{,}r) - (np_{,} - n_{,}p)(n_{,}s - ns_{,}$
$+ qr_{,} - q_{,}r)]x^2 + [2(p_{,}q - pq_{,})(p_{,}s - ps_{,}) - (p_{,}r - pr_{,})$
$(n_{,}s - ns_{,} + qr_{,} - q_{,}r) - (p_{,}n - pn_{,})(r_{,}s - rs_{,})]x + [(p_{,}s - ps_{,})^2$
$-(p_{,}r - pr_{,})(r_{,}s - rs_{,})] = 0.$

9) Aus den folgenden Gleichungen x zu eliminiren: $2x^3 - 3x^2y + 4xy^2 - 52 = 0$ und $3x^3 - 4x^2y + 5xy^2 - 66 = 0$.

Aufl.: $3y^6 + 47y^3 - 3456 = 0$.

10) Aus den beiden Gleichungen $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 98 = 0$ und $x^2 + 4xy - 2y^2 - 10 = 0$ das x nach der Methode des gemeinschaftlichen Theilers zu eliminiren und die Endgleichung zu bestimmen.

Aufl.: $43y^6 + 345y^4 - 1960y^3 + 750y^2 - 2940y - 4302 = 0$.

11) Die Gleichungen $x^2 - xy - x - 2y^2 - 4y - 2 = 0$ und $x^2 + x - 3xy + 2y^2 - 2y = 0$ aufzulösen.

Aufl.. Eliminirt man x, so ist die Endgleichung:
$3y^3 + 10y^2 + 3y = 0$; hieraus erhält man $y_1 = 0$, $x_1 = -1$; $y_2 = -3$, $x_2 = -4$; $y_3 = -\frac{1}{3}$, $x_3 = -\frac{2}{3}$.

12) $21x^2 - 26xy + 11x + 8y^2 - 6y - 2 = 0$,
$2x^2 - 3xy + 2x + y^2 - 4 = 0$.

Aufl.: $x = (5y^2 + 12y - 80) : (11y - 20)$; Endgleichung $y^4 - 31y^3 + 338y^2 - 1520y + 2400 = 0$; hieraus ergeben sich:

$x =$	2	3	6	7,
$y =$	4	5	10	12.

13) $x^2 - 2xy + y^2 - 1{,}21 = 0$,
$1085x^2 - 2258xy + 338{,}8x + 689y^2 + 338{,}8y - 7174{,}09 = 0$.

Aufl.:

$x =$	1,2	4,5	6,5	3,2,
$y =$	2,3	5,6	5,4	2,1.

14) $10x^2 + 60xy - 6111x - 126y^2 + 5454y + 215100 = 0$,
$574x^2 - 1087xy - 53929x + 315y^2 + 57801y + 1209846 = 0$.

Aufl.:

$x =$	120	78	57	63,
$y =$	54	59	13	17.

15) $x^2 + 4xy + x - 4y^2 + 6 = 0$,
$x^2 + 7xy + 4x - 7y^2 + 9 = 0$.

Aufl.:

$x =$	1	2	1	2,
$y =$	−1	−1	2	3.

16) $x^3 + xy^2 - 5 = 0$, $y^3 + xy^2 - 3 = 0$.

Aufl.: $x_1 = 1{,}54339479768$ und $y_1 = 0{,}92603687859$.
x_2 und $x_3 = 0{,}77169739884\,(-1 \pm \sqrt{-3})$.
y_2 und $y_3 = 0{,}46301843929\,(-1 \pm \sqrt{-3})$.

17) α) $x^7 - 5x^2y^4 + 1506 = 0$, $y^5 - 3x^4y - 103 = 0$.

Aufl.: $x_1 = 1{,}996387, \quad y_1 = 3{,}008239;$
$x_2 = 15{,}00014, \quad y_2 = 19{,}74147;$
$x_3 = 15{,}00035, \quad y_3 = -19{,}74012;$
$x_4 = 2{,}4207672, \quad y_4 = -2{,}8619336;$
$x_5 = -2{,}300546, \quad y_5 = -2{,}574969;$
$x_6 = -2{,}843568, \quad y_6 = -0{,}525259;$
$x_7 = -1{,}924591, \quad y_7 = 2{,}952963.$

β) $x+y = a, \quad x^7+y^7 = b.$

Aufl.: Das Product $xy = p$ erhält man aus der Gleichung:
$p^3-2a^2p^2+a^4p - \frac{1}{7}[a^6-(b:a)] = 0.$

Beispiel: $a = 1$, $b = 127$; x_1 u. $y_2 = 2$, x_2 und $y_1 = -1$;

$$x_{\substack{3\\4}} = y_{\substack{5\\6}} = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{-7 \mp 4\sqrt{-5}}) =$$
$$1{,}2380656 \mp 1{,}5148312\sqrt{-1};$$
$$y_{\substack{3\\4}} = x_{\substack{5\\6}} = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{-7 \mp 4\sqrt{-5}}) =$$
$$-2{,}2380656 \pm 1{,}5148312\sqrt{-1}.$$

18) Zwischen den Gleichungen:

$$\left(\frac{a}{x}\right)^{\mathrm{m}} + \left(\frac{b}{y}\right)^{\mathrm{m}} + \left(\frac{c}{z}\right)^{\mathrm{m}} = 1,$$
$$x^{\mathrm{n}} + y^{\mathrm{n}} + z^{\mathrm{n}} = d^{\mathrm{n}},$$
$$\frac{a^{\mathrm{m}}}{x^{\mathrm{m+n}}} = \frac{b^{\mathrm{m}}}{y^{\mathrm{m+n}}} = \frac{c^{\mathrm{m}}}{z^{\mathrm{m+n}}}$$

die Größen x, y, z zu eliminiren.

$$\text{A.: } d^{\mathrm{mn}}(abc)^{\mathrm{mmn}} = \frac{a^{\frac{\mathrm{mn}}{\mathrm{m+n}}} + b^{\frac{\mathrm{mn}}{\mathrm{m+n}}} + c^{\frac{\mathrm{mn}}{\mathrm{m+n}}}}{\left(a^{\mathrm{m}}(bc)^{\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{m+n}}} + b^{\mathrm{m}}(ac)^{\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{m+n}}} + c^{\mathrm{m}}(ab)^{\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{m+n}}}\right)^{\mathrm{n}}}.$$

19) Die dritte Wurzel aus $a+b\sqrt{-1}$ in einen Ausdruck von der Form $x+y\sqrt{-1}$ zu verwandeln.

Aufl.: $x^3-3xy^2 = a, \quad 3x^2y-y^3 = b$; also:
$64y^9+48by^6-(15b^2+27a^2)y^3+b^3 = 0$, eine Gleichung, die sich auf eine vom dritten Grade zurückführen läßt.

Beispiel. Für $a = 2$, $b = 4$ wird: $64y^9+528y^6-1923y^3+1331 = 0$;
$y^3 = 1 \; y_1 = 1, \; x^1 = 2.$

Dividirt man die Gleichung durch y^3-1, so wird:
$64y^6+592y^3-1331 = 0; \quad y^3 = \frac{1}{8}(\pm 30\sqrt{3}-37);$

y_2 und $y_3 = \frac{1}{2}(\pm 30\sqrt{3} - 37)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}(\pm m\sqrt{3} - n).$

Nach einem ähnlichen Verfahren, wie oben, findet man:

$m = 1, \; n = 3, \; y_2$ und $y_3 = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{3}-3),$
$x_2 = \frac{1}{48}(21+13\sqrt{3}), \quad x_3 = \frac{1}{48}(81-47\sqrt{3}),$
$y_2 = -0{,}6339746, \quad y_3 = -2{,}3660254,$
$x_2 = 0{,}9065971, \quad x_3 = -0{,}0084664.$

20) $x+y+z+u = a,$
$x^2+y^2+z^2+u^2 = b,$
$x^3+y^3+z^3+u^3 = c,$
$x^4+{}^4y+z^4+u^4 = d.$

Aufl.: Die Elimination führt auf die Gleichung des 4. Grades:

$$x^4-ax^3+\frac{a^2-b}{2}x^2-\frac{a^3-3ab+2c}{6}x$$
$$+\frac{a^4+8ac-6a^2b+3b^2-6d}{24}=0.$$

Beispiel. Für $a = 10$, $b = 30$, $c = 100$, $d = 354$ wird:
$x^4-10x^3+35x^2-50x+24 = 0$, hieraus:
$x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $u = 4$ u. s. w.

§. 105.

Anwendungen der Gleichungen von höheren Graden.

1) Multiplicire ich die Hälfte einer Zahl mit dem dritten Theile, mit dem vierten Theile und addire 5 hinzu, so erhalte ich 6. Wie heißt die Zahl? Antw.: 2,884499....

2) Jemand kauft eine gewisse Anzahl Körbe Aepfel. In jedem Korbe sind 75 mal so viel Aepfel, als Körbe vorhanden sind, und er bezahlt für jedes Hundert Aepfel so viel Silbergroschen, als jeder Korb hundert Aepfel enthält. Wenn er nun im Ganzen 9 Thlr. 18 Sgr. bezahlt, wie viel Aepfel hat er gekauft? Antw.: 4800.

3) Die drei Seiten eines Parallelepipeds, dessen Inhalt 133 Kubikfuß 861 Kubikzoll beträgt, verhalten sich wie 3 : 5 : 7. Wie groß sind die drei Seiten?

Antw.: Die eine 3′ 3″, die zweite 5′ 5″, die dritte 7′ 7″.

4) Von zwei Würfeln, von denen der Inhalt des ersten $\frac{8}{27}$ des Inhalts des zweiten beträgt, ist die Oberfläche des ersten um 480 Quadratm. kleiner, als die des zweiten. Wie groß ist beider Inhalt?

Antw.: Der des ersten 512, der des zweiten 1728 Kubikmeter.

5) Wenn ein Capital von 192000 Gulden, dessen Zinsen jährlich zum Capitale geschlagen werden, nach drei Jahren sich um 14763 Gulden vergrößert, zu wie viel Procent war das Capital ausgeliehen? Antw.: Zu $2\frac{1}{2}$ Procent.

6) Von 81 Mark reinen Silbers wäge ich eine bestimmte Anzahl Mark ab und ersetze das Fehlende durch Kupfer; von der Mischung nehme ich zum zweiten, dritten, vierten Male eben so viel, als zum ersten Male, weg und ersetze das Fehlende jedes Mal durch eine gleiche Quantität Kupfer. Wenn nun zuletzt nur noch 16 Mark reines Silber in der Mischung enthalten sind, wie viel Mark wurden jedes Mal weggenommen? Antw.: 27.

7) Zwei Zahlen zu finden, deren Differenz, Quotient und Summe der Quadrate einander gleich sind. (Siehe Aufgabe 16 in §. 75.)

Antw.: $y = 0{,}565197\ldots$, $x = 0{,}204094\ldots.$
$y - x = x : y = x^2 + y^2 = 0{,}36110.$

8) Die Anzahl der Kubikfuße eines Würfels übertrifft die Anzahl der Quadratfuße der Oberfläche dieses Würfels um 100. Wie groß ist jede Seite des Würfels? Antw.: 7,69070401 Fuß.

9) Die Anzahl der Fuße aller Kanten, nebst der Anzahl der Quadratfuße der Oberfläche, nebst der Anzahl der Kubikfuße des Inhaltes eines Würfels beträgt 100. Wie groß ist die Seite des Würfels? Antw.: 2,762218.

10) Der Inhalt eines rechtwinkelig behauenen Steines beträgt 3 Kubikfuß 1225 Kubikzoll. Die erste Seite ist um 4, die zweite um 16 Zoll länger, als die dritte. Wie lang ist jede Seite?

Antw.: Die erste 17, die zweite 29, die dritte 13 Zoll.

11) Die Höhe eines Parallelepipeds sei $4\frac{1}{4}$, die Breite $7\frac{1}{2}$, die Länge $8\frac{3}{4}$ Fuß. Verlängert man die Höhe um ein bestimmtes Stück, die Breite um das doppelte Stück, und vermindert man die Länge um das dreifache Stück, so vermindert sich der Inhalt um $47\frac{29}{32}$ Kubikfuß. Um welches Stück ist die Höhe verlängert worden?

Antw.: Um $1\frac{3}{4}$ Fuß.

12) Die Cuben von vier auf einander folgenden Zahlen geben zusammen den Cubus der um 9 vergrößerten kleinsten Zahl. Wie heißen die Zahlen?

Antw.: 11, 12, 13, 14; auch $-4 \pm \sqrt{-5}$, $-3 \pm \sqrt{-5}$,
$-2 \pm \sqrt{-5}$ und $-1 \pm \sqrt{-5}$.

13) Jemand kauft ein silbernes Gefäß, welches gerade so viel Mark wiegt, als jede Mark Lothe reines Silber enthält. Er bezahlt für dieses Gefäß 96 Thlr., nämlich für jedes Loth des darin enthaltenen reinen Silbers 8 Sgr. mehr, als das Gefäß kosten würde, wenn er jede Mark seines Gewichtes mit einem Silbergroschen bezahlen wollte. Wie viel wiegt es nun? Antw.: 12 Mark.

14) In einer dreiseitigen vollständigen Pyramide befinden sich im Ganzen 4495 Kugeln, wie viel an jeder Seite? Antw.: 29.

15) Der Kaiser Timur gab nach der Einnahme und Zerstörung Bagdads den grausamen Befehl, auf den Trümmern dieser Stadt eine vierseitige Pyramide von 90000 Köpfen zu errichten. Wie viel Schichten enthielt die Pyramide? Antw.: 64 Schichten, wobei noch 560 Köpfe übrig blieben.

16) In einem vierseitigen länglichen Kugelhaufen von 1183 Kugeln enthält die Basis 17 Kugeln in der Länge. Wie viel Kugeln enthält α) die Breite, β) der Rücken? Antw.. α) 13, β) 5.

17) In einem vierseitigen länglichen Kugelhaufen von 2856 Kugeln enthält der Rücken 11 Kugeln. Wie viel Kugeln enthält die Grundfläche? Antw.: 416.

18) Zwei vollständige dreiseitige Kugelpyramiden, von welchen die eine um 6 Schichten höher ist, als die andere, haben zusammen 3269 Kugeln. Wie viel Kugeln hat jede der Pyramiden einzeln? Antw.: Die eine 2300, die andere 969.

19) Zwei Kugelpyramiden, eine drei- und eine vierseitige, haben an jeder Seite der Grundfläche gleich viel Kugeln; diese enthält 816 Kugeln mehr als jene. Wie viel Kugeln enthält jede von ihnen? Antw.: Die erste 969, die zweite 1785.

20) Ein Wasserbehälter erhält seinen Zufluß aus 4 Röhren, und kann dadurch in $115\frac{1}{5}$ Minute gefüllt werden. Soll aber der Behälter durch jede einzelne Röhre gefüllt werden, so erfordert die zweite 4, die dritte 8 und die vierte 12 Stunden mehr, als die erste. In welcher Zeit wird er demnach durch die erste gefüllt?

Antw.: In 4 Stunden.

21) α) Ein Capitalist verleiht sein Capital von 28000 Thlrn. zu einem gewissen Procente auf Zinsen, schlägt jedes Jahr die Zinsen zum Capitale und nimmt am Ende eines jeden Jahres 4000 Thlr. heraus. Wenn ihm nun am Ende des dritten Jahres 19803 Thlr. 15 Sgr. übrig bleiben, zu wie viel Procent hat er sein Capital ausgethan? Antw.: Zu 5 Procent.

β) Zu wie viel Procent war ein Capital von 6000 fl., wozu nach Umlauf eines jeden Jahres 500 fl. zugezahlt wurden, angelegt, wenn es nach zehn Jahren auf 16062,32 fl. angewachsen war?

Aufl.: Der Zinsfuß sei x, alsdann ist:

$$6000(1+0{,}01x)^{10} + \frac{50000}{x}[(1+0{,}01x)^{10} - 1] = 16062{,}32.$$

Bildet man die 10te Potenz des Binoms und vernachlässigt, um einen ersten Näherungswerth von x zu erhalten, die dritten und höheren Potenzen von $0{,}01x$, so wird:

$$6000(1+0{,}1x+0{,}045x^2) + 50000(0{,}1 + 0{,}0045x + 0{,}00012x^2) = 16062{,}32,$$

$$x^2 + 25x = 153{,}40, \quad \text{hieraus } x = 5{,}1.$$

Man setze $x_1 = 5{,}1+z$, die obige Gleichung wird alsdann zu:

$$6000(1{,}051 + 0{,}01z)^{10} + \frac{50000}{5{,}1+z}[(1{,}051+0{,}01z)^{10}-1] = 16062{,}32.$$

Führt man die Potenzen des Binoms aus und vernachlässigt die höheren Potenzen von z von der zweiten an, so wird:

$$6000(1{,}64447 + 0{,}156828z) + 50000\frac{0{,}64447 + 0{,}156828z}{5{,}1+z} =$$
$$16062{,}32.$$

Setzt man $\frac{0{,}64447 + 0{,}156828z}{5{,}1+z} = 0{,}12636 + 0{,}00597z$,

so erhält man durch Auflösung der Gleichung $z = -0{,}1$ also das corrigirte $x_1 = 5$.

22) Jemand hat 1000 Thlr. über 1 Jahr, 500 Thlr. über 3 Jahre und wieder 500 Thlr. über 6 Jahre zu zahlen. Nach welcher Zeit kann er die ganze Summe von 2000 Thlrn. bezahlen, wenn für die Summe, die er zu spät bezahlt, die Zinsen für die Dauer zwischen der Verfallzeit und dem Tage der wirklichen Abtragung zu 5 Procent p. a. vergütet, dagegen von jeder zu früh bezahlten Schuldsumme, ein auf Hundert zu berechnender Rabatt von 5 Procent p. a. abgezogen wird?

Antw.: In $2\frac{5}{8}$ (genauer 2,62657) Jahren.

23) Auf welche Gleichung führt die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn allgemein die vor dem gesuchten Termine*) fälligen Zahlungen mit $a, a', a''\ldots.$, die zugehörigen Verfallzeiten mit $t, t', t''\ldots.$, die nach demselben fälligen Zahlungen mit $b, b', b''\ldots.$, die Verfallzeiten mit u, u', u'' bezeichnet werden und der Zinsfuß p ist?

Antw.: Setzt man $\frac{p}{100} = k$, so ist die verlangte Gleichung:

$$x + \frac{k}{Sa + Sb} \cdot S\frac{b(u-x)^2}{1+k(u-x)} = \frac{S(at) + S(bu)}{Sa + Sb},$$

wo $Sa = a + a' + a''\ldots.$, $Sb = b + b' + b''\ldots.$ u. s. w. Der Grad der Gleichung ist um 1 höher, als die Anzahl der nach dem auszumittelnden Haupttermine fälligen Zahlungen. Da das Glied $\frac{k}{Sa+Sb} S\frac{b(u-x)^2}{1+k(u-x)}$, wo k selten über $^6/_{100}$ steigt, im Allgemeinen sehr klein ist, so ist näherungsweise $x = \frac{S(at) + S(bu)}{Sa + Sb}$, d. h. man erhält für x das nach der bekannten Durchschnittsregel sich ergebende Resultat. Mit Hülfe der Regel vom falschen Satze läßt sich aus diesem Näherungswerthe von x der wahre Werth so genau finden, als man will. Der Unterschied zwischen dieser streng berechneten Terminzahl und zwischen der mit Hülfe der Durchschnittsregel gefundenen ist meist so gering, daß man in der Praxis füglich bei dieser letzteren stehen bleiben kann.

24) Welche Gleichung ist aufzulösen, um den Werth des unendlichen Kettenbruches $a + \sqrt{\frac{b}{a + \sqrt{\frac{b}{a \ldots.}}}}$ zu bestimmen?

Antw.: $x^3 - 2ax^2 + a^2x - b = 0.$

25) Durch welche Gleichung erhält man den Werth der unendlichen Reihe $\sqrt[3]{(a + \sqrt[3]{[a + \sqrt[3]{(a + \cdots)}]})}$? A.: $x^3 - x = a$.

26) Wie heißt die Basis des Zahlensystems, in welchem die Zahl 81479 durch 456356 geschrieben wird? Antw.: 7.

---

*) Die Durchschnittsregel, welche in den Rechenbüchern gewöhnlich angenommen wird, gibt vorläufig die Zeit an, wann die Gesammtzahlung zu leisten ist. (S. §. 63, Beispiel 179.)

27) Die Summe aller Glieder einer geometrischen Progression sei gleich 31, das Anfangsglied = 1, die Anzahl der Glieder 5. Wie groß ist der Exponent?

Aufl.: α) 2, die Progression ist: 1, 2, 4, 8, 16; β) $-2{,}55677$, die Progression ist: 1, $-2{,}55677$, $+6{,}53797$, $-16{,}7138$, $+42{,}73334$; γ) und δ) $-0{,}221615 \pm 2{,}41198\sqrt{-1}$.

28) α) Drei Armee-Corps, A, B, C, werden ins Feld geschickt und sind auf 36 Wochen mit Lebensmitteln versehen. Mit diesem Proviant würde das Corps A 24 Wochen länger als B, B aber 40 Wochen länger als C auskommen. Wenn nun das Corps A aus 5 Regimentern besteht, aus wie vielen bestehen die Corps B und C? Wie lange würde der Proviant für das erste Corps reichen? Antw.: B besteht aus 6, C aus 9 Regimentern. Der Vorrath würde für A auf 144 Wochen reichen.

β) Es werden drei Armee-Corps, A, B, C, ins Feld gestellt, und auf 30 Wochen mit Proviant versorgt. Mit diesem Proviant würden B und C 9 Wochen länger auskommen, als A und B; und A und C 15 Wochen länger, als B und C. Nach 6 Wochen kommen die drei Corps mit der feindlichen Armee ins Gefecht, wobei A den 8ten, B den 6ten, C den 4ten Theil seiner Krieger verliert, auch $\frac{3}{8}$ des noch übrigen Proviants verloren gehen. Wie viel Wochen wird der Rest der drei Corps mit dem Reste des Proviants auskommen?

Antw.: Kommt A mit dem Proviant x, B mit demselben y, C z Wochen aus, so erhält man für z folgende Endgleichung: $z^3 - \frac{3720}{19}z^2 + \frac{54900}{19}z - \frac{162000}{19} = 0$ und hieraus $z = 180$, $x = 90$, $y = 60$. Der Rest der drei Corps wird demnach noch 18 Wochen mit dem Reste des Proviants auskommen.

29) Bedeutet b eine kleine Zahl, so ist näherungsweise $\sqrt[5]{a^5+b} = \frac{1}{2}a + \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}a^4 + (b:5a)} - \frac{1}{4}a^2}$. Warum? (Vergl. §. 71, Nr. 92.)

Aufl.: Man setze $\sqrt[5]{a^5+b} = a+e$, alsdann ist $a^5+b = a^5+5a^4e+10a^3e^2+10a^2e^3+5ae^4+e^5$. Vernachlässigt man e^5, so erhält man: $\sqrt{\frac{1}{4}a^4+(b:5a)} = \sqrt{\frac{1}{4}a^4+a^3e+2a^2e^2+2ae^3+e^4} = \frac{1}{2}a^2 + ae+e^2$ und hieraus die obige Formel.

30) Es sollen zwei Zahlen gefunden werden, so beschaffen, daß die eine sowohl dem Quadrate als der Quadratwurzel der anderen Zahl gleich ist.

Aufl.: x_1 und $y_1 = 1$, x_2 und $y_3 = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$,
y_2 und $x_3 = -\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})$.

31) Welche Zahlenwerthe hat man für x und y in dem Pro-

ducte $(a^3+xa^2b+yab^2+b^3)$ $(a^3-xa^2b+yab^2-b^3)$ einzusetzen, damit das Resultat der Multiplication a^6-b^6 werde?

Antw.: x_1 und $y_1 = 0$; x_2 und $y_2 = 2$; x_3 und $y_4 = -(1+\sqrt{-3})$, x_4 und $y_3 = -(1-\sqrt{-3})$.

E. Transscendente Gleichungen*).

§. 106.

1) α) $x^x = 100$. Aufl.: Die Gleichung gibt für x nur einen reellen Wurzelwerth $x = 3{,}59728527....$ (letzte Ziffer nicht sicher).

β) $x^x = 0{,}776$. Aufl.: Diese Gleichung gibt für x zwei reelle Wurzelwerthe: $x_1 = 0{,}1192621$ und $x_2 = 0{,}69384852$.

2) $\sqrt[x]{x} = \sqrt[3]{3}$. Aufl.: $x_1 = 3$, $x_2 = 2{,}478052....$

3) $x = 10 \log x$. Aufl.: $x_1 = 10$, $x_2 = 1{,}3712884$.

4) $x^x = 100x$. Aufl.: $x_1 = 4{,}2058696...$, $x_2 = 0{,}009565$.

5) $\sqrt[x]{x} = \frac{1}{100}x$. Aufl.: $x_1 = 104{,}54789$, $x_2 = 0{,}23776296$.

6) α) $2^x+3^x = 4$; β) $5^x+6^x = 7x^2$.

Aufl.: α) $x = 0{,}7604915$; β) $x = -0{,}3853115$.

7) $2^x+3^x = 4^x$**). Aufl.: $x = 1{,}5071296$.

8) $x^{(x^x)} = 2$. Aufl.: $x = 1{,}4766842$.

9) $x+\log x = x\cdot\log x$. A.: $x_1 = 12{,}267389$, $x_2 = 0{,}3268779$.

10) $x-\log x = x : \log x$. Aufl.: $x = 12{,}4820581$.

11) $2^x+3^y = 4$, $5^x+6^y = 7$.

Aufl.: $x = 0{,}56556312$; $y = 0{,}8413092$.

12) $y^x = 2$; $x^y = 3$. Aufl.: $x = 2{,}23925$; $y = 1{,}36288$.

13) $\cos x = x$***).

Aufl.: $x = 42^\circ 20' 47'' 14'''$, $arc.\ x = 0{,}73908512$.

---

*) Die Auflösungen geschehen durch Anwendung der sog. regula falsi. Man vergleiche auch über die Auflösung der transscendenten Gleichungen die Abhandlung von Stern in Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik. 22. Band.

**) Gleichungen von der Form $a^x+b^x = c^x$ lassen sich mit Hülfe einer Tabelle für die Quotienten $\log \sin \lambda : \log \cos \lambda$ leicht lösen. Man setze in der umgeformten Gleichung $(a:c)^x+(b:c)^x = 1$, $\sin \lambda^2 = (a:c)^x$, wodurch $\cos \lambda^2 = (b:c)^x$ wird. Hieraus $\log \sin \lambda : \log \cos \lambda = (\log a - \log c):(\log b - \log c)$. Mit Hülfe der Tabelle bestimme man λ und hieraus x.

***) Drückt man die Winkel durch Bogen mit dem Radius 1 aus, so lassen sich Winkel durch unbenannte Zahlen und umgekehrt ausdrücken. Es ist also $360^\circ = 2\pi = 6{,}2918331$, $1^\circ = 0{,}01743329$, $1' = 0{,}000290888$, $1'' = 0{,}0000048481$, ferner $1 = 57^\circ 17' 44'',8 = 206264'',8$.

14) $tang\ x = x$*).

Aufl.: $x_1 = 0$, $x_2 = 257°27'12'',268$, $arc.\ x_2 = 4{,}49340964$, $x_3 = 442°37'28''$, $x_4 = 624°45'38''$, $x_5 = 805°56'1''$ u. s. w.

15) $cot.\ x = x$.

Aufl.: $x = 49°17'36'',5$; $arc.\ x = 0{,}8603348$.

16) $(4-3x)^2 \sin x = 4x \cos x$**).

Aufl.: $x_1 = 2{,}56343423$, $x_2 = 6{,}0586701$.

17) $(e^x+e^{-x})\cos x-2 = 0$***); $e = 2{,}718281828$.

Aufl.: $x = 4{,}73004099$.

18) $(e^x+e^{-x})\cos x+2 = 0$***). Aufl.: $x = 1{,}87510402$.

19) Einen Kreisausschnitt zu finden, der durch die zum Bogen gehörige Sehne in zwei gleiche Theile getheilt wird.

Aufl.: Der Mittelpunctswinkel ist $108°36'13'',757$, die Sehne $1{,}6242058$ (Radius = 1).

20) Einen Kreis von einem Puncte der Peripherie aus α) durch zwei Sehnen in drei, β) durch drei Sehnen in vier gleiche Theile zu theilen.

Aufl.: α) Jede der Sehnen $1{,}9285340$, die zugehörigen Mittelpunctswinkel $149°16'27'',0$; β) die äußeren Sehnen $1{,}8295422$, die zugehörigen Mittelpunctswinkel $132°20'47'',23$.

21) Wie groß ist ein Bogen, der doppelt so groß ist, als die zugehörige Sehne? Antw.: $217°13'5'',3$.

22) Auf dem Bogen eines Halbkreises AXB, dessen Durchmesser gleich AB ist, einen Punct X zu finden, so daß die von demselben auf AB gefällte Senkrechte XY nebst dem Stücke AY des Durchmessers dem Bogen AX gleich werde.

Aufl.: Bogen $AX = 138°11'53'',0$, $XY = 0{,}6665578$, $AX = 1{,}7454535$.

23) Im Endpuncte des einen Radius eines Kreissectors sei eine Senkrechte auf dem Radius errichtet, welche den verlängerten anderen Radius schneidet. Wie groß ist der Winkel des Kreissectors zu nehmen, daß das gebildete rechtwinkelige Dreieck durch den Kreisbogen halbirt wird? Antw.: $66°46'54'',2$.

---

*) Diese Gleichung kommt in der Theorie der Schwingungen elastischer Körper und in der Theorie der Wärme vor.

**) Diese Gleichung kommt in der Theorie einer elastischen Kugel vor.

***) Diese Gleichung kommt in der Theorie der Schwingungen elastischer Stäbe vor. Tafeln zur Berechnung von e^x finden sich in der vortrefflichen Abhandlung meines Vorgängers, des Professors der Mathematik an der Akademie zu Münster, Gudermann über die Theorie der Potential-Functionen. (Crelle's Journal. Bd. 6 und 7.)

24) Aus der Gleichung $M = E - e \sin E$*) den Werth von E zu berechnen, wenn $M = 332^{0}28'54'',77$, $e = 14^{0}3'20''$.

Antw.: $E = 324^{0}16'29'',55$.

25) Ueber einer gegebenen geraden Linie $AB = 10$ sei als Durchmesser ein Halbkreis beschrieben. Es soll von einem Puncte D auf dem Durchmesser, dessen Entfernung vom Mittelpuncte C = 4, nach einem Puncte E des Halbkreises eine gerade Linie gezogen werden, welche den Halbkreis halbirt. Wie groß ist der kleinere Bogen des Halbkreises?

Antw.: $53^{0}15'57'',6$.

Achter Abschnitt.

Anwendung der Algebra auf Aufgaben aus der Geometrie, Physik, Astronomie und Chemie.

(Die den Aufgaben beigefügten Nummern I., II., III. geben den Grad der Gleichung an, auf welche die Lösung derselben führt.)

§. 107.

A. Aufgaben aus der Geometrie.

1) Die Summe der Winkel eines Vielecks betrage n Rechte. Wie viel Seiten hat das Vieleck? (I.) Antw.: $\frac{1}{2}n + 2$.

2) Ein Winkel eines regulären Vielecks betrage a Rechte. Wie viel Seiten hat das Vieleck? (I.) Antw.: $4 : (2 - a)$.

3) Welches Vieleck hat α) 65, β) n Diagonalen? (II.)

Antw.: α) Das Dreizehneck: β) das $1\frac{1}{2} + \sqrt{2n + 2\frac{1}{4}}$ eck.

4) Der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks sei $= p$. Wie groß ist jede Seite? (II.)

Antw.: $\frac{2}{3}\sqrt{3p\sqrt{3}} = 1,51967\sqrt{p}$.

5) Eine von den beiden gleichen Seiten eines gleichschenkeligen

*) Aufgabe, die dazu dient, um aus der Excentricität e und der mittleren Anomalie M eines Planeten zunächst die excentrische und hieraus die wahre Anomalie zu finden. — Kepler'sches Problem. Siehe Gauss, Theoria mot. corp. coel. 12.

Dreieckes, dessen Inhalt $= p$, habe die Länge c. Wie groß ist die Grundlinie? (II.)

Aufl.: $\sqrt{[2(c^2 \pm \sqrt{(c^2+2p)(c^2-2p)})]}$.

Beispiel: Für $p = 100$, $c = 20$ ist $x_1 = 38{,}637$, $x_2 = 10356$.

6) Zwei Seiten eines Dreiecks seien a und b, der Inhalt p. Wie groß ist die dritte Seite? (II.)

Aufl.: $\sqrt{[a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{(ab+2p)(ab-2p)}]}$.

7) Die drei Höhen eines Dreieckes seien h, h' u. h''. Wie groß sind die Seiten x, y u. z, auf welchen dieselben senkrecht stehen? (II.)

Aufl.: Setzt man $(hh'h'')^2 : \sqrt{[(hh'+hh''+h'h'')(hh'+hh''-h'h'')(hh'-hh''+h'h'')(-hh'+hh''+h'h'')]} = p$, so ist $x = 2p : h$, $y = 2p : h'$, $z = 2p : h''$ und p drückt zugleich den Inhalt des Dreieckes aus. Beispiel: $h = 3$, $h' = 5$, $h'' = 7$, $p = 37{,}943$, $x = 25{,}2969$, $y = 15{,}1781$, $z = 10{,}8415$.

8) Die drei von den Spitzen eines Dreiecks nach den Mitten der Seiten x, y, z gezogenen Linien seien a, b, c. Wie groß ist x? (II.) Aufl.: $\frac{2}{3}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.

9) α) Die Summe der beiden Katheten eines rechtwinkeligen Dreieckes sei s, die Höhe auf der Hypotenuse sei h. Wie groß sind die Seiten des Dreieckes? (II.)

Aufl.: Die Hypotenuse ist $\sqrt{s^2+h^2}-h$, die Katheten sind:

$\frac{1}{2}\{s \pm \sqrt{[s^2 - 4h(\sqrt{s^2+h^2}-h)]}\}$.

β) Warum ist ein Dreieck, dessen drei Seiten durch $2a$, a^2+1 und a^2-1 ausgedrückt werden, ein rechtwinkeliges?

γ) Algebraisch zu berechnen, daß der Flächen-Inhalt eines rechtwinkeligen Dreieckes gleich ist seinem halben Umfange multiplicirt mit dem um die Hypotenuse verminderten halben Umfange.

10) Der Inhalt eines rechtwinkeligen Dreieckes sei p, die Hypotenuse h. Wie groß sind die beiden Katheten? (II.)

Aufl.: $\frac{1}{2}\{\sqrt{h^2+4p} \pm \sqrt{h^2-4p}\}$.

11) Der Inhalt eines rechtwinkeligen Dreieckes sei p, der Umfang u, die Seiten desselben zu finden. (II.)

Aufl.: Die Hypotenuse ist $(u^2-4p) : (2u)$, die Katheten sind:

$\{4p+u^2 \pm \sqrt{(4p+u^2)^2-32pu^2}\} : (4u)$.

12) Der Inhalt eines Dreieckes sei gleich p, der Umfang u, eine Höhe h. Wie groß sind die drei Seiten? (II.)

Aufl.: $\frac{2p}{h}$, $\frac{u}{2} - \frac{p}{h}\left[1 \mp \sqrt{\frac{(u+2h)(u-2h)h-4pu}{u(uh-4p)}}\right]$.

13) α) Eine Seite eines Dreiecks sei a, die Höhen auf den anderen x und y seien h' und h''. Wie groß ist x? (II.)

Aufl.: $\dfrac{h'\sqrt{(a+h'')(a-h'')} \pm h''\sqrt{(a+h')(a-h')}}{(h'+h'')(h'-h'')}h''$.

β) Eine Seite eines Dreiecks sei gleich a, die Höhe darauf h, die Summe der beiden anderen Seiten s. Wie groß sind die einzelnen Seiten? (II.)

Aufl.: $\frac{1}{2}\left\{s \pm a\sqrt{[(s+a)(s-a)-4h^2]:[(s+a)(s-a)]}\right\}$.

14) Ein Dreieck ABC zu finden, so daß die Dreieckseiten AB, AC, BC und das von C auf AB gefällte Perpendikel CD eine geometrische Progression bilden.

Aufl.: $AB:AC:BC:CD = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1):1:\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)}:\sqrt{\sqrt{5}-1}$.

15) Die drei Seiten eines Dreiecks seien a, b, c. Wie groß ist die Seite eines Quadrats, welches mit der Grundlinie auf der Seite a liegt und mit den beiden gegenüberliegenden Spitzen an die Seiten b und c stößt? (I.)

Aufl.: Heißt die zu a gehörige Höhe h, so ist $x = ah:(h+a)$, und h ist $= \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}:(2a)$.

16) α) Wenn durch irgend einen innerhalb eines Kreises von dem Radius r gegebenen Punct, dessen Entfernung vom Mittelpuncte $= d$ ist, eine Sehne von gegebener Größe s gelegt wird, wie groß sind die einzelnen Stücke dieser Sehne? (II.)

Aufl.: $\frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}s^2-(r^2-d^2)}$ und $\frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}s^2-(r^2-d^2)}$.

β) Wie heißen die von dem gegebenen Puncte an bis zur Peripherie des Kreises gerechneten Stücke, wenn der Punct, durch welchen die verlängerte Sehne geht, außerhalb des Kreises liegt? (II.)

Aufl.: $\sqrt{\frac{1}{4}s^2+d^2-r^2} + \frac{1}{2}s$ und $\sqrt{\frac{1}{4}s^2+d^2-r^2} - \frac{1}{2}s$.

17) Bei dem englischen Briefpapiere steht die Länge zur Breite in einem solchen Verhältnisse, daß die Hälfte eines Bogens ein Rechteck gibt, welches dem ganzen Rechtecke ähnlich ist. Welches Verhältniß hat die Länge zur Breite? (II.) A.: $\sqrt{2}:1$.

18) α) Drei an einander stoßende, in einen Halbkreis eingeschriebene Sehnen haben die Größen a, b, c. Durch welche Gleichung erhält man den Durchmesser des Kreises*)? (III.)

Aufl.: $x^3 - (a^2+b^2+c^2)x - 2abc = 0$. Für $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ ist $x = 6{,}0746736$.

*) Zur Auflösung kann der bekannte ptolemäische Lehrsatz, daß in jedem Kreis-Vierecke die Summe der Rechtecke aus den gegenüberstehenden Seiten gleich ist dem Rechtecke aus den beiden Diagonalen, dienen. (Siehe „Lehrbuch der Geometrie von Heis und Eschweiler". I. Th. V. 86.)

β) Ein Kreis mit dem Radius r berühre die Schenkel eines Winkels 2α; ein zweiter kleinerer Kreis berühre jenen ersteren Kreis und die beiden Schenkel des Winkels; ein dritter Kreis ebenfalls jenen zweiten Kreis und die beiden Schenkel und so fort ins Unendliche. Wie groß ist die Summe sämmtlicher Kreise?

Antw.: $\frac{1}{4}(1+\sin\alpha^2)r^2\pi : \sin\alpha$.

19) α) Durch die Ecke eines Quadrats, dessen Seite $= a$, soll eine gerade Linie gelegt werden, so daß dasjenige Stück derselben, welches zwischen den Verlängerungen der dieser Ecke gegenüberstehenden beiden Seiten des Quadrats enthalten ist, einer gegebenen Linie b gleich sei. (IV.)

Aufl.: Bezeichnet man das auf der gegenüberstehenden Seite des Quadrats liegende Stück, welches zwischen der anliegenden Ecke und der gesuchten Linie liegt, mit x, so führt die Aufgabe auf die Endgleichung

$$x^4-2ax^3+(2a^2-b^2)x^2-2a^3x+a^4=0,$$

oder, wenn man $x=az$ setzt, auf die reciproke Gleichung:

$$z^4-2z^3+[(2a^2-b^2):a^2]z^2-2z+1=0.$$

Setzt man $z+\frac{1}{z}=y$, so erhält man aus der Gleichung:

$y^2-2y-b^2:a^2=0$ den Werth von y, und hieraus den Werth für z.

Für $a=1$, $b=10$ erhält man für x folgende vier Werthe: 0,0912523, 10,9586233, $-8{,}9379937$, $-0{,}1118819$. Bezeichnet man die Linie zwischen der gegebenen Ecke und der Mitte der gesuchten Linie b mit y, so erhält man die Gleichung:

$$y^4-(2a^2+\tfrac{1}{2}b^2)y^2=\tfrac{1}{2}a^2b^2-\tfrac{1}{4}b^4;\text{ hieraus}$$

$$y=\pm\sqrt{a^2+\tfrac{1}{4}b^2\pm a\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ist statt eines Quadrats ein Rechteck mit den Seiten a und c gegeben, so liefert die Gleichung des vierten Grades: $x^4-2ax^3+(a^2+c^2-b^2)x^2-2ac^2x+a^2c^2=0$ die Werthe für x.

β) Ein Winkel eines Dreiecks ist gegeben. Das Verhältniß $1:x$ der zwei den Winkel einschließenden Seiten zu finden, so daß die Summe der Kuben dieser Seiten dem Kubus der dem Winkel gegenüber stehenden Seite gleich ist.

Aufl.: Heißt c der Cosinus des gegebenen Winkels, so erhält man für x die reciproke Gleichung:

$$x^4-\frac{4c^2+1}{2c}x^3+\frac{4c^3+6c+1}{3c}x^2-\frac{4c^2+1}{2c}x+1=0.$$

20) Der Inhalt eines rechtwinkeligen Parallelepipeds sei 819, die Oberfläche 542. Wie groß sind Länge, Breite und Höhe, wenn dieselben zusammen 29 betragen? (III.) Aufl.: 7, 9, 13.

21) Der Inhalt eines rechtwinkeligen Parallelepipeds sei p, die Oberfläche b, eine der Diagonalen c. Durch welche Gleichung lassen sich Länge, Breite und Höhe berechnen? (III.)

Aufl.: $x^3-\sqrt{c^2+b}\,x^2+\frac{1}{2}bx-p=0$.

Beispiel: $p=144$, $b=192$, $c=13$, $x_1=3$, $x_2=4$, $x_3=12$.

22) Der Inhalt eines geraden Cylinders, dessen Höhe um $2\frac{1}{2}$ Zoll länger ist, als der Durchmesser der Grundfläche, beträgt 240,33183 Kubikzoll. Wie groß ist die Höhe? (III.) Aufl.: $8\frac{1}{2}$ Zoll.

23) Der Inhalt eines geraden Cylinders sei 120 Kubikfuß, die Oberfläche 200 Quadratfuß. Wie groß ist der Radius der Grundfläche, wie groß die Höhe? (III.) Aufl.: Der Radius ist entweder 4,902 Fuß und die Höhe 1,2633 Fuß, oder der Radius ist 1,2663 Fuß und die Höhe 23,9329 Fuß.

24) Der Inhalt eines geraden Kegels sei a, die Oberfläche b. Wie groß ist die Höhe des Kegels, wie groß der Radius der Grundfläche derselben?

Aufl.: Die Höhe ist $\frac{b^2}{6\pi a} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{6\pi a}\right)^2 - \frac{2b}{\pi}}$, der Radius der Grundfläche ist: $\sqrt{\left\{\frac{3a}{2b}\left[\frac{b^2}{6\pi a} \mp \sqrt{\left(\frac{b^2}{6\pi a}\right)^2 - \frac{2b}{\pi}}\right]\right\}}$.

25) Der Inhalt eines geraden Kegels sei $7\frac{1}{2}$ Kubikfuß, die Mantel-Oberfläche 25 Quadratfuß. Wie groß ist α) der Radius der Grundfläche, β) die Höhe? (III.)

Aufl.: α) Entweder 0,904 oder 2,741, β) entweder 8,748 oder 0,957.

26) α) Eine Kugel, deren Radius $= 1$, soll von einem gegebenen Puncte aus durch drei Ebenen in drei gleiche Theile getheilt werden. Wie groß sind die Radien der die äußeren Kugelabschnitte begrenzenden Kreisebenen? (III.) Aufl.: 0,974109.

β) Eine Halbkugel, deren Radius $= 1$ ist, soll durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene in zwei gleiche Theile getheilt werden. In welcher Entfernung von der Grundfläche ist der Schnitt zu führen? (III.) A.: In einer Entfernung von 0,3472964.

27) Wie groß ist der Centriwinkel eines Kugelsegments, wenn die Gesammt-Oberfläche desselben gleich einem größten Kreise der Kugel? (II.) Antw.: $85^0 52' 58'',2$.

28) α) Von welchem Winkel ist die Cotangente so groß, als das Doppelte ihres Sinus? β) die Gleichung $tang\ x = cos\ x$ aufzulösen. Für welchen Winkel ist γ) die Tangente gleich der Summe des Sinus und des Cosinus? δ) die Summe des Sinus, des Cosinus und der Tangente $= 2$? (IV.)

Aufl.: α) Für $sin\ x$ erhält man $\pm\sqrt{-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{17}}$, für $cos\ x = -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{17}$. Hiernach ist $cos\ x = 0,7807764$; $x = n \cdot 360^0 \pm 38^0 40' 5'',8$, wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet; β) $sin\ x = 0,6180340$; $x = 90^0(4n+1) \pm 51^0 49' 38'',3$; γ) für $54^0 22' 18'',7$ und für $154^0 36' 56''$; δ) für $31^0 55' 17'',5$ und für $252^0 53' 47'',9$.

29) Wem ist α) $\left(cos\ x + sin\ x\sqrt{-1}\right)\left(cos\ x - sin\ x\sqrt{-1}\right)$,

β) $(\cos x \pm \sin x\sqrt{-1})(\cos y \pm \sin y\sqrt{-1})$, γ) $(\cos x \pm \sin x\sqrt{-1})(\cos y \pm \sin y\sqrt{-1})(\cos z \pm \sin z\sqrt{-1})$, δ) $(\cos x \pm \sin x\sqrt{-1})^n$ gleich?

Antw.: α) 1; β) $\cos(x \pm y) + \sin(x \pm y)\sqrt{-1}$; γ) $\cos(x \pm y \pm z) + \sin(x \pm y \pm z)\sqrt{-1}$, δ) $\cos nx + \sin nx\sqrt{-1}$.

30) α) Die drei Seiten eines Dreieckes seien a, b, c; es sollen für dieselben solche Zahlen gewählt werden, daß der Inhalt des Dreieckes (J) eine Rationalzahl werde.

Aufl.: $J = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)p}$ sei rational. Setzt man $p-a = m$, $p-b = n$, $p-c = r$, so wird $J = \sqrt{mnr(m+n+r)}$, $a = m+n$, $b = n+r$, $c = r+m$. J wird rational, wenn $m+n+r = q^2 \cdot mnr$; also $r = \frac{m+n}{mnq^2-1}$; es wird also für $a = m+n$, $b = m\frac{n^2q^2+1}{mnq^2-1}$, $c = n\frac{m^2q^2+1}{mnq^2-1}$ der Inhalt rational, nämlich: $mnq\frac{m+n}{mnq^2-1}$; z. B. für $m = 6$, $n = 8$, $q = \frac{1}{4}$ wird $a = 14$, $b = 13$, $c = 15$, $J = 84$. Einfacher, aber weniger allgemein sind die Werthe $m(n^2+1)$, $n(m^2+1)$ und $(m+n)(mn-1)$ für a, b, c, wodurch man den Inhalt $= mn(m+n)(mn-1)$ erhält, z. B. $m = 5$, $n = 2$ gibt die Seiten 25, 52, 63 und den Inhalt 630.

Sind die drei Seiten des Dreieckes und der Inhalt rational, so sind 1) die drei Höhen des Dreieckes, 2) die Abschnitte, welche auf den Seiten durch die Höhen gebildet werden, 3) die Abschnitte der Höhen, welche durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct der Höhen gebildet werden, Rationalzahlen. Warum?

β) Rationale rechtwinkelige Dreiecke zu finden, deren Inhalt und Umfang in Zahlen ausgedrückt gleich groß sind.

Aufl.: Die beiden Katheten und die Hypothenuse sind: $4(n^2+1) : n^2$, $2(n^2+2)$ und $2[(n^2+1)^2+1] : n^2$. Z. B. 8, 6 und 10; 5, 12 und 13 u. s. w.

31) Der Inhalt eines Kreis-Vierecks, dessen Seiten a, b, c, d sind, wird, wenn $\frac{1}{2}(a+b+c+d) = p$ gesetzt wird, durch die Formel $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ausgedrückt. Man soll für a, b, c, d solche Rationalzahlen suchen, daß der Inhalt eine Rationalzahl wird.

Aufl.: Sind m, n, o, q beliebige Rationalzahlen und setzt man $\frac{1}{2}(m+n+o+mnoq^2) = s$, so sind die verlangten Seiten durch $s-m$, $s-n$, $s-o$, $s-mnoq^2$ ausgedrückt, wenn diese vier Zahlen positive Zahlen sind. Der Inhalt ist $= mnoq$.

Beispiel: a) 1, 1, 1, 1, Inhalt 1; b) 1, 1, 2, 2, Inhalt 2;

c) 1, 1, 3, 3, Inhalt 3 u. s. w.; d) 1, 5, 5, 7, Inhalt 16; e) 11, 5, 5, 5, Inh. 32; f) 8, 6, 3, 1, Inh. 12; g) 11, 9, 1, 3, Inh. 48; h) 19, 15, 7, 5, Inh. 96; i) 11, 8, 4, 3, Inh. 30; k) 9, 7, 6, 2, Inh. 30 u. s. w.

32) Einen Winkel zu suchen, von welchem sowohl der Sinus als der Cosinus eine Rationalzahl ist.

Antw.: Sind a und b beliebige Rationalzahlen, so sind die Winkel, deren Sinus und Cosinus $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ und $\frac{2ab}{a^2+b^2}$ oder umgekehrt sind, die verlangten.

33) α) Zwei Seiten eines Dreiecks seien a und b. Wie groß ist die dritte Seite c zu nehmen, wenn dieser Seite gegenüber stehende halbe Winkel ($\frac{1}{2}\gamma$) 1) zum Sinus, 2) zum Cosinus eine Rationalzahl haben soll?

Aufl.: 1) $c = (a-b)\frac{ab+n^2}{ab-n^2}$, wo n eine Rationalzahl bedeutet; $\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{(a-b)n}{ab-n^2}$. Determination: $n(a-b+n) < ab$. — Beispiel: $a = 5$, $b = 4$, $n = 3$, $c = 2\frac{7}{11}$, $\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{3}{11}$; 2) $c = (a+b)\frac{ab-n^2}{ab+n^2}$, $\cos\frac{1}{2}\gamma = (a+b)\frac{n}{ab+n^2}$. Determination: $n(a+b-n) < ab$. Beispiel: $a = 2$, $b = 3$, $n = 1\frac{1}{2}$, $c = 2\frac{3}{11}$, $\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{10}{11}$.

β) Gibt es außer dem gleichzeitigen Dreiecke noch andere Dreiecke mit einem Winkel von $\frac{2}{3}R$, deren Seiten rational sind?

Aufl.: Heißen die beiden anliegenden Seiten x und y, die gegenüberstehende Seite z, so ist $x = 2n-1$, $y = n^2-1$, $z = n^2-n+1$; z. B. $x = 5$, $y = 8$, $z = 7$.

34) Aufgabe: Drei Zahlen anzugeben, so daß ihre Summe gleich ihrem Producte wird.

Aufl.: Nimmt man die Winkel A, B und C eines beliebigen Dreieckes, so ist $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$, oder auch $x = \frac{p+1}{m}$, $y = \frac{m^2+p+1}{mp}$, $z = m$.

35) Aufgabe: Die Seiten eines ebenen Dreieckes seien den Wurzeln der Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ proportional. Man soll die Summe der Cosinus der Winkel dieses Dreieckes finden.

Antw.: $\frac{1}{2}(4ab - 6c - a^3) : c$.

36) Wenn eine gerade Linie stetig getheilt ist, so wird das Verhältniß des kleineren Segments zum größeren durch den ins Unendliche fortlaufenden Kettenbruch

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}$$ ausgedrückt? Warum?

37) Die Gleichung $sin\ 2\varphi + 2m = 2\ tang\ \varphi$ aufzulösen.

Aufl.: Die Gleichung führt auf $sin\ \varphi^6 + m^2\ sin\ \varphi^2 - m^2 = 0$. Ist z. B. $m = \frac{1}{6}\sqrt{3}$, so ist $sin\ \varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = 30^0 = \frac{1}{6}\pi$.

38) In dem bei C rechtwinkeligen Dreiecke ABC ist aus der Spitze C des rechten Winkels das Perpendikel CD auf AB gefällt und es ist darin gegeben: $AD + DC = a$, $DB + BC = b$. Man soll die Höhe $CD = x$ des Dreieckes bestimmen.

Aufl.: $x^3 - (a - 2b)x^2 - b^2x + ab^2 = 0$.

39) Es seien gegeben die Summen $2p$ der 3 Seiten eines Dreiecks, und die Radien der umschriebenen und eingeschriebenen Kreise r und ϱ; die Seiten des Dreiecks zu finden.

Aufl.: $x^3 - 2px^2 + (p^2 + 4r\varrho + \varrho^2)x - 4r\varrho p = 0$.

Beispiel: $p = 21$, $r = 8\frac{1}{8}$, $\varrho = 4$;
$x^3 - 42x^2 + 587x - 2730 = 0$.
$x_1 = 13$, $x_2 = 14$, $x_3 = 15$.

40) Es soll die Seite x eines einem Kreise mit dem Radius 1 eingeschriebenen regulären **Siebeneckes** bestimmt werden.

Aufl.: Es sei $\frac{1}{7} \cdot 180^0 = z$, alsdann ist $x = 2\ sin\ z$ und $sin\ 7z = 0$, $sin\ 7z = 7\ sin\ z - 56\ sin\ z^3 + 112\ sin\ z^5 - 64\ sin\ z^7$. Setzt man $\frac{1}{2}x$ an die Stelle von $sin\ z$, so wird: $x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7 = 0$. Hieraus erhält man: $x_1 = 0{,}8677676..$, $x_2 = 1{,}5636630$, $x_3 = 1{,}9498358$. x_1 ist die zu $\frac{1}{7}$, x_2 die zu $\frac{2}{7}$, x_3 die zu $\frac{3}{7}$ der Kreisperipherie gehörige Sehne *).

41) Die Seite u eines einem Kreise mit dem Radius 1 eingeschriebenen regulären **Neuneckes** zu berechnen.

Aufl.: $u^8 - 9u^6 + 27u^4 - 30u^2 + 9 = 0$, $u_1 = 0{,}6840402$. Außerdem hat die Gleichung die Wurzeln $u_2 = 1{,}2855752$, $u_3 = 1{,}7320508$, $u_4 = 1{,}9696154$. Welche Bedeutung haben dieselben?

§. 108.

B. Aufgaben aus der Physik und Astronomie.

1) Die Volumina zweier Körper seien v und V, die specifischen Gewichte s und S. Wie groß ist das specifische Gewicht der Mischung beider Körper, vorausgesetzt, daß keine Verdichtung Statt findet? (I.)

Antw.: $(VS + vs) : (V + v)$.

2) Die atmosphärische Luft ist ein Gemenge aus 21 Volumentheilen Sauerstoffgas und aus 79 Volumentheilen Stickgas. Wenn

*) x_1 ist nahe gleich $\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}8660254$. Da $\sqrt{3}$ die Seite des dem Kreise eingeschriebenen regulären Dreieckes ist, so ist also die Seite des regulären Siebeneckes nahe der halben Seite des dem Kreise eingeschriebenen regulären Dreieckes gleich.

nun das specifische Gewicht des Sauerstoffgases = 1,1026, wie läßt sich hieraus das specifische Gewicht des Stickgases berechnen? (I.)

Antw.: 0,9727.

3) Von einer Verbindung zweier Körper, deren specifische Gewichte S und s und deren absolute Gewichte P und p sind, das specifische Gewicht zu bestimmen. (I.)

Antw.: $(P+p)Ss : (Ps+pS)$.

4) Welches specifische Gewicht haben die alten preuß. Thaler, welche dem Gewichte nach aus 3 Theilen Silber und einem Theile Kupfer bestehen? Das Eigengewicht des Silbers = 10,5, das des Kupfers = 8,7. (I.)

Antw.: 9,984.

5) Das specifische Gewicht der Verbindung zweier Körper sei e, das absolute Gewicht m, das specifische Gewicht des einen Körpers sei s, das absolute Gewicht p; wie groß ist das specifische Gewicht des anderen Körpers? (I.)

Antw.: $se(m-p) : [ms-ep]$.

6) Zwei Körper haben die specifischen Gewichte S und s, das Gemisch habe das specifische Gewicht e. In welchem Gewichts-Verhältnisse sind die Körper mit einander verbunden? (I.)

Antw.: In dem Verhältnisse $S(s-e) : s(e-S)$.

7) Nach Vitruv war die Krone des Königs Hiero 20 Pfund schwer, bestand aus Gold und Silber und hatte das specifische Gewicht 16. Wie viel Gold und wie viel Silber enthielt dieselbe, wenn das specifische Gewicht des Goldes = 19,25, das des Silbers = 10,47? (I.)

Antw.: Aus $15\frac{2185}{14048}$ (nahe $15\frac{1}{7}$) Pfund Gold und $4\frac{11863}{14048}$ (nahe $4\frac{6}{7}$) Pfund Silber.

8) Auf eine unbiegsame gerade Linie, af, wirken sechs parallele Kräfte, welche nach einander in den Angriffspuncten a, b, c, d, e, f angebracht sind. In a wirken 6 Pfund abwärts, in b 4 Pfund aufwärts, in c 5 Pfund abwärts, in d 3 Pfund aufwärts, in e 2 Pfund aufwärts und in f 1 Pfund abwärts. Wenn nun $ab = 3$, $bc = 2$, $cd = 4$, $de = 6$, $ef = 7$ Zoll, in welcher Entfernung vom Puncte a, nach welcher Richtung und mit welcher Größe muß eine Kraft angebracht werden, damit sie den gesammten Kräften das Gleichgewicht halte? (I.)

Antw.: In der Verlängerung von fa über a hinaus in einer Entfernung von $7\frac{1}{3}$ Zoll ist eine aufwärts wirkende, den übrigen Kräften parallele, Kraft von 3 Pfund anzubringen.

9) Ein Stab, ab, habe die Länge l und sei an den beiden Enden durch die Gewichte p und q beschwert. Wie heißen die bei-

den Hebelarme, wenn das Gewicht s des Stabes mit berücksichtigt wird, und wenn der Schwerpunct desselben in der Mitte liegt? (I.)

Antw.: $(q+\frac{1}{2}s)l : (p+q+s)$ und $(p+\frac{1}{2}s)l : (p+q+s)$.

10) An einem materiellen Hebel, AC, welcher sich um den Endpunct C dreht, soll in der Entfernung $CB = a$ eine auf den Hebel senkrecht wirkende Last, q, angebracht werden. Wie lang wird der Hebel sein müssen, damit eine am Ende desselben gegen ihn senkrecht wirkende Kraft p mit der Last q und dem Gewichte des Hebels im Gleichgewichte stehe? Das Gewicht der Längeneinheit des Hebels sei $= g$. (II.) Aufl.: $\left(p \pm \sqrt{p^2 - 2agq}\right) : g$.

Beispiel: Für $p = 80$ Pfd., $q = 100$ Pfd., $g = 8$ Pfd., $a = 3$ Fuß ist $x_1 = 15$ Fuß, $x_2 = 5$ Fuß.

11) Eine Wage ist unrichtig, weil die Hebelarme nicht vollkommen einander gleich sind. Lege ich eine Last in die linke Wagschale, so hat sie das Gewicht p, lege ich dieselbe in die rechte Wagschale, so hat sie das Gewicht P. Welches ist das wahre Gewicht der Last? (II.) Antw.: $\sqrt{pP}$. Ist das wahre Gewicht größer oder kleiner, als das arithmetische Mittel aus den beiden falschen Gewichten?

Antw.: $\sqrt{pP} < \frac{1}{2}(p+P)$.

12) Der Brunnen auf der Festung Königstein ist 1022 pr. Fuß tief. Wie viel Zeit wird ein Stein gebrauchen, um den Boden zu erreichen, wenn man auf den Widerstand der Luft keine Rücksicht nimmt und wenn man den Fallraum in der ersten Secunde gleich $15\frac{5}{8}$ preuß. Fuß $(\frac{1}{2}g)$ setzt? (II.) Antw.: 8,087... Secunden.

13) Ein Körper wird mit einer Geschwindigkeit von c Fuß α) abwärts, β) aufwärts geworfen. In welcher Zeit wird er den Raum s zurückgelegt haben? (II.) $(g = 31\frac{1}{4}$ Fuß.)

Antw.: α) Nach $\left(\sqrt{c^2+2gs} - c\right) : g$ Secunden, β) während des Steigens nach $[c - \sqrt{c^2 - 2gs}] : g$ Secunden und beim Wiederherunterfallen nach $[c + \sqrt{c^2 - 2gs}] : g$ Secunden.

14) Wenn eine Kanonenkugel mit einer Geschwindigkeit von 1600 Fuß senkrecht in die Höhe geschossen wird, wie lange und bis zu welcher Höhe würde sie steigen, wenn die Luft nicht Widerstand leistete? (I.) Antw.: 51,2 Secunden würde sie steigen und eine Höhe von 40960 Fuß erreichen. $(g = 31\frac{1}{4}$ Fuß.)

15) α) Welchen Raum durchfällt ein in einen Brunnen hinabgeworfener Stein, den man nach t Secunden aufschlagen hört, wenn die Geschwindigkeit des Schalles $= s$ ist? (II.)

Antw.: $s[(s+gt) - \sqrt{s^2+2gst}] : g$.

β) In Schweden soll es Höhlen geben, in denen man einen hineinfallenden Stein erst nach 25 Sec. aufschlagen hört. Welche Tiefe für die Höhle setzt dieses voraus, wenn man die Geschwindigkeit des Schalles zu 1050 Fuß rechnet? (II.) A.: 5880,33 F.

16) Ein Meteorstein fällt nach t Secunden, nachdem man ihn in der Luft zerplatzen hörte, zur Erde. In welcher Höhe zersprang er*)?

A.: $x = a\frac{a - gt \pm \sqrt{a(a-2gt)}}{g}$. Für $t = 3$, $a = 1050$, $g = 31{,}2649'$ ist $x_1 = 64071{,}56'$, $x_2 = 154{,}866'$ (unbrauchbar).

17) Von einem Puncte, welcher h Fuß über dem Horizonte liegt, fallen zu gleicher Zeit zwei Körper, der eine frei, der andere mit einer Anfangsgeschwindigkeit von n Fuß über einer schiefen Ebene. Welche Länge muß die schiefe Ebene haben, wenn beide Körper zu gleicher Zeit zur Erde fallen sollen? (II.)

Aufl.: $(n + \sqrt{n^2+2gh})\sqrt{h : 2g}$.

18) Zwei schiefe Ebenen, deren Längen m und n sind, stoßen an einander und haben die gemeinschaftliche Höhe h. Wenn nun einer von den zwei Körpern sich auf der schiefen Ebene m mit der Anfangsgeschwindigkeit c hinaufbewegt, welche Geschwindigkeit muß der auf der schiefen Ebene n sich hinaufbewegende andere Körper erhalten, wenn er zu gleicher Zeit mit dem ersteren im höchsten Puncte der Ebene anlangen soll? (II.)

A.: $\frac{m^2+n^2}{2mn}c \pm \frac{m^2-n^2}{2mn}\sqrt{c^2-2gh}$. Für $m = 400$, $n = 300$, $h = 240$, $c = 150$, $g = 30$, ist $x_1 = 182\frac{1}{2}$, $x_2 = 130$.

19) Ein harter unelastischer Körper A von der Masse M habe die Geschwindigkeit C. Mit welcher Geschwindigkeit muß ein anderer harter Körper von der Masse m gegen ihn stoßen, wenn seine Geschwindigkeit in der Richtung von A nach dem Stoße c' sein soll? (I.)

Antw.: $[M(C-c') - mc'] : m$.

20) Zwei sich hinter einander bewegende elastische Körper stoßen auf einander. Der vorhergehende hat die Masse m, der folgende die Masse M. Nach dem Zusammenstoßen hat der erste Körper die Geschwindigkeit g, der andere die Geschwindigkeit G. Welche Geschwindigkeit hatten beide Körper vor dem Stoße? (I.)

Antw.: $\frac{2GM-g(M-m)}{M+m}$ und $\frac{2gm+G(M-m)}{M+m}$.

21) n elastische Kugeln befinden sich in einer Reihe so neben

*) Es möge die Voraussetzung gemacht werden, daß der Stein im Augenblicke der Detonation seinen Fall beginne. In Wirklichkeit wird derselbe aber bereits in Bewegung sein.

einander aufgehängt, daß die Mittelpuncte derselben alle in einer geraden Linie liegen. Die Massen der Kugeln mögen eine geometrische Reihe M, N, P, Q u. s. w. bilden. Wie groß ist die Geschwindigkeit der $n$ten Kugel, wenn die erste Kugel mit der Geschwindigkeit c auf die zweite stößt, diese auf die dritte u. s. w.?

Antw.: $c\left(\frac{2M}{N+M}\right)^{n-1}$. Für $N = \frac{1}{2}M$, $P = \frac{1}{2}N$, $Q = \frac{1}{2}P$ u. s. w., $n = 100$, $c = 1$, ist $x = 2338500$ Millionen.

22) Welche Breite und Höhe muß man einem rechtwinkeligen Balken, der aus einem cylindrischen Baumstamme vom Durchmesser d sich ausschneiden läßt, geben, damit derselbe am stärksten wird?

Aufl.: Heißt die Breite des Balkens x, die Höhe y, so ist $x^2+y^2 = d^2$ und die relative Stärke dem Producte xy^2 proportional. Die Stärke wird also ein Maximum q, wenn xy^2 ein Maximum ist; es ist also $x(d^2-x^2) = q$ oder $x^3-d^2x+q = 0$. Löst man die Gleichung nach der trigonometrischen Formel §. 96 auf, so wird $\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{d^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}d^2}} = \frac{3q}{2d^3}\sqrt{3}$. Der größte Werth, den q in diesem Quotienten erreichen kann, ist derjenige, für welchen $\sin 3\varepsilon$ seinen größten Werth 1 erreicht; es ist also für das Maximum von q der Winkel $\varepsilon = \frac{1}{3}R$, und somit $x = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot d \sin \frac{1}{3}R = d \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$; hieraus folgt $y = d\sqrt{\frac{2}{3}}$ *); $x : y = 1 : \sqrt{2}$.

23) Eine hölzerne massive Kugel von 10 Zoll Radius wird ins Wasser geworfen. Wie tief wird sie einsinken, wenn das specifische Gewicht des Holzes $= 0,6$? (III.) Antw.: 11,3417 (nahe $11\frac{1}{3}$) Zoll.

24) Eine eiserne, innen hohle, Kugel von 1 Zoll Wanddicke soll zum Schwimmen gebracht werden. Welchen Halbmesser muß wenigstens die Kugel haben, wenn das specifische Gewicht des Eisens $= 7,5$? (III.) Antw.: 21,4682 Zoll.

25) Eine 12pfündige eiserne Kugel wird in ein Gefäß getaucht, worin sich Quecksilber und über demselben Wasser befindet. Wie schwer ist das Kugelsegment, welches sich im Wasser befindet? Das spec. Gew. des Quecksilbers sei $= 13,6$, das des Eisens $= 7,5$. (I.)

Antw.: $5\frac{17}{21}$ Pfund.

26) In einem Gefäße, in welchem das Wasser immer auf gleicher Höhe gehalten wird, befindet sich unter dem Wasserspiegel eine Oeffnung von 4 Quadratzollen Weite, und 9 Zoll tiefer eine zweite von 5 Quadratzollen Weite. Wenn nun beide Oeffnungen zusam-

*) Die geometrische Construction ergibt sich hieraus leicht. Theilt man nämlich den Durchmesser der Grundfläche in drei gleiche Theile, errichtet auf denselben in den beiden Theilungspuncten nach verschiedenen Seiten Senkrechte bis zur Peripherie des Kreises, so erhält man zwei Puncte, welche, mit den Endpuncten des Durchmessers verbunden, die Grundfläche des rechtwinkeligen Balkens bestimmen, der die größte relative Cohäsionskraft hat.

men jede Secunde 718,7 Kubikzoll Wasser liefern, wie läßt sich hieraus, wenn man zugleich auf die Contraction des Wasserstrahles, welche 0,64 beträgt, Rücksicht nimmt, die Tiefe der ersten Oeffnung unter dem Wasserspiegel berechnen*)? (II.)

A.: $x_1 = 16$ Zoll; $x_2 = 1235\frac{6}{81}$ (nicht brauchbar).

27) Ein mit Wasser gefüllter prismatischer Wasserbehälter habe 73 Quadratfuß 4,2 Quadratzoll Grundfläche, und am Boden eine Ausfluß-Oeffnung von 1 Quadratzoll. Wenn nun nach 20 Minuten die Wasserhöhe um 6 Zoll abnimmt, wie läßt sich hieraus die Wasserhöhe im Behälter berechnen**)? (I.)

Aufl.: $12\frac{1}{4}$ Zoll.

28) Welchen Durchmesser muß wenigstens ein kugelförmiger papierner Luftball haben, wenn er mit erhitzter Luft, deren Dichtigkeit $\frac{2}{3}$ der Dichtigkeit der gewöhnlichen Luft beträgt, gefüllt, steigen soll? Ein Kubikfuß atmosphärischer Luft wiegt $2\frac{3}{4}$ Loth, ein Quadratfuß Papier $\frac{3}{5}$ Loth. (I.)

Antw.: 3 Fuß $11\frac{7}{55}$ Zoll (nahe 4 Fuß).

29) Eine unten offene, oben verschlossene, Barometer-Röhre von der Länge l werde bis zur Höhe m mit Quecksilber gefüllt und auf das Niveau eines mit Quecksilber gefüllten Gefäßes gestellt. Wenn der Druck der äußeren Luft $= b$ ist, welche Höhe wird das Quecksilber in der Röhre haben? (II.)

Aufl.: $\frac{1}{2}(b+l) - \sqrt{\frac{1}{4}(b+l)^2 - bm}$. Beispiel: Für $l = 32''$, $m = 18''$, $b = 27''\,6'''$ wird $x_1 = 10''$, x_2 (nicht brauchbar) $= 49\frac{1}{2}''$.

30) Eine unter dem Drucke h der Atmosphäre mit trockener atmosphärischer Luft gefüllte Flasche wiegt p Gran; wird sie unter dem Drucke h' mit einer trockenen Gasart gefüllt, so wiegt sie p' Gran, und wenn endlich dieselbe Flasche mit destillirtem Wasser gefüllt wird, so wiegt sie p'' Gran. Wie groß ist das Verhältniß der Dichtigkeit des Gases zu der der Luft unter demselben Drucke, wenn die Dichtigkeit des Wassers m mal größer ist, als die der trockenen Luft unter dem mittleren Drucke H, und sich die

*) Ist die Höhe des Wasserspiegels $= h$, die Weite der Ausflußöffnung $= m$, so ist die Menge des in jeder Secunde ausfließenden Wassers $= m\sqrt{2gh}$, wo $g = 31^1/_4{}'$ preuß. oder $= 27{,}386m\sqrt{h}$ für h in Zollen.

**) Formel für die Zeit, in welcher das in einem prismatischen Gefäße von der Grundfläche B und der Höhe h befindliche Wasser aus einer am Grunde angebrachten Oeffnung von m Quadratzoll völlig ausfließt: $(B : m)\sqrt{2h : g}$ in Secunden ausgedrückt. Setzt man $g = 31^1/_4{}'$, die Contraction des Strahles $= 0{,}64$, so ändert sich die Formel für die Höhe h in Zollen in $B\sqrt{h} : (m \cdot 8{,}7635)$ um.

Temperatur während der drei successiven Beobachtungen nicht geändert hat? (I.)

Aufl.: $[mH(p'-p)+h(p''-p')]:[h'(p''-p)]$.

31) Bei 28 Zoll 2,4 Linien Druck der atmosphärischen Luft wiege ein mit atmosphärischer Luft gefüllter Ballon 1530,64 Gran, derselbe mit Sauerstoffgas gefüllte Ballon wiege bei 27 Zoll 10,4 Linien Luftdruck 1538,76 Gran, mit Wasser gefüllt aber 70751,93 Gran. Die Dichtigkeit des Wassers in Bezug auf Luft bei der Spannung 23 Zoll sei 770. Wie groß ist das specifische Gewicht des Sauerstoffgases? (I.) Antw.: 1,1026.

32) Der Recipient einer Luftpumpe habe den Raum-Inhalt a, der Stiefel den Inhalt b, die Dichtigkeit der äußeren Luft sei d. Wie groß ist die Dichtigkeit der Luft im Recipienten nach n Kolbenstößen? (Geom. Progression.) Antw.: $[a:(a+b)]^n d$.

Beispiel: $a = 400$, $b = 47$, $n = 30$, $x = 0{,}035692d$.

33) Der Recipient einer Luftpumpe halte 379, der Stiefel 58 Kubikzoll. Nach wie viel Kolbenstößen wird die Dichtigkeit der Luft $\frac{1}{10}$ der ursprünglichen betragen? (Geom. Progression.)

Antw.: Nach 16,17, also nach 16 bis 17 Kolbenstößen.

34) Wie heißt die Antwort auf die 32. Aufgabe, wenn der schädliche Raum von dem Inhalte c mit berücksichtigt wird? (Geometrische Progression.)

Antw.: Die Dichtigkeiten der Luft nach dem 1., 2., 3.... n-ten Kolbenzuge seien bezüglich d_1, d_2, d_3. Setzt man $c:(a+b+c) = p$, $a:(a+b+c) = q$, so ist

$$d_n = pd+qd_{n-1}, \text{ also:}$$
$$d_1 = pd+qd; \quad d_2 = pd+qd_1 = pd+pqd+q^2d;$$
$$d_3 = pd+pqd+pq^2d+q^3d,$$
$$d_n = pd(1+q+q^2+q^3 \ldots q^{n-1})+q^n d.$$

Hieraus $d_n = \left[\frac{c}{b+c} + \frac{b}{b+c}\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^n\right]d.$

Die Grenze der Verdünnung für $n = \infty$ ist gleich $cd:(b+c)$.

35) Wie viel Grad nach Réaumur entsprechen eben so vielen Graden nach Fahrenheit? (I.)

Antw.: $-25{,}6$ R. $= -25{,}6$ F.

36) In welchem Verhältnisse muß Wasser von a Grad Wärme mit Wasser von b Grad Wärme gemischt werden, damit man Wasser von c Grad Wärme erhalte? (I.)

Antw.: In dem Verhältnisse $c-b:a-c$.

37) m Pfund einer Flüssigkeit von der Temperatur t Grad geben mit n Pfund einer anderen Flüssigkeit von der Temperatur t' Grad eine Temperatur von t'' Grad. Wenn nun die specifische

Wärme der ersten Flüssigkeit $= s$ ist, wie groß ist die specifische Wärme der zweiten Flüssigkeit? (I.)

Antw.: $ms(t''-t):[n(t'-t'')]$.

38) Wie viel Pfund Schnee von 0° muß man zu 7 Pfd. Wasser von 50° R. hinzusetzen, um Wasser von 24° R. zu erhalten? (I.)

Antw.: $2\frac{1}{6}$ Pfund.

39) Wie viel Pfund Wasserdampf von 80° R. muß man zu 40 Pfund Wasser von 20° R. hinzusetzen, um Wasser von 80° R. zu erhalten, wenn man die latente Wärme des Wasserdampfes nach den sorgfältigen Untersuchungen von Brix zu 432° R. rechnet? (I.)

Antw.: $6\frac{9}{11}$ Pfund.

40) Wenn m Loth Wasserdampf von 80° R., m' Loth Wasser von t Graden und m'' Loth Eis von 0° R. mit einander in Berührung gebracht werden, wie groß ist die Temperatur des Wassers, welches man erhält, wenn das Eis und der Dampf ganz tropfbar flüssig werden? (I.)

Antw.: $(512m+m't-60m''):(m+m'+m'')$.

41) Ein Rostpendel bestehe aus zwei abwärts gehenden Eisen- und einer aufwärts gehenden Zinkstange. Welche Länge muß man der Zinkstange geben, wenn die Länge des Pendels $= l$, und wenn die linearen Ausdehnungen des Zinks und des Eisens von 0—80° R. $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ sind? (I.)

Antw.: $al:(b-a)$.

Beispiel: Für $l = 38''$, $a = 322$, $b = 816$, $x = 24''9\frac{3}{13}'''$.

42) α) Zur Bestimmung der Ausdehnung des Wassers bei verschiedenen Temperaturen dient nach Despretz folgende innerhalb der Grenzen von 0—30° geltende Formel, bei welcher t die Temperatur in Centesimalgraden angibt, wenn das Volumen bei $0^0 = 1$ gesetzt wird:

$$v = 1 - 0{,}000057577t + 0{,}0000075601t^2 - 0{,}000000035091t^3.$$

Bei wie viel Graden beträgt das Volumen des Wassers 1) 1,0001, 2) 1,0002, 3) 1,0003, 4) 1,0000? (III.) Antw.: 1) bei 9,43°, 2) bei 10,63°, 3) bei 11,65°, 4) bei 0° und bei 7,906°.

β) Bei wie viel Grad beträgt das Volumen ein Minimum?

Antw.: Soll v ein Minimum werden, so muß

$$\frac{57577000}{35091}t - \frac{7560100}{35091}t^2 + t^3$$

ein Maximum werden. Setzt man dieses $= M$, so wird $t^3 - 215{,}443t^2 + 1640{,}79t - M = 0$. Setzt man $t = x + 71{,}814$, so wird: $x^3 - 13831{,}1x - M' = 0$, wo M' ein Maximum bedeutet. Behandelt man diese Gleichung nach der dritten trigonometrischen Formel in §. 96, so wird, wenn M' ein Maximum ist, auch $sin\ 3\varepsilon$ ein Maximum, also $= 1$ sein müssen. Es wird demnach

$$x = -\sqrt{\tfrac{4}{3}p}\ sin\ \tfrac{1}{3}R = -\sqrt{\tfrac{1}{3}p} = -67{,}8996,$$

also: $t = -67{,}8996 + 71{,}8142 = 3{,}9146$.

43) 200 Kubikcentimeter eines Gases, gemessen bei 760 Millimeter Quecksilberdruck und 0° C., dehnt sich bei einem bestimmten Quecksilberdrucke und bei einer bestimmten Temperatur auf 215,85 *C.C.* aus. Bei einem um 10 Millimeter höheren Quecksilberdrucke und bei einer um 10° C. höheren Temperatur dehnt sich das Gas auf 220°,46 *C.C.* aus. Wie viel betrug hiernach im ersten Falle der Quecksilberdruck und die Temperatur?

Antw.: Der Quecksilberdruck 730, die Temperatur 10° C.

44) α) Wenn eine glühende Kugel in jeder Secunde um 0,0077 ihrer jedesmaligen Hitze verliert, wann wird dieselbe nur die Hälfte ihrer anfänglichen Hitze besitzen? (Geom. Progression.)

Antw.: Nach 89,67 Secunden.

β) Um die Temperatur eines Ofens zu bestimmen, legt man eine Platinkugel in denselben und wirft sie, nachdem sie die Temperatur des Ofens angenommen hat, in Wasser. Ihr Gewicht beträgt 100 Grammen, das Gewicht des Wassers 1000 Grammen. Die Temperatur des Wassers wird durch die Aufnahme von Wärme aus dem Platin von 5° C. bis 10° C. erhöht. Wie hoch war die Temperatur des Ofens? (II.)

Die Wärme-Capacität des Platins bezogen auf die des Wassers = 1 ist bei x^0 Temperatur gegeben durch: $0{,}03308 + 0{,}0000042x$.

Aufl.: Heißt die gesuchte Temperatur x, so erhält man folgende Gleichung:

$$100x(0{,}03308+0{,}0000042x) = 10(1000+3{,}308+0{,}00042x) - 5000;$$

hieraus $x = 1306{,}4°$ C.

45) Nach Arzberger erhält man die Spannung E des Wasserdampfes in Atmosphären, wenn t Réaumur'sche Grade bedeutet, nach der Formel $t = 1085{,}7 : (4{,}5237 - \log E) - 160$. Wie groß ist nach dieser Formel die Spannung bei 150° C.? (I.)

Antw.: 4,428.

46) Nach Egen erhält man die Spannung der Wasserdämpfe in Atmosphären nach der Formel: $t'' = 100 + 64{,}29512 \log e + 13{,}89479 (\log e)^2 + 2{,}909769 (\log e)^3 + 0{,}1742634 (\log e)^4$ *), wobei t'' hunderttheilige Grade und e die Spannung des Wasserdampfes in Atmosphären bedeutet. Wie viel beträgt nach dieser Formel die Spannung bei 150° C.? (Transscendente Gleichung.)

Antw.: 4,64964 Atmosphären.

47) Zwei leuchtende Körper, deren Licht-Intensitäten sich wie $v : v'$ verhalten, sind a Fuß von einander entfernt. In welcher

*) Der Unterschied zwischen dem aus dieser Formel und dem aus der Beobachtung erhaltenen Werthe beträgt im Mittel nur 0,11° C. und umfaßt mit voller Sicherheit 230°.

Entfernung von dem ersteren leuchtenden Körper zwischen beiden ist die Erleuchtung gleich stark? (II.)

Antw.: In einer Entfernung von $a\sqrt{v'}(\sqrt{v}-\sqrt{v'}) : (v-v')$ Fuß.

48) Das Bild eines leuchtenden Punctes, der sich in der Achse eines Hohlspiegels befindet, dessen Radius r ist, sei m Zoll vom Puncte selbst entfernt. Welche Entfernung haben der leuchtende Punct und das Bild vom Spiegel? (II.)

Antw.: $\frac{1}{2}(m+r \pm \sqrt{m^2+r^2})$.

49) Der Radius der einen Fläche eines Glases sei r, der Brechungs-Exponent n, die Brennweite f. Wie groß ist der Radius der anderen Fläche? (I.)

Antw.: $rf(n-1) : [r-(n-1)f]$.

50) Der Radius der vorderen Fläche eines Glases sei R, der Radius der hinteren Fläche $= r$, die Entfernung eines in der Achse befindlichen leuchtenden Punctes von seinem Bilde $= d$. Wie groß sind die Entfernungen des Punctes und seines Bildes vom Glase? (II.)

Antw.: $\frac{1}{2}d\left(1 \pm \sqrt{\frac{(n-1)d(R+r)-4Rr}{(n-1)d(R+r)}}\right)$.

51) Ein Brillenschleifer will einen Meniscus von 16 Zoll Focallänge schleifen, hat aber nur Schalen, deren Radius 1, 2, 3 u. s. w. Zoll betragen. Welche Radien erhalten die beiden Flächen, wenn der Brechungs-Exponent des Glases $= \frac{3}{2}$ ist? (Diophantische Gleichung.)

Antw.: Entweder 4 und 8, oder 6 und 24, oder 7 und 56.

52) Der Halbmesser einer leuchtenden Kugel sei $= R$, der einer dunkeln $= r$, der Abstand der Mittelpuncte beider Kugeln sei $= d$. In welcher Entfernung vom Mittelpuncte der dunkeln Kugel liegt α) die Spitze des Kernschattens, β) die Spitze des Halbschattens? γ) Wie groß ist der Halbmesser des Kernschattens in einem Abstande $= m$ vom Mittelpuncte des dunkeln Körpers, und δ) wie groß der Halbmesser des Halbschattens daselbst? (I.)

Antw.: α) $dr : (R-r)$; β) $dr : (R+r)$;

$$\gamma)\ \frac{dr-m(R-r)}{\sqrt{d^2-(R-r)^2}};\qquad \delta)\ \frac{dr+m(R+r)}{\sqrt{d^2-(R+r)^2}}.$$

53) Nach Lenz wird das Leitungsvermögen l des Kupfers für Elektricität bei t^0 R., wenn es bei $0^0 = 100$ angenommen wird, durch folgende Formel ausgedrückt: $l = 100 - 0{,}31368t + 0{,}000437t^2$. Bei wie viel Grad ist das Leitungsvermögen $= 50$? (II.)

Antw.: Bei $238{,}927^0$ R.

54) Die Stromstärken zweier galvanischen Ketten aus n und n'

gleich starken Elementen bei gleichem Leitungs-Widerstande seien s und s'. In welchem Verhältnisse stehen die elektromotorische Kraft, der Widerstand der Elemente und der Widerstand des Leitungsdrahtes zu einander *)? (I.)

Antw.: In dem Verhältnisse $s'(n-n') : (ns'-n's) : (s-s')nn'$.

---

55) Die Masse eines Himmelskörpers sei $= A$, die eines zweiten $= B$, der Abstand beider $= d$. In welchem Puncte ihrer Verbindungslinie wird ein Körper C von beiden mit gleicher Kraft angezogen? (II.)

Antw.: In einer Entfernung von $d(A \mp \sqrt{AB}) : (A-B)$ vom Körper A.

Beispiel: Für Erde und Mond ist $A = 80$, $B = 1$, $d = 60{,}2$ Erd-Halbmesser.

56) Die Entfernung der Erde von der Sonne beträgt im Mittel 12038, die Entfernung des Mondes von der Erde 30,1 Erd-Durchmesser; der Durchmesser der Sonne beträgt 112,2, der des Mondes 0,27 Erd-Durchmesser. Wie weit fällt α) die Spitze des Kernschattens der Erde? wie groß ist β) der Durchmesser des Kernschattens in der mittleren Entfernung des Mondes im Vergleich zum Mond-Durchmesser? Antw.: α) 108,3 Erd-Durchmesser; β) 2,67 Mond-Durchmesser.

57) Thucydides erwähnt (II. 28.**)) einer Sonnenfinsterniß, welche im ersten Jahre des peloponnesischen Krieges (Ol. 87, 2.) zu Athen vorfiel. Es ist dieses die nämliche Finsterniß, von der Plutarch im Leben des Perikles spricht, bei deren Eintreten Perikles das Gesicht des erschrockenen Steuermannes mit dem Mantel bedeckte, indem er ihm bemerkte, daß kein Unterschied zwischen der durch den Mantel und der durch den Mond verursachten Verfinsterung zu machen sei. Den hierüber von dem Verfasser dieses Buches angestellten Untersuchungen gemäß ***) fiel diese Finsterniß

---

*) Ohm'sche Formel: $s = \frac{ne}{nr+l}$, wenn n die Anzahl der Elemente, e die elektromotorische Kraft, r den Widerstand der einzelnen Elemente und l den Widerstand des Leitungsdrahtes bezeichnet. Siehe „Die galvanische Kette von Dr. G. S. Ohm." Berlin 1827.

**) *Τοῦ δ' αὐτοῦ θέρους νουμηνίᾳ κατὰ σελήνην (ὥσπερ καὶ μόνον δοκεῖ εἶναι γίγνεσθαι δυνατὸν) ὁ ἥλιος ἐξέλιπε μετὰ μεσημβρίαν, καὶ πάλιν ἀνεπληρώθη, γενόμενος μηνοειδής, καὶ ἀστέρων τινῶν ἐκφανέντων.* Plutarch (Leben des Perikles, Cap. 34) setzt diese Begebenheit irrthümlich ein Jahr später als Thucydides.

***) Die Finsternisse während des peloponnesischen Krieges. Abhandlung im Programme des königl. Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums zu Köln. 1834.

431 (chronologisch) vor Christus am 3. August vor. Bezeichnet man in Bezug auf den Horizont von Athen die Rectascensionen der Sonne zu den Zeiten 4 U. 25,7 M. und 5 U. 25,7 M. Nachm. mittl. athen. Zeit mit α' und α'', die des Mondes mit a' und a'', die Declinationen der Sonne und des Mondes mit δ', δ'' und d', d'', ferner die scheinbaren Halbmesser der Sonne und des Mondes mit ϱ', ϱ'' und r', r'', so ist: $\alpha' = 127^\circ 1' 28'',0$, $\alpha'' = 127^\circ 3' 57'',8$, $a' = 126^\circ 37' 21'',6$, $a'' = 127^\circ 6' 45'',8$, $\delta' = +19^\circ 22' 56'',1$, $\delta'' = +19^\circ 22' 20'',7$, $d' = +19^\circ 47' 26'',4$, $d'' = +19^\circ 32' 55'',2$, $\varrho' = \varrho'' = 15' 54'',41$, $r' = 15' 34'',9$, $r'' = 15' 31'',8$. Die relative stündliche Bewegung des Mondes im Parallelkreise war 1523″, in der Declination — 836″. Welches waren die Umstände der Finsterniß?

Antw.: Die Finsterniß begann 4 Uhr 30 Minuten Nachmittags (*μετὰ μεσημβρίαν*), endete um 6 Uhr 33 Minuten. Die Sonne erschien, da die Verfinsterung nahe $7\frac{3}{4}$ Zoll betrug, mondförmig (*μηνοειδής*). — Der Zusatz *ἀστέρων τινῶν ἐκφανέντων* bezieht sich auf die beiden Planeten Venus und Mars, welche, den Rechnungen zufolge, damals über dem Horizonte sich befanden, der erste Planet links, der andere rechts von der Sonne und in gerader Linie mit ihr stehend.

58) Thucydides spricht (VII. 50. Cap.*)) von einer Mondfinsterniß, welche sich im 19. Jahre des peloponnesischen Krieges (Ol. 91, 4.) ereignete, und welche von entschiedenem Einflusse auf das Schicksal des im Hafen vor Syrakus lagernden atheniensischen Heeres war. Die genaueren Umstände dieser Finsterniß, welche am 27. August 413 vor Christus Statt fand, sollen angegeben werden. Wahrer Vollmond 27. August Abends 9 Uhr 6,9 Min. mittlerer Zeit zu Paris; Länge der Sonne $148^\circ 55' 36''$, Breite des Mondes $+ 17' 49''$, stündliche Bewegung der Sonne in der Länge $2' 28''$, des Mondes $33' 44''$, des Mondes in der Breite $+ 3' 6'',7$; Halbmesser der Sonne $16' 1''$, des Mondes $15' 45''$; Parallaxe der Sonne $8'',8$, des Mondes $57' 44'',1$; Länge von Syrakus $12^\circ 52'$ östlich von Paris.

Antw.: Anfang der Mondfinsterniß Abends 8 Uhr 10 Min. mittlerer syrakusischer Zeit, Anfang der totalen Verfinsterung 9 Uhr 18 Min., Mitte 9 Uhr 55 Min., Ende der totalen Verfinsterung 10 Uhr 32 Min., Ende der ganzen Finsterniß 11 Uhr 40 Min., Größe 15,2 Zoll.

59) Der bekannte Astronom Struve hat aus den Karten Harding's gefunden, daß die Zahl der Sterne jeder Größenclasse bis zur sechsten einschließlich ungefähr das Dreifache von der Anzahl der Sterne in der vorhergehenden Classe beträgt.

*) *Καὶ μελλόντων αὐτῶν, ἐπειδὴ ἕτοιμα ἦν, ἀποπλεῖν, ἡ σελήνη ἐκλείπει· ἐτύγχανε γὰρ πανσέληνος οὖσα.*

Wenn nun die Anzahl der Sterne erster Größe 18, die der zweiten 54 u. s. w. beträgt, wie läßt sich nach diesem Gesetze die Anzahl derjenigen Sterne berechnen, die in unseren stärksten Fernröhren sichtbar sind, unter der Voraussetzung, daß die vierzehnte Classe die äußerste Grenze der Kraft dieser Instrumente bezeichnet?

Antw.: Die Anzahl sämmtlicher Sterne von der ersten bis zur vierzehnten Größe beträgt 43046712.

60) Wenn man den mittleren Mond-Halbmesser zu 15′33″,5 annimmt, wie viel Vollmondflächen bedecken alsdann den ganzen Himmel, und wie viel Sterne erster bis neunter Größe kommen auf eine Vollmondfläche, wenn man nach Argelander annimmt, daß die Anzahl der Sterne erster bis neunter Größe inclusive in runder Zahl 200000 sei?

Antw.: 195291 Vollmondflächen bedecken den Himmel und es kommt nahezu ein Stern erster bis neunter Größe auf eine Vollmondfläche.

§. 109.

C. Aufgaben aus der Chemie.

Aequivalentzahlen der in den Beispielen vorkommenden Elemente, bezogen auf Wasserstoff = 1 *).

Aluminium	*Al*	13,75	(Dumas).
Arsen	*As*	75,00	(Pelouze, Berzelius).
Baryum	*Ba*	68,50	(Dumas).
Bor	*B*	11,00	(Berzelius).
Brom	*Br*	80,00	(Marignac).
Calcium	*Ca*	20,00	(Dumas, Erdmann und Marchand).
Chlor	*Cl*	35,46	(Marignac, Stas).
Eisen	*Fe*	28,00	(Erdmann und Marchand).
Kalium	*K*	39,11	(Marignac, Stas).
Kohlenstoff	*C*	6,00	(Dumas, Erdmann und Marchand).
Kupfer	*Cu*	31,70	(Erdmann und Marchand).
Magnesium	*Mg*	12,00	(Marchand und Scheerer).
Natrium	*Na*	23,00	(Pelouze, Stas).
Phosphor	*P*	31,00	(Schrötter).
Sauerstoff	*O*	8,00.	
Schwefel	*S*	16,00	(Erdmann und Marchand).
Silber	*Ag*	107,97	(Marignac).
Stickstoff	*N*	14,00	(Marignac).
Strontium	*Sr*	43,75	(Dumas).
Wasserstoff	*H*	1,00	(Dumas).

*) Da fast alle Chemiker der Gegenwart die Aequivalentzahlen auf Wasserstoff = 1 beziehen, so sind die diesem Systeme entsprechenden Aequivalentzahlen aufgenommen. Die obigen Aequivalentzahlen sind der im Hörsaale des neuen von Prof. Hofmann eingerichteten berliner Laboratoriums aufgestellten Tabelle entnommen.

1) Wie viel Sauerstoff ist in 100 Gewichtstheilen Kohlensäure (CO_2) enthalten?

Antw.: 72,73.

2) Wie viel kohlensaures Kali (KO, CO_2) ist nöthig, um 100 Gewichtstheile concentrirte Schwefelsäure (SO_3, HO) zu neutralisiren?

Antw.: 141,04.

3) Wie viel Schwefelsäure enthalten 37,5 Gramm schwefelsaurer Baryt, wenn man weiß, daß in den neutralen schwefelsauren Salzen das Verhältniß des Sauerstoffes der Säure zum Sauerstoffe der Basis = 3 : 1, und daß 100 Gewichtstheile wasserfreie Schwefelsäure 60 Sauerstoff und 100 Baryt 10,457 Sauerstoff enthalten?

Antw.: 12,876 Gramm.

4) Wie viel Chlornatrium ($NaCl$) ist nöthig, um 100 Gewichtstheile salpetersaures Silberoxyd (AgO,NO_5) vollkommen zu zersetzen? Antw.: 34,394 Gewichtstheile.

5) Wie viel concentrirte Schwefelsäure hat man nöthig, um 100 Gewichtstheile Salpeter (KO,NO_5) so zu zersetzen, daß man zweifach schwefelsaures Kali erhält? Antw.: 96,868 Gewichtstheile.

6) Wasserstoff und Sauerstoff verbinden sich in den Volumen-Verhältnissen 2 : 1 mit einander zu Wasser. Wie viel Gewichtstheile Wasserstoff verbinden sich mit 100 Gewichtstheilen Sauerstoff, wenn das Eigengewicht des Sauerstoffes = 1,10832, das des Wasserstoffes = 0,06927? Antw.: 12,50.

7) Ammoniak entsteht durch Verbindung von 1 Volumen Stickstoff mit 3 Volumen Wasserstoff, wobei sich das Gas um die Hälfte verdichtet. Wie groß ist das specifische Gewicht des Ammoniaks, wenn das des Stickstoffes = 0,96978? Antw.: 0,5888.

8) Kohlensäure besteht aus einem Volumen Sauerstoffgas und einem halben Volumen Kohlengas, verdichtet zu einem Volumen. Wenn nun das specifische Gewicht des Sauerstoffgases = 1,10832, das der Kohlensäure = 1,52394 ist, wie läßt sich hieraus das specifische Gewicht des isolirt nicht darzustellenden Kohlengases berechnen? Antw.: 0,8312.

9) Wie viel Kubikcentimeter Sauerstoffgas von 15° C. Wärme erhält man durch Erhitzen von 500 Grammen chlorsauren Kali's (KO,ClO_5)? 1000 Kubikcentimeter trockener atmosphärischer Luft von 0° C. und Normaldruck wiegen 1,29366 Gramm. Die Ausdehnung der Gase beträgt von 0 bis 100° C. 0,3665.

Antw.: 144073 C.C.

10) Wie viel Kupferchlorid (*CuCl*) erhält man, wenn man 13,59 Gramm Kupferoxyd in Chlorwasserstoffsäure (*HCl*) auflös't und die Auflösung bis zur völligen Trockniß abdampft?

Antw.: 22,99 Gramm.

11) Es soll der Gehalt an unterschwefeliger Säure (S_2O_2), die in unterschwefeligsaurem Natron (NaO,S_2O_2) enthalten ist, bestimmt werden. Man setzt zur Auflösung neutrales salpetersaures Silberoxyd im Ueberschusse hinzu, wodurch die unterschwefelige Säure zersetzt wird; die eine Hälfte des Schwefels verwandelt sich nämlich durch den ganzen Sauerstoffgehalt der Säure und den des zersetzten Silberoxyds in Schwefelsäure, die als schwefelsaures Silberoxyd in der Auflösung bleibt; die andere Hälfte des Schwefels verbindet sich mit dem reducirten Silber und scheidet sich als schwarzes Schwefelsilber aus. Die abfiltrirte Auflösung wird mit salpetersaurer Barylerde gefällt und gibt einen Niederschlag von 10,654 Gramm, das Schwefelsilber, für sich abgewogen, gibt 11,325 Gramm. Wie läßt sich hieraus die Menge der unterschwefeligen Säure berechnen?

Antw.: Aus der schwefelsauren Barylerde erhält man 4,389, aus dem Schwefelsilber 4,385, also im Mittel 4,387 unterschwefelige Säure.

12) Durch Oxydation einer zu bestimmenden Menge unterschwefeligsauren Natrons (NaO,S_2O_2) mit rauchender Salpetersäure und Fällung der gebildeten Schwefelsäure mit einer Chlorbaryumlösung erhält man 41,66 Gewichtstheile schwefelsauren Baryts. Wie viel unterschwefeligsaures Natron war vorhanden? Antw.: 14,13.

13) Wie viel arsensaures Kali [$2(KO),AsO_5$] ist nöthig, um 19,68 Gewichtstheile Eisenchlorid [Fe_2Cl_3] zu zersetzen, und wie viel arsensaures Eisenoxyd [$2(Fe_2O_3),3(AsO_5)$], wie viel Chlorkalium [KCl] entsteht hierbei? In den neutralen arsensauren Salzen verhält sich der Sauerstoff der Säuren zum Sauerstoff der Basen wie 5 : 2. Antw.: 38,02 arsensaures Kali ist nöthig, und man erhält 30,6 arsensaures Eisenoxyd und 27,11 Chlorkalium.

14) α) *) Die indirecte Bestimmung des Natrons und Kali's wird ausgeführt, indem man entweder die Summe der schwefelsauren Alkalien und die darin enthaltene Schwefelsäure, oder die Summe der Chlormetalle und das darin enthaltene Chlor bestimmt. Man habe nun gefunden: 1,9761 Gramm $NaO,SO_3 + KO,SO_3$ und darin 1,000 Gramm SO_3. Wie viel Gramm NaO,SO_3 und wie viel Gramm KO,SO_3 ist vorhanden?

Antw.: 0,8887 Gr. NaO,SO_3 und 1,0874 Gr. KO,SO_3.

*) Fresenius, Anleitung zur quantitativen chemischen Analyse. 5. Aufl. §. 200.

β) *) Man habe gefunden 3 Gramm Chlornatrium und Chlorkalium und darin 1,6888 Gr. Chlor. Wie viel $NaCl$ und wie viel KCl? Antw.: 2 Gr. $NaCl$ und 1 Gr. KCl.

15) α) *) Die indirecte Bestimmung des Strontians und des Kalkes kann ausgeführt werden, indem man die Summe der kohlensauren Salze und die darin enthaltene Kohlensäure bestimmt. Gesetzt, wir hätten gefunden: 2 Gr. kohlensaure Salze und darin 0,7383 Gr. Kohlensäure. Wie viel CaO,CO_2 und wie viel SrO,CO_2? Antw.: 1 Gr. CaO,CO_2 und 1 Gr. SrO,CO_2.

β) *) Gesetzt bei der indirecten Bestimmung des Chlors und des Broms hätte das Gemenge von Chlorsilber und Bromsilber 2 Gr. gewogen, und die Gewichtsabnahme beim Ueberleiten des Chlors 0,1 Gr. betragen. Wie viel Chlor und wie viel Brom ist in dem Gemenge? Antw.: 0,422025 Gr. Bromsilber und 1,577975 Gr. Chlorsilber.

16) Eine aus zwei Basen, b und B, bestehende Verbindung zu neutralisiren, werden n Gewichtstheile einer Säure erfordert. Das daraus entstehende neutrale Salz betrage p Gewichtstheile. Wie viel von den beiden Basen b und B ist in der Verbindung enthalten, vorausgesetzt, daß ein Atom der Säure ein Atom jeder einzelnen Basis zur Sättigung erfordert **)? Das Atomgewicht der einen Basis sei a, das der andern α, das Atomgewicht der Säure sei s.

Antw.: $a\dfrac{an-(p-n)s}{s(\alpha-a)}$ und $\alpha\dfrac{(p-n)s-an}{s(\alpha-a)}$.

17) Die käufliche schwefelsaure Magnesia enthält nicht selten schwefelsaures Natron; es soll die Menge desselben bestimmt werden. Man entwässere das Salz durch Erhitzen und erhalte aus 5 Gramm durch Niederschlag 9,431 Gramm schwefelsauren Baryt. Wie viel wasserfreies schwefelsaures Natron ist in 100 Theilen der entwässerten käuflichen schwefelsauren Magnesia enthalten?
Antw.: 18,46.

18) Eine aus zwei Salzbasen b und b' bestehende Verbindung liefert mit der Säure s eine Salzmenge, deren Gewicht $= m$, und mit der Säure s' eine Salzmenge, deren Gewicht $= n$. Wie groß sind die Gewichtsmengen der beiden Salzbasen, wenn die Atomgewichte von b, b', s, s', bezüglich p, p', q, q' sind, vorausgesetzt, daß jedesmal nur ein Atom Säure auf ein Atom Basis kömmt?

*) Fresenius, Anleitung zur quantitativen chemischen Analyse. 5. Aufl. §. 200.

**) Es ist dieses nicht immer der Fall, z. B. $FeO+Fe_2O_3$ erfordern $4SO_3$, $2KO+2NaO$ erfordern $2PO_5$.

Antw.: $p \frac{(p'+q)n - (p'+q')m}{(p-p')(q-q')}$ und $p' \frac{(p+q')m-(p+q)n}{(p-p')(q-q')}$.

19) Eine Auflösung eines Eisenerzes in Salzsäure, bestehend aus Eisenchlorid und Chloraluminium, wurde genau in zwei gleiche Theile getheilt. Der eine Theil wurde durch arsensaures Kali ($KO, 2HO+AsO_5$), der andere durch phosphorsaures Kali (KO,PO_5) zerlegt. Die erste dadurch entstandene arsensaure Verbindung betrug 10,182 Gewichtstheile, die zweite phosphorsaure Verbindung, scharf geglüht, 7,443 Gewichtstheile. Wie viel Eisenoxyd (FeO_3) und wie viel Thonerde (Al_2O_3) enthielt jeder der gleichen Theile des Eisenerzes? Antw.: 2,446 Eisenoxyd und 0,535 Thonerde.

20) Ein Eisenerz bestehe aus Eisenoxydul und Eisenoxyd. m Theile der Verbindung beider werden durch Auflösung in Salpetersalzsäure völlig in Eisenoxyd verwandelt und mittels Ammoniaks als Eisenoxyd niedergeschlagen. Die Menge desselben betrage nach dem Aussüßen, Trocknen und Glühen n Gewichtstheile. Wie viel Eisenoxydul (x), wie viel Eisenoxyd (y) enthielt das Eisenerz?

Antw.: $x = 8{,}7841(n-m)$, $y = 9{,}7841m-8{,}7841n$.
Beispiel: $m = 3{,}449$, $n = 3{,}614$, $x = 1{,}494$, $y = 1{,}9996$.
(S. Rose's Handbuch der analyt. Chemie. II. S. 79 u. 679.)

21) m Gewichtstheile einer Verbindung von Eisenoxydul und Eisenoxyd geben, durch Wasserstoffgas reducirt, n Gewichtstheile metallisches Eisen. Wie viel Eisenoxydul (x), wie viel Eisenoxyd (y) enthält die Verbindung?

Antw.: $x = 12{,}6686n-8{,}7841m$, $y = 9{,}7841m-12{,}6686n$.
Beispiel: $m = 3{,}449$, $n = 2{,}506$, $x = 1{,}450$, $y = 1{,}999$.
(Rose II. S. 81 und 677.)

22) Eine unbestimmte Quantität Eisenerz enthalte Eisenoxyd und Eisenoxydul. Durch Reduction mittels Wasserstoffgases erhält man p Gewichtstheile metallisches Eisen und q Gewichtstheile Wasser. Wie läßt sich hieraus die Menge Eisenoxyduls (x) und Eisenoxyds (y) berechnen?

Antw.: $x = 3{,}8844p-7{,}8095q$, $y = 8{,}6985q-2{,}8844p$.
Beispiel: $p = 2{,}506$, $q = 1{,}061$, $x = 1{,}450$, $y = 1{,}999$.
(Rose II. S. 81 und 678.)

23) m Gewichtstheile eines aus Eisenoxydul und Eisenoxyd bestehenden Erzes werden in Salzsäure beim Ausschlusse der atmosphärischen Luft aufgelöst und mit Schwefelwasserstoffwasser vermischt. Das Eisenoxyd wird hierdurch zu Eisenoxydul reducirt, während sich n Gewichtstheile Schwefel ausscheiden. Wie lassen sich hieraus die Mengen des Eisenoxyduls (x) und des Eisenoxyds (y) berechnen?

Antw.: $x = m - 4{,}8637n$; $y = 4{,}8637n$.

Beispiel: $m = 3{,}449$, $n = 0{,}411$, $x = 1{,}450$, $y = 1{,}999$. (Rose II. S. 86.)

24) Eine Auflösung von m Theilen einer Verbindung von Eisenoxyd und Eisenoxydul in Salzsäure wird beim Ausschlusse der atmosphärischen Luft mit metallischem Silberpulver digerirt. Es reducirt sich durch das Silber das Eisenchlorid in Eisenchlorür, und es bildet sich Chlorsilber. Hierdurch ist das Silberpulver um p Gewichtstheile schwerer geworden. Wie läßt sich hieraus die Menge Eisenoxyds berechnen? (Methode von Berzelius, siehe Rose II. S. 87 und 679.) Antw.: $2{,}2104p$.

25) Eine Verbindung von Schwefel und Arsen enthält, der chemischen Untersuchung gemäß, in 100 Gewichtstheilen 51,783 Gewichtstheile Schwefel. In welchen Verhältnissen stehen die Atomgewichte der beiden Bestandtheile, wenn ein kleiner Versuchsfehler zugegeben wird?

Antw.: Auf 2 Atomgewichte Arsen kommen 5 Atomgewichte Schwefel (As_2S_5 Arsensulphid).

26) Die procentische Zusammensetzung des Mannits ist: 39,56 Kohlenstoff, 7,69 Wasserstoff, 52,75 Sauerstoff; welches ist die chemische Formel für Mannit *)?

Antw.: Aus $C = 6$, $H = 1$, $O = 8$ erhält man als Aequivalentmenge $6{,}593\,C$, $7{,}690\,H$, $6{,}593\,O$. Verwandelt man $\frac{6{,}593}{7{,}690}$ in einen Kettenbruch, so ist der erste Näherungswerth $\frac{6}{7}$, der folgende $\frac{694}{595}$. Die chemische Formel für Mannit ist demnach: $C_6H_7O_6$.

27) Durch Erhitzen einer concentrirten Lösung von phosphoriger Säure (PO_3) in Wasser erhält man den nicht selbst entzündlichen Dreifach-Phosphor-Wasserstoff (PH_3), wobei sich Phosphorsäure-Hydrat ($PO_5 + 3HO$) bildet. Wie viel Atome Dreifach-Phosphor-Wasserstoff (x), wie viel Atome Phosphorsäure-Hydrat (y) erhält man aus einem Atome phosphoriger Säure, und wie viel Wasser (z) muß wenigstens die phosphorige Säure enthalten?

Antw.: $x(PH_3) + y(PO_5 + 3HO) = PO_3 + z(HO)$; $x + y = 1$, $3x + 3y = z$, $8y = z + 3$; $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{3}{4}$, $z = 3$. Auf ganze Zahlen zurückgeführt, geben 4 Atome Phosphorsäure mit 12 Atomen Wasser 1 Atom Phosphor-Wasserstoff und 3 Atome Phosphorsäure-Hydrat.

28) In einer Lauge, welche 100 Theile Borax aufgelöst enthält, löse ich, so viel als möglich, nämlich 297 Theile Weinstein, und erhalte durch Abdampfung dieser Auflösung, wobei alles Krystallwasser des Borax verloren geht, 349,90 Theile eines Salzes, das den Namen Tartarus boraxatus führt. Bei der Analyse

*) S. Fresenius quantit. chem. Anal. §. 202.

dieses Salzes finde ich in demselben 74,13 KO, 16,37 NaO, 36,53 BO_3, 208,73 $\overline{T}(C_4H_2O_5)$, 14,14 HO_3. Wie ist die atomistische Zusammensetzung dieses Salzes?

Antw.: Das Salz besteht aus 3 KO, 1 NaO, 2 BO_3, 6 $\overline{T}$, 3 HO; die chemische Formel ist: $3KO,\overline{T} + NaO,\overline{T} + 2\,BO_3\overline{T} + 3HO$.

29) Nach Mitscherlich (II. 654) bereitet man das zur Darstellung des Goldschwefels (Sulphur auratum Sb_2S_5) erforderliche Natrium-Antimonsulphid ($3NaS,SbS_5$) durch Kochen von Schwefel-Antimon (SbS_3), Schwefel, kohlensaurem Natron und Kalkerde. Es entsteht hierbei antimonsaures Natron (NaO,SbO_5), basisch kohlensaure Kalkerde ($CaO,CO_2 + CaO,HO$), die beide ungelöst zurückbleiben, und Natrium-Antimonsulphid, das aus der Auflösung durch Krystallisation gewonnen werden kann. Wie viel Atomgewichte Schwefel-Antimon (x), kohlensaures Natron (y), Schwefel (z) und Kalkerde (s) muß man nehmen, und wie viel Atomgewichte antimonsaures Natron (t), Natrium-Antimonsulphid (u) und basisch kohlensaure Kalkerde (v) erhält man?

Aufl.: $xSbS_3 + yNaO,CO_2 + zS + sCaO = tNaO,SbO_5 + u(3NaS+SbS_5) + v(CaO,CO_2 + CaO,HO)$. Hieraus erhält man für die 7 unbekannten Größen 6 Gleichungen: 1) $x = t+u$, in Rücksicht auf Sb; 2) $3x+z = 8u$ in Rücksicht auf S; 3) $y = t+3u$ in Rücksicht auf Na; 4) $y = v$ in Rücksicht auf C; 5) $s = 2v$ in Rücksicht auf Ca; 6) $3y+s = 6t+4v$ in Rücksicht auf O. Sollen x, y u. s. w. ganze Zahlen sein, so ergeben sich folgende Werthe: $x = 8$, $y = 18$, $z = 16$, $s = 36$, $t = 3$, $u = 5$, $v = 18$. Wendet man also 8 Atome Schwefel-Antimon, 18 kohlensaures Natron, 16 Schwefel und 36 Kalkerde an, so erhält man 5 Atome Natrium-Antimonsulphid, welche bei der Zerlegung durch verdünnte Schwefelsäure fünf Atome Goldschwefel liefern.

30) Sauerstoff, Wasserstoff und Kohlenstoff kommen nicht allein in den Verhältnissen $O = 8$, $H = 1$, $C = 6$ mit einander verbunden vor, sondern auch in den Verhältnissen vielfacher von Sauerstoff, zu vielfachen von Wasserstoff, zu vielfachen von Kohlenstoff. Wie viel von einander verschiedene Verbindungen 1-, 2-, 3-, 4-... 8-facher von Sauerstoff mit 1-, 2-, 3-... 8-facher von Wasserstoff, mit 1-, 2-, 3-, 4-... 8-facher von Kohlenstoff gibt es, wenn Verbindungen wie HCO und $H_2C_2O_2$, oder wie $H_2C_3O_1$ und $H_4C_6O_2$ (was bekanntlich nicht immer der Fall ist), als gleiche angesehen werden sollen? Antw.: 438.

Tabelle

über die

Eintheilung der Münzen, Maße, Gewichte u. s. w., welche den Beispielen der vorliegenden Sammlung zu Grunde liegen.

Münzen.

1 Thaler (Thlr.) preußisch hat 30 Silbergroschen (Sgr.) à 12 Pfennige (Pf.).
1 Gulden österreichische Währung (Fl. öster. W.) hat 100 Neukreuzer.
1 Gulden (Fl.) süddeutsche Währung hat 60 Kreuzer (Kr.)
1 Franc hat 100 Centimes.

Längen-, Flächen- und Körpermaße.

$$\left.\begin{array}{l}\text{1 Ruthe } (1^{0}) \text{ hat 12 Fuß}\\ \text{1 Fuß } (1') \text{ preuß. hat 12 Zoll } (12'')\\ \text{1 Zoll preuß. hat 12 Linien } (12''')\end{array}\right\}\text{ Duodecimalmaß.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{1 Ruthe = 10 Fuß}\\ \text{1 Fuß = 10 Zoll}\\ \text{1 Zoll = 10 Linien}\end{array}\right\}\text{ Decimalmaß.}$$

2000 Ruthen machen eine Meile preuß.
1 Quadratruthe preuß. ($1\,\square^{0}$) hat 144 Quadratfuß ($144\,\square'$).
1 Quadratfuß hat 144 Quadratzoll ($144\,\square''$).
Ein Morgen preuß. hat 180 Quadratruthen.
Ein Kubikfuß hat 1728 Kubikzoll, 1 Kubikzoll 1728 Kubiklinien.
1 Ohm preuß. = 4 Anker = 120 Quart (à 64 Kubikzoll preuß.).
1 Scheffel hat 4 Viertel, à 4 Metzen, à 3 Quart.

Gewichte.

1 ℔. preuß. Altgewicht hat 32 Loth à 4 Quentchen.
110 ℔. preuß. Altgewicht machen 1 Centner Altgewicht.
1 ℔. preuß. Neugewicht (1 ℔. Zollgewicht, $\frac{1}{2}$ Kilogramm) hat 30 Loth à 10 Quentchen, à 10 Cent, à 10 Korn. 100 ℔. machen 1 Centner Neugewicht.

Metrische Meßgrößen.

1 Meter (Stab), Grundlage der Maße und Gewichte, = $\frac{1}{10000000}$ des Erdmeridian-Quadranten = 10 Decimeter = 100 Centimeter = 1000 Millimeter.
10 Meter = 1 Dekameter, 10 Dekameter = 1 Hektometer, 10 Hektometer = 1 Kilometer, 10 Kilometer = 1 Myriameter.
1 Ar = 1 □-Dekameter = 100 □-Meter, 1 Hektar = 100 Ar = 10000 □-Meter.
1 Liter = 1 Cubikdecimeter, 1 Hektoliter = 100 Liter.
1 Ster = 1 Kubikmeter.
1 Gramm gleich dem Gewichte eines Kubik-Centimeters reinen Wassers bei der größten Dichtigkeit (4° C.); 100 Gramm = 1 Kilogramm.

Winkelmaße.

Der ganze Kreis zerfällt in 360 Grade (360°), 1° = 60 Minuten (60′ Bogenminuten, zum Unterschiede von Zeitminuten).
1′ = 60 Secunden (60″).

Die griechischen Buchstaben.

α	Alpha,	ι	Jota,	ϱ	Rho,
β	Beta,	$\varkappa$	Kappa,	σ, ς	Sigma,
γ	Gamma,	λ	Lambda,	τ	Tau,
δ	Delta,	μ	My,	υ	Ypsilon,
ε	Epsilon,	ν	Ny,	φ	Phi,
ζ	Zeta,	ξ	Xi,	χ	Chi,
η	Eta,	o	Omicron,	ψ	Psi,
ϑ	Theta,	π	Pi,	ω	Omega.

Druck von M. DuMont-Schauberg in Köln.