

ÉLASTICITÉ

ET

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

Technologie de l'Exposition internationale d'Anvers. Ad. Mertens, Bruxelles, 1894. (*Épuisé.*)

Géométrie descriptive. Spécialement à l'usage de l'enseignement industriel de la coupe des pierres et de la charpente. Ad. Wesmael, Namur, 1899.

Traité pratique du tracé et de la taille des engrenages. Ch. Béranger, Paris, 1904.

Cinématique des mécanismes, Ch. Béranger, Paris, 1907.

ÉLASTICITÉ

ET

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

PAR

LOUIS WÈVE

Ingénieur,

Professeur à l'École supérieure des Textiles de Verviers,
Directeur de cet Institut.

PARIS ET LIÈGE

LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE. CH. BÉRANGER, ÉDITEUR

SUCCESSEUR DE BAUDRY ET C^e

PARIS, 15, RUE DES SAINTS-PÈRES. 15

LIÈGE, 21, RUE DE LA RÉGENCE

—
1909

Tous droits réservés.

Les unités adoptées sont le kilogramme et le centimètre ; le travail mécanique est exprimé en kilogrammètres ;

- F, P ou Q, force quelconque ;
T, effort tranchant ;
M, moment fléchissant ;
M', moment de torsion ;
 $\pm t$, tension intérieure normale de traction ou de compression ;
 θ , tension de glissement ;
 δ , dilatation ou allongement spécifique, rapport de l'allongement ou du raccourcissement total Δ à la longueur primitive l ;
 α , coefficient de dilatation ou inverse du module d'élasticité longitudinale E ;
 γ , glissement ;
 β , coefficient de glissement ou inverse du module d'élasticité de glissement E' ;
R, coefficient de rupture à la traction ;
R', coefficient de rupture à la compression, par unité de surface ;
R'', coefficient de rupture au cisaillement ;
R''', charge de rupture à la flexion ;
R''', charge de rupture à la torsion ;
 r' , r'' , r''' , r'''' , charges spécifiques admissibles à la traction, à la compression, au cisaillement, à la flexion et à la torsion ;
I, moment d'inertie d'une section plane par rapport à une droite située dans son plan et passant par le centre de gravité ;
 I_p , moment d'inertie polaire d'une section plane ;
 r_g , rayon de giration d'une section plane.

620.1

0000

281754

PRÉFACE

L'application des mathématiques à l'art de l'ingénieur a pris un développement considérable. L'empirisme tend à disparaître de toutes les branches de l'activité intellectuelle pour céder place à la science. La théorie n'est en opposition avec la pratique que si *l'une des deux* est défectueuse. En Résistance des Matériaux, en Construction des machines, en constructions civiles, en électrotechnique, la *saine* théorie a permis d'éliminer la mauvaise pratique.

Comment établir une théorie? Effectuer d'innombrables essais avec toute la précision désirable, les concrétiser par la théorie des moindres carrés, en déduire une loi générale affectant la plupart des matériaux, échafauder la théorie et la développer, c'est là le procédé le plus rationnel. Les mathématiques constituent alors un instrument admirable, surtout quand il est manié par des mains habiles et prudentes. Car le calcul différentiel et le calcul intégral ne peuvent donner que ce qu'ils ont et toute question un peu générale devient souvent

irrésoluble, du moins dans l'état actuel de nos connaissances, si on n'introduit l'hypothèse, la constante. Encore faut-il qu'elle soit très approximativement conforme aux faits, ce qu'il y a lieu de vérifier minutieusement dans chaque cas particulier.

Les auteurs modernes, Bauschinger, Föppl, Bach surtout, ont largement usé de ces procédés rationnels et nous avons essayé de les suivre dans cette voie en empruntant souvent à Bach le meilleur de ses expériences et de ses déductions. Nous nous sommes souvenu, d'autre part, des belles leçons de feu M. Boudin, Inspecteur Général des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École du Génie Civil de Gand, de M. L. Anspach, Professeur à l'École polytechnique de Bruxelles, de feu M. Ronkar, Professeur à l'Université de Liège, et nous avons consulté les beaux travaux de Lamé, de Saint-Venant, Flamant, Résal, Poincaré, Boussinesq, Hertz, Grashof, Winckler, relatifs à l'Élasticité et à la Résistance des matériaux.

Nous remercions M. Ch. Günther, Professeur à l'École Supérieure des Textiles, d'avoir bien voulu se charger avec nous de l'aride travail des corrections.

ÉLASTICITÉ

ET

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

TITRE PREMIER

ÉLASTICITÉ

CHAPITRE PREMIER

TENSIONS INTÉRIEURES

PRINCIPES

Lorsqu'un corps solide est soumis à l'action de forces extérieures qui lui font équilibre, il se produit dans le corps des efforts intérieurs ou actions moléculaires. — Considérons (fig. 1) un solide quelconque soumis à l'action des forces extérieures P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5 qui se font équilibre. Imaginons une section fictive, S , partageant le corps en deux parties A et B . La partie A est soumise à l'action de deux forces P_4 et P_5 ; si on avait sectionné réellement, la partie A ne serait pas restée en place; il en résulte que la partie B exerce sur A une action moléculaire qui fait équilibre aux deux forces P_4 et P_5 . De même A exerce sur B une action moléculaire qui fait équilibre aux forces extérieures P_1, P_2 et P_3 . Il est bien évident, d'ailleurs, que, en vertu du principe de l'action

égale à la réaction, l'action moléculaire de A sur B en un

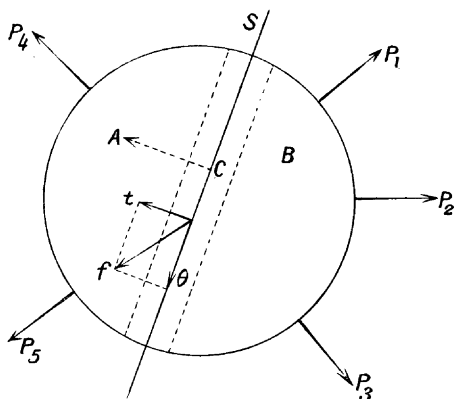


Fig. 1.

point de la section S , est égale et de sens contraire à l'action exercée par B sur A .

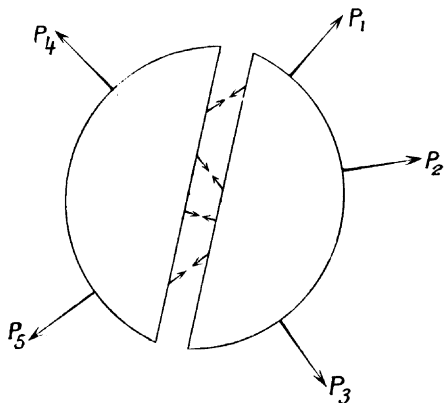


Fig. 2.

On peut conclure que dans un corps solide il y a équilibre, pour une portion quelconque de ce corps, entre

les efforts intérieurs qui agissent sur une section et les forces qui agissent extérieurement sur le corps. C'est ce que montre clairement la figure 2.

Nous aurons l'occasion de voir que le procédé précédent, appelé *méthode des sections*, est souvent employé pour calculer les efforts ou forces moléculaires qui se développent à l'intérieur des corps et pour s'assurer qu'ils n'atteignent pas de valeurs dangereuses.

Les seules molécules qui agissent les unes sur les autres sont celles qui sont distribuées à des distances extrêmement petites de la section que l'on considère. — Ce principe peut être considéré comme évident, et quand on dit qu'une section située à l'intérieur d'un solide est soumise à certains efforts, on entend par là que l'ensemble des molécules situées à gauche de la surface considérée exercent des actions sur les molécules situées à droite, et réciproquement (fig. 1). Poncelet, dans son « Introduction à la mécanique industrielle », étudie l'action attractive et répulsive de molécules voisines à l'intérieur des corps.

Les tensions intérieures ou actions moléculaires sont de deux espèces : les tensions normales et les tensions tangentielles. — Un élément de surface ds (fig. 3 et 4) à l'intérieur d'un corps solide est soumis, dans le cas le plus général, quand le corps reçoit l'action de forces extérieures, à un effort oblique, f , ou force élastique ; on peut décomposer cet effort en deux composantes : l'une, t , normale à la section considérée, l'autre, θ , située dans la section. La tension t est dirigée de l'élément ds vers l'extérieur ; c'est alors une *traction* $+ t$ (fig. 3) ; ou bien elle est dirigée vers l'élément ; c'est une *pression* $- t$ (fig. 4). Les tensions $\pm t$ s'appellent *tensions normales*. La tension θ , située dans l'élément, se nomme *tension tangentielle*. Une force élastique, f , agissant sur un élé-

ment de surface ds , est donc complètement déterminée quand on la rapporte à trois axes coordonnés ; l'un, l'axe des Z , par exemple, est perpendiculaire sur ds , il fournit la composante $\pm t$; les deux autres, choisis dans le plan

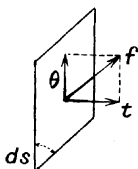


Fig. 3.

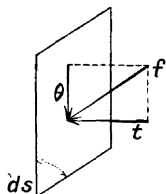


Fig. 4.

ds , donnent les deux composantes θ_x et θ_y de l'effort tangentiel θ .

Les tensions s'expriment toujours par unité de surface ; en sorte que si elles agissent sur un élément de surface ds , leur valeur réelle sera $\pm t ds$ et $\theta_x ds$, $\theta_y ds$. L'élément est admis suffisamment petit pour que les tensions y soient supposées uniformément réparties.

THÉORÈMES SUR LES TENSIONS

Généralités et conventions. — Par un point situé à l'intérieur d'un corps, on peut faire passer une infinité d'éléments de surface ds ; il suffit de faire varier l'orientation d'un élément quelconque passant par ce point. Nous aurons l'occasion de démontrer ultérieurement que lorsque l'on connaît les tensions t et θ appliquées à trois éléments de surface différents, passant par le point considéré, il est possible de déterminer les tensions correspondantes sur un élément orienté de quelque façon que ce soit, mais passant par le point.

Nous avons montré que l'action moléculaire de la partie A (fig. 1) d'un corps, sur la partie B, en un point C

d'une section fictive S , était égale et de sens contraire à l'action moléculaire exercée au point considéré par B sur A . Elevons au point C , et dans un seul sens, la normale à la section S . Cette normale est, par exemple,

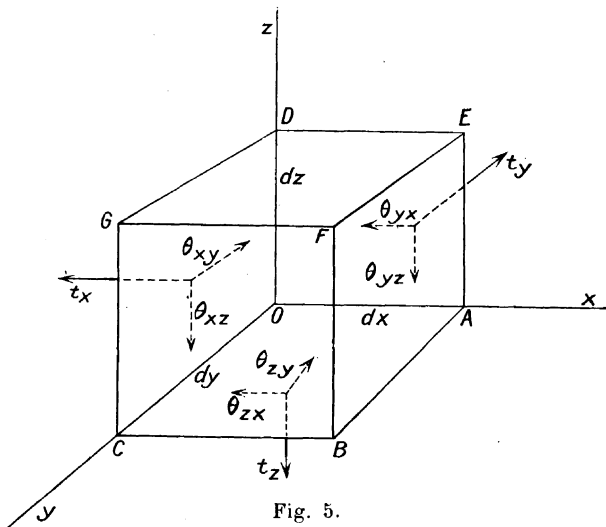


Fig. 5.

intérieure pour A , extérieure pour B . La composante normale t de l'effort élastique de A sur B produit une extension de B quand elle coïncide en direction avec la normale extérieure; nous lui donnons alors le signe $+$. Mais la tension $+$ sur B est la réaction de B sur A et la tension t sur A est le signe contraire à la tension t sur B . Les composantes normales des forces élastiques agissant sur une même section sont donc toujours de sens contraires. On peut dire la même chose des composantes tangentielles θ .

Il est permis d'étendre le raisonnement précédent au cas de deux facettes parallèles appartenant à un corps solide. Considérons, en effet, un parallépipède infiniment petit $OABCFGDE$ (fig. 5) et, dans ce parallépipède,

les deux facettes normales à l'axe des Z. La perpendiculaire sur la facette ABCO donne la direction de la tension t_z . Rapprochons les deux facettes jusqu'à ce qu'elles coïncident. La tension t_z sur la facette ABCO est la réaction de cette facette sur la facette DGFE ; la tension normale sur celle-ci sera dirigée en sens contraire. On constate donc que, la tension t_z sur ABCO étant dirigée vers les Z négatifs, la tension sur DGFE aura le sens des Z positifs. Il résulte de là que, lorsque la perpendiculaire extérieure sur une facette sera dirigée vers les X, les Y ou les Z positifs, la perpendiculaire sur la facette opposée sera dirigée vers les X, les Y et les Z négatifs. Le même raisonnement s'applique aux tensions tangentielles θ ou à leurs composantes θ_x, θ_y , etc.

Conclusion : Pour les facettes du solide dont les normales extérieures sont dirigées dans le sens des coordonnées positives les composantes de t et θ suivant les axes seront également positives ; sur les facettes opposées, les signes seront contraires.

Loi de continuité. — Nous supposons dans ce qui suit que la matière est homogène, c'est-à-dire que les corps sont constitués de la même façon en chacun de leurs points ; nous admettons aussi que leur surface est continue. Les coordonnées d'un point M à l'intérieur d'un corps étant x, y, z , les coordonnées d'un point M' infiniment voisin du premier sont $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$. Les tensions t et θ appliquées au point M sont, en général, des fonctions des coordonnées x, y et z . Soit $f(x, y, z) = t$ une tension au point considéré. Nous supposons les projections $\delta x, \delta y$ et δz de la distance des deux points assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés. La tension au point M' sera

$$f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z$$

à cause de la loi de continuité. En effet, une fonction est continue quand on peut lui appliquer le théorème de Taylor qui n'est applicable qu'aux fonctions continues. Nous supposons donc que les composantes t et θ de la force élastique sont des fonctions continues de x , y , z ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, leurs dérivées secondes étant négligeables.

Equilibre d'un parallépipède infiniment petit. Théorème de la réciprocité des efforts tangentiels. Variation des tensions. — Nous allons chercher des relations entre les tensions agissant en un point à l'intérieur d'un corps solide ; de l'étude que nous allons entreprendre nous déduirons une loi fort simple régissant toutes les tensions au point considéré.

Soit O le point (fig. 5) ; conduisons par ce point trois facettes infiniment petites que, pour simplifier, nous supposons normales ; nous pouvons donc rapporter notre examen à trois axes orthogonaux OX , OY , et OZ passant par les facettes et convergeant au point O . Nous supposons des facettes infiniment petites afin de pouvoir admettre une répartition uniforme des tensions. Construisons le parallépipède infiniment petit $OABCDEFG$ de côtés dx , dy et dz . Les composantes de t et θ sur $OABC$ sont les mêmes que les composantes des mêmes efforts au point O et ayant la direction des premières ; les composantes de t et θ sur $OAED$ sont les mêmes que celles qui agissent dans le même sens au point O . En effet, les différences sont des infiniment petits du second ordre. Sur des faces opposées ces composantes, comme on a vu, diffèrent d'infiniment petits du premier ordre.

Soit t_z la tension normale sur la facette $OABC$; elle est dirigée vers les Z négatifs. Décomposons la tension θ , appliquée dans cette facette, en ses deux composantes θ_{zx} et θ_{zy} parallèles aux axes OX et OY . Le premier

indice z est relatif à la direction de la normale à la facette dont il s'agit, le second indice x ou y indique la direction de l'axe auquel la composante est parallèle. Comme t_z est dirigée vers les Z négatifs, θ_{zx} et θ_{zy} sont dirigées vers les X et vers les Y négatifs.

Sur la facette opposée EDGF la tension normale est dirigée en sens inverse de t_z ; de même les composantes de θ sur cette facette sont inverses de θ_{zx} et θ_{zy} .

La fonction en x, y, z de t , quand on passe en EFGD, subit un accroissement δz . Développons cette fonction par le théorème de Taylor et arrêtons-nous au premier terme infiniment petit. On trouve :

$$t_z + \frac{dt_z}{dz} dz$$

valeur de la tension normale sur DEFG. Les composantes θ_{zx} et θ_{zy} sont devenues respectivement :

$$\theta_{zx} + \frac{d\theta_{zx}}{dz} dz \quad \text{et} \quad \theta_{zy} + \frac{d\theta_{zy}}{dz} dz$$

Soit t_y , tension normale sur OAED, dirigée vers les Y négatifs; les composantes θ_{yz} et θ_{yx} sont dirigées vers les Z et les X négatifs. Sur la facette opposée BFGC les composantes sont devenues :

$$t_y + \frac{dt_y}{dy} dy; \quad \theta_{yz} + \frac{d\theta_{yz}}{dy} dy; \quad \theta_{yx} + \frac{d\theta_{yx}}{dy} dy$$

Elles sont de sens inverses à ceux de t_y , θ_{yz} et θ_{yx} . Soit t_x , composante normale sur OCGD, dirigée vers les X négatifs; les composantes θ_{xy} et θ_{xz} sont dirigées vers les Y et vers les Z négatifs. Leur valeur sur la facette opposée ABFE est :

$$t_x + \frac{dt_x}{dx} dx; \quad \theta_{xy} + \frac{d\theta_{xy}}{dx} dx; \quad \theta_{xz} + \frac{d\theta_{xz}}{dx} dx$$

Elles sont de sens opposés aux précédentes.

Chacune des tensions dont il vient d'être parlé est appliquée à l'unité de surface; sur la facette ABCO la tension normale totale a pour expression $t_x \cdot dx \cdot dy$; la tension totale relative à θ_{xy} est $\theta_{xy} \cdot dx \cdot dy$, et ainsi de suite. Etablissons l'équilibre du parallélépipède infiniment petit. Les seules forces qui interviennent sont les composantes des tensions; éventuellement on peut faire entrer en ligne le poids du parallélépipède et une force d'inertie qu'il posséderait; ces dernières forces sont appliquées au centre de gravité du parallélépipède; on peut désigner l'ensemble de leurs composantes par X, Y et Z. Il y a lieu d'écrire les trois équations d'équilibre de rotation et les trois équations d'équilibre de translation. Cherchons, par exemple, l'équation d'équilibre de rotation autour de l'axe passant par le centre de gravité du parallélépipède et parallèle à OZ.

Il vient :

$$\left[\theta_{yx} \frac{dy}{2} + \left(\theta_{yx} + \frac{d\theta_{yx}}{dy} dy \right) \frac{dy}{2} \right] dx dz - \left[\theta_{xy} \frac{dy}{2} + \left(\theta_{xy} + \frac{d\theta_{xy}}{dy} dy \right) \frac{dy}{2} \right] dx dz = 0.$$

La composante Z de la force extérieure n'intervient pas, son bras de levier étant nul; il en est de même des composantes X et Y; de plus, les termes t_x , t_y et t_z donnent une résultante qui passe par l'axe. Divisons l'expression précédente par $\frac{1}{2} dx dy dz$; on a :

$$\theta_{yx} + \theta_{yx} + \frac{d\theta_{yx}}{dy} dy - \theta_{xy} - \theta_{xy} - \frac{d\theta_{xy}}{dy} dy = 0.$$

Négligeons les termes infiniment petits devant les termes finis; il viendra $2\theta_{yx} = 2\theta_{xy}$ ou :

$$\theta_{yx} = \theta_{xy}.$$

En écrivant les deux autres équations d'équilibre de

rotation autour d'axes parallèles à OX et OY et passant par le centre de gravité, on trouve :

$$\theta_{zy} = \theta_{yz}; \quad \theta_{zx} = \theta_{xz}$$

d'où le théorème :

Dans deux éléments de surface qui se coupent à angle droit, les composantes tangentielles qui sont normales à l'arête commune sont égales entre elles, c'est-à-dire qu'elles sont réciproques.

On conclut de là que si dans un élément de surface situé à l'intérieur d'un corps agit une tension tangentielle, il se trouve toujours une tension tangentielle dans un élément de surface normal au premier ; en d'autres termes, *les tensions tangentielles agissent par paires.*

Ecrivons maintenant les équations d'équilibre de translation. Ici les composantes X, Y et Z interviennent ainsi que t_x , t_y et t_z . On a, par rapport à l'axe OX :

$$\frac{dt_x}{dx} dx dy dz + \frac{d\theta_{yx}}{dy} dx dy dz + \frac{d\theta_{zx}}{dz} dx dy dz + X dx dy dz = 0.$$

Par rapport à l'axe des Y :

$$\frac{d\theta_{xy}}{dx} dx dy dz + \frac{dt_y}{dy} dx dy dz + \frac{d\theta_{zy}}{dz} dx dy dz + Y dx dy dz = 0.$$

Enfin, par rapport à l'axe OZ :

$$\frac{d\theta_{xz}}{dx} dx dy dz + \frac{d\theta_{yz}}{dy} dx dy dz + \frac{dt_z}{dz} dx dy dz + Z dx dy dz = 0.$$

Divisons chacune de ces équations par $dx \cdot dy \cdot dz$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dt_x}{dx} + \frac{d\theta_{yx}}{dy} + \frac{d\theta_{zx}}{dz} + X &= 0 \\ \frac{d\theta_{xy}}{dx} + \frac{dt_y}{dy} + \frac{d\theta_{zy}}{dz} + Y &= 0 \\ \frac{d\theta_{xz}}{dx} + \frac{d\theta_{yz}}{dy} + \frac{dt_z}{dz} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(I)}$$

Il y a neuf inconnues dans les équations (I) ; mais les conditions $\theta_{yx} = \theta_{xy}$; $\theta_{zy} = \theta_{yz}$; $\theta_{xz} = \theta_{zx}$ ramènent le

nombre d'inconnues à six. Les conditions d'équilibre fournies par la mécanique rationnelle conduisent donc à trois équations renfermant six inconnues ; le problème est indéterminé ; le système doit donc être résolu hyperstatiquement. Nous aurons, en effet, l'occasion de voir qu'en utilisant les relations entre les forces et les déformations, c'est-à-dire en faisant appel à la loi fondamentale de l'élasticité que nous exposerons ultérieurement, toute indétermination disparaît. Quoiqu'il en soit, retenons seulement ici que l'étude des tensions appliquées à un tétraèdre formé autour d'un point à l'intérieur du corps solide est suffisante pour déterminer toutes les tensions en fonction des tensions appliquées sur trois éléments de surface passant par le point, puisque le nombre d'inconnues est seulement de six.

Équilibre d'un tétraèdre infiniment petit. Ellipsoïde d'élasticité ou de Lamé. — Soit un point O à l'intérieur d'un solide ; on peut orienter en ce point autant d'éléments de surface que l'on veut.

Nous allons montrer que le lieu des extrémités de toutes les tensions normales ou tangentiellles, appliquées sur ces éléments, est un ellipsoïde ; il suffit d'ailleurs, comme on vient de le voir, de connaître les tensions sur trois éléments de surface passant par le point pour déterminer les tensions appliquées sur un élément quelconque renfermant le point.

Soient donc (fig. 6) trois éléments de surface ω_x , ω_y , ω_z passant par le point O ; nous les supposons normaux l'un sur l'autre pour les rapporter à trois axes orthogonaux, ce qui simplifie la question ; le point O est choisi comme origine des coordonnées ; les tensions sur les éléments sont connues. Conduisons un quatrième élément quelconque ABC , de surface Ω , coupant les trois autres et extrêmement rapproché de l'origine de façon que les

tensions inconnues, appliquées sur cet élément, puissent être considérées comme étant les mêmes que celles du point O. Nous formons ainsi un tétraèdre infiniment petit ABCO. Appelons t_x, t_y, t_z les tensions normales sur $\omega_x, \omega_y, \omega_z$; θ_{zy} et θ_{yz} les efforts tangentiels perpendiculaires sur l'axe des X et appliqués aux éléments ω_y et ω_z (ces

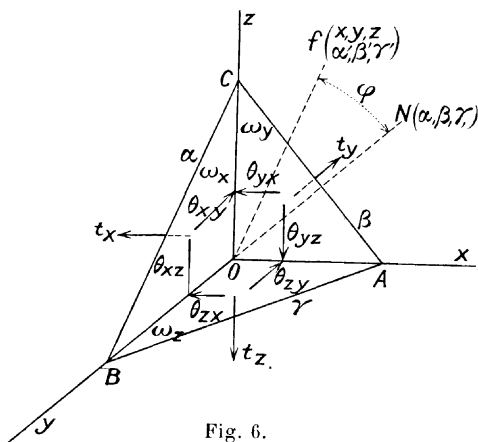


Fig. 6.

efforts sont égaux); θ_{zx}, θ_{xz} les efforts tangentiels (égaux) perpendiculaires sur l'axe des Y; θ_{xy}, θ_{yx} les efforts tangentiels (égaux) normaux à l'axe des Z. Il n'en existe pas d'autres. Soient x, y, z les composantes suivant les axes OX, OY, OZ de la tension inconnue f , résultante de t et θ , appliquée sur l'élément Ω . Établissons les équations d'équilibre du tétraèdre suivant les trois axes; l'effort élastique x, y, z passe par le point O puisque la facette ABC est supposée infiniment près de ce point. Nous supposons que la force extérieure due à la gravité ou à l'inertie passe aussi par O, ou n'existe pas. Il vient :

$$x. \Omega = t_x \omega_x + \theta_{yx} \omega_y + \theta_{zx} \omega_z \quad (1)$$

$$y. \Omega = t_y \omega_y + \theta_{zy} \omega_z + \theta_{xy} \omega_x \quad (2)$$

$$z. \Omega = t_z \omega_z + \theta_{yz} \omega_y + \theta_{xz} \omega_x \quad (3)$$

Soient α , β , γ les angles que forme Ω avec les trois plans coordonnés ; on a :

$$\Omega \cos \alpha = \omega_x ; \quad \Omega \cos \beta = \omega_y ; \quad \Omega \cos \gamma = \omega_z$$

d'où

$$\cos \alpha = \frac{\omega_x}{\Omega} ; \quad \cos \beta = \frac{\omega_y}{\Omega} ; \quad \cos \gamma = \frac{\omega_z}{\Omega} .$$

Les équations (1), (2), (3) deviennent donc :

$$x = t_x \cos \alpha + \theta_{yx} \cos \beta + \theta_{zx} \cos \gamma \quad (1)$$

$$y = t_y \cos \beta + \theta_{zy} \cos \gamma + \theta_{xy} \cos \alpha \quad (2)$$

$$z = t_z \cos \gamma + \theta_{yz} \cos \beta + \theta_{xz} \cos \alpha \quad (3)$$

On a de plus :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (4)$$

x , y et z sont les composantes des tensions sur un élément passant par O et de position définie par les angles α , β , γ . Pour trouver le lieu des extrémités des tensions appliquées à tous les éléments passant par O, il convient d'éliminer α , β et γ des équations précédentes. Tirons $\cos \alpha$, $\cos \beta$ et $\cos \gamma$ des trois premières ; ils seront exprimés en fonction du premier degré des tensions t_x , t_y , t_z , $\theta_{yx} = \theta_{xy}$, $\theta_{zx} = \theta_{xz}$, $\theta_{zy} = \theta_{yz}$, supposées connues, et des variables x , y et z . Remplaçons dans l'équation (4), nous obtenons une surface du second degré. La tension appliquée sur un élément ne pouvant être infinie, cette surface est un *ellipsoïde*. Le centre de cet ellipsoïde est le point O lui-même ; car en introduisant $\cos \alpha$, $\cos \beta$ et $\cos \gamma$ dans l'équation (4) on obtient trois carrés parfaits ; l'ellipsoïde est donc rapporté à son centre. D'où le théorème de l'ellipsoïde d'élasticité ou de Lamé :

Le lieu des extrémités de toutes les tensions appliquées à tous les éléments de surface passant par un point à l'intérieur d'un solide, est un ellipsoïde dont le centre est le point considéré.

Cet ellipsoïde n'est pas rapporté à ses axes ; mais en désignant la moitié de ceux-ci par a , b , c , et en effectuant un changement de coordonnées, l'équation prendra la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

a , b , c s'appellent les *forces principales*.

PROPRIÉTÉS DE L'ELLIPSOÏDE D'ÉLASTICITÉ

A. — *Les forces principales sont normales, c'est-à-dire que ces forces s'appliquent aux plans diamétraux principaux correspondants ; les trois plans diamétraux principaux subissent donc des tensions exclusivement normales.*

Ainsi, les trois demi-axes a , b , c de l'ellipsoïde sont les tensions normales appliquées aux plans diamétraux principaux ; dans ces plans n'existe aucun effort tangentiel ; et comme a est le vecteur le plus grand de l'ellipsoïde, la tension maximum est normale sur le plan diamétral correspondant ou sur le plan renfermant b et c .

Reprenons les équations

$$x = t_x \cos \alpha + \theta_{xy} \cos \beta + \theta_{xz} \cos \gamma \quad (1)$$

$$y = t_y \cos \beta + \theta_{yz} \cos \gamma + \theta_{xy} \cos \alpha \quad (2)$$

$$z = t_z \cos \gamma + \theta_{yz} \cos \beta + \theta_{xz} \cos \alpha \quad (3)$$

On a vu que $\theta_{xy} = \theta_{yx}$, $\theta_{yz} = \theta_{zy}$, $\theta_{xz} = \theta_{zx}$; x , y et z sont les composantes de l'effort élastique f appliqué sur la facette ABC (fig. 6). Abaissons la normale ON sur cette facette ; ON détermine précisément avec les axes les angles α , β , γ compris entre ABC et ces mêmes axes.

Appelons α' , β' , γ' les angles que forme f avec OX, OY et OZ. On a :

$$x = f \cos \alpha' ; \quad y = f \cos \beta' ; \quad z = f \cos \gamma'$$

d'où :

$$\cos \alpha' = \frac{x}{f}; \quad \cos \beta' = \frac{y}{f}; \quad \cos \gamma' = \frac{z}{f}$$

Désignons par φ l'angle que forme l'effort élastique f avec la normale ON. On sait que le cosinus de l'angle de deux droites vaut la somme des produits des cosinus des angles que déterminent ces droites avec les axes. On a donc :

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{x}{f} \cos \alpha + \frac{y}{f} \cos \beta + \frac{z}{f} \cos \gamma \\ f \cos \varphi &= x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma \end{aligned}$$

$f \cos \varphi$ est la projection de l'effort f , appliqué sur l'élément ABC, sur la normale à cet élément. Nous allons chercher quand cette force est maximum. Annulons la dérivée. Il vient :

$$-x \sin \alpha d\alpha - y \sin \beta d\beta - z \sin \gamma d\gamma + \cos \alpha dx + \cos \beta dy + \cos \gamma dz = 0 \dots \quad (4)$$

car x , y et z sont des fonctions. Les équations (1), (2) et (3) deviennent, d'autre part :

$$\begin{aligned} dx &= -t_x \sin \alpha d\alpha - \theta_{xy} \sin \beta d\beta - \theta_{xz} \sin \gamma d\gamma \\ dy &= -t_y \sin \beta d\beta - \theta_{yz} \sin \gamma d\gamma - \theta_{xy} \sin \alpha d\alpha \\ dz &= -t_z \sin \gamma d\gamma - \theta_{yz} \sin \beta d\beta - \theta_{xz} \sin \alpha d\alpha \end{aligned}$$

Remplaçons dans (4) :

$$\begin{aligned} -x \sin \alpha d\alpha - y \sin \beta d\beta - z \sin \gamma d\gamma + \cos \alpha (-t_x \sin \alpha d\alpha \\ - \theta_{xy} \sin \beta d\beta - \theta_{xz} \sin \gamma d\gamma) + \cos \beta (-t_y \sin \beta d\beta \\ - \theta_{yz} \sin \gamma d\gamma - \theta_{xy} \sin \alpha d\alpha) + \cos \gamma (-t_z \sin \gamma d\gamma \\ - \theta_{yz} \sin \beta d\beta - \theta_{xz} \sin \alpha d\alpha) = 0. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sin \alpha d\alpha (x + t_x \cos \alpha + \theta_{xz} \cos \beta + \theta_{xy} \cos \gamma) \\ + \sin \beta d\beta (y + \theta_{xy} \cos \alpha + t_y \cos \beta + \theta_{yz} \cos \gamma) \\ + \sin \gamma d\gamma (z + \theta_{xz} \cos \alpha + \theta_{yz} \cos \beta + t_z \cos \gamma) = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Différentions :

$$\sin \alpha \cos \alpha d\alpha + \sin \beta \cos \beta d\beta + \sin \gamma \cos \gamma d\gamma = 0.$$

Multiplions par une fonction 2λ dont nous disposerons par la suite. Il vient :

$$2\lambda \sin \alpha \cos \alpha d\alpha + 2\lambda \sin \beta \cos \beta d\beta + 2\lambda \sin \gamma \cos \gamma d\gamma = 0.$$

Soustrayons de l'équation (5) :

$$\begin{aligned} & \sin \alpha d\alpha (x + t_x \cos \alpha + \theta_{xy} \cos \beta + \theta_{xz} \cos \gamma - 2\lambda \cos \alpha) \\ & + \sin \beta d\beta (y + \theta_{xy} \cos \alpha + t_y \cos \beta + \theta_{yz} \cos \gamma - 2\lambda \cos \beta) \\ & + \sin \gamma d\gamma (z + \theta_{xz} \cos \alpha + \theta_{yz} \cos \beta + t_z \cos \gamma - 2\lambda \cos \gamma) = 0. \end{aligned}$$

Disposons de λ pour que les facteurs des trois différentielles soient nuls. On a :

$$\begin{aligned} x + t_x \cos \alpha + \theta_{xy} \cos \beta + \theta_{xz} \cos \gamma &= 2\lambda \cos \alpha \\ y + \theta_{xy} \cos \alpha + t_y \cos \beta + \theta_{yz} \cos \gamma &= 2\lambda \cos \beta \\ z + \theta_{xz} \cos \alpha + \theta_{yz} \cos \beta + t_z \cos \gamma &= 2\lambda \cos \gamma \end{aligned}$$

Comparons avec les équations (1), (2) et (3). Il vient :

$$\begin{array}{ll} 2x = 2\lambda \cos \alpha & \text{ou} \quad x = \lambda \cos \alpha \\ 2y = 2\lambda \cos \beta & \quad \quad y = \lambda \cos \beta \\ 2z = 2\lambda \cos \gamma & \quad \quad z = \lambda \cos \gamma \end{array}$$

Or

$$f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Donc :

$$f = \lambda \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} = \lambda$$

et

$$\begin{aligned} f \cos \varphi &= \lambda \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} \\ \cos \varphi &= \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} = 1. \end{aligned}$$

Il y a donc maximum quand $\varphi = 0$. La projection de la tension sur la normale est maximum quand la tension est elle-même normale sur la facette ABC ; cette tension est alors égale à sa propre projection. Comme la tension a

est maximum, elle est normale et le plan auquel elle s'applique est le plan diamétral correspondant renfermant b et c . On voit de même que b et c sont les tensions relatives aux deux autres plans diamétraux.

Valeur de la tension maxima λ . — Les équations (1), (2) et (3) deviennent, en y remplaçant x , y et z par leur valeur

$$\begin{aligned} x &= \lambda \cos \alpha, & y &= \lambda \cos \beta, & z &= \lambda \cos \gamma \\ \lambda \cos \alpha &= t_x \cos \alpha + \theta_{xy} \cos \beta + \theta_{xz} \cos \gamma \\ \lambda \cos \beta &= t_y \cos \beta + \theta_{yz} \cos \gamma + \theta_{xy} \cos \alpha \\ \lambda \cos \gamma &= t_z \cos \gamma + \theta_{yz} \cos \beta + \theta_{xz} \cos \alpha \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \cos \alpha (\lambda - t_x) &= \theta_{xy} \cos \beta + \theta_{xz} \cos \gamma \\ \cos \beta (\lambda - t_y) &= \theta_{yz} \cos \gamma + \theta_{xy} \cos \alpha \\ \cos \gamma (\lambda - t_z) &= \theta_{yz} \cos \beta + \theta_{xz} \cos \alpha \end{aligned}$$

avec :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Éliminons α , β et γ entre ces quatre équations ; on arrive à :

$$(t_x - \lambda)(t_y - \lambda)(t_z - \lambda) - \theta_{xy}^2(t_z - \lambda) - \theta_{xz}^2(t_y - \lambda) - \theta_{yz}^2(t_x - \lambda) + 2\theta_{xy}\theta_{yz}\theta_{xz} = 0$$

équation du troisième degré en λ ; elle donne généralement trois valeurs pour λ , correspondant aux trois axes de l'ellipsoïde a , b et c , et dont la plus grande est a .

.B. — L'équation de l'ellipsoïde d'élasticité étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

il est visible que cette surface ne dépend que de la valeur absolue des forces principales a , b et c .

C. — Si en même temps que l'ellipsoïde d'élasticité

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

on considère l'une des deux surfaces

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = \pm 1 \quad (2)$$

dites surfaces auxiliaires, le plan tangent au point de percée d'une force quelconque avec la surface auxiliaire est parallèle à l'élément auquel s'applique la force.

α) Premier cas. — Supposons

$$a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

L'équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

représente un ellipsoïde de demis-axes \sqrt{a} , \sqrt{b} , \sqrt{c} .

L'équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = -1$$

représente une surface imaginaire, car la somme de trois quantités plus grandes que zéro est aussi supérieure à zéro.

β) Supposons

$$a < 0, \quad b < 0, \quad c < 0.$$

L'équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

représente une surface imaginaire. L'équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = -1$$

représente un ellipsoïde.

Il résulte de là que dans le cas où les trois forces principales sont de même signe, la surface auxiliaire est un ellipsoïde ou une surface imaginaire.

Deuxième cas. — a , b et c sont de signes contraires. Soient a et b plus grands que zéro, c plus petit que zéro. L'équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} = 1$$

représente un hyperboloïde à une nappe ; car en coupant par le plan xy , on obtient une ellipse ; et par l'un des deux autres plans, une hyperbole.

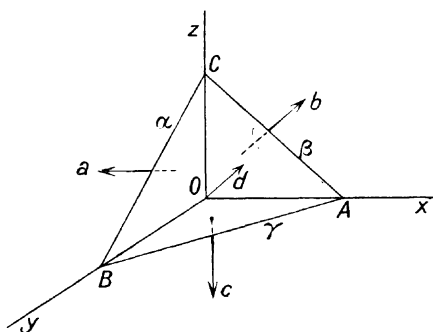


Fig. 7.

L'équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} = -1$$

représente un hyperboloïde à deux nappes ayant même cône asymptotique que l'hyperboloïde précédent.

Dans ce cas les surfaces auxiliaires sont deux hyperboloïdes conjugués.

Ce fait établi, choisissons pour axes conjugués les directions des forces a , b et c . Considérons (fig. 7) un élément à une distance infiniment petite d de l'origine. Son équation est :

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = d.$$

Désignons par X , Y et Z les composantes de la tension

sur l'élément. L'équilibre de translation donne

$$\begin{aligned} X &= a \cos \alpha \\ Y &= b \cos \beta \\ Z &= c \cos \gamma \end{aligned}$$

Les composantes X, Y et Z sont les mêmes pour un élément parallèle au premier, passant par l'origine O et infiniment rapproché. L'équation de ce dernier élément est

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0 \quad (3)$$

Les équations de la droite qui donne la direction de la tension sont :

$$\frac{x}{a \cos \alpha} = \frac{y}{b \cos \beta} = \frac{z}{c \cos \gamma} \quad (4)$$

Soit x' , y' , z' le point de percée de la droite (4) avec la surface (2).

L'équation du plan tangent à la surface (2) en ce point est :

$$\frac{xx'}{a} + \frac{yy'}{b} + \frac{zz'}{c} = \pm 1 \quad (5)$$

Démontrons que le plan (5) est parallèle au plan (3). Le point x' y' z' étant sur la droite (4), on a :

$$\frac{x'}{a \cos \alpha} = \frac{y'}{b \cos \beta} = \frac{z'}{c \cos \gamma}$$

Multiplions les deux membres de (5) par $\frac{a \cos \alpha}{x'}$ ou par l'une des quantités égales à celle-ci. Il vient :

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \pm \frac{a \cos \alpha}{x'}$$

ou $\pm \frac{b \cos \beta}{y'}$ ou $\pm \frac{c \cos \gamma}{z'}$

D. Corollaire. — Toutes les fois que a , b , c ne sont pas de mêmes signes, c'est-à-dire quand les surfaces auxi-

liaires sont des hyperboloïdes, il existe des efforts purement tangentiels.

En effet, si on considère un effort dirigé suivant une génératrice du cône asymptotique, cet effort perce la sur-

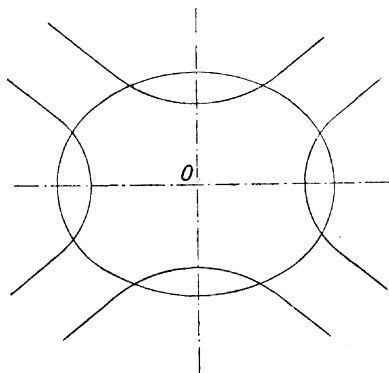


Fig. 8.

face auxiliaire à l'infini ; le plan tangent en ce point à la surface est en même temps tangent au cône et l'élément parallèle passant par O (fig. 8) est le plan lui-même qui

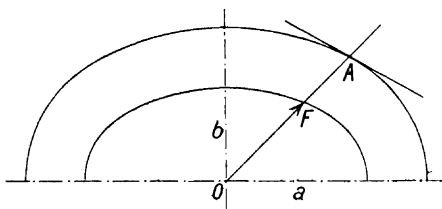


Fig. 9.

renferme donc la force. Dans ce cas, le cône asymptotique est le lieu des efforts purement tangentiels ou l'enveloppe des éléments auxquels sont appliqués des efforts purement tangentiels.

Réciproquement, quand a , b , c sont de mêmes signes, il

n'y a pas de forces purement tangentielles, car la surface auxiliaire étant fermée, une force quelconque F (fig. 9) ne sera jamais dans le plan parallèle passant par O .

E. Cas particuliers de l'ellipsoïde d'élasticité.

I. Soient $a = b = c$, l'ellipsoïde devient une sphère. Si, de plus, a, b, c sont de mêmes signes, la surface auxiliaire devient aussi une sphère et toutes les forces sont principales, car une force quelconque est perpendiculaire au plan tangent en $x' y' z'$, donc au plan parallèle passant par O . Si a, b, c ne sont pas de mêmes signes, les surfaces auxiliaires sont deux hyperboloïdes dont le cône asymptote est incliné à 45° ; une force quelconque ne perce pas la surface; le cône reste le lieu des efforts tangentiels.

II. Si l'une des forces principales est nulle, l'ellipsoïde d'élasticité devient une ellipse; quant aux surfaces auxiliaires, on obtient une ellipse réelle ou imaginaire si a et b sont de mêmes signes; si a et b sont de signes contraires, on a deux hyperboles conjuguées.

III. Si deux forces principales sont nulles, l'ellipse se réduit à une droite; tous les efforts sont dirigés dans le même sens.



CHAPITRE II

DÉFORMATIONS

Faits d'expérience. — Contrairement à ce qui est supposé en mécanique rationnelle, les corps étudiés en *Résistance des Matériaux* ne sont pas des solides invariables ; ils sont susceptibles de se déformer sous l'influence des forces extérieures. En mécanique rationnelle, la distance de deux points d'un solide est considérée comme absolument invariable. Il n'existe pas dans la nature de solides répondant rigoureusement à cette condition. Tous les corps se déforment plus ou moins quand ils sont soumis à l'action de forces extérieures. Quand les forces extérieures cessent d'agir, si la modification constatée antérieurement persiste, on dit que le corps est formé d'une *matière plastique*. L'argile mouillée en est un exemple. Si l'effet disparaît avec la cause première, le corps revient exactement à sa forme primitive ; on dit que le corps est formé d'une *matière élastique* ; le caoutchouc est une de ces matières. Enfin, si la déformation, sans disparaître entièrement, se trouve atténuée dans une certaine mesure et si le corps s'est rapproché de sa figure primitive sans y revenir exactement, on dit que la matière est *semi-élastique*. C'est le cas de tous les matériaux de construction. Tout solide soumis à l'action de forces extérieures subit donc des déformations ; quand les forces extérieures cessent d'agir, le solide, s'il n'y a pas eu rupture, tend à reprendre plus

ou moins sa forme primitive. En général il n'y parvient pas, et, dans toute déformation, il y a lieu de considérer deux états différents, abstraction faite de la rupture : la *déformation élastique* qui disparaît quand les forces extérieures cessent d'agir, et la *déformation plastique ou permanente* qui persiste quand l'action des forces extérieures a été supprimée. Il résulte de l'expérience que, pour la plupart des matériaux de construction, et, dans certaines limites, la déformation peut être considérée comme presque entièrement élastique ; mais au delà de ces limites la déformation permanente devient de plus en plus considérable.

On peut diviser les déformations en deux classes :

1° Les *déformations normales* ou *dilatations*, qui sont des extensions $+ \delta$ ou des compressions $- \delta$ et qui sont corrélatives des tensions normales $\pm t$;

2° Les *glissements* γ qui sont le résultat d'efforts tangentiels θ .

Les formules de la résistance des matériaux, à part celles qui sont relatives aux plaques et aux enveloppes, se rapportent uniquement à des pièces prismatiques.

Pièces prismatiques. — On appelle *pièce prismatique* ou *prisme* le volume engendré par un contour fermé plan, constant ou variable, assujéti à se déplacer d'un mouvement de translation sans rotation, et dont le centre de gravité se meut le long d'une ligne ou *axe longitudinal* ; le contour fermé se nomme *section transversale*. L'axe longitudinal est supposé continu, sans point anguleux ni point multiple. S'il y a variation de la section transversale pendant le mouvement de son centre de gravité sur l'axe longitudinal, cette variation est continue et progressive de façon que deux sections voisines puissent être considérées comme identiques et formant un *prisme droit élémentaire*.

Une *fibre élémentaire* est le volume engendré par un élément de surface ds de la section transversale pendant son mouvement. La *fibre moyenne* est celle qui est formée par l'élément de surface confondu avec le centre de gravité quand celui-ci se déplace; en d'autres termes, c'est la fibre élémentaire qui coïncide avec l'axe longitudinal.

ÉTUDE DES DÉFORMATIONS NORMALES OU DILATATIONS

Définitions. — Considérons (fig. 10) un prisme circulaire droit AB, de longueur l et de diamètre d . Soumettons ce prisme à l'action de deux efforts extérieurs P identiques, dirigés en sens contraires et agissant dans l'axe. Cette hypothèse revient à supposer un prisme encastré à sa base et soumis, dans la direction de son axe, à son extrémité libre, à l'action d'un effort P, le second effort P étant la réaction d'encastrement. Nous admettons que les efforts P ne sont pas suffisamment élevés pour provoquer la rupture. Sous l'action de ces efforts, nous constatons :

1° Que l'axe de la pièce s'allonge et devient l' ; l'allongement a donc pour expression $\Delta = l' - l$.

2° Que le diamètre d diminue et devient d' ; la contraction latérale, beaucoup moindre que l'allongement longitudinal, a donc pour valeur $\Delta' = d - d'$.

On dit qu'il y a *extension* de la pièce et *contraction* de sa section et les efforts P sont considérés comme positifs.

Si, au lieu de faire agir les efforts P en sens contraires vers l'extérieur, on les applique en sens contraires vers l'intérieur, on constate :

1° Un raccourcissement de la longueur l qui devient l' ; le raccourcissement a pour expression $\Delta = l - l'$;

2° Une augmentation du diamètre d , qui devient d' ; cette augmentation a pour valeur $\Delta' = d' - d$.

On dit qu'il y a *compression* de la pièce et *gonflement* de la section et les efforts P sont considérés comme négatifs.

Sous l'action des efforts extérieurs P , positifs ou négatifs, il naît, dans le prisme, des efforts intérieurs, actions moléculaires ou tensions élastiques (fig. 11). Ces ten-

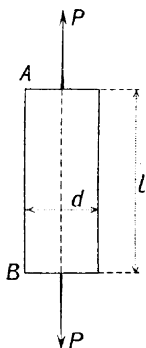


Fig. 10.

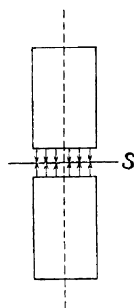


Fig. 11.

sions, pour une section transversale ou normale sur l'axe du prisme, sont perpendiculaires à la section. Il existe donc deux espèces de *tensions normales* :

- 1° Les tensions normales qui sont des *tractions* $+t$;
- 2° Les tensions normales qui sont des *compressions* $-t$.

Elles s'expriment les unes et les autres par unité de surface ; en sorte que la tension totale sur un élément de surface ds de la section aura pour expression $\pm t ds$ si on admet une égale répartition des tensions sur l'élément de surface. Dans la même hypothèse, appliquée à la section totale S , c'est-à-dire si la tension spécifique t est supposée la même dans toute l'étendue de la section, elle aura pour valeur :

$$t = \frac{P}{S} \quad (1)$$

Il convient d'observer que la grandeur de la section S qui doit intervenir dans la formule (1) est celle au moment où le prisme est soumis à l'action des efforts extérieurs et non quand le prisme est libre. Observons aussi que la répartition des actions moléculaires t dans la section considérée S n'est pas toujours aussi simple qu'il vient d'être supposé. Ainsi, si on soumet à l'essai une éprouvette de caoutchouc ayant la forme de la figure 12, on constate que l'allongement élastique est beaucoup plus considérable vers les arêtes qu'au milieu ; les droites primitivement parallèles aa et bb se transforment pendant la traction en deux courbes opposant leur convexité ; Föppl, professeur à l'Université technique de Munich, dans un essai semblable, a observé un allongement quatre fois plus considérable vers les arêtes que celui constaté au milieu de l'éprouvette. Il résulte de là que les tensions, qui sont corrélatives des allongements, sont beaucoup plus considérables vers les bords de la section que dans les éléments centraux. Néanmoins, dans les limites où nous étudions les actions moléculaires, c'est-à-dire pour des valeurs très faibles des tensions normales, nous pouvons admettre, avec suffisamment d'exactitude, une répartition uniforme sur les sections.

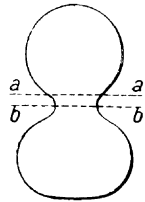


Fig. 12.

Dilatation. — L'allongement ou le raccourcissement absolu Δ est relatif à la longueur totale l du prisme ; plus cette longueur est grande, plus l'allongement ou le raccourcissement sont considérables. On appelle *allongement spécifique* ou *dilatation*, et on désigne par δ , le rapport de l'allongement ou du raccourcissement total à la longueur primitive. On a :

$$\delta = \frac{\Delta}{l} \quad (2)$$

C'est, en somme, l'allongement ou le raccourcissement par unité de longueur. La dilatation est positive ou négative suivant qu'il s'agit d'extension ou de compression. Observons que δ , quotient de deux longueurs, est un nombre.

Coefficient de dilatation. — On admet généralement qu'il existe entre les dilatations δ et les tensions normales t , dans certaines limites d'efforts, une loi de proportionnalité que l'on exprime par la relation :

$$\delta = \alpha t \quad (3)$$

α s'appelle *coefficient de dilatation*. On tire de la formule (3) :

$$\alpha = \frac{\delta}{t} \quad (3')$$

δ étant un nombre, α est de mêmes dimensions que t ; si t est exprimé, par exemple, en kilogrammes par centimètre carré, α s'exprimera par les mêmes unités. Le coefficient de dilatation est défini comme suit. Combinons la formule (3') avec (1) et (2) ; il vient :

$$\alpha = \frac{\frac{\Delta}{l}}{\frac{P}{S}} = \frac{\Delta}{l} \times \frac{S}{P} \quad (4)$$

Si, dans cette formule, on fait $l = 1$, $S = 1$, $P = 1$, on a $\alpha = \Delta$; donc :

Le coefficient de dilatation α , relatif à une matière donnée, est la quantité dont s'allonge un prisme droit, de cette matière, ayant une unité de longueur, une section égale à l'unité de surface, quand il est soumis, dans la direction de son axe, à l'action d'une force égale à l'unité de force.

La formule (4) peut s'écrire :

$$\Delta = \alpha l$$

L'allongement total d'un prisme droit de longueur l , de section S , soumis dans son axe à l'action d'un effort P , tel que $t = \frac{P}{S}$, est égal au produit du coefficient de dilatation par la longueur l , par la tension spécifique t .

Il existe un coefficient de dilatation à l'extension et un coefficient de dilatation à la compression.

L'inverse $\frac{1}{\alpha}$ du coefficient de dilatation est souvent appelé *module d'élasticité longitudinale* et désigné par la lettre E ; E' est le module d'élasticité relatif à la compression. Nous préférons, avec Bach, professeur à l'Université technique supérieure de Stuttgart, conserver à α sa véritable signification, qui est d'être un coefficient de proportionnalité ou un nombre empirique qui rattache l'allongement à la tension; on exprime ainsi la loi de proportionnalité d'une manière qui s'accorde avec les propriétés réelles de la matière; de plus α , qui est proportionnel à la déformation dont il est une mesure, rappelle la notion de coefficient de dilatation calorifique utilisée en physique, lequel dépend de la température, α étant variable aussi, comme on aura l'occasion de voir, dans certaines limites de charge, pour toutes les matières.

La loi $\delta = \alpha t$ s'appelle *loi de Hooke*¹; elle n'est vérifiée exactement, pour aucune matière. Hopkinson, en 1822, a proposé la formule parabolique

$$\delta = at + bt^2$$

compliquée et peu en rapport avec les faits; Lang, en 1897, a donné la relation :

$$E = E_0 - ct$$

c étant un facteur numérique égal à 200 pour certains

¹ Du nom de ce géomètre anglais qui l'a énoncée le premier vers 1670 dans la forme suivante :

« Ut tensio, sic vis. »

matériaux et qui s'annule pour les corps obéissant à la loi de Hooke. Enfin Schüle, élève de Bach, en coordonnant les nombreux résultats d'essais effectués par cet expérimentateur, a établi, en 1896, la formule

$$\delta = \alpha l^m$$

qui paraît complètement d'accord avec l'expérience ; m a été étudié par la théorie des moindres carrés pour la plupart des matériaux. Nous aurons l'occasion de discuter la valeur de ces formules.

Limites de proportionnalité. Limite d'écoulement. Charge de rupture. Travail élastique. Etude d'une éprou-

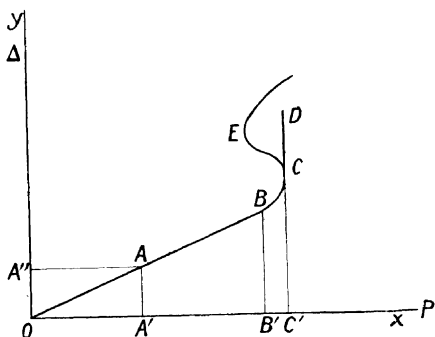


Fig. 13.

vette en fer forgé. — La loi de Hooke $\delta = \alpha l$, qui n'est mathématiquement vraie pour aucune matière, se rapproche cependant de la réalité en ce qui concerne le fer forgé et l'acier ; mais, dès que l'effort P atteint une certaine valeur, cette loi n'est plus exacte pour aucun corps ; on dit que la *limite de proportionnalité* est atteinte.

La loi de Hooke s'appliquant très approximativement au fer forgé, c'est un prisme de cette matière que nous

allons soumettre à des effets de traction. Traçons (fig. 13) deux axes orthogonaux OX et OY ; sur l'axe des X nous portons les efforts extérieurs P et sur l'axe des Y les allongements Δ correspondants. Nous obtenons une courbe $OABCD$. Pour un point quelconque on a $OA' = P$, $OA'' = \Delta$. La figure montre que depuis l'origine O , où

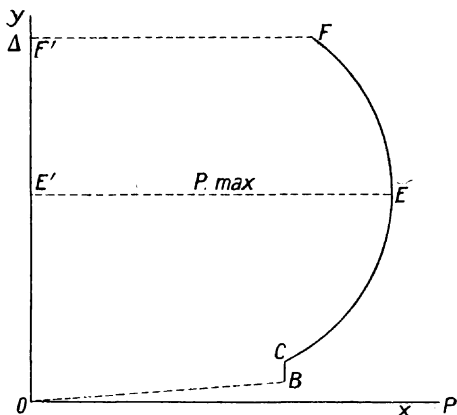


Fig. 11.

$P=0$, jusqu'à un certain point B , où $P=OB'$, le diagramme est constitué très sensiblement par une droite; il y a donc, jusqu'en B , loi de proportionnalité entre δ et t et la matière obéit à la loi de Hooke. Dès que l'on dépasse la valeur $P=OB'$, la courbe s'infléchit vers l'axe des Y en fuyant tangentielllement à la droite OB . Les allongements suivent la loi BC jusqu'en un certain point C correspondant à la charge $P=OC'$; on voit que sur cette partie de la courbe les allongements croissent plus vite, quoique régulièrement, que les efforts. Au delà du point C , les allongements deviennent considérables pour de très petites augmentations de l'effort P ; le prisme s'étire longuement; on dit qu'il y a *écoulement de la matière*;

$P = OC'$ est la limite inférieure de l'écoulement. Pour certaines matières, notamment pour le fer tenace, l'allure de la courbe change brusquement au point C ; elle se rapproche tout à coup de l'axe des Y (CE) pour s'en écarter ensuite lentement, ce qui veut dire que l'écoulement de la matière se produit, quand on atteint l'effort $P = OC'$, pour des efforts inférieurs à cet effort. Plusieurs chutes semblables peuvent se produire au delà de la limite de proportionnalité.

S'il s'agit d'une compression, au lieu d'une extension, on trouve aussi une limite de proportionnalité et une

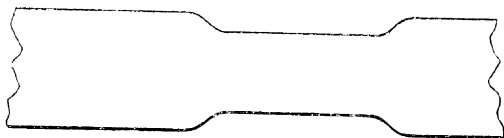


Fig. 15.

limite d'écrasement de la matière. Toutes les matières n'ont d'ailleurs pas une limite de proportionnalité soit à l'extension, soit à la compression. Au surplus, les limites de proportionnalité et d'écoulement ne sont pas toujours éloignées l'une de l'autre ; c'est le cas notamment pour l'acier.

Continuons maintenant à augmenter progressivement la charge P sur le prisme en fer forgé ; à un moment déterminé, la rupture se produira. Etudions auparavant l'allure des allongements. Portons à nouveau (fig. 14) les efforts P en abscisses et les allongements correspondants Δ en ordonnées. Nous obtenons une courbe $OBCEP'$. Les allongements sont ici beaucoup plus faibles que dans la première partie de l'essai. La courbe s'aplatit vers l'axe des Y ; elle monte lentement jusqu'à un certain point E, en présentant sa convexité vers l'axe des X. Dès que l'allongement $\Delta = OE'$ est atteint, le prisme commence à

s'amincir en un certain endroit où sa section diminue fortement (fig. 15); c'est le phénomène de *striction*. L'effort P nécessaire pour provoquer de nouveaux allongements au delà de la striction diminue. En prolongeant l'essai, il arrive un moment où il y a rupture, mais l'effort qui produit la rupture est moindre que celui qui correspond à la striction. On appelle *charge de rupture* l'effort $P = EE' = P_{\max}$ (fig. 14) ou effort maximum pendant l'essai, quoique la rupture se produise pour un effort FF' inférieur.

Le *coefficient de rupture* est la tension normale qui correspond à la charge de rupture. On a donc, en désignant ce coefficient par R :

$$R = \frac{P_{\max}}{S} .$$

Il conviendrait, pour être rigoureux, d'introduire dans cette formule la valeur de S au moment de la rupture ; cette valeur est plus faible qu'au début. Pour certaines matières, l'erreur peut être négligeable ; pour d'autres, elle peut acquérir une certaine valeur. Si, au lieu d'essayer l'éprouvette à l'extension, on l'avait soumise à compression, rupture se serait produite aussi à un moment donné ; le coefficient de rupture à la compression est

$$R' = \frac{P'_{\max}}{S} .$$

Il est souvent utile de déterminer le pourcentage d'allongement ou de raccourcissement, ainsi que la contraction ou le gonflement de la section, en fonction des dimensions primitives. Appelons l la longueur primitive, l_1 la longueur au moment de la rupture ; l'allongement absolu de rupture a pour expression $l_1 - l$; par unité de longueur primitive l , on a un allongement $\frac{l_1 - l}{l}$ et pour

cent de longueur primitive

$$100 \frac{l_1 - l}{l} .$$

La contraction spécifique en pour cent a également pour expression

$$100 \frac{S - S_1}{S}$$

S_1 étant la section de rupture.

Le *travail mécanique* développé pendant que l'éprouvette passe de la longueur l à la longueur l_1 est représenté par la surface OBCEFF'O (fig. 14). Le travail mécanique par unité cube de matière ou travail spécifique jusqu'à charge maximum EE' s'exprime par la formule

$$T = \frac{\text{aire OBCEE}'}{Sl} .$$

Loi générale des dilatations. — Quelle que soit la matière soumise à épreuve, on constate après lui avoir appliqué un effort extérieur plus ou moins considérable P, qu'elle ne revient pas, lors de la suppression de l'effort, à sa longueur primitive. Un prisme droit après avoir subi un *allongement total* Δ conserve un *allongement plastique ou permanent* Δ' ; la différence $\Delta - \Delta' = \Delta''$ de ces deux allongements caractérise le degré d'élasticité de la matière et se nomme *allongement élastique*. Au lieu, comme dans l'exemple précédent, de porter les efforts extérieurs P en abscisses, on pourrait porter les tensions t . On peut dès lors écrire les trois fonctions générales :

$$\begin{aligned} \Delta &= \varphi_1(t) \\ \Delta' &= \psi_1(t) \\ \Delta'' &= f_1(t) \end{aligned}$$

La première de ces fonctions représente la loi des allongements totaux, la seconde des allongements per-

manents et la troisième des allongements élastiques. En comparant à la longueur primitive du prisme on peut tirer la loi des allongements élastiques spécifiques, c'est-à-dire des dilatations δ en fonction des tensions t et on a :

$$\delta = f(t)$$

La loi de Hooke, $\delta = \alpha t$, exprime que la courbe des dilatations, pour toutes les matières, est une droite, α en dessous de la limite de proportionnalité ou d'élasticité étant indépendant de δ et de t , en d'autres termes α étant une quantité constante.

Cette loi n'est vraie que pour un très petit nombre de matières, notamment pour le fer forgé et pour l'acier ; et, même dans ce cas, il n'est pas rare que depuis $t = 0$, la loi affecte la forme d'une courbe et non d'une droite. Différentions la fonction $\delta = f(t)$ par rapport à t ; il vient :

$$d\delta = f'(t) dt$$

ou
$$\frac{d\delta}{dt} = f'(t).$$

On pourra définir ici le coefficient de dilatation comme étant la dérivée de la dilatation par rapport à la tension ; cette définition est susceptible d'une interprétation géométrique puisque $f'(t)$ est la direction de la tangente à la courbe des dilatations au point considéré δ, t . Mais on pourrait aussi écrire :

$$\frac{\delta}{t} = \frac{f(t)}{t}$$

formule qui conduit à une autre définition du coefficient de dilatation. Géométriquement c'est alors la direction de la corde joignant le point δ, t à l'origine. Cette deuxième définition, qui concorde plus exactement avec celle qui se déduit de la loi de Hooke, diffère notablement de la première, sauf pour de petites valeurs de δ et de t .

La loi de Schüle

$$\delta = \alpha t^m,$$

qui résume les essais de Bach, paraît convenir pour le fer, l'acier, la fonte, le granit, les ciments, les mortiers de ciments, le béton, le cuivre, le laiton, le bronze. Pour $m = 1$, $\delta = \alpha t$. La loi de Hooke n'est donc qu'un cas particulier de la loi générale $\delta = \alpha t^m$. Pour $m > 1$ les dilatations croissent plus rapidement que les tensions, ce qui est le cas pour la plupart des matériaux, pour $m < 1$, elles croissent plus lentement que les tensions, ce qui est le cas du cuir; dans l'un et l'autre cas, le *coefficient de dilatation* α varie avec les tensions développées. Plus m diffère de l'unité, plus la courbe des dilatations δ s'incurve, tournant sa concavité vers l'axe des δ si $m > 1$ et vers l'axe des t si $m < 1$. Le coefficient de dilatation peut se définir en disant que c'est la dilatation correspondant à l'unité de tension.

Malheureusement la formule $\delta = \alpha t^m$ présente un inconvénient au point de vue théorique; c'est qu'il est difficile d'assigner une dimension à la quantité α . De $\delta = \alpha t^m$, pour $m = 1$, on tire $\alpha = \frac{\delta}{t} = \frac{1 \text{ nombre}}{1 \text{ force}}$; et si on tient compte de cette dimension, l'équation $\delta = \alpha t^m$ cesse d'être homogène dès que m diffère de l'unité.

Différentions :

$$d\delta = \alpha m t^{m-1} dt$$

d'où

$$\frac{d\delta}{dt} = m\alpha t^{m-1}$$

C'est la direction de la tangente sur l'axe des t à la courbe des dilatations δ . Pour $m > 1$ (la fonte, par exemple) et $t = 0$ on a

$$\frac{d\delta}{dt} = 0$$

la courbe des dilatations a comme tangente à l'origine

l'axe des t , quels que soient α et m . Pour $m < 1$ (le cas notamment) et $t = 0$.

$$\frac{d\delta}{dt} = m \frac{\alpha}{t^{1-m}} = \infty$$

l'axe des δ est tangent à l'origine à la courbe des dilatations quels que soient α et m . Ces déductions ne sont pas toujours conformes aux résultats, car les courbes élastiques ne coupent pas toujours l'axe des abscisses à angle droit.

Observons d'ailleurs qu'il est prudent de ne pas attribuer une portée théorique à une fonction déduite empiriquement; on serait souvent amené, comme le fait remarquer M. Eric Gérard, directeur de l'Institut Montefiore de Liège, à des extrapolations erronées.

Au point de vue purement physique la formule de Lang

$$E = E_0 - ct$$

paraît moins sujette à critique; le module d'élasticité E , inverse du coefficient de dilatation α , a le sens qui lui est donné par la formule

$$\frac{t}{\delta} = \frac{t}{f(t)} \quad \text{d'où} \quad \delta = \frac{t}{E_0 - ct}$$

ou par cette autre

$$\frac{dt}{d\delta} = \frac{1}{f'(t)} \quad \text{d'où} \quad \delta = \frac{1}{c} \log \frac{E}{E_0 - ct}$$

Dans ces formules c est un facteur numérique qui s'annule pour les corps obéissant à la loi de Hooke.

La formule de Schüle, déduite d'innombrables essais effectués sur les matériaux les plus divers, avec toute la précision désirable, paraît résumer les propriétés élastiques de la matière et nous nous en servons chaque fois

que, voulant généraliser, la théorie nous autorisera son emploi.

Nous allons exposer longuement la façon de procéder à la détermination des coefficients α et m en empruntant à Bach une partie des développements qu'il a consacrés à ces recherches.

Détermination expérimentale des coefficients α et m de la formule $\delta = \alpha l^m$.

FORGE

Echantillon n° 1.

Essai à la pression. — Eprouvette cylindrique en fonte grise tenace telle que celle qui est utilisée dans la construction des machines.

Dimensions primitives :

Diamètre du cylindre	$d = 8$ cm.
Section	$S = \frac{\pi d^2}{4} = 50,27$ cm ²
Longueur totale	62,15 cm.
Longueur réelle soumise à essai	$l = 50$ cm.

L'éprouvette n'a pas encore été soumise à essai. Pendant une minute et demie on lui fait subir une pression $P = 10\ 000$ kgs. immédiatement ramenée à $P = 0$ puis à $P = 10\ 000$ et ainsi de suite.

Tableau des essais.

TEMPÉRATURE CONSTANTE 16.3° C					
Charges en kg.		Longueurs du prisme mesurées après chaque essai en cm.	Raccourcissements.		
Totales P	Spécifiques $t = \frac{P}{S}$		Totaux. Δ	Permanents Δ'	Élastiques $\Delta - \Delta'$
0	0	l	—	—	—
10 000	198.9	$l - \frac{13,86}{1\ 200}$	$\frac{13,86}{1\ 200}$	—	—
0	0	$l - \frac{0,75}{1\ 200}$	—	$\frac{0,75}{1\ 200}$	$\frac{13,11}{1\ 200}$
10 000	198,9	$l - \frac{13,94}{1\ 200}$	$\frac{13,94}{1\ 200}$	—	—
0	0	$l - \frac{0,89}{1\ 200}$	—	$\frac{0,89}{1\ 200}$	$\frac{13,05}{1\ 200}$
10 000	198.9	$l - \frac{14}{1\ 200}$	$\frac{14}{1\ 200}$	—	—
0	0	$l - \frac{1}{1\ 200}$	—	$\frac{1}{1\ 200}$	$\frac{13}{1\ 200}$
10 000	198,9	$l - \frac{14,03}{1\ 200}$	$\frac{14,03}{1\ 200}$	—	—
0	0	$l - \frac{1,04}{1\ 200}$	—	$\frac{1,04}{1\ 200}$	$\frac{12,99}{1\ 200}$
10 000	198.9	$l - \frac{14,03}{1\ 200}$	$\frac{14,03}{1\ 200}$	—	—
0	0	$l - \frac{1,04}{1\ 200}$	—	$\frac{1,04}{1\ 200}$	$\frac{12,99}{1\ 200}$

Il résulte du tableau précédent que le prisme, de longueur primitive $l = 50$ cm. sans charge, soumis à une première pression $P = 10\ 000$ kgs., se raccourcit de $\Delta = \frac{13,86}{1200}$ cm. On supprime la charge ; le cylindre conserve un raccourcissement permanent $\Delta' = \frac{0,75}{1200}$ cm. Le raccourcissement élastique a donc pour valeur, après ce

premier essai, $\Delta'' = \frac{13,86 - 0,75}{1200} = \frac{13,11}{1200}$ cm. Réinstallons la charge $P = 10\ 000$ kgs. ; nous constatons un raccourcissement total de $\frac{31,94}{1200}$ cm., un raccourcissement permanent, après nouvelle suppression de la charge, de $\frac{0,89}{1200}$ cm. et un raccourcissement élastique de $\frac{13,94 - 0,89}{1200} = \frac{13,05}{1200}$ cm. Le raccourcissement total a donc varié, d'une expérience à la suivante, de $\frac{13,94 - 13,86}{1200} = \frac{0,08}{1200}$ cm., le raccourcissement permanent de $\frac{0,89 - 0,75}{1200} = \frac{1,04}{1200}$ cm et le raccourcissement élastique de $\frac{13,11 - 13,05}{1200} = \frac{0,06}{1200}$ cm.

L'application nouvelle de la charge $P = 10\ 000$ kgs., suivie de sa suppression, détermine une variation des raccourcissements. Les valeurs finales sont :

$$\Delta = \frac{14,03}{1200} \text{ cm. ; } \quad \Delta' = \frac{1,04}{1200} \text{ cm. ; } \quad \Delta - \Delta' = \frac{12,99}{1200} \text{ cm.}$$

Soumettons maintenant le même échantillon à une charge $P = 20\ 000$ kgs. et supprimons cette charge. $P = 20\ 000$ correspond à une tension

$$\frac{P}{S} = \frac{20\ 000}{50,27} = 397,9 \text{ kgs. par cm}^2.$$

On trouve, après le premier essai

$$\Delta = \frac{30,42}{1200} \text{ cm. ; } \quad \Delta' = \frac{3,06}{1200} \text{ cm. ; } \quad \Delta - \Delta' = \frac{27,36}{1200} \text{ cm.}$$

Au bout de la douzième épreuve

$$\Delta = \frac{31,20}{1200} \text{ cm. ; } \quad \Delta' = \frac{3,95}{1200} \text{ cm. ; } \quad \Delta - \Delta' = \frac{27,25}{1200} \text{ cm.}$$

La température ambiante pendant ces douze essais

a varié de 16°3 à 16°4 C, soit de $\frac{1}{10}$ de degré centigrade.

Avec $P = 30\ 000$ kgs., soit $t = \frac{30000}{50,27} = 596,8$ kgs. par centimètre carré, puis $P = 0$, on trouve :

$$\Delta = \frac{48,66}{1200} \text{ cm.}; \quad \Delta' = \frac{6,18}{1200} \text{ cm.}; \quad \Delta - \Delta' = \frac{42,48}{1200} \text{ cm.}$$

et après douze essais :

$$\Delta = \frac{49,50}{1200} \text{ cm.}; \quad \Delta' = \frac{7,49}{1200} \text{ cm.}; \quad \Delta - \Delta' = \frac{42,01}{1200} \text{ cm.}$$

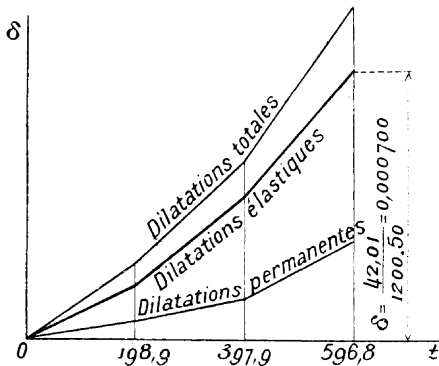


Fig. 16.

La température pendant ces douze derniers essais est restée invariable à 16° 4 C.

Les raccourcissements permanents finaux sont donc :

Pour $t = 198,9$ kg. cm ²	$\frac{1,04}{14,03}$	100 = 7,40	% du raccourciss ^l . total.	
— $t = 397,9$	— $\frac{3,95}{31,20}$	100 = 12,7		—
— $t = 596,8$	— $\frac{7,49}{49,50}$	100 = 15,1		—

Les raccourcissements permanents commencent donc à se manifester, pour cet échantillon, pour de très faibles charges ; dès que la charge augmente, le raccourcisse-

ment permanent augmente aussi. Les raccourcissements élastiques sont d'autant plus faibles que la charge est plus élevée.

Représentons les résultats précédents par un diagramme. Choisissons deux axes orthogonaux, portons en abscisses les tensions t et en ordonnées les dilatations δ (fig. 16). Il est visible à l'allure de la courbe des dilatations élastiques que les dilatations croissent plus vite que les tensions et que par conséquent l'échantillon examiné *n'obéit pas à la loi de Hooke*. C'est d'ailleurs ce que montre le tableau suivant.

TENSIONS SPÉCIFIQUES t kg cm ²	RACCOURCISSEMENTS SUR 50 CM.					
	Totaux.		Permanents.		Élastiques.	
		Diffé- rences.		Diffé- rences.		Diffé- rences.
0	0		0		0	
0 et 198,9 . . .	14,03	14,03	1,04	1,04	12,99	12,99
	1 200	1 200	1 200	1 200	1 200	1 200
0 et 387,9 . . .	31,20	17,17	3,95	2,91	27,25	14,26
	1 200	1 200	1 200	1 200	1 200	1 200
0 et 596,8 . . .	49,50	18,30	7,49	3,54	42,01	14,76
	1 200	1 200	1 200	1 200	1 200	1 200

Calculons maintenant le coefficient de dilatation en nous servant de la relation

$$\alpha = \frac{\delta}{t} = \frac{\frac{\Delta}{l}}{\frac{P}{S}}$$

pour les trois tensions spécifiques du tableau précédent. On trouve, pour $t=0$ et $t=198,9$, soit entre $P=0$ et

P = 10 000 kgs

$$\alpha = \frac{12,99}{1200 \cdot 50} \frac{1}{\frac{10\,000}{50,27}} = \frac{1}{918\,800} .$$

Pour P = 0 et P = 20 000,

$$\alpha = \frac{27,25 - 12,99}{1200 \cdot 50} \frac{1}{\frac{(20\,000 - 10\,000)}{50,27}} = \frac{1}{837\,000}$$

Pour P = 0 et P = 30 000

$$\alpha = \frac{42,01 - 27,25}{1200 \cdot 50} \frac{1}{\frac{(30\,000 - 20\,000)}{50,27}} = \frac{1}{808\,600} .$$

La relation $\delta = \alpha t$ n'est pas admissible pour la fonte, cette matière n'obéissant pas à la loi de Hooke. Adoptons la formule $\delta = \alpha t^m$ (1) avec, pour l'échantillon examiné, $\alpha = \frac{1}{1\,320\,000}$ et $m = 1,0685$, chiffres tirés de l'ensemble des résultats par la théorie des moindres carrés. On arrive à la formule :

$$\delta = \frac{1}{1\,320\,000} t^{1,0685} \tag{2}$$

d'où le tableau :

TENSIONS SPÉCIFIQUES kg/cm ²	DILATATIONS ÉLASTIQUES calculées sur 50 cm.	
	Observées.	Calculées par la formule (1).
0 et 198,9	$\frac{12,99}{1\,200}$	$\frac{12,99}{1\,200}$
0 et 397,9	$\frac{27,25}{1\,200}$	$\frac{27,25}{1\,200}$
0 et 596,8	$\frac{42,01}{1\,200}$	$\frac{42,03}{1\,200}$

La formule (2) donne donc une approximation largement suffisante.

Nous avons vu que le coefficient de dilatation α , pour une tension donnée, n'est autre chose que la tangente au point de la courbe des dilatations correspondant à cette

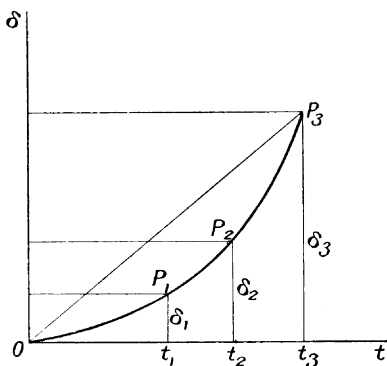


Fig. 17.

tension. Ainsi, dans la figure 17, pour les tensions t_1 et t_2 , auxquelles correspondent les dilatations δ_1 et δ_2 , on a

$$\alpha = \frac{\delta_2 - \delta_1}{t_2 - t_1}$$

Si les tensions t_2 et t_1 sont choisies suffisamment rapprochées, on pourra écrire, à la limite :

$$\alpha = \frac{d\delta}{dt}$$

On n'obtiendrait aucune exactitude si on rapportait le coefficient α à l'origine des essais. Ainsi, pour la tension t_3 correspondant à $P = 30\,000$ on aurait

$$\alpha = \frac{\delta_3}{t_3} = \frac{42.01}{1200.50} \frac{1}{596.8} = \frac{1}{852\,400}$$

La courbe des dilatations se détache déjà de l'axe des

t même pour des tensions très faibles ; l'échantillon considéré n'est donc même pas complètement élastique pour des tensions très petites.

Il est de règle, dans les constructions, de ne pas permettre aux déformations permanentes de dépasser une certaine limite. On choisit donc, sur la courbe des dilatations permanentes, un certain point auquel correspond une dilatation permanente suffisamment faible pour qu'elle puisse être considérée comme négligeable. Cette dilatation correspond pratiquement à la limite d'élasticité de la matière.

Echantillon n° 2.

Essai à la pression. — Avait déjà été préalablement essayé à la pression. Aussi les dilatations permanentes sont-elles ici plus faibles que dans l'échantillon n° 1. On essaye jusque $t = 998$ kgs/cm².

Les dilatations élastiques croissent plus vite que les tensions. Par la théorie des moindres carrés on arrive à

$$\delta = \frac{1}{1\ 331\ 700} t^{1.0663} \quad (3)$$

Echantillon n° 3.

Essai à la traction (jusque $t = 409$ kgs/cm²).

On arrive à la formule

$$\delta = \frac{1}{1\ 338\ 000} t^{1.083} \quad (4)$$

Essai à la pression (jusque $t = 511$ kg/cm²).

On est amené ici à de grandes déformations permanentes, ce qui se conçoit puisque l'échantillon avait été préalablement essayé à la traction. On arrive à :

$$\delta = \frac{1}{1\ 043\ 000} t^{1.035} \quad (5)$$

Il résulte de ces deux séries d'essais que le coefficient de dilatation α à la traction ou $\frac{1}{1\ 338\ 000}$ est notablement plus petit que le coefficient de dilatation α à la compression $\frac{1}{1\ 043\ 000}$.

Si on fait

$$\frac{1}{1\ 338\ 000} t^{1,083} = \frac{1}{1\ 043\ 000} t^{1,035}$$

On trouve

$$t = 179,4 \text{ kgs/cm}^2$$

tension au delà de laquelle les dilatations à la traction deviennent supérieures aux dilatations par compression.

Bach trouve d'ailleurs pour la plupart des échantillons de fonte que l'écart entre les courbes des dilatations par traction et compression est d'autant plus important que ces échantillons ont été soumis antérieurement à plus d'efforts.

Essai à la pression (jusque $t = 1\ 431 \text{ kg/cm}^2$).

Essais du même échantillon avec charges plus élevées :

$$\delta = \frac{1}{1\ 217\ 000} t^{1,052} \quad (6)$$

Si on compare les relations (5) et (6) on s'aperçoit que le coefficient de dilatation à la compression α diminue de $\frac{1}{1\ 043\ 000}$ à $\frac{1}{1\ 217\ 000}$, tandis que l'exposant m croît de 1,035 à 1,052.

Echantillon n° 4.

Essai à la traction (jusque $t = 409 \text{ kgs cm}^2$).

Eprouvette déjà essayée à la compression

$$\delta = \frac{1}{1\ 150\ 000} t^{1,1} \quad (7)$$

Essai à la compression (jusque $t = 1\,431$ kgs cm²).

$$\delta = \frac{1}{1\,124\,000} t^{1.018} \quad (8)$$

Résumé.

Traction. Eprouvette neuve :

$$\delta = \frac{1}{1\,338\,000} t^{1.083} \quad (4)$$

Eprouvette déjà essayée à la compression :

$$\delta = \frac{1}{1\,150\,000} t^{1.1} \quad (7)$$

Pression.

Eprouvette neuve :

$$\delta = \frac{1}{1\,320\,000} t^{1.0685} \quad (2)$$

Eprouvette non encore essayée à la pression :

$$\delta = \frac{1}{1\,043\,000} t^{1.035} \quad (5)$$

Eprouvette déjà essayée à une forte pression :

$$\delta = \frac{1}{1\,217\,000} t^{1.052} \quad (6)$$

$$\delta = \frac{1}{1\,124\,000} t^{1.048} \quad (8)$$

On a admis dans tout ce qui précède que les épreuves avaient même composition de matière sur toute leur longueur, donc même densité en chaque point, que la section S , la tension t et le coefficient α avaient une valeur identique tout le long de l'échantillon. Le coefficient α varie beaucoup avec la composition d'une fonte ; il est moindre pour une fonte dure que pour la fonte grise employée habituellement dans la construction des

machines. La croûte qui existe à la surface des pièces de fonte a également une influence sur le coefficient α .

Il n'y a pas lieu pour la fonte de se préoccuper de la contraction ou du gonflement latéraux qui sont très faibles pour cette matière.

FER FONDU

Echantillon n° 1.

Eprouvette neuve cylindrique $d = 2,007$ cm. ;
 $S = 3,16$ cm² ; $l = 15$ cm.

Tableau des essais.

TEMPÉRATURE VARIANT ENTRE 17,6 ET 17,8°C.				
Charges en kgs cm ²		Allongements sur 15 cm.		
Totales.	Tensions t .	Totaux.	Permanents.	Élastiques.
1000 et 3000	316,5 et 949,4	$\frac{4,61}{1000}$ cm.	$\frac{0,17}{1000}$ cm.	$\frac{4,44}{1000}$ cm.
		$\frac{9,21}{1000}$ cm.	$\frac{0,22}{1000}$ cm.	$\frac{8,99}{1000}$ cm.
1000 et 5000	316,5 et 1582,3	$\frac{11,20}{1000}$ cm.	$\frac{0,63}{1000}$ cm.	$\frac{11,27}{1000}$ cm.
		$\frac{11,20}{1000}$ cm.	$\frac{0,63}{1000}$ cm.	$\frac{11,27}{1000}$ cm.

On voit que les dilatations croissent plus vite que les tensions. En effet, pour la première charge de 2000 kilogrammes, la dilatation élastique est 4,44.

Pour la seconde charge de 2000 kilogrammes, la dilatation élastique est $8,99 - 4,44 = 4,55$.

Pour la troisième charge de 1000 kilogrammes, la dilatation élastique est $11,27 - 8,99 = 2,28$.

Figure 18, nous donnons le diagramme des dilatations, tracé depuis l'abscisse $t = 316,5$. La limite d'écoulement

fut atteinte pour $t = 2\ 168$ kgs/cm². L'éprouvette fut ensuite délestée et les essais recommencèrent :

Variations de la charge . . .	1 000 à 3 000	1 000 à 5 000	1 000 à 6 000 kg.
Dilatations élastiques . . .	4,50	9,01	11,28
Différences . . .	4,51	2,27	

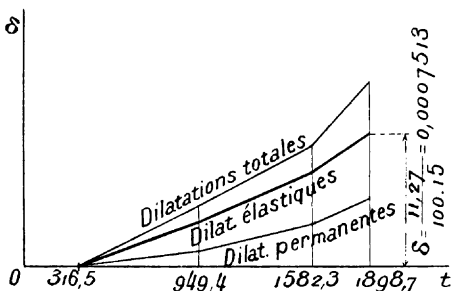


Fig. 18.

La dilatation élastique croit donc moins ici que la ten-

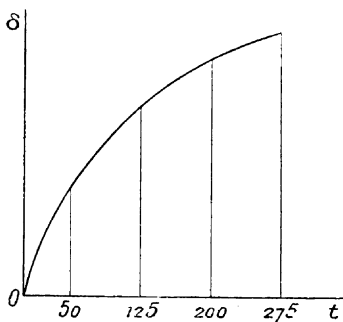


Fig. 19.

sion. Avec la dilatation 4,50 on trouve, pour le coefficient α ,

$$\alpha = \frac{4,5}{1\ 000 \cdot 15 (949,4 - 316,5)} = \frac{1}{2\ 109\ 700}$$

On a obtenu une seconde limite d'écoulement pour $t = 2\ 057\ \text{kg/cm}^2$; on peut aller avec cet écoulement jusque $P_{\text{max}} = 11\ 840\ \text{kgs.}$; la rupture se produit pour $P = 8\ 700$, soit $t = 2\ 753\ \text{kgs/cm}^2$. La figure 14 représente la courbe des allongements relatifs à ce second essai; l'allure de cette courbe n'est d'ailleurs pas indépendante de la vitesse avec laquelle croissent les charges.

La résistance à la traction fut

$$R = \frac{118\ 40}{3,16} = 3747\ \text{kgs/cm}^2.$$

Le diamètre moyen de la section de rupture était de 1,23 cm correspondant à une section $S_1 = \frac{\pi}{4} 1,23^2 = 1,19\ \text{cm}^2$. La diminution de section a donc été

$$100 \frac{3,16 - 1,19}{3,16} = 62,3\ \text{p. 100.}$$

A la rupture la longueur moyenne primitive de 20 centimètres est montée à 25,48 cm. La dilatation en pour cent à la rupture a donc été de

$$100 \frac{25,48 - 20,0}{20,0} = 27,4\ \text{p. 100.}$$

Letravail élastique est monté à 6,76 kg. par centimètre cube.

Echantillon n° 2.

Eprouvette neuve.

$$\alpha = \frac{1}{2\ 094\ 000}$$

$$P = 3\ 487\ \text{kgs/cm}^2.$$

Diminution de la section 62 p. 100; dilatation 29,5 p. 100.

Echantillon n° 3.

Limite supérieure	2 407 kgs cm ²
— inférieure	2 075 —
— R	3 667 —
Diminution de section	69,7 p. 100
Dilatation	33,8 —

Les allongements sont suffisamment proportionnels.

Acier fondu.

Les allongements sont suffisamment proportionnels jusque $t = 4\,459$ kgs/cm²; $\alpha = \frac{1}{2\,133\,000}$; R = 7 236 kgs/cm².
Diminution de section 43 p. 100. Dilatation 19 p. 100.

Cuivre.

Premier essai.

$$\delta = \frac{1}{2\,195\,000} t^{1.098}$$

Second essai.

$$\delta = \frac{1}{4\,865\,000} t^{1.074}$$

R = 2 232 kgs/cm².

Diminution de section 61,6 p. 100. Dilatation 46,1 p. 100.
Le cuivre ne possède pas de limite d'écoulement comme le fer et l'acier fondus.

Un second échantillon a donné

$$\delta = \frac{1}{2\,084\,000} t^{1.093}$$

Bronze.

$$\delta = \frac{1}{7\,338\,000} t^{1.028}$$

R = 1 974 kg/cm².

Diminution de section 10,5 p. 100. Dilatation 6 p. 100.
Le bronze n'a pas de limite d'écoulement.

Laiton.

$$\delta = \frac{1}{947\,000} \epsilon^{5.081}.$$

$$R = 1\,167 \text{ kg/cm}^2.$$

Diminution de section 17,4 p. 100 ; dilatation 13 p. 100.
Pas de limite d'écoulement.

Cuir.

Courroie ayant servi.

$$\delta = \frac{1}{415} \epsilon^{0.7}$$

A l'inverse de ce qui se passe pour toutes les matières étudiées jusqu'ici, les dilatations pour le cuir diminuent donc quand les tensions augmentent. La figure 19 représente la courbe des dilatations qui a une courbure inverse de la courbe relative à la fonte, au fer, au cuivre, au bronze, au laiton, etc. La durée des essais a une grande influence sur les propriétés élastiques du cuir. $R = 2,81 \text{ kgs/cm}^2$. La section diminue considérablement après les essais par suite des efforts intérieurs.

Ciment pur.

$$\delta = \frac{1}{250\,000} \epsilon^{1.09}$$

Mortiers de ciment.

$$1 \text{ de ciment, } 4 \frac{1}{2} \text{ sable du Donau} \quad \delta = \frac{1}{356\,000} \epsilon^{1.11}$$

$$1 \quad \text{—} \quad 3 \quad \text{—} \quad \delta = \frac{1}{315\,000} \epsilon^{1.15}$$

$$1 \quad \text{—} \quad 4 \frac{1}{2} \quad \text{—} \quad \delta = \frac{1}{230\,000} \epsilon^{1.17}$$

Il est intéressant de constater l'influence de la quantité de sable sur la valeur du coefficient α et de l'exposant m .

Béton.

1 de ciment.	{	$2\frac{1}{2}$	sable du Donau, 5 de gravier du Donau	$\delta = \frac{1}{298\ 000} t^{1.145}$
		$2\frac{1}{2}$	d'Egginz, 5 de pierre à chaux	$\delta = \frac{1}{457\ 000} t^{1.157}$
		5	du Donau, 6 de gravier du Donau	$\delta = \frac{1}{280\ 000} t^{1.137}$
		3	— — 6 de pierre à chaux	$\delta = \frac{1}{380\ 000} t^{1.161}$
		5	— — 10 de gravier du Donau	$\delta = \frac{1}{217\ 000} t^{1.157}$
		5	d'Egginz, 10 de pierre à chaux	$\delta = \frac{1}{367\ 000} t^{1.207}$

Granit.

La figure 20 est relative à des essais de traction ; la figure 21 à des essais de compression ; on voit figure 21

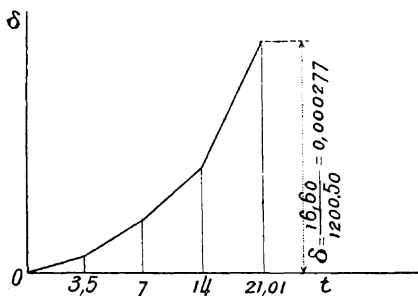


Fig. 20.

que, au commencement, les dilatations croissent plus vite que les tensions et vers la fin plus lentement que les tensions. La courbe 21 possède donc un point d'inflexion ; ce point est au-dessous de la limite d'élasticité qui, pour la pression, est d'environ 40 kg/cm². En-dessous de cette limite on peut écrire :

$$\text{Compression.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Echantillon 1.} \quad \delta = \frac{1}{250\,000} t^{1,132} \\ \text{Echantillon 2.} \quad \delta = \frac{1}{340\,000} t^{1,109} \end{array} \right.$$

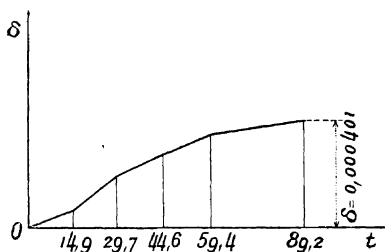


Fig. 21.

$$\text{Traction.} \quad \delta = \frac{1}{235\,000} t^{1,374}$$

Marbre.

La figure 22 donne les dilations élastiques à la trac-

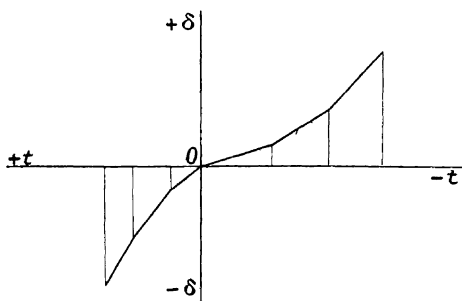


Fig. 22.

tion et à la compression. Valeur du coefficient de dilata-
tion α :

Pression.

t KG/CM ²	1 ^{er} ESSAI	4 ^e ESSAI	5 ^e ET 6 ^e ESSAIS
0,22 et 24,25	$\frac{1}{187\ 200}$	$\frac{1}{161\ 100}$	$\frac{1}{173\ 300}$
24,25 et 48,29	$\frac{1}{232\ 600}$	$\frac{1}{214\ 600}$	$\frac{1}{216\ 600}$
48,29 et 72,33	$\frac{1}{261\ 800}$	$\frac{1}{279\ 500}$	$\frac{1}{265\ 100}$

Traction.

t KG/CM ²	2 ^e ET 3 ^e ESSAIS	t KG, CM ²	2 ^e ET 3 ^e ESSAIS
0,19 et 3,61	$\frac{1}{139\ 600}$	7,21 et 10,82	$\frac{1}{79\ 300}$
3,61 et 7,21	$\frac{1}{99\ 500}$	10,82 et 14,42	$\frac{1}{69\ 200}$

Grès.

Bach montre encore que, pour cette matière, les dilata-tions croissent plus vite que les tensions.

Coefficient de contraction transversale. — Nous avons supposé, jusqu'à présent, qu'un prisme droit n'éprouvait qu'une dilatation simple, celle relative à l'axe du prisme. Nous savons qu'en même temps le prisme éprouve une contraction ou dilatation latérale que nous désignerons par δ' , δ' étant inférieure à δ ; nous poserons

$$\delta' = \frac{\delta}{m} .$$

Considérons un petit parallépipède dont la longueur des côtés est l'unité ; δ est sa dilatation longitudinale, de sorte que la longueur d'un côté, dans ce sens, après déformation, sera $1 + \delta$; chacun des deux autres côtés s'étant contracté de $\frac{\delta}{m}$, le volume du parallépipède, après déformation, sera $(1 + \delta)(1 - \frac{\delta}{m})^2$. On peut négliger les puissances de δ ; le volume est devenu $1 + \delta(1 - \frac{2}{m})$. Le volume primitif était 1 ; l'augmentation de volume, après déformation, est donc mesurée par $\delta(1 - \frac{2}{m})$.

La plupart des théoriciens assignent à m la valeur 2 pour les liquides et 4 pour les solides à la condition que les déformations restent très petites et inférieures à la limite de proportionnalité. C'est notamment le chiffre obtenu par Poisson en se basant sur diverses hypothèses.

Amagat a trouvé pour $\frac{1}{m}$ les valeurs suivantes :

Verre.	0,2451	Cuivre	0,3270
Cristal	0,2499	Laiton	0,3275
Acier.	0,2686	Plomb	0,4282

Clapeyron et Mercadier ont également effectué des recherches dans ce sens. Cagniard de Latour a trouvé que, pour le laiton, m avait exactement la valeur 4 ; Wertheim a trouvé 3 pour le verre, les métaux et même le caoutchouc. Nous adopterons, pour le fer, le chiffre $\frac{10}{3}$ que les expérimentateurs modernes ont assigné pour valeur du coefficient m .

Hypothèses relatives à l'étude des dilatations composées.
Isotropie. Principe de superposition. — *Isotropie.* — Nous avons admis, jusqu'à présent, que la matière était

homogène, c'est-à-dire de même structure en tous points. Nous admettrons aussi qu'elle est *isotrope* ou que sa résistance est la même dans toutes les directions, de sorte que le coefficient de dilatation α conserve la même valeur en un point donné d'un corps pour tous les axes qu'on peut mener par ce point; les propriétés élastiques sont donc indépendantes, dans ces hypothèses, de la position du point à l'intérieur du corps. Les corps *anisotropes* sont ceux dont les propriétés élastiques varient avec la direction passant par le point. Beaucoup de corps solides naturels sont voisins de l'isotropie; le verre, l'acier, la plupart des métaux sont dans ce cas. Au contraire, les bois, le fer laminé présentent une *hétérotropie* marquée. De plus, les propriétés élastiques des bois sont influencées par des circonstances accidentelles, les nœuds, la direction des fibres, etc.

Principe de superposition. — Une superposition d'états élastiques différents entraîne la superposition des déformations corrélatives de chacun des états élastiques considérés. On suppose implicitement que les déformations que produiraient isolément différentes forces élastiques sont assez faibles pour que l'action de chacune des forces ne soit pas sensiblement modifiée par les autres; les déformations se superposent donc simplement en se combinant suivant les lois de la mécanique rationnelle. Ce principe, comme l'observe Föppl, n'est pas susceptible d'une démonstration directe; il trouve sa justification dans le fait que les conséquences qu'on en a déduites se trouvent vérifiées par l'expérience. Il existe cependant des cas, comme le fait remarquer Bresse, où la loi de superposition ne peut être admise. Si une poutre repose sur trois appuis placés à des niveaux différents il se peut que chacune des charges qui lui sont appliquées ne parviendrait pas à la faire fléchir jusqu'à toucher l'appui inter-

médiaire, tandis que toutes les charges réunies peuvent produire ce résultat qui introduit une nouvelle réaction dépendant de la déformation. Dans ce cas l'application de la loi aurait conduit à ce résultat erroné que le troisième appui n'exerce aucune réaction.

Déformations composées. — Soit (fig. 23) un parallélépipède isotrope soumis, dans la direction de l'axe des X, à une traction P_x , P_x ; la dilatation dans ce sens,

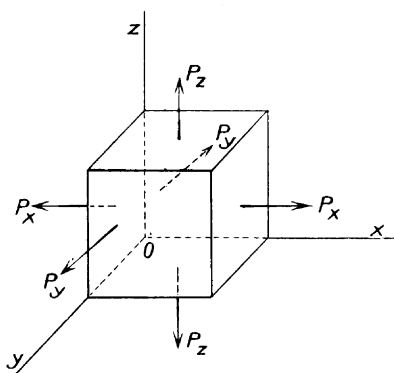


Fig. 23.

due à P_x , sera δ'_x et la tension correspondante $t_x = \frac{\delta'_x}{\alpha}$. Il se produit en même temps, dans le sens de l'axe des Y, une dilatation $\frac{\delta'_x}{m}$ et, dans le sens de l'axe des Z, une dilatation égale $\frac{\delta'_x}{m}$. Si le parallélépipède, au lieu d'être étiré dans le sens de l'axe des X par un effort P_x , P_x , était soumis dans le sens de l'axe des Y à deux efforts P_y , la tension dans ce sens serait $t_y = \frac{\delta'_y}{\alpha}$ correspondant à une dilatation δ'_y dans le sens de l'axe des Y, à une dilatation $\frac{\delta'_y}{m}$ dans le sens de l'axe des X et

de l'axe des Z. Enfin, si le parallépipède était soumis suivant l'axe des Z seulement à deux efforts P_z il s'en suivrait, dans ce sens, une dilatation δ'_z corrélative d'une tension $t_z = \frac{\delta'_z}{\alpha}$, et dans le sens des X et des Y, deux dilatations $\frac{\delta'_z}{m}$. Supposons que les efforts P_x , P_y , et P_z agissent simultanément et admettons le principe de superposition ; on pourra écrire :

$$\begin{array}{rcl} \text{Dans le sens de l'axe des X} & \delta_x = \delta'_x - \frac{\delta'_y + \delta'_z}{m} \\ \text{---} & \text{---} & \text{Y} & \delta_y = \delta'_y - \frac{\delta'_z + \delta'_x}{m} \\ \text{---} & \text{---} & \text{Z} & \delta_z = \delta'_z - \frac{\delta'_x + \delta'_y}{m} \end{array}$$

Si la matière obéit à la loi de Hooke, on a :

$$\delta'_x = \alpha t_x; \quad \delta'_y = \alpha t_y; \quad \delta'_z = \alpha t_z;$$

d'où :

$$\begin{array}{l} \delta_x = \alpha \left(t_x - \frac{t_y + t_z}{m} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{\delta_x}{\alpha} = t_x - \frac{t_y + t_z}{m} \\ \delta_y = \alpha \left(t_y - \frac{t_z + t_x}{m} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{\delta_y}{\alpha} = t_y - \frac{t_z + t_x}{m} \\ \delta_z = \alpha \left(t_z - \frac{t_x + t_y}{m} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{\delta_z}{\alpha} = t_z - \frac{t_x + t_y}{m} \end{array}$$

Si la matière considérée n'a pas de limite de proportionnalité, α n'est pas constant mais est une fonction de t ou δ . On a donc dans ce cas :

$$\delta_x = \alpha_1 t_x; \quad \delta_y = \alpha_2 t_y; \quad \delta_z = \alpha_3 t_z.$$

Il est de règle de considérer le coefficient m comme ayant la même valeur à l'extension et à la compression.

Dans les formules précédentes δ_x , δ_y , δ_z sont les dilatations composées ou résultantes des dilatations δ'_x ,

δ'_y et δ'_z ; t_x , t_y et t_z sont les tensions dues à δ'_x , δ'_y et δ'_z et non les tensions composées.

ÉTUDE DES DÉFORMATIONS TANGENTIELLES OU GLISSEMENTS

Définitions. — Considérons (fig. 24) un parallélépipède infiniment petit OABCEDEF et supposons-le soumis, dans sa facette supérieure, à une tension tangentielle θ par

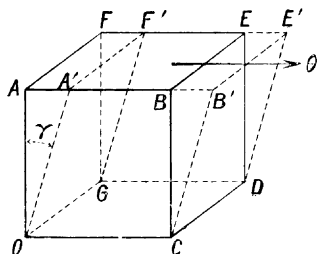


Fig. 24.

unité de surface. Le parallélépipède est supposé fixé par un axe OG; nous supposons aussi momentanément que la facette inférieure est fixe. La facette supérieure ABCE se déplace par glissement et vient se placer en A'B'CE'. L'angle droit AOC est devenu l'angle aigu A'OC. Le *glissement total* de la facette ABCE par rapport à l'axe OG est mesuré par l'angle $AOA' = BCB'$, que nous désignons par γ . On a :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{AA'}{OA} = \frac{BB'}{BC} .$$

Le déplacement étant supposé très faible on peut écrire :

$$\gamma = \frac{AA'}{OA} .$$

En même temps que le glissement s'est produit, la

facette ABEF s'est rapprochée de la facette OCDG ; mais ce rapprochement peut être considéré comme négligeable. On a, en effet, pour expression de ce rapprochement (fig. 25) :

$$AI = AO (1 - OH \cos \gamma).$$

Or quand γ est infiniment petit, $1 - \cos \gamma$ est un infiniment petit du second ordre.

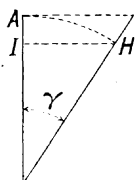


Fig. 25.

Théorème. — *Le glissement proprement dit γ vaut la somme des deux glissements qu'éprouvent les facettes perpendiculaires, par rapport à l'axe de glissement. Dans*

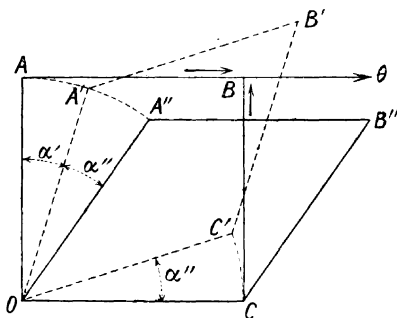


Fig. 26.

le parallépipède OABCE'F' les glissements sont identiques dans toutes les sections normales à l'axe fixe OG ; nous pouvons donc ne considérer que ce qui se passe dans la facette OABC. Sous l'influence de l'effort θ dans la direction AB (fig. 26), la facette AB glisse par rapport à l'axe O, le point A vient en A', le glissement a pour expression l'angle $AOA' = \alpha'$. Le théorème relatif à la réciprocité des efforts tangentiels indique d'autre part, qu'en même temps qu'agit un effort θ dans le sens AB,

doit intervenir un même effort θ dans le sens perpendiculaire CB. Sous l'influence de ce second effort, la facette CB glisse par rapport à l'axe O, le point C vient en C', le glissement de CB est évalué par l'angle $C'OC = \alpha''$. Le carré est devenu, sous l'action des deux efforts réciproques θ , le parallélogramme OA'B'C'. Si on amène ce parallélogramme de façon que OC' coïncide avec OC, le point A' viendra en A'' et l'angle A'OA'' = α'' , le parallélogramme est arrivé en OA''B''C. Le glissement total $\gamma = \angle OA''$, par rapport à l'axe O, est donc bien la somme des deux glissements partiels α' et α'' des facettes normales AB et BC par rapport au même axe, et on a :

$$\gamma = \alpha' + \alpha''.$$

Coefficient de glissement. — Le petit cube dont il vient d'être question appartient à un corps solide soumis à l'action de forces extérieures de façon, que des efforts de glissement θ agissent seuls sur les facettes du parallélépipède. Le glissement qui correspond, pour une matière donnée, à la tension de glissement égale à l'unité, s'appelle *coefficient de glissement* et se désigne par β . On a :

$$\beta = \frac{\gamma}{\theta} \quad (1)$$

C'est donc l'angle dont a varié l'angle droit de deux éléments de surface sous l'action d'une tension de glissement égale à l'unité. De la relation (1) on tire :

$$\gamma = \beta\theta \quad (2) \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{\gamma}{\beta} \quad (3)$$

L'inverse du coefficient de glissement ou $\frac{1}{\beta}$ est souvent désigné par G, *module d'élasticité de glissement*. La loi de proportionnalité $\gamma = \beta\theta$ n'est pas plus exacte en ce qui concerne les glissements que la loi de Hooke relative

aux dilatations; elles sont, comme on voit, de forme identique.

Relation entre le coefficient de dilatation α et le coefficient de glissement β . — Considérons (fig. 27) l'ellipsoïde d'élasticité rapporté à ses trois axes principaux a , b et c et soit une facette ABC à la distance $OO' = 1$ de l'origine. Cherchons le glissement de cette facette par rapport à un axe passant par le point O. Ce glissement se produira suivant une certaine direction $O'O''$ (α' , β' , γ'). Evaluons l'effort tangentiel θ dans cette direction. Observons d'abord qu'on peut écrire la relation

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0 \quad (1)$$

puisque OO' est normal sur ABC, donc sur $O'O''$.

Appelons Ω la surface ABC et écrivons la condition d'équilibre suivant la direction θ . Il vient :

$$\theta \cdot \Omega = a \omega_x \cos \alpha' + b \omega_y \cos \beta' + c \omega_z \cos \gamma'$$

car $a\omega_x$ représente la tension totale sur l'élément ω_x , $a\omega_x \cos \alpha'$ la composante de cette tension suivant θ . On a donc :

$$\gamma = a \cos \alpha \cos \alpha' + b \cos \beta \cos \beta' + c \cos \gamma \cos \gamma' \quad (2)$$

Cherchons maintenant le glissement γ_0 par rapport à un axe passant par O et normal sur $O'O''$ (fig. 28). Il est visible que $O'O_1$ étant le déplacement de O' dans l'espace, c'est-à-dire le déplacement total de O', ce déplacement a trois composantes qui sont les déplacements des points a' , b' , c' arrivés en a'' , b'' , c'' . Pour obtenir le déplacement de O' suivant $O'O''$ il faut projeter les trois composantes $a'a''$, $b'b''$ et $c'c''$ sur $O'O''$. Appelons δ_a , δ_b , δ_c les dilatations respectives suivant les trois axes. On a :

$$\delta_a \cos \alpha = a'a''; \quad \delta_b \cos \beta = b'b''; \quad \delta_c \cos \gamma = c'c''$$

l'origine O. Les angles de cette nouvelle facette avec les plans coordonnés sont α' , β' , γ' . La direction de γ_0 sera θ , normale sur $O'O''$, donc parallèle à OO' ; les angles seront donc α , β , γ et, pour obtenir γ_0 , il suffit de changer dans l'expression ci-dessus α en α' , β en β' , γ en γ' . On écrit :

$$\gamma_0 = \delta_a \cos \alpha' \cos \alpha + \delta_b \cos \beta' \cos \beta + \delta_c \cos \gamma' \cos \gamma$$

donc

$$\gamma = 2\gamma_0$$

première relation importante; ou :

$$\gamma = 2 [\delta_a \cos \alpha \cos \alpha' + \delta_b \cos \beta \cos \beta' + \delta_c \cos \gamma \cos \gamma']$$

La composition des dilatations donne les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_a = \alpha \left(a - \frac{b+c}{m} \right) \\ \delta_b = \alpha \left(b - \frac{a+c}{m} \right) \\ \delta_c = \alpha \left(c - \frac{a+b}{m} \right) \end{array} \right.$$

α étant le coefficient de dilatation. Il viendra donc :

$$\gamma = 2\alpha \left[\left(a - \frac{b+c}{m} \right) \cos \alpha \cos \alpha' + \left(b - \frac{a+c}{m} \right) \cos \beta \cos \beta' + \left(c - \frac{a+b}{m} \right) \cos \gamma \cos \gamma' \right]$$

ou :

$$\begin{aligned} \gamma = 2\alpha & \left[a \left(\cos \alpha \cos \alpha' - \frac{1}{m} \cos \beta \cos \beta' - \frac{1}{m} \cos \gamma \cos \gamma' \right) \right. \\ & + b \left(\cos \beta \cos \beta' - \frac{1}{m} \cos \alpha \cos \alpha' - \frac{1}{m} \cos \gamma \cos \gamma' \right) \\ & \left. + c \left(\cos \gamma \cos \gamma' - \frac{1}{m} \cos \beta \cos \beta' - \frac{1}{m} \cos \alpha \cos \alpha' \right) \right] \end{aligned}$$

Or l'équation (1) donne :

$$\frac{1}{m} \cos \alpha \cos \alpha' = - \frac{1}{m} (\cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma')$$

Donc :

$$\gamma = 2\alpha \left[\left(\cos \alpha \cos \alpha' + \frac{1}{m} \cos \alpha \cos \alpha' \right) a + \left(\cos \beta \cos \beta' + \frac{1}{m} \cos \beta \cos \beta' \right) b + \left(\cos \gamma \cos \gamma' + \frac{1}{m} \cos \gamma \cos \gamma' \right) c \right]$$

Ou :

$$\gamma = 2\alpha \left[a \frac{m+1}{m} \cos \alpha \cos \alpha' + b \frac{m+1}{m} \cos \beta \cos \beta' + c \frac{m+1}{m} \cos \gamma \cos \gamma' \right]$$

Ou :

$$\gamma = 2\alpha \frac{m+1}{m} (a \cos \alpha \cos \alpha' + b \cos \beta \cos \beta' + c \cos \gamma \cos \gamma')$$

A cause de l'équation (2) on pourra écrire :

$$\gamma = 2\alpha \frac{m+1}{m} \theta,$$

ou :

$$\frac{\gamma}{\theta} = 2\alpha \frac{m+1}{m} = \beta \quad (3)$$

Le coefficient de glissement vaut donc $2 \frac{m+1}{m}$ fois le coefficient de dilatation. La formule (3), si α et β ont été déterminés par expérience, peut se mettre sous la forme :

$$m = \frac{2}{\frac{\beta}{\alpha} - 2},$$

qui peut être utilisée pour le calcul de m . En général m est compris entre 3 et 4; on a donc :

$$\beta = \frac{5}{2} \alpha \text{ à } \frac{8}{3} \alpha = 2,5 \alpha \text{ à } 2,67 \alpha,$$

ou

$$\alpha = \frac{3}{8} \beta \text{ à } \frac{2}{5} \beta = 0,375 \beta \text{ à } 0,4 \beta.$$

Observons que γ étant un nombre, β est de mêmes dimensions que θ .

Equations fondamentales de la théorie mathématique de l'élasticité. — Nous avons vu que les composantes des tensions qui agissent en un point quelconque d'un corps solide sont liées entre elles par les équations :

$$\theta_{yx} = \theta_{xy}; \quad \theta_{zy} = \theta_{yz}; \quad \theta_{xz} = \theta_{zx} \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dt_x}{dx} + \frac{d\theta_{xy}}{dy} + \frac{d\theta_{zx}}{dz} + X &= 0 \\ \frac{d\theta_{xy}}{dx} + \frac{dt_y}{dy} + \frac{d\theta_{zx}}{dz} + Y &= 0 \\ \frac{d\theta_{xz}}{dx} + \frac{d\theta_{yz}}{dy} + \frac{dt_z}{dz} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Nous avons établi ces équations en nous basant uniquement sur les conditions d'équilibre fournies par la mécanique rationnelle. Elles renferment neuf inconnues, réduites à six par suite des équations de condition (I) ; restent donc trois équations (II) pour le calcul de six inconnues. La théorie mathématique de l'élasticité a pour but de déterminer le problème, en introduisant un facteur nouveau, la loi fondamentale de l'élasticité, qui permet d'écrire de nouvelles équations.

Nous admettons, pour simplifier, comme loi fondamentale, la loi de Hooke.

Changement de coordonnées après déformation. — Considérons, à l'intérieur d'un corps solide (fig. 29), un point A de coordonnées x, y, z ; le corps n'a pas encore subi de déformation. Soit aussi un point A₁, infiniment voisin du premier ; ses coordonnées sont

$$x + \delta x, \quad y + \delta y, \quad z + \delta z$$

Il est supposé suffisamment voisin de A pour qu'on puisse négliger les carrés de δx , δy et δz . Après déforma-

tion le point A vient en A' et ses coordonnées sont

$$x + u, \quad y + v, \quad z + w.$$

Les quantités u , v et w sont les projections sur les trois axes du vecteur AA' qui représente le déplacement du

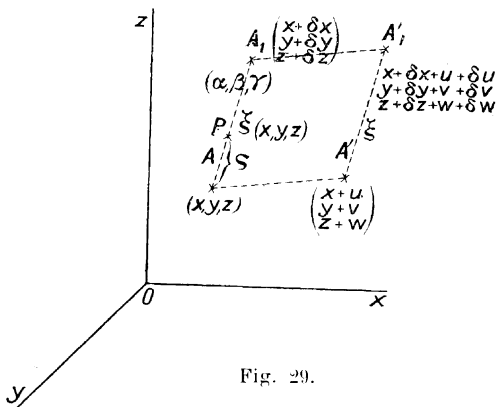


Fig. 29.

point A. Nous supposons que $u = f(x, y, z)$; $v = \varphi(x, y, z)$; $w = \psi(x, y, z)$ ou des fonctions de x, y, z ; nous les supposons continues; si elles ne l'étaient pas il y aurait rupture du corps. Nous admettons aussi que les dérivées de u, v et w sont fonctions continues de x, y et z sans quoi les réactions élastiques seraient très grandes, donc les forces extérieures, qui font équilibre à celles-ci, le seraient aussi; et nous excluons ce cas. Le point A_1 est venu en A'_1 ; les coordonnées de ce dernier point sont :

$$x + \delta x + u + \delta u; \quad y + \delta y + v + \delta v; \quad z + \delta z + w + \delta w$$

Développons $u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w$ par le théorème de Taylor en nous arrêtant au second terme, les carrés de $\delta x, \delta y$ et δz étant négligeables. Les coordonnées de A'_1 seront :

$$\begin{aligned} x + u + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z; \\ y + v + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \delta y + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z; \\ z + w + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \delta z. \end{aligned}$$

Relativement à A' les coordonnées de A₁ sont :

$$\begin{aligned} \delta x' &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \\ \delta y' &= \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \\ \delta z' &= \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \delta z. \end{aligned}$$

On peut écrire :

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \delta x' - \frac{\partial u}{\partial x} \delta x - \frac{\partial u}{\partial y} \delta y - \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \\ \delta y &= \delta y' - \frac{\partial v}{\partial x} \delta x - \frac{\partial v}{\partial y} \delta y - \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \\ \delta z &= \delta z' - \frac{\partial w}{\partial x} \delta x - \frac{\partial w}{\partial y} \delta y - \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \end{aligned} \right\} \text{ (III)}$$

Nous avons supposé que les déformations étant faibles on pouvait négliger les produits de $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ ou leurs carrés; on peut donc substituer dans les formules (III) $\delta x'$, $\delta y'$ et $\delta z'$ à δx , δy et δz ; il vient :

$$\delta x = \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \delta x' - \frac{\partial u}{\partial y} \delta y' - \frac{\partial u}{\partial z} \delta z',$$

et deux autres relations fournissant δy et δz ; ces formules sont linéaires et homogènes; elles expriment les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles; *toute surface déformée conserve donc le degré de son équation*; ainsi, un plan reste un plan après la déformation; une droite reste une droite, deux plans parallèles restent parallèles.

Ellipsoïde des déformations. — Une sphère, après déformation, conserve son degré, mais elle devient un ellipsoïde. Soit, en effet,

$$\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = 1$$

l'équation de la sphère. Après déformation cette équation devient :

$$\left[\left(1 - \frac{\delta u}{\delta x} \right) \delta x' - \frac{\delta u}{\delta y} \delta y' - \frac{\delta u}{\delta z} \delta z' \right]^2 + \dots = 1.$$

Développons cette expression et négligeons les termes du quatrième ordre ; il vient :

$$\begin{aligned} & \left(1 - 2 \frac{\delta u}{\delta x} \right) \delta x'^2 + \left(1 - 2 \frac{\delta v}{\delta y} \right) \delta y'^2 + \left(1 - 2 \frac{\delta w}{\delta z} \right) \delta z'^2 \\ & - 2 \left(\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \right) \delta x' \delta y' - 2 \left(\frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} \right) \delta y' \delta z' \\ & - 2 \left(\frac{\delta w}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta z} \right) \delta z' \delta x' = 1 \end{aligned}$$

C'est là l'équation d'un ellipsoïde rapporté à son centre ; on l'appelle *ellipsoïde des déformations*.

Observons que $\frac{\delta u}{\delta x}$ est l'accroissement de l'unité de longueur prise parallèlement à OX, c'est-à-dire la dilatation linéaire suivant cette direction. En effet, supposons que le vecteur AA_1 soit parallèle à OX et soit δx sa longueur ; calculons l'allongement que lui fait subir la déformation ; on a :

$$\overline{AA_1}^2 = (\delta x + \delta u)^2 + (\delta y + \delta v)^2 + (\delta z + \delta w)^2,$$

δy et δz sont nuls, car AA_1 est parallèle à OX ; on peut considérer δv et δw comme étant du second ordre, δx étant du premier ainsi que v et w ; δv^2 et δw^2 sont donc du quatrième ordre, et

$$AA_1 = \delta x + \delta u;$$

δy et δz sont nuls ; δu se réduit à $\frac{\partial u}{\partial x} \delta x$ et

$$\Lambda \Lambda_1 = \delta x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ est donc bien la dilatation linéaire suivant OX ; de

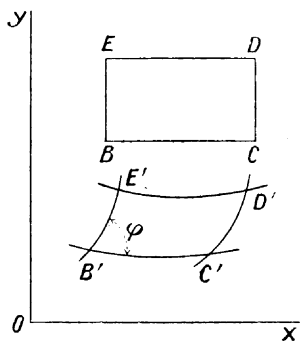


Fig. 30.

même $\frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial w}{\partial z}$ sont les dilatations suivant OY et OZ.

Posons :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \delta'; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \delta''; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \delta'''.$$

Des rayons de la sphère se sont donc dilatés de quantités δ' , δ'' et δ''' . Il s'est produit en même temps des *dilatations angulaires* ou *distorsions*. Considérons (fig. 30) un rectangle infiniment petit dans un plan parallèle aux XY et dont les côtés sont parallèles à OX et OY. On a $BC = \delta x$, $BE = \delta y$; la déformation se produit ; le rectangle devient un quadrilatère curviligne $B'C'D'E'$; l'angle $E'B'C' = \varphi$. On a :

$$B'C' = \delta x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$B'E' = \delta y \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Les coordonnées de D sont $x + \delta x$, $y + \delta y$, z ; donc

$$\overline{B'D'}^2 = (\delta x + \delta u)^2 + (\delta y + \delta v)^2 + \delta w^2$$

car $\delta z = 0$; δw^2 est du quatrième ordre ; d'autre part

$$\delta x + \delta u = \delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y ;$$

ou

$$\delta x + \delta u = B'C' + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y.$$

Négligeons encore les infiniment petits du quatrième ordre :

$$(\delta x + \delta u)^2 = \overline{B'C'}^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \delta y \cdot B'C'.$$

Or

$$\frac{\partial u}{\partial y} B'E' = \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \delta y ;$$

on peut donc remplacer $\frac{\partial u}{\partial y} \delta y$ par $\frac{\partial u}{\partial y} B'E'$; d'où :

$$(\delta x + \delta u)^2 = \overline{B'C'}^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} B'C' \cdot B'E'.$$

De même :

$$(\delta y + \delta v)^2 = \overline{B'E'}^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial y} B'C' \cdot B'E'.$$

Donc :

$$\overline{B'D'}^2 = \overline{B'C'}^2 + \overline{B'E'}^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) B'C' \cdot B'E'.$$

Mais :

$$\overline{B'D'}^2 = \overline{B'C'}^2 + \overline{B'E'}^2 + 2 \cos \varphi B'C' \cdot B'E' ;$$

donc :

$$\cos \varphi = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$\cos \varphi$ est infiniment petit ; φ est donc voisin de $\frac{\pi}{2}$; négli-

geons les termes du développement de $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ au delà du premier. Il vient :

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

L'angle droit EBC est donc devenu, après déformation, E'B'C' ou

$$\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right);$$

$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ s'appelle la *distorsion* ou *dilatation angulaire* ou *glissement* ; nous posons :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Il se produit de même deux autres distorsions

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Observons que ces expressions entrent dans l'équation de l'ellipsoïde qui peut dès lors s'écrire :

$$\begin{aligned} (1 - 2\delta') \delta x'^2 + (1 - 2\delta'') \delta y'^2 + (1 - 2\delta''') \delta z'^2 \\ - 2\gamma_{xy} \delta x' \delta y' - 2\gamma_{yz} \delta y' \delta z' \\ - 2\gamma_{zx} \delta z' \delta x' = 1 \end{aligned}$$

ou, plus simplement :

$$\Sigma (1 - 2\delta') \delta x'^2 - 2 \Sigma \gamma_{xy} \delta x' \delta y' = 1.$$

Les rayons de la sphère se sont donc dilatés linéairement ; deux rayons faisant entre eux un angle droit font maintenant un angle différent, il y a eu glissement.

Si l'ellipsoïde était rapporté à ses axes on aurait :

$$\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} = \gamma_{xy} = 0$$

$$\frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} = \gamma_{zy} = 0$$

$$\frac{\delta w}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta z} = \gamma_{xz} = 0$$

et l'équation se réduirait à :

$$[1 - 2\delta'] \delta x'^2 + [1 - 2\delta''] \delta y'^2 + [1 - 2\delta'''] \delta z'^2 = 1.$$

Donc si on prend comme axes les axes de l'ellipsoïde des déformations, les termes rectangles disparaissent : *les glissements ou distorsions sont nuls dans les trois plans principaux de l'ellipsoïde*. Il y a donc, en général, un système de plans formant un trièdre trirectangle et tels que les glissements sont nuls pour ces plans. Observons que δ' , δ'' et δ''' sont très petits et qu'on peut écrire :

$$1 - 2\delta' = \frac{1}{(1 + \delta')^2}; \quad 1 - 2\delta'' = \frac{1}{(1 + \delta'')^2}; \quad 1 - 2\delta''' = \frac{1}{(1 + \delta''')^2}$$

L'équation de l'ellipsoïde prend la forme :

$$\frac{\delta x'^2}{(1 + \delta')^2} + \frac{\delta y'^2}{(1 + \delta'')^2} + \frac{\delta z'^2}{(1 + \delta''')^2} = 1,$$

les dilatations linéaires suivant les axes de l'ellipsoïde s'appellent *dilatations principales*. Les longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde sont donc $1 + \delta'$, $1 + \delta''$, $1 + \delta'''$, δ' , δ'' , δ''' étant les dilatations principales.

Composition des déformations. — Nous venons de voir qu'un rayon de la sphère se dilate, et que l'angle primitivement droit de deux rayons se déforme par distorsion. Il se produit en même temps une rotation. Ecrivons, en

effet, l'expression de $\delta x'$ sous la forme

$$\delta x' = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \delta x + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \right] \delta y \\ + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \right] \delta z;$$

et adoptons deux dispositions semblables pour $\delta y'$ et $\delta z'$.
Considérons, dans ces expressions, les parties :

$$\text{IV} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \delta z \text{ pour } \delta x' \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \delta x \text{ pour } \delta y' \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) \delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \delta y \text{ pour } \delta z' \end{array} \right.$$

Supposons que le corps conserve une forme invariable, mais qu'il soit animé d'un mouvement ; il n'y a plus de déformations ; le déplacement se décompose en une translation et une rotation ; cette dernière peut être remplacée par trois autres p , q et r effectuées autour des axes des coordonnées. On a alors :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = qz - ry \\ \frac{\partial y}{\partial t} = rx - pz \\ \frac{\partial z}{\partial t} = py - qx.$$

Soit encore :

$$\delta x = q\delta t . z - r\delta t . y \\ \delta y = r\delta t . x - p\delta t . z \\ \delta z = p\delta t . y - q\delta t . x;$$

$p\delta t$, $q\delta t$, $r\delta t$ sont les angles infiniment petits dont le solide a tourné autour des trois axes. Il y a analogie complète entre ces formules et les termes (IV) ; on peut donc dire que ceux-ci correspondent à une rotation d'angles

λ , μ et ν donnés par les formules suivantes, autour des axes :

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) = p \, dt$$

$$\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = q \, dt$$

$$\nu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) = r \, dt$$

Il résulte de là que les termes de $\delta x'$, $\delta y'$ et $\delta z'$ qui doivent correspondre aux déformations sont :

$$(V) \begin{cases} \delta x' = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta z \\ \delta y' = \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta x \\ \delta z' = \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta y \end{cases}$$

si, bien entendu, la proposition est vraie.

La distance primitive $\Lambda A_1 = \xi$ (fig. 29) est donné par la relation

$$\xi^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2.$$

La distance $A'A'_1$ a pour valeur :

$$\xi'^2 = \delta x'^2 + \delta y'^2 + \delta z'^2.$$

S'il n'y a eu que déformation on aura :

$$\xi' = \xi + \Delta \xi,$$

et on devra avoir

$$\xi'^2 = \xi^2 + 2\xi \Delta \xi$$

en négligeant le terme $\overline{\Delta \xi^2}$. Substituons dans la valeur de ξ'^2 les expressions (V), supposées exactes.

Il vient :

$$\begin{aligned} \xi'^2 = & \delta x'^2 + \delta y'^2 + \delta z'^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \delta x^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \delta y^2 + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \delta z^2 \\ & + 2 \delta x \delta y \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ & + 2 \delta y \delta z \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ & + 2 \delta z \delta x \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Si la proposition est vraie on devra avoir :

$$(VI) \left\{ \begin{aligned} \xi \Delta \xi &= \frac{\partial u}{\partial x} \delta x^2 + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y^2 + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \delta x \delta y \\ &+ \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta y \delta z + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \delta z \delta x \end{aligned} \right.$$

Or

$$\xi^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2.$$

Prenons la variation

$$(VII) \quad \xi \Delta \xi = \delta x (\delta x' - \delta x) + \delta y (\delta y' - \delta y) + \delta z (\delta z' - \delta z)$$

On sait que :

$$\delta x' - \delta x = \delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z$$

et deux expressions semblables pour $\delta y' - \delta y$ et $\delta z' - \delta z$.
Substituons dans (VII); il vient :

$$\xi \Delta \xi = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x^2 + \dots$$

On retrouve la formule (VI) et la proposition est vérifiée.

Déformations autour d'un point. — Nous allons étudier les déformations autour d'un point A à l'intérieur du

corps (fig. 29). On a trouvé ci-dessus :

$$\begin{aligned} \xi \Delta \xi = & \frac{\partial u}{\partial x} \delta x^2 + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y^2 + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z^2 + \delta x \delta y \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ & + \delta y \delta z \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \delta z \delta x \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \dots \quad (1) \end{aligned}$$

Appelons α , β , γ les cosinus directeurs de la droite AA_1 ; on a :

$$\delta x = \xi \alpha; \quad \delta y = \xi \beta; \quad \delta z = \xi \gamma.$$

Substituons dans l'équation (1) :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \xi}{\xi} = & \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \alpha \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ & + \beta \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \gamma \alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

La quantité $\frac{\delta \xi}{\xi}$ est l'allongement subi par l'unité de longueur dans la direction considérée; c'est la dilatation dans cette direction. Posons $\frac{\delta \xi}{\xi} = \delta$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = b; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = c;$$

a , b et c , étant les dilatations suivant les axes ;

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{yz}; \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{xz}.$$

On a, pour la dilatation :

$$\delta = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + \alpha\beta\gamma_{xy} + \beta\gamma\gamma_{yz} + \gamma\alpha\gamma_{xz}.$$

Surface des dilatations. — Portons sur la direction AA_1 , à partir du point A, une longueur $AP = \rho = \frac{1}{\sqrt{\pm \delta}}$. Soient X, Y et Z les coordonnées du point P. On a :

$$X = \rho \alpha; \quad Y = \rho \beta; \quad Z = \rho \gamma$$

d'où

$$\alpha = \frac{X}{\rho}; \quad \beta = \frac{Y}{\rho}; \quad \gamma = \frac{z}{\rho}; \quad \delta = \pm \frac{1}{\rho^2}.$$

Introduisons ces valeurs dans l'expression de δ ; il vient :

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + \gamma_{xy}XY + \gamma_{yz}YZ + \gamma_{xz}XZ = \pm 1.$$

C'est l'équation d'une quadrique rapportée à son centre; c'est un ellipsoïde ou l'ensemble de deux hyperboloïdes. Cette surface s'appelle *surface des dilatations*. Pour qu'elle soit rapportée à ses axes il faut qu'on ait :

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0.$$

Or

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \dots; \quad \gamma_{xz} = \dots$$

D'autre part les axes de l'ellipsoïde sont caractérisés par

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0;$$

et deux autres équations analogues. On conclut de là que les axes de la surface des dilatations coïncident en direction avec ceux de l'ellipsoïde des déformations. Ce dernier a pour équation :

$$\begin{aligned} \delta x'^2 \left(1 - 2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \delta y'^2 \left(1 - 2 \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \delta z'^2 \left(1 - 2 \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ - 2\delta y'\delta z' \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \dots = 1 \end{aligned}$$

Rapporté à ses axes, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \delta'; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \delta'', \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \delta'''$$

Il est visible que δ' , δ'' et δ''' se confondent avec les

quantités a , b et c relatives aux axes de la surface des dilatations. Cette dernière, rapportée à ses axes, a pour équation

$$\delta'X^2 + \delta''Y^2 + \delta'''Z^2 = \pm 1.$$

Rappelons que l'équation de l'ellipsoïde des déformations rapportée aux mêmes axes est

$$\frac{\delta x'^2}{(1 + \delta')^2} + \frac{\delta y'^2}{(1 + \delta'')^2} + \frac{\delta z'^2}{(1 + \delta''')^2} = 1;$$

δ' , δ'' , δ''' sont les *dilatations principales*. Si ces trois dilatations ne sont pas de même signe, le signe $+$ correspondant à un allongement, le signe $-$ à une contraction, il existe une série de directions pour lesquelles il y a allongement et qui rencontrent l'un des hyperboloïdes, et une autre série de directions pour lesquelles il y a contraction et qui rencontrent l'hyperboloïde conjugué. Ces deux séries de directions sont séparées par le cône asymptote.

Théorème. — *La somme des dilatations suivant trois directions normales est constante et égale à la somme des dilatations principales. Soit, en effet, la surface des dilatations rapportée à ses axes :*

$$\delta'X^2 + \delta''Y^2 + \delta'''Z^2 = \pm 1.$$

Pour une direction quelconque on a :

$$\delta = \delta'\alpha^2 + \delta''\beta^2 + \delta'''\gamma^2.$$

Considérons (fig. 31) trois directions perpendiculaires OX' , OY' et OZ' ; α , β , γ ; α' , β' , γ' ; α'' , β'' , γ'' sont les cosinus directeurs; a' , b' , c' les dilatations correspondantes. Il vient :

$$\begin{aligned} a' &= \delta'\alpha^2 + \delta''\beta^2 + \delta'''\gamma^2 \\ b' &= \delta'\alpha'^2 + \delta''\beta'^2 + \delta'''\gamma'^2 \\ c' &= \delta'\alpha''^2 + \delta''\beta''^2 + \delta'''\gamma''^2 \end{aligned}$$

Or $\alpha, \alpha', \alpha''$ sont les cosinus directeurs des angles de OX avec les nouveaux axes, et on a :

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1.$$

De même

$$\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1$$

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$$

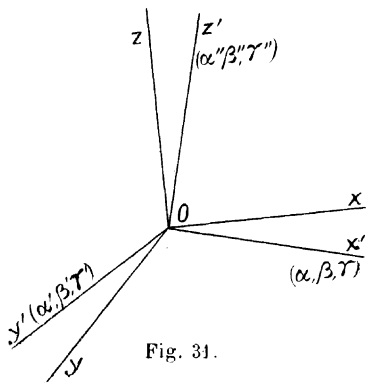


Fig. 31.

et il vient :

$$a' + b' + c' = a + b + c.$$

Dilatation cubique. — Considérons, au point O, un parallépipède rectangle ayant pour dimensions dx, dy, dz ; son volume $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$. Après la déformation le volume devient un parallépipède oblique, mais la déformation étant très faible, les inclinaisons des angles des faces ne diffèrent de l'unité que d'infiniment petits négligeables. On peut donc, pour évaluer le volume, assimiler le parallépipède oblique à un parallépipède rectangle

$$d\tau' = dx'dy'dz'$$

Or :

$$dx' = dx (1 + a)$$

$$dy' = dy (1 + b)$$

$$dz' = dz (1 + c)$$

On a donc :

$$\begin{aligned}d\tau' &= dx \cdot dy \cdot dz (1 + a + b + c) \\d\tau' &= d\tau (1 + a + b + c) \\ \frac{d\tau' - d\tau}{d\tau} &= a + b + c.\end{aligned}$$

Le premier membre de cette relation est la *dilatation cubique* ; nous le désignerons par e .

Relations entre les forces et les déformations. — Les rotations dont il vient d'être question ne peuvent donner naissance à des déformations élastiques ; seules les dilatations et les glissements peuvent produire des forces intérieures. On a trouvé :

$$\delta = ax^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + \gamma_{yz}\beta\gamma + \gamma_{xz}\gamma\alpha + \gamma_{xy}\alpha\beta.$$

Une force élastique doit être fonction de δ , donc des six coefficients $a, b, c, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$; il en est de même des six composantes $t_x, t_y, t_z, \theta_{xy}, \theta_{xz}, \theta_{yz}$. Concevons ces composantes développées par la formule de Mac Laurin suivant les puissances des six quantités $a, b, c, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$, en supprimant les termes qui les renferment à un degré supérieur au premier. S'il n'y a pas de déformations les forces élastiques sont nulles, il ne pourra y avoir de termes indépendants. On pourra donc écrire :

$$\begin{aligned}t_x &= A_1a + B_1b + C_1c + D_1\gamma_{xy} + E_1\gamma_{yz} + F_1\gamma_{xz} \\t_y &= A_2a + B_2b + C_2c + D_2\gamma_{xy} + E_2\gamma_{yz} + F_2\gamma_{xz} \\t_z &= A_3a + B_3b + C_3c + D_3\gamma_{xy} + E_3\gamma_{yz} + F_3\gamma_{xz} \\ \theta_{xy} = \theta_{yx} &= A'_1a + B'_1b + C'_1c + D'_1\gamma_{xy} + E'_1\gamma_{yz} + F'_1\gamma_{xz} \\ \theta_{yz} = \theta_{zy} &= A'_2a + B'_2b + C'_2c + D'_2\gamma_{xy} + E'_2\gamma_{yz} + F'_2\gamma_{xz} \\ \theta_{xz} = \theta_{zx} &= A'_3a + B'_3b + C'_3c + D'_3\gamma_{xy} + E'_3\gamma_{yz} + F'_3\gamma_{xz}\end{aligned}$$

Si le corps est supposé homogène, ces coefficients sont constants et au nombre de trente-six. *Pour un corps isotrope, les coefficients se réduisent à deux.* En effet, en

un point donné, il y a trois forces élastiques principales et trois dilatations principales. Admettons la loi de Hooke sous sa forme générale, c'est-à-dire que les trois forces élastiques principales sont des fonctions linéaires et homogènes des trois dilatations principales et posons :

$$\begin{cases} A = A_1\delta' + A_2\delta'' + A_3\delta''' \\ B = B_1\delta' + B_2\delta'' + B_3\delta''' \\ C = C_1\delta' + C_2\delta'' + C_3\delta''' \end{cases}$$

Dans l'expression de A, supposons que ce qui se rapporte à OX est fixe et permutons l'axe des Y avec celui des Z, donc δ'' et δ''' .

On a :

$$A = A_1\delta' + A_2\delta''' + A_3\delta''$$

Comparons les deux expressions de A :

$$A_2 = A_3; \quad B_3 = B_1; \quad C_1 = C_2.$$

Opérons de même pour B ; B devient C :

$$C = B_1\delta' + B_2\delta''' + B_3\delta''.$$

Comparons les deux expressions de C ; on voit que

$$B_1 = C_1; \quad B_2 = C_3; \quad C_2 = B_3$$

Donc :

$$A = A_1\delta' + A_2\delta'' + A_2\delta'''$$

$$B = A_2\delta' + A_1\delta'' + A_2\delta'''$$

$$C = A_2\delta' + A_2\delta'' + A_1\delta'''$$

qu'on peut écrire :

$$A = A_2 (\delta' + \delta'' + \delta''') + (A_1 - A_2) \delta'$$

$$B = A_2 (\delta' + \delta'' + \delta''') + (A_1 - A_2) \delta''$$

$$C = A_2 (\delta' + \delta'' + \delta''') + (A_1 - A_2) \delta'''$$

$$\begin{cases} A = \lambda e + 2\mu\delta' \\ B = \lambda e + 2\mu\delta'' \\ C = \lambda e + 2\mu\delta''' \end{cases}$$

Le nombre de coefficients se réduit donc à deux : λ et μ .

Choisissons comme axes les directions des dilatations principales δ' , δ'' , δ''' . Sur les trois plans coordonnés agissent des forces élastiques dont nous désignons les composantes par

$$t_x \ t_y \ t_z \qquad \theta_{xy} \ \theta_{yx} \ \theta_{xz} \ \theta_{zx} \ \theta_{yz} \ \theta_{zy}.$$

Chacune de ces composantes sera fonction de δ' , δ'' et δ''' , car $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} t_x &= A_1 \delta' + B_1 \delta'' + C_1 \delta''' \\ t_y &= A_2 \delta' + B_2 \delta'' + C_2 \delta''' \\ t_z &= A_3 \delta' + B_3 \delta'' + C_3 \delta''' \\ \theta_{xy} &= \theta_{yx} = A'_1 \delta' + B'_1 \delta'' + C'_1 \delta''' \\ \theta_{yz} &= \theta_{zy} = A'_2 \delta' + B'_2 \delta'' + C'_2 \delta''' \\ \theta_{xz} &= \theta_{zx} = A'_3 \delta' + B'_3 \delta'' + C'_3 \delta''' \end{aligned}$$

Dans un corps isotrope, toutes les directions, au point de vue élasticité, sont équivalentes autour d'un point ; ce qui est vrai pour t_x , t_y , t_z , l'est aussi pour la composante normale N de la force élastique agissant sur un élément quelconque Ω . On peut donc écrire :

$$N = A \delta' + B \delta'' + C \delta'''.$$

Laissons OX fixe et permutons OY avec OZ ; le corps étant isotrope, on aura :

$$\begin{aligned} t_x &= A_1 \delta' + B_1 \delta'' + C_1 \delta''' \\ t_y &= B_1 \delta' + A_1 \delta'' + B_1 \delta''' \\ t_z &= B_1 \delta' + B_1 \delta'' + A_1 \delta''' \\ \theta_{xy} &= B_1 (\delta' + \delta'' + \delta''') + (A_1 - B_1) \delta' \end{aligned}$$

de même θ_{xz} et θ_{yz} ; c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} t_x &= \lambda e + 2 \mu \delta' \\ t_y &= \lambda e + 2 \mu \delta'' \\ t_z &= \lambda e + 2 \mu \delta''' \end{aligned}$$

Une composante N quelconque est donc de la forme

$$N = \lambda e + 2 \mu \delta,$$

δ désignant la dilatation suivant la direction normale sur Ω .

On pourra donc écrire :

$$\begin{aligned} t_x &= \lambda e + 2 \mu a \\ t_y &= \lambda e + 2 \mu b \\ t_z &= \lambda e + 2 \mu c \\ \theta_{xy} &= \theta_{yx} = 2 \mu \gamma_{xy} \\ \theta_{yz} &= \theta_{zy} = 2 \mu \gamma_{yz} \\ \theta_{xz} &= \theta_{zx} = 2 \mu \gamma_{xz} \end{aligned}$$

sachant que

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = a + b + c.$$

Nous pouvons mettre ces formules sous une autre forme, étant données les relations établies précédemment. Les distorsions ont comme expression :

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}$$

On sait qu'il y a, entre un glissement γ et le coefficient de glissement β la relation

$$\gamma_{xy} = \beta \theta_{xy}$$

Par suite :

$$\left. \begin{aligned} \theta_{xy} = \theta_{yx} &= \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \theta_{xz} = \theta_{zx} &= \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \theta_{yz} = \theta_{zy} &= \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

L'étude des déformations composées nous a conduit à :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta_x}{\alpha} &= t_x - \frac{1}{m} (t_y + t_z) \\ \frac{\delta_y}{\alpha} &= t_y - \frac{1}{m} (t_z + t_x) \\ \frac{\delta_z}{\alpha} &= t_z - \frac{1}{m} (t_x + t_y) \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Additionnons et remplaçons $\delta_x + \delta_y + \delta_z$, ou $a + b + c$ par e ; on obtient :

$$t_x + t_y + t_z = \frac{m}{m-2} \frac{1}{\alpha} e \quad (III)$$

La première des équations (II) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\delta_x}{\alpha} &= \frac{m+1}{m} t_x - \frac{1}{m} (t_x + t_y + t_z); \\ \frac{\delta_x}{\alpha} &= \frac{m+1}{m} t_x - \frac{e}{m-2} \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

Résolvons par rapport à t_x :

$$t_x = \frac{1}{\alpha} \frac{m}{m+1} \left(\delta_x + \frac{e}{m-2} \right),$$

Nous avons trouvé d'autre part, entre les coefficients α et β , la relation

$$\alpha = \frac{m}{2(m+1)} \beta.$$

Il vient donc, en introduisant cette expression et en se souvenant de (1).

$$\left. \begin{aligned} t_x &= \frac{2}{\beta} \left(\frac{du}{dx} + \frac{e}{m-2} \right) \\ t_y &= \frac{2}{\beta} \left(\frac{dv}{dy} + \frac{e}{m-2} \right) \\ t_z &= \frac{2}{\beta} \left(\frac{dw}{dz} + \frac{e}{m-2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

Comparons aux formules de la théorie purement mathématique. Nous voyons que

$$\frac{1}{\alpha} \frac{m}{m+1} = 2\mu = \frac{1}{\beta},$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{m}{m+1} \frac{1}{m-2} = \lambda;$$

d'où

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{m-2}{2},$$

et, en adoptant le chiffre $m = 4$ de Poisson,

$$\frac{\mu}{\lambda} = 1,$$

$$\mu = \lambda$$

relation proposée par cet auteur.

Avec

$$m = \frac{10}{3}$$

$$\mu = \frac{2}{3} \lambda.$$

Nous aurons l'occasion d'établir ultérieurement une relation directe entre λ et μ .

Il est possible d'établir une expression générale qui résume la théorie de l'élasticité.

Reproduisons les équations d'équilibre :

$$\begin{aligned} \theta_{yx} = \theta_{xy}; \theta_{zy} = \theta_{yz}; \theta_{xz} = \theta_{zx} \\ \frac{dt_x}{dx} + \frac{d\theta_{yx}}{dy} + \frac{d\theta_{zx}}{dz} + X = 0 \\ \frac{d\theta_{xy}}{dx} + \frac{dt_y}{dy} + \frac{d\theta_{zy}}{dz} + Y = 0 \\ \frac{d\theta_{xz}}{dx} + \frac{d\theta_{yz}}{dy} + \frac{dt_z}{dz} + Z = 0 \end{aligned}$$

Substituons dans la première de ces équations les

valeurs (I) et (II) :

$$\frac{2}{\beta} \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{m-2} \frac{de}{dx} \right) + \frac{1}{\beta} \left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2v}{dxdy} \right) + \frac{1}{\beta} \left(\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d^2w}{dxdz} \right) + X = 0,$$

ou

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right) + \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dxdy} + \frac{d^2w}{dxdz} \right) + \frac{2}{m-2} \frac{de}{dx} + \beta X = 0.$$

Posons, pour simplifier, avec Laplace, le signe symbolique

$$\Delta^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}.$$

La seconde parenthèse de la relation ci-dessus peut s'écrire :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right)$$

ou

$$\frac{de}{dx}.$$

En opérant de même sur les deux autres équations, on pourra former le tableau :

$$(I) \quad \left. \begin{array}{l} \Delta^2 u + \frac{m}{m-2} \frac{de}{dx} + \beta X = 0 \\ \Delta^2 v + \frac{m}{m-2} \frac{de}{dy} + \beta Y = 0 \\ \Delta^2 w + \frac{m}{m-2} \frac{de}{dz} + \beta Z = 0 \end{array} \right\}$$

Si le poids du corps est négligeable vis-à-vis des forces extérieures qui agissent sur lui, et si le corps est en repos, on aura $X = 0$, $Y = 0$ et $Z = 0$.

A ce tableau ajoutons les formules obtenues précédemment :

$$(II) \text{ Equations d'équilibre. } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dt_x}{dx} + \frac{d\theta_{yx}}{dy} + \frac{d\theta_{zx}}{dz} + X = 0 \\ \frac{d\theta_{xy}}{dx} + \frac{dt_y}{dy} + \frac{d\theta_{yz}}{dz} + Y = 0 \\ \frac{d\theta_{xz}}{dx} + \frac{d\theta_{yz}}{dy} + \frac{dt_z}{dz} + Z = 0 \end{array} \right.$$

$$(III) \text{ Force élastique en un point. } \left\{ \begin{array}{l} X = mt_x + n\theta_{yx} + p\theta_{zx} \\ Y = m\theta_{xy} + n t_y + p\theta_{zy} \\ Z = m\theta_{xz} + n\theta_{yz} + p t_z \end{array} \right\} \begin{array}{l} m, n \text{ et } p \text{ sont} \\ \text{les cosinus} \\ \text{directeurs.} \end{array}$$

$$(IV) \left\{ \begin{array}{l} \text{Composantes normales.} \\ \text{Composantes tangentielles} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} t_x = \lambda e + 2\mu a \\ t_y = \lambda e + 2\mu b \\ t_z = \lambda e + 2\mu c \\ \theta_{xy} = \theta_{yx} = 2\mu\gamma_{xy} \\ \theta_{zy} = \theta_{yz} = 2\mu\gamma_{zy} \\ \theta_{xz} = \theta_{zx} = 2\mu\gamma_{xz} \end{array} \right.$$

Vibration des corps élastiques. — Les équations d'élasticité peuvent être modifiées de façon à donner les équations des mouvements vibratoires des corps isotropes. Pour passer de l'état statique à l'état dynamique, il suffit de considérer u, v et w comme des fonctions de x, y, z et du temps t et de remplacer les forces X, Y et Z par $X - \varphi_x, Y - \varphi_y, Z - \varphi_z$. Soient $A(x, y, z)$ la position initiale d'équilibre d'un point du corps, $A'(x + u, y + v, z + w)$, la position à l'instant t ; on a :

$$\varphi_x = \frac{d^2(x + u)}{dt^2} .$$

Ici x, y et z ne sont pas fonction du temps t et

$$\varphi_x = \frac{d^2u}{dt^2} .$$

De même :

$$\varphi_y = \frac{d^2v}{dt^2} \quad \text{et} \quad \varphi_z = \frac{d^2w}{dt^2} .$$

Les équations du mouvement vibratoire s'écrivent aisément.

Conditions de résistance. — Nous avons résolu le problème de l'élasticité dans le cas particulier d'isotropie. En pratique, on se bute souvent à des intégrations extrêmement délicates et la théorie mathématique de l'élasticité n'a donné de résultats que dans quelques cas particuliers que nous aurons d'ailleurs l'occasion de rencontrer. Au surplus, le problème ne présente généralement pas les complications que lui suppose la théorie ; il s'agit la plupart du temps de vérifier des conditions de sécurité dans des circonstances bien déterminées.

Théorème. — *Les dilatations maxima se produisent dans la direction de l'une des trois forces principales.* — Considérons (fig. 32) un élément de surface $ABC = \Omega$ et cherchons sa dilatation. Elle s'obtient en projetant le déplacement $O'O_1$ du point O' sur la direction OO' , ou ce qui revient au même, en projetant les trois composantes de $O'O_1$ sur OO' . On a donc :

$$\delta = \delta_a \cos^2\alpha + \delta_b \cos^2\beta + \delta_c \cos^2\gamma \quad (1)$$

Supposons

$$\delta_a > \delta_b > \delta_c. \quad (2)$$

On a toujours $\delta < \delta_a$. En effet, si dans (1) on remplace δ_b et δ_c par δ_a , on aura, en vertu de (2) :

$$\delta < \delta_a (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma),$$

ou $\delta < \delta_a$. On aurait de même

$$\delta > \delta_c (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma),$$

ou $\delta > \delta_c$.

Par conséquent la dilatation δ est plus petite que la

plus grande des dilatations suivant les forces principales et plus grande que la plus petite de ces dilatations.

Dans les questions de sécurité il y a donc lieu de ne

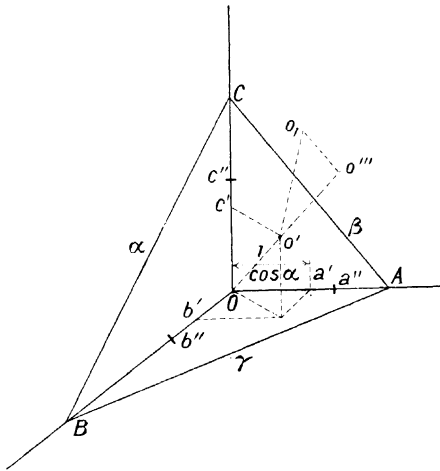


Fig. 32.

chercher que δ_a ou δ_c . C'est ce que nous allons faire dans plusieurs cas.

Dilatation simple. — Appelons r le coefficient de travail admissible de la matière à l'extension. On devra avoir

$$\delta_a \leq \alpha r \quad \text{ou} \quad \frac{\delta_a}{\alpha} \leq r.$$

Si la matière travaille à la compression il faudra

$$\delta_a \geq -\alpha' r' \quad \text{ou} \quad \frac{\delta_a}{\alpha'} \geq -r',$$

r' étant le coefficient admissible pour le travail de la matière à la compression, α' le coefficient de dilatation à la compression.

Cas le plus général. — Les trois facettes du parallépipède sont soumises à des efforts.

L'équation en λ :

$$(t_x - \lambda)(t_y - \lambda)(t_z - \lambda) - \theta_{xy}^2(t_z - \lambda) - \theta_{xz}^2(t_y - \lambda) - \theta_{yz}^2(t_x - \lambda) + 2\theta_{xy}\theta_{yz}\theta_{xz} = 0,$$

est du troisième degré; elle donne généralement trois valeurs pour λ , correspondant aux trois axes de l'ellipsoïde de Lamé; ces valeurs sont a , b et c . Il faut donc,

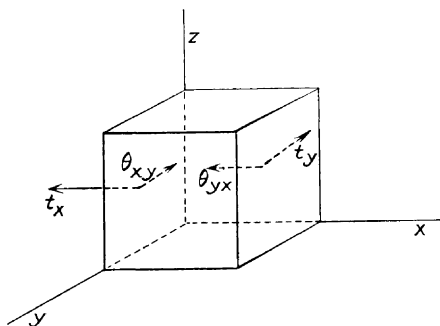


Fig. 33.

connaissant les tensions, résoudre cette équation et chercher a , b et c en fonction des quantités connues t_x , t_y , t_z , θ_{xy} , θ_{xz} , θ_{yz} . On vérifie ensuite si δ_a , δ_b et δ_c ne sont pas plus grands que αr ou $\alpha' r'$ suivant le signe de la dilatation. La déformation étant composée il vient :

$$\delta_a = \alpha \left(a - \frac{b+c}{m} \right); \delta_b = \alpha \left(b - \frac{a+c}{m} \right); \delta_c = \alpha \left(c - \frac{a+b}{m} \right)$$

d'où les conditions :

$$a - \frac{b+c}{m} \begin{cases} \leq r \\ \geq -r' \end{cases}; b - \frac{a+c}{m} \begin{cases} \leq r \\ \geq -r' \end{cases}; c - \frac{a+b}{m} \begin{cases} \leq r \\ \geq -r' \end{cases}$$

Dans le cas général le problème précédent est très

long. Nous allons étudier un cas particulier qui est d'usage courant.

Etat élastique plan. — Une facette du parallépipède ne reçoit aucun effort; les deux autres facettes sont soumises à des efforts obliques dans un même plan (fig. 33).

Formules de Barré de Saint-Venant. — On a donc $\theta_{xz} = \theta_{zx} = 0$; $\theta_{yz} = \theta_{zy} = 0$; $t_z = 0$; les efforts t_x , t_y , θ_{xy} et $\theta_{yx} = \theta_{xy}$ interviennent donc seuls. L'équation générale en λ devient :

$$\begin{aligned} (t_x - \lambda)(t_y - \lambda)(-\lambda) - \theta_{xy}^2(-\lambda) &= 0 \\ (t_x - \lambda)(t_y - \lambda) - \theta_{xy}^2 &= 0 \\ \lambda^2 - \lambda(t_x + t_y) + t_x t_y - \theta_{xy}^2 &= 0 \end{aligned}$$

équation du second degré dont les racines sont :

$$\lambda = \frac{(t_x + t_y) \pm \sqrt{(t_x + t_y)^2 - 4(t_x t_y - \theta_{xy}^2)}}{2}$$

donc

$$\begin{aligned} a &= \frac{(t_x + t_y) + \sqrt{(t_x + t_y)^2 - 4(t_x t_y - \theta_{xy}^2)}}{2} \\ b &= \frac{(t_x + t_y) - \sqrt{(t_x + t_y)^2 - 4(t_x t_y - \theta_{xy}^2)}}{2} \\ c &= 0. \end{aligned}$$

L'ellipsoïde de Lamé devient une ellipse. La déformation étant composée on a :

$$\delta_a = \alpha \left(a - \frac{b}{m} \right); \quad \delta_b = \alpha' \left(b - \frac{a}{m} \right).$$

On doit vérifier les conditions :

$$\frac{\delta_a}{\alpha} = a - \frac{b}{m} \begin{cases} \leq r \\ \geq -r' \end{cases}; \quad \frac{\delta_b}{\alpha'} = b - \frac{a}{m} \begin{cases} \leq r \\ \geq -r' \end{cases}$$

Le cas le plus fréquent est celui où $t_y = 0$; l'une des

trois facettes du parallépipède ne subit aucune tension ; la seconde facette reçoit une tension oblique et la troisième un effort purement tangentiel. Il suffit de faire $t_y = 0$ dans les valeurs de a et b ci-dessus :

$$a = \frac{t_x + \sqrt{t_x^2 + 4\theta^2_{xy}}}{2}$$

$$b = \frac{t_x - \sqrt{t_x^2 + 4\theta^2_{xy}}}{2}$$

On a donc :

$$\frac{\delta_a}{\alpha} = a - \frac{b}{m} = \frac{m-1}{2m} t_x + \frac{m+1}{m} \sqrt{\frac{t_x^2}{4} + \theta^2_{xy}}$$

$$\frac{\delta_b}{\alpha'} = b - \frac{a}{m} = \frac{m-1}{2m} t_x - \frac{m+1}{m} \sqrt{\frac{t_x^2}{4} + \theta^2_{xy}}$$

formules qui, dans le cas particulier $m = 4$, s'appellent *formules de Barré de Saint-Venant* :

$$\begin{aligned} \frac{\delta_a}{\alpha} &= \frac{3}{8} t_x + \frac{5}{4} \sqrt{\frac{t_x^2}{4} + \theta^2_{xy}} = \frac{3}{8} t_x + \frac{5}{8} \sqrt{t_x^2 + 4\theta^2_{xy}} \\ &= \frac{3t_x + \sqrt{(5t_x)^2 + (10\theta_{xy})^2}}{8} \end{aligned}$$

$$\frac{\delta_b}{\alpha'} = \frac{3t_x - \sqrt{(5t_x)^2 + (10\theta_{xy})^2}}{8}$$

Les indices x et xy n'ont plus ici aucune importance. Pour $m = \frac{10}{3}$ on aurait

$$\frac{\delta_a}{\alpha} = 0,35 t + 0,65 \sqrt{4\theta^2 + t^2}$$

$$\frac{\delta_b}{\alpha'} = 0,35 t - 0,65 \sqrt{4\theta^2 + t^2}.$$

Les conditions de résistance sont donc :

$$r \geq \frac{m-1}{2m} t + \frac{m+1}{m} \sqrt{\frac{t^2}{4} + \theta^2}$$

$$r' \geq \frac{m-1}{2m} t - \frac{m+1}{m} \sqrt{\frac{t^2}{4} + \theta^2}.$$

Glissement simple. — Une facette ne reçoit aucun effort, les deux autres subissent des efforts purement tangentiels. Il suffit de faire $t = 0$ dans les formules précédentes :

$$\frac{\delta_{ii}}{\alpha'} = \frac{m+1}{m} \theta$$

$$\frac{\delta_{ii}}{\alpha'} = -\frac{m+1}{m} \theta.$$

On devra avoir :

$$r'' \geq \frac{m+1}{m} \theta,$$

r'' étant le coefficient de travail admissible au glissement, de la matière considérée.

Relation entre les coefficients r , r' et r'' . — Nous avons trouvé dans les quatre cas précédents des équations de condition telles que la plus grande des dilatations ne dépasse pas αr ou $\alpha' r'$. On pourrait éliminer r et r' entre ces équations en observant toutefois que les équations auxquelles on arriverait ainsi établissent simplement une comparaison entre des cas différents. En comparant le second cas au premier on a

$$a - \frac{b+c}{m} \left\{ \begin{array}{l} \geq r \\ \geq -r' \end{array} \right.$$

et deux équations analogues.

En comparant le troisième au premier :

$$\frac{m+1}{m} r'' < r; \quad \frac{m+1}{m} r'' \leq r',$$

d'où :

$$r'' = \frac{m}{m+1} r.$$

Le coefficient admissible au glissement vaut donc les $\frac{m}{m+1}$ fois le plus petit des deux coefficients admissibles

à la dilatation. Pour $m = 3$ à 4 :

$$r'' = \frac{3}{4} r \quad \text{à} \quad \frac{4}{5} r = 0,75 r \quad \text{à} \quad 0,82 r.$$

Supposons $r < r'$; on a :

$$\beta_{r''} = \frac{\frac{m}{m+1} r}{\frac{m}{2(m+1)} \alpha} = \frac{2m(m+1)}{m(m+1)} \alpha r = 2\alpha r$$

$$\beta_{r''} = 2\alpha r.$$

Le plus grand glissement possible dans le cas de glissement simple est donc égal au double de la plus petite des dilatations αr ou $\alpha r'$. On peut démontrer directement ce théorème. Supposons (fig. 34), puisqu'il s'agit de glissement simple, que la facette AB vienne en A'B'. Observons que la plus grande contraction se fera suivant CA' et la plus grande dilatation suivant OB'. Supposons OA = 1,

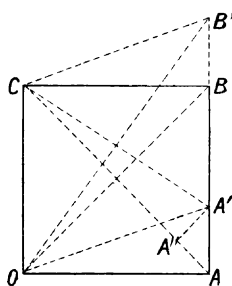


Fig. 34.

$\beta_{r''} = AA'$; A'A'' est un arc de cercle qu'on peut confondre avec une normale à CA. On a :

$$\alpha' r' = \frac{AA''}{CA} = \frac{AA'}{\alpha r \sqrt{2}} = \frac{AA'}{2}.$$

On trouverait de même :

$$\alpha r = \frac{BB'}{2} = \frac{AA'}{2}.$$

Coefficients admissibles pour les matériaux de construction. — Anciennement on déterminait les dimensions des divers éléments des constructions par la condition qu'en aucun point la tension intérieure ne devait

dépasser une certaine fraction $\frac{1}{n}$ de celle qui produirait la rupture de la matière. Le coefficient $\frac{1}{n}$, généralement voisin de $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{6}$ pour le fer et de $\frac{1}{10}$ pour le bois, se nommait *coefficient de sécurité*. C'était plutôt, comme l'observe M. Madamet, directeur de l'École d'application du Génie maritime, un coefficient d'ignorance. Cette manière de voir est abandonnée aujourd'hui de la plupart des ingénieurs; un corps qui se brise à la première fois qu'on lui applique une charge se brise en effet aussi sous l'effort de charges notablement moindres pourvu qu'elles se répètent un nombre suffisant de fois. Appliquons à un corps des forces incapables de produire la rupture immédiate ou au bout d'un certain temps; le corps atteint presque de suite à *peu près* la forme qu'il doit conserver; en réalité l'équilibre moléculaire ne s'établit pas immédiatement; la déformation continue à augmenter quoique très lentement et de moins en moins sensiblement; elle n'atteint sa valeur maximum qu'au bout d'un certain temps ne dépassant souvent pas quelques minutes, mais pouvant s'élever à des heures, des jours et même des mois. Inversement, si on fait cesser l'action des forces auxquelles un corps est soumis, des phénomènes analogues se produisent en sens opposé, l'état de repos définitif ne s'établit pas de suite, mais exige un intervalle d'autant plus long que la durée d'application de la charge a été plus grande. Ce phénomène, qui a reçu le nom d'*élasticité subséquente*, a été étudié dès 1835 par Weber, puis par Kolhrausch, Neesen, Wiedemann, Kent et Perard, professeur à l'Université de Liège. Ces effets, presque insensibles dans les métaux pour des efforts peu considérables, deviennent appréciables quand la déformation permanente est un peu plus forte et surtout quand on approche de la charge de rupture. Il convient donc de ne pas conduire trop rapidement les essais de

résistance; ils pourraient induire en erreur quant à la discussion des résultats.

Quand les efforts exercés se succèdent à des intervalles très rapprochés, on doit s'attendre, à cause de l'élasticité subséquente, à trouver une diminution de résistance, et c'est bien ce que montre la pratique.

Les effets de ce genre avaient déjà été observés par Fairbairn en 1860 et 1861 en Angleterre, mais leur étude a surtout été poursuivie par Wöhler et Spangenberg, en Allemagne, de 1859 à 1870. Voici la loi de Wöhler.

La matière se brise non seulement lorsqu'elle est soumise une seule fois à des tensions intérieures supérieures à celle dite de rupture, mais encore :

1° *Quant elle est soumise à des tensions notablement moindres, toutes de même sens (tension ou pression), pourvu qu'elles se répètent un nombre suffisant de fois.*

2° *Quand elle est soumise à des tensions moindres encore que les précédentes à nombre égal de répétitions, pourvu qu'elles agissent de façon à y produire alternativement des tensions et des pressions.*

Weyrauch définit, *résistance à la rupture*, le travail élastique qui entraîne la rupture, la charge croissant lentement et progressivement; *résistance aux efforts intermittents*, le travail élastique maximum qui peut être supporté sans qu'une charge variant de zéro au maximum constant et toujours le même entraîne la rupture; *résistance aux charges oscillantes*, le travail élastique maximum qu'une charge variant entre un maximum et un minimum d'égale intensité et de signe contraire peut développer un nombre quelconque de fois sans que rupture s'ensuive. La résistance aux charges oscillantes est un peu plus faible que celle aux charges intermittentes; la différence, d'après les essais de Bauschinger, est beaucoup moins grande que les essais de Wöhler l'avaient fait supposer. Voici les chiffres trouvés par Bauschinger.

MATIÈRE	RÉSISTANCE		
	à la rupture.	aux charges intermittentes.	aux charges oscillantes.
	kgs m/m ²		
Acier doux. (composi-	43,60	24	19,80
— (tions di-	40,50	22	19,80
— (verses.	40,20	24	22,60
Acier Thomas	61,20	30	30
Acier pour rails	59,40	28	28
Tôle d'acier pour chau-			
dières	40,50	24	19
Tôle d'acier sans dési-			
gnation	33,50	22	16
Fer puddlé	34,80	20	17,70

La résistance aux charges oscillantes coïncide donc sensiblement avec la limite d'élasticité ; la limite d'élasticité est donc la quantité déterminante pour le choix de la limite pratique du travail élastique et non pas la résistance à la rupture. On pourrait prendre en général la moitié de la limite d'élasticité comme limite pratique du travail élastique. Voici un tableau de comparaison des coefficients divers relatifs au fer et à l'acier. Les efforts sont exprimés en kgs par cm².

D'autre part nous donnons un tableau relatif aux efforts admissibles exprimés en kgs par cm², pour divers métaux :

a) Cas de charge statique ou immobile ;

b) Cas de charge variant avec une fréquence quelconque les tensions produites augmentant continuellement et alternativement de zéro au maximum dont elles sont susceptibles pour redescendre ensuite à zéro ;

c) Cas de charge variant avec une fréquence quelconque, les tensions produites augmentant continuellement et alternativement d'un maximum de valeur négative à un maximum de valeur positive, ces deux valeurs étant égales entre elles, pour diminuer de nouveau et ainsi de suite.

MATIÈRES	α	β	LIMITE		RÉSISTANCE	
			de proportionnalité	d'étirage ou d'écrasement.	R	R'
Fer soudant II	$\frac{1}{2\ 000\ 000}$	$\frac{1}{770\ 000}$	1 300 à 1 700	2 200 à 2 800	3 300 à 4 000	Proportionnelle à la limite d'écrasement.
Fer soudant I	—	—	—	—	2 800 à 3 500	—
Fer fondu	$\frac{1}{2\ 150\ 000}$	$\frac{1}{800\ 000}$	2 000 à 2 400	2 500 à 3 000	3 400 à 4 400	Proportionnelle à la limite d'écrasement.
Acier fondu	$\frac{1}{2\ 200\ 000}$	$\frac{1}{850\ 000}$	2 500 à 3 000	2 800	4 500 à 10 000	Idem pour le métal doux.
Acier à ressorts non trempé	$\frac{1}{2\ 200\ 000}$	$\frac{1}{850\ 000}$	> 4 000	Pas de	7 500 à 9 000	R' augmente avec le degré de dureté.
Acier à ressorts trempé.	$\frac{1}{2\ 200\ 000}$	$\frac{1}{850\ 000}$	> 7 500	limite d'allongement.	8 000 et plus	
Fonte	variable.	variable.	aucune.	—	1 200 à 1 800	7 000 à 8 000
Acier de moulage	$\frac{1}{2\ 150\ 000}$	$\frac{1}{830\ 000}$	2 000 et plus	2 800	3 500 à 7 000	Voir acier fondu.

MATIÈRES	r			r'		r''			r'''			r''''		
	a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	c	a	b	c
Fer soudant . . .	900	600	300	900	600	900	600	300	720	480	240	300	240	120
Fer fondu.	900	600	300	900	600	900	600	300	720	480	240	600	400	200
	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à
	1200	800	400	1200	800	1200	800	400	960	640	320	840	560	280
Acier fondu.	1200	800	400	1200	800	1200	800	400	960	640	320	900	600	300
	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à
	1500	1000	500	1500	1000	1500	1000	500	1200	800	400	1200	800	400
Acier à ressorts non trempé.	—	—	—	—	—	—	3600	—	—	—	—	—	—	—
Acier à ressorts trempé.	—	—	—	—	—	—	4300	—	—	—	—	—	—	—
Fonte	300	200	100	900	600	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Acier de moulage	600	400	200	900	600	750	500	250	480	320	160	480	320	160
	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à	à
	900	600	300	1200	900	1050	700	350	840	560	280	840	560	280

r	coefficient admissible à la traction ;
r'	— à la compression ;
r''	— à la flexion ;
r'''	— au cisaillement ;
r''''	— à la torsion.

La résistance des pièces de fonte à la flexion varie avec leur forme ; elle n'est pas la même si la pièce a été travaillée ou non, c'est-à-dire si elle n'a plus ou si elle a encore sa croûte. Ce tableau est emprunté à Bach.

Quand une barre de fer malléable ou d'acier doux est soumise à des efforts supérieurs aux tensions limites ces dernières s'élèvent ; ce fait se produit aussi avec le bronze, le cuivre et le zinc. Des ruptures répétées augmentent la résistance à la rupture. Les expériences de Bauschinger ont montré que la durée de mise en charge exerce sur cette élévation de résistance une influence importante. La limite de proportionnalité s'abaisse quand la limite d'extension est dépassée si les barres sont éprouvées de nouveau aussitôt après avoir été déchargées. Pendant le temps de repos la limite de proportionnalité se relève de nouveau. C'est l'élasticité subséquente dont il a été question ci-dessus. Le travail du fer à froid, le laminage, le martelage, l'étirage ; le redressement ou la courbure du fer en barres, des tôles à froid ; l'immersion subite dans l'eau froide du fer chauffé au rouge, agissent comme si on soumettait le fer à des efforts supérieurs aux tensions limites. La matière chauffée au rouge et refroidie lentement revient plus ou moins complètement à son état primitif.

Mais tandis que le travail à froid augmente la résistance en diminuant l'allongement, le travail réitéré à chaud augmente la résistance et l'allongement. Enfin nous signalerons ultérieurement l'influence de la température sur la résistance des métaux. Observons que pour

le fer forgé Wöhler a trouvé pour les trois modes de charges a , b et c les résistances approximatives relatives 3, 2, 1.

On a établi, depuis 1870, un grand nombre de formules destinées à déterminer les efforts admissibles pour la matière en fonction des tensions limites. Citons notamment celle de Tetmajer :

$$t = \alpha + \beta \left(\frac{t_{\min}}{t_{\max}} \right) + \gamma \left(\frac{t_{\min}}{t_{\max}} \right)^2$$

t effort admissible

t max et t min la plus grande et la plus petite tension agissant sur la pièce considérée

Fer soudant en barres $\alpha = 600$; $\beta = 350$; $\gamma = 80$

Fer fondu malléable en barres $\alpha = 700$; $\beta = 430$; $\gamma = 100$

Acier fondu en barres,

$r = 6000$ kg. environ; $\alpha = 830$; $\beta = 640$; $\gamma = 250$

Rappelons, dans l'ordre chronologique, le nom des auteurs qui se sont occupés d'établir des formules semblables :

Gerber (1872 et 1874); Lauenhardt (1873); Müller (1873); Schäffer (1874); Weyrauch (1875); Winckler (1877); Ritter (1877); Seefehlner (1878); Kherndl (1879); Lippold (1879); Clericetti (1881); Landsberg (1885); Tetmajer (1886); Séjourné (1886); Häselser (1886). Au sujet de ces formules on peut consulter avec intérêt « la Statique graphique » de M. Maurice Lévy. Elles ne concordent généralement pas, même dans les cas les plus simples, et il est préférable d'avoir recours aux tableaux.

Cuivre. — Une élévation de température fait subir au cuivre une réduction de résistance relativement importante, que l'on peut poser en moyenne, d'après les essais de Parker, de 25 à 37 p. 100 depuis 150° C à 199°. En ce

qui concerne l'effort admissible il convient de tenir compte de l'usage auquel est destiné ce métal ; on pourra adopter $r = 600$, mode de charge a , $r = 300$, mode b . Pour les réservoirs d'air des grandes pompes on pourra aller jusqu'à 800 et plus, le cuivre étant en feuilles et martelé.

Bronze. — Diminution de résistance due à l'augmentation de température. La composition du bronze étant très variable il n'est pas possible d'indiquer d'efforts admissibles. Suivant la proportion d'aluminium, dans un bronze d'aluminium de Neuhausen, par exemple, la résistance à la traction a varié de 8000 à 4000 ; elle diminue avec le pourcentage d'aluminium.

Plomb. — Sa résistance est très variable. Dans une série d'expériences à la compression effectuées par Bach la résistance a varié de 51 à 150 kilogrammes.

Cuir. — La résistance à la traction d'un bon cuir noyau, comme celui qui sert à la fabrication des courroies de transmission, varie ordinairement de 250 à 450 kilogrammes en supposant que la rupture se produise rapidement.

Bois. — Les propriétés élastiques du bois sont fort variables. Ainsi, pour le chêne et le hêtre, Tetmajer a trouvé :

MATIÈRE	PROPORTION d'humidité.	α	LIMITE de propor- tionnalité.	RÉSIS- TANCE
Chêne, traction . . .	—	$\frac{1}{108\ 000}$	476	964
— pression . . .	—	$\frac{1}{103\ 000}$	148	343

MATIÈRE	PROPOR- TION d'humidité.	α	LIMITE de propor- tionnalité.	RÉSIS- TANCE
-- flexion.	24	$\frac{1}{100\ 000}$	217	600
— cisaillement.	—	—	—	75
Hêtre, traction.	—	$\frac{1}{180\ 000}$	581	1 340
— pression.	—	$\frac{1}{169\ 000}$	102	320
— flexion.	17	$\frac{1}{128\ 000}$	240	670
— cisaillement.	—	—	—	85

Pierres, béton. — On trouvera, dans le tableau suivant, les efforts admissibles pour ces matières ainsi que pour diverses espèces de bois.

	Traction.	Pression.
	—	—
Frêne	100 à 120	66
Chêne et hêtre	100	80
Pin	100	60
Sapin	60	50
Verre	—	75
Basalte.		75
Granit		45
Pierre calcaire.		25
Grès		15 à 30
Maçonnerie, briques et chaux.		7
— , briques et ciment		12 à 14
Briques poreuses peu cuites (voûtes)		3
— bien cuites		6
Marbre		24
Pierres artificielles (ciment, scories et sable)		12
Bon terrain de fondation		2,5
Très bon terrain de fondation.		4,5 à 5
Forme en béton de 0,75 m. d'épaisseur.		5

Causes de rupture. — Il paraît exister trois opinions relatives à la rupture des pièces. Dans l'une le danger de rupture dépend uniquement de la grandeur de la principale des actions t ; d'après une autre opinion le danger dépend non seulement des actions moléculaires t mais des déformations δ ; c'est l'avis de Poncelet, de Saint-Venant et de Grashof; enfin Coulomb et Tresca prétendent que la grandeur du glissement maximum γ produit la rupture. La manière de voir de Saint-Venant paraît être conforme à l'expérience, car celle-ci prouve en effet que la sécurité tient non aux efforts mais uniquement aux déformations. Considérons, par exemple, un cube de fer soumis à une tension verticale t précisément égale à 1 200, coefficient correspondant à la limite de proportionnalité; on aura $\delta = \frac{1\ 200}{2\ 000\ 000}$ car, pour le fer, $\alpha = \frac{1}{2\ 000\ 000}$. Si, outre l'effort t , on a des efforts latéraux t' , à t s'ajoutera une nouvelle dilatation et la sécurité n'existera plus, bien que t ne dépasse pas 1 200. La vraie limite à observer n'est donc pas t mais la dilatation $\delta = \frac{1\ 200}{2\ 000\ 000}$. D'autre part, il peut se faire aussi que t soit plus grand que 1 200 sans que la sécurité soit compromise. Supposons le cube soumis à trois tensions égales à t de façon qu'il atteigne sa dilatation maximum $\frac{1\ 200}{2\ 000\ 000} = \alpha t$. On a

$$\alpha R = \alpha t - \frac{\alpha t}{m} - \frac{\alpha t}{m}$$

$$\alpha R = \frac{m-2}{m} \alpha t,$$

ou

$$t = \frac{m}{m-2} R$$

Soit $m = 4$; il vient $t = 2R$.

On voit donc bien que la dilatation δ est la quantité

déterminante de la rupture ; malheureusement il n'est pas pratique d'introduire les dilatations dans le calcul des matériaux ; en effet, ces calculs conduisent toujours à la détermination de la tension maximum et ils seraient incommodes si on se servait de la relation $\delta = \alpha t$ qui ne devrait pas dépasser une limite donnée de δ qui provoque la rupture, surtout pour les matériaux qui n'obéissent pas à la loi de Hooke, c'est-à-dire presque tous les matériaux, à part le fer et l'acier ; en effet, il faudrait connaître α pour la matière considérée et, en pratique, on ne connaît α que très approximativement ; le coefficient de dilatation est d'ailleurs variable pour certaines matières, notamment pour la fonte. Les résistances se calculeront donc en prenant pour base les tensions t et θ . Ainsi, soit un cube soumis sur trois faces aux efforts normaux t , t' et t'' . Les dilatations sont :

$$\delta = \alpha t - \alpha \frac{t'}{m} - \alpha \frac{t''}{m} = \alpha \left(t - \frac{t'}{m} - \frac{t''}{m} \right)$$

$$\delta' = \alpha t' - \alpha \frac{t}{m} - \alpha \frac{t''}{m} = \alpha \left(t' - \frac{t}{m} - \frac{t''}{m} \right)$$

$$\delta'' = \alpha t'' - \alpha \frac{t}{m} - \alpha \frac{t'}{m} = \alpha \left(t'' - \frac{t}{m} - \frac{t'}{m} \right).$$

On détermine les tensions maximum t_1 , t_2 , et t_3 . On a :

$$\delta_x = \alpha \left(t_1 - \frac{t_2}{m} - \frac{t_3}{m} \right)$$

$$\delta_y = \alpha \left(t_2 - \frac{t_1}{m} - \frac{t_3}{m} \right)$$

$$\delta_z = \alpha \left(t_3 - \frac{t_1}{m} - \frac{t_2}{m} \right).$$

On s'impose de ne pas dépasser pour $t_1 - \frac{t_2}{m} - \frac{t_3}{m}$, $t_2 - \frac{t_1}{m} - \frac{t_3}{m}$, $t_3 - \frac{t_1}{m} - \frac{t_2}{m}$ une valeur pratique r

ou r' fixée à priori. On pose donc

$$r = t_1 - \frac{t_2}{m} - \frac{t_3}{m}$$

$$r = t_2 - \frac{t_1}{m} - \frac{t_3}{m}$$

$$r = t_3 - \frac{t_1}{m} - \frac{t_2}{m}.$$

La plus grande de ces valeurs est admise. Le maximum d'extension sera $\delta_x = xr$ ou $\delta_y = xr$ ou $\delta_z = xr$. Désignons par $i = xr$ ce maximum d'extension et par $i' = xr'$ le maximum de contraction ; $i'' = \zeta r''$ sera le plus grand glis-

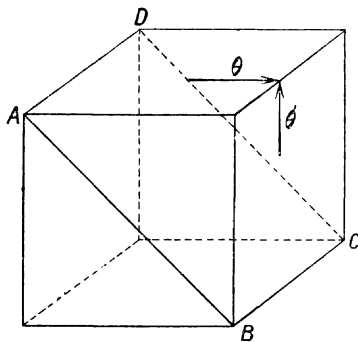


Fig. 35.

sement compatible avec la sécurité dans le cas de glissement simple ; i'' est donc un glissement tel que dans certaines directions la plus grande dilatation atteint la limite i ou i' . Observons que dans le cas de glissement simple il y a dans certaines directions des tensions normales. Ainsi dans l'état de sollicitation du cube (fig. 35) la résultante des deux efforts tangentiels θ égaux, est normale sur l'élément ABCD ; i'' ne se rencontre donc que dans le cas de glissement simple.

TITRE II

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

CHAPITRE PREMIER

TRACTION

Hypothèse. — Nous nous occupons uniquement des pièces longues, c'est-à-dire des pièces dont une des trois dimensions l'emporte de beaucoup sur les deux autres; nous supposons les corps prismatiques. On dit qu'une pièce est soumise à *extension* quand, sous l'action des forces extérieures, son axe s'étend sans changer de courbure. Nous supposons donc une pièce prismatique droite, les forces extérieures dans chaque section transversale agissant dans la direction de l'axe. Observons que quand une pièce droite s'étend, elle ne peut être soumise qu'à un effort extérieur parallèle à l'axe et passant par le centre de gravité des sections, donc se confondant avec l'axe; car quand une pièce droite se dilate, toutes les files de molécules parallèles à l'axe s'étendent de la même manière. Ceci n'est peut-être pas rigoureusement vrai pour

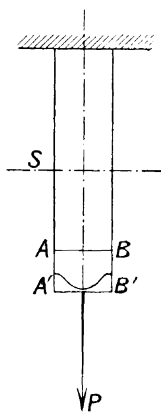


Fig. 36.

les parties extrêmes de la pièce (fig. 36), mais pour une section S , située à une certaine distance de l'extrémité, la remarque est applicable. Si donc on considère une section transversale S , en admettant une répartition uniforme de la tension t dans cette section, la résultante des tensions t passe par le centre de gravité et la force extérieure qui lui fait équilibre passe aussi par ce point; elle ne peut être oblique, sans quoi il y aurait flexion.

Pièce de section constante sur laquelle agit une force constante. — Soient (fig. 36) P l'effort de traction, S la

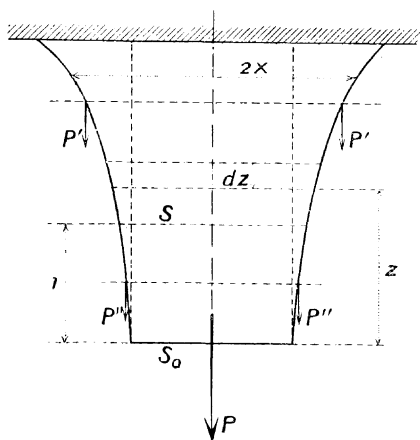


Fig. 37.

section droite primitive, l la longueur primitive de la pièce, Δ allongement dû à l'action de la force P ; $\delta = \frac{\Delta}{l}$ la dilatation; α coefficient de dilatation; t tension due à la force P dans la section primitive S ; r coefficient admissible pour la matière considérée, travaillant à la traction.

On a :

$$\begin{aligned} P &= t \cdot S \\ P &\equiv rS \\ \Delta &= \alpha l t = \alpha l \frac{P}{S} . \end{aligned}$$

Cas où S et P sont variables. — Considérons (fig. 37) un élément de hauteur dz ; la dilatation δ varie d'une section à l'autre. On a pour l'élément dz :

$$\begin{aligned} d\Delta &= \delta dz = \alpha \frac{P}{S} dz \\ \Delta &= \int \alpha \frac{P}{S} dz . \end{aligned}$$

Si on admet que α est invariable, ce qui est le cas si les tensions restent en dessous des limites de proportionnalité, il vient :

$$\Delta = \alpha \int \frac{P}{S} dz .$$

Si P est constant

$$\Delta = \alpha P \int \frac{dz}{S} .$$

Si P est variable et S constant :

$$\Delta = \frac{\alpha}{S} \int P dz .$$

Pièces d'égale résistance à l'extension. — Ce sont des pièces telles que la tension t est la même dans toutes les sections. On peut donc écrire pour ces pièces $t = r = c^{te}$. Si une pièce est soumise à une charge unique à son extrémité, elle est d'égale résistance quand la section est constante, à condition que la pièce soit de faible longueur, car alors le poids propre peut être négligé. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et que le poids doive intervenir. Dans la section inférieure S_0 (fig. 37) on aura

$r = \frac{P}{S_0}$, d'où $S_0 = \frac{P}{r}$. Cherchons la section S à la hauteur z au-dessus de S_0 . On a, pour cette section :

$$r = \frac{P + \gamma \int_0^z S dz}{S}$$

γ étant la densité. Différentions les deux membres :

$$\begin{aligned} r dS &= \gamma S dz, \\ \frac{dS}{S} &= \frac{\gamma}{r} dz \\ \lg_n S &= \frac{\gamma}{r} z + C^{te}, \end{aligned}$$

Or, pour $z = 0$, $S = S_0$, donc $C = \lg_n S_0$ et

$$\begin{aligned} \lg_n S &= \frac{\gamma}{r} z + \lg_n S_0 \\ \lg_n \frac{S}{S_0} &= \frac{\gamma}{r} z \\ S &= S_0 e^{\frac{\gamma}{r} z} = \frac{P}{r} e^{\frac{\gamma}{r} z} \end{aligned} \quad (1)$$

relation entre S et z .

Cas particuliers. — I. Les sections sont rectangulaires et l'une des dimensions a est constante. On a $S = 2x a$. L'équation (1) devient.

$$x = \frac{P}{2ra} e^{\frac{\gamma}{r} z}$$

équation de la courbe qui constitue le profil de la pièce ; c'est une logarithmique.

II. Les sections sont semblables (fig. 38) ; on sait qu'alors elles sont entre elles comme les carrés des rayons vecteurs. On a donc :

$$kx^2 = \frac{P}{r} e^{\frac{\gamma z}{r}}$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{P}{kr} e^{\frac{\gamma z}{r}}}$$

k dépend de la forme de la section.

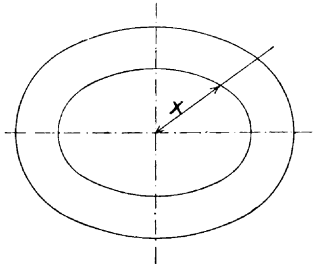


Fig. 38.

Remarques sur les profils d'égalé résistance. — I. On peut allonger indéfiniment la pièce à condition qu'on la soumette à des charges de plus en plus faibles. Si l est la longueur de la pièce, S_1 la section supérieure, on a

$$S_1 = \frac{P}{r} e^{\frac{\gamma l}{r}}.$$

Si l augmente, P doit diminuer.

II. Pour les pièces d'égalé résistance, l'allongement n'est pas donné par une intégrale. On a vu :

$$\Delta = \alpha \int_0^l \frac{P dz}{S};$$

dans le cas actuel $\frac{P}{S}$ est constant; donc :

$$\Delta = \alpha \frac{P}{S} l = \alpha r l.$$

Ce résultat était facile à prévoir puisque l est constant partout.

Pièce creuse. — Considérons (fig. 39) une pièce évidée dont l'intérieur est cylindrique et toutes les sections circulaires; le diamètre d est connu *a priori*; il s'agit de

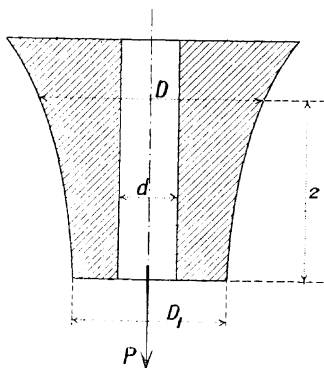


Fig. 39.

déterminer les diamètres D , la pièce étant soumise à un effort P et à son poids. On a :

$$S = S_0 e^{\frac{\gamma s}{r}} \quad (1)$$

$$S_0 = \frac{\pi}{4} (D_1^2 - d^2)$$

$$S = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$$

$$\frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} (D_1^2 - d^2) e^{\frac{\gamma s}{r}}$$

Or

$$\frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) r = P$$

donc :

$$\frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{P}{r} e^{\frac{\gamma s}{r}}$$

d'où l'on tire D. Ce profil a la forme logarithmique ; on lui substitue souvent des formes tronconiques ou composées d'une série de troncs prismatiques de sections de plus en plus faibles.

Influence d'une variation de température. — Considérons, avec Grashof, un fil conducteur électrique tendu

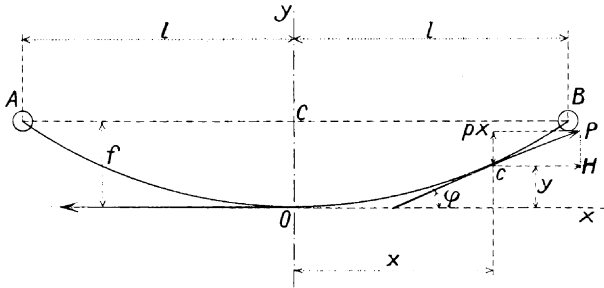


Fig. 40.

entre deux points A et B, de même niveau (fig. 40), écartés de $2l$. Quelle flèche faut-il donner au fil, lors du montage à la température T , pour que, à la température inférieure T_0 , la tension t_0 ne dépasse pas une limite admise? Supposons la longueur suffisamment grande pour que le poids total puisse être admis égal à celui de la projection horizontale du fil. S étant la section, γ le poids spécifique, le poids de l'unité de longueur sera $q = S\gamma$; le poids d'une longueur x aura pour valeur qx . Appelons P la tension en un point quelconque $C(x, y)$. Il vient :

$$P \sin \varphi = q \cdot x$$

$$P \cos \varphi = H.$$

H est la tension du fil au sommet O .

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{qx}{H} = \frac{dy}{dx}; \quad y = \frac{1}{2} \frac{qx^2}{H}.$$

La constante d'intégration est nulle, car pour $x = 0$, $y = 0$.

La courbe est une parabole définie par :

$$f = \frac{ql^2}{2H} \quad \text{ou} \quad H = \frac{ql^2}{2f}; \quad f \text{ est la flèche;}$$

$$y = \frac{qx^2}{2 \frac{ql^2}{2f}} = f \left(\frac{x}{l} \right)^2$$

La longueur $OB = s$ s'obtient par la formule :

$$\begin{aligned} s &= \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \int_0^l \sqrt{1 + \left(2 \frac{fx}{l^2} \right)^2} dx \\ &= \int_0^l \left[1 + 2 \left(\frac{fx}{l^2} \right)^2 \right] dx \\ s &= \int_0^l \left(1 + 2 \frac{f^2}{l^2} x^2 \right) dx = l \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

La longueur varie avec la température ; de même la tension augmente quand la température baisse. Appelons α_c le coefficient de dilatation calorifique, t et t_0 les tensions, s et s_0 les longueurs aux températures T et T_0 . On a :

$$s = s_0 \left[1 + \alpha (t - t_0) \right] \left[1 + \alpha_c (T - T_0) \right] = s_0 \left[1 + \alpha (t - t_0) + \alpha_c (T - T_0) \right]$$

On pourra écrire, à cause de l'égalité ci-dessus :

$$s = l \left(1 + \frac{2}{3} \frac{f_0^2}{l^2} \right) \left[1 + \alpha (t - t_0) + \alpha_c (T - T_0) \right]$$

$$s = l \left[1 + \frac{2}{3} \frac{f_0^2}{l^2} + \alpha (t - t_0) + \alpha_c (T - T_0) \right].$$

De même :

$$f_0 = \frac{q}{2} \frac{l^2}{H_0} = \frac{S\gamma l^2}{2St_0} = \frac{\gamma l^2}{2t_0}$$

$$f = \frac{\gamma l^2}{2t} ; \quad t = \frac{\gamma l^2}{2f}$$

$$s = l \left[1 + \frac{1}{6} \frac{\gamma^2 l^2}{t_0^2} + \alpha \left(\frac{\gamma l^2}{2f} - t_0 \right) + \alpha^c (T - T_0) \right]$$

$$= l \left(1 + \frac{2}{3} \frac{f^2}{l^2} \right)$$

$$f^3 - \frac{3}{2} l^2 \left[\frac{1}{6} \frac{\gamma^2 l^2}{t_0^2} + \alpha_c (T - T_0) - \alpha t_0 \right] f = \frac{3}{4} \alpha \gamma l^4 \quad (1)$$

Il y a lieu de prévoir, pour le poids spécifique, que le fil peut être chargé de neige en hiver.

On peut tenir compte de la flexion, d'ailleurs très faible. La tension, comme on verra dans l'étude de la flexion, est donnée par la formule $t = \frac{Mv}{I}$ et la courbure par

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M\alpha}{I} ; \quad \text{d'où } t = \frac{\frac{I}{\rho\alpha} v}{I} = \frac{v}{\rho\alpha} ; \quad \text{diamètre du fil } 2r ;$$

$$v = r ; \quad \text{donc } t = \frac{r}{\rho\alpha} . \quad \text{D'autre part } \frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} ; \quad \text{ici } \frac{dy}{dx} = \text{tg } \varphi = \frac{q^x}{H} ;$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{H} = \frac{1}{\rho} \quad \text{et} \quad t = \frac{r}{\alpha} \frac{q}{H} = \frac{\gamma}{\alpha} \frac{rS}{H} = \frac{\gamma}{\alpha} \frac{r}{H} .$$

La tension est donc indépendante de la portée. Ainsi, pour

$$\gamma = 0,008, \quad \alpha = \frac{1}{2\,200\,000} ; \quad \frac{H}{S} = 1\,000 \text{ kg/cm}^2 ; \quad r = 0,2 \text{ cm}.$$

$$t = \frac{0,008}{\frac{1}{2\,200\,000}} + \frac{0,2}{1\,000} = 3,5 \text{ kg/cm}^2.$$

L'équation (1) est du troisième degré et sa résolution est assez délicate. M. Cloeren a indiqué une méthode fort élégante pour la résolution des équations de ce genre

par la règle à calculs; il a de plus calculé des tableaux qui contiennent toutes les données utiles relatives aux fils de bronze les plus employés.

Etude de la traction par la théorie de l'élasticité. — Nous admettons encore les hypothèses établies au début de ce chapitre, l'effort P étant uniformément réparti sur la base du prisme et agissant dans son axe. L'axe est

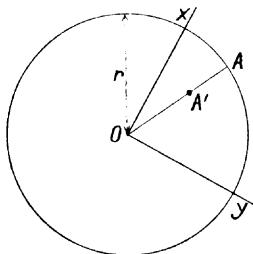


Fig. 41.

choisi comme axe des Z . Toute section faite par un plan normal sur cet axe, est dans les mêmes conditions que la base inférieure. Chaque élément de volume s'allonge d'une quantité proportionnelle au z correspondant et on peut écrire

$$w = cz.$$

Toute section primitivement circulaire (fig. 41) restera évidemment circulaire, mais un point situé primitivement en A viendra, par suite de la contraction transversale, en A' ; si r est le rayon et si nous supposons une contraction uniforme nous aurons $AA' = ar$. Choisissons deux axes OX et OY dans la section; les projections sont :

$$u = -ax; \quad v = -ay.$$

On tire de là :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -a; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -a; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = c,$$

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = c - 2a.$$

Les équations donnant les tensions deviennent :

$$t_x = \lambda (c - 2a) - 2\mu a$$

$$t_y = \lambda (c - 2a) - 2\mu a$$

$$t_z = \lambda (c - 2a) + 2\mu c$$

$$\begin{aligned} \theta_{xy} = \theta_{yx} = 2\mu \gamma_{xy} &= 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \\ \theta_{zy} = \theta_{yz} = 0; \theta_{xz} = \theta_{zx} &= 0. \end{aligned}$$

Pour satisfaire aux équations d'équilibre, observons que $t_z = c^t$, $\frac{dt_z}{dz} = 0$ et ainsi de suite; il faut donc qu'on ait $X = Y = Z = 0$. Les hypothèses ne sont donc admissibles que si aucune force n'agit sur la masse du prisme, même son poids.

Observons que sur la base inférieure agit la force P de même que sur la base d'encastrement; sur la surface latérale n'intervient que la pression atmosphérique dont nous négligeons l'action; donc les composantes de la force élastique ont pour expression :

$$X = mt_x; Y = nt_y; Z = pt_z.$$

Pour un élément de surface latérale la normale est perpendiculaire sur l'axe des Z et $p = 0$; donc $m^2 + n^2 = 1$; par suite, pour un tel élément, on pourra écrire :

$$\begin{aligned} X_l &= m [\lambda (c - 2a) - 2\mu a] \\ Y_l &= n [\lambda (c - 2a) - 2\mu a] \\ Z_l &= 0. \end{aligned}$$

Pour qu'il n'y ait pas de force latérale il faut qu'on ait

$$\lambda (c - 2a) - 2\mu a = 0.$$

Sur la base inférieure la normale est parallèle à l'axe des Z; $m = 0$, $n = 0$, $p = 1$ et

$$X_b = 0; Y_b = 0; Z_b = \lambda (c - 2a) + 2\mu c.$$

Sur cette base l'effort est $\frac{P}{S}$ et on peut écrire :

$$\lambda (c - 2a) + 2\mu c = \frac{P}{S} .$$

On peut maintenant déterminer c par les équations

$$\begin{aligned}\lambda (c - 2a) - 2\mu a &= 0 \\ \lambda (c - 2a) + 2\mu c &= \frac{P}{S}\end{aligned}$$

Résolvons par rapport à c :

$$\begin{aligned}\lambda c - 2a (\lambda + \mu) &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) c - 2a \lambda &= \frac{P}{S}\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2\mu} \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \frac{P}{S} \\ c &= \frac{\lambda + \mu}{\mu (3\lambda + 2\mu)} \frac{P}{S} = \frac{1 + \frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu} \frac{P}{S}.\end{aligned}$$

Or $e = c - 2a$; donc :

$$e = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{P}{S}.$$

On a essayé de se servir des formules précédentes pour établir une relation entre λ et μ . Dans l'hypothèse de Poisson, $\lambda = \mu$, on a :

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2} \frac{1}{5\lambda} \frac{P}{S} \\ c &= \frac{2}{5\lambda} \frac{P}{S} \\ e &= \frac{1}{5\lambda} \frac{P}{S}\end{aligned}$$

donc

$$c = 2e \quad \text{et} \quad a = \frac{1}{4} c.$$

Soit l longueur du prisme qui s'allonge d'une quantité Δ ; or $w = \epsilon z$; donc $\Delta = \epsilon l$ et $\epsilon = \frac{\Delta}{l} = \delta$ allonge-

ment de l'unité de longueur ou dilatation. On peut écrire :

$$\delta = \frac{\Delta}{l} = \frac{1 + \frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu} \frac{P}{S}$$

$$\frac{P}{S} = \frac{3\lambda + 2\mu}{1 + \frac{\lambda}{\mu}} \frac{\Delta}{l}$$

La quantité $\frac{3\lambda + 2\mu}{1 + \frac{\lambda}{\mu}}$ se désigne par $\frac{1}{\alpha}$, α étant le *coefficient de dilatation* ; $\frac{\Delta}{l} = \delta$; $\frac{P}{S} = t$; on a donc

$$\delta = \alpha t$$

qui est la loi de Hooke.

ESSAIS A LA TRACTION

Forme des éprouvettes. — Les éprouvettes sont des prismes circulaires ou aplatis droits terminés par deux têtes servant à les fixer dans les mâchoires de la machine à essayer. Le corps de l'éprouvette est dressé ou tourné et les têtes sont raccordées au corps par des congés (fig. 42) ; la longueur de la partie soumise à essai est limitée par deux traits fins ou par deux points de repère. Cette longueur est en général de 200 millimètres, plus 20 millimètres de prise pour les pinces de la machine. En Allemagne, en Autriche et en Suisse, avec cette longueur, on adopte $d = 20$ mm. En France, $l = 7,235 d$ ou $l = 8,2 \sqrt{S}$; les éprouvettes sont donc plus courtes ; elles sont encore plus courtes en Amérique. Il convient qu'une éprouvette ne soit ni trop longue, car alors interviennent des actions dues au poids et il y a des chances que le métal ne présente pas partout la même homo-

généité ; ni trop courte, car dans ce cas les essais sont soumis à l'influence des têtes.

Une éprouvette doit avoir géométriquement la même

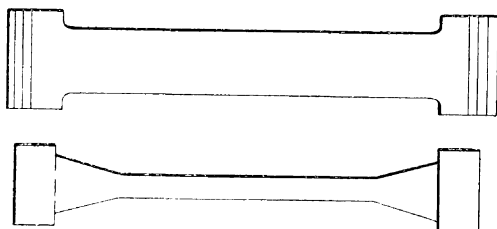


Fig. 42.

section partout et c'est pourquoi on la tourne ou on la dresse.

Machines à essayer. — Les dispositifs destinés à produire l'effort de traction suivant l'axe de l'éprouvette sont variés. Primitivement on faisait agir de simples poids sur l'éprouvette placée verticalement ; on a employé des dispositifs multipliant l'action des poids par des leviers en constituant une espèce de balance romaine ; ou bien des mécanismes à vis et écrou mobile. Aujourd'hui on utilise surtout des presses hydrauliques à chariot de traction.

Appareils pour mesurer l'effort produit. — Le poids agissant sur l'éprouvette est mesuré directement ou on connaît les rapports des bras de leviers ; l'extrémité de l'éprouvette est reliée à un système de leviers articulés dont le dernier reçoit l'action de poids destinés à équilibrer l'effort ; enfin on se sert avec les presses hydrauliques de colonnes de mercure ou de manomètres à air libre.

Conditions à réaliser dans les essais. — Il convient que

l'effort exercé sur l'éprouvette agisse bien dans l'axe de celle-ci et que l'éprouvette soit placée dans la machine de façon que l'effort se répartisse aussi uniformément que possible dans chaque section. M. Tetmajer, directeur du laboratoire d'essais de Zurich, monte à cet effet les éprouvettes dans un support terminé par une surface sphérique convexe s'appuyant sur la surface sphérique concave de la pièce qui fixe l'éprouvette à la machine. L'effort est ainsi dirigé suivant l'axe d'une sphère et l'axe de l'éprouvette passe par le centre de l'autre sphère. Il résulte de là que si la réaction de celle-ci, qui produit la tension, ne coïncide pas avec l'effort, il se produit un glissement des deux sphères jusqu'à ce que cette coïncidence ait lieu et que l'effort de traction soit dirigé suivant l'axe de l'éprouvette.

Une seconde condition est que le bâti de la machine à essayer soit solide pour ne pas se déformer pendant les essais ; la même résistance doit être présentée par les leviers d'action.

Une troisième condition est que le déplacement des leviers doit être le plus faible possible et les frottements réduits au minimum pour ne pas influencer la lecture des efforts. A la rupture le recul ne peut pas être considérable pour qu'il n'y ait pas d'influence nuisible sur les parties délicates des organes telles que les couteaux. L'effort de traction doit être progressif et ne doit pas agir par chocs ; il ne doit pas non plus s'annuler à certains moments. Il y aura donc lieu de surveiller l'aiguille du manomètre et d'augmenter l'effort quand il y a une tendance à baisser par suite des allongements subis par l'éprouvette. Il convient enfin que la température ambiante soit aussi constante que possible pendant les essais.

Instruments pour la mesure des allongements. — On

Appareil de Bauschinger. — Bauschinger, professeur à l'École technique supérieure de Munich, utilise l'appareil à lecture à miroir, bien connu des électriciens. Sa précision va jusqu'au $\frac{1}{10\ 000}$ de millimètre. Cet appareil comprend deux étaux E et E' (fig. 43) saisissant l'éprouvette par des couteaux aux extrémités de la longueur dont on doit mesurer l'allongement. L'un des étaux porte deux cylindres C et C' mobiles sur leur axe qui est perpendiculaire à celui de l'éprouvette. Sur ces cylindres sont montés, suivant un diamètre, de petits miroirs M; l'autre étau porte deux lames de ressort R s'appuyant fortement sur la surface des cylindres garnie d'émeri, et communiquant par suite à ceux-ci un mouvement de rotation quand les lames se déplacent parallèlement à l'axe de l'éprouvette. Appelons r le rayon des cylindres, α l'angle au centre dont ces cylindres tournent pour un allongement Δ de l'éprouvette; on a $\Delta = \alpha r$. Une échelle graduée GG' se trouve à la distance D des miroirs. On lit la graduation de cette échelle, réfléchié dans les miroirs, par les lunettes L. Supposons qu'au début de l'essai on lise le point D de la graduation. Sous l'action de l'allongement le miroir tourne d'un angle α ; l'angle d'incidence étant égal à l'angle de réflexion, c'est le point H de la graduation qu'on lira, le rayon MH faisant l'angle 2α avec MD. On a :

$$DH = d = D \operatorname{tg} 2\alpha$$

et

$$\frac{\Delta}{a} = \frac{rd}{D \operatorname{tg} 2\alpha}$$

$$\Delta = d \frac{r}{D} \frac{\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} .$$

Pour de petites valeurs de α on aura, avec une approximation suffisante,

$$\frac{\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1}{2}$$

et

$$\Delta = d \frac{r}{2D} .$$

L'allongement est donc largement amplifié. Ainsi, pour $r = 3,5$ mm. et $D = 3\ 500$ mm. on aura

$$\frac{3.5}{23\ 500} = \frac{1}{2000} ,$$

et si la division de l'échelle est de 4 millimètres, on pourra lire des allongements de $\frac{1}{500}$ mm. ; des divisions de 4 millimètres peuvent se lire à $\frac{1}{10}$ près ; la précision sera donc de $\frac{1}{5\ 000}$ mm. Si la longueur de l'éprouvette sur laquelle se fait l'essai est $l = 150$ mm., l'approximation sera de $\frac{1}{750\ 000}$ de l .

La lecture se fait des deux côtés et on prend la moyenne.

Appareil de Bach. — Bach préconise l'appareil suivant qui paraît très pratique et qui permet des lectures rapides. L'éprouvette A (fig. 44) est montée entre les mâchoires de la machine ; on installe sur cette éprouvette deux bagues reliées entre elles par quatre vis de pression. Une tige C, ayant exactement la longueur l sur laquelle porte l'essai, vient buter par un tourillon sphérique dans une crapaudine D d'un levier basculant autour d'un axe E ; l'extrémité F du levier est terminée en secteur plat actionnant par une lame métallique le poulieau G qui porte l'aiguille indicatrice H ; celle-ci se meut devant un cadran gradué. L'aiguille est aplatie à la pointe dans son plan moyen. Dans un instrument de ce genre un allongement de 1 millimètre de l'éprouvette donne lieu à un déplacement de 300 millimètres sur le cadran où on peut lire à $\frac{1}{10}$ de millimètre près.

Appareil de Durand-Claye. — Le dispositif est sensiblement le même que le précédent; mais ici le secteur F est denté ainsi que le poulieau G. Le système à bande

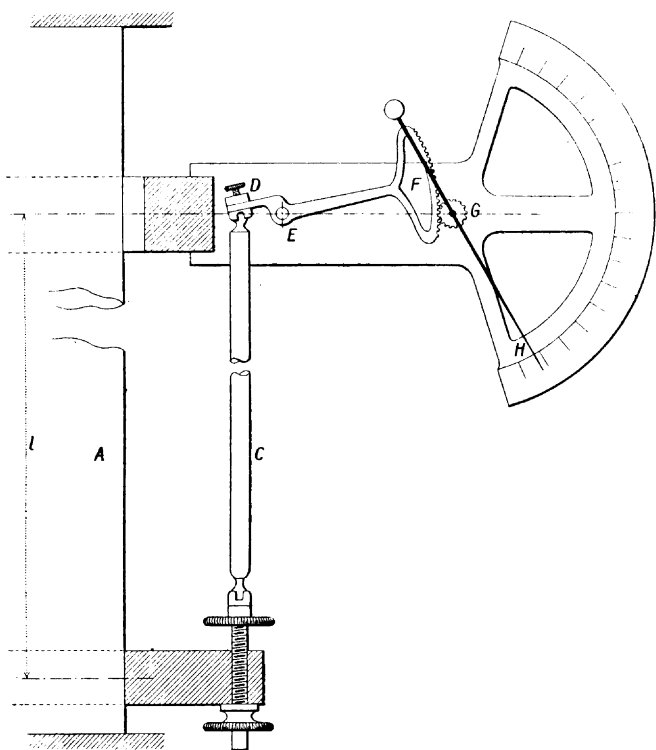


Fig. 44.

paraît préférable à cause du jeu que peuvent prendre les roues par suite de la variation de charge sur l'éprouvette.

Appareils à diagrammes. — Dans beaucoup d'installations modernes on se sert d'appareils enregistreurs qui

dispensent d'observations nombreuses et fatigantes tout en permettant d'étudier facilement dans toute leur continuité les phénomènes observés.

Il existe un grand nombre d'appareils à diagrammes ; ils sont basés tous sur le même principe : la pointe traçante doit se mouvoir en ligne droite ou suivant un arc de cercle pendant que le papier qui reçoit l'empreinte se déplace normalement ; un des deux mouvements est proportionnel à l'effort, l'autre à l'allongement.

Mesures à effectuer. — On détermine généralement dans les essais à la traction, les facteurs suivants :

1° La charge de rupture P_{max} et le coefficient de rupture R ;

2° La section S_1 à l'endroit de rupture ;

3° La longueur l_1 lors de la rupture.

De ces deux derniers facteurs on déduit la diminution de section et la dilatation en pour cent par les formules

$$100 \frac{S - S_1}{S} \text{ et } 100 \frac{l_1 - l}{l}.$$

On peut aussi déterminer :

4° Les différentes variations de longueur aux différentes charges ;

5° Les coefficients α et m ;

6° Les limites d'écoulement ;

7° Les limites d'élasticité et de second écoulement, s'il y a lieu ;

8° La courbe des dilatations et le travail élastique.

Résultats d'essais. — *Influence d'une partie tournée sur les éprouvettes.* — Il semble indifférent *a priori* d'appliquer un effort sur deux sections de grandeurs différentes à condition que la tension spécifique t soit la même dans les deux cas. Bach fait justement observer

que des fibres étirées séparées ne peuvent se comporter comme les fibres d'un même bloc, à cause de l'adhérence latérale. Les propriétés élastiques varieront donc avec la forme de la section.

Il résulte des essais de Kirkaldy que le coefficient de rupture R , pour des éprouvettes avec évidement tourné comme l'indique la figure 45, est plus grand que pour des éprouvettes dépourvues d'évidement. Ce fait provient de ce que les fibres de la section bb s'allongeant, il se produit en même temps une dilatation transversale; la matière située vers la section la plus forte en aa , aa s'oppose à cette contraction et évite la diminution de section.

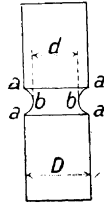


Fig. 45.

Vickers a complété les essais dans cette voie et a confirmé les résultats qui précèdent.

Bach a cherché l'influence de la longueur de l'évidement tourné. Il résulte de ses essais, avec du fer fondu et du fer corroyé, que pour une longueur d'évidement de 25 millimètres l'influence de la dilatation transversale n'est pas encore élevée, mais qu'elle croît rapidement quand cette longueur diminue. Pour les matières qui n'ont pas une contraction importante (la fonte, par exemple), l'influence d'un évidement ne se fait pas sentir; il paraît, au contraire, que la diminution de section due à l'évidement abaisse les chances d'une répartition uniforme des tensions et provoque plus rapidement la rupture. La différence est d'ailleurs très faible.

Influence de la longueur et du diamètre de l'éprouvette. — M. Barba, directeur du Creusot, a montré que les éprouvettes ayant des diamètres et des longueurs différentes d et l , le rapport $\frac{l}{d}$ restant constant (fer fondu), il se produit une diminution peu importante de la résis-

tance quand le diamètre augmente ; il y a indépendance de la contraction avec le diamètre, et de la dilatation en pour cent avec le diamètre et la longueur. Si les éprouvettes ont des diamètres différents, la longueur restant constante, la dilatation en pour cent croît quand les diamètres diminuent.

Bauschinger a vérifié ces résultats.

Influence de la forme de la section.

A. *Éprouvettes cylindriques de section rectangulaire et en double T (fer fondu).* — De l'une à l'autre et dans l'ordre on constate : une chute importante de la limite supérieure d'extensibilité ; une chute plus faible de la limite inférieure ; diminution de R.

B. *Éprouvettes à section rectangulaire, épaisseur constante, largeur variable (fer fondu).* — Le maximum d'allongement s'est produit pour le rapport $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$. La résistance décroît avec la largeur ; dans ce cas la répartition des tensions ne se fait probablement plus d'une manière uniforme.

C. *Éprouvettes circulaires et à section rectangulaire (fer fondu, fer corroyé).* Bauschinger trouve les résultats suivants :

1° Le coefficient de dilatation α est un peu plus petit pour des éprouvettes rondes que pour des éprouvettes plates de même matière ; pour de grosses éprouvettes plates il est un peu plus petit que pour des minces ;

2° La résistance R ne paraît pas être altérée ;

3° La contraction en pour cent pour les sections rectangulaires est indépendante de la grandeur de la section ; les éprouvettes rondes de fort diamètre ont une contraction un peu plus petite que celles de diamètre moindre ;

4° L'allongement en pour cent ne dépend pas de la forme de la section ni du rapport de la largeur à l'épaisseur pour les sections rectangulaires, mais elle croît avec la section et on a

$$\text{Allongement} = a + b\sqrt{S};$$

5° Mêmes résultats si la longueur de l'éprouvette est proportionnelle à la racine carrée de sa section ;

6° Il y a lieu de mesurer les allongements sur deux côtés opposés des éprouvettes ;

7° Il n'y a aucune relation entre la contraction et l'allongement ;

8° Les limites de proportionnalité et d'écoulement peuvent être complètement différentes dans une seule et même pièce de fer ou dans des pièces de fer de même origine, même si les autres influences telles que la forme des sections et leur grandeur disparaissent.

Influence de la durée des essais. — Il résulte des expériences de différents auteurs avec du fer fondu, du fer fin grain, du fer puddlé, de l'acier Wolfram dur que des essais conduits rapidement décèlent une résistance R plus grande, un allongement et une contraction plus faibles que des essais menés lentement.

Pour le cuir la résistance R diminue quand l'essai dure longtemps. Il en est de même des cordes en chanvre.

Influence de la température. — Les résultats précédents sont relatifs à une température moyenne de 20° C. Aux températures supérieures, les propriétés élastiques éprouvent une variation. Voici les résultats d'essais effectués par Bach :

A. Tôle de fer fondu.

1° Après une forte croissance de la résistance de

3 561 kgs/cm² à 20° C à 5 140 kg/cm² à 200° C, décroissance immédiate;

2° Chute d'allongement de rupture de 28,4 à 18,9 p. 100, puis accroissement ;

3° Variation de la contraction dans le même sens que les allongements.

B. Acier. — Diminution importante de l'allongement de rupture vers 200° C.

C. Bronze. — Au delà de 200° C la résistance R commence à diminuer, l'allongement de rupture tombe fortement.

CHAPITRE II

COMPRESSION

Hypothèses. — Les hypothèses que nous avons admises lors de l'étude des pièces soumises à l'extension conservent ici toute leur valeur. Les forces extérieures agissant sur le corps droit et prismatique donnent pour chaque section une résultante dont la direction coïncide avec celle de l'axe longitudinal droit. Il y a tendance au raccourcissement. Il convient cependant d'introduire une nouvelle condition; les pièces soumises à la compression sont de longueur peu considérable comparativement aux dimensions transversales, de façon que le flambement ne puisse se produire. En effet, ces pièces étant souvent soumises à des efforts latéraux (vent, application excentrique de l'effort, non homogénéité de la matière) leur longueur ne peut être grande par rapport aux autres dimensions, sans quoi il y aurait flexion : les pièces travaillant par contraction ne peuvent donc jamais atteindre une longueur comparable à celle des pièces travaillant à l'extension.

Pièce de section constante sur laquelle agit une force constante. — Toutes les formules établies à propos de la traction sont applicables à la compression; il suffit de changer α , coefficient de dilatation à l'extension, en α' coefficient à la compression; r coefficient admissible à l'extension, en r' coefficient admissible à la compression;

les tensions prendront le signe négatif ainsi que les dilatations.

Il viendra :

$$P = - tS$$

$$P \leq r'S$$

$$\Delta = - \alpha l t = \alpha l \frac{P}{S} .$$

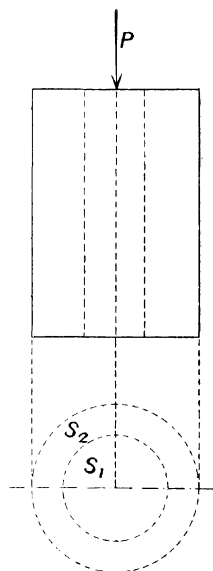


Fig. 46.

Pièces d'égal résistance à la compression. — On aura ici

$$S = S_0 e^{\frac{\alpha}{r^2} z}$$

et

$$\Delta = \alpha' \int \frac{P}{S} dz$$

si α' est supposé constant.

Application. — Considérons un prisme non homogène et non pesant soumis à une compression P (fig. 46); le prisme est constitué de deux gaines concentriques, l'une de surface S_1 en matière possédant le coefficient de dilatation α_1 ; l'autre de surface S_2 , formant anneau et de matière à coefficient de dilatation α_2 . On suppose l'effort P

transmis par un disque rigide recouvrant les deux gaines. Soient t_1 et t_2 les pressions spécifiques subies par les matières. On peut écrire :

$$t_1 S_1 + t_2 S_2 = P,$$

en admettant qu'il y ait répartition uniforme. Les raccourcissements ou les dilatations des prismes concentriques

doivent être les mêmes. On devra donc avoir :

$$\alpha_1 t_1 = \alpha_2 t_2$$

ou

$$t_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2$$

deux équations en t_1 et t_2 . Il vient :

$$t_1 = \frac{\frac{P}{\alpha_1}}{\frac{S_1}{\alpha_1} + \frac{S_2}{\alpha_2}} ; \quad t_2 = \frac{\frac{P}{\alpha_2}}{\frac{S_1}{\alpha_1} + \frac{S_2}{\alpha_2}}$$

On doit avoir aussi

$$t_1 = r' ; \quad t_2 = r'_1$$

r' et r'_1 , étant les coefficients admissibles, pour les matières considérées, du noyau et de son enveloppe. Les calculs précédents, étant donnée la variabilité des coefficient α_1 et α_2 , r' et r'_1 , ne présentent guère d'intérêt pratique.

Billes et cylindres. — Boussinesq, Galliot et Hertz ont étudié d'une façon toute spéciale, par la théorie mathématique de l'élasticité, les corps, obéissant à la loi de Hooke, qui se touchent suivant un point ou une génératrice de leurs surfaces. Si on comprime ces solides l'un contre l'autre il se produit, à l'endroit du contact, une déformation et les deux corps se touchent suivant une surface. Les auteurs cités se sont proposés de déterminer exactement les déformations subies dans ces conditions ainsi que les actions moléculaires ou tensions qui interviennent. Ils étudient les variations u , v et w examinées précédemment et qui ont à satisfaire aux conditions générales d'équilibre. Il résulte de la théorie de Boussinesq que le plan considéré de contact se transforme en un hyperboloïde de révolution, les actions moléculaires possédant la même valeur sur une circonférence

dont le centre se trouve sur l'axe des z normal au contact. Hertz trouve que la surface de contact est une ellipse. Cet auteur s'est livré également à une étude de la dureté des corps en partant du fait que celle-ci est une propriété élastique de la matière qui entre en jeu lorsque deux corps de même matière ou de matières différentes sont pressés l'un contre l'autre. Si la pression est suffisante pour que le contact laisse une empreinte durable, il se produit à la surface des corps une détérioration quelconque si l'on meut l'un des corps par rapport à l'autre. Pour pouvoir définir la dureté il faut donc connaître les propriétés de l'état élastique créé dans les deux corps par suite de leur contact. C'est ce qui a amené Hertz à établir la théorie dont il est fait mention ci-dessus. Les calculs présentent un intérêt trop spécial pour que nous nous arrêtions à ce sujet. Nous nous contenterons de discuter, avec Bach, les résultats auxquels on a été amené par la théorie.

Soient donc deux corps courbes pressés l'un contre l'autre par un effort P et se touchant suivant une portion de leur surface très petite vis-à-vis des surfaces totales. Il s'agit, par exemple, de deux billes, d'un cylindre et d'un plateau unis ou de deux cylindres.

Nous admettons que les matières sont isotropes ; que la loi de Hooke est applicable ; que le coefficient de dilatation est le même à la traction qu'à la compression.

Cas de deux billes. — Soient : r_1 et r_2 les rayons des billes ; α_1 et α_2 les coefficients de dilatation à la pression et à la traction pour chacune des billes ; m_1 et m_2 les rapports de contraction. Par une suite de développements Hertz arrive, pour la distance y dont les deux billes pénètrent l'une dans l'autre, à la formule :

$$y = \sqrt[3]{\left[\frac{3}{4} P \left\{ \left(1 - \frac{1}{m_1^2} \right) \alpha_1 + \left(1 - \frac{1}{m_2^2} \right) \alpha_2 \right\} \right]^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}$$

et pour le rayon de la surface de pression :

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} P \frac{\alpha_1 \left(1 - \frac{1}{m_1^2}\right) + \alpha_2 \left(1 - \frac{1}{m_2^2}\right)}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}}$$

La pression maximum au milieu de la surface de pression a pour valeur :

$$t_{\max} = 1,5 \frac{P}{\pi a^2}$$

c'est-à-dire 1,5 fois la tension obtenue en supposant une répartition uniforme. Avec $m_1 = m_2 = m$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ et en tenant compte de l'expression de a :

$$t_{\max} = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{P \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^2}{\alpha^2 \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^2}}$$

et pour $m = \frac{10}{3}$:

$$t_{\max} = 0,388 \sqrt[3]{\frac{P}{\alpha^2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^2}$$

$$y = 1,23 \sqrt[3]{P^2 \alpha^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}$$

$$a = 1,11 \sqrt[3]{\frac{P \alpha}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}}$$

Cas d'une bille et d'un plateau uni. — Dans les formules précédentes il suffit de faire $r_1 = r$ et $r_2 = \infty$; il vient :

$$t_{\max} = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{P}{\alpha^2 \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^2 r^2}}$$

$$P = \frac{2}{3} \pi^3 \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) t_{\max}^3 r^2$$

et, en fonction du diamètre $d = 2r$:

$$P = kd^2 \quad (1)$$

si

$$k = \frac{\pi^3}{6} \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^2 t_{\max}^3 \quad (2)$$

Cas de deux cylindres. — Les cylindres sont de longueur l et on admet que la pression spécifique $\frac{P}{l}$ est réalisée. La largeur b suivant laquelle les deux cylindres se touchent a pour expression :

$$b = 4 \sqrt{\frac{P}{\pi l} \frac{\alpha_1 \left(1 - \frac{1}{m_1^2}\right) + \alpha_2 \left(1 - \frac{1}{m_2^2}\right)}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}}$$

La plus grande pression, qui se produit au milieu de la surface de contact, a pour valeur :

$$t_{\max} = \frac{4}{\pi} \frac{P}{bl}$$

c'est-à-dire $\frac{4}{\pi}$ fois la pression qui correspond à une répartition uniforme. Pour des matières identiques $m_1 = m_2 = m$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ et

$$b = 4 \sqrt{\frac{2P}{\pi l} \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}}$$

Cas d'un cylindre et d'un plateau uni. — Il suffit de faire dans les formules précédentes $r_1 = r$ et $r_2 = \infty$. Il vient :

$$b = 4 \sqrt{\frac{2}{\pi} \alpha \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \frac{P}{l} r}$$

$$t_{\max} = \sqrt[3]{\frac{P}{2\pi\alpha \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) lr}}$$

et, en fonction du diamètre $d = 2r$,

$$P = kld$$

si

$$k = \pi\alpha \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) t_{\max}^3$$

Discussion. — A la suite de nombreux essais, effectués avec toute la précision désirable, Stribeck a constaté que la charge admissible pour des billes d'acier trempé ainsi que leur surface de roulement plane, d'une exécution parfaite, pouvait être prise égale à $P = 50 d^2$. Cet auteur a trouvé les valeurs suivantes pour les billes d'acier :

$$\alpha = \frac{1}{2\,120\,000}; \quad m = \frac{10}{3}$$

Introduisons ces valeurs dans les équations (1) et (2) :

$$50 d^2 = \frac{\pi^5}{6} \frac{1}{21\,200\,00^2} \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{10}{3}\right)^2}\right]^2 d^2$$

d'où l'on tire

$$t_{\max} = 37\,450 \text{ kg/cm}^2.$$

Ce chiffre est de beaucoup supérieur à celui qui peut être considéré comme admissible. C'est ce qu'a montré M. Deslandres. Stribeck, par des recherches directes, a trouvé que la limite de proportionnalité pour l'acier trempé est seulement de 9000 kg/cm^2 . Observons que dans l'élément moyen des surfaces de contact règnent trois tensions maxima effectives : t_{\max} , $0,8 t_{\max}$ et $0,8 t_{\max}$. Rappelons les

formules de la dilatation composée

$$\delta_1 = \alpha \left(t_1 - \frac{t_2 + t_3}{m} \right); \quad \delta_2 = \alpha \left(t_2 - \frac{t_3 + t_1}{m} \right);$$

$$\delta_3 = \alpha \left(t_3 - \frac{t_1 + t_2}{m} \right)$$

Introduisons la valeur $m = \frac{10}{3}$, il vient :

$$\delta_1 = \alpha \left(t_{\max} - \frac{0,8 t_{\max} + 0,8 t_{\max}}{\frac{10}{3}} \right) = \alpha (1 - 0,3 \cdot 2 \cdot 0,8) t_{\max}$$

$$\delta_1 = 0,52 t_{\max}$$

soit seulement les $\frac{52}{100}$ de la pression totale que produirait t_{\max} seulement. On aurait donc :

$$\frac{9\,000}{0,52} = 17\,300 \text{ kg/cm}^2.$$

Cette valeur, introduite dans les équations (1) et (2) fournit

$$k = \frac{\pi^3}{6} \frac{1}{2\,120\,000^2} (1 - 0,3^2)^2 (17\,300)^3 = 5$$

et

$$P = 5 d^2$$

au lieu de

$$P = 50 d^2,$$

formule obtenue par recherche directe. Donc, en introduisant dans la formule de Hertz pour la plus grande tension la tension qui correspond à la limite de proportionnalité, donc supérieure au coefficient considéré comme admissible, la charge permise P n'est qu'un dixième de celle que les recherches directes autorisent à supporter. Il suit de là que les équations de Hertz ne peuvent être utilisées

en pratique et qu'il y a lieu en tout cas de déterminer le coefficient k de ces formules et non de le calculer par la formule (2). On arrive plus aisément au résultat de la manière suivante.

Soit (fig. 47) une bille pressée entre deux autres de même diamètre, par une force P . Par suite de la compressibilité de la matière, elles se touchent suivant une petite surface; C est un point de la circonférence primitive MCA . Pour ce point, le raccourcissement dans le sens de P est :

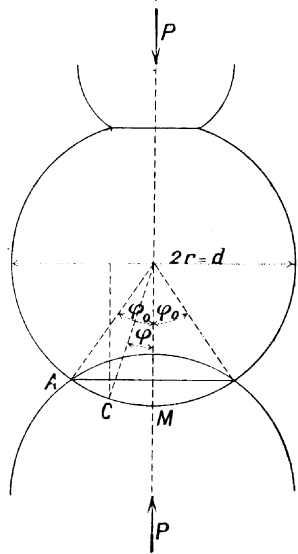


Fig. 47.

$$x = r (1 - \cos \varphi_0) - r (1 - \cos \varphi) = r (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$$

φ et φ_0 sont très petits ; on a :

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \varphi^2} = 1 - \frac{\varphi^2}{2} ; \quad \cos \varphi_0 = 1 - \frac{\varphi_0^2}{2}$$

$$x = r \frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{2} ; \quad \frac{x}{r} = \frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{2}$$

En admettant que ce raccourcissement est symétrique, il vient :

$$\delta = \frac{x}{r} = \frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{2}$$

$$t = \frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{2x}$$

des forces étant supposées ne pas agir dans la direction normale à x . La fibre qui peut se trouver dans le sens de

la charge, entourée comme elle est de matière, ne peut se dilater latéralement. En raison de cet état de choses, il convient de multiplier l'expression de t par un coefficient ψ à déterminer par expérience. Dès lors

$$t = \psi \frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{2\alpha}$$

Le maximum de t se produit par $\varphi = 0$, ou au milieu et on a :

$$t_{\max} = \psi \frac{\varphi_0^2}{2\alpha}.$$

L'équation d'équilibre donne :

$$P = \int_0^{\varphi_0} t \, 2\pi r \varphi r d\varphi = \frac{\psi\pi}{\alpha} r^2 \int_0^{\varphi_0} (\varphi_0^2 - \varphi^2) \varphi d\varphi = \frac{\psi\pi}{4\alpha} \varphi_0^4 r^2$$

avec

$$\varphi_0 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\psi} t_{\max}}$$

$$P = \frac{\pi}{\psi} \alpha t_{\max}^2 r^2 = \frac{\pi}{4\psi} \alpha t_{\max}^2 d^2$$

$$P = k d^2$$

avec

$$k = \frac{\pi}{4\psi} \alpha t_{\max}^2,$$

formule complètement analogue à l'équation (1).

Pour le cas de cylindres, les mêmes développements conduisent à la formule

$$P = k l d$$

$$k = 0,94 \sqrt{\frac{\alpha t_{\max}^2}{\psi}}$$

Observons que la mise hors service des billes a lieu souvent non parce qu'elles ont été soumises à une charge

trop considérable, mais parce qu'il se produit, même pour de faibles tensions, des fêlures entourant la surface de pression.

Influence d'une variation de température. — Considérons une tige de longueur l attachée à ses extrémités d'une manière invariable de façon qu'elle ne puisse se dilater. Soumise à une variation de température de t^0 , elle subit un allongement $\alpha_c l t^0$ si α_c est le coefficient de dilatation calorifique. Comme la tige ne peut se dilater, tout se passe comme si elle était comprimée et comme si elle subissait un raccourcissement $\alpha_c l t^0$; ce raccourcissement correspond à une dilatation

$$\delta = \alpha_c l t^0 = \alpha t;$$

d'où

$$t = \frac{\alpha_c}{\alpha} l t^0,$$

tension de compression à laquelle est soumise la tige du fait de la variation de température et à laquelle il faut ajouter la tension de charge. Il convient donc de tenir compte avec soin dans les calculs des variations de température qui pourraient se produire et de ménager aux pièces la possibilité de se dilater calorifiquement. M. Flament fait observer justement que le danger est surtout à craindre pour les tiges à section variable. Considérons une tige de longueur l et dont la section transversale S est liée à l'abscisse x par une fonction connue $S = f(x)$. Sous l'action d'un effort P exercé par les appuis, l'élément dx , de section S , subit une modification de longueur $\frac{P dx x}{S}$; la somme de ces modifications doit être égale à $\alpha_c l t^0$, modification produite par la variation t^0 de tempéra-

ture. On a donc :

$$\int_0^l \frac{P dx \alpha}{S} = l \alpha t^0$$

$$P = \frac{l \alpha_c t^0}{\alpha \int_0^l \frac{dx}{S}}$$

Cet effort P, supposé réparti sur la plus petite section transversale S_0 , donne la charge maximum $\frac{P}{S_0}$ à laquelle la variation de température soumet la pièce. Soit, comme loi simple, $S = S_0 \left(1 + \frac{2x}{l}\right)$, applicable à $\frac{l}{2}$. On a :

$$P = \frac{\frac{l}{2} \alpha_c t^0}{\alpha \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{S}}$$

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{S} = \frac{1}{S_0} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{1 + \frac{2x}{l}} = \frac{l}{2S_0} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{d\left(1 + \frac{2x}{l}\right)}{1 + \frac{2x}{l}}$$

$$= \frac{l}{2S_0} \left[\log_n \left(1 + \frac{2x}{l}\right) \right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{l}{2S_0} \log_n 2$$

$$P = \frac{\frac{l}{2} \alpha_c t^0}{\alpha \frac{l}{2S_0} \log_n 2} ; \quad \frac{P}{S_0} = \frac{\alpha_c t^0}{\alpha \log_n 2} = \frac{\alpha_c t^0}{\alpha \cdot 0,69} = 1,4 \frac{\alpha_c t^0}{\alpha}$$

L'effort par unité de surface sur la section la plus étroite est donc à peu près une fois et demie plus grand que si la tige avait une section constante ; dans une telle tige, une variation de température de 30° C donnerait lieu dans la section la plus fatiguée à un effort de 1 000 kilogrammes par centimètre carré, en admettant

$$\alpha = \frac{1}{2\,000\,000} ; \quad \alpha_c = 0,0000116.$$

Il y a donc lieu, dans l'étude des pièces comprimées, de tenir compte des variations de température auxquelles elles peuvent être soumises et éventuellement de leur ménager la possibilité de se dilater.

ESSAIS A LA COMPRESSION

Généralités. — Sous l'influence d'une compression, les corps prismatiques tendent à se raccourcir dans le sens de leur axe en même temps qu'il se produit un gonflement des sections transversales. Les définitions des divers facteurs qui interviennent dans l'étude de l'élasticité des corps et que nous avons données au chapitre de la traction peuvent être renouvelées ici ; il suffit de changer le mot extension en pression, allongement en raccourcissement. Sur une machine à essayer, lors de la rupture, les phénomènes sont cependant différents : certaines matières, comme la roche dure, se pulvérisent, d'autres, comme le plomb, s'écrasent. Dans le premier cas, la pulvérisation donne lieu à deux pyramides s'opposant par le sommet, c'est la matière centrale qui s'est écroulée ; dans le second cas, il y a renflement correspondant à un mouvement de la matière vers l'intérieur. La charge sur laquelle se produit la désagrégation de la matière, quelle que soit la forme que prend cette désagrégation, s'appelle charge de rupture et se désigne par R' .

On a

$$R' = \frac{P_{\max}}{S}$$

Quoique en réalité il y ait lieu, pour être exact, de prendre pour S la section de rupture, il est d'habitude de choisir la section primitive.

Coulomb pensait que la rupture est produite par glissement et que l'effort P (fig. 48) de pression donne deux

composantes : $P \sin \alpha$ dans le plan de glissement, $P \cos \alpha$ normale à ce plan. La résistance au glissement étant désignée par R'' , S étant la section du prisme, on

a :

$$P \sin \alpha = R'' \frac{S}{\cos \alpha}$$

$$\frac{P}{S} = R'' \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

Si $\alpha = 45^\circ$, ou est maximum, le glissement résulte de l'effort minimum P ; en introduisant $R'' = \frac{P}{S}$, il vient

$$R = 2R''$$

La résistance à la compression devrait donc être le double de la résistance au glissement.

Hertz émet l'idée que la rupture par compression se produit quand la dilatation latérale a acquis la valeur de la dilatation longitudinale dans le cas de rupture par traction. La dilatation longitudinale est de trois à quatre fois la dilatation transversale ; la résistance à la compression serait donc de trois à quatre fois la résistance à la traction, ce qui est à peu près exact pour la fonte.

Observons que si le corps est empêché de se dilater latéralement, la matière présente une résistance insurmontable. La relation $\delta = \alpha t$ n'a donc plus de valeur dès que le corps est placé à l'intérieur d'une gaine rigide. Le même effet se présente au contact des faces d'une éprouvette en relation avec les plateaux d'une machine à essayer ; le frottement naturel qui se produit entre ces surfaces provoque une altération des phénomènes élastiques vers les extrémités de l'éprouvette, la dilatation latérale est en conséquence supérieure vers le milieu du corps soumis à l'essai que vers ses extrémités. L'influence est d'autant plus considérable que l'éprouvette est plus courte.

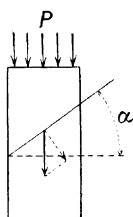


Fig. 48.

Conditions d'essais. — L'éprouvette doit être installée sur la machine de façon que l'effort de compression se répartisse le plus uniformément possible sur la section ; à cet effet, l'un des deux plateaux de la machine est mobile et les faces d'appui de l'éprouvette sont parfaitement rabotées parallèlement. On emploie les machines relatives aux essais de traction en munissant leurs attaches d'un appareil d'inversion. Il convient de ne pas interposer des feuilles de plomb qui s'écrasent et donnent lieu à une inégale répartition.

Résultats d'essais. — *Charge agissant sur la surface totale des extrémités des éprouvettes.* — I. Pour la fonte, Bach trouve que la résistance à la compression peut aller jusqu'à 7500 kg/cm², alors qu'elle n'est de 1860 kg. à la traction ; les deux résistances sont donc dans le rapport $\frac{1}{4}$. De plus, la résistance à la compression augmente quand la hauteur des éprouvettes diminue ; elle est plus grande pour des sections circulaires que pour des sections carrées.

II. Bauschinger pose pour le grès :

$$R' = \left(\alpha + \beta \frac{\sqrt{S}}{h} \right) \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{S}}{u}}{\frac{1}{4}}}$$

formule valable tant que $h \leq 5a$, $a^2 = S$ ou $a = \sqrt{S}$, S section du prisme en centimètres carrés ; u périmètre en centimètres ; h hauteur du prisme en centimètres ; α et β constantes ; R' charge de rupture en kg/cm². Le même auteur a proposé la formule plus simple

$$R' = \left(\alpha + \beta \frac{\sqrt{S}}{h} \right) \frac{\sqrt{S}}{\frac{u}{4}}$$

Pour des prismes de section rectangulaire, grès suisse à fin grain, le même expérimentateur a trouvé $\alpha = 310$ et $\beta = 340$, pourvu que la hauteur h ne dépasse pas la longueur du côté. Dans les formules précédentes, la direction de la pression est supposée normale au lit. Si elle est parallèle au lit, $\alpha = 262$, $\beta = 320$, la hauteur h dépassant de beaucoup les dimensions de la section. Avec du grès multicolore de Heilbronn, direction de la pression parallèle au lit, il vient, pour des prismes carrés, $\alpha = 347$, $\beta = 121$; pour des prismes circulaires $\alpha = 369$, $\beta = 115$, et, pour tous les prismes, $\alpha = 358$, $\beta = 118$.

III. Bach, essayant des éprouvettes en plomb, conclut à une augmentation de résistance R' corrélative à une réduction de la hauteur. La résistance moyenne a varié de 75 à 150 kg/cm².

Charge agissant sur une partie seulement de la surface totale des éprouvettes. — Bauschinger montre que la résistance R' est diminuée.

CHAPITRE III

FLEXION

Hypothèse. — Nous ne considérons que les pièces longues ou prismatiques. Une pièce est soumise à la flexion quand, sous l'action des forces extérieures, la courbure de son axe longitudinal varie.

FLEXION DES PIÈCES A AXE DROIT

Hypothèse. — Le corps soumis à flexion est une pièce prismatique à axe primitivement droit. Les forces extérieures agissant sur lui donnent naissance dans chaque section à un couple dont le plan est normal à la section et à un effort situé dans la section.

Toute section transversale plane avant la flexion est supposée rester transversale et plane après la flexion ; elle conserve donc sa forme et ses dimensions et reste perpendiculaire à la fibre moyenne. Cette hypothèse, introduite par Bernouilli, sert depuis les travaux de Navier, de point de départ à la théorie de la flexion des prismes. Les expérimentateurs modernes, Bach, Föppl, etc. font observer que, même pour les matériaux auxquels la loi de Hooke n'est pas applicable, l'hypothèse de Bernouilli est suffisamment exacte.

Relation fondamentale. — Considérons (fig. 49) une pièce prismatique droite et deux sections infiniment voi-

sines S et S' . Par suite de la flexion les fibres supérieures sont étendues, les fibres inférieures sont contractées. Il existe donc une fibre ou une zone de fibres qui demeurent ce qu'elles étaient avant la flexion. C'est la *fibre neutre*. Ceci, dans la direction de l'axe du prisme. Nous verrons que dans chaque section il y a également une fibre neutre,

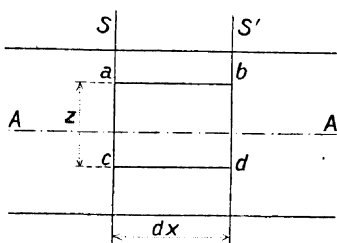


Fig. 49.

la partie supérieure de la section étant étendue, la partie inférieure contractée.

Soit donc une fibre ab qui s'allonge et devient $a'b'$ après la flexion (fig. 50); soit cd la fibre neutre qui reste de même longueur $c'd' = cd = dx$ après la flexion. On a $a'b' > dx$; AA est l'axe longitudinal de la pièce. Soit z distance de ab à cd . Les sections S et S' étant restées transversales et planes se couperont suivant un angle SOS' . Les deux triangles semblables $oa'b'$ et $o'c'd'$ donnent :

$$\frac{a'b'}{c'd'} = \frac{oa'}{oc'}$$

$$\frac{dx(1 + \delta)}{dx} = \frac{\rho + z}{\rho}$$

ρ est le rayon de courbure de la fibre neutre, δ la dilatation. On tire de là

$$\delta = \frac{z}{\rho}$$

La dilatation d'une fibre est donc proportionnelle à sa distance z à la fibre neutre et inversement proportionnelle au rayon de courbure ρ . Admettons que la matière considérée obéit à la loi de Hooke; en général il ne s'exerce aucun effort transversal et l'ellipsoïde d'élasticité devient une droite. On a :

$$\delta = \alpha t; \quad t = \frac{\delta}{\alpha} = \frac{z}{\alpha \rho} \quad (1)$$

relation fondamentale de la flexion des pièces primitivement droites.

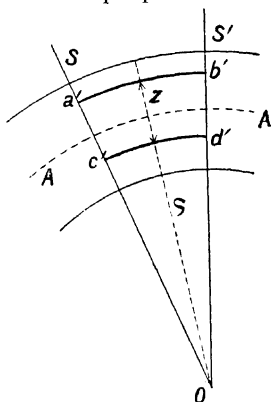


Fig. 50.

Éléments qui interviennent dans la flexion des pièces primitivement droites. — Considérons (fig. 51), une pièce prismatique droite AB et coupons-la par un plan normal S sur l'axe longitudinal OE. Nous allons exprimer que la portion de la pièce située à droite de S est en équilibre sous l'action des tensions intérieures et des forces extérieures dont nous avons supposé a priori le plan normal sur S. Nous supposons en outre que ce plan passe par le centre de gravité O de la section S, sans quoi les forces extérieures donneraient naissance à une composante située dans la section et ne passant pas par son centre de gravité; cette composante aurait une tendance à faire tourner la section et c'est un cas de torsion que nous n'étudions pas dans ce chapitre. Nous admettons donc que la résultante F des forces extérieures coupe la section S en un point C et qu'elle donne lieu à deux composantes : l'une P perpendiculaire sur la section S, l'autre T dans cette section et passant par le centre de gravité. Nous rabattons le plan projetant MN de la résultante

tante F des forces extérieures sur le plan de la section pour mieux indiquer comment se décompose la résultante; MN s'appelle *le plan des forces extérieures*; par hypothèse il renferme donc l'axe longitudinal du prisme; T se nomme *effort tranchant*.

Au centre de gravité O nous pouvons appliquer, sans rien changer au système des forces, deux efforts extérieurs égaux à P et opposés.

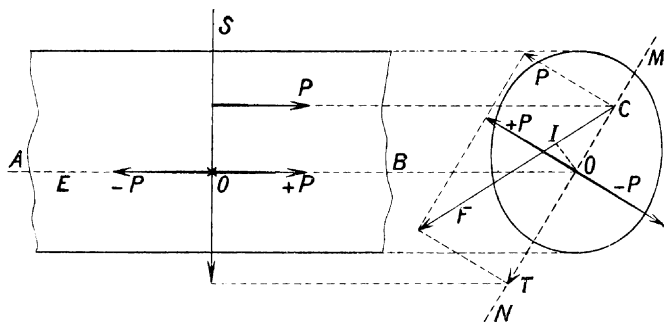


Fig. 31.

rières comprendra donc : 1° un effort P appliqué en O , au centre de gravité de la section; cet effort est positif s'il tire sur la section, négatif s'il la comprime; 2° un couple $P \times OC$. Le couple $P \cdot OC$ s'appelle le *moment fléchissant*; c'est le moment de la résultante F des forces extérieures par rapport au centre de gravité O ; on a, en effet, $P \cdot OC = F \cdot OI$, I pied de la perpendiculaire abaissée de O sur F ; car $P = F \cos FCP$ et $OI = OC \cos COI = OC \cos FCP$; d'où $P \cdot OC = F \cos FCP \cdot OC = F \cos FCP \cdot \frac{OI}{\cos FCP} = F \cdot OI$.

Les tensions intérieures sont de natures différentes : 1° des efforts t normaux à la section; 2° des efforts tangentiels θ dans la section; 3° des efforts tangentiels nor-

maux à P et à T; ces derniers efforts sont en général nuls, il y a lieu de les négliger.

Établissons d'abord les trois équations d'équilibre de translation, dans le sens de P, de T et d'une normale à P et T (fig. 52); cette dernière équation sera identiquement

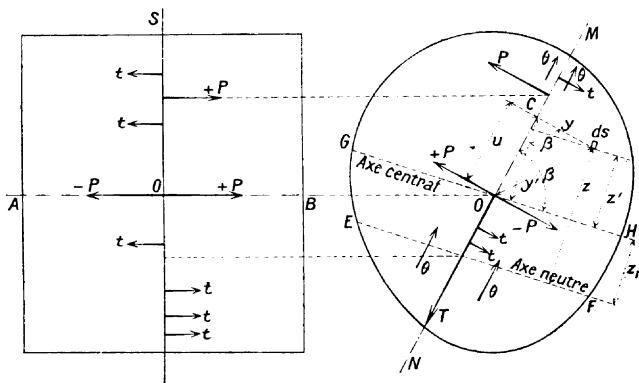


Fig. 52.

nulle puisqu'aucun effort extérieur n'agit dans ce sens et que nous supposons en outre les efforts intérieurs θ' nuls. Appelons ds un élément de surface à la distance z de l'axe EF, intersection avec la section S, de la fibre neutre $c'd'$ de la figure 50. Au-dessus de EF la section sera étendue, en dessous elle sera comprimée; EF s'appelle *axe neutre* et la parallèle GH, menée par le centre de gravité O, est l'*axe central*. Désignons par z_1 la distance des deux axes. Il vient :

$$P = \int \frac{z ds}{\alpha \rho} \quad (2) \quad \text{ou} \quad P = \int \frac{z' + z_1}{\alpha \rho} ds$$

$$T = \int \theta ds \quad (3)$$

Établissons maintenant l'équilibre de rotation autour de trois axes :

1° Autour de l'axe central GH. Le moment fléchissant par rapport au centre de gravité O ou P. OC se désigne par M. Le moment autour de l'axe GH a pour expression $P \cdot CD = P \cdot OC \sin \beta = M \sin \beta$, en désignant par β l'angle que fait le plan MN des forces extérieures avec l'axe central GH. Le moment d'une tension t appliquée normalement sur ds , par rapport à GH, est $t ds \cdot z'$. L'équation d'équilibre sera donc :

$$M \sin \beta = \int \frac{z' + z_1}{\alpha \rho} z' ds \quad (4)$$

Le moment des efforts tangentiels par rapport à GH est nul.

2° Autour de MN. Il vient :

$$o = \int \frac{z' + z_1}{\alpha \rho} y ds \quad (5)$$

3° Autour de l'axe de la pièce :

$$o = \int y' \theta ds.$$

On néglige cette dernière équation, car, en général, la résultante des efforts θ passe par le centre de gravité O.

Nous arrivons donc aux cinq équations (1), (2), (3), (4) et (5); nous pouvons les transformer. L'équation (1) devient :

$$t = \frac{z}{\alpha \rho} = \frac{z' + z_1}{\alpha \rho} = \frac{z'}{\alpha \rho} + \frac{z_1}{\alpha \rho} \quad (1)$$

Examinons (2). On a

$$P = \int \frac{z ds}{\alpha \rho}$$

Admettons que le coefficient de dilatation α est constant pour la matière considérée :

$$P = \frac{1}{\alpha \rho} \int z ds$$

$\int z. ds$ est le moment de la surface par rapport à l'axe neutre EF; ce moment a pour expression Sz_1 ; d'où :

$$P = \frac{Sz_1}{\alpha\rho} \quad (2')$$

L'équation (3) reste actuellement telle quelle :

$$T = \int \theta ds \quad (3')$$

Reprenons l'équation (4) :

$$M \sin \beta = \int \frac{z' + z_1}{\alpha\rho} z' ds$$

$$M \sin \beta = \frac{1}{\alpha\rho} \int (z' + z_1) z' ds = \frac{1}{\alpha\rho} [z_1 \int z' ds + \int z'^2 ds]$$

$\int z' ds$ est le moment de la surface par rapport à l'axe GH qui passe par le centre de gravité O; il est nul, par définition du centre de gravité. Il reste donc :

$$M \sin \beta = \frac{1}{\alpha\rho} \int z'^2 ds.$$

Or $\int z'^2 ds$, somme des produits de chacun des éléments d'une surface par le carré de la distance de l'élément considéré à un axe, est le *moment d'inertie* de la surface par rapport à cet axe. Le moment d'inertie est pris ici par rapport à l'axe central GH qui passe par le centre de gravité. Désignons-le par I. Il vient :

$$M \sin \beta = \frac{I}{\alpha\rho} \quad (4')$$

Examinons l'équation (5) :

$$o = \int \frac{z' + z_1}{\alpha\rho} y ds$$

$$o = \int z' y ds + z_1 \int y ds$$

$\int y ds = o$ puisque l'axe MN passe par le centre de gra-

tivité ; donc $\int z'y ds = 0$; mais $z' = u \sin \beta - y \cos \beta$
donc

$$\sin \beta \int u y ds - \cos \beta \int y^2 ds = 0$$

et

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\int y^2 ds}{\int u y ds} \quad (5')$$

Les équations (1'), (2'), (3'), (4') et (5') permettent de déterminer les inconnues. On connaît les forces extérieures, donc le plan MN et le moment M. L'équation (5') fournira l'angle β car $\int y^2 ds$ est le moment d'inertie de la surface par rapport à MN et on peut calculer $\int u y ds$. On connaît dès lors l'axe central GH ; (4') fournit ensuite ρ et (2'), z_1 ; d'où l'axe neutre EF. Et on peut en conséquence calculer la tension t par la formule (1'). Il est possible d'ailleurs de déterminer t en fonction de quantités connues ; (2') donne :

$$\frac{z_1}{\alpha \rho} = \frac{P}{S}$$

(4') fournit

$$\frac{1}{\alpha \rho} = \frac{M \sin \beta}{I}$$

et on a :

$$t = \frac{P}{S} + \frac{M \sin \beta}{I} z' \quad (I)$$

D'autre part (4') peut s'écrire :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha M \sin \beta}{I} \quad (II)$$

(3') reste :

$$T = \int \theta ds \quad (III)$$

(5') reste aussi :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\int y^2 ds}{\int u y ds} \quad (IV)$$

Le système d'équations (I), (II), (III), IV) résoud le problème.

Définitions. — La flexion est dite *simple* quand $P = 0$; il faut donc que dans ce cas la résultante F des forces

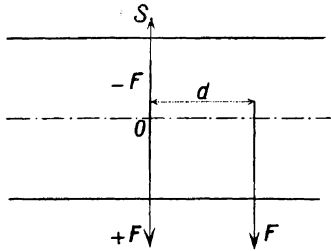


Fig. 53.

extérieures soit parallèle à la section ou normale sur l'axe longitudinal du prisme. Au centre de gravité O de la section (fig. 53) on peut appliquer deux efforts égaux

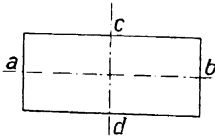


Fig. 54.

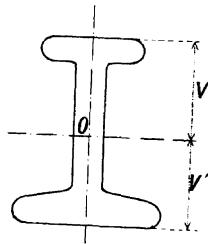


Fig. 55.

à F et de sens contraires; le système comprendra donc un effort tranchant F dans la section et un moment fléchissant $M = F.d$.

La flexion est dite *composée* quand P n'est pas nul. La flexion est *plane* quand, la section possédant un axe de symétrie, le plan MN des forces extérieures renferme cet axe. Tous les diamètres d'une section circulaire ou

annulaire sont des axes de symétrie. Pour une section rectangulaire les droites ab et cd (fig. 54) passant par le milieu des côtés opposés, sont de symétrie.

La flexion est *gauche* quand l'axe des forces extérieures ne coïncide pas avec un axe de symétrie.

Quand la flexion est plane, l'axe MN des forces extérieures est normal sur l'axe central GH et sur l'axe neutre EF. Ce fait, évident à priori, ressort d'ailleurs de l'équation (IV) dans laquelle $fuyds$ est nulle car, dans le cas actuel, à chacun des éléments ds situé à droite de l'axe de symétrie MN, correspond un élément ds à gauche de MN, ayant le même y , mais de signe contraire. Donc $\operatorname{tg} \beta = \infty$ et $\beta = 90^\circ$.

FLEXION PLANE SIMPLE

Transformation des formules générales. — Dans ce cas on a $P = 0$ et $\beta = 90^\circ$. L'équation (I) devient

$$t = \frac{Mz'}{I}$$

Soit v la valeur maximum de z' (fig. 55), c'est-à-dire la distance des fibres les plus étendues ou les plus éloignées du centre de gravité O; v' est la distance du même point O aux fibres les plus comprimées. Appelons t_v et $t_{v'}$ les tensions correspondantes. On a :

$$t_v = \frac{Mv}{I}; \quad t_{v'} = \frac{Mv'}{I}$$

Dans le cas actuel $z_1 = 0$, c'est-à-dire que l'axe neutre est confondu avec l'axe central. En effet (2') donne

$$z_1 = \frac{P\alpha\rho}{S}$$

et ici $P = 0$, donc $z_1 = 0$. Cette conclusion résulte aussi de la formule $t = \frac{Mz'}{I}$; pour les points de l'axe neutre EF on a $t = 0$; donc $\frac{Mz'}{I} = 0$ et $z' = 0$; cet axe est donc confondu ici avec l'axe central GH.

La pièce comporte deux parties : l'une au-dessus de l'axe central, entièrement étendue, l'autre sous l'axe central, entièrement comprimée.

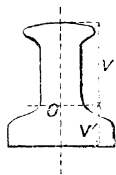


Fig. 56.

Module de flexion. — C'est le rapport $\frac{I}{v}$. Il existe donc deux modules de flexion, l'un $\frac{I}{v}$ relatif à la partie étendue, l'autre $\frac{I}{v'}$ à la partie comprimée (fig. 56).

MOMENTS D'INERTIE ET MODULES DE FLEXION

Généralités. — Le moment d'inertie d'une surface par rapport à un axe est la somme des produits de chacun des éléments de surface par le carré de la distance de cet élément à l'axe considéré. Dans le cas le plus général de la flexion, $I = \int z'^2 ds$, c'est-à-dire que *le moment d'inertie est toujours calculé par rapport à un axe passant par le centre de gravité.*

Théorème. — *Le moment d'inertie d'une surface par rapport à un axe ne passant pas par le centre de gravité est égal au moment d'inertie par rapport à un axe parallèle au premier et passant par le centre de gravité, plus le produit de la surface par le carré de la distance des deux axes.* Soient S une surface et AA (fig. 57) l'axe relativement auquel on veut calculer le moment d'inertie.

Menons une parallèle BB par le centre de gravité O de la surface à AA et soit y la distance d'un élément de surface ds à cette parallèle. On a, par définition :

$$I_{AA} = \int (y + d)^2 ds = \int y^2 ds + 2d \int y ds + d^2 \int ds$$

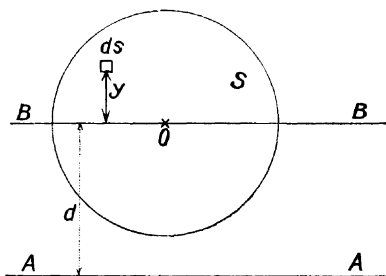


Fig. 57.

$\int y ds$ est le *moment statique* de la figure ; cette quantité est nulle car l'axe auquel elle se rapporte passe par le centre de gravité ; $\int ds$ est la surface entière S ; si I est le moment d'inertie relatif à la parallèle BB, passant par O, on a

$$I_{AA} = I + d^2 \cdot S.$$

Il est facile de calculer, dès lors, le moment d'inertie d'une surface par rapport à un axe quelconque si on connaît les moments d'inertie relatifs à tous les axes passant par le centre de gravité. On peut aussi calculer le moment d'inertie d'une surface qui peut se décomposer en un certain nombre de surfaces plus simples, en rectangles par exemple, comme dans le cas d'une section en double T. Nous aurons l'occasion de comparer entre eux les moments d'inertie d'une surface relatifs à des axes de direction quelconque passant par son centre de gravité (flexion composée).

Rectangle. — Le moment d'inertie de ABCD (fig. 58) par rapport à l'axe GH passant par le centre de gravité O et parallèle aux côtés AB et CD est égal à deux fois

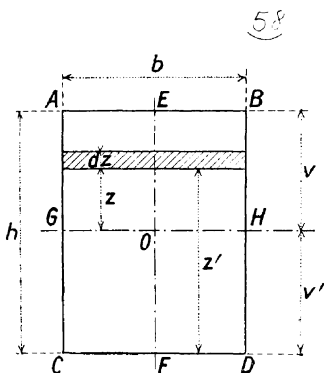


Fig. 58.

le moment d'inertie de la portion ABGH par rapport à GH.

On a $v = v' = \frac{h}{2}$; donc

$$I = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} bz^2 dz = \frac{bh^3}{12}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{bh^2}{6} ; \quad \frac{I}{v'} = \frac{bh^2}{6}$$

Si le moment d'inertie était établi par rapport à l'axe EF normal au premier et passant par le centre de gravité, on aurait

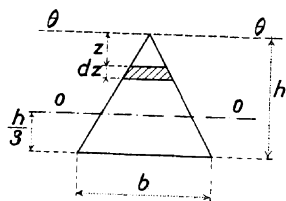


Fig. 59.

$$I = \frac{hb^3}{12}$$

$$\text{et } \frac{I}{v} = \frac{hb^2}{6} ; \quad \frac{I}{v'} = \frac{hb^2}{6}$$

Le moment d'inertie par rapport au côté CD serait :

$$I = \int_0^h bz^2 dz = \frac{1}{3} bh^3$$

Carré. — Le côté du carré étant h , et $b = h$ il viendra

$$I = \frac{h^4}{12}; \quad \frac{I}{v} = \frac{h^3}{6}; \quad \frac{I}{v'} = \frac{h^3}{6}$$

Triangle. — Pour l'axe $\theta\theta$ (fig. 59).

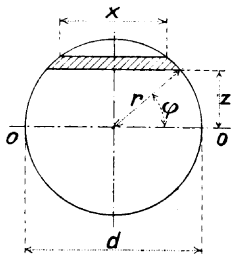


Fig. 60.

$$I = \int z^2 \left(b \frac{z}{h} \right) dz = \frac{1}{4} bh^3$$

Par rapport à l'axe passant par le centre de gravité ou à $\frac{2}{3} h$ et parallèle à $\theta\theta$ on a :

$$I = \frac{1}{4} bh^3 - \left(\frac{2}{3} h \right)^2 \frac{1}{2} bh = \frac{1}{36} bh^3$$

Cercle. — Pour l'axe OO (fig. 60) passant par le centre de gravité on a :

$$z = r \sin \varphi; \quad x = 2r \cos \varphi$$

$$I = \int_{-r}^{+r} z^2 x dz = 4r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} r^4$$

$$I = \frac{\pi}{64} d^4$$

$$\frac{I}{v} = \frac{I}{\frac{\pi}{4} r^2} = \frac{r}{32} d^3 = \frac{1}{10} d^3$$

Théorème. — *Le moment d'inertie polaire d'une surface plane quelconque, c'est-à-dire le moment d'inertie par rapport au centre de gravité O (fig. 61) est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes normaux entre eux passant par le point O ou est égal à la somme de deux moments d'inertie diamétraux conjugués.*

On a :

$$I_p = \int z^2 ds; \quad I_x = \int y^2 ds; \quad I_y = \int x^2 ds$$

donc

$$I_p = I_x + I_y$$

car

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Appliquons ce théorème au cercle en calculant le

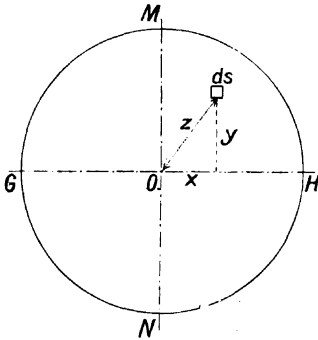


Fig. 61.

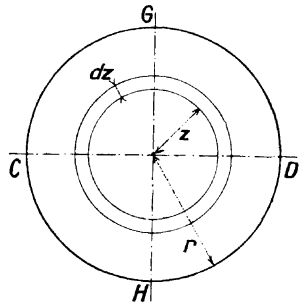


Fig. 62.

moment d'inertie d'une zone circulaire de rayon z (fig. 62).

$$I_p = 2\pi \int_0^r z^3 dz = \frac{\pi r^4}{2}$$

Par raison de symétrie les moments par rapport aux deux axes CD et GH sont égaux. Donc

$$I = \frac{\pi r^4}{4}; \quad \frac{I}{v} = \frac{\pi r^3}{4}$$

Section elliptique. — 1° Nous comparons l'ellipse à un cercle extérieur de rayon a (fig. 63). Le moment d'inertie

de chaque élément de cercle est au moment d'inertie de l'élément correspondant de l'ellipse comme

$$\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^3}$$

Le moment d'inertie de l'ellipse par rapport à l'axe OO est donc :

$$I = \frac{\pi}{64} (2a)^4 \left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{\pi}{4} ab^3$$

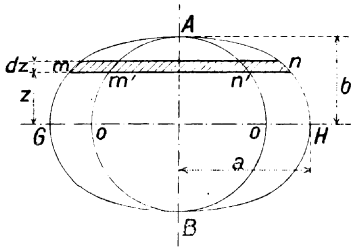


Fig. 63.

2° $v = b$. Le moment d'inertie de l'ellipse est la somme des moments d'inertie de toutes les zones horizontales d'épaisseur dz et de longueur variable. Considérons l'une d'elles et inscrivons dans l'ellipse le cercle de rayon b . On sait que

$$\frac{mn}{m'n'} = \frac{a}{b} ; \quad mn = m'n' \frac{a}{b}$$

donc

$$I = I_c \frac{a}{b}$$

ou

$$I = \frac{\pi b^4}{4} \frac{a}{b} = \frac{\pi ab^3}{4} ; \quad \frac{I}{v} = \frac{\pi ab^2}{4}$$

Section annulaire (fig. 64).

$$I = \frac{\pi v^4}{4} - \frac{\pi v_0^4}{4} = \frac{\pi (v^4 - v_0^4)}{4}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{\pi}{4} \left(v^3 - \frac{v_0^4}{v} \right)$$

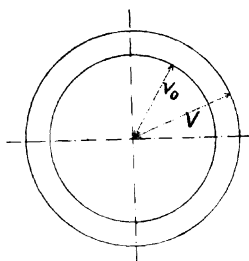


Fig. 64.

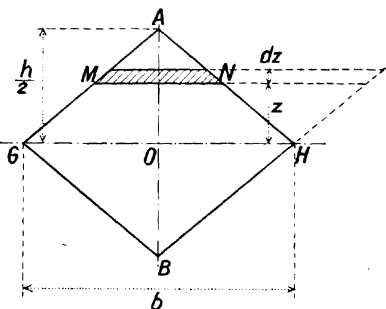


Fig. 65.

Où, en posant

$$k = \frac{v_0}{v}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{\pi}{4} v^3 (1 - k^4)$$

Losange (fig. 65). On a

$$\frac{MN}{b} = \frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}}$$

d'où

$$MN = b \left(1 - \frac{2z}{h} \right)$$

Donc :

$$I = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} b \left(1 - \frac{2z}{h} \right) z^2 dz = \frac{bh^3}{48}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{bh^2}{24} \quad \text{car} \quad v = \frac{h}{2}$$

Si nous comparons au rectangle nous voyons que pour une surface deux fois moindre le module du losange est quatre fois plus petit.

Section symétrique. — La section (fig. 66) peut être décomposée en :

1 rectangle	$14,2 = 28 \text{ cm}^2$
1 triangle	$\frac{1}{2} 1 \cdot 1 = 0,5 \text{ cm}^2$
1 rectangle	$1 \cdot (12,05 - 2 - 1) = 9,05 \text{ cm}^2$
1 rectangle	$2,8 \cdot 1 = 2,8 \text{ cm}^2$

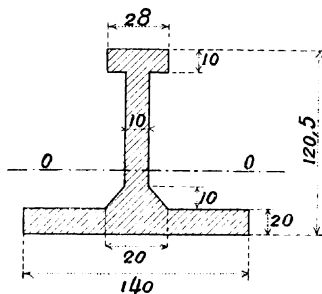


Fig. 66.

La position de l'axe OO passant par le centre de gravité se déduit de :

$$x = \frac{28 \frac{2}{2} + 0,5 \left(2 + \frac{1}{3} \right) + 9,05 (2 + 9,05 \cdot 0,5) + 2,8 (12,05 - 0,5)}{28 + 0,5 + 9,05 + 2,8} = 2,99 \text{ cm.}$$

et le moment d'inertie par rapport à cet axe :

$$I = \frac{1}{12} 14,0 \cdot 20^3 + 14,2 (2,99 - 1)^2 + \frac{1}{36} \cdot 1 \cdot 1^3 + \frac{1}{2} 1 \cdot 1$$

$$(2,99 - 2,33)^2 + \frac{1}{12} 1 \cdot 9,05^3 + 1 \cdot 9,05 (6,025 - 2,99)^2 + \\ + \frac{1}{12} 2,8 \cdot 1^3 + 2,8 \cdot 1 (11,55 - 2,99)^2 = 500,7 \text{ cm}^3.$$

Méthode graphique. I. Détermination des centres de gravité. — Considérons une surface S (fig. 67) située dans un plan et rapportons-la à deux axes OX et OY .

Soit ds un élément de la surface; ses coordonnées sont x et y ; effectuons les produits xds et yds et intégrons;

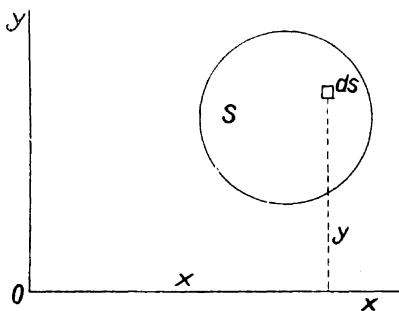


Fig. 67.

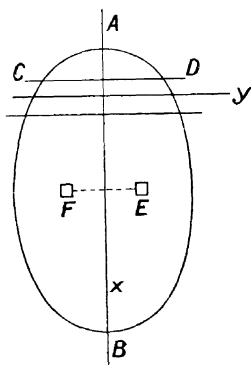


Fig. 68.

on appelle *centre de gravité* de la surface un point défini par les coordonnées :

$$X = \frac{\int x ds}{S} ; \quad Y = \frac{\int y ds}{S}$$

Il résulte de cette définition que si une surface possède un diamètre, c'est-à-dire une droite qui divise en parties égales une série de cordes parallèles, le centre de gravité de la surface sera situé sur ce diamètre. Soient, en effet, (fig. 68) AB un diamètre, CD direction des cordes coupées en deux parties égales par AB . Choisissons AB comme axe des X et CD comme axe des Y . A tout élément $E(x, y)$

correspond un élément $F(x, -y)$ et par suite $\int y ds = 0$ et $Y = 0$; le centre de gravité est sur AB .

Si la surface a un centre de figure, c'est-à-dire un point tel que tous les vecteurs y passant soient divisés en deux parties égales, le centre de figure sera le centre de gravité. Car ici $\int x ds = 0$ et $\int y ds = 0$ d'où $X = 0$ et $Y = 0$. Ainsi, le centre de gravité d'un carré ou d'un parallélogramme est le point de rencontre des diagonales.

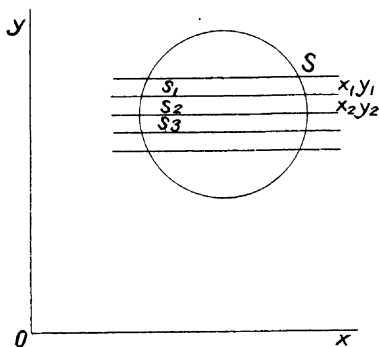


Fig. 69.

Considérons maintenant une surface S (fig. 69) décomposée en une série de petites surfaces s_1, s_2, s_3 , dont les centres de gravité ont respectivement pour coordonnées $x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3$.

On a : pour la surface s_1 :

$$x_1 s_1 = \int x ds ; \quad y_1 s_1 = \int y ds$$

pour la surface s_2 :

$$x_2 s_2 = \int x ds ; \quad y_2 s_2 = \int y ds$$

chacune des intégrales étant relative à la bande considérée. Additionnons :

$$x_1 s_1 + x_2 s_2 + \dots = \int x ds = X ; \quad y_1 s_1 + y_2 s_2 + \dots = \int y ds = Y.$$

car chacune des intégrales est relative ici à la surface entière. On peut d'ailleurs écrire

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + \dots$$

Cette propriété des centres de gravité permet leur détermination graphique. Les valeurs de X et Y fournies par les équations ci-dessus peuvent être considérées comme

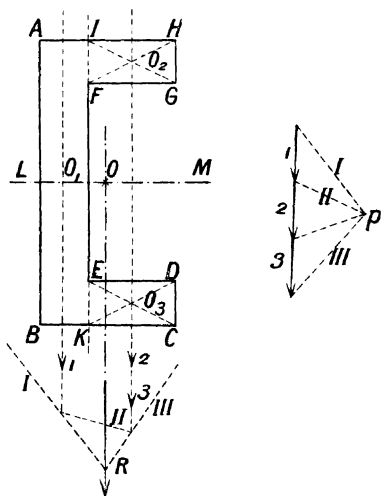


Fig. 70.

les coordonnées du point d'application de la résultante d'un système quelconque de forces parallèles, proportionnelles à s_1, s_2, s_3 , et appliquées aux centres de gravité respectifs

$$x_1 y_1, \quad x_2 y_2, \quad x_3 y_3, \dots$$

Dès lors, pour obtenir graphiquement le centre de gravité d'une surface, on décomposera celle-ci en bandes parallèles ; on appliquera aux centres de gravité respectifs de ces bandes des forces parallèles proportionnelles aux

surfaces des bandes et on cherchera, par un polygone des forces et un polygone funiculaire la direction de la résultante. On décomposera ensuite la surface en une autre série de bandes parallèles, on obtiendra une nouvelle résultante; son intersection avec la première fournit le centre de gravité de la surface totale. Les bandes extrêmes peuvent être considérées comme des triangles inscrits ou des paraboles dont on connaît le centre de gravité; les bandes intermédiaires sont considérées comme des rectangles ou des trapèzes. Ainsi, pour rechercher le centre de gravité de la surface ABCDEFGH (fig. 70), qui possède un axe de symétrie LM, on la décompose en rectangles IABKI, IHGF et CDEK; aux centres de gravité O_1 , O_2 et O_3 de ces rectangles on applique des forces 1, 2, 3 perpendiculaires sur l'axe de symétrie et proportionnelles aux surfaces individuelles de chacun des rectangles. On construit le polygone des forces et le polygone funiculaire correspondant; les deux derniers côtés du polygone funiculaire se coupent au point R par où on mène une parallèle aux forces; cette parallèle coupe l'axe de symétrie en O, qui est le centre de gravité cherché.

II. *Détermination des moments d'une surface et particulièrement des moments d'inertie.* — Le moment d'une force F par rapport à un point O est le produit du vecteur de la force par le bras x (fig. 71). Le moment ainsi défini s'appelle *moment statique* ou de *premier ordre*. On appelle *moment d'ordre n* de la force considérée le produit $F \cdot x^n$. On a vu en statique que si on considère un système de forces parallèles appliquées à un corps dans un plan, et un polygone funiculaire de ce système, le produit de la distance polaire (mesurée à l'échelle des grandeurs) par l'ordonnée d'un point quelconque du polygone funiculaire (mesurée à l'échelle des forces) est égal à la somme des moments des forces situées à gauche de

cette ordonnée par rapport à un centre de moments situé sur la droite indéfinie qui passe par cette ordonnée. A l'aide d'un polygone funiculaire on peut donc évaluer graphiquement la somme

$$f_1x_1 + f_2x_2 + \dots$$

des moments de premier ordre d'un certain nombre de forces parallèles.

L'application répétée du même procédé permet de déterminer la somme

$$f_1x_1^n + f_2x_2^n + \dots$$

des moments d'ordre n des mêmes forces.

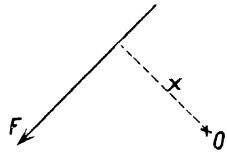


Fig. 71.

Nous allons traiter un exemple pour mieux spécifier le sens de nos indications. Considérons (fig. 72) un système de forces parallèles f_1, f_2, f_3, \dots et construisons le polygone des forces $oa b c d \dots$; choisissons un pôle p et établissons le polygone funiculaire correspondant XABCDY. Soit C le centre des moments; menons par C une parallèle aux forces; le moment de f_1 par rapport à C est m_1m_2 ; le moment de f_2 est m_2m_3 et ainsi de suite; le moment total des forces à gauche de C est m_1n ; chacune des ordonnées précédentes, mesurée à l'échelle des forces, doit être multipliée par la distance polaire pk , mesurée à l'échelle des longueurs, pour avoir le moment vrai. Donc :

$$f_1x_1 + f_2x_2 + \dots = m_1n \times pk.$$

Posons maintenant $m_1m_2 = f'_1, m_2m_3 = f'_2$, etc.; considérons les segments f'_1, f'_2, \dots comme les vecteurs d'un nouveau système de forces parallèles de même direction que les premières et appliquées sur les mêmes droites. Traçons le polygone des forces f'_1, f'_2, \dots et le polygone funiculaire correspondant avec la même distance polaire

que précédemment. Nous formerons de nouvelles in-

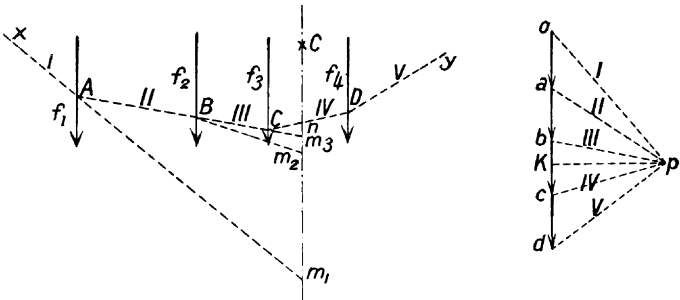


Fig. 72.

tersections avec la droite passant par le centre des moments et nous aurons ainsi la somme

$$f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2 + \dots$$

des moments du second ordre. En continuant de la même manière nous obtenons la somme des moments du troisième ordre ou d'un ordre quelconque n .

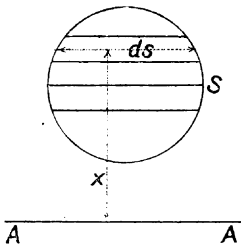


Fig. 73.

Dès lors, S étant une surface (fig. 73), ds un élément de cette surface, x sa distance à une droite AA du plan, $f x^2 ds$ est le moment d'inertie de la surface par rapport à AA ; on

découpera la surface en bandes parallèles à AA ; on appliquera aux centres de gravité de ces bandes des forces parallèles et proportionnelles à leur surface; on construira un premier polygone des forces et un premier polygone funiculaire, comme il a été indiqué ci-dessus; puis un second polygone funiculaire, qui fournira la

somme des moments du second ordre

$$f_1 r_1^2 + f_2 r_2^2 + \dots$$

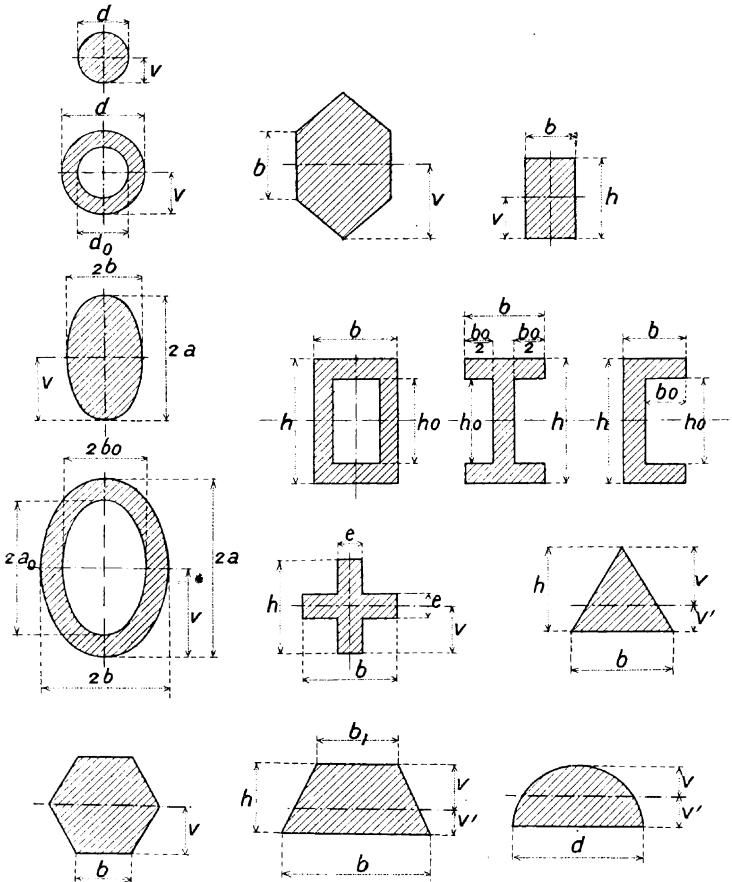


Fig. 74 à 85.

c'est-à-dire des moments d'inertie des bandes, dont la totalité est le moment d'inertie de la surface entière par rapport à l'axe AA ,

Tableau des moments d'inertie.

FORME de la section.	MOMENT D'INERTIE I	ORDONNÉE du centre de gravité.	SURFACE S de la section.
Figure 74	$\frac{\pi d^4}{64}$	$v = \frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^2}{4}$
— 75	$\frac{\pi}{64} (d^4 - d_o^4)$	$v = \frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{4} (d^2 - d_o^2)$
— 76	$\frac{\pi}{4} a^3 b$	$v = a$	πab
— 77	$\frac{\pi}{4} (a^3 b - a_o^3 b_o)$	$v = a$	$\pi (ab - a_o b_o)$
— 78	$\frac{5\sqrt{3}}{16} b^4 = 0,54 b^4$	$v = 0,866 b$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 = 2,6 b^2$
— 79	$0,54 b^4$	$v = b$	$2,6 b^2$
— 80	$\frac{1}{12} b h^3$	$v = \frac{h}{2}$	bh
— 81	$\frac{1}{12} (b h^3 - b_o h_o^3)$	$v = \frac{h}{2}$	$bh - b_o h_o$
— 82	$\frac{1}{12} [h^3 e + (b - e)e^3]$	$v = \frac{h}{2}$	$he + (b - e)e$
— 83	$\frac{1}{36} b h^3$	$v = \frac{h}{3}$ $v' = \frac{2}{3} h$	$\frac{1}{2} bh$
— 84	$\frac{1}{36} \frac{b^2 + 4bb_1 + b_1^2}{b + b_1} h^3$	$v = \frac{b + 2b_1}{b + b_1} \frac{h}{3}$ $v' = \frac{2b + b_1}{b + b_1} \frac{h}{3}$	$\frac{b + b_1}{2} h$
— 85	$0,0069 d^4$	$v = 0,212 d$ $v' = 0,288 d$	$\frac{\pi}{8} d^2$

OBSERVATION. — Quand on a à évaluer le moment d'inertie d'une surface plane par rapport à diverses droites situées dans son plan, au lieu d'opérer séparément pour chacune de ces droites, on peut abrégier beaucoup le travail en

utilisant le tracé de l'ellipse d'inertie dont nous aurons à causer à propos de la flexion composée.

Section d'égale résistance à la flexion. — On appelle ainsi une section du prisme établie de façon que les deux tensions extrêmes t_v et $t_{v'}$ soient entre elles comme les charges admissibles à la traction et à la compression ou comme les résistances R et R' à la rupture à l'extension et à la compression. On a donc :

$$\frac{t_v}{t_{v'}} = \frac{\frac{Mc}{I}}{\frac{Mc'}{I}} = \frac{R}{R'}$$

$$\frac{R}{R'} = \frac{v}{v'} \quad (1)$$

Cette relation déterminera la position que devra avoir l'axe neutre dans la hauteur $v + v' = h$ pour que la section soit d'égale résistance. Si la matière est telle que $R = R'$ la forme doublement symétrique peut convenir ; c'est à peu près le cas pour le fer et l'acier. Si R n'est pas égal à R' on combinera la forme de façon à réaliser la condition (1). Pour la fonte, par exemple, où $R' = 3$ à $4 R$, on aura à dessiner une section telle que son centre de gravité réponde à la condition $\frac{1}{3 \text{ à } 4} = \frac{v}{v'}$; d'où $v' = 3$ à $4 v$. C'est ce qu'on faisait pour les sections en double T qui ont été fort utilisées à l'époque où l'on employait la fonte pour résister à des efforts de flexion.

Sections de plus grande résistance. — Une section est de plus grande résistance quand, à surface et à moment donnés, elle subit les tensions les plus faibles ou bien quand, à surface et à tension données, elle résiste au plus

grand moment fléchissant. On a

$$t = \frac{Mv}{I} \quad \text{ou} \quad \frac{I}{v} t = M.$$

Il convient donc que $\frac{I}{v}$ soit maximum. On peut au moyen du module d'inertie $\frac{I}{v}$ comparer entre elles

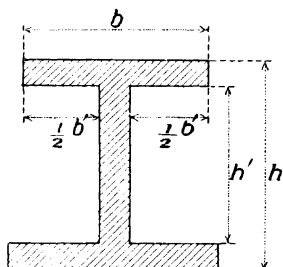


Fig. 86.

diverses sections et adopter celle qui, à poids égal, donne une résistance supérieure. Observons d'abord que pour une section rectangulaire on a

$$\frac{I}{v} = \frac{bh^2}{6}$$

La résistance d'un tel prisme est donc proportionnelle au carré de la hauteur et à la première puissance de sa largeur; on placera donc la dimension la plus grande dans le plan des forces extérieures. On a aussi :

$$\frac{I}{v} = \frac{1}{6} S^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{h}{b}}$$

A égalité de section la résistance est d'autant plus grande que le rapport $\frac{h}{b}$ est plus considérable; il y aurait donc intérêt à augmenter indéfiniment la hauteur par rapport à la base, mais ici se présente un inconvénient. En effet, il est presque impossible d'assurer en pratique la symétrie de la répartition de la charge au milieu de la largeur b ; l'effort est généralement excentré par rapport à l'axe de symétrie des pièces et il se produit alors, comme nous aurons l'occasion de voir, une flexion latérale ou *flambement*. On évite donc d'employer des pièces trop minces placées de champ ou on a recours à d'autres

sections que la section rectangulaire. Considérons, par exemple, une section en double T (fig. 86). On a :

$$\frac{I}{v} = \frac{bh^3 - b'h'^3}{6h} = \frac{1}{6} S^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{h}{b}} \frac{1 - \frac{b'h'^3}{bh^3}}{\left(1 - \frac{b'h'}{bh}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Pour une section rectangulaire on aurait :

$$\frac{I}{v} = \frac{1}{6} S^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{h}{b}}$$

Si on veut que S et $\frac{h}{b}$ soient les mêmes dans les deux sections on voit que la résistance du double T sera

$$\frac{1 - \frac{b'h'^3}{bh^3}}{\left(1 - \frac{b'h'}{bh}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

fois plus grande que celle de la section rectangulaire. Si $h' = 0,9h$; $b' = 0,9b$, la section en double T présentera une résistance plus de quatre fois supérieure à celle de la section rectangulaire de même surface et de même rapport $\frac{h}{b}$. Une section rectangulaire de même surface et de même résistance que le double T et de dimensions inconnues h_1 et b_1 serait déterminée par la condition

$$\frac{1}{6} S^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{h_1}{b_1}} = \frac{1}{6} S^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{h}{b}} \frac{1 - \frac{b'h'^3}{bh^3}}{\left(1 - \frac{b'h'}{bh}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

d'où :

$$\frac{h_1}{b_1} = \frac{h}{b} \frac{\left(1 - \frac{b'h'^3}{bh^3}\right)^2}{\left(1 - \frac{b'h'}{bh}\right)}$$

et, avec les dimensions relatives adoptées ci-dessus :

$$\frac{h_1}{b_1} = 17,2 \frac{h}{b} .$$

On arriverait donc à une section rectangulaire de grande hauteur où le flambement serait forcément à craindre.

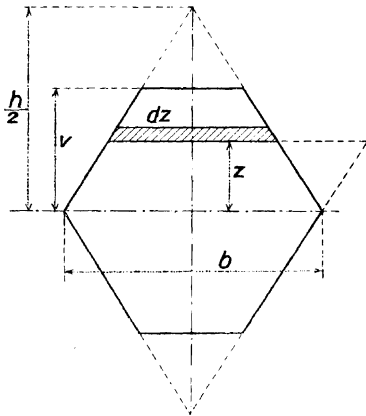


Fig. 87.

On voit donc tout l'avantage, au point de vue de la flexion, qu'il y a à adopter des sections en T, double T, creuses, etc. ; $\frac{I}{v}$ devient le plus grand d'ailleurs en reportant la matière le plus loin possible de l'axe central. Voulons-nous un nouvel exemple de l'influence de la

forme de la section ? Considérons une tige circulaire et une tige carrée dont l'un des côtés est parallèle au plan des forces extérieures. Pour le carré on a, b étant le côté :

$$\frac{I}{r} = \frac{b^3}{6} = \frac{1}{6} S^{\frac{3}{2}} = 0,1666 S^{\frac{3}{2}} .$$

Pour le cercle, si r est le rayon :

$$\frac{I}{r} = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} S^{\frac{3}{2}} = 0,1414 S^{\frac{3}{2}} .$$

A surface égale le cercle est donc moins résistant que le carré. Plaçons maintenant le carré de façon que l'une de ses diagonales soit renfermée dans le plan des forces

extérieures ; il vient :

$$\frac{I}{v} = \frac{b^3}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}} S^{\frac{3}{2}} = 0,118 S^{\frac{3}{2}}$$

et dans ce cas, le cercle est plus résistant que le carré. Mais il est possible d'augmenter la résistance de ce dernier en opérant des troncatures sur les angles. Considérons, par

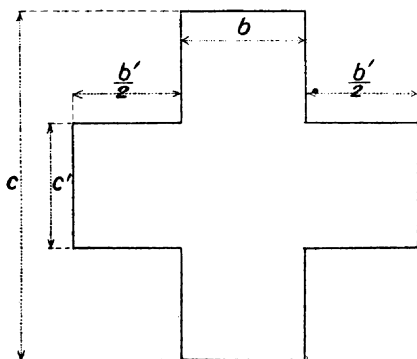


Fig. 88.

exemple (fig. 87), une section en forme de losange dont on a recoupé les bouts de façon que $v < \frac{h}{2}$. On a :

$$I = 2b \int_0^c \left(1 - \frac{2z}{h}\right) z^2 dz$$

$$\frac{I}{v} = \frac{2bv^2}{3} - \frac{bv^3}{h}$$

fonction qui doit être maximum. Annulons sa dérivée par rapport à v :

$$0 = \frac{4}{3}v - \frac{3v^2}{h}$$

d'où

$$v = \frac{4}{9} \cdot h$$

Ainsi, quand une pièce est soumise à la flexion dans les conditions indiquées, il y a avantage à abattre les arêtes supérieure et inférieure de manière que l'on ait $v = \frac{4}{9} h$.

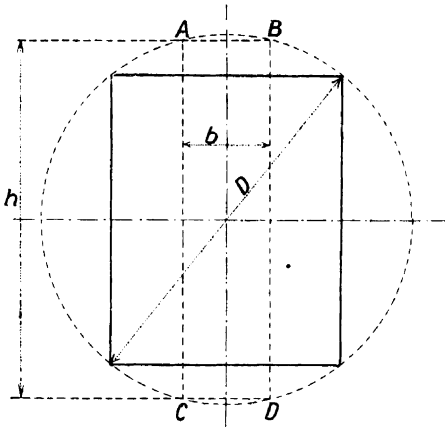


Fig. 89.

Cette augmentation de $\frac{1}{v}$ par des tronçures se produit aussi quand la section, au lieu de présenter des arêtes, se termine par des parties arrondies. Le même effet, comme le montre de Saint-Venant, a lieu pour une section composée de plusieurs rectangles (fig. 88). Chaque fois que l'on aura :

$$b'c'^2 > bc^2 \left(1 + \frac{c'}{c} \right)$$

on augmentera le rapport $\frac{1}{v}$ en supprimant les deux saillies.

Considérons enfin (fig. 89) une poutre qu'il s'agit d'équarrir dans un tronc d'arbre circulaire et dont on veut faire un prisme à section rectangulaire. La diagonale de la section est un diamètre. Pour un rectangle ABCD on aura :

$$\frac{I}{v} = \frac{bh^2}{6} = z$$

rapport qu'il s'agit de rendre maximum. Or $b^2 + h^2 = D^2$, D, diamètre de l'arbre. Donc :

$$z = \frac{b(D^2 - b^2)}{6}$$

Annulons la dérivée de z par rapport à b . Il vient :

$$\frac{dz}{db} = D^2 - 3b^2 = 0$$

$$b = \frac{D}{\sqrt{3}}$$

Or

$$h = D \sqrt{\frac{2}{3}}$$

donc :

$$b = \frac{h}{\sqrt{2}} = 1,4 h$$

condition pour que la résistance à la flexion soit maximum.

RAYON DE COURBURE

Généralités. — Le rayon de courbure est ici le rayon de l'axe neutre qui se confond avec l'axe central. La formule (II) devient :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha M}{I} \quad (II)$$

Observons qu'en général la courbure sera plane et prenons pour axe des abscisses l'axe primitivement droit de la pièce. On a :

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} .$$

La formule (II) devient donc :

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{\alpha M}{I} . \quad (\text{II})$$

Souvent l'inclinaison de la courbure est très faible et $\frac{dy}{dx}$ est petit ; $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ est donc négligeable dans la plupart des cas et on peut écrire :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{\alpha M}{I} \quad (\text{II})$$

formule qui permet de calculer la forme prise par l'axe, car, en général, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est fonction de x . Ultérieurement, dans chaque cas particulier, nous déterminerons l'équation de la courbe obtenue par flexion ainsi que l'inclinaison des tangentes à cette courbe, ou $\frac{dy}{dx}$ en chaque point.

La courbe s'appelle *ligne élastique* ou simplement *l'élastique*. On convient que le moment fléchissant M est positif quand $\frac{d^2y}{dx^2}$ l'est aussi et inversement ; or, quand $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif, l'élastique tourne sa concavité vers le haut.

Tracé de l'élastique. Théorème de Mohr. — Considérons (fig. 90) un fil flexible mais inextensible soumis à l'action de charges continues verticales. Si nous coupons le fil au point le plus bas, en A, et en un point quelconque B, il y aura équilibre entre la tension H en A, la tension T en B et les forces extérieures. T peut se décomposer en ses composantes horizontale H et verticale V et la com-

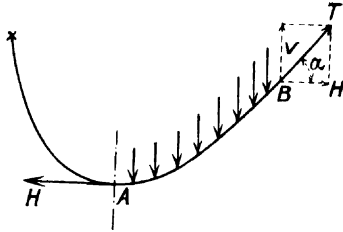


Fig. 90.

posante H en A est évidemment égale à la composante horizontale H en B; de plus, la composante verticale V est égale à la somme des forces extérieures, qui sont verticales, comprises entre A et B. On peut écrire

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{H} = \frac{dy}{dx} \quad (1)$$

la courbe étant rapportée à deux axes orthogonaux. Si p est la charge par unité de longueur du fil, elle sera p' par unité de longueur de projection horizontale et on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\int p' dx}{H}$$

d'où :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p'}{H} .$$

En comparant avec la relation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha M}{I} = \frac{M}{\frac{I}{\alpha}}$$

on voit que :

La ligne élastique d'un prisme droit peut être considérée comme l'état d'équilibre d'un fil dont la charge serait en chaque point égale au moment fléchissant agissant sur le prisme et dont la longueur serait telle que la tension atteindrait au point le plus bas la valeur $\frac{I}{\alpha}$.

Nous aurons l'occasion de montrer qu'on peut construire une courbe des moments fléchissants M en portant les valeurs de M en ordonnées sur les valeurs de x correspondantes ; la courbe de charge coïncide donc avec la courbe des moments du prisme. L'élastique n'est, dans ces conditions, qu'une courbe funiculaire du système considéré de moments. Elle passe par les points d'appui du prisme ; quand ce dernier est encastré, les tangentes sont horizontales, si le prisme est horizontal. La distance polaire qu'il convient d'adopter pour le tracé de l'élastique est le quotient $\frac{I}{\alpha}$. En effet, pour que le fil considéré ci-dessus coïncide avec l'élastique, il faut que la tension au point le plus bas soit $\frac{I}{\alpha}$; cette tension est la même partout et la distance polaire doit donc lui être égale. Malheureusement l'adoption d'une distance polaire $\frac{I}{\alpha}$ conduit au tracé d'une courbe fort aplatie, étant donné que $\frac{I}{\alpha}$ est toujours très grand. On adoptera donc une échelle beaucoup plus grande pour les ordonnées que pour les abscisses. On sait que le produit d'une ordonnée y de la ligne funiculaire, comprise sur la verticale, entre la ligne de clôture et la courbe, par la distance polaire h , est le moment fléchissant des forces par rapport à la section considérée. Si y et y' sont les ordonnées correspondantes, à deux

échelles différentes, on a $y \cdot h = y' h'$, h étant la distance polaire $\frac{I}{x}$ et y l'ordonnée considérée mesurée avec cette distance polaire, y' l'ordonnée mesurée avec la distance polaire h' . Donc :

$$y' = y \frac{h}{h'} = y \frac{I}{x h'}$$

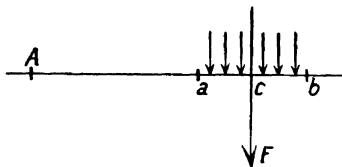


Fig. 91.

Il résulte de là que l'ordonnée y' , la distance polaire étant h' , est $\frac{I}{h'x}$ fois plus grande que l'ordonnée y .

CALCUL DE T OU DE L'EFFORT TRANCHANT OU DE CISAILLEMENT

Généralités. — Reprenons la formule $T = \int \theta ds$. Observons d'abord que tous les efforts extérieurs sont transversaux car la flexion est simple; et que ces efforts sont dans un même plan. Si p est la force extérieure rapportée à l'unité de longueur du prisme, pour une longueur l cette force aura pour expression $p \cdot l$ si elle est uniformément répartie; elle aura pour expression $\int_0^l p \cdot dx$ dans le cas contraire. Appelons F les forces finies concentrées en un point. En réalité, il n'existe pas de forces appliquées en un seul point, car il s'ensuivrait une rupture; mais il arrive souvent que l'on peut raisonner comme si cela était vrai. Ainsi: s'il existe un effort F sur la longueur très

petite ab (fig. 91), cet effort se répartit sur tous les points de cet élément soumis en réalité à un moment fléchissant; mais si on calcule la résistance en A , par exemple, on pourra remplacer les efforts uniformément répartis sur ab par leur résultante appliquée en un point c de ab . Cette hypothèse ne peut plus se faire quand on calcule la résistance dans la zone ab . Il résulte de ce qui précède

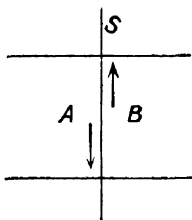


Fig. 92.

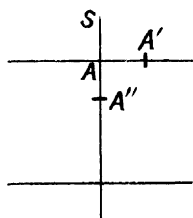


Fig. 93.

que les efforts tranchants sont toujours dans le plan des forces extérieures, et, de plus, coïncident avec l'axe de ces forces. Observons que, lorsqu'il y a effort tranchant, il existe en réalité deux efforts; la partie A (fig. 92) exerce sur B un effort de haut en bas; B exerce sur A un effort de bas en haut. Quoi qu'il en soit, un effort tranchant ou effort de cisaillement ne peut exister seul rigoureusement parlant; cet effort est toujours accompagné d'un moment fléchissant.

L'effort tranchant T donne naissance, dans une section considérée, à des efforts tangentiels qui, en général, sont variables d'un élément de surface au suivant; rassemblés et multipliés chacun par l'élément auquel ils s'appliquent, ils donnent une résultante égale et opposée à T . Dans l'hypothèse qu'il y aurait répartition uniforme, on aurait

$$T = \theta S \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{T}{S}.$$

Mais cette hypothèse est inadmissible. En effet, consi-

dérons (fig. 93) une section S et l'élément AA' de la surface extérieure de la pièce. Cet élément, dans le cas de la flexion simple, n'est soumis qu'à des efforts transversaux ; donc $\theta = 0$; par suite, pour un élément AA'' , normal sur AA' , θ est aussi nul ; les éléments extrêmes de la section subissent donc des efforts tangentiels nuls.

Quand les efforts tangentiels varient, les glissements

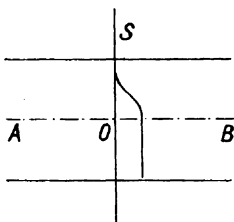


Fig. 94.

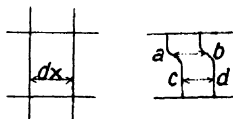


Fig. 95.

varient aussi. Or, le glissement consiste dans la déformation de quatre éléments perpendiculaires formant un carré et qui se déplacent de façon à devenir un losange. Il résulte de la remarque ci-dessus que les éléments extrêmes restent normaux à la surface extérieure, mais qu'un élément en un point O (fig. 94), primitivement normal sur AB , ne reste pas normal. La section S ne reste donc pas plane ; elle prend une forme en S .

Il résulterait de là que l'hypothèse fondamentale de Bernoulli serait fautive, du moins chaque fois qu'il y aurait un effort de cisaillement. Mais la formule $\delta = \frac{z}{\rho}$ qui résulte de cette hypothèse reste vraie ; en effet, considérons (fig. 95) deux sections voisines primitivement planes et qui se déforment. Les distances restent égales à dx ; les deux sections déformées se déplacent l'une par rapport à l'autre de façon qu'en considérant la fibre neutre cd et une autre fibre ab , on ait dans la formule

fondamentale

$$\frac{dx(1+\delta)}{dx} = \frac{\rho+z}{\rho};$$

d'où

$$\delta = \frac{z}{\rho}.$$

Calcul de T. — Cherchons l'effort tangentiel à la distance

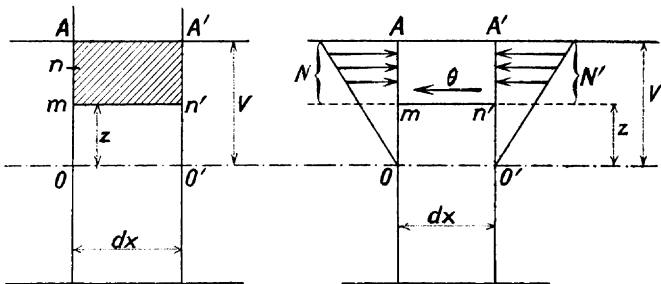


Fig. 96 et 97.

z de l'axe central. Au lieu de chercher l'effort sur mn (fig. 96), on peut déterminer l'effort tangentiel égal appliqué sur mn' , normal sur mn . Considérons la section S' parallèle à S et établissons l'équilibre de la portion de matière comprise dans $AA'mn'$ suivant la direction θ . Les moments fléchissants interviennent donc seuls et l'on a sur Am et $A'n'$ des efforts dont on peut établir le diagramme; c'est une droite passant par le centre de gravité de la section en vertu de la formule $t = \frac{Mz}{I}$. Soient (fig. 97) N et N' les résultantes de ces efforts respectivement sur Am et $A'n'$. On aura, si on suppose l'effort uniformément réparti,

$$9bdx = N' - N$$

b étant la largeur de la section correspondant à mn' . Cherchons N et N' ; N est la somme des efforts développés entre z et v ; or, dans toute l'étendue d'une zone horizontale telle que mm' , t est constant, d'après la formule $t = \frac{Mz}{I}$. On a donc :

$$N = \int_z^v bt \, dz; \quad t = \frac{Mz}{I}$$

$$N = \frac{M}{I} \int_z^v bz \, dz$$

expression que l'on peut intégrer si on connaît la surface ou une relation entre b et z ; M étant le moment fléchissant dans la section AB , le moment dans la section $A'B'$ sera $M + dM$; donc :

$$N' = \frac{M + dM}{I} \int_z^v bz \, dz.$$

$$0 = \frac{dM}{Ibdx} \int_z^v bz \, dz.$$

Nous démontrerons plus loin que $dM = Tdx$, relation qui se conçoit d'ailleurs, et $T = \frac{dM}{dx}$. Donc :

$$0 = \frac{T}{bI} \int_z^v bz \, dz. \quad (1)$$

Observons que $\int_z^v bz \, dz$ est le moment statique de la partie de la section au-dessus de mm' par rapport à O ; on a, en appelant S' la surface de cette partie de la section :

$$0 = \frac{T}{bI} S'z''. \quad (2)$$

La formule (1) et la figure 98 montrent que $\int_z^v bz \, dz$

augmente à mesure que mm' se rapproche de l'axe central, c'est-à-dire que z diminue ; mais dès que mm' descend vers O , l'intégrale diminue ; le maximum de cette

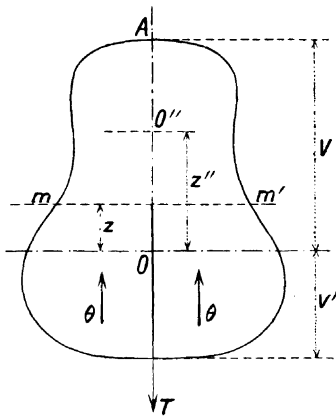


Fig. 98.

intégrale se produit pour $z = 0$ et le minimum pour $z = v$ ou pour $z = v'$, ce qui est naturel puisque dans ce cas la tension est nulle. Il se peut d'autre part que dans le facteur $\frac{T}{bI}$, b croisse plus rapidement que l'intégrale, de sorte que dans ce cas le maximum de θ ne serait pas la valeur correspondant à l'axe central ; mais si b ne croît pas plus rapide-

ment, θ est maximum pour $z = 0$. C'est le cas notamment des pièces en double T. Alors la plus grande fatigue par effort tangentiel s'exerce au milieu de la section. Appelons θ_0 la valeur de θ pour $z = 0$; soit S_0 la surface de la section au-dessus de l'axe central ; z_0 est la valeur de z pour le centre de gravité de cette section ; b_0 , largeur de la section à l'axe central. Il vient :

$$\theta_0 = \frac{T}{b_0 I} S_0 z_0.$$

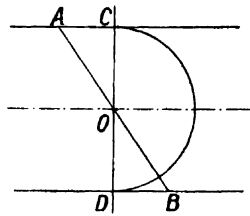


Fig. 99.

Il résulte de ce qui précède que le diagramme des efforts normaux et tangentiels pour une section quelconque CD (fig. 99) s'obtient comme suit. En chaque point de CD

on élève une ordonnée horizontale représentant l'effort normal ; on obtient ainsi le diagramme des efforts normaux qui est une droite AB ou $t = \frac{Mz}{I}$. On élève aussi en chaque point de la section une ordonnée proportionnelle à θ ; la courbe passe par les points C et D, puisqu'en ces points $\theta = 0$; de plus l'ordonnée sera maximum en O.

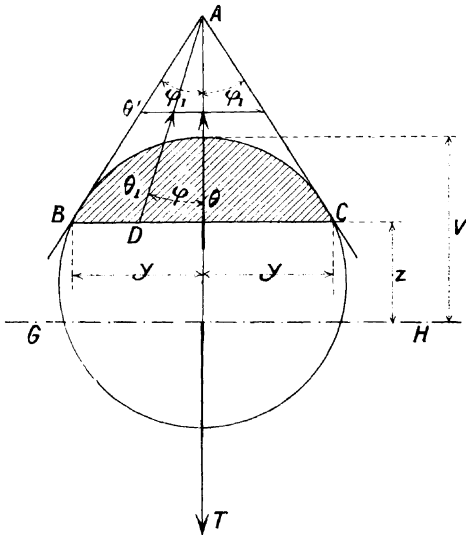


Fig. 100.

Observons que les valeurs de θ sont relatives à une direction parallèle à T, c'est-à-dire, si la figure a un axe de symétrie (fig. 98), à la direction AT de cet axe, T étant supposé coïncider avec AT. Il peut être intéressant de déterminer la valeur des efforts tangentiels θ tangents au contour de la section. Considérons donc (fig. 100), pour simplifier, une section à axe de symétrie et soit à calculer la tension tangentielle en B, tangente au contour.

Appelons θ' cette tension, θ la tension correspondante

à la même hauteur, suivant l'axe de T. On a évidemment :

$$\theta' = \frac{\theta}{\cos \varphi_1} .$$

Désignons le moment statique $\int_z^v b z dz$ par M_z ; si $b = 2y$, largeur de la section à l'endroit considéré :

$$\theta = \frac{T}{2y} \frac{M_z}{I}$$

et :

$$\theta' = \frac{T}{2y \cos \varphi_1} \frac{M_z}{I} .$$

En un point quelconque situé sur l'horizontale, en D, par exemple, on a :

$$\theta_1 = \frac{\theta}{\cos \varphi} = \frac{T}{2y \cos \varphi} \frac{M_z}{I} .$$

Tous les efforts tangentiels, à la distance z de l'axe central GH, convergent au même point A et ont pour composante verticale θ . On devra avoir, eu égard à la résistance : $\theta' \leq r''$, d'où :

$$r'' \geq \frac{T}{2y \cos \varphi_1} \frac{M_z}{I}$$

ou

$$T \leq r'' \frac{I}{M_z} 2y \cos \varphi_1 .$$

Section rectangulaire. — Ici $2y = b$, $\varphi_1 = 0$

$$M_z = b \left(\frac{h}{2} - z \right) \frac{\frac{h}{2} + z}{2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

$$\theta' = \frac{T}{b} \frac{\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)}{\frac{1}{12} b h^3} = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} \left[1 - \left(\frac{z}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right]$$

Pour $z = 0$, il vient :

$$\theta_{\max} = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} = \frac{3}{2} \frac{T}{S},$$

S, surface de la section.

Section circulaire. — On a (fig. 101) :

$$y = r \sin \psi = r \cos \varphi_1; I = \frac{\pi}{4} r^4; S = \pi r^2.$$

La hauteur du centre de gravité de la section S' , limitée à la distance z de l'axe GH au-dessus de cet axe, a pour expression :

$$\frac{(2y)^3}{12S'}.$$

D'autre part

$$M_z = \frac{(2y)^3}{12S'} S' = \frac{2y^3}{3} = \frac{2r^3 \cos^3 \varphi_1}{3}$$

$$\theta' = \frac{T}{2r \cos^2 \varphi_1} \cdot \frac{2r^3 \cos^3 \varphi_1}{3 \frac{\pi}{4} r^4} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} \cos \varphi_1 = \frac{4}{3} \frac{T}{S} \cos \varphi_1$$

$$\cos \varphi_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \psi} = \sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}$$

$$\theta' = \frac{4}{3} \frac{T}{S} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}.$$

Pour $\varphi_1 = 0$, c'est-à-dire pour l'axe neutre, θ' acquiert sa plus grande valeur

$$\theta_{\max} = \frac{4}{3} \frac{T}{S}.$$

L'effort maximum tangentiel est donc de $33 \frac{1}{3}$ p. 100 supérieur à celui qui correspond à l'hypothèse d'une

égale répartition. Si on porte les valeurs de θ' en ordonnées sur l'axe des Z, on obtient une courbe

$$\left(\frac{\theta'}{\frac{4}{3} \frac{T}{S}} \right)^2 + \left(\frac{z}{r} \right)^2 = 1$$

C'est une ellipse.

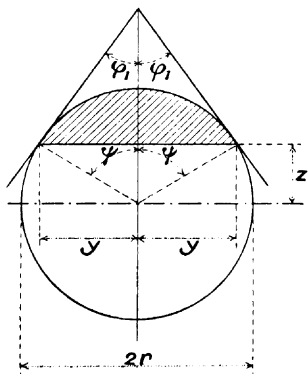


Fig. 101.

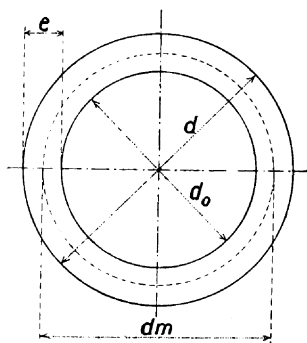


Fig. 102.

Section annulaire. — Supposons (fig. 102) l'épaisseur très faible et cherchons l'effort maximum, sur l'axe neutre. On a :

$$2y = d - d_o = 2e; \varphi_1 = 0; d + d_o = 2d_m$$

$$I = \frac{\pi}{64} (d^4 - d_o^4) = \frac{\pi}{64} (d^2 + d_o^2) (d + d_o) (d - d_o) = \frac{\pi}{8} d_m^3 e$$

environ.

$$M_z = \frac{1}{2} \pi d_m e \frac{1}{\pi} d_m = \frac{1}{2} d_m^2 e$$

$$\theta_{\max} = \frac{T \frac{1}{2} d_m^2 e}{2e \frac{\pi}{8} d_m^3 e} = 2 \frac{T}{\pi d_m e} 2 = \frac{T}{S}$$

la section étant

$$\frac{\pi}{4} (d^2 - d_0^2) = \pi d_m e = S.$$

La tension tangentielle à l'axe neutre est donc ici de 100 p. 100 supérieure à ce qu'elle vaudrait en admettant une égale répartition.

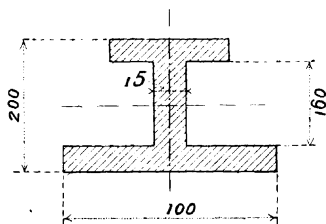


Fig. 103.

Section double T. — Au milieu de l'axe on a (fig. 103) :

$$2y = 1,5 \text{ cm.}; \varphi_1 = 0$$

$$M_z = 1,5 \cdot 8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 \cdot 9 = 228 \text{ cm}^3$$

$$I = \frac{1}{12} (10 \cdot 20^3 - 8,5 \cdot 16^3) = 3765 \text{ cm}^4$$

$$\theta_{\max} = \frac{T}{1,5} \frac{228}{3765} = 0,0404 T$$

$$S = 10 \cdot 20 - 8,5 \cdot 16 = 64 \text{ cm}^2$$

et

$$\theta_{\max} = 2,59 \frac{T}{S}.$$

Observons que pour des sections de cette espèce l'équation en θ n'est plus rigoureusement exacte à cause de la variation brusque de la section là où l'âme vient se raccorder aux tables; l'hypothèse de la constance de θ sur une bande de largeur b n'est plus admissible.

CALCUL DES MOMENTS FLÉCHISSANTS

Convention. — Considérons (fig. 104) une pièce prismatique AB et une section S en C. Les tensions intérieures en C font équilibre aux forces extérieures situées soit du côté AC, soit du côté CB et de part et d'autre de la section existent deux groupes d'efforts égaux et de sens contraires. Les moments fléchissants et les efforts tranchants

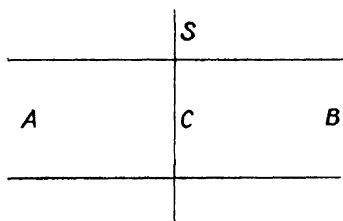


Fig. 104.

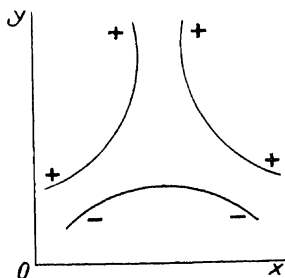


Fig. 105.

s'expriment d'une manière absolue; nous admettrons que le moment est positif quand il tend à *augmenter* algébriquement la courbure du prisme dans la section considérée et négatif quand il tend à diminuer cette courbure. On sait que la courbure est rapportée à deux axes OX et OY (fig. 105) et qu'elle est positive quand l'expression $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positive, c'est-à-dire quand la concavité de la courbe est tournée vers les Y positifs et qu'elle est négative quand la concavité est tournée vers les Y négatifs. Quant à l'effort tranchant T il a, comme on va voir, le signe de la dérivée de M.

Théorème I. — *L'effort réparti p est la dérivée de l'effort tranchant, c'est-à-dire que l'on a $p = \frac{dT}{dx}$.* Considérons

(fig. 106) un élément de solide compris entre deux sections AB et A'B'. Sur la portion AA' se trouve uniformément réparti un effort p par unité de longueur. Établissons l'équilibre dans le sens vertical; les efforts normaux à AB n'interviennent pas. Dans AB agit l'effort tranchant T , positif; sur A'B' cet effort tranchant sera $T + dT$. L'équation d'équilibre s'écrit :

$$T + p dx = T + dT$$

d'où

$$p = \frac{dT}{dx}.$$

On tire de là :

$$T = \int p dx$$

et, si on prend une origine quelconque, $T = \int p dx + T_0$, T_0 étant l'effort tranchant à l'origine.

Si, outre les efforts répartis p , interviennent des efforts répartis sur des surfaces assez petites, on peut remplacer ces derniers par leur résultante F et dans ce cas il vient :

$$T = \int p \cdot dx + \sum_0^x F + T_0. \quad (1)$$

Théorème II. — *L'effort tranchant est la dérivée du moment fléchissant, c'est-à-dire qu'on a $T = \frac{dM}{dx}$ et $p = \frac{d^2M}{dx^2}$.*

Considérons (fig. 106) un élément compris entre deux sections AB et A'B'. Sur la section AB agit le moment M , sur la section A'B' le moment $M + dM$; T et $T + dT$ sont les efforts tranchants dans les sections AB et A'B'; p est un effort extérieur uniformément réparti sur la lon-

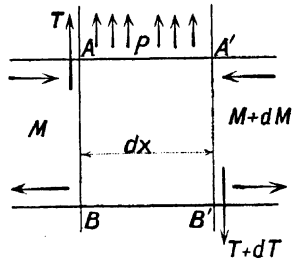


Fig. 106.

gueur dx . L'équation d'équilibre de rotation autour de l'axe central est

$$T dx + M + p dx \frac{dx}{2} = M + dM.$$

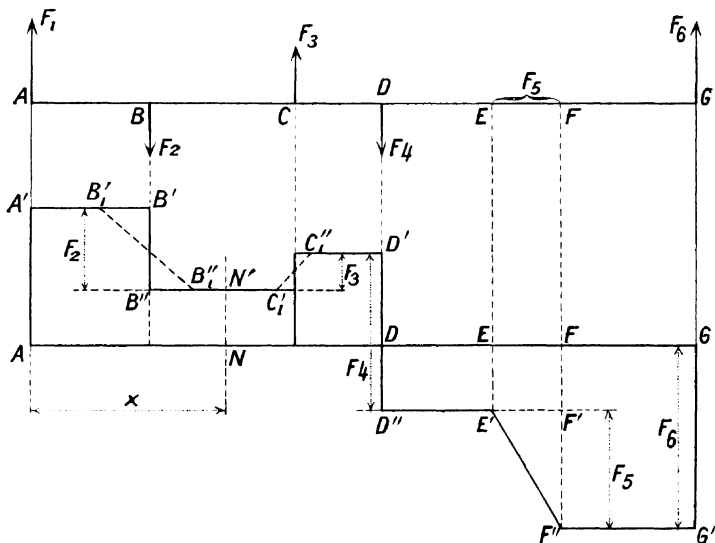


Fig. 107.

Or dx^2 est un infiniment petit du second ordre ; $p \frac{dx^2}{2}$ peut donc disparaître et on a :

$$T = \frac{dM}{dx}$$

$$M = \int T dx = \int_0^x dx \int_0^x p dx + \int_0^x dx \sum_0^x F + M_0$$

M_0 étant le moment à l'origine. Ou bien :

$$M = \int_0^x dx \int_0^x p dx + T_0 x + \int_0^x dx \sum_0^x F + M_0.$$

Diagramme des efforts tranchants. — Les ordonnées représentent les efforts tranchants T . Soit une pièce supposée en équilibre sous l'action des forces concentrées F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 (fig. 107) et d'une force F_6 uniformément répartie sur une longueur EF . Prenons l'origine en A . En chaque point de l'axe des abscisses élevons une ordonnée représentant l'effort tranchant correspondant. En A l'effort tranchant est F_1 . De A en AB cet effort reste la somme des efforts développés du côté de l'origine, donc F_1 . A partir de B la somme des efforts du côté de l'origine est $F_1 - F_2$ et ainsi de suite jusqu'en E . De E à F l'effort F_5 étant uniformément réparti, p est constant; donc $\frac{dT}{dx} = c$; $T = cx + c'$, équation d'une droite dont un point est E' ; l'autre point F'' est obtenu en faisant $F'F'' = F_5$. De F à G l'effort tranchant reste constant. Une vérification doit ici se produire. S'il y a équilibre le diagramme doit se fermer c'est-à-dire que l'on devra avoir $GG' = F_6$; dans ce cas, en effet, la somme algébrique des efforts tranchants est nulle.

Dans ce qui précède nous avons admis que certaines forces étaient concentrées; si elles étaient appliquées à des longueurs très petites, des droites, comme la verticale $B'B''$, devront être remplacées par des obliques $B'_1 B''_1$; si, de plus, les efforts p ne se répartissent pas uniformément, la droite $B'_1 B''_1$ devient une courbe.

Diagramme des moments fléchissants. — I. *Diagramme indirect.* — On a $M = \int T dx$. Or la surface comprise entre deux ordonnées F_1 et NN' du diagramme précédent est précisément $\int T dx$. Le diagramme des moments fléchissants est donc représenté par l'aire du diagramme des efforts tranchants. Observons que l'hypothèse des forces concentrées n'a pas d'influence sur le moment fléchissant, pour une section en N par exemple; car au dia-

gramme exact si, d'une part, on retranche un triangle de base $B'_1 B'$, d'autre part on ajoute le même triangle de base $B''_1 B''$. Il n'en n'est plus de même pour la section B ou en un point entre B'' et B''_1 ; les surfaces ajoutées et retranchées ne se compensent plus.

A mesure qu'on avance sur l'axe des abscisses le moment fléchissant augmente jusqu'à ce que le diagramme rencontre l'axe. En effet, à ce moment $T = 0$ donc $\frac{dM}{dx} = 0$ et M est maximum.

Si la pièce est en équilibre, la somme algébrique des moments doit être nulle; les aires positives doivent égaler les aires négatives.

II. *Diagramme direct.* — Il est possible de tracer un diagramme en portant en ordonnées la valeur des moments fléchissants.

Quand, sur une certaine longueur, l'effort réparti p sera nul, on aura

$$\frac{d^2M}{dx^2} = 0; \quad \frac{dM}{dx} = c; \quad M = cx + c'.$$

le diagramme est une droite sur cette longueur.

Si p n'est pas nul sur une certaine longueur on a :

$$\frac{d^2M}{dx^2} = p; \quad d^2M = p dx^2$$

$$M = \frac{px^2}{2} + cx + c'$$

équation d'une parabole; les valeurs de c et c' sont T_0 et M_0 , effort tranchant et moment à l'origine. Donc

$$M = \frac{px^2}{2} + T_0x + M_0.$$

La forme de cette parabole ne dépend que de la valeur

de p . Considérons (fig. 108), en effet, une parabole

$$y = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

représentée en (I); amenons-la en (II), de façon qu'elle passe par l'origine. Son équation devient

$$y = ax^2 + bx. \quad (2)$$

Appelons x_1 et y_1 les coordonnées du sommet; la parabole pourra être représentée par

$$y - y_1 = (x - x_1)^2 a'. \quad (3)$$

Pour que les équations (2) et (3) représentent la même courbe il faut que les coefficients de x^2 , x et y , ainsi que le terme constant soient égaux.

Donc $y_1 + a' x_1^2 = 0$

$a = a'$ et $b + 2a'x_1 = 0$. Il résulte de là que lorsqu'on connaît p et deux points de la parabole on peut tracer celle-ci. On pourra même la découper dans du carton et elle servira pour tous les cas semblables, p gardant la même valeur.

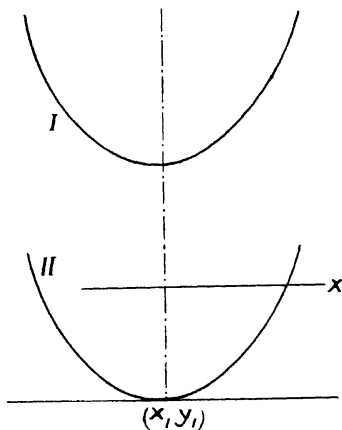


Fig. 108.

CALCUL DES RÉSISTANCES

En chaque point de toute section existent un effort normal et un effort tangentiel donnés par une ordonnée. C'est le cas d'une déformation composée et il y a lieu d'appliquer la formule de de Saint-Venant. Nous aurons d'ailleurs l'occasion d'étudier longuement les déformations composées. En général, cependant, on se contente de chercher la résistance pour le cas où t est maximum et $\theta = 0$

(points A et B fig. 99) et pour le cas où $t = 0$ et θ maximum (point O). On vérifie ensuite si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$t_v \leq r; \quad t_v' \leq r'; \quad \theta_0 \leq r''$$

r , r' et r'' étant les coefficients admissibles à la traction, à la compression et au cisaillement. Il y a souvent lieu,

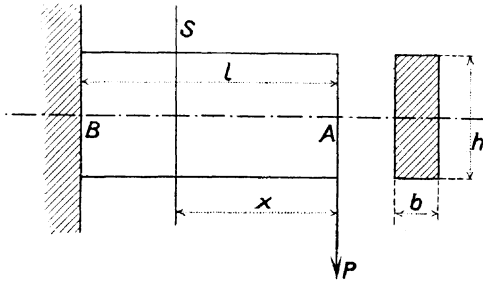


Fig. 109.

d'ailleurs, de n'appliquer la formule qu'en ce qui concerne le plus petit des deux coefficients r et r' . Nous verrons qu'en réalité il existe un coefficient admissible r''' à la flexion, correspondant à la rupture à la flexion R''' . Dès lors il y aura lieu d'établir les deux conditions :

$$r''' \geq \frac{Mv}{I} ; \quad r'' \geq \frac{TS_0 z_0}{b_0 l}$$

Souvent, quand les bras de levier sont grands et que la section est faible vers l'axe central, il n'y a pas à tenir compte de l'équation $\theta_0 \leq r''$. Dans d'autres cas, au contraire, il n'y a pas lieu de tenir compte de la condition $r''' \geq \frac{Mv}{I}$. Considérons (fig. 109), par exemple, une pièce encastrée par son extrémité B et subissant en A un effort transversal P. La pièce fatigue par effort tranchant et par moment fléchissant. On peut établir la con-

dition pour que la première fatigue prédomine. Pour une section S le moment fléchissant est $M = P \cdot x$. Le moment maximum se produit donc en B et $M_{\max} = P \cdot l$. On devra satisfaire aux conditions :

$$r''' \geq \frac{M_{\max} v}{I} \quad \text{avec} \quad r'' = \frac{P S_0 z_0}{b_0 I} .$$

Supposons une section rectangulaire et constante. Il viendra

$$r''' \geq \frac{6Pl}{bh^2} \quad \text{avec} \quad r'' = \frac{Pbh^2}{\frac{8b^2h^2}{12}}$$

ou

$$r''' \geq \frac{6Pl}{bh^2} \quad \text{et} \quad r'' \geq \frac{3}{2} \frac{P}{bh} .$$

Or $r'' = \frac{m}{m+1} r$. En admettant qu'on ait ici $r = r'''$, on tirera aisément la condition demandée.

Il arrive aussi souvent que des pièces d'une longueur assez grande par rapport à leur hauteur fatiguent également plus par effort tranchant. C'est notamment le cas du goujon. Certains organes se brisent même uniquement par effort tranchant; dans le sens longitudinal la tension tangentielle θ_0 conserve sa valeur sur une certaine longueur tandis que dans le sens transversal θ diminue du centre vers l'extérieur. Si la pièce est fibreuse dans le sens longitudinal il peut y avoir rupture par *effort rasant*. D'autre part, quand on a affaire à des pièces fortement affaiblies vers le milieu, il y a lieu encore de tenir compte de l'effort tranchant; la formule $\theta_0 = \frac{TS_0 z_0}{b_0 I}$ montre que si b_0 est petit, θ_0 peut être grand malgré la longueur du bras de levier. C'est le cas d'une poutrelle en double T. Pour une pièce de ce genre on pourrait avoir recours aux formules générales, mais pour simplifier on admet que les

deux tables seules résistent au moment fléchissant et que

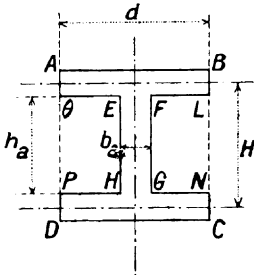


Fig. 110.

les tensions sont uniformément réparties sur ces tables (fig. 110). Dès lors, t étant la tension dans la table inférieure, le moment M par rapport au milieu de la table supérieure sera $H t \cdot d \cdot h = M$, h hauteur d'une table. On admet aussi que l'âme seule travaille au cisaillement et que l'effort tangentiel est uniformément réparti. On aura donc la seconde formule

$T = \theta b_a h_a$.

EXAMEN DE DIFFÉRENTS MODES DE CHARGE

I. Pièce encastree à une extrémité, chargée à l'extrémité libre, et sur toute sa longueur d'une charge uniformément répartie (fig. 111). — Soient P , charge à l'extrémité

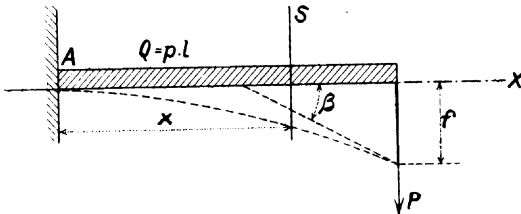


Fig. 111.

libre, p charge par unité de longueur de façon qu'on ait $Q = p \cdot l$.

Pour une section quelconque S à la distance x de l'encastrement on a :

$$M = P(l - x) + p \frac{(l - x)^2}{2} .$$

Le moment maximum se produit pour $x = 0$ et

$$M_{\max} = Pl + \frac{pl^2}{2} = \left(P + \frac{Q}{2}\right) l.$$

La section *dangereuse*, comme l'appelle Poncelet, est donc en A, à l'encastrement. L'élastique a pour équation

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d^2y}{dx^2} = P(l-x) + p \frac{(l-x)^2}{2}.$$

Supposons que la matière soit telle qu'on puisse considérer α comme constant. On a :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dy}{dx} = P \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{p}{2} \left(l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) + c$$

c , constante d'intégration, s'obtient en remarquant que l'élastique est confondue à l'encastrement avec l'axe primitif AX ; pour $x = 0$ on a $\frac{dy}{dx} = 0$, donc $c = 0$ et :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{1} \left[P \left(l - \frac{x}{2} \right) + \frac{p}{2} \left(l^2 - lx + \frac{x^2}{3} \right) \right] x \quad (1)$$

Pour $x = 0$ on a $y = 0$ et :

$$y = \frac{\alpha}{1} \left[\frac{P}{2} \left(l - \frac{x}{3} \right) + \frac{p}{4} \left(l^2 - \frac{2}{3} lx + \frac{x^2}{6} \right) \right] x^2$$

La flèche de l'extrémité libre s'obtient en faisant, dans cette dernière formule, $x = l$

$$f = \frac{\alpha}{1} \left(\frac{P}{3} + \frac{pl}{8} \right) l^3 = \frac{\alpha}{1} \left(\frac{P}{3} + \frac{Q}{8} \right) l^3.$$

On peut calculer pour tout point de l'élastique l'angle de la tangente en ce point avec l'axe primitif du prisme. Pour l'extrémité libre, ou pour $x = l$, dans la formule (1)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\alpha}{2l} \left(P + \frac{Q}{3} \right) l^2$$

et si β est faible :

$$\beta = \frac{\alpha}{2I} \left(P + \frac{Q}{3} \right) l^2.$$

S'il n'y a pas d'effort p uniformément réparti :

$$f = \frac{\alpha P l^3}{3I}.$$

et s'il n'y a pas d'effort extrême P :

$$f = \frac{\alpha Q l^3}{8I}.$$

Si $P = 0$ on voit que la flèche est plus grande dans le cas d'un effort concentré.

II. Pièce reposant à ses extrémités sur deux appuis, chargée uniformément et par une charge concentrée. Charge concentrée P ; charge répartie $Q = p \cdot l$ (fig. 112). Les réactions des appuis sont :

$$X = P \frac{b}{l} + \frac{Q}{2}; \quad Y = P \frac{a}{l} + \frac{Q}{2}.$$

Pour une section S à la distance x on a :

$$M = \left(P \frac{b}{l} + \frac{Q}{2} \right) x - \frac{p x^2}{2}$$

maximum à l'intérieur de AC pour $P \frac{b}{l} + \frac{Q}{2} = px$;
 $x = \frac{P}{Q} b + \frac{l}{2}$ pour $a > \frac{l}{2}$. La section soumise au moment maximum ne peut se trouver pour la plus grande des deux distances a et b , qu'entre le milieu de la poutre et le point C . On aura :

$$\frac{P}{Q} b < a - \frac{l}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q} < \frac{2a-l}{2b} = \frac{a-b}{2b}$$

$$pa > P \frac{b}{l} + \frac{Q}{2} .$$

Dans le cas où $\frac{P}{Q} \geq \frac{a-b}{2b}$ la section la plus fatiguée est au point C. Si cette condition est réalisée, on a

$$M_{\max} = \left(P \frac{b}{l} + \frac{Q}{2} \right) a - \frac{pa^2}{2} = \left(P + \frac{Q}{2} \right) \frac{ab}{l}$$

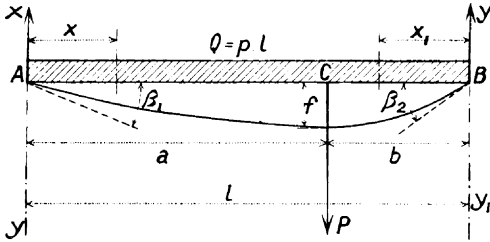


Fig. 112.

Si $\frac{P}{Q} \leq \frac{a-b}{2b}$, donc pour $x = \frac{P}{Q} b + \frac{l}{2}$, il vient :

$$\begin{aligned} M_{\max} &= \left(P \frac{b}{l} + \frac{Q}{2} \right) \left(\frac{P}{Q} b + \frac{l}{2} \right) - \frac{p}{2} \left(\frac{P}{Q} b + \frac{l}{2} \right)^2 = \\ &= \left(P \frac{b}{l} + \frac{Q}{2} \right)^2 \frac{l}{2Q} . \end{aligned}$$

Pour $Q = 0$

$$M_{\max} = P \frac{b}{l} a .$$

Si $a = b = \frac{l}{2}$

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4}$$

Pour $P = 0$

$$M_{\max} = \frac{Ql}{8} = \frac{pl^2}{8} .$$

Déterminons la ligne élastique. A l'intérieur de AC on a :

$$-\frac{1}{\alpha} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} Xx^2 - \frac{1}{6} px^3 + c_1$$

$$-\frac{1}{\alpha} y = \frac{1}{6} Xx^3 - \frac{1}{24} px^4 + c_1x + c_2$$

Pour $x = 0$, $y = 0$ et $c_2 = 0$

Pour la partie BC :

$$-\frac{1}{\alpha} \frac{d^2y_1}{dx_1^2} = Yx_1 - p \frac{x_1^2}{2}$$

$$-\frac{1}{\alpha} \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{2} Yx_1^2 - \frac{1}{6} px_1^3 + c'$$

$$-\frac{1}{\alpha} y_1 = \frac{1}{6} Yx_1^3 - \frac{1}{24} px_1^4 + c'x_1 + c''$$

$$c'' = 0.$$

Les flèches au point C sont égales :

$$\frac{1}{6} Xa^3 - \frac{1}{24} pa^4 + c_1a = \frac{1}{6} Yb^3 - \frac{1}{24} pb^4 + c'b.$$

L'angle d'inclinaison de l'élastique en C de la partie AC est égal à la valeur négative de l'angle d'inclinaison au même point de la partie BC. On a :

$$\frac{1}{2} Xa^2 - \frac{1}{6} pa^3 + c_1 = -\frac{1}{2} Yb^2 + \frac{1}{6} pb^3 - c'.$$

Tirons c_1 et c' des deux dernières équations. Il vient, pour la partie AC :

$$\frac{1}{\alpha} \left(\beta_1 - \frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{2} Xx^2 - \frac{1}{6} px^3$$

$$\frac{1}{\alpha} (\beta_1x - y) = \frac{1}{6} Xx^3 - \frac{1}{24} px^4$$

$$\beta_1 = \left[p \frac{ab(a+2b)}{6l} + \frac{Ql^2}{24} \right] \frac{\alpha}{l}$$

et, pour la partie BC :

$$\frac{1}{\alpha} = \left(\beta_2 - \frac{dy_1}{dx_1} \right) = \frac{1}{2} Yx_1^2 - \frac{1}{6} px_1^3$$

$$\frac{1}{\alpha} (\beta_2 x_1 - y_1) = \frac{1}{6} Yx_1^3 - \frac{1}{24} px_1^4$$

$$\beta_2 = \left[P \frac{ab(2a+b)}{6l} + \frac{Ql^2}{24} \right] \frac{\alpha}{l} .$$

La flèche f au point C a pour valeur

$$f = \left(P + \frac{l^2 + ab}{8ab} \right) \frac{a^2 l^2}{3l} \frac{\alpha}{l} .$$

Dans le cas où $a = b = \frac{l}{2}$ on a :

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = \left(P + \frac{2}{3} Q \right) \frac{\alpha}{l} \frac{l^2}{16}$$

$$f = \left(P + \frac{5}{8} Q \right) \frac{\alpha}{l} \frac{l^3}{48} .$$

Si $Q = 0$

$$\beta = \frac{\alpha}{16} \frac{Pl^2}{l}$$

$$f = \frac{\alpha}{48} \frac{Pl^3}{l} .$$

Si $P = 0$

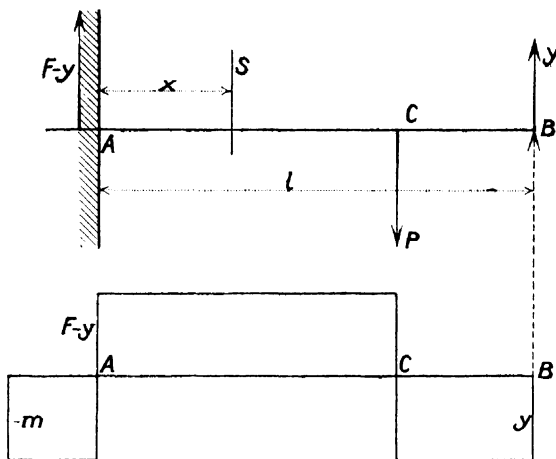
$$f = \frac{\alpha}{77} \frac{Ql^3}{l} .$$

La flèche est plus faible, en supposant $P = 0$.

III. Pièce appuyée à un bout, encastree à l'autre, charge concentrée. — En vertu de l'effort F (fig. 113) la pièce tend à être concave vers le haut ; en A elle est convexe vers le haut. L'encastrement produit donc l'effet d'un moment fléchissant négatif. Si on dessine le diagramme des efforts

tranchants, à la gauche de A on aura un rectangle négatif m représentant le moment à l'encastrement. Soient Y et $F - Y$ les réactions inconnues en A et B. On obtient une équation de condition en exprimant qu'il y a équilibre de rotation en A. La condition géométrique est que la somme des trois aires soit nulle et la condition algébrique :

$$Y \cdot l = F \cdot a - m \quad (1)$$

Fig. 113¹.

On a, en considérant la partie AC :

$$\frac{1}{x} \frac{d^2y}{dx^2} = -m + (F - Y)x \quad (2)$$

$$\frac{1}{x} \frac{dy}{dx} = -mx + (F - Y) \frac{x^2}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{x} y = -m \frac{x^2}{2} + (F - Y) \frac{x^3}{6} \quad (4)$$

Et, pour la partie de droite :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d^2y_1}{d\alpha^2} = Y(l - \alpha) \quad (2')$$

¹ F au lieu de P dans la figure :

$$\frac{I}{\alpha} \frac{dy_1}{dx} = Y \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + c \quad (3')$$

$$\frac{I}{\alpha} y_1 = Y \left(l \frac{x^2}{2} - \frac{l^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{l^3}{6} \right) + c (x - l) \quad (4')$$

Les trois inconnues sont m , Y et c . Or, les dérivées pour le point C ainsi que les ordonnées en ce point sont égales. Donc pour $x = a$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx}, \quad y = y_1.$$

Egalons donc les seconds membres de (3) et (3') après y avoir fait $x = a$. On a :

$$-ma + \frac{Fa^2}{2} - \frac{Ya^2}{2} = Yal - \frac{Ya^2}{2} + c$$

d'où :

$$c = -\frac{Fa^2}{2}. \quad (5)$$

Egalons les seconds membres de (4) et (4') en y faisant $x = a$;

$$-\frac{ma^2}{2} + \frac{Fa^3}{6} - \frac{Ya^3}{6} = \frac{Yla^2}{2} - \frac{Yl^3}{3} - \frac{Ya^3}{6} - \frac{Fa^3}{6} - \frac{Fa^2}{6} + \frac{F^2al}{2}$$

d'où on tire

$$m = Fl \left[\left(\frac{a}{l} \right) \frac{1}{2} + \frac{a}{l} - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

Les équations (1), (5) et (6) permettent de déterminer m , Y et c .

Cherchons le moment maximum ; le diagramme montre qu'il se produit en A ou en C ; le calcul établit que le moment en C est plus petit que le moment maximum. Cherchons le maximum de m . Annulons la dérivée de (6).

$$0 = \frac{1}{2} \frac{3a^2}{l^3} + \frac{1}{2} - \frac{3a}{l^2}$$

d'où :

$$\frac{a}{l} = -1 + \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$a = 0,426 l.$$

Remplaçons dans (6) il vient :

$$m_{\max} = 0,192 Fl.$$

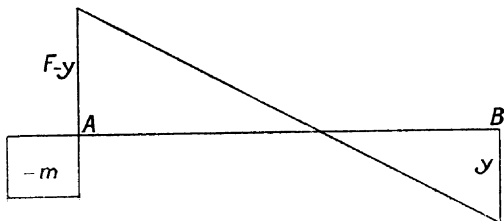


Fig. 114.

Dans le cas d'une pièce appuyée en deux points on a trouvé

$$m_{\max} = 0,250 Fl.$$

IV. Pièce appuyée à un bout, encastée à l'autre, charge uniformément répartie. — Le diagramme des efforts tranchants (fig. 114) est une oblique qui passe à droite du milieu de AB, car la somme algébrique des aires est nulle. On a deux inconnues m et Y . Pour les déterminer on exprimera :

1° Que la somme algébrique des moments fléchissants est nulle ;

2° Que les points extrêmes A et B sont au même niveau.

Pour établir cette expression, supposons qu'on ait trouvé $\frac{1}{2} y = \varphi(l, m, Y)$; la seconde condition sera

$$\varphi(l, m, Y) = 0.$$

V. Pièce encastree aux deux extremités, charge uniforme $Q = pl$ sur toute la longueur, charge concentree. — L'élastique est tangente à l'encastrement à l'axe primitif de la pièce (fig. 115). Les réactions en A et B se déterminent en supposant que la droite AB touche l'élas-

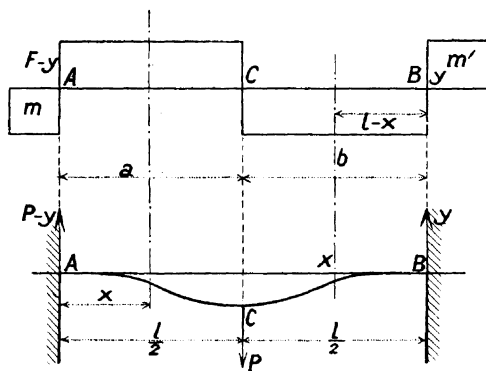


Fig. 115.

tique en A et B. La charge étant symétrique, il suffit d'examiner la moitié du prisme. A l'encastrement A agit un couple de moment m et une réaction $X = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2}$. Pour une section S à la distance x on a :

$$M = m + Xx - \frac{px^2}{2}$$

$$-\frac{1}{x} \frac{d^2y}{dx^2} = m + Xx - \frac{px^2}{2}$$

et, si x et I sont invariables :

$$-\frac{I}{x} \frac{dy}{dx} = mx + \frac{1}{2} Xx^2 - \frac{px^3}{6}.$$

La constante d'intégration est nulle car pour

$$x = 0, \frac{dy}{dx} = 0.$$

D'autre part pour

$$x = \frac{l}{2}, \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

et on a :

$$0 = m \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{2} \right) \frac{l^2}{4} - p \frac{l^3}{48}$$

$$m = - \left(\frac{Pl}{8} + \frac{Ql}{12} \right).$$

Le moment fléchissant à la distance x a pour expression

$$M = - \left(\frac{Pl}{8} + \frac{Ql}{12} \right) + \left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{2} \right) x - \frac{px^2}{2}$$

Pour $x = \frac{l}{2}$ il est

$$M = \frac{Pl}{8} + \frac{Ql}{24}$$

c'est-à-dire en valeur absolue plus petit de $\frac{Ql}{24}$ que le moment à l'encastrement. Si le moment pour le milieu C est positif il doit être nul pour une section entre A et C.

Dans le cas où $Q = 0$ il vient, pour les moments :

$$\text{En A, } - \frac{Pl}{8}$$

$$\text{C, } + \frac{Pl}{8}$$

à la distance $x = \frac{l}{4}$, 0.

Si $P = 0$ les moments sont :

$$\text{En A, } - \frac{Ql}{12} = - \frac{pl^2}{12}$$

$$\text{C, } + \frac{Ql}{24} = \frac{pl^2}{24}$$

à la distance $x = 0,2113l, 0$.

L'équation de l'élastique s'obtient en observant que pour $x = 0, y = 0$ et on a :

$$-\frac{1}{\alpha} y = \frac{1}{2} mx^2 + \frac{1}{6} Px^3 - \frac{px^4}{24} .$$

La valeur maximum de la flèche f a lieu pour $x = \frac{l}{2}$ et

$$f = \left(P + \frac{Q}{2} \right) \frac{\alpha}{1} \frac{l^3}{192} .$$

On pourrait traiter le cas d'une façon plus générale en ne supposant par exemple que la force P , mais appliquée en un point quelconque de la pièce. Il existe un moment m en A et un moment m' en B. Traçons le diagramme des efforts tranchants, l'origine étant en A. Il y a trois inconnues m, m' et Y . Pour la partie à gauche de C on a

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d^2y}{dx^2} = -m + (P - Y) x \quad (1)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dy}{dx} = -mx + (P - Y) \frac{x^2}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\alpha} y = -\frac{mx^2}{2} + (P - Y) \frac{x^3}{6} \quad (3)$$

Pour une section à droite de C :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d^2y_1}{dx^2} = -m' + Y (l - x) \quad (1')$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dy_1}{dx} = -m' (x - l) + Y \left(lx - \frac{x^2}{2} - \frac{l^2}{2} \right) \quad (2')$$

$$\frac{1}{\alpha} y_1 = -m' \left(\frac{x^2}{\alpha} - lx + \frac{l^2}{2} \right) + Y \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{l^2x}{2} + \frac{l^3}{6} \right) \quad (3')$$

Condition de nullité de la somme algébrique des aires :

$$m = m' + (P - Y) a - Y (l - a)$$

d'où

$$Yl = m' - m + Pa. \quad (4)$$

Au point C les tangentes se confondent :

$$-ma + \frac{Fa^2}{2} - \frac{Ya^2}{2} = -m'a + m'l + Yla - \frac{Ya^2}{2} - \frac{Yl^2}{2} \quad (5)$$

Remplaçons Yl par sa valeur (4) :

$$m + m' = \frac{Pab}{l}.$$

Remplaçons m par sa valeur dans l'équation (4) :

$$Yl = 2m' + \frac{Fa^2}{l}. \quad (4')$$

En C les ordonnées sont les mêmes ; remplaçant m par sa valeur tirée de (5) :

$$\begin{aligned} \frac{m'a^2}{2} - \frac{Pa^3b}{l} + \frac{Pa^3}{6} &= -\frac{m'a^2}{2} + m'la - \frac{m'l^2}{2} + \frac{2m'a^2}{2} \\ &- \frac{2m'la}{2} + \frac{m'l^2}{3} + \frac{Pa^4}{2l} - \frac{Pa^3}{2} + \frac{Pa^2l}{6}. \end{aligned}$$

En tenant compte des relations déjà établies :

$$m' = \frac{Pa^2b}{l^2}. \quad (6)$$

Par raison de symétrie, on peut écrire :

$$m = \frac{Pab^2}{l^2}$$

et (4') devient

$$Yl = \frac{2Pa^2b}{l^2} + \frac{Pa^2}{l}.$$

Le moment maximum se produit en A, C ou B. Déterminons le moment M en C. On a :

$$M = -m' + Yl$$

$$M = -\frac{Pa^2b}{l^2} + \frac{2Pa^2b^2}{l^3} + \frac{Pa^2b}{l^2} = 2 \frac{Pa^2b^2}{l^3}$$

donc

$$m' = \frac{Pa^2b}{l^2}; \quad m = \frac{Pab^2}{l^2}; \quad M = \frac{Pab^2}{l^2} \cdot \frac{2a}{l}$$

Donc

$$M = m \cdot \frac{2a}{l};$$

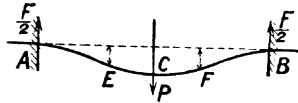


Fig. 116.

par suite $M < m'$ car par raison de symétrie $M = m' \frac{2b}{l}$.

Le moment maximum ne se produit donc jamais en C. Cherchons la condition pour que m soit maximum. On a :

$$m = \frac{P(l-b)b^2}{l^2}.$$

Egalons la dérivée à zéro :

$$0 = 2bl - 3b^2$$

$$b = \frac{2}{3} l$$

et le moment maximum vaut

$$\frac{4}{27} Pl = 0,148 Pl.$$

Si $\frac{2a}{l} = \frac{2b}{l} = 1$, c'est-à-dire si l'effort P est appliqué au milieu de AB , on a $M = m = m'$. C'est le cas que nous avons examiné ci-dessus. Cependant on peut observer que la pièce se divise en quatre tronçons AE , EC , CF , FB

(fig. 116), assujettis à être horizontaux à une extrémité et soumis à un effort constant P . La flèche est la moitié de la flèche totale ; on se trouve dans un cas particulier du premier.

Et pour la flèche on trouve la valeur :

$$f = \frac{2 \frac{P}{2} \frac{l^2}{64} \alpha}{3I} .$$

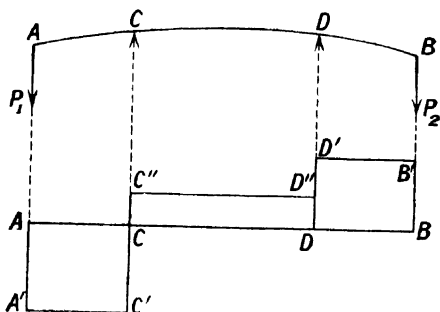


Fig. 117.

VI. Pièce reposant sur deux appuis intermédiaires, efforts concentrés aux extrémités ou bien charge répartie. — Pour obtenir les réactions (fig. 117), on peut établir l'équilibre de rotation autour de C et D. Traçons le diagramme des efforts tranchants AA'CC' et BB'D'D. La différence entre les deux aires, positive dans le cas actuel, donne le rectangle de base CD et les réactions en C et D. Le moment maximum se produit en C, le diagramme complet étant AA'C'CC'' D''D'B'B.

Si les moments sont égaux en A et B le moment est constant sur toute la longueur CD. D'après la formule $\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha M}{I}$ (1) le rayon ρ est constant si α et I le sont ; la flexion est circulaire. Les deux triangles semblables

EDE', E'DG (fig. 118) fournissent :

$$\frac{f}{\frac{l}{2}} = \frac{\frac{l}{2}}{2\rho - f} \quad (2)$$

En éliminant ρ entre (1) et (2) on aurait une équation du

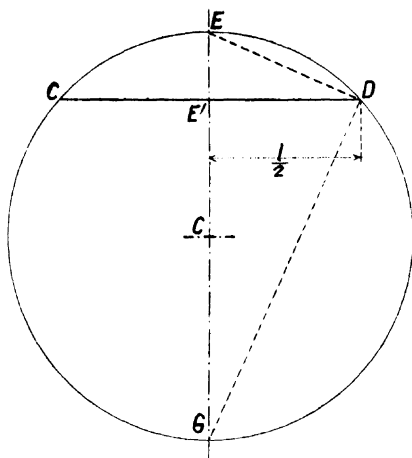


Fig. 118.

second degré en f qui détermine cette inconnue. Mais dans (2) f est négligeable vis-à-vis de 2ρ et on a

$$\begin{aligned} \frac{f}{\frac{l}{2}} &= \frac{\frac{l}{2}}{2\rho} \\ f &= \frac{l^2}{8\rho} \end{aligned} \quad (2')$$

Éliminons ρ entre (1) et (2) :

$$f = \frac{l^2}{8} \frac{xM}{l}$$

S'il s'agit d'une force uniformément répartie, soit $\frac{Q}{l}$ la charge par unité de longueur. Les réactions X et Y se trouvent en écrivant l'équation d'équilibre de rotation autour de C et D . Traçons (fig. 119) le diagramme des efforts tranchants sur la longueur AC . C'est une droite AC'' telle que $T = -\frac{X}{l}x$. En C on a $C'C'' = X$; $C'D'$ est parallèle

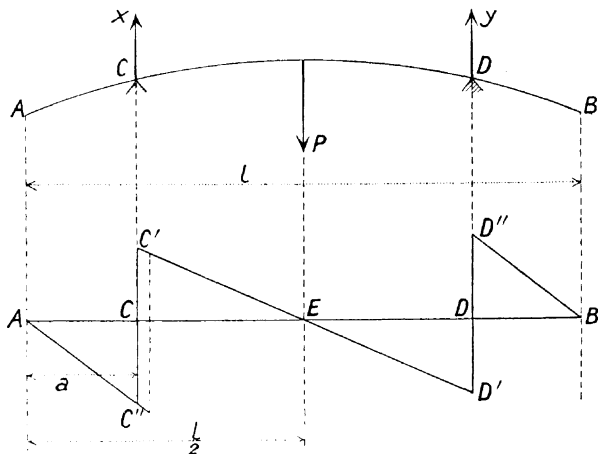


Fig. 119.

à AC'' ; $D'D'' = Y$ et $D''B$ est parallèle à AC'' . Cherchons la position de C et D la plus favorable, c'est-à-dire donnant le moment maximum le plus petit. Il faut que C et D soient symétriques ou que $AC = BD$. Dans ce cas E est au milieu de AB , le moment maximum est alors minimum. Les réactions en C et D sont égales; les moments aux mêmes endroits sont donc identiques. A mesure que C et D se rapprochent, le moment en C augmente en valeur absolue mais le moment en E diminue. La position la plus favorable pour C sera celle pour laquelle le moment en C égale le moment en E et $ACC'' = ECC' - ACC''$ d'où

$ECC' = 2ACC''$; il faut que $CE = AC\sqrt{2}$ ou $\frac{l}{2} - a = a\sqrt{2}$, d'où

$$a = 0,207 l$$

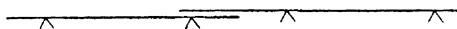


Fig. 120.

et le moment maximum, en C, aura pour valeur

$$M = \frac{P}{l} \frac{a^2}{2} = 0,021 Pl.$$

Ce moment est inférieur à ce qu'il est quand la pièce repose sur deux appuis extrêmes, propriété utilisée au pont du Forth où les poutres sont en porte-à-faux (fig. 120).

VII. Pièce appuyée sur plusieurs appuis de même niveau chaque travée étant soumise à une charge unifor-

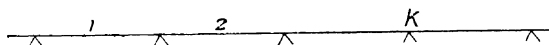


Fig. 121.

mément répartie (fig. 121). — Soient p_1, p_2, p_3 les charges par unité de longueur sur les travées 1, 2, 3. Prenons pour origine l'avant-dernier appui k . On a, pour la k^{me} travée :

$$T = T_k - p_k x.$$

T_k , effort tranchant au point d'appui k ; T_k est inconnu.

Pour cette travée on aura :

$$M = \frac{1}{x} \frac{d^2 y}{dx^2} = M_k + T_k x - p_k \frac{x^2}{2} \quad (1)$$

M_k , moment inconnu, en k . On tire :

$$\frac{1}{x} \frac{dy}{dx} = M_k x + T_k \frac{x^2}{2} - p_k \frac{x^3}{6} + \frac{1}{x} \frac{dy_k}{dx} \quad (2)$$

$\frac{1}{\alpha} \frac{dy_k}{dx}$, constante inconnue. Intégrons :

$$\frac{1}{\alpha} y = M_k \frac{x^2}{2} + T_k \frac{x^3}{6} - p_k \frac{x^4}{24} + \frac{1}{\alpha} \frac{dy_k}{dx} x \quad (3)$$

Première équation à trois inconnues :

$$M_k, T_k \quad \text{et} \quad \left(\frac{dy_k}{dx} \right).$$

Observons que pour $x = l_k, y = 0$; l'équation (3) donne :

$$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{dy_k}{dx} \right) = - M_k \frac{l_k}{2} - T_k \frac{l_k^2}{6} + \frac{p_k l_k^3}{24} \quad (4)$$

Pour $x = l_k$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_{k+1}}{dx} ;$$

donc, d'après (2) :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dy_{k+1}}{dx} = M_k l_k + T_k \frac{l_k^2}{2} - \frac{p_k l_k^2}{6} + \frac{1}{\alpha} \frac{dy_k}{dx} . \quad (5)$$

Enfin pour $x = l_k, M = M_{k+1}$; (1) donne :

$$M_{k+1} = M_k + T_k l_k - p_k \frac{l_k^2}{2} \quad (6)$$

Où

$$T_k = \frac{M_{k+1} - M_k}{l_k} + \frac{p_k l_k}{2}$$

Remplaçons T_k par cette valeur dans (4) et (5) :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dy_k}{dx} = - \frac{M_k l_k}{3} - \frac{M_{k+1} l_k}{6} - \frac{p_k l_k^2}{24} \quad (4')$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dy_{k+1}}{dx} = \frac{M_k l_k}{6} + \frac{M_{k+1} l_k}{3} + \frac{p_k l_k^3}{24} \quad (5')$$

Soient deux équations à quatre inconnues :

$$\frac{dy_k}{dx}, \quad \frac{dy_{k+1}}{dx}, \quad M \quad \text{et} \quad M_{k+1}.$$

Chacune des expressions $\frac{dy_k}{dx}$, $\frac{dy_{k+1}}{dx}$ est commune à deux travées consécutives; il en est de même de M_k et M_{k+1} ; d'où deux équations qui permettront de supprimer deux inconnues.

L'équation (5') autorise à écrire, par analogie :

$$\frac{dy_k}{dx} = -\frac{M_{k-1} l_{k-1}}{6} + \frac{M_k l_{k-1}}{3} + \frac{p_{k-1} l_{k-1}^3}{24} \quad (6)$$

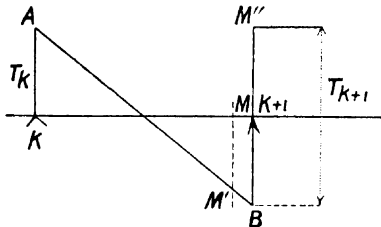


Fig. 122.

Egalons les deux membres de (4) et (6) :

$$M_{k-1} l_{k-1} + 2M_k (l_{k-1} + l_k) + M_{k+1} l_k + \frac{p_k l_k^3}{4} + \frac{p_{k-1} l_{k-1}^3}{4} = 0 \quad (7)$$

équation renfermant trois inconnues :

$$M_{k-1}, \quad M_k, \quad M_{k+1}$$

On obtiendrait des équations analogues en diminuant les indices pour chacun des $k - 1$ appuis intermédiaires entre 1 et $k + 1$. On aurait donc $k - 1$ équations à $k - 1$ inconnues M_k, M_{k-1}, \dots . Les moments aux points d'appui intermédiaires sont donc connus; les moments aux appuis extrêmes sont évidemment nuls. Déterminons maintenant les efforts tranchants aux divers appuis, T_k, T_{k-1}, \dots . On a :

$$T_k = \frac{M_{k+1} - M_k}{l_k} + p_k l_k.$$

On peut tracer le diagramme des efforts tranchants (fig. 122) ; le coefficient angulaire de AB est p_k ; au point $k + 1$ il y a ressaut brusque.

L'effort tranchant passe de la valeur MM' qu'il avait en M, point infiniment voisin de $k + 1$, à la valeur T_{k+1} . La différence constitue la réaction au point d'appui. La formule (7) s'appelle *formule de Clapeyron* ou des *trois moments* ; elle n'est applicable que si $\frac{1}{\alpha}$ est constant. — Nous aurons l'occasion ultérieurement de voir, comment, grâce aux beaux théorèmes de Maxwell et de Castigliano on peut calculer les réactions d'appui des poutres reposant sur plus de deux appuis.

VIII. Pièces supportant une charge commune. — 1. Deux pièces solidaires à un bout ; charge P commune aux extrémités libres (fig. 123). Soient P_1 et P_2 les charges portées respectivement par les pièces A et B. On a :

$$P_1 + P_2 = P. \quad (1)$$

La flèche est la même pour les deux pièces. Il vient donc :

$$f = \frac{P_1 l^3 \alpha_1}{3I_1} = \frac{P_2 l^3 \alpha_2}{3I_2}$$

d'où

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1 \alpha_2}{I_2 \alpha_1}. \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) permettent de déterminer P_1 et P_2 . Si $I_1 = I_2$ les pièces ont même section. Il vient :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Quand $\alpha_1 = \alpha_2$, les pièces sont de même matière et $\frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1}{I_2}$ (3). La pièce la plus épaisse supporte donc la

charge la plus grande. C'est aussi cette pièce qui fatigue le plus. En effet les tensions à l'encastrement ont pour valeur :

$$t_1 = \frac{P_1 l v_1}{I_1}; \quad t_2 = \frac{P_2 l v_2}{I_2}$$

et, en tenant compte de (3)

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

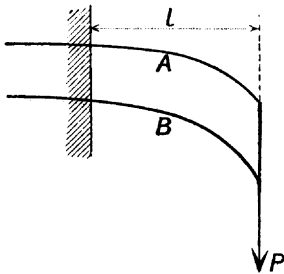


Fig. 123.

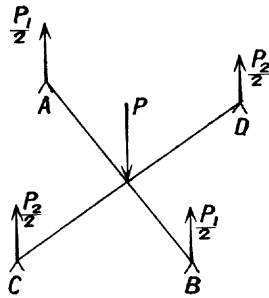


Fig. 124.

C'est pour ce motif que la maîtresse lame d'un ressort à lames est la moins épaisse.

2. Deux pièces croisées (fig. 124) en contact par le milieu, appuyées aux extrémités, supportent une charge P au point de contact. On a encore

$$P = P_1 + P_2. \tag{1}$$

La flèche est commune :

$$\frac{P_1 l_1^3 \alpha_1}{48 I_1} = \frac{P_2 l_2^3 \alpha_2}{48 I_2} \tag{2}$$

d'où on tire P_1 et P_2 .

Si $\alpha_1 = \alpha_2$ on a

$$\frac{P_1 l_1^3}{I_1} = \frac{P_2 l_2^3}{I_2}. \tag{3}$$

Les tensions au point milieu sont

$$t_1 = \frac{P_1 l_1}{4} \frac{v_1}{I_1} ; \quad t_2 = \frac{P_2 l_2}{4} \frac{v_2}{I_2}$$

d'où

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_1 l_2^2}{v_2 l_1^2}$$

A égalité de longueur les pièces fatiguent en raison directe de l'épaisseur ; à égalité d'épaisseur elles fatiguent en raison inverse du carré des longueurs.

IX. Considérations sur l'encastrement des pièces. — Il y a lieu de présenter quelques observations relativement à l'hypothèse émise lors de l'étude des pièces encastrees,

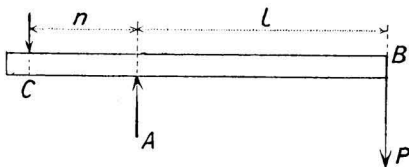


Fig. 125.

qu'à l'encastrement l'élastique reste tangente à l'axe primitif des pièces. Une pièce est dite encastree par une extrémité quand sa liaison avec l'appui tend à empêcher ou à réduire la déviation en ce point, de la fibre moyenne. L'encastrement consiste à emprisonner l'extrémité considérée de la poutre dans un massif capable de résister au renversement et à maintenir cette partie de la poutre dans la position horizontale. Cet effet est aussi obtenu au moyen de deux boulons ancrés dans le massif. Un appui simple ne donne lieu qu'à une réaction ; un encastrement, comme on a vu, donne naissance à une réaction et à un couple.

Soit (fig. 125) une cavité dans laquelle est engagé l'about de la pièce. On admet que celle-ci peut être considérée

comme maintenue absolument fixe entre deux appuis A et C disposés en sens contraires, la section d'encastrement étant en A. En A appliquons deux forces égales et contraires $+P$ et $-P$. Les forces $-P$ en A et $+P$ en B donnent lieu à un couple de moment $P \cdot l$ qui engendre en A et C deux réactions X dont le moment $X \cdot n$ doit faire équilibre au premier. On a :

$$X \cdot n = P \cdot l$$

d'où

$$X = P \cdot \frac{l}{n}$$

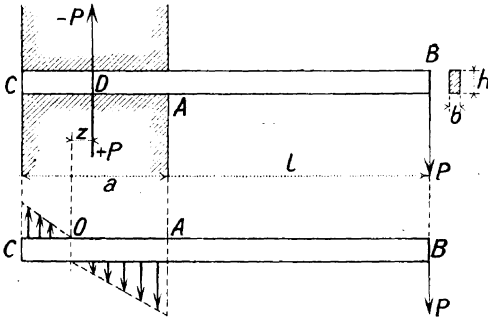


Fig. 126.

La réaction dans la section d'encastrement A sera donc

$$Y = P + P \frac{l}{n} = P \left(1 + \frac{l}{n} \right)$$

et la réaction en C :

$$X = P \frac{l}{n}$$

Les réactions X et Y sont donc différentes ; la pièce aura une tendance à s'infléchir autour d'un point situé plus près de A que de C et l'hypothèse rappelée ci-dessus est inexacte. Observons cependant que la différence

entre les réactions X et Y est d'autant plus faible que n est relativement grand vis-à-vis de l , c'est-à-dire quand l'encastrement est profond et que les appuis en A et C sont suffisamment larges.

Considérons maintenant (fig. 126) une pièce encastree de façon que la charge étant nulle, les parois supérieure et inférieure de la cavité touchent l'about en tous ses points. Chargeons la pièce. On peut appliquer au milieu D de la portée a deux efforts égaux et contraires $+P$ et $-P$; $+P$ en D donne lieu à une pression que nous admettons uniforme sur la surface de contact AC de la poutre supposée à section rectangulaire bh ; la pression spécifique a pour valeur

$$p_1 = \frac{P}{ab}$$

Les forces $+P$ en B et $-P$ en D constituent un couple $P \left(l + \frac{a}{2} \right)$, lequel engendre des pressions variables sur la surface inférieure de AD et sur la surface supérieure de DC; ces pressions croissent de l'intérieur D vers l'extérieur A ou C. On peut les calculer par la formule de flexion :

$$t = \frac{Mv}{I} = p_2.$$

Ici

$$M = P \left(l + \frac{a}{2} \right); I = \frac{1}{12} ba^3; v = \frac{a}{2}$$

et on a :

$$p_2 = \frac{P \left(l + \frac{a}{2} \right)}{\frac{1}{6} ba^2} = 6 \frac{P}{ab} \left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2} \right).$$

La résultante des pressions en A sera

$$p_a = p_1 + p_2 = \frac{P}{ab} + 6 \frac{P}{ab} \left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2} \right) = 2 \frac{P}{ab} \left(2 + 3 \frac{l}{a} \right)$$

En C la résultante a pour valeur

$$p_c = -p_1 + p_2 = -\frac{P}{ab} + 6\frac{P}{ab}\left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2}\right) = 2\frac{P}{ab}\left(1 + 3\frac{l}{a}\right).$$

Par suite de l'action de ces deux résultantes inégales, l'axe de la pièce a une tendance à s'infléchir autour d'un point O situé à la distance z du milieu D et dont la position est déterminée par la condition

$$p_2 \frac{z}{\frac{a}{2}} = p_1$$

$$6\frac{P}{ab}\left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2}\right) \frac{z}{a} = \frac{P}{ab}$$

$$z = \frac{a}{12\left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Le point A d'encastrement ne coïncide donc pas non plus, dans ce cas, avec l'axe primitif de la pièce.

Le poids des maçonneries sur la portée diminue cependant les chances de non-exactitude de l'hypothèse.

X. Pièces d'égale résistance. Définition. — Les pièces d'égale résistance sont telles que toutes leurs sections subissent la même tension maximum.

On devra donc avoir

$$r = \frac{M}{\frac{l}{v}}; \quad r' = \frac{M}{\frac{l}{v'}}$$

constants. La section varie donc d'un endroit à un autre avec le moment fléchissant. Il suit de là que

$$\frac{l}{\rho} = \frac{\alpha M}{I} = \alpha \frac{M}{\frac{l}{v}} \times \frac{1}{v} = \alpha \frac{r}{v}.$$

et que, si on suppose α constant pour la matière considérée, et une hauteur v constante, la flexion de l'élastique sera circulaire.

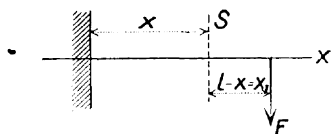


Fig. 127.

Pièces rectangulaires. — La formule devient $r = \frac{6M}{bh^2}$.

On peut considérer divers cas.

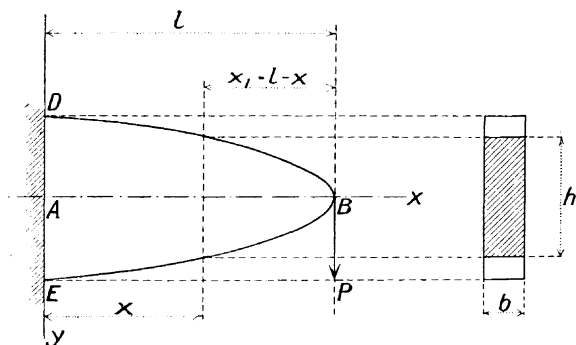


Fig. 128.

1° *Pièce encastree à un bout, chargée à l'extrémité libre d'un poids concentré F (fig. 127).* La formule devient :

$$r = \frac{6Fx_1}{bh^2} .$$

Il y a une infinité de solutions car on peut disposer de deux inconnues b et h . Établissons deux hypothèses.

a) La largeur b est constante (fig. 128). Il viendra

$$h^2 = \frac{6Px_1}{rb}$$

le profil est une parabole EBD dont BA est l'axe principal, B le sommet, E et D deux seconds points déterminés par

$$AE = AD = \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6Pl}{rb}}$$

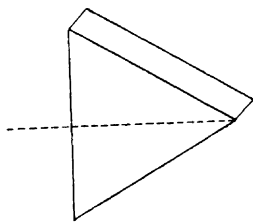


Fig. 129.

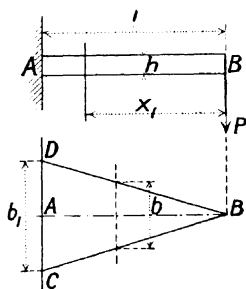


Fig. 130.

La flèche f à l'extrémité libre s'obtient en rapportant l'élastique à deux axes. Il vient :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{xr}{v} = \frac{xr}{\frac{h}{2}} = \frac{xr}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{6P}{rb} x}} = \frac{2xr \sqrt{l}}{h \sqrt{x}}$$

$$y = x \left(\frac{16Pl \sqrt{l}}{bh^3} \sqrt{x^3} + \frac{24Pl^2}{bh^3} x - \frac{16Pl^3}{bh^3} \right)$$

h hauteur à l'encastrement.

Pour

$$x = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad y = 0$$

$$f = x \frac{8Pl^3}{bh^3}$$

Si la charge est uniformément répartie, il vient

$$M = \frac{Px_1^2}{2l} \quad \text{et} \quad r = \frac{3Px_1^2}{6bh^2},$$

et b étant constant, $h^2 = C'x_1^2$, ou $h = C''x_1$, le profil est rectiligne (fig. 129); la flèche devient

$$f = \frac{x}{\frac{1}{12}bh^3} \frac{Pl^3}{3} = x \frac{4Pl^3}{bh^3}$$

c'est-à-dire la moitié de ce qu'elle est quand la charge est concentrée à l'extrémité.

b) La hauteur h est constante (fig. 130). La forme de la pièce est donnée par la formule

$$b = \frac{6F}{rh^2} x_1$$

ou $b = Cx_1$; le profil est rectiligne; pour $x_1 = 0$, $b = 0$. Les points C et D sont obtenus par

$$AC = AD = \frac{b}{2} = \frac{3Pl}{rh^2}.$$

La courbure de la ligne élastique est donnée par

$$\frac{1}{\rho} = x \frac{r}{v} = 2x \frac{r}{h}$$

et comme la hauteur est constante, l'élastique est une circonférence de rayon

$$\rho = \frac{h}{2xr}.$$

La flèche à l'extrémité libre a pour valeur :

$$f = \frac{l^2}{2\rho} = xr \frac{l^2}{h} = x \frac{6Pl^3}{bh^3}$$

c'est-à-dire une fois et demie plus grande que celle d'une pièce à largeur b constante.

Si l'effort est uniformément réparti, on a $b = Cx_1^2$; le profil est parabolique (fig. 131).

Si la charge est uniformément croissante, $p = - kx_1$; d'où

$$T = - \frac{kx_1^2}{2} \quad \text{et} \quad M = - \frac{kx_1^3}{3} ;$$

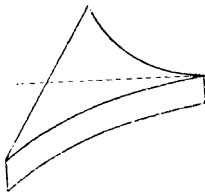


Fig. 131.



Fig. 132.

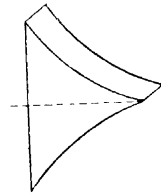


Fig. 133.

la formule générale devient

$$r = \frac{kx_1^2}{bh^2} .$$

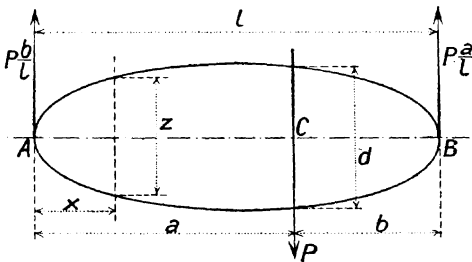


Fig. 134.

Deux cas se présentent :

a) h est constant ; on a $b = Cx_1^3$, parabole cubique (fig. 132).

b) b est constant ; il vient $h = Cx_1^{\frac{3}{2}}$, parabole semi-cubique tenant le milieu entre une parabole du second degré et une droite (fig. 133).

Pièces circulaires. — *Pièce reposant sur deux appuis, chargée en un point d'un poids concentré.* — La partie AC (fig. 134) se comporte comme encastrée en C et chargée en A par un poids $P \frac{b}{l}$; la partie BC peut être considérée comme encastrée en C et chargée en B d'un poids $P \frac{a}{l}$.

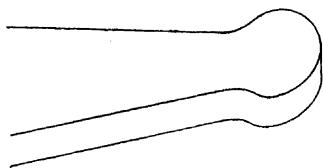


Fig. 135.

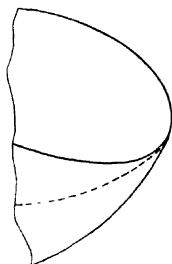


Fig. 136.

Dans une section circulaire quelconque à la distance x de AC on a :

$$M = P \frac{b}{l} x; \quad \frac{1}{r} = \frac{\pi}{32} z^3$$

et

$$r = \frac{P \frac{b}{l} x}{\frac{\pi}{32} z^3} = c^{10}$$

$$z^3 = \frac{32Pb}{\pi r l} x$$

équation d'une parabole cubique dont AC est l'axe principal, A le sommet, et dont le diamètre au point C est donné par :

$$d = \sqrt[3]{\frac{32Pab}{\pi r l}}.$$

Pour la portion BC on obtiendrait un résultat analogue ; la pièce AB est donc formée de deux paraboles cubiques se raccordant dans la section C.

Observations. — Dans les cas de pièces rectangulaires examinés ci-dessus, on n'a tenu compte que du moment fléchissant. Il y a cependant lieu, vers l'extrémité de la pièce encastrée, de considérer l'effort tranchant.

Dans le premier cas on donnera à la pièce la forme

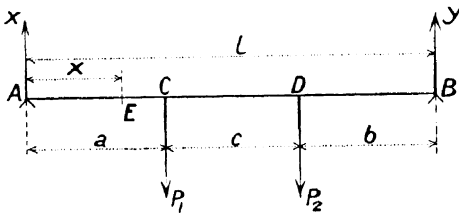


Fig. 137.

(fig. 135.) Dans le second cas on utilise la forme parabolique, mais alors l'âme de la pièce devient courbe (fig. 136).

XI. Pièce appuyée à ses extrémités, soumise à deux charges mobiles dont la distance reste constante. — A. Supposons en premier lieu que la distance c des deux charges soit variable (fig. 137). Les réactions X et Y se calculent en établissant l'équilibre autour des appuis A et B. On a ainsi :

$$X = \frac{P_1(l-a)}{l} + \frac{P_2(l-a-c)}{l} ; Y = \frac{P_2(l-b)}{l} + \frac{P_1(l-b-c)}{l}$$

Le moment maximum se produit en C ou en D. Il vient :

$$M_c = \frac{P_1 a (l-a)}{l} + \frac{P_2 a (l-a-c)}{l} \quad (1)$$

$$M_D = \frac{P_2 b (l - b)}{l} + \frac{P_1 b (l - b - c)}{l} \quad (2)$$

Dans le cas où c est variable, le plus grand moment maximum se produira quand P_1 et P_2 sont tous deux appliqués au milieu de AB ; en effet on voit que M_C ou M_D sont tous deux maximum pour $c = 0$.

B. Supposons c constant. Le moment maximum se produira en C ou en D, car c'est en ces points que le

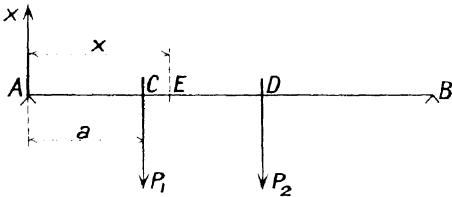


Fig. 138.

diagramme des efforts tranchants couperait l'axe. Le moment maximum sera donc donné par la plus grande des deux quantités $M_{C_{\max}}$ ou $M_{D_{\max}}$. Cherchons $M_{C_{\max}}$ et annulons la dérivée.

Il vient :

$$0 = P_1 l - 2P_1 a + P_2 l - 2P_2 a - P_2 c$$

d'où

$$a = \frac{l}{2} - \frac{c}{2} \frac{P_2}{P_1 + P_2}; \quad b = \frac{l}{2} - \frac{c}{2} \frac{P_1}{P_1 + P_2}.$$

On remplace donc a et b par ces valeurs dans (1) et (2) et on cherche lequel est le plus grand de M_C ou M_D . Si

$$P_1 = P_2, \quad a = \frac{l}{2} - \frac{c}{4}, \quad b = \frac{l}{2} - \frac{c}{4}.$$

C. Déterminons maintenant la forme d'égale résistance de la pièce. Calculons donc chaque section de façon qu'elle puisse subir un moment maximum. Considérons

une section E. Le moment maximum se produira pour E quand C ou D sera en E. En effet, supposons C et D dans la position (fig. 137), donc à droite de E et supposons qu'ils continuent à s'éloigner vers la droite. On a :

$$M_E = Xx = \frac{P_1 x (l - a)}{l} + \frac{P_2 (l - a - c)}{l} x.$$

On voit que $\frac{dM}{da}$ est négatif ; donc M_E diminue quand a augmente. Pour faire augmenter M_E , il faut donc déplacer C et D vers E, au moins jusqu'à ce que C vienne en E. Supposons alors CD dans la position ci-dessus. On a alors

$$M_E = \frac{P_1 x (l - a)}{l} + \frac{P_2 (l - a - c)}{l} x - P_1 (x - a)$$

Il vient :

$$\frac{dM_E}{da} = -\frac{P_1 x}{l} - \frac{P_2 x}{l} + P_1 = -x \left[\frac{P_1 + P_2}{l} \right] + P_1$$

x est constant. La dérivée sera donc positive ou négative suivant que le premier terme est plus grand ou plus petit que P_1 . Si la dérivée est négative, c'est que quand C était en E on n'avait pas atteint la valeur maximum de M_E ; mais si la dérivée est positive, c'est qu'en passant de la première position à la seconde, le moment a passé par un maximum. Dans le premier cas le $M_{E_{\max}}$ se produit en D ; dans le second cas il se produit en C. Observons que si $x = \frac{P_1 l}{P_1 + P_2}$ on aura $\frac{dM_E}{da} = 0$.

Il convient maintenant de calculer en tous les points le M_C et le M_D d'après les formules (1) et (2). On obtiendra ainsi deux diagrammes dont l'ensemble (fig. 139) donnera le lieu des plus grands moments possibles ou des *moments maximum maximorum*. Ces deux diagrammes sont des paraboles à axe vertical, car l'ordonnée est du premier degré. Construisons le premier d'entre eux. Pour

$a = 0$, $M_C = 0$; pour $a = l$, $M_C = -P_2c$. Observons que le dernier point du diagramme est l'ordonnée correspondant à l'abscisse $l - c$; car si l'abscisse devient supérieure à $l - c$, P_2 passe à droite de B, car

$$M_c = \frac{P_1 x (l - a)}{l} + \frac{P_2 a (l - a - c)}{l}$$

et, pour $a > l - c$, le second terme est négatif et P_2 passe à droite de B. On obtient de même le second diagramme.

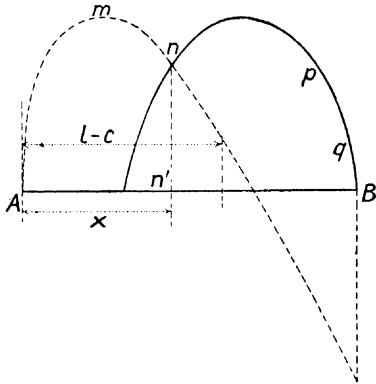


Fig. 139.

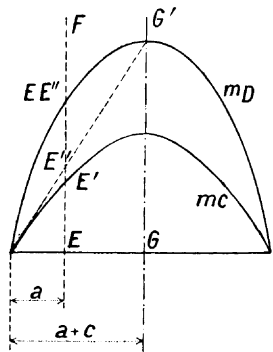


Fig. 140.

L'ensemble des deux, $AmnpqB$, constitue l'enveloppe de tous les diagrammes rectilignes représentant les moments fléchissants en tous les points, pour chaque position de CD.

On a trouvé plus haut que pour $x = \frac{P_1 l}{P_1 + P_2}$, on avait

$$\frac{dM'_E}{da} = 0$$

donc pour ce point x le moment était maximum quelle que fut la position de C et D, tant que le point était entre C et D; $x = An'$ représente ce point particulier.

Les deux paraboles peuvent encore se construire de la façon suivante (fig. 140). Supposons $P_2 = 0$, l'équation (1) devient :

$$m_c = \frac{P_1 a (l - a)}{l} \quad (3)$$

et si $P_1 = 0$, l'équation (2) devient :

$$m_D = \frac{P_2 (l - a - c) (a + c)}{l} \quad (4)$$

en observant que $b = l - a - c$. On peut tracer les diagrammes de m_c et m_D ; en comparant (3) et (4) à (1) et (2) on voit que

$$M_c = m_c + m_D \frac{a}{a + c} .$$

Pour construire le diagramme de M_c , on opérera donc comme suit. Au point quelconque E on élèvera $EE' = m_c$; on prendra la valeur correspondante de m_D , soit GG' ; on voit que $EE'' = GG'$. $\frac{a}{a + c} = m_D \frac{a}{a + c}$. Donc $M_c = EE' + EE''$.

F est le point du diagramme de M_c correspondant au point E. On procède de même pour M_D .

EXAMEN DES HYPOTHÈSES QUI ONT SERVI A L'ÉTABLISSEMENT DES FORMULES DE LA FLEXION PLANE SIMPLE

Généralités. — Nous avons établi les formules générales de la flexion en partant de certaines hypothèses dont l'exactitude, comme nous allons voir, est parfois problématique. Il serait cependant difficile de faire entrer en ligne de compte tous les éléments qui peuvent intervenir et qui cependant faussent plus ou moins l'exactitude des formules.

1. Il a été admis que les fibres n'avaient aucune action

réciproque et étaient indépendantes l'une de l'autre comme le seraient une série de fils parallèles réunis en botte. Il n'en est pas ainsi en réalité. Observons d'abord qu'à cause de leur adhérence naturelle un glissement entre les fibres éloignées et les plus internes tend à se produire.

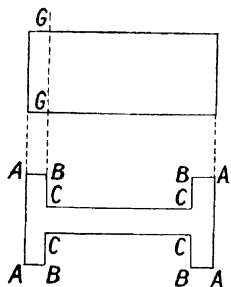


Fig. 141.

En effet, à toute dilatation longitudinale correspond une diminution de section d'une fibre étirée ; à tout raccourcissement longitudinal répond d'autre part une augmentation de section d'une fibre comprimée. Les dilatations longitudinales, positives ou négatives, croissent en valeur absolue avec la distance à l'axe neutre ; les fibres les plus éloignées éprouvent donc une contraction ou un gonflement supérieurs aux mêmes effets relatifs aux fibres internes sur lesquelles elles ont une

tendance à glisser ; de plus les fibres internes, enserrées pour ainsi dire dans les autres, augmentent la résistance de la pièce (voir Essais à la traction ; influence d'une partie tournée sur une éprouvette). La forme de la section intervient aussi sur l'action réciproque des fibres. Comparons, par exemple, une section rectangulaire à une section en double T (fig. 141).

Il est visible que les fibres situées sur la droite GG sont plus influencées par les fibres voisines que les fibres de la droite BCCB qui n'avoisinent avec presque aucune autre vers l'intérieur de la section. Les fibres présenteront donc une plus grande résistance à la flexion dans la section GG que dans la section BC. De même la matière située vers les bourrelets d'un rail offre une résistance supérieure à celle de la matière distribuée vers le patin du rail ; l'axe neutre réel doit donc se trouver au-

dessus de l'horizontale passant par le centre de gravité.

Les explications précédentes conduisent à cette conclusion que les coefficients r et r' qui interviennent dans la flexion n'ont plus le caractère d'efforts de pure traction ou de pure compression et qu'il convient d'employer pour

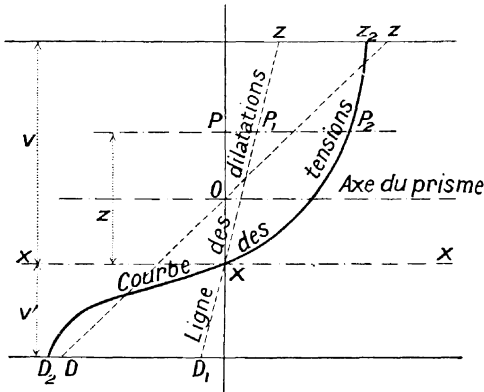


Fig. 142.

le calcul des pièces fléchies des coefficients r''' obtenus par essais directs à la flexion.

II. Il est de règle, comme il a été indiqué, de ne calculer les pièces fléchies qu'eu égard au moment fléchissant, quitte à vérifier certaines sections séparément à l'effort tranchant. En réalité chaque section est soumise à une déformation composée et il y aurait lieu d'appliquer la formule de de Saint-Venant; l'effort de cisaillement a une influence sur la résistance de la pièce.

III. Il a été admis que les sections primitivement planes restaient planes après la flexion; l'effort tranchant, qui intervient de pair avec le moment fléchissant, a certainement une tendance à courber la section, surtout pour les matières n'obéissant pas à la loi de Hooke. L'acier et le

fer, qui obéissent très sensiblement à cette loi, répondent aussi à l'hypothèse de Bernouilli. C'est ce qui résulte des expériences de Bauschinger.

IV. On a supposé que le coefficient de dilatation α était le même à la traction qu'à la compression et indépendant des tensions ou des dilatations. Cette hypothèse pourrait se réaliser pour le fer forgé et l'acier. Pour la fonte, le cuivre, le bronze, le laiton, le grès, le granit, le mortier

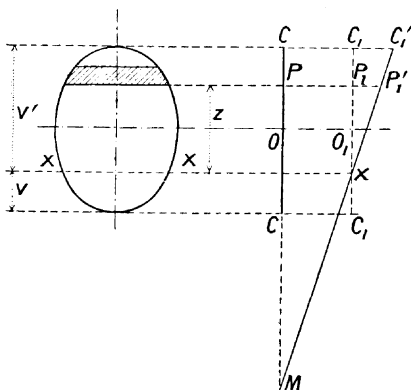


Fig. 143.

de ciment, le béton, les dilatations croissent plus vite que les tensions ; l'hypothèse de la constance de α n'est plus exacte.

Considérons, avec Bach, un prisme *de fonte* soumis à la flexion et supposons que les sections restent planes, que les dilatations croissent proportionnellement avec la distance z à l'axe neutre, mais que les tensions augmentent plus lentement, ce qui résulte de la loi $\delta = \alpha t^m$. Soit (fig. 142) une fibre projetée à la distance z de l'axe neutre ; PP_1 est sa dilatation, PP_2 sa tension. Le lieu géométrique des points P_2 est une courbe $D_2 X P_2 Z_2$ présentant sa concavité vers l'axe des Z . Si on applique la

formule $t = \frac{Mz}{I}$, déduite de la relation $\delta = \alpha t$, on obtient une droite DOZ complètement différente de la distribution réelle des tensions. Il est visible que la matière est mieux utilisée en réalité au-dessus de l'axe neutre que la théorie ne le faisait supposer et que la résistance à la flexion de la pièce est supérieure à celle qui résulterait de l'application des formules.

Une fonte doit donc donner une résistance à la flexion plus grande que sa résistance à la traction.

Il y a donc lieu, pour certaines matières, de corriger la théorie généralement admise en introduisant la loi $\delta = \alpha t^m$ en lieu et place de la loi de Hooke. Considérons, par exemple (fig. 143), un prisme encastré d'un côté et soumis à son extrémité libre à l'action d'une charge P. Nous admettons que les sections restent planes après la flexion. Les fibres situées au-dessus d'un certain axe XX sont allongées, celles qui sont en dessous sont comprimées. Soient t les tensions au-dessus de l'axe XX, t' les tensions en dessous du même axe. On a :

$$\delta = \alpha_1 t^{m_1} \quad (1)$$

$$\delta = \alpha_2 t'^{m_2}. \quad (2)$$

Appelons ρ la distance d'un point M où se projette la rencontre de deux sections voisines, à la ligne XX où les tensions sont nulles et que, pour ce motif, on appelle *axe neutre*. Pour la section COC, l'allongement, proportionnel à la distance z , sera

$$\delta = \frac{PP'_1 - PP_1}{PP_1} = \frac{PP'_1}{PP_1} - 1 = \frac{\rho + z}{\rho} - 1 = \frac{z}{\rho}$$

Il viendra, pour une fibre située à la distance z :

$$\text{Côté traction . . . } \delta = \alpha_1 t^{m_1} = \frac{z}{\rho}; \quad t = \left(\frac{z}{\alpha_1 \rho} \right)^{\frac{1}{m_1}} \quad (3)$$

Côté pression. . . $\delta = \alpha_2 t'^{m_2} = \frac{z}{\rho}$; $t' = \left(\frac{z}{\alpha_2 \rho} \right)^{\frac{1}{m_2}}$ (3)

Pour les fibres extrêmes situées aux distances v_1 et v_2 de l'axe neutre on a, si δ_1 et δ_2 , t_1 et t_2 sont leurs dilata-tions et leurs tensions :

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \left(\frac{v_1}{\alpha_1 \rho} \right)^{\frac{1}{m_1}} \\ t_2 &= \left(\frac{v_2}{\alpha_2 \rho} \right)^{\frac{1}{m_2}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

d'où :

$$\frac{t_2^{m_2}}{t_1^{m_1}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{v_2}{v_1}$$

$$t_2 = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{v_2}{v_1} \right)^{\frac{1}{m_2}} t_1^{\frac{m_1}{m_2}} \quad (5)$$

Il doit y avoir équilibre entre les forces extérieures et les tensions intérieures. On a :

$$\int_0^{v_1} t ds - \int_0^{v_2} t' ds = 0 \quad (6)$$

$$M = \int_0^{v_1} z t ds + \int_0^{v_2} z t' ds \quad (7)$$

Introduisons (3) dans (6) :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{v_1} \left(\frac{z}{\alpha_1 \rho} \right)^{\frac{1}{m_1}} ds - \int_0^{v_2} \left(\frac{z}{\alpha_2 \rho} \right)^{\frac{1}{m_2}} ds \\ &= \left(\frac{1}{\alpha_1 \rho} \right)^{\frac{1}{m_1}} \int_0^{v_1} z^{\frac{1}{m_1}} ds - \left(\frac{1}{\alpha_2 \rho} \right)^{\frac{1}{m_2}} \int_0^{v_2} z^{\frac{1}{m_2}} ds \end{aligned}$$

et, avec les équations (4) et (5) :

$$0 = \frac{t_1}{v_1^{\frac{1}{m_1}}} \int_0^{v_1} z^{\frac{1}{m_1}} ds - \frac{t_2}{v_2^{\frac{1}{m_2}}} \int_0^{v_2} z^{\frac{1}{m_2}} ds$$

$$= \frac{t_1}{v_1 \frac{1}{m_1}} \int_0^{v_1} z^{\frac{1}{m_1}} ds - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{1}{v_1} \right)^{\frac{1}{m_2}} t_1 \frac{m_1}{m_2} \int_0^{v_2} z^{\frac{1}{m_2}} ds \quad (8)$$

On voit que la position de l'axe neutre dépend de la valeur de la tension t_1 , donc de la valeur du moment fléchissant. Par suite, l'axe neutre varie de position d'une section à la suivante; dans l'hypothèse de la proportionnalité des dilatations et des tensions, l'axe neutre était indépendant de la tension.

Reprenons l'équation (7); eu égard à (3) et (4) il vient :

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{1}{\alpha_1 \rho} \right)^{\frac{1}{m_1}} \int_0^{v_1} z^{1+\frac{1}{m_1}} ds + \left(\frac{1}{\alpha_2 \rho} \right)^{\frac{1}{m_2}} \int_0^{v_2} z^{1+\frac{1}{m_2}} ds \\ M &= \frac{t_1}{v_1 \frac{1}{m_1}} \int_0^{v_1} z^{1+\frac{1}{m_1}} ds + \frac{t_2}{v_2 \frac{1}{m_2}} \int_0^{v_2} z^{1+\frac{1}{m_2}} ds \end{aligned}$$

et, après avoir tiré t_2 de (5) :

$$M = \frac{t_1}{v_1 \frac{1}{m_1}} \int_0^{v_1} z^{1+\frac{1}{m_1}} ds + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{1}{v_1} \right)^{\frac{1}{m_2}} t_1 \frac{m_1}{m_2} \int_0^{v_2} z^{1+\frac{1}{m_2}} ds \quad (9)$$

Si on admet la loi de Hooke, c'est-à-dire si

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \quad \text{et} \quad m_1 = m_2 = 1$$

l'équation (9) devient

$$M = \frac{t_1}{v_1} \left(\int_0^{v_1} z^2 ds + \int_0^{v_2} z^2 ds \right)$$

c'est-à-dire l'équation connue $M = \frac{t}{v} I$, la quantité entre parenthèses étant le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe principal OO.

Nous allons, à titre d'indication, appliquer les développements précédents à une section rectangulaire de largeur b et de hauteur $h = v_1 + v_2$. Ici $ds = b dz$. Les équations (8) deviennent :

$$0 = \frac{t_1}{v_1 \frac{1}{m_1}} \int_0^{v_1} \frac{1}{z^{m_1}} dz - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{1}{v_1} \right)^{\frac{1}{m_2}} t_1 \frac{m_1}{m_2} \int_0^{v_2} \frac{1}{z^{m_2}} dz$$

$$M = \frac{t_1}{v_1 \frac{1}{m_1}} b \int_0^{v_1} z^{\frac{m_1+1}{m_1}} dz + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{1}{v_1} \right)^{\frac{1}{m_2}} t_1 \frac{m_1}{m_2} b \int_0^{v_2} z^{\frac{m_2+1}{m_2}} dz$$

$$\int_0^{v_1} \frac{1}{z^{m_1}} dz = \frac{m_1}{m_1+1} v_1^{-\frac{m_1+1}{m_1}} ; \quad \int_0^{v_2} \frac{1}{z^{m_2}} dz = \frac{m_2}{m_2+1} v_2^{-\frac{m_2+1}{m_2}}$$

$$\int_0^{v_1} z^{\frac{m_1+1}{m_1}} dz = \frac{m_1}{2m_1+1} v_1^{\frac{2m_1+1}{m_1}} ;$$

$$\int_0^{v_2} z^{\frac{m_2+1}{m_2}} dz = \frac{m_2}{2m_2+1} v_2^{\frac{2m_2+1}{m_2}}$$

De la première des deux équations on tire :

$$t_1 = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{m_1 - m_2}} \left[\frac{m_1 (m_2 + 1)}{m_2 (m_1 + 1)} \right]^{\frac{m_2}{m_1 - m_2}} \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\frac{m_2 + 1}{m_1 - m_2}} \quad (10)$$

ou

$$\frac{v_1}{v_2} = \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left[\frac{m_2 (m_1 + 1)}{m_1 (m_2 + 1)} \right]^{m_2} t_1^{m_1 - m_2} \right\}^{\frac{1}{m_2 + 1}} \quad (11)$$

et de la seconde :

$$M = t_1 b \left\{ \frac{m_1}{2m_1 + 1} v_1^2 + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{v_2}{v_1} \right)^{\frac{1}{m_2}} \frac{m_2}{2m_2 + 1} t_1^{-\frac{m_1 - m_2}{m_2}} v_2^2 \right\}$$

et, si on tire t_1 de (10) :

$$M = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{m_1 - m_2}} m_1 \left[\frac{m_1 (m_2 + 1)}{m_2 (m_1 + 1)} \right]^{\frac{m_2}{m_1 - m_2}} \times$$

$$b \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\frac{m_2+1}{m_1-m_2}} \left\{ \frac{1}{2m_1+1} + \frac{m_2+1}{(m_1+1)(2m_2+1)} \frac{v_2}{v_1} \right\} v_1^2 \quad (12)$$

Si les coefficients α_1 , α_2 , m_1 et m_2 sont connus pour une matière déterminée, la relation (11) fournit, pour une valeur correspondante de t_1 , le rapport $\frac{v_1}{v_2} = \varphi$ qui donne la position de l'axe neutre. Il viendra :

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{v_2} + 1 &= \varphi + 1 \\ \frac{v_1 + v_2}{v_2} &= \varphi + 1 = \frac{h}{v_2} \\ v_2 &= \frac{h}{1 + \varphi}; \quad v_1 = h \frac{\varphi}{1 + \varphi} \end{aligned}$$

Introduisons les valeurs de v_1 et v_2 dans l'équation (12) ; celle-ci fournit la valeur du moment de flexion correspondant à la tension t_1 à la distance v_1 . L'équation (5) donnera ensuite la valeur de t_2 . Si on veut représenter graphiquement la loi de tension à l'intérieur de la section on utilisera les formules (3) et (4) :

$$t = t_1 \left(\frac{z}{v_1} \right)^{\frac{1}{m_1}}; \quad t' = t_2 \left(\frac{z}{v_2} \right)^{\frac{1}{m_2}}$$

La position de l'axe neutre dans chaque section varie avec le moment appliqué à la section considérée. Plus le moment relatif à la section étudiée est considérable, plus l'axe neutre s'écarte du milieu de cette section pour se rapprocher de la partie comprimée de la section ; la partie de la surface réservée aux efforts de traction croît donc avec cet écartement de l'axe neutre, ce qui est particulièrement favorable pour la fonte, le grès, le granit, etc. Suivant les valeurs que possèdent les coefficients α_1 , m_1 , α_2 et m_2 , l'axe neutre peut d'ailleurs se trouver du côté de la section soumise à traction, pour de faibles

charges et avec l'accroissement de la charge passer du côté soumis à la compression.

Il résulte de ce qui précède qu'il convient d'adopter, pour la flexion, un coefficient admissible γ''' différent des coefficients γ et γ' à la traction et à la compression. La formule générale sera donc :

$$M \equiv \gamma''' \frac{I}{v} .$$

Le coefficient γ''' dépend de la forme de la section pour les matières dont le coefficient de dilatation α est variable (fonte) ; cette conclusion n'a plus sa raison d'être pour les matières obéissant à la loi de Hooke (fer forgé, acier).

ESSAIS A LA FLEXION PLANE SIMPLE

Généralités. — Les essais à la flexion se font généralement à l'aide d'un prisme reposant sur deux appuis, la charge étant concentrée au milieu de la portée. Si on néglige le poids propre de la pièce, la flèche, au milieu, relative à l'élastique, a pour valeur :

$$f = \frac{\alpha}{48} \frac{Pl^3}{I}$$

La tension t_v de la fibre la plus étendue, située à la distance v de l'axe neutre est donnée par

$$t_v = \frac{Pl}{4I} v$$

en supposant α invariable, c'est-à-dire indépendant du signe et de la grandeur des tensions ou des dilatations ; dans la même hypothèse on a

$$\alpha = 48 \frac{I}{l^3} \frac{f}{P} .$$

Mais en utilisant cette formule on commet une erreur qui provient de ce que, pour l'établir, on a complètement négligé l'effort tranchant ; l'erreur, comme l'a démontré Bach, peut atteindre parfois plus de 30 p. 100, α , par la formule, étant toujours trop grand. Les essais directs à la flexion ont montré que α était en réalité plus petit qu'il ne résulterait des essais à la pression ou à la traction ; cela résulte d'ailleurs des considérations que nous avons émises dans le chapitre précédent.

Une autre cause peut influencer aussi le coefficient de dilatation. La flexion d'un prisme produit un glissement sur les

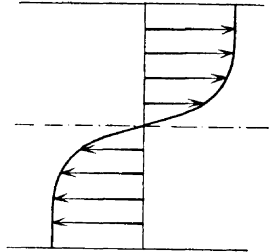


Fig. 144.

appuis qui intervient sur le moment fléchissant et par suite introduit un nouveau facteur qui réagit sur α .

Matières tenaces (Ex. : fer fondu). — Les corps essayés à la flexion sont prismatiques, à section rectangulaire ; ils sont d'abord chargés de façon que la tension dans les fibres les plus éloignées ne dépasse pas la limite de proportionnalité. La répartition des tensions se fait suivant une droite.

Augmentons la charge en dépassant la limite d'écoulement positive et négative pour les fibres externes. Celles-ci s'allongent ou se raccourcissent donc rapidement tandis que les fibres internes, enserrées dans les autres, présentent une résistance supérieure à celle qui est nécessaire. La répartition de la tension se fait comme le montre la figure 144. Elle diffère notablement de la répartition rectiligne. A mesure que les fibres s'allongent ou se raccourcissent, la diminution ou le gonflement des sections s'accroît, la base se rétrécit du côté traction, elle s'agran-

dit du côté compression et la section devient trapézoïdale. Quoi qu'il en soit, la résistance à la flexion est plus grande que la résistance à la traction.

Matières non tenaces (Ex. : fonte, granit, grès). — Ici la variation de forme que subit toute section jusqu'à la

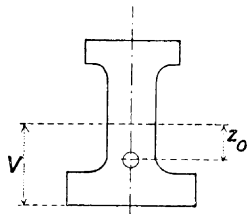


Fig. 145.

rupture est beaucoup moindre qu'avec du fer fondu. Mais la résistance à la flexion est encore supérieure à la résistance à la traction; elle dépend de la forme de la section.

Les nombreux essais de Bach ont confirmé cette déduction. La résistance R''' dépasse d'autant plus R que la matière est mieux concentrée vers l'axe neutre. L'expérience montre qu'entre la résistance à la flexion et la résistance à la traction existe la dépendance suivante :

$$R''' = \mu_0 \sqrt{\frac{v}{z_0}} R$$

qui tient compte également de l'influence de la forme de la section (fig. 145).

z_0 distance du centre de gravité de la partie de section au-dessus de l'axe passant par le centre de gravité total, à ce dernier axe;

μ_0 coefficient dont voici les valeurs :

a) pour les sections limitées au-dessus et en dessous par des droites parallèles à l'axe central

$$\mu_0 = \frac{6}{5} = 1.2$$

b) pour les sections n'ayant qu'une fibre extrême,

$$\mu_0 = \frac{4}{3} = 1.33.$$

La croûte de fonte a également une influence sur le coefficient μ_0 . L'expérience montre en effet que l'existence de la croûte a pour effet de diminuer la résistance à la flexion. Ce phénomène s'explique par les surtensions qui se produisent et par ce fait que le coefficient de dilatation α est plus petit pour la croûte que pour la matière interne; le mode de couler a d'ailleurs son influence en ce sens que la croûte se comporte différemment suivant que la coulée a lieu en sable frais ou dans des formes séchées. Quoi qu'il en soit, il y a lieu, quand faire se peut, de tourner les pièces de fonte destinées à travailler à la flexion.

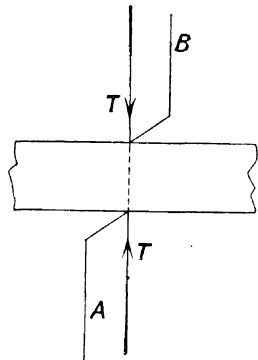


Fig. 146.

ESSAIS AU CISAILLEMENT

Les essais de cisaillement s'effectuent comme l'indique la figure 146 ou plus rationnellement en enfermant le prisme à essayer entre deux pièces soumises à traction (fig. 147). Soit T l'effort nécessaire pour cisailier un prisme de section S . On appelle résistance au cisaillement et on désigne par r'' le rapport

$$\frac{T}{S} \text{ (fig. 146)} \quad \text{ou} \quad \frac{T}{2S} \text{ (fig. 147)}.$$

D'après ce qui a été dit, il existe entre l'effort de glissement et l'effort de traction, pour une matière déterminée, la relation

$$r'' = 0,75 \text{ à } 0,8 r$$

Pour un prisme de section rectangulaire on a trouvé

$$\theta_0 = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} = \frac{3}{2} \frac{T}{S}$$

d'où

$$\theta_0 \leq r''$$

$$r'' \geq \frac{3}{2} \frac{T}{S}$$

$$\frac{3}{2} \frac{T}{S} \leq 0,75 \text{ à } 0,8 r$$

$$\frac{T}{S} \leq 0,5 \text{ à } 0,53 r$$

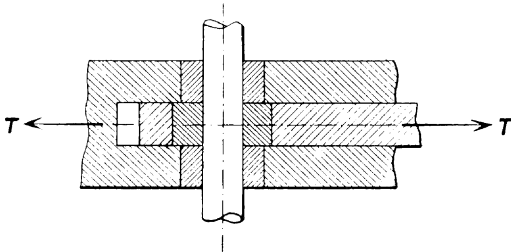


Fig. 147.

Les essais directs au cisaillement avec du fer forgé et de l'acier ont donné pour R' de 0,67 à 0,8 R; ces résultats sont donc supérieurs à ceux déduits des formules.

Pour un prisme circulaire on a

$$\theta_0 = \frac{4}{3} \frac{T}{S}$$

d'où

$$\frac{T}{S} \leq 0,56 \text{ à } 0,6 R.$$

Les essais directs avec du fer forgé et de l'acier ont encore conduit à $R' = 0,75 \text{ à } 0,8 R$; résultats supérieurs

donc à ceux déduits des formules. Pour des prismes circulaires en fonte on a trouvé

$$\frac{R''}{R} = \frac{1.02}{1} \quad \text{ou} \quad \frac{1.17}{1}$$

résultat qui s'explique par suite de la variabilité du coefficient de glissement ξ pour cette matière.

Il y a lieu d'observer qu'en même temps que se produit l'effort de cisaillement intervient toujours un moment fléchissant et qu'il y a insécurité de savoir si la rupture d'une éprouvette s'est produite par cisaillement ou par flexion.

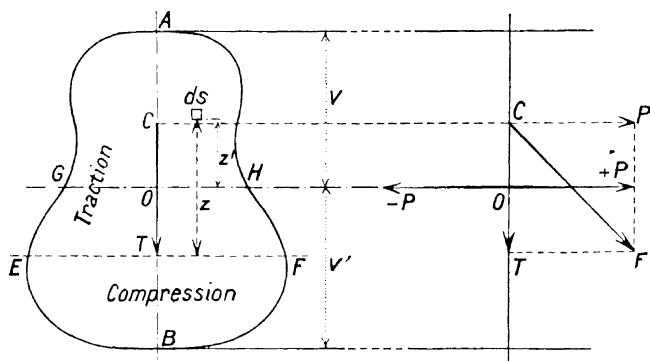


Fig. 148.

Il convient donc de n'attribuer qu'une valeur toute relative aux essais de cisaillement.

FLEXION PLANE COMPOSÉE

Généralités. — Le plan des forces extérieures passe encore par l'axe de symétrie de la section (fig. 148); il est toujours normal à la section, mais l'effort F appliqué sur la section donne lieu à une composante normale P et à un effort tangentiel T .

En O, centre de gravité, on peut appliquer deux efforts $+P$ et $-P$. Le système de forces extérieures se réduit donc à un effort normal P appliqué au centre de gravité et à un couple de flexion $+P, -P$ de moment $P \times OC$. On peut dire que les effets se superposent. En A se produit la tension maximum de traction $\frac{Mv}{I}$, due au moment fléchissant; l'élément de surface situé en A reçoit aussi une tension due à P et l'on admet

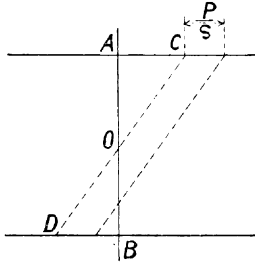


Fig. 149.

que ce dernier effort est uniformément réparti sur la section totale S . On a donc, en A :

$$t_v = \frac{P}{S} + \frac{Mv}{I} \quad (1)$$

En B l'effort de compression dû au moment fléchissant est $\frac{Mv'}{I}$; P étant un effort de traction, la tension $\frac{P}{S}$ vient en déduction de la précédente et on a

$$t_{v'} = \frac{Mv'}{I} - \frac{P}{S} \quad (2)$$

Il y a donc lieu de vérifier à la fois les équations (1) et (2) et de voir si les tensions ne dépassent pas l'effort admissible r ou r' . Si P est un effort de compression, on changera P en $-P$ dans les formules et on aura :

$$t_v = \frac{Mv}{I} - \frac{P}{S}; \quad t_{v'} = \frac{Mv'}{I} + \frac{P}{S}$$

Si P est un effort de tension et s'il acquiert une certaine valeur, $t_{v'}$ peut devenir négatif; dans ce cas l'axe neutre passe en dehors de la section.

Pour une section AB (fig. 149) le diagramme des ten-

sions normales s'obtient en traçant d'abord la droite CD correspondant aux tensions $\frac{Mz'}{I}$ et en ajoutant ensuite pour tous les points une longueur $\frac{P}{S}$ à l'ordonnée horizontale.

Si $P = \frac{Mv'S}{I}$ on a $z_1 = v'$, l'axe neutre passe en B.

En effet, $z_1 = \frac{P\rho\alpha}{S}$; $\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha M}{I}$; donc $z_1 = \frac{PI}{MS}$; or quand $P = \frac{Mv'S}{I}$, $v' = \frac{PI}{MS}$ et $z_1 = v'$.

On peut chercher la formule d'égalité de résistance d'une section. Il faut que l'on aie

$$\frac{t_v}{t_{v'}} = \frac{r}{r'}$$

ou

$$\frac{r}{r'} = \frac{\frac{Mv}{I} + \frac{P}{S}}{\frac{Mv'}{I} - \frac{P}{S}} = \frac{v + \frac{PI}{MS}}{v' - \frac{PI}{MS}}$$

Si $r = r'$ la section ne peut affecter la forme doublement symétrique, car dans ce cas $v = v' - \frac{2PI}{MS}$ et si P est positif $v' > v$.

La formule de la courbure est $\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha M}{I}$, ρ étant le rayon de courbure relatif aux fibres neutres. Le rayon de courbure relatif à l'axe de la pièce a pour expression (fig. 150) :

$$\rho' = \rho + z_1$$

mais

$$z_1 = \frac{\alpha P \rho}{S} ;$$

donc :

$$\rho' = \rho \left(1 + \frac{zP}{S} \right)$$

$\frac{P}{S}$ est la tension moyenne ; $\frac{zP}{S}$ est donc la dilatation moyenne qui est, en général, plus faible que les dilatations extrêmes. Souvent $\frac{zP}{S}$ est négligeable vis-à-vis de l'unité et pratiquement on peut admettre $\rho' = \rho$; donc $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho'}$.

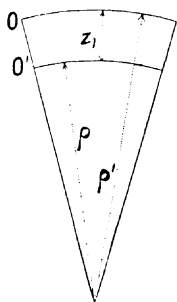


Fig. 150.

La formule des efforts tangentiels est $T = \int \theta ds$; le calcul devient ici très compliqué, car les diagrammes des tensions tangentielle ne passent plus par les centres de gravité des sections. On admet la formule empirique

$\theta = \frac{T}{S} k$, k étant un coefficient convenable.

APPLICATIONS

Nous considérons d'abord le cas où la déformation des pièces est sans influence sur le moment de flexion.

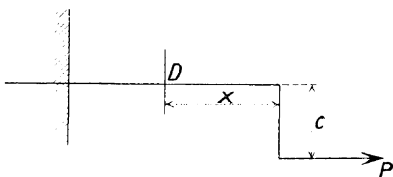


Fig. 151.

I. **Prisme encastré d'un côté, chargé excentriquement et parallèlement à l'axe, à la traction.** — Pour un point quelconque D (fig. 151) le moment fléchissant a pour

expression $M = P \cdot c$; le moment est donc indépendant de x et on a :

$$t_v = P \left(\frac{ec}{I} + \frac{1}{S} \right)$$

Si le prisme a une section circulaire de diamètre d , le point d'application de l'effort coïncidant avec le pourtour de la section ou $c = \frac{d}{2}$, il viendra :

$$S = \frac{\pi d^2}{4} ; \quad I = \frac{\pi}{64} d^4 ; \quad c = \frac{d}{2}$$

$$t_v = \frac{P}{S} \left(1 + \frac{\frac{d^2}{4} \frac{\pi}{4} d^2}{\frac{\pi}{64} d^4} \right) = \frac{P}{S} (1 + 4) = 5 \frac{P}{S} .$$

L'effort maximum est donc cinq fois plus grand que si la force extérieure était appliquée dans l'axe de la pièce. L'influence de l'excentricité est donc considérable. Si la matière est telle que l'effort admissible à la flexion ou r''' diffère notablement de l'effort admissible à la traction ou r , comme la fonte, par exemple, on se donnera

$$r''' = \beta_o r$$

$$\beta_o \frac{P}{S} + \frac{Pc}{I} v \leq r''' ;$$

ou

$$\frac{P}{S} + \frac{1}{\beta_o} \frac{Pc}{I} v \leq r$$

$$\beta_o = \frac{r'''}{r}$$

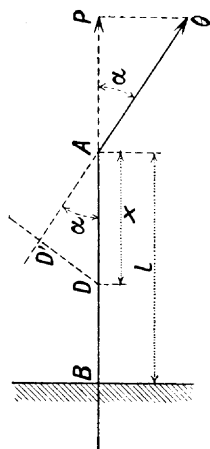


Fig. 152.

II. L'effort appliqué à l'extrémité est incliné.

Pour un point D (fig. 152) on a :

$$M = Qx \sin \alpha$$

Le moment maximum se produit donc en B et

$$M_{\max} = Ql \sin \alpha$$

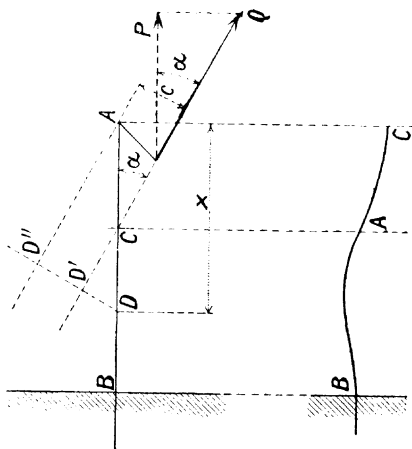


Fig. 153.

L'effort longitudinal $P = Q \cos \alpha$; d'où

$$t_c = Q \left[\frac{cx \sin \alpha}{I} + \frac{\cos \alpha}{S} \right]$$

III. La force est oblique et excentrique. — On a $P = Q \cos \alpha$; pour un point D il vient (fig. 153) :

$M = Q(DD'' - DD') = Q(x \sin \alpha - c)$. Si $x \sin \alpha > c$ le moment est positif ; si $x \sin \alpha = c$ le moment est nul, c'est ce qui a lieu pour le point C. Si $x \sin \alpha < c$, la flexion change de sens ; c'est ce qui se produit pour les points à droite de C. La pièce présente donc un point d'inflexion.

On a :

$$t_c = Q \left(\frac{x \sin \alpha - c}{I} v + \frac{\cos \alpha}{S} \right).$$

Observation. — Les trois exemples précédents sont relatifs à des pièces n'éprouvant que de faibles déformations, des maçonneries, par exemple. Pour les autres pièces il y a lieu de déterminer la valeur des moments en tenant compte des déformations. Reprenons les cas précédents; la position primitive de la pièce est représentée en pointillé. Dans ce qui suit nous supposons I et α constants.

IV. Pièce soumise à un effort vertical excentrique de traction. — Choisissons l'origine en A (fig. 154); pour un point $D(x, y)$ il viendra :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d^2y}{dx^2} = M = -P(c \cos \alpha - y)$$

Le moment est négatif, car la pièce est convexe vers l'axe des Y positifs. On peut écrire :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d^2y}{dx^2} = Py - Pc \cos \alpha$$

Différentions pour nous débarrasser de la constante

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d^3y}{dx^3} = P \frac{dy}{dx}$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

équation permettant de résoudre le problème.

$$\text{On a : } k = \sqrt{\frac{\alpha P}{I}}.$$

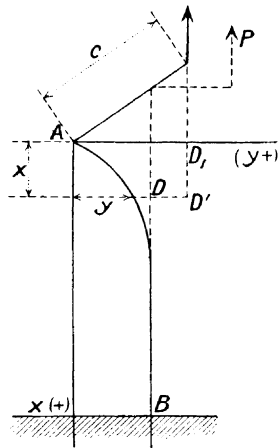


Fig. 154.

V. Effort vertical excentrique de pression.

Il vient (fig. 155)

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d^2 y}{dx^2} = M = P (c \cos \alpha - y)$$

Ici M est positif :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py + Pc \cos \alpha.$$

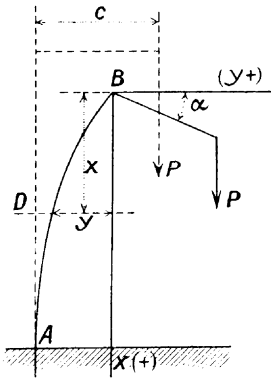


Fig. 155.

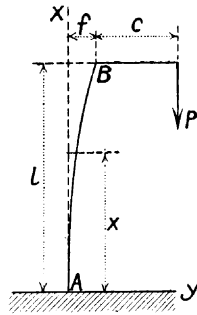


Fig. 156.

Différentions :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d^3 y}{dx^3} = -P \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = A \cos kx + B \sin kx.$$

Le moment M, comme on voit, croit donc, par suite de la flexion, de B vers A. Au lieu d'introduire l'angle α on peut considérer la flèche f à l'extrémité libre et on a (fig. 156) :

$$M = P (c + f - y)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\alpha P}{I} (c + f - y)$$

À l'origine,

$$\frac{f}{c+f} = 1 - \cos \left(l \sqrt{\frac{\alpha P}{I}} \right)$$

d'où

$$c + f = \frac{c}{\cos \left(l \sqrt{\frac{\alpha P}{I}} \right)}$$

$$f = c \left[\frac{1}{\cos \left(l \sqrt{\frac{\alpha P}{I}} \right)} - 1 \right]$$

Le moment fléchissant M atteint sa plus grande valeur pour la section A et on a :

$$M_{\max} = P (c + f) = \frac{Pc}{\cos \left(l \sqrt{\frac{P\alpha}{I}} \right)}$$

La tension totale de la fibre située à la distance v' sera

$$t_{c \max} = \frac{Pc}{\cos \left(l \sqrt{\frac{P\alpha}{I}} \right)} \frac{v}{l} - \frac{P}{S} \leq r'''.$$

La pression totale de la fibre située à la distance v' sera

$$t_{v' \max} = \frac{Pc}{\cos \left(l \sqrt{\frac{P\alpha}{I}} \right)} \frac{v'}{l} + \frac{P}{S} \leq r'$$

VI. Effort oblique à l'extrémité. — Décomposons Q (157) en ses deux composantes X et Y . On a :

$$M = \frac{I}{\alpha} \frac{d^2 y}{dx^2} = Yx + Xy$$

X est positif, Y est négatif. Différentions deux fois pour

nous débarrasser du terme Yx . Il vient :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d^4 y}{dx^4} = X \frac{d^2 y}{dx^2}$$

d'où

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

Si l'effort oblique est dirigé vers le bas on a :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = A \cos kx + B \sin kx.$$

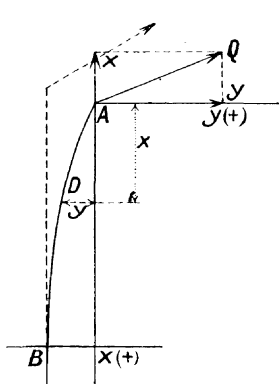


Fig. 157.

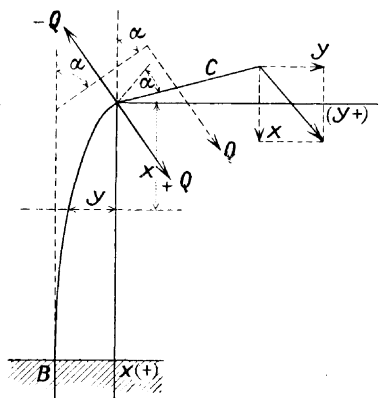


Fig. 158.

VII. Effort oblique et excentrique. — En A (fig. 158) appliquons deux forces $+Q$ et $-Q$. On a :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d^2 y}{dx^2} = M = Qe \cos \alpha + Yx - Xy$$

d'où :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d^4 y}{dx^4} = -X \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A \cos kx - B \sin kx.$$

VII. Pièce tirée à ses extrémités, chargée d'un poids uniformément réparti $Q = p \cdot l$.

Considérons (fig. 159) la pièce coupée en son milieu; pour un point quelconque P, à la distance x de la section on a

$$M = \frac{pl}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right) - p \frac{\left(\frac{l}{2} - x \right)^2}{2} - P (y_0 - y)$$

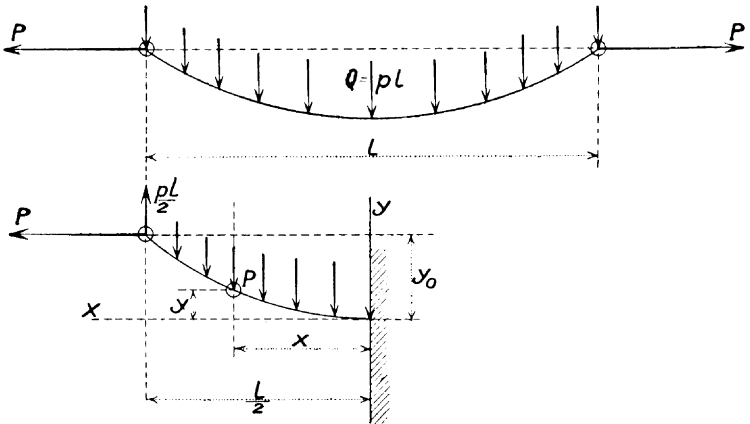


Fig. 159.

ou :

$$M = \frac{pl^2}{8} - \frac{px^2}{2} - P (y_0 - y)$$

et :

$$\frac{1}{x} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{pl^2}{8} - \frac{px^2}{2} - P (y_0 - y)$$

$$\frac{1}{x} \frac{d^2y}{dx^2} - Py + \frac{px^2}{2} - \frac{pl^2}{8} + Py_0 = 0.$$

Admettons que I et α sont constants. Il vient :

$$y = A e^{x\sqrt{\frac{\alpha P}{I}}} + B e^{-x\sqrt{\frac{\alpha P}{I}}} + \frac{p}{2P} x^2 + \frac{lp}{\alpha P^2} - \frac{1}{P} \left(\frac{pl^2}{8} - P y_0 \right) \quad (1)$$

Pour $x = 0$ on a $\frac{dy}{dx} = 0$ et

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \left\{ A \sqrt{\frac{\alpha P}{I}} e^{x\sqrt{\frac{\alpha P}{I}}} - B \sqrt{\frac{\alpha P}{I}} e^{-x\sqrt{\frac{\alpha P}{I}}} + \frac{p}{P} x \right\}_{x=0} = 0$$

C'est-à-dire

$$A = B = C$$

Pour $x = \frac{l}{2}$, $M = 0$, $\rho = \infty$, donc

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=\frac{l}{2}} = \left\{ C \left[\frac{\alpha P}{I} e^{x\sqrt{\frac{\alpha P}{I}}} + \frac{\alpha P}{I} e^{-x\sqrt{\frac{\alpha P}{I}}} \right] + \frac{p}{P} \right\}_{x=\frac{l}{2}} = 0$$

d'où

$$C = - \frac{p \cdot l}{\alpha P^2 \left[e^{\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\alpha P}{I}}} + e^{-\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\alpha P}{I}}} \right]}$$

De plus, pour $x = 0$, $y = 0$, d'où l'on tire, de (1) :

$$y_0 = \frac{1}{P} \left[\frac{pl^2}{8} - \frac{pl}{\alpha P} + \frac{2pl}{\alpha P \left(e^{\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\alpha P}{I}}} + e^{-\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\alpha P}{I}}} \right)} \right]$$

Le moment fléchissant au milieu de la pièce, c'est-à-dire pour $x = \frac{l}{2}$ a pour valeur

$$M_{\max} = \frac{pl^2}{8} - P y_0 = \frac{pl}{\alpha P} \left[1 - \frac{2}{e^{\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\alpha P}{I}}} + e^{-\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\alpha P}{I}}} \right] \quad (2)$$

$$t_v = \frac{M_{\max}}{\frac{1}{e}} = v \frac{p}{\alpha P} \left[1 - \frac{2}{e^{\frac{l}{2} \sqrt{\frac{\alpha P}{I}} + e^{-\frac{l}{2} \sqrt{\frac{\alpha P}{I}}}} \right] \quad (3)$$

Soit une poutre en fer de 6 mètres de long, 25 millimètres de diamètre, $P = 3.000$ kg.

$$v = \frac{2,5}{2}, \quad p = \frac{\pi}{4} \times 2,5^2 \times 0,0078 = 0,04 \text{ kg.}, \quad \alpha = \frac{1}{2\,000\,000}$$

$$I = \frac{\pi}{64} \cdot 2,5^4 = 1,914$$

$$t_v = \frac{2,5}{2} \frac{0,04}{\frac{1}{2\,000\,000} 3\,000} \times$$

$$\left[1 - \frac{2}{e^{300 \sqrt{\frac{3\,000}{2\,000\,000 \cdot 1,914}} + e^{-300 \sqrt{\frac{3\,000}{2\,000\,000 \cdot 1,914}}}} \right]$$

$$t_v = \frac{100}{3} \left(1 - \frac{1}{2220,5} \right) = 33,3 \text{ kg cm}^2.$$

On voit que l'influence du second membre de la parenthèse est extrêmement faible. On pourra donc, dans le cas de longues poutres et de fortes tractions P , utiliser la formule

$$t_v = v \frac{p}{\alpha P} \quad (4)$$

relation déjà trouvée dans la théorie de la traction pour un fil suspendu à ses deux extrémités de niveau.

VIII. Pièce mince enroulée sur un tambour et soumise à deux tractions. — La pièce est supposée rectangulaire, d'épaisseur e (fig. 160) et de longueur b ; elle a donc une section $S = be$. Elle est soumise à la flexion, puisqu'elle est enroulée sur le tambour, et à une traction P . Ce dernier effort donne naissance, en supposant qu'il y ait répartition uniforme, à une tension de traction $t = \frac{P}{be}$.

Admettons que toute section reste normale à l'axe longitudinal; les fibres les plus éloignées avant la flexion

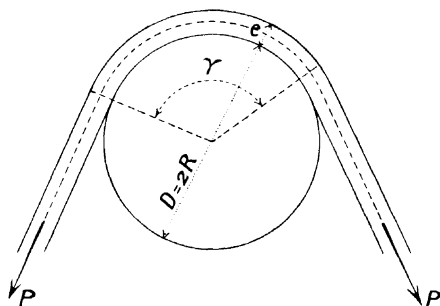


Fig. 160.

avaient une longueur $\gamma \left(R + \frac{e}{2} \right)$; après la flexion elles acquièrent la longueur $\gamma (R + e)$. Leur allongement est donc de

$$\gamma(R+e) - \gamma \left(R + \frac{e}{2} \right) = \gamma \cdot \frac{e}{2}$$

La dilatation a pour expression :

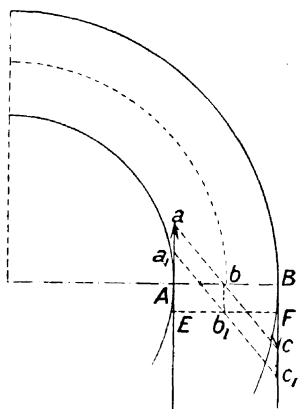
$$\frac{\frac{1}{2} \gamma e}{\left(R + \frac{e}{2} \right) \gamma} = \frac{e}{2R} \text{ environ,}$$

et la tension :

$$t' = \frac{1}{\alpha} \frac{e}{2R} = \frac{1}{\alpha} \frac{e}{D} \quad (1)$$

Fig. 161.

On pourra représenter la loi des tensions totales (fig. 161). La droite abc est relative aux tensions t' dues



à la flexion sur une section AB. La droite EF représente les tensions t dues à la traction P. En combinant les ordonnées de ces deux droites on obtient la droite $a_1b_1c_1$ qui représente depuis l'horizontale AB la loi de répartition des tensions totales.

IX Moment soustractif dans les pièces soumises à la flexion plane simple. Effet du frottement sur les appuis. —

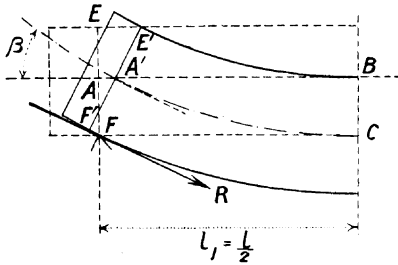


Fig. 162.

Considérons (fig. 162) une pièce posée sur deux appuis et soumise en son milieu à l'action d'une force P. Par suite de la flexion, le point A qui se trouve au droit de l'appui de gauche recule vers la droite, puisque l'élastique conserve sa longueur primitive, et vient se placer en A'. Le déplacement $\Delta = AA'$ peut être mesuré par la différence entre la longueur $l_1 = \frac{l}{2}$ et la corde A'B de l'élastique dont la flèche f est au milieu. Admettons que l'élastique soit une parabole et désignons par a sa demi-corde A'B, par s sa demi-longueur A'C et par δ sa flèche BC. On sait qu'on peut écrire

$$s = a \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\delta^2}{a^2} \right)$$

et on a, pour la différence entre s et a ,

$$\frac{2}{3} \left(\frac{\delta}{a} \right)^2 a = \frac{2}{3} \left(\frac{\delta}{s} \right)^2 s \text{ environ.}$$

Donc

$$\Delta = \frac{2}{3} \left(\frac{f}{l_1} \right)^2 l_1 = \frac{4}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 l$$

En même temps que ce déplacement du point A en A', il se produit une inclinaison de la section qui vient en E'F' en faisant l'angle β avec l'axe primitif. On sait que cet angle est donné par la formule

$$\beta = \frac{\alpha}{16} \frac{Pl^2}{I}$$

Le point F' a donc décrit vers la gauche un petit arc de cercle βv ou

$$\frac{\alpha}{16} \frac{Pl^2}{I} v$$

Le point F a donc d'une part avancé vers la droite et d'autre part reculé vers la gauche. La différence de ces deux déplacements a pour expression

$$x = v\beta - \Delta = \frac{\alpha}{16} \frac{Pl^2}{I} v - \frac{4}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 l$$

D'autre part

$$f = \frac{\alpha}{48} \frac{Pl^3}{I}$$

Donc

$$x = \frac{\alpha}{16} \frac{Pl^2}{I} \left(v - \frac{\alpha Pl^3}{408 I} \right)$$

Si x est positif, c'est-à-dire

$$v \geq \frac{\alpha Pl^3}{408 I} \quad \text{ou} \quad P \leq 408 \frac{Ie}{\alpha l^3}$$

il y aura une force R dirigée vers l'intérieur et qui agira sur la pièce. Les dernières conditions peuvent se mettre

sous une autre forme. On a, en effet, pour le cas considéré

$$\frac{Pl}{4} = t \frac{l}{r}$$

t représentant la tension maximum au milieu de la poutre. La condition devient donc :

$$\frac{v}{l} > \sqrt{\frac{4}{27} \alpha t} \quad (1)$$

Soient, par exemple

$$\alpha = \frac{1}{2\,450\,000} \quad t = 1\,600$$

chiffres correspondant à de l'acier. Il vient :

$$\frac{v}{l} > \sqrt{\frac{1\,600}{27 \cdot 2\,450\,000}} \quad \text{ou} \quad v > \frac{1}{190} l$$

L'effort R , si on suppose les appuis immobiles, est un effort de frottement et on a

$$R = \frac{P}{2} \mu$$

μ étant le coefficient de frottement entre la pièce et ses appuis fixes. Si les appuis pénètrent dans la poutre, l'effort R n'agit plus comme frottement, mais comme effort appliqué à la pièce. Son moment fléchissant sur celle-ci aura pour expression

$$Rv = 0,5 P \mu v \quad (2)$$

Le milieu de la poutre ne sera donc pas soumis seulement au moment $\frac{Pl}{4}$, mais aussi au moment Rv , seulement ce dernier agit en sens inverse. Il vient, pour le moment résultant :

$$\frac{Pl}{4} - Rv = \frac{Pl}{4} - \frac{P\mu v}{2} = \frac{Pl}{4} \left(1 - 2\mu \frac{v}{l} \right)$$

Soient, par exemple, $v = 50$ mm., $l = 1000$ mm. Le moment $\frac{Pl}{4}$ sera diminué pour $\mu = 0,1$ de 1 p. 100 et pour $\mu = 0,5$ de 5 p. 100.

X. **Le noyau central.** — Étudions la flexion plane composée en transportant l'effort extérieur F (fig. 163) dans

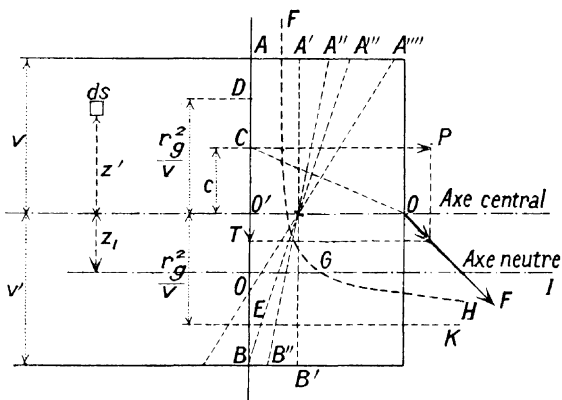


Fig. 163.

la section considérée AB (¹). En C , où F rencontre la section AB , F peut se décomposer en deux composantes : 1° P perpendiculaire à la section et appliquée à la distance c de l'axe central ; 2° T dans la section.

Au centre de gravité O' de AB on peut appliquer deux efforts égaux et de sens contraires $+P$ et $-P$; en sorte que les forces agissant sur la section AB sont : P , normale sur la section et appliquée au centre de gravité O' de cette section ; T dans la section et passant par son centre de gravité ; le moment fléchissant $P \cdot c$ qui tend à faire incliner la section. L'étude de la flexion composée revient donc à celle d'une tension ou d'une compression excen-

¹ Dans la figure, COF doit être une droite.

trique. Reprenons la formule

$$t = \frac{P}{S} + \frac{Mz'}{I}$$

Dans cette formule $M = P \cdot c$. D'autre part on sait que $I = \int z^2 ds$, fonction du quatrième degré, car c'est le produit d'un carré par une surface. On peut donc poser

$$I = S \cdot r_g^2$$

S étant la surface, r_g^2 carré d'une longueur; r_g s'appelle *le rayon de giration* de la surface. Ce rayon s'obtient en observant que si $I = S r_g^2$ on a $r_g^2 = \frac{I}{S}$, formule nécessitant donc la connaissance de I ; r_g est la distance de l'axe central à laquelle la surface, concentrée par moitié sur deux parallèles à cet axe, donnerait pour I la même valeur; t peut donc se mettre sous la forme :

$$t = \frac{P}{S} + \frac{P \cdot c \cdot z'}{S r_g^2}$$

ou

$$t = \frac{P}{S} \left(1 + \frac{c z'}{r_g^2} \right)$$

c prend avec z' le signe $+$ ou le signe $-$ suivant qu'il est au-dessus ou au-dessous de l'axe central. Les tensions maxima se produisent en A et B et ont pour expression :

$$t_v = \frac{P}{S} \left(1 + \frac{c v'}{r_g^2} \right); \quad t_v' = \frac{P}{S} \left(1 - \frac{c v'}{r_g^2} \right)$$

Si le point d'application C tombe au-dessus de l'axe central, c est positif, t_v est plus grand que $\frac{P}{S}$ et t_v' est aussi plus grand que $\frac{P}{S}$ si $1 - \frac{c v'}{r_g^2} > 1$. La section AB vient en A'B''. Si $c = 0$, $t_v = \frac{P}{S}$, $t_v' = \frac{P}{S}$, il y a simple traction,

la section AB arrive en A'B'. Pour $1 - \frac{cv'}{r^2g} = 0$, AB vient en A''B; la matière travaille jusqu'à présent uniquement à la traction; mais si $1 - \frac{cv'}{r^2g} < 0$, AB arrive en A'''B''', la matière travaille à la traction et à la compression. Marquons les points D et E aux distances $\frac{r^2g}{v}$ et $\frac{r^2g}{v'}$ de l'axe central. Si nous faisons tourner le plan des forces extérieures autour du centre de gravité de la section, nous pourrions marquer, pour chacune des positions, des points analogues à D et E; joignons-les, dans la section, par un trait continu, nous obtenons ce qu'on appelle le *noyau central*. Chaque fois que le point d'application C tombera à l'intérieur du noyau, la matière travaillera à la traction uniquement; si C tombe exactement sur le pourtour du noyau, la matière travaillera encore uniquement à la traction, mais c'est le cas limite; enfin, si C tombe en dehors du noyau, la matière travaille partie à la traction, partie à la compression. Si P est une compression au lieu d'être une traction, la matière travaille uniquement à la compression quand le point C tombe dans le noyau, et ainsi de suite. Or il convient que certaines constructions ne travaillent qu'à la compression; c'est notamment le cas des maçonneries en général. Il faut donc, pour que cette condition soit réalisée, que tout point d'application C d'une pression tombe à l'intérieur du noyau. Nous aurons l'occasion de revenir sur la question du noyau central dans l'étude de la flexion gauche. Observons en passant que si P et c varient, la formule de résistance

$$\frac{P}{S} \left(1 + \frac{cv}{rg^2} \right) = r$$

représente l'équation d'une hyperbole équilatère FGH rapportée aux axes OD, OI et dont les asymptotes sont les droites ED et EK.

FLAMBEMENT. RÉSISTANCE DES PIÈCES CHARGÉES DEBOUT

Généralités. — Les pièces chargées debout sont soumises à des efforts extérieurs purement longitudinaux suivant leur axe. Soit (fig. 164) un prisme de grande longueur et de faible section transversale soumis à une charge P dans les conditions suivantes : 1° la charge P tombe exactement dans l'axe du prisme ; 2° l'axe du prisme est exactement droit ; la matière est isotrope ; 3° aucun effort latéral n'intervient. Il paraîtrait *a priori* que ces conditions étant remplies, le prisme est purement et simplement soumis à compression, aucune cause de flexion de l'extrémité libre n'existant. Il suffit cependant de la plus petite cause pour qu'il n'en soit plus ainsi. Si le vent ou toute autre action latérale intervient ; si la matière n'est pas exactement la même partout, si elle est plus tendre d'un côté que de l'autre ; si l'effort P n'est pas mathématiquement appliqué dans l'axe ; enfin si cet axe n'est lui-même pas rigoureusement droit, il y aura immédiatement une tendance à la flexion. Pratiquement il n'est pas possible de réaliser toutes ces conditions et les pièces présentant une certaine longueur par rapport à leur section transversale doivent être calculées au *flambement*. En somme on a constaté que lorsque l'effort dépasse une certaine limite, la pièce commence à fléchir. Cependant la forme droite n'est pas la seule forme d'équilibre ; nous verrons que, aussi longtemps que la charge ne dépasse pas une certaine valeur, la forme droite est la seule forme d'équilibre possible ; mais si la charge augmente au delà de cette limite, la pièce, tout en fléchissant, rencontre d'autres formes d'équilibre.

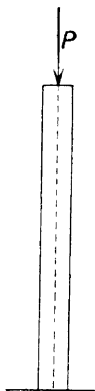


Fig. 164.

Equations d'Euler. — Soient :

P la charge variable agissant dans la direction de l'axe primitivement droit;

I le moment d'inertie de la section (en général le plus petit des deux moments principaux);

L la longueur primitive de la pièce ;

l sa longueur verticale variable ;

α le coefficient de dilatation ;

P_0 la charge au flambement, c'est-à-dire la valeur de P qui est en état d'amener le flambement.

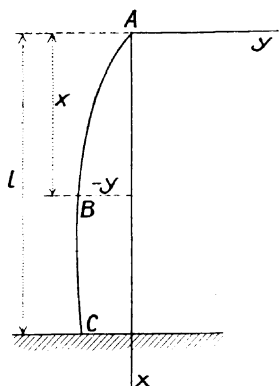


Fig. 165.

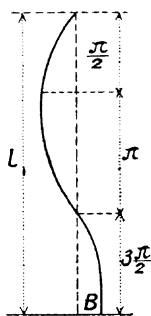


Fig. 166.

Pièce appuyée en C, libre en A. — Soit A l'origine (fig. 165). On a, pour un prisme quelconque :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py \quad (1)$$

d'où

$$y = A \cos kx + B \sin kx. \quad (2)$$

Or pour $x = 0$, $y = 0$ et $A = 0$. L'équation (2) devient donc :

$$y = B \sin kx \quad (2)$$

équation d'une sinusoïde. Dérivons-la ; il vient :

$$\frac{dy}{dx} = Bk \cos kx \quad (3)$$

Pour $x = l$, $\frac{dy}{dx} = 0$, donc $0 = Bk \cos kl$ ou
 $\cos kl = 0$

ce qui montre que

$$kl = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ ou} \\ \frac{3\pi}{2} \text{ ou} \\ (2n + 1) \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

a. Soit $kl = \frac{\pi}{2}$; comme $x < l$, kx varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; donc $\sin kx$ varie entre 0 et 1 ; y varie entre 0 et B. La flèche est donc égale à B et la forme de la pièce est celle de la figure 166.

b). Soit $kl = \frac{3\pi}{2}$; kx passe donc successivement par les valeurs 0, $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$; donc $y = B \sin kx$ passe successivement par les valeurs 0, B, 0, — B. La forme affectée présente une double courbure comme le montre la figure. Si on fait $kl = \frac{5\pi}{2}$ on arrive à un résultat analogue.

Dérivons (3) ; il vient :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - Bk^2 \sin kx \quad (4)$$

De (2) et (4) on tire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - k^2 y \quad (5)$$

et de (5) et (1) :

$$\frac{\alpha P}{l} = k^2 \quad \text{ou} \quad k = \sqrt{\frac{\alpha P}{l}}$$

Les valeurs de kl deviennent :

$$l \sqrt{\frac{\alpha P}{I}} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \\ (2n + 1) \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Pour que la première forme soit possible il faut donc :

$$l \sqrt{\frac{\alpha P_o}{I}} = \frac{\pi}{2}$$

d'où

$$P_o = \frac{\pi^2}{4} \frac{I}{\alpha l} \quad (6)$$

Pour que la seconde forme soit possible, il faut :

$$P = \frac{9}{4} \pi^2 \frac{I}{\alpha l^2}$$

et ainsi de suite.

Dans ces équations, l est la variable indépendante, P est la fonction. De (6) on tire :

$$l \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{I}{\alpha P}} \quad (7)$$

Soit L longueur primitive de la pièce. On aura :

$$l \leq L \quad (8)$$

La condition pour que la première forme courbe soit possible est donc :

$$P \geq \frac{\pi^2}{4} \frac{I}{\alpha L^2}$$

A partir de cette valeur de P , la première forme courbe devient possible, la forme rectiligne étant cependant possible indéfiniment. La seconde forme courbe devient pos-

sible à partir de la valeur

$$P \cong \frac{9}{4} \pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{1}{L^2} .$$

La forme rectiligne qui est d'abord seule possible est la forme stable tant que P n'a pas atteint la limite $\frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{L^2}$; une fois cette limite atteinte, la première forme courbe est la seule d'équilibre stable.

En effet, considérons (fig. 167) les deux formes d'équi-

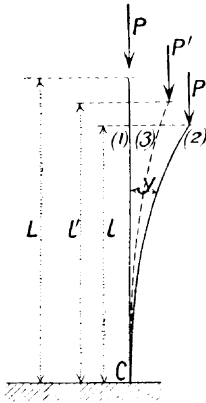


Fig. 167.

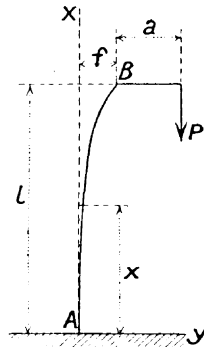


Fig. 168.

libre (1) et (2) pour la charge $P = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{L^2}$ et examinons une forme intermédiaire d'équilibre (3), impossible pour la force P mais possible avec une force $P' < P$. On aura :

$$P' = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{l'^2} ; \quad P = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{l^2} ;$$

$l' > l$ ou $P' < P$. Si P' est augmenté brusquement jusque P , la pièce prend la position (2) ; on augmente brusquement P' afin que les bras de levier n'aient pas le

temps de varier. La force augmentant, le bras de levier restant constant, le moment augmente ; il en est de même de la courbure, ce qu'indique la formule :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha M}{I}$$

Les formules précédentes ne sont vraies que pour autant que la flexion ne soit pas trop considérable ; car, si elle devient trop grande, la formule $\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha M}{I}$ doit être remplacée par l'équation exacte :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

le calcul devient très compliqué.

Les formes telles que la seconde forme courbe et les suivantes ne se produisent pas d'elles-mêmes. Il faut, pour qu'elles aient lieu, que la pièce soit soumise à des efforts latéraux quand la limite de P est atteinte. La détermination de B ne présente aucun intérêt.

En pratique, le résultat à atteindre est d'empêcher la flexion et il faudra que l'on ait :

$$P < \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\alpha} \frac{I}{L^2}$$

On pourrait, pour établir les formules d'une façon plus générale, admettre que l'effort P soit excentré de a (fig. 168) ; on a alors :

$$\begin{aligned} M &= P (a + y' - y) \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\alpha P}{I} (a + y' - y) \\ y' &= a \left[\frac{1}{\cos \left(l \sqrt{\frac{\alpha P}{I}} \right)} - 1 \right] \end{aligned}$$

$$y = a \frac{1 - \cos \left(x \sqrt{\frac{\alpha P}{I}} \right)}{\cos l \sqrt{\frac{\alpha P}{I}}}$$

Ainsi, pour un prisme de fer forgé de longueur = 100 cm., de diamètre = 1 cm, avec :

$$\alpha = \frac{1}{2\,000\,000}; \quad I = \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{1}{24} d^4; \quad l = 100$$

$$y' = a \left[\frac{1}{\cos 100 \sqrt{\frac{20 P}{2\,000\,000}}} - 1 \right] = a \left[\frac{1}{\cos \sqrt{\frac{P}{40}}} - 1 \right]$$

il viendra :

Pour P = 5 kg.	$y' = a \left(\frac{1}{\cos 0,707} - 1 \right) = 0,32 a$
P = 10 kg.	$y' = 0,85 a$
P = 15 kg.	$y' = 1,95 a$
P = 20 kg.	$y' = 5,54 a$
P = 22,5 kg.	$y' = 13,16 a$
P = 24,674 kg.	$y' = a \cdot \infty = \infty$

On reconnaît que y' croît lentement au début, puis très rapidement. Le résultat $y' = \infty$ s'interprète en disant que si P atteint 24,674 kg, l'équilibre entre l'effort P et les tensions intérieures cesse d'exister; le moindre effort latéral fait flamber la pièce. Dès lors, l'effort de flambement P_0 correspond à $y' = \infty$ c'est-à-dire à

$$\begin{aligned} \cos \left(l \sqrt{\frac{\alpha P_0}{I}} \right) &= 0 \\ l \sqrt{\frac{\alpha P_0}{I}} &= \frac{\pi}{2} \\ P_0 &= \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{l^2} \end{aligned}$$

formule trouvée ci-dessus.

Extension de la théorie. — La théorie précédente est nécessairement incomplète puisqu'elle ne tient pas compte de l'effort de compression qui intervient en même temps que la flexion. M. Keelhoff, professeur à l'Université de Gand, a repris en 1896 la théorie d'Euler et l'a complétée.

Considérons (fig. 169) une section AB dont les coordonnées du centre de gravité sont x et y ; désignons par φ l'angle de la tangente à l'élastique en ce point, avec l'axe

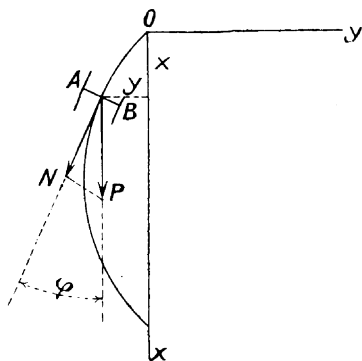


Fig. 169.

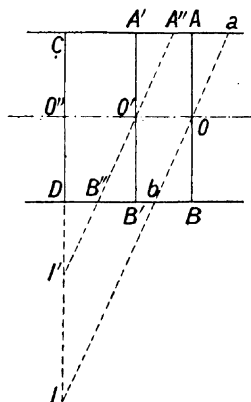


Fig. 170.

OX. Le moment fléchissant est $-P.y$ et l'effort de compression :

$$N = P \cos \varphi = \frac{P}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{P}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

Il convient, dans une théorie exacte, de faire intervenir cet effort en même temps que le moment fléchissant. Sous l'influence de la flexion seule, la section AB (fig. 170) prendrait la position ab et I serait le centre de courbure.

$$OI = \rho = \frac{l}{\alpha M}$$

La compression transporte AB en A'B'; la flexion lui fait prendre la position A''B''. Le centre de courbure est en I', le rayon de courbure O'I' = ρ' . On a :

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{O'O''}{OO''} = \frac{OO'' - OO'}{OO''} = 1 - \frac{OO'}{OO''}$$

$\frac{OO'}{OO''}$ est la dilatation δ ; il vient :

$$\rho' = \rho (1 - \delta) = \frac{I}{\alpha M} (1 - \alpha t) = \frac{I}{\alpha M} \left(1 - \frac{\alpha N}{S}\right)$$

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\alpha M}{I \left(1 - \frac{\alpha P}{S \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\right)}$$

$\frac{\alpha P}{S}$ est une quantité toujours très faible ; on peut donc écrire :

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{-Pyx}{I \left(1 - \frac{\alpha P}{S}\right)}$$

Posons

$$\frac{P}{1 - \frac{\alpha P}{S}} = Q.$$

Il vient :

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{Qyx}{I} \quad (I)$$

Multiplions par 2 dy et intégrons :

$$2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{Qy^2\alpha}{I} + C$$

La déformation est symétrique par rapport aux extrémités ; pour $x = \frac{l}{2}$, au milieu de la pièce, on doit avoir $\frac{dy}{dx} = 0$ et $y = f$; donc :

$$2 = \frac{Qf^2\alpha}{1} + C; \quad C = 2 - \frac{Qf^2\alpha}{1}$$

L'équation devient :

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{Qx}{2I} (f^2 - y^2) \dots \quad (2)$$

relation entre l'inclinaison de l'élastique, l'ordonnée et la flèche inconnue. Observons que

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \cos \varphi.$$

L'équation donne donc :

$$1 - \cos \varphi = \frac{Qx}{2I} (f^2 - y^2) \dots \quad (3)$$

L étant la longueur primitive de l'axe, elle devient, après compression, $L \left(1 - \frac{\alpha l^2}{S} \right)$. Cette longueur peut s'exprimer par la relation

$$\begin{aligned} 2 \int_0^f \frac{ds}{dy} dy &= 2 \int_0^f dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} = 2 \int_0^f dy \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \right)^2} \\ &= 2 \int_0^f \frac{dy}{\sin \varphi} = 2 \int_0^f \frac{dy}{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} \\ &= 2 \int_0^f \frac{dy}{2 \sqrt{1 - \frac{\cos \varphi}{2}} \sqrt{1 + \frac{\cos \varphi}{2}}} \end{aligned}$$

En remplaçant $\cos \varphi$ par sa valeur tirée de (2) il vient :

$$L \left(1 - \frac{\alpha P}{S} \right) = 2 \int_0^f \frac{dy}{2 \sqrt{\frac{Q\alpha}{4l} (f^2 - y^2)} \sqrt{1 - \frac{Q\alpha}{4l} (f^2 - y^2)}}$$

Posons

$$\frac{Q\alpha}{2l} (f^2 - y^2) = u$$

$$L \left(1 - \frac{\alpha P}{S} \right) = 2 \int_0^f \frac{dy}{\sqrt{2u} \sqrt{1 - \frac{u}{2}}}$$

Développons $\sqrt{1 - \frac{u}{2}}$ en série ; u étant une quantité très petite vis-à-vis de l'unité, la série sera très rapidement convergente ;

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u}{2}}} = \left(1 - \frac{u}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2^2 \cdot u} + \frac{3}{2^3 \cdot 4 \cdot u^2} + \frac{3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot u^3} + \dots$$

Multiplions par $\frac{1}{\sqrt{u}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{2^2 \cdot u^{\frac{3}{2}}} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 4 \cdot u^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{2^4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6 \cdot u^{\frac{7}{2}}} + \dots$$

$$\frac{L}{2} \left(1 - \frac{\alpha P}{S} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_0^f dy u^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^2} \int_0^f dy u^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{3}{4} \int_0^f dy u^{\frac{3}{2}} + \dots \right]$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_0^f u^n dy &= \int_0^f \left(\frac{Q\alpha}{2l} \right)^n (f^2 - y^2)^n dy = \\ &= \left[\left(\frac{Q\alpha}{2l} \right)^n (f^2 - y^2)^{n+1} y \right]_0^f - \int_0^f n \left(\frac{Q\alpha}{2l} \right)^n (f^2 - y^2)^{n-1} \times (-2y dy) y \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre est nul. L'équation devient :

$$\begin{aligned} \int_0^f u^n dy &= 2n \int_0^f \left(\frac{Q\alpha}{2l}\right)^n (f^2 - y^2)^{n-1} y^2 dy = 2n \int_0^f \left(\frac{Q\alpha}{2l}\right)^n \times \\ &(f^2 - y^2)^{n-1} (y^2 - f^2 + f^2) dy = 2n f^2 \int_0^f \left(\frac{Q\alpha}{2l}\right)^n \times \\ &(f^2 - y^2)^{n-1} dy - 2n \int_0^f \left(\frac{Q\alpha}{2l}\right)^n (f^2 - y^2)^n dy = \\ &= 2n f^2 \frac{Q\alpha}{2l} \int_0^f u^{n-1} dy - 2n \int_0^f u^n dy \end{aligned}$$

Donc :

$$(2n + 1) \int_0^f u^n dy = 2n f^2 \frac{Q\alpha}{2l} \int_0^f u^{n-1} dy$$

et

$$\int_0^f u^n dy = \frac{2n}{2n+1} f^2 \frac{Q\alpha}{2l} \int_0^f u^{n-1} dy \quad (4)$$

Le premier terme de la série donne :

$$\begin{aligned} \int_0^f u^{-\frac{1}{2}} dy &= \int_0^f \frac{dy}{\sqrt{\frac{Q\alpha}{2l} \sqrt{f^2 - y^2}}} = \sqrt{\frac{2l}{\alpha Q}} \left(\text{arc sin } \frac{y}{f} \right)'_0 \\ &= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2l}{\alpha Q}} \end{aligned}$$

Les autres termes se calculent par la formule (4) :

$$\begin{aligned} \int_0^f u^{\frac{1}{2}} dy &= \frac{1}{2} \frac{\alpha Q}{2l} f^2 \int_0^f u^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} f^2 \sqrt{\frac{\alpha Q}{2l}} \\ \int_0^f u^{\frac{3}{2}} dy &= \frac{3}{4} \frac{Q\alpha}{2l} f^2 \int_0^f u^{\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{\pi}{2} f^2 \left(\frac{\alpha Q}{2l}\right)^{\frac{3}{2}} \\ \int_0^f u^{\frac{5}{2}} dy &= \frac{5}{6} \frac{Q\alpha}{2l} f^2 \int_0^f u^{\frac{3}{2}} dy = \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{\pi}{2} f^6 \left(\frac{Q\alpha}{2l}\right)^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

On peut écrire :

$$\frac{L}{2} \left(1 - \frac{P\alpha}{S}\right) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{I}{\alpha Q}} + \frac{1}{2^2} \frac{\pi}{2^3} \left(\frac{Q\alpha}{I}\right)^{\frac{1}{2}} f^2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4}\right)^2 \frac{\pi}{2^5} \left(\frac{Q\alpha}{I}\right)^{\frac{3}{2}} f^4 + \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6}\right)^2 \frac{\pi}{2^7} \left(\frac{Q\alpha}{I}\right)^{\frac{5}{2}} f^6 + \dots \quad (5)$$

équation donnant la flèche en fonction de la charge.

La flèche est nulle pour la valeur de P tirée de l'équation :

$$\frac{L}{\pi} \left(1 - \frac{P\alpha}{S}\right) = \sqrt{\frac{I}{\alpha Q}} = \sqrt{\frac{I}{\alpha P} \left(1 - \frac{P\alpha}{S}\right)}$$

d'où

$$P = \frac{1}{\alpha} \frac{\pi^2}{L^2} \frac{I}{1 - \frac{\alpha P}{S}}$$

Le terme $\frac{\alpha P}{S}$ est toujours une quantité très petite vis-à-vis de l'unité et on peut écrire :

$$P = \frac{1}{\alpha} \frac{\pi^2}{L^2}$$

formule d'Euler. Si P est plus petit que cette valeur, la pièce doit rester droite ; en effet, l'expression de la flèche est :

$$\left(1 - \frac{\alpha P}{S}\right) \left(\frac{L}{\pi} - \sqrt{\frac{I}{\alpha P \left(1 - \frac{P\alpha}{S}\right)}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^4} f^2 \sqrt{\frac{\alpha Q}{I}} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{2^2} \left(\frac{\alpha Q}{I}\right)^{\frac{3}{2}} f^4 + \dots$$

Si P est plus petit que la valeur qui annule le premier membre, ce dernier est négatif ; le second est positif ; la flèche serait donc imaginaire. Si P augmente, la flèche prend des valeurs considérables très rapidement.

Pièce appuyée à ses deux extrémités. — L'effort P (fig. 171) doit être dirigé suivant la corde AB , sans quoi l'appui inférieur exercerait une réaction qui romprait l'équilibre. Même calcul que dans le premier cas en observant que pour $x=l, y=0$. On peut calculer immédiatement la valeur de P pour que la première forme soit possible en observant que la pièce peut se diviser en deux parties de

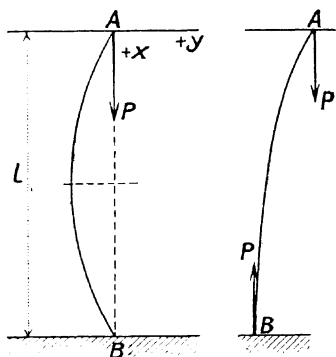


Fig. 171.

longueur $\frac{L}{2}$ analogues à la pièce du premier cas; pour qu'il n'y ait pas flambement, il faut :

$$P < \pi^2 \frac{I}{\alpha} \frac{1}{L^2} .$$

Cette pièce résiste donc mieux que la première; c'est le cas d'une bielle.

Pièce encastree dans la pièce faisant office de charge et à l'autre extrémité. — Il existe un moment à l'encastrement (fig. 172). On a :

$$\frac{I}{\alpha} \frac{d^2y}{dx^2} = -Py + m \quad (1)$$

Dérivons pour éliminer m :

$$\frac{I}{\alpha} \frac{d^3y}{dx^3} = -P \frac{dy}{dx} \quad (1')$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = Ak \cos kx + Bk \sin kx \quad (2)$$

Pour $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$; (2) devient :

$$\frac{dy}{dx} = Bk \sin kx \quad (2)$$

Pour $x = l$, $\frac{dy}{dx} = 0$, d'où :

$$0 = \sin kl \quad (3)$$

Intégrons (2) :

$$y = -B \cos kx + C$$

Pour $x = 0$, $y = 0$, donc :

$$y = B (1 - \cos kx) \quad (4)$$

Dérivons (2) :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Bk^2 \cos kx \quad (5)$$

En comparant (4) et (5) on a, en écrivant (5) sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (B \cos kx - B)k^2 + Bk^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2y + Bk^2$$

et, en comparant avec (1) :

$$k = \sqrt{\frac{\alpha P}{I}}$$

Pour $x = l$, $y = 0$; (4) donne donc la condition $\cos kl = 1$ (6). Cette équation écarte certaines des valeurs données par l'équation de condition (3); d'après (3) on avait $kl = 0, \pi, 2\pi, \dots$; (6) montre que $kl = 0, 2\pi, 4\pi$ et non pas π .

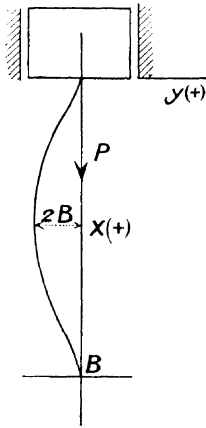


Fig. 172.

a. $kl = 0$ ou $k = 0$ indique que $y = 0$ pour toute valeur de x ; c'est la forme droite;

b. $kl = 2\pi$; kx passe par les valeurs $0, \pi, 2\pi$; donc y a successivement les valeurs $0, 2B$ et 0 ; la pièce a la forme de la figure. La condition pour que la première forme courbe soit atteinte, avec $l < L$ serait :

$$L \sqrt{\frac{\alpha P}{I}} > 2\pi$$

d'où

$$P > \frac{4\pi^2}{\alpha} \frac{I}{L^2}.$$

La condition pour que la pièce reste droite est

$$P < 4\pi^2 \frac{I}{\alpha} \frac{1}{L^2}.$$

On serait arrivé à ce dernier résultat en divisant la pièce en quatre parties analogues chacune à la pièce du premier cas.

Pièce encastree en B, appuyée à l'extrémité chargée A. — Il faut que A et B (fig. 173) soient sur la même verticale; la pièce fléchit, mais son extrémité A reste dans la direction primitive; il y a donc un effort qui l'empêche de se

déplacer vers la gauche, ou une réaction X. Il vient :

$$\frac{1}{x} \frac{d^2y}{dx^2} = -Py + Yx. \quad (1)$$

Différentions deux fois :

$$\frac{1}{x} \frac{d^3y}{dx^3} = -P \frac{d^2y}{dx^2}$$

d'où :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Ak^2 \cos kx + Bk^2 \sin kx.$$

D'après (1) pour $x = 0$, $y = 0$, donc $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$
et

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Bk^2 \sin kx \quad (2)$$

Intégrons :

$$\frac{dy}{dx} = -Bk \cos kx + C$$

Pour $x = l$,

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = Bk (\cos kl - \cos kx) \quad (4)$$

Intégrons encore :

$$y = B (kx \cos kl - \sin kx) \quad (5)$$

Ici $C = 0$ car pour $x = 0$, $y = 0$. On a de plus une équation de condition en observant que pour $x = l$, $y = 0$
et

$$0 = (kl \cos kl - \sin kl) \quad (6)$$

d'où

$$kl = \text{tg } kl.$$

a. On a une première solution pour $kl = 0$; donc $k = 0$; d'après (5), $y = 0$; c'est la forme droite.

b. Une seconde solution est donnée par l'arc de 257° dont la longueur $kl = 4,494$. Il existe d'autres solutions

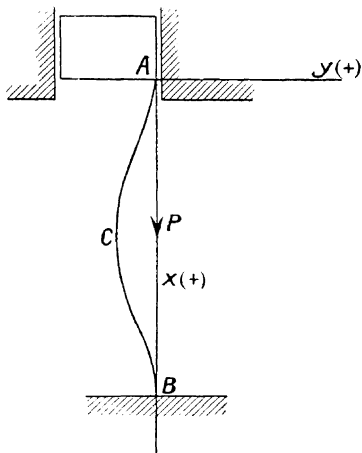


Fig. 173.

dont nous ne nous occupons pas. En comparant (1), (2) et (5) il vient encore :

$$k = \sqrt{\frac{\alpha P}{I}} .$$

La condition pour que la première forme courbe, figure ci-dessus, se produise est donc :

$$l \sqrt{\frac{\alpha P}{I}} = 4,494$$

et comme $l \leq L$ cette condition devient :

$$L \sqrt{\frac{\alpha P}{I}} > 4,494$$

d'où

$$P > \frac{(4,494)^2 I}{\alpha L^2} .$$

Or $(4,494)^2 = 20,20 =$ environ $2\pi^2$; la condition pour qu'il n'y ait pas flambement est donc finalement :

$$P < 2\pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{I}{L^2} .$$

Résumé. — On peut résumer l'examen des conditions de résistance au flambement en une seule formule :

$$P_0 = \omega \frac{1}{\alpha} \frac{I}{L^2} ,$$

dans laquelle :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\pi^2}{4} && \text{premier cas.} \\ \omega &= \pi^2 && \text{second cas,} \\ \omega &= 4\pi^2 && \text{troisième cas.} \\ \omega &= 2\pi^2 && \text{quatrième cas.} \end{aligned}$$

Appelons P la charge totale admissible au flambement ; P est la σ partie de P_0

$$P = \frac{P_0}{\sigma} .$$

On aura donc, en général :

$$P = \frac{\omega}{\sigma} \frac{1}{\alpha} \frac{I}{l^2} .$$

L'expérience quotidienne indique pour σ une grande indétermination. Si on veut empêcher dans la mesure du possible l'accomplissement de flexions beaucoup en dessous du danger à prévoir il convient d'adopter une grande valeur pour σ . Il y a de plus indétermination fréquente du mode d'action des efforts. Certains organes de machines en forme de prisme sont soumis à la trac-

tion puis au flambement, il se produit des moments additionnels de flambement dus au frottement dans les articulations, le poids propre de la pièce peut avoir son influence si elle est horizontale, l'inertie dont elle est animée intervient également; enfin la température peut jouer son rôle. Il n'est donc pas possible d'indiquer d'une manière générale des valeurs pour le coefficient σ et il convient d'examiner chaque fois les conditions spéciales dans lesquelles on se trouve.

D'autre part il est parfois difficile de préciser le mode d'attache des organes ou des pièces. Il est certain qu'une colonne avec grande plaque d'assise et de front se comportera autrement que si les assises sont plus petites. Dans le premier cas elle possède un encastrement plus sérieux et elle est certainement plus solide. Cependant, d'autre part, la même colonne sera plus sujette à des efforts excentrés dus à la grandeur de ses plaques d'assises. Avec des épaisseurs en plomb les colonnes se comporteront différemment qu'avec des massifs en béton. Il convient d'observer aussi que les calculs que nous avons développés supposent le coefficient de dilatation α constant alors qu'il est loin de l'être pour de la fonte, où il augmente en réalité avec les tensions et les dilatations et où il est différent pour la croûte et pour la matière interne.

Formules de Navier. — Considérons (fig. 174) une pièce soumise au flambement, dans la section moyenne, par un moment Pa dont le plan coupe celui de la section perpendiculairement à l'axe principal de celle-ci; le moment d'inertie par rapport à cet axe est I . La section moyenne est en outre soumise à l'action de l'effort excentré P . A la distance v de l'axe neutre la fibre est donc sous l'action d'une pression

$$r' = \frac{P}{S} + \frac{Pa}{I} v$$

d'où l'on tire :

$$P = S \frac{r'}{1 + \frac{avS}{I}} \quad (1)$$

L'inconnue a représente ici les causes déterminantes du flambement : action excentrique d'une charge sur la pièce, manque d'homogénéité de la matière, etc.; en

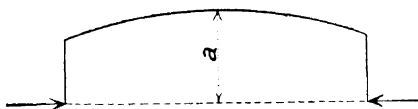


Fig. 174.

somme tout se passe au flambement comme si l'effort P agissait à l'extrémité d'un bras de levier. Afin de déterminer ce bras a , Navier établit les hypothèses suivantes. Par suite du moment P , a seul la fibre située à la distance v de l'axe neutre éprouve une tension $t = \frac{P \cdot a}{I} v$; la dilatation positive ou négative corrélative de cette tension est donnée pour la formule $\delta = \alpha t$; d'où :

$$P = \delta \frac{I}{\alpha av} \quad (2)$$

Egalons cette expression avec la formule d'Euler

$$\pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{I}{L^2} .$$

Il vient :

$$P = \delta \frac{I}{\alpha av} = \pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{I}{L^2}$$

$$a = \delta \frac{L^2}{\pi^2 v} .$$

Introduisons cette valeur dans l'équation (1) :

$$P = S \frac{r'}{1 + \frac{\delta}{\pi^2} \frac{SL^2}{I}} .$$

Posons :

$$\frac{\delta}{\pi^2} = \chi$$

d'où :

$$P = S \frac{r'}{1 + \chi \frac{SL^2}{I}} = S \frac{r'}{1 + \chi \left(\frac{L}{r_g}\right)^2}$$

P, charge totale admissible sur la pièce ;

r' , effort de pression admissible de la matière considérée ;

S, section de la pièce ;

L, longueur de la pièce ;

I, le plus petit des deux moments d'inertie principaux ;

r_g , rayon de giration ou rayon tel que $I = Sr_g^2$;

χ , un nombre empirique appelé *coefficient de rupture au flambement*.

L'expérience montre que χ ne peut être constant mais dépend de la longueur de la pièce.

Laissle et Schüber ont trouvé pour des pièces tournées à leurs extrémités

$\chi = 0,0001$ pour le fer forgé ;

$\chi = 0,0003$ — la fonte ;

$\chi = 0,0002$ — le bois.

Scharowski donne pour les colonnes des constructions en fer :

	r	r'	χ
Fer forgé. . .	4 000 kg/cm ²	4 000 kg/cm ²	0,0001
Fonte.	250 —	500 —	0,0002

Si, pour des colonnes en fonte $\frac{\chi SL^2}{I} < 3$, cet auteur prend

$$P = \frac{250 S}{1 + \chi \frac{SL^2}{I}}$$

Möller recommande pour les colonnes en fonte ou en fer pouvant être atteintes par incendie r' de 1000 à 1200 kg/cm² et $\chi = 0,0004$.

Krohn pose pour des colonnes mobiles à leurs extrémités :

$$\chi = \frac{1}{8} \alpha r'$$

α étant le coefficient de dilatation. Pour le fer forgé

$$\alpha = \frac{1}{2\,000\,000}, r' = 800, \text{ d'où } \chi = 0,00005.$$

Pour la fonte, avec

$$\alpha = \frac{1}{900\,000}, r' = 800, \chi = 0,00011.$$

Il y a lieu ici de se rappeler que α pour la fonte est très variable.

La formule empirique de Navier porte souvent le nom de formule de Rankine, de Schwartz, etc.

M. Keelhoff fait observer que la formule d'Euler peut être admise tant que la longueur relative $\frac{L}{r_g}$ dépasse la limite $\pi \sqrt{\frac{1}{\alpha r'}}$ variable avec les matériaux employés.

Pour les métaux usuels on pourra admettre :

Fer doux	140
Fer dur.	110
Acier très doux (fer fondu).	105
Acier moyennement dur.	93

Pour l'acier coulé le chiffre 100 paraît convenir. Pour la fonte on pourrait prendre 37.

Effort tranchant. — Observons que nous avons négligé jusqu'ici l'effort tranchant qui a pour expression (fig. 169).

$$T = P \sin \varphi = \frac{P \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Si la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est faible on peut écrire

$$T = P \frac{dy}{dx} = \frac{dM}{dx}.$$

L'équation de l'élastique a la forme

$$y = B \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Pour $x = \frac{l}{2}$, $y = f$; donc $f = B \sin \frac{k\pi}{2} = B$; l'équation devient

$$y = f \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

En faisant $k = 1$, $y = f \sin \frac{\pi x}{l}$; la flèche f est inconnue, mais elle ne doit pas se produire. Soit r' coefficient admissible à la compression. On doit avoir

$$r' = \frac{P}{S} + \frac{Mv}{I} = \frac{P}{S} + \frac{Mv}{Sr^2g} = \frac{P}{S} \left(1 + \frac{Mv}{Pr_g^2}\right).$$

Le moment maximum $M = P \cdot f$
donc

$$r' = \frac{P}{S} \left(1 + \frac{fv}{r_g^2}\right)$$

$$P = \frac{Sr'}{1 + \frac{fv}{r_g^2}}.$$

Adoptons la formule de Navier; on a

$$f = \frac{\psi L^2}{v}$$

et

$$y = \frac{\psi L^2}{v} \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi \pi L}{v} \cos \frac{\pi x}{L} ;$$

le maximum de cette expression pour $x = 0$ ou $x = l$ est $\frac{\psi \pi L}{v}$; donc

$$T_{\max} = \frac{P\psi \pi L}{v} .$$

Cette formule peut s'appliquer aux divers cas envisagés en y introduisant la longueur convenable.

Pièce à section variable. — Les pièces chargées debout étudiées jusqu'à présent ont une section constante puisque nous avons toujours supposé I constant. Si le profil est imposé *a priori* écrivons

$$\frac{1}{x} \frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{Py}{I} .$$

I étant une fonction de l'abscisse seule.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{\alpha Py}{I} = - Xy ,$$

X est une fonction de x . Posons $\frac{dy}{dx} = uy$ d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y \frac{du}{dx} + u \frac{dy}{dx} = y \left(\frac{du}{dx} + u^2 \right)$$

que nous substituons dans l'équation différentielle ; on a :

$$\frac{du}{dx} + u^2 = - X$$

Généralement cette équation n'est pas intégrable, on

aura recours à l'intégration graphique. On tire :

$$u = \sqrt{-\frac{du}{dx} - X},$$

Observons que $\frac{du}{dx}$ doit être négatif, u diminue de l'origine de la pièce vers le milieu où il est nul, car $\frac{dy}{dx} = 0$ en ce point.

L'effort tranchant a pour expression

$$T = -P \frac{dy}{dx}$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = uy = fue^{-\int_x^{\frac{1}{2}L} u dx}$$

f se détermine comme pour une pièce prismatique, le reste par intégration graphique.

S'il s'agit d'une pièce d'égale résistance, les équations sont :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Py}{I} \quad (1) \quad \text{avec} \quad \frac{P}{S} + \frac{Py\alpha}{I} = r' \quad (2)$$

y est inconnu; on se donne la forme de la section; de l'équation (2) on tire $z = f(y)$; (1) s'écrit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\varphi(y)$$

équation rarement intégrable et il faut avoir recours au calcul graphique. L'effort tranchant est donné par la formule

$$T = -P \frac{dy}{dx} .$$

On a de nouveau recours à l'intégration graphique.

Pièce chargée debout, supportant en même temps des efforts transversaux. — Il peut arriver qu'une pièce chargée debout reçoive en même temps l'action de forces transversales normales à son axe, par exemple une charge uniformément répartie p par unité de longueur ; c'est ce qui se produirait pour une pièce horizontale suffisamment lourde pour qu'il y ait lieu de tenir compte de son poids ; ou bien aussi une colonne supportant outre la charge verticale, une chaise de transmission sur laquelle la réaction des arbres, due à la traction des courroies, exercerait un effort normal sur l'axe. On peut déterminer dans chaque section les efforts en jeu en écrivant, pour la section considérée, l'équation

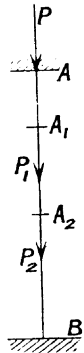


Fig. 175.

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d^2y}{dx^2} = -Py.$$

— Py étant le moment fléchissant dû à la charge debout et aux forces normales, en admettant que les deux plans de flexion coïncident, ou que la charge normale agit dans le plan du plus petit moment d'inertie de la section transversale.

Si on peut intégrer deux fois l'équation ci-dessus on obtient la relation $y = f(x)$ qui fournit l'équation de la fibre moyenne déformée et il est ensuite aisé de calculer en chaque point les moments fléchissants. L'intégration exacte de cette équation est souvent très délicate ; il est d'ailleurs assez rare que les deux genres d'efforts soient comparables et on calcule la pièce en ne considérant que l'une des forces, quitte à augmenter à vue les dimensions.

Pièce chargée debout soumise à plusieurs forces verti-

cales. — Soit (fig. 175) une pièce chargée, à la partie supérieure, d'un poids P ; de distance en distance sont appliqués des efforts P_1, P_2 verticaux dus, par exemple, à la composante verticale des tractions de courroies. L'effort à la base en B est $P + P_1 + P_2$. Pour la première partie AA_1 l'effort de compression dû à la charge est $\frac{P}{S}$; dans la partie A_1A_2 il est $\frac{P + P_1}{S}$ et ainsi de suite; la force P , appliquée en A , et la force égale et contraire appliquée en A_1 , produisent une flexion qui donne lieu au milieu de la longueur AA_1 , à un effort

$$\frac{P}{S} \frac{\omega}{\sigma} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{l_1^2} .$$

L'effort $P + P_1$ en A_1 et l'effort égal et de signe contraire appliqué en A_2 fournissent une tension

$$\frac{P + P_1}{S} \frac{\omega}{\sigma} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{l_2^2} .$$

On peut vérifier ainsi de proche en proche la résistance de la pièce. Un cas particulier intéressant serait celui où l'on ferait intervenir le poids de la pièce.

ESSAIS AU FLAMBEMENT

Essais de Bauschinger. — Cet expérimentateur a effectué un grand nombre d'essais avec des colonnes en fer de formes diverses. Il résulte de ces essais deux constatations importantes :

1° Les essais avec des colonnes en double T, dont les extrémités étaient libres de se mouvoir, ont montré une concordance suffisante entre les résultats pratiques et ceux obtenus par la formule d'Euler

$$P_0 = \pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{1}{L^2}$$

si, dans cette formule, on adopte $\alpha = \frac{1}{2\,000\,000}$.

2° Les essais avec des colonnes pourvues à leurs extrémités de plateaux ne concordent plus avec les formules d'Euler; nous avons déjà indiqué les raisons déterminantes de cette divergence. Il est très difficile d'assurer par des plateaux l'application axiale de la charge P; il est presque impossible d'assurer une répartition complète et uniforme de cette charge sur le plateau frontal; il se produit sur ce plateau une variation de la répartition des efforts, l'un des côtés se détachant même de la surface d'application de la charge. Bauschinger reconnaît que dans ce cas il convient de recourir à la formule de Navier et d'écrire :

$$P_0 = S \frac{r'}{1 + \chi \frac{SL^2}{I}}$$

Appliquant la théorie des moindres carrés aux résultats pratiques qu'il a obtenus, Bauschinger trouve

$$r' = 2270 \text{ kg/cm}^2; \chi = 0,000058.$$

Essais de Tetmajer. — Cet auteur a effectué des essais au flambement avec des colonnes en fer soudé et fer fondu, encastrement en pointe. Il a trouvé que la formule d'Euler était applicable; mais que la formule de Navier pour ce cas ne l'était qu'en introduisant pour χ la valeur

$$\chi = 0,0001 \sqrt{0,00867 \frac{L}{r_g} \quad 0,6936}$$

dans l'expression

$$\frac{P_0}{S} = \frac{2\,650}{1 + \chi \left(\frac{L}{r_g}\right)^2} \text{ pour le fer fondu}$$

et

$$\frac{P_o}{S} = \frac{2\,350}{1 + \chi \left(\frac{L}{r_g}\right)^2} \text{ pour le fer soudant.}$$

Le même expérimentateur a essayé de nombreux poteaux en bois. Il conclut pour les poteaux encastés en pointes :

1° La formule d'Euler est suffisamment exacte ;

1° La formule de Navier n'est applicable qu'en introduisant

$$\chi = 0,0001 \sqrt{0,05 \frac{L}{r_g} - 0,80}$$

dans la formule

$$\frac{P_o}{S} = \frac{318}{1 + \chi \left(\frac{L}{r_g}\right)^2}$$

relative au pin et au mélèze ; et pour le sapin blanc et le sapin rouge dans :

$$\frac{P_o}{S} = \frac{285}{1 + \chi \left(\frac{L}{r_g}\right)^2}$$

3° Enfin pour des poteaux en bois avec surfaces d'appuis constituées par des plateaux il convient de remplacer, dans les égalités précédentes, L par 0,6 L.

FLEXION GAUCHE SIMPLE

Rappel. — Le plan des forces extérieures ne passe plus par l'axe de symétrie et l'angle β des formules générales n'est pas nul ; ce plan reste cependant normal à la section. Enfin, l'effort P est nul, c'est-à-dire que la force extérieure est normale sur l'axe de la pièce. Les formules

générales deviennent :

$$t = \frac{M \sin \beta}{I} z'$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha M \sin \beta}{I}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\int y^2 ds}{\int u y ds}$$

Nous allons transformer ces formules en les rapportant aux axes principaux d'inertie de la section.

Ellipse d'inertie. — Considérons (fig. 176) à l'intérieur d'une surface, un point quelconque O et faisons passer par ce point deux axes rectangulaires quelconques. Les coordonnées d'un point P correspondant à un élément de surface ds , par rapport à ces axes, sont x et y . Le moment d'inertie de la surface par rapport à l'axe OX est

$$I_x = \int y^2 ds$$

et par rapport à l'axe OY :

$$I_y = \int x^2 ds.$$

Soit maintenant un axe OA, passant par le point O et faisant l'angle ω avec l'axe OX. La distance de l'élément ds ou du point P à cet axe OA est :

$$z = y \cos \omega - x \sin \omega.$$

Le moment d'inertie de la surface par rapport à OA a pour expression

$$I = \int z^2 ds = \int (y \cos \omega - x \sin \omega)^2 ds$$

$$I = I_x \cos^2 \omega + I_y \sin^2 \omega - 2 \sin \omega \cos \omega \int xy ds \quad (1)$$

Etant donnés les moments d'inertie I_x et I_y par rapport à

deux axes orthogonaux, on peut donc en déduire le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque passant par l'origine. Rendons-nous compte de la façon dont

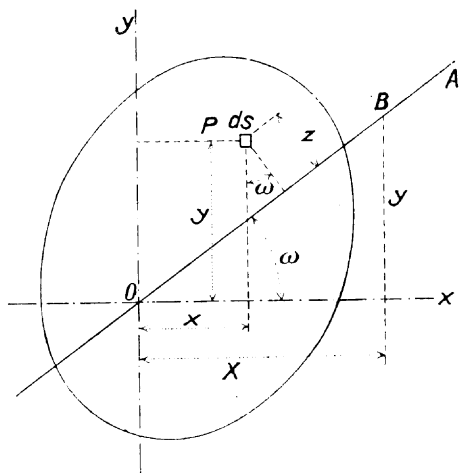


Fig. 176.

varie I avec l'inclinaison ω . Portons sur OA , à partir du point O , une longueur

$$OB = \frac{k}{\sqrt{I}}$$

en posant

$$k^2 = \frac{I_x I_y}{S}$$

S étant la surface de la section. Les coordonnées du point B par rapport aux axes OX et OY sont :

$$X = OB \cos \omega; \quad Y = OB \sin \omega,$$

d'où

$$\cos \omega = \frac{X\sqrt{I}}{k}; \quad \sin \omega = \frac{Y\sqrt{I}}{k}.$$

Substituons dans l'équation (1) et supprimons le facteur commun I :

$$I_x X^2 + I_y Y^2 - 2XY \int xy ds = k^2,$$

C'est l'équation du lieu des points B ; elle est du second degré ; c'est une courbe à centre, puisque les termes en X et Y n'y existent pas ; c'est une ellipse car comme I n'est jamais nul $\frac{1}{\sqrt{I}}$ n'est jamais infini. Enfin le centre de l'ellipse est à l'origine O puisque l'équation ne renferme que des termes du même degré. Cette ellipse s'appelle *ellipse d'inertie*. Il existe dans une ellipse deux axes rectangulaires, le plus grand axe et le plus petit axe, tels que, quand on y rapporte l'équation de la courbe, le terme constitué par le produit des coordonnées disparaît. On peut précisément choisir, dans le cas qui nous occupe, ces deux axes pour axes des X et des Y et alors on aura

$$\int xy ds = 0. \quad (2)$$

L'équation de l'ellipse d'inertie devient alors

$$I_x X^2 + I_y Y^2 = k^2.$$

I_x et I_y étant les moments d'inertie de la surface par rapport aux axes de l'ellipse d'inertie. La moitié du plus grand axe de l'ellipse et la moitié du plus petit axe sont la plus grande et la plus petite valeur possibles de I_x et I_y . Elles s'obtiennent en écrivant la condition (2) et on a :

$$I_x = \max. \text{ ou } \min. \text{ et } I_y = \min. \text{ ou } \max.$$

Cette plus grande et cette plus petite valeur des moments d'inertie que l'on peut calculer pour toutes les droites d'une section passant par un point O, s'appellent les *deux moments d'inertie principaux* de la surface relatifs au point O de celle-ci. Si I_x et I_y sont les moments d'inertie principaux, le moment d'inertie I par rapport à

une droite quelconque passant par O et faisant avec l'axe de moment d'inertie principal I_X l'angle ω a pour valeur, d'après (1) :

$$I = I_X \cos^2 \omega + I_Y \sin^2 \omega. \quad (3)$$

Si $I = I_X = I_Y$, c'est-à-dire si les moments d'inertie pour toutes les droites passant par le point O sont égaux, l'ellipse d'inertie devient une circonférence.

Les développements que nous venons d'effectuer concernent un point quelconque de la surface. Il en résulte qu'une surface a une infinité d'axes principaux d'inertie et de moments d'inertie principaux. Dans la suite, quand il sera question d'ellipse d'inertie nous entendrons parler de celle qui est relative au centre de gravité de la surface; on l'appelle *ellipse centrale d'inertie*.

Propriété de l'ellipse d'inertie. — Reprenons l'équation

$$I_X X^2 + I_Y Y^2 = k^2,$$

de l'ellipse d'inertie rapportée à ses axes. Nous avons posé $k^2 = \frac{I_X I_Y}{S}$; l'équation peut donc s'écrire

$$\frac{X^2}{I_Y} + \frac{Y^2}{I_X} = \frac{1}{S}. \quad (4)$$

On sait que la *rayon de giration* est une longueur égale à la racine carrée du moment d'inertie par l'aire S de la surface considérée. On a donc :

$$r_g = \sqrt{\frac{I}{S}}$$

ou

$$I = S r_g^2,$$

expression homogène puisqu'un moment d'inertie est du quatrième degré. Le rayon de giration relatif à l'axe des

X est

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}}; \quad I_x = S r_x^2$$

et le rayon par rapport à l'axe de Y :

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}}; \quad I_y = S r_y^2$$

Remplaçons I_x et I_y par leur expression dans l'équation

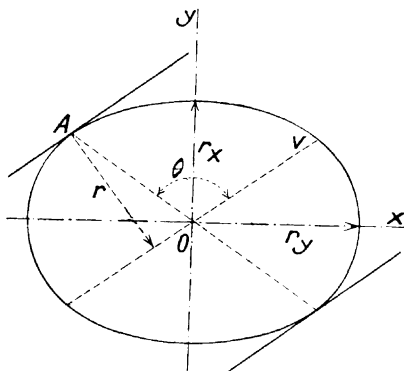


Fig. 177.

(4); celle-ci devient, en écrivant les coordonnées courantes x et y au lieu de X et Y :

$$\frac{x^2}{r_y^2} + \frac{y^2}{r_x^2} = 1 \quad (5)$$

équation de l'ellipse en fonction des rayons de giration relatifs aux axes principaux. *Il est visible que chacun des deux demi-axes de l'ellipse est le rayon de giration du moment d'inertie pris par rapport à l'autre axe.* Ainsi (fig. 177) le demi-petit axe est le rayon de giration relatif au moment d'inertie par rapport au grand axe et inversement.

Voyons maintenant quel est le rayon de giration correspondant au moment d'inertie par rapport à un axe quelconque passant par le centre. Un vecteur quelconque de longueur v , faisant avec l'axe OX un angle ω , a pour coordonnées de son extrémité :

$$x = v \cos \omega; \quad y = v \sin \omega.$$

Cette extrémité est sur l'ellipse ; ces valeurs de x et y doivent donc satisfaire l'équation (5) et on a :

$$\frac{v^2 \cos^2 \omega}{r_x^2} + \frac{v^2 \sin^2 \omega}{r_y^2} = 1$$

ou

$$r_x^2 \cos^2 \omega + r_y^2 \sin^2 \omega = \frac{r_x^2 r_y^2}{v^2} \quad (6)$$

Calculons le rayon de giration r correspondant à OV . L'équation

$$I = I_x \cos^2 \omega + I_y \sin^2 \omega$$

devient

$$\begin{aligned} Sr^2 &= Sr_x^2 \cos^2 \omega + Sr_y^2 \sin^2 \omega \\ r^2 &= r_x^2 \cos^2 \omega + r_y^2 \sin^2 \omega. \end{aligned}$$

Comparons à l'équation (6) :

$$r^2 = \frac{r_x^2 r_y^2}{v^2}$$

ou

$$rv = r_x r_y. \quad (7)$$

Construisons le diamètre conjugué Ov' de OV ; il fait avec ce dernier l'angle θ ; on sait qu'on a

$$r_x r_y = v \cdot r' \sin \theta.$$

Comparant à (7) il vient :

$$r = r' \sin \theta.$$

Donc r est la grandeur de la perpendiculaire abaissée de l'extrémité du diamètre conjugué à OV sur OV .

Mais la tangente à l'ellipse en A est parallèle à OV ; on peut donc dire que *si à chacune des droites OV issues d'un point O du plan, on mène deux parallèles distantes de la droite OV d'une longueur égale au rayon de giration relatif à cette droite, la conique d'inertie est l'enveloppe de ces tangentes.*

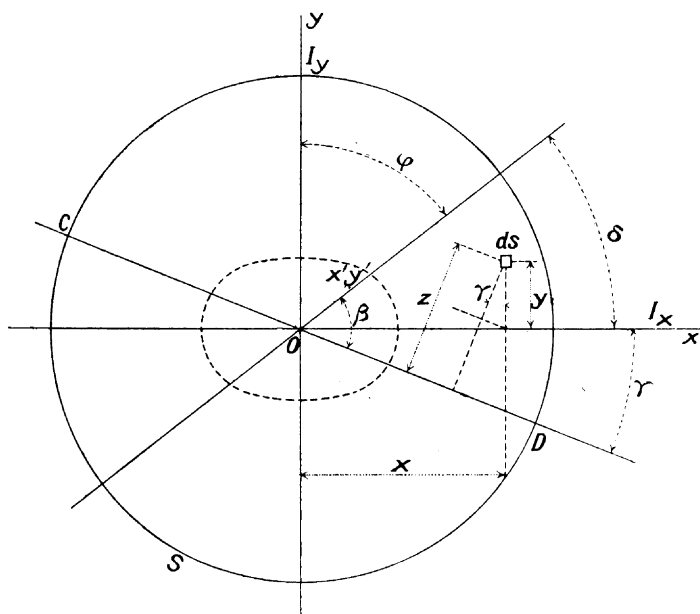


Fig. 178.

Expression de la tension. — Soit (fig. 178) une section S dont le centre de gravité est le point O . Nous supposons déterminée l'ellipse centrale d'inertie, c'est-à-dire l'ellipse d'inertie pour le point O , ainsi que les axes principaux d'inertie; I_x est le moment d'inertie de la section

par rapport à l'axe principal OX et I_Y le moment d'inertie par rapport à l'axe principal OY. Ces deux axes principaux sont choisis comme axes des coordonnées. Soit AB la trace du plan des forces extérieures sur le plan de la section. Le centre de courbure se trouve sur la droite AB. L'axe neutre possède la position CD, faisant avec l'axe OX l'angle γ , tandis que le plan AB fait, avec le même axe, l'angle δ . Rappelons que AB fait avec CD l'angle β . D'après ce qu'on a vu dans la théorie générale de la flexion, la tension t , dans l'élément de surface ds , a pour expression

$$t = \frac{1}{\alpha} \frac{z}{\rho} .$$

Or $z = x \sin \gamma + y \cos \gamma$, x et y étant les coordonnées de ds . La somme des moments que cette tension fait naître dans tous les éléments ds , par rapport à OX et OY, doit faire équilibre aux composantes du moment extérieur M qui agit dans le plan AB, par rapport aux mêmes axes.

La composante de M par rapport à OX est $M \cos \varphi$ et la composante de M par rapport à OY est $M \sin \varphi$. On a donc :

$$M \cos \varphi = \int t ds \cdot y = \int y \frac{1}{\alpha} \frac{x \sin \gamma + y \cos \gamma}{\rho} ds \quad (1)$$

$$M \sin \varphi = \int t ds \cdot x = \int x \frac{1}{\alpha} \frac{x \sin \gamma + y \cos \gamma}{\rho} ds \quad (2)$$

Supposons α invariable. Il viendra pour (1)

$$M \cos \varphi = \frac{1}{\alpha \rho} \left[\int (x \sin \gamma + y \cos \gamma) \right] y ds$$

$$M \cos \varphi = \frac{1}{\alpha \rho} \left[\int xy \sin \gamma ds + \int y^2 ds \cos \gamma \right] .$$

Mais $\int xy ds = 0$ puisque nous avons rapporté l'ellipse

d'inertie à ses axes ; $\int y^2 ds = I_x$ et :

$$M \cos \varphi = \frac{1}{\alpha \rho} \cos \gamma I_x$$

ou

$$\frac{\cos \gamma}{\rho} = \frac{\alpha M}{I_x} \cos \varphi \quad (3)$$

L'équation (2) devient :

$$M \sin \varphi = \frac{1}{\alpha \rho} \sin \gamma I_y.$$

ou

$$\frac{\sin \gamma}{\rho} = \frac{\alpha M}{I_y} \sin \varphi \quad (4)$$

On tire de (3) et (4) :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \varphi$$

$$\frac{1}{\rho} = \alpha M \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{I_x^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{I_y^2}}$$

$$t = \frac{1}{\alpha} \frac{z}{\rho} = Mz \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{I_x^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{I_y^2}}$$

$$t = \frac{1}{\alpha} \frac{x \sin \gamma + y \cos \gamma}{\rho}$$

et, en remplaçant $\sin \gamma$ et $\cos \gamma$ en fonction de $\operatorname{tg} \gamma$, puis $\frac{1}{\rho}$ par sa valeur, il vient :

$$t = M \left(\frac{x \sin \varphi}{I_y} + \frac{y \cos \varphi}{I_x} \right).$$

On voit que la tension t est égale à la somme des tensions dues aux deux composantes du moment fléchissant, suivant les axes principaux d'inertie.

Tension maximum. — Il faut que

$$\frac{x \sin \varphi}{I_Y} + \frac{y \cos \varphi}{I_X}$$

soit maximum. S'il s'agit d'une section rectangulaire x et y atteignent en même temps leur valeur maximum à un

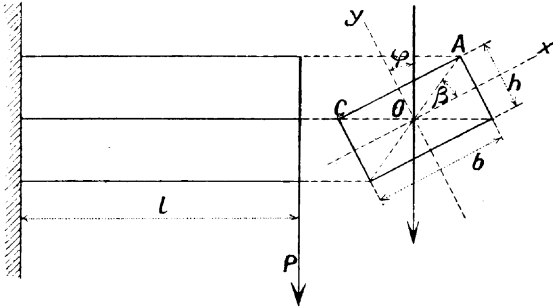


Fig. 179.

point saillant ou sommet. Si la forme de la section est arrondie, la recherche du maximum demande des tâtonnements.

Considérons par exemple (fig. 179) un rectangle $b \times h$, section d'un prisme encasté et soumis à l'extrémité libre à l'effort P . L'axe des forces extérieures est vertical; le centre de gravité et les axes principaux d'inertie sont connus. On a :

$$t = M \left(\frac{x \sin \varphi}{I_Y} + \frac{y \cos \varphi}{I_X} \right).$$

Le moment M à l'encastrement a pour valeur $P \cdot l$.

$$I_X = \frac{bh^3}{12}; \quad I_Y = \frac{hb^3}{12}.$$

Donc

$$t = \frac{6M}{bh} \left[\frac{\sin \varphi}{b} + \frac{\cos \varphi}{h} \right].$$

La tension maximum se produit pour $x = \frac{b}{2}$ et $y = \frac{h}{2}$.

D'autre part, pour que t soit maximum, il faut que

$$\frac{\sin \varphi}{b} + \frac{\cos \varphi}{h} = \max.$$

Annulons la dérivée ; il vient :

$$\frac{\cos \varphi}{b} - \frac{\sin \varphi}{h} = 0$$

d'où

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{b}.$$

Il faut donc que l'axe des forces extérieures soit tel que $\varphi = \beta$. Cherchons la position qui donne la fatigue la plus faible. La tension maximum se produit en A ou en C. A mesure que φ diminue, la tension en A diminue, mais la tension en C augmente. La position la plus favorable est celle pour laquelle les tensions en A et C sont égales, donc quand BB' coïncide avec OY ; c'est le cas de la flexion plane.

Cherchons les flèches. On a :

$$\frac{1}{x} \frac{d^2y}{dx^2} = Px \sin \beta,$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ est évaluée dans le plan dans lequel la pièce fléchit, c'est-à-dire dans le plan normal à l'axe neutre. Donc

$$f = \frac{\alpha Pl^3}{3I} \sin \beta.$$

La flèche verticale f' a pour valeur :

$$f' = \frac{\alpha Pl^3}{3I} \sin \beta \cos \varphi.$$

Théorème. L'axe neutre et l'axe des forces extérieures

sont des diamètres conjugués de l'ellipse centrale d'inertie.

— L'équation de l'axe des forces extérieures qui passe par le centre de gravité O (fig. 178) et le point $x'y'$ où cet axe rencontre l'ellipse est

$$y = \frac{y'}{x'} x. \quad (1)$$

Cherchons le diamètre conjugué. L'équation de la tangente à l'ellipse au point $x' y'$ est :

$$I_Y y y' + I_X x x' = 1.$$

L'équation du diamètre conjugué est donc :

$$I_Y y y' + I_X x x' = 0. \quad (2)$$

Cherchons l'équation de l'axe neutre. Pour cet axe $t = 0$ et l'équation est

$$0 = I_Y y_1 y + I_X x_1 x.$$

Or $\frac{y_1}{x_1} = \frac{x'}{y'}$ et on peut écrire :

$$0 = I_Y y' y + I_X x' x.$$

Calcul de l'angle β . — On a (fig. 180) :

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (\beta' + \beta'') = \frac{\operatorname{tg} \beta' + \operatorname{tg} \beta''}{1 - \operatorname{tg} \beta' \operatorname{tg} \beta''}$$

β' est l'angle du plan des forces extérieures BB' avec OX ; or l'équation de BB' est

$$I_X x_1 x + I_Y y_1 y = 0$$

$$\operatorname{tg} \beta' = - \frac{I_X}{I_Y} \frac{x_1}{y_1}.$$

L'équation de l'axe CC' est $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$

$$\operatorname{tg} \beta'' = \frac{y'}{x'}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{-\frac{I_X}{I_Y} \frac{x_1}{y_1} + \frac{y'}{x'}}{1 - \frac{I_X}{I_Y}}.$$

On tire de là $\sin \beta$ et, en remplaçant dans l'expression

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha M \sin \beta}{I}$$

on obtient le rayon de courbure :

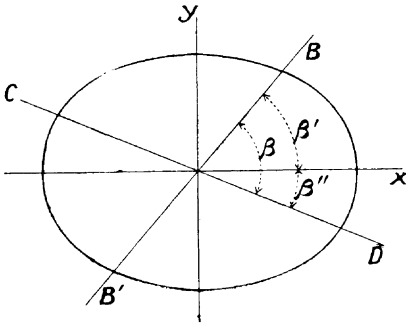


Fig. 180.

Recherche de l'ellipse centrale d'inertie. — *Théorème.* *Tout axe de symétrie est un axe principal de l'ellipse.* En effet, prenons (fig. 181) cet axe pour axe des Y ; il existe toujours deux éléments ayant la même ordonnée y et des abscisses égales et de signes contraires. Donc pour cette ligne et une perpendiculaire quelconque le terme $\int xyds$ se composera de couples de termes égaux et de signes contraires qui s'annuleront. On aura donc $\int xyds = 0$, relation qui caractérise les axes principaux. Pour les figures qui ont deux axes de symétrie perpendiculaires entre eux, ces axes sont ceux de l'ellipse centrale. C'est le cas du rectangle et du losange. Enfin, les figures qui

ont plus de deux axes de symétrie ont plus de deux diamètres principaux; l'ellipse d'inertie dans ce cas ne peut être qu'un cercle. Tous les moments d'inertie pour les

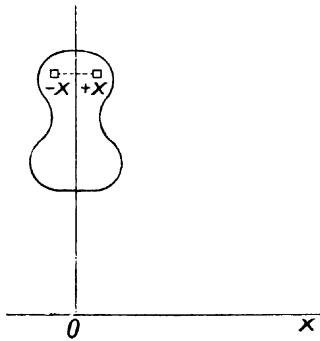


Fig. 181.

axes passant par le centre sont alors égaux; c'est le cas pour les polygones réguliers et le cercle.

Il résulte de ce théorème que si la surface considérée possède un axe de symétrie, la direction des axes principaux de l'ellipse est connue. Il suffit de calculer les moments d'inertie et les rayons de giration relatifs à ces axes. Si les axes

principaux ne sont pas connus on calculera les moments d'inertie et les rayons de giration relatifs à trois axes passant par le centre de gravité. En menant de chaque côté de ces axes des parallèles à une distance égale au rayon de giration correspondant, on obtiendra six tangentes à l'ellipse; on déterminera ensuite d'autres tangentes au moyen du théorème bien connu de géométrie analytique, en nombre suffisant pour pouvoir tracer l'ellipse.

On peut aussi opérer par la méthode générale. Conduisons (fig. 178) deux perpendiculaires passant par le centre de gravité de la section et calculons les moments d'inertie relatifs à ces deux axes, ainsi que les rayons de giration correspondants.

Reprenons l'équation :

$$I = I_x \cos^2 \omega + I_y \sin^2 \omega - 2 \sin \omega \cos \omega \int xy ds$$

ou

$$I = I_x \cos^2 \omega + I_y \sin^2 \omega - \sin 2\omega \int xy ds.$$

Le maximum et le minimum de cette expression correspondent aux axes centraux d'inertie. Annulons la dérivée ; il vient :

$$0 = \frac{dI}{d\omega} = -2 \sin \omega \cos \omega I_x + 2 \sin \omega \cos \omega I_y - 2 \cos 2\omega \int xy ds$$

$$0 = \sin 2\omega (I_y - I_x) - 2 \cos 2\omega \int xy ds$$

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2 \int xy ds}{I_y - I_x}$$

équation qui admet deux solutions 2ω et $2\omega + \pi$, donc deux axes faisant avec OX les angles ω et $\omega + \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire perpendiculaires entre eux. Au moyen de cette formule on peut donc trouver les deux axes principaux d'inertie par rapport aux axes choisis. La quantité $\int xy ds = \int \int xy dx dy = \int x dx \int y dy$ n'est résoluble que dans le cas spécial d'une forme géométrique à moins que par intégration graphique. L'angle ω étant calculé, la grandeur des axes de l'ellipse sera la valeur de I pour cette valeur spéciale de $\operatorname{tg} 2\omega$; comme on a trouvé pour cet angle deux valeurs différant de $\frac{\pi}{2}$ et correspondant chacune à l'un des axes, on trouvera les deux valeurs de I qui seront :

$$I_x \text{ ou } I_y = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + \left[\int xy ds\right]^2}$$

On peut dès lors tracer l'ellipse centrale d'inertie en portant les valeurs $\frac{1}{\sqrt{I_x}}$ et $\frac{1}{\sqrt{I_y}}$ en observant que I_x et I_y sont au dénominateur.

Applications. — *Rectangle.* — Les droites qui passent par les milieux des côtés opposés étant des axes de symétrie

sont les axes de l'ellipse centrale (fig. 182). Prenons-les pour axes des coordonnées.

On a

$$i_x = \frac{bh^3}{12}; \quad i_y = \frac{hb^3}{12}.$$

Les deux demi-axes de l'ellipse centrale sont

$$a = \frac{1}{\sqrt{i_x}}; \quad b = \frac{1}{\sqrt{i_y}}.$$

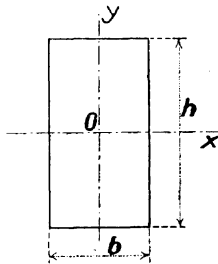


Fig. 182.

L'équation de l'ellipse centrale est donc :

$$i_y y^2 + i_x x^2 = 1,$$

ou

$$\frac{hb^3}{12} y^2 + \frac{bh^3}{12} x^2 = 1,$$

Le rapport des axes est :

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{i_y}{i_x}} = \sqrt{\frac{hb^3}{bh^3}} = \frac{b}{h}$$

L'ellipse centrale est donc semblable à l'ellipse inscrite dans le rectangle.

Carré. — Il suffit de faire $b = h = c$. L'équation de

l'ellipse centrale est

$$\frac{c^4 y^2}{12} + \frac{c^4 x^2}{12} = 1$$

$$x^2 + y^2 = \frac{12}{c^4}$$

équation d'un cercle.

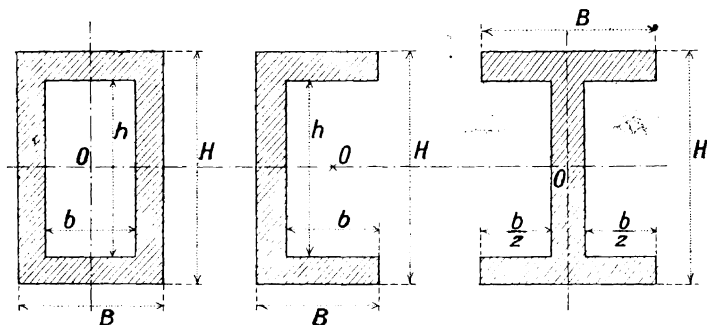


Fig. 183.

Cercle. — L'équation du cercle est $x^2 + y^2 = R^2$

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64}; \quad I_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

On voit que l'ellipse centrale devient un cercle concentrique avec le premier.

Ellipse. — Il est facile d'établir que l'ellipse centrale d'inertie est semblable à l'ellipse donnée.

Profils divers. — Pour les trois profils (fig. 183) le moment d'inertie par rapport à l'axe longitudinal passant par le centre de gravité est

$$\frac{BH^2 - bh^2}{12}$$

L'ellipse a comme centre le centre de gravité O, et les

deux axes sont normaux, l'un de symétrie passant par O . Le tracé se fait aisément si on connaît les moments d'inertie par rapport à ces axes.

Soit maintenant un profil simple T (fig. 184). Le centre de gravité est situé sur l'axe de symétrie vertical et à une distance

$$y_1 = \frac{BH^2 - bh^2}{2(BH - bh)}$$

Les axes de l'ellipse sont l'axe de symétrie et l'axe nor-

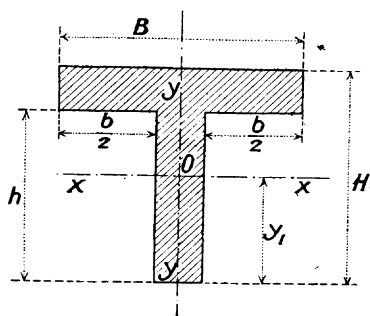


Fig. 184.

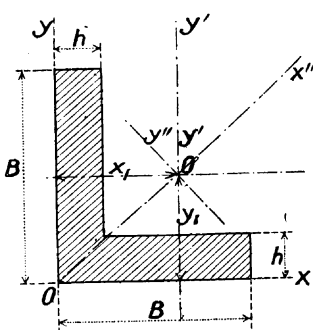


Fig. 185.

mal XX passant par O . Les moments d'inertie seront :

$$I_X = \frac{B(H-h)^3}{12} + B(H-h) \left(\frac{H-h}{2} + h - y_1 \right)^2$$

$$I_Y = \frac{(H-h)B^3}{12} + \frac{h(B-b)^3}{12}$$

d'où la longueur $\frac{1}{\sqrt{I_X}}$ et $\frac{1}{\sqrt{I_Y}}$ des axes de l'ellipse.

Soit enfin un profil en équerre à branches égales (fig. 185). La bissectrice OX'' est un axe de symétrie ; le centre est sur cette droite. Prenons pour axes des coordonnées les deux côtés OX et OY ; on a, pour les coordon-

nées du centre de gravité O :

$$x_1 = y_1 = \frac{B^2 + Bh - h^2}{2(2B - h)}.$$

On a aussi :

$$I_X = I_Y = \frac{B^3h + (B - h)h^3}{3}.$$

Prenons les moments autour d'axes parallèles OX' et OY' aux premiers :

$$I_{X'} = I_{Y'} = \frac{B^3h + (B - h)h^3}{3} - (2Bh - h^2)y_1^2.$$

Enfin prenons les moments d'inertie pour les axes OX'' et OY'' qui font respectivement avec OX' les angles 45° et 135° . Appliquons la formule générale :

$$I_{x''} = I_{x'} \cos^2 45^\circ + I_{y'} \sin^2 45^\circ - \sin 90^\circ \int x'y' ds,$$

c'est-à-dire

$$I_{x''} = I_{x'} - \int x'y' ds.$$

De même :

$$I_{y''} = I_{y'} \cos^2 135^\circ + I_{x'} \sin^2 135^\circ - \sin 270^\circ \int x'y' ds$$

ou

$$I_{y''} = I_{y'} + P$$

$$\int x'y' ds = \int \int x'y' dx' dy' = \int x'dx' \int y'dy'$$

$$\int x'y' ds = \frac{Bh(h-2y_1)(B-2y_1) + (B-h)(B-2y_1+h)h(h-2y_1)}{4}$$

On pourra d'une façon générale se servir d'intégrateurs.

Calcul des résistances. — Pour résoudre un problème

de flexion gauche simple on déterminera pour la section la plus fatiguée le centre de gravité et les axes d'inertie. S'il y a un axe de symétrie on peut ne pas calculer l'ellipse. S'il n'y a pas d'axe de symétrie il faut déterminer l'ellipse. On cherche ensuite les deux composantes du moment fléchissant M suivant les axes principaux d'inertie et on fait la somme des tensions dues à ces composantes, somme qui ne doit pas dépasser le coefficient admissible σ'''' à la flexion.

Observons que d'une façon générale la flexion gauche simple ne présente guère d'intérêt pratique.

FLEXION GAUCHE COMPOSÉE

Généralités. — Le plan des forces extérieures AA' (fig. 186), tout en restant normal aux sections, fait un angle β avec l'axe central; de plus la composante normale P de la résultante F des forces extérieures appliquées à la section considérée n'est pas nulle, c'est-à-dire que cette résultante F est oblique par rapport à l'axe de la pièce.

La formule $t = \frac{\tilde{z}}{\alpha \rho}$ montre que la tension en un point quelconque est proportionnelle à la distance à l'axe neutre. Ce dernier ne passe pas par le centre de gravité de la section puisque

$$\tilde{z}_1 = \frac{\alpha P \rho}{S}$$

et que P n'est pas nul. Les formules deviennent :

$$t = \frac{Mz'}{I} \sin \beta + \frac{P}{S}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha M \sin \beta}{I} .$$

On rapporte encore les formules aux axes principaux d'inertie comme dans le cas de la flexion gauche simple. On a :

$$z = z_1 + x \sin \gamma + y \cos \gamma$$

$$t = \frac{1}{\alpha} \frac{z_1 + x \sin \gamma + y \cos \gamma}{\rho}$$

La somme des moments que cette tension fait naître

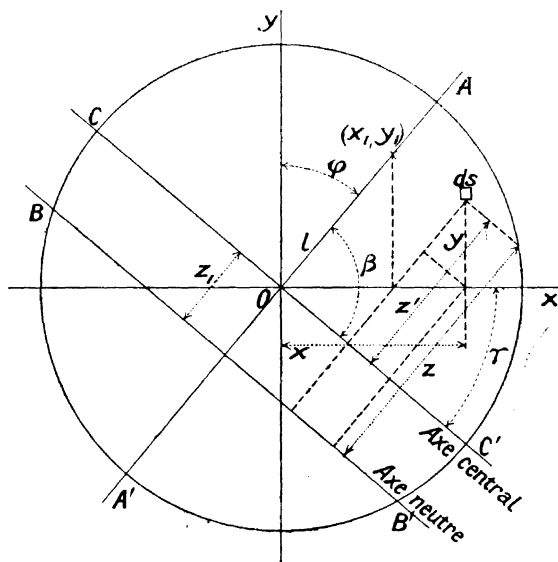


Fig. 186.

dans tous les éléments ds par rapport à OX et OY doit faire équilibre aux composantes du moment extérieur M , qui agit dans le plan AA' , par rapport aux mêmes axes. La composante de M par rapport à OX est $M \cos \varphi$; la composante par rapport à OY est $M \sin \varphi$. On a donc pour la première de ces composantes :

$$M \cos \varphi = \int t ds \cdot y = \int \frac{1}{\alpha} \frac{z_1 + x \sin \gamma + y \cos \gamma}{\rho} ds \cdot y.$$

Supposons α invariable. Il vient :

$$M \cos \varphi = \frac{1}{\alpha \varphi} \left[\int z_1 y ds + \int y^2 ds \cos \gamma + \int xy \sin \gamma ds \right]$$

Mais $\int xy ds = 0$ puisque nous avons rapporté l'ellipse centrale à ses axes ; $\int y^2 ds = I^X$; $\int y ds = 0$.

Donc :

$$M \cos \varphi = \frac{1}{\alpha \varphi} \cos \gamma I_X.$$

On trouverait de même :

$$M \sin \varphi = \frac{1}{\alpha \varphi} \sin \gamma I_Y,$$

et, par une suite de développements identiques à ceux qui ont été exposés au chapitre précédent, en observant que t doit renfermer $\frac{P}{S}$:

$$t = \frac{P}{S} + \frac{M \sin \varphi}{I_Y} x + \frac{M \cos \varphi}{I_X} y.$$

La tension est donc égale au terme $\frac{P}{S}$ plus la somme des tensions dues aux moments composants suivant les deux axes OX et OY d'inertie principaux. Dans le cas d'angles saillants la tension maximum se produit généralement à l'angle saillant. La détermination de β se fait comme dans la flexion gauche simple.

Observons que si x_1 et y_1 sont les coordonnées du point d'application de l'effort P, on a :

$$P x_1 = P l \sin \varphi = M \sin \varphi$$

$$P y_1 = M \cos \varphi$$

et la formule ci-dessus peut se mettre sous la forme

$$t = P \left(\frac{x_1 x}{I_Y} + \frac{y_1 y}{I_X} + \frac{1}{S} \right).$$

Théorèmes. — I. *L'axe central et l'axe des forces extérieures sont des diamètres conjugués.* — CC' est l'axe central, AA' l'axe des forces extérieures. On a :

$$AA') \quad y = \frac{y_1}{x_1} x$$

$$BB') \quad \frac{x_1 x}{I_X} + \frac{y_1 y}{I_Y} + \frac{1}{S} = 0$$

que l'on obtient en faisant $t = 0$ dans l'équation de t . L'équation de l'axe neutre CC' sera donc

$$I_X x_1 x + I_Y y_1 y = 0$$

la démonstration s'achève comme au chapitre précédent.

II. *L'axe neutre est un axe instantané de rotation au point $x_1 y_1$ pris comme centre de percussion.* — Considérons la section comme une masse élémentaire libre dans l'espace. Supposons une percussion produite en $x_1 y_1$ et cherchons l'axe instantané correspondant. Appliquons le principe que les quantités de mouvement effectives dans les percussions se font équilibre, en tenant compte des liaisons. En appelant z la distance du point à l'axe instantané on a

$$v = kz$$

la vitesse est proportionnelle à z ; on a :

$$v = A'x + B'y + C'$$

De plus, la mécanique nous fournit les équations :

$$X = \int v ds; \quad Xx_1 = \int vx ds; \quad Yy_1 = \int vy ds.$$

Comparons ces quatre équations aux quatre suivantes qui résultent de l'équilibre des tensions :

$$t = Ax + By + C; \quad P = \int t ds; \quad Px_1 = \int tx ds; \quad Py_1 = \int ty ds.$$

Si $P = X$ en valeur numérique on a $\Lambda = \Lambda'$, $B = B'$, $C = C'$. En combinant les quatre premières équations on a donc :

$$v = X \left(\frac{x_1 x}{I_Y} + \frac{y_1 y}{I_X} + \frac{1}{S} \right)$$

et comme l'axe instantané de rotation est caractérisé par $v = 0$, son équation est :

$$\frac{x_1 x}{I_Y} + \frac{y_1 y}{I_X} + \frac{1}{S} = 0.$$

qui est également l'équation de l'axe neutre.

III. *L'axe neutre reste parallèle à lui-même, mais s'éloigne de l'axe central à mesure que $x_1 y_1$ se rapproche de l'axe central.* — L'équation de l'axe neutre correspondant à $x_1 y_1$ est

$$I_X x_1 x + I_Y y_1 y + \frac{I_X I_Y}{S} = 0 \quad (1)$$

Pour un point $x_2 y_2$ on aurait :

$$I_X x_2 x + I_Y y_2 y + \frac{I_X I_Y}{S} = 0.$$

En multipliant les deux termes de cette dernière équation par $\frac{x_1}{x_2}$, ou ce qui revient au même par $\frac{y_1}{y_2}$ on a

$$I_X x_1 x + I_Y y_1 y + \frac{I_X I_Y}{S} \frac{x_1}{x_2} = 0 \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) ont les coefficients des termes en x et y égaux ; donc les droites sont parallèles ; de plus, dans (2) le terme connu est plus grand que dans (1) ; cette droite est donc plus éloignée de l'origine que (1).

IV. *Réciprocité des axes neutres.* Si par le point $x_1 y_1$ correspondant à un axe neutre BB' on fait passer une

droite DD' , cette droite sera un axe neutre correspondant à un point x_2y_2 de BB' . On a (fig. 187)

$$BB') \quad I_x x_1 x + I_y y_1 y + \frac{I_x I_y}{S} = 0.$$

Prenons le point x_2y_2 sur BB' ; on a :

$$I_x x_2 x + I_y y_2 y + \frac{I_x I_y}{S} = 0. \quad (1)$$

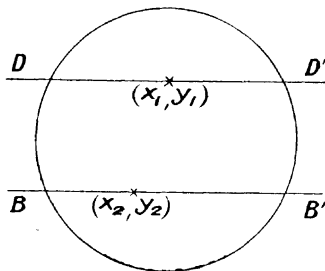


Fig. 187.

L'axe central correspondant à x_2y_2 sera

$$I_x x_2 x + I_y y_2 y + \frac{I_x I_y}{S} = 0,$$

et pour que cet axe passe par x_1y_1 il faut :

$$I_x x_1 x + I_y y_1 y + \frac{I_x I_y}{S} = 0.$$

C'est précisément la condition (1). Donc tous les axes neutres correspondant à tous les points de BB' passent par x_1y_1 ; BB' est donc le lieu de tous les points d'application correspondant à tous les axes neutres passant par x_1y_1 .

Noyau central. — Nous avons vu dans la flexion plane composée que certaines pièces ne doivent fatiguer uni-

quement que par traction ou pression. S'il s'agit de maçonneries il ne doit y avoir que travail à la compression. Dans ce cas il faut que l'axe neutre soit en dehors de la section, sans quoi la partie B (fig. 188) travaillerait

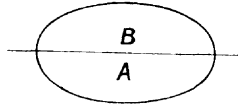


Fig. 188.

par traction, la partie A par pression. L'axe neutre doit être extérieur ou tangent extérieurement. Le *noyau central* d'une surface est le lieu de tous les points d'application correspondants à tous les axes neutres tangents extérieurement à la surface ou la rasant. Considérons

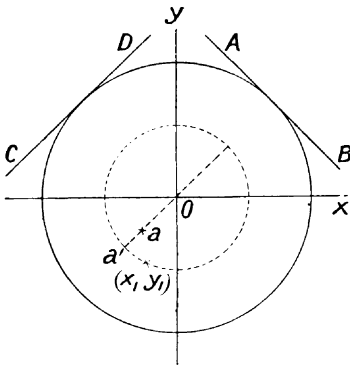


Fig. 189.

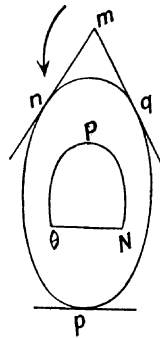


Fig. 190.

(fig. 189) une surface quelconque et déterminons son noyau central par points; OX et OY sont les axes principaux d'inertie. Menons une tangente AB à la surface.

$$AB) \quad ax + by + c = 0, \quad (1)$$

et cherchons le point d'application x_1y_1 correspondant à

l'axe neutre AB. L'équation de AB peut aussi s'écrire :

$$I_X x_1^2 + I_Y y_1^2 + \frac{I_X I_Y}{S} = 0 \quad (2)$$

en identifiant (1) et (2) on a :

$$\frac{I_X x_1}{a} = \frac{I_Y y_1}{b} = \frac{I_X I_Y}{cS} \quad (3)$$

deux équations à deux inconnues x_1 et y_1 . On peut déter-

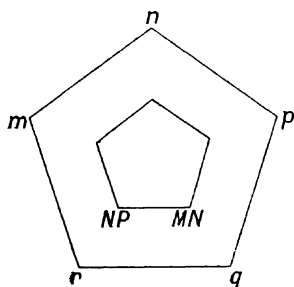


Fig. 191.

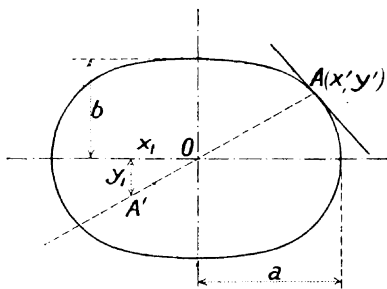


Fig. 192.

miner ainsi une série de points, ce qui donne le noyau central.

Tout point a qui se trouve à l'intérieur du noyau central a son axe neutre extérieur à la surface. Menons aOa' et soit CD l'axe neutre correspondant à a' . Si a' se rapproche de O de façon à venir en a nous avons vu que l'axe neutre s'éloigne de O parallèlement à lui-même.

Un cas particulier intéressant est celui des angles saillants. Menons (fig. 190) la tangente mn et soit X le point d'application correspondant. Chemignons dans le sens indiqué; pour la tangente en p on trouve un point P et pour la tangente en q un point Q. Il reste à fermer le noyau entre Q et X. Pour cela on mène une série de rasantes en m . Nous savons que le lieu des points d'appli-

cation correspondant à tous les axes neutres passant par un point est une droite ; il suffit donc de joindre QN.

S'il s'agit d'un polygone (fig. 191) les tangentes aux points m, n, p, q sont les côtés mêmes du polygone. Ces cinq tangentes donnent cinq points d'application N, P, M, N, N. De plus, si en chaque point m, n, p, q on mène une série de rasantes extérieures, pour la même raison que plus haut, il suffit de joindre les points MN et NP ; le noyau est un polygone de même nombre de côtés.

Passons à l'ellipse (fig. 192). Son équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Menons l'axe neutre tangent en xy' ; son équation sera

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Appliquons la formule (3) ci-dessus

$$\frac{I_x x_1 a^2}{x'} + \frac{I_y y_1 b^2}{y'} = - \frac{I_x I_y}{S}$$

d'où en remplaçant I_x, I_y et S par leur valeur

$$\frac{x_1 a^2}{x'} = \frac{\pi b a^4}{4} : x_1 = - \frac{x'}{4}$$

on trouverait de même $y_1 = - \frac{y'}{4}$. Le point d'application A' se trouve donc sur le vecteur OA et à une distance $OA' = - \frac{OA}{4}$. Le noyau central est donc une ellipse semblable à la première, mais dont les axes sont quatre fois moindres.

Voyons le rectangle (fig. 193). Menons l'axe neutre AB ou $y = \frac{h}{2}$ (1).

Appliquons les équations (3) en observant que $a = 0$, $b = 1$ et $c = -\frac{h}{2}$. La première équation devient

$$\frac{I_X c_1}{o}$$

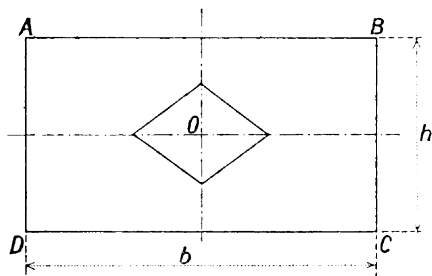


Fig. 193.

qui montre que $x_1 = o$ sans quoi on aurait l'infini. Dès lors

$$I_X y_1 = \frac{I_X I_Y}{-\frac{h}{2} bh}$$

$$y_1 = -2 \frac{I_Y}{bh^2} = -\frac{bh^2}{6bh^2} = -\frac{h}{6}$$

Pour l'axe neutre CD on trouverait $y = \frac{h}{6}$. Le noyau est donc un losange.

Nous ne nous étendons pas plus longuement sur ce sujet que nous avons d'ailleurs examiné par d'autres moyens dans la théorie de la flexion plane composée.

Calcul des résistances. — Dans le cas le plus général il conviendra de tracer l'ellipse centrale d'inertie. Ce procédé, qui est très long, peut être abrégé dans certains cas particuliers. Soit (fig. 194) un triangle ABC; nous savons que le noyau central est aussi un triangle. Cher-

choisis le point d'application correspondant à l'axe neutre AB. Observons qu'à mesure que l'on s'éloigne de AB vers C la tension t par unité de surface diminue proportionnellement à z en vertu de la formule $t = \frac{z}{\alpha \varphi}$; mais si on considère une zone A'B' le point d'application de l'effort résultant est au milieu, en D'. Donc, le point d'application de tous les efforts t exercés sur la surface se trouve sur la médiane qui est donc un premier lieu du point que

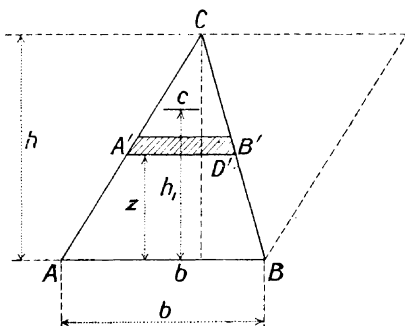


Fig. 194.

nous cherchons. Déterminons un second lieu de ce point. Pour une zone A'B' de hauteur dz la tension totale a pour expression

$$\frac{z}{\alpha \varphi} \frac{dz (h_1 - z)}{h_1} b = \frac{z}{\alpha \varphi} dz \left(1 - \frac{z}{h_1} \right) b.$$

La pression totale sur toute la surface ABC est :

$$P = \frac{b}{\alpha \varphi} \int_0^{h_1} \left(1 - \frac{z}{h_1} \right) z dz.$$

Établissons l'équation d'équilibre autour de l'axe neutre :

$$Pz_1 = \frac{b}{\alpha \varphi} \int_0^{h_1} \left(1 - \frac{z}{h_1} \right) z^2 dz.$$

Divisons membre à membre.

$$z_1 = \frac{\int_0^{h_1} \left(1 - \frac{z}{h_1}\right) z^2 dz}{\int_0^{h_1} \left(1 - \frac{z}{h_1}\right) z dz} = \frac{h_1}{2}$$

Condition qui détermine le point d'application C correspondant à AB; on trouverait de même les points d'application relatifs à BC et AC.

FLEXION DES PIÈCES PRIMITIVEMENT COURBES

Généralités. — L'axe longitudinal est une courbe à simple courbure dont le plan renferme un axe principal de toutes les sections successives et coïncide avec le plan des forces extérieures. Le cas d'un axe courbe à double courbure ne présente aucun intérêt pratique.

Les forces extérieures donnent naissance dans une section quelconque :

1° A une force F agissant au centre de gravité et qu'on peut décomposer en deux composantes :

a. Une force P tangente à l'axe longitudinal ou perpendiculaire à la section;

b. Une force T ou effort tranchant agissant dans la section;

2° A un moment fléchissant M .

Considérons (fig. 195) avec Bach deux sections voisines S et S' de la pièce primitivement courbe; ces deux sections se coupent suivant une droite projetée en O . En supposant l'effort P uniformément réparti, si les sections étaient primitivement parallèles, c'est-à-dire si l'axe de la pièce était droit, S' se déplacerait parallèlement à elle-même ou à S ; mais comme S' est inclinée sur S , elle se déplacera sous l'action de l'effort P seul, en tournant autour de l'axe O et viendra se placer en S'' , car les tensions dans la section croissent proportionnellement

avec la distance à l'axe longitudinal AB. Maintenant, du fait du moment fléchissant M, la section S' tourne sur elle-même et vient se placer en S'' , la droite d'intersec-

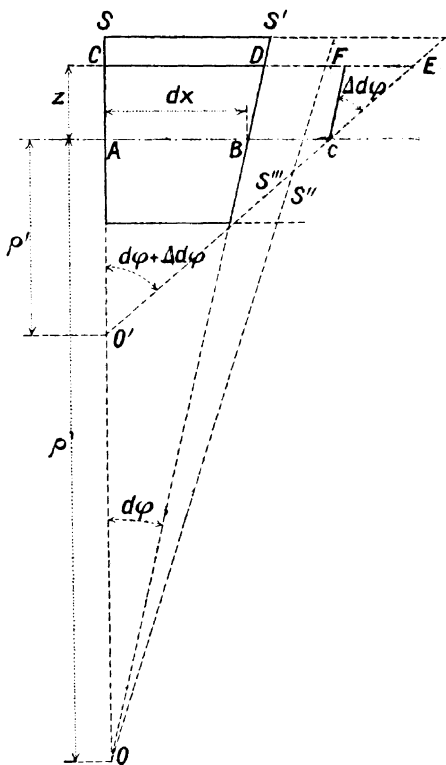


Fig. 195.

tion avec la section S étant reportée en O' . Les sections primitives faisant entre elles un angle $d\phi$, le nouvel angle sera $d\phi + \Delta d\phi$. La longueur dx de la partie de l'axe longitudinal, comprise entre S et S' , a subi une dilatation :

$$\delta_o = \frac{BC}{AB} = \frac{\Delta dx}{dx} \cdot$$

Une fibre quelconque CD, à la distance z de AB a subi un allongement $DE = DF + EF$, le point F étant obtenu en conduisant CF parallèle à S'. On a aussi :

$$DE = BC + FE = \delta_0 \cdot dx + z \text{ arc FCE}.$$

Or $dx = \rho d\varphi$, ρ rayon primitif de courbure ; arc FCE = $\Delta d\varphi$. Il viendra donc, pour la dilatation de la fibre CD :

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{DE}{CD} = \frac{\delta_0 \rho d\varphi + z \Delta d\varphi}{(\rho + z) d\varphi} \\ \delta &= \frac{\delta_0 + \frac{z}{\rho} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}}{1 + \frac{z}{\rho}} \end{aligned}$$

Appelons ω le rapport de la variation $\Delta d\varphi$ de l'angle $d\varphi$ à cet angle ; on a

$$\omega = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$$

et

$$\delta = \delta_0 + (\omega - \delta_0) \frac{\frac{z}{\rho}}{1 + \frac{z}{\rho}} \quad (1)$$

et la tension correspondante, en supposant que la matière obéisse à la loi de Hooke :

$$t = \frac{\delta}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \left[\delta_0 + (\omega - \delta_0) \frac{\frac{z}{\rho}}{\rho + z} \right] \quad (2)$$

Écrivons l'équation d'équilibre de translation le long de l'axe. Il vient :

$$P = \int t ds = \int \frac{1}{\alpha} \left[\delta_0 + (\omega - \delta_0) \frac{\frac{z}{\rho}}{\rho + z} \right] ds. \quad (3)$$

L'équation de rotation donne :

$$M = \int t ds \cdot z = \int \frac{1}{\alpha} z \left[\delta_0 + (\omega - \delta_0) \frac{\frac{z}{\rho}}{\rho + z} \right] ds. \quad (4)$$

Supposons α invariable :

$$P = \frac{1}{\alpha} \left[\delta_o \int ds + (\omega - \delta_o) \int \frac{z}{\rho + z} ds \right]$$

$$M = \frac{1}{\alpha} \left[\delta_o \int z ds + (\omega - \delta_o) \int \frac{z^2}{\rho + z} ds \right].$$

Or $\int ds = S$; $\int z ds = 0$. Posons, d'autre part :

$$\int \frac{z}{\rho + z} ds = -\gamma S \quad (5)$$

De plus,

$$\int \frac{z^2}{\rho + z} ds = \int \left(z - \rho \frac{z}{\rho + z} \right) ds = -\rho \int \frac{z}{\rho + z} ds = \gamma S \rho \quad (6)$$

On a :

$$P = \frac{S}{\alpha} \left[\delta_o - (\omega - \delta_o) \gamma \right]$$

$$M = \frac{\gamma S \rho}{\alpha} (\omega - \delta_o)$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} \omega - \delta_o &= \alpha \frac{M}{\gamma S \rho} \\ \delta_o &= \alpha \frac{P}{S} + (\omega - \delta_o) \gamma = \frac{\alpha}{S} \left(P + \frac{M}{\rho} \right) \\ \omega &= \delta_o + \alpha \frac{M}{\gamma S \rho} = \frac{\alpha}{S} \left(P + \frac{M}{\rho} + \frac{M}{\gamma \rho} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

L'équation (2) donne :

$$t = \frac{P}{S} + \frac{M}{S \rho} + \frac{M}{\gamma S \rho} \frac{z}{\rho + z} \quad (8)$$

Pour $P = 0$ on a :

$$t = \frac{M}{S \rho} + \frac{M}{\gamma S \rho} \frac{z}{\rho + z}$$

et si $z = 0$

$$t = \frac{M}{S\varphi}.$$

Done, pour un prisme à axe primitivement courbe, les tensions ne sont plus nulles sur l'axe longitudinal; l'axe neutre ne coïncide plus avec l'axe de la pièce.

Reproduisons l'équation :

$$\int \frac{z^2}{\varphi + z} ds = \gamma S \varphi.$$

Écrivons-la sous la forme :

$$\int \frac{z^2}{1 + \frac{z}{\varphi}} ds = \gamma S \varphi^2.$$

Si φ est très grand vis-à-vis de z , on peut négliger le terme $\frac{z}{\varphi}$ devant l'unité et il vient :

$$\begin{aligned} \gamma S \varphi^2 &= \int \frac{z^2}{1 + \frac{z}{\varphi}} ds = \int z^2 ds = I \\ \gamma &= \frac{I}{S\varphi^2} \\ t &= \frac{P}{S} + \frac{Mz}{I}, \end{aligned}$$

formule de la flexion plane composée.

Revenant à la figure, on reconnaît que le rayon de courbure primitif φ , a varié et a acquis la valeur φ' . On a :

$$\begin{aligned} AB &= dx = \varphi d\varphi, \\ AC &= dx + \Delta dx = \varphi' (d\varphi + \Delta d\varphi). \end{aligned}$$

Divisons par dx ou $\varphi d\varphi$:

$$1 + \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\varphi'}{\varphi} \left(1 + \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \right)$$

$$1 + \delta_o = \frac{\rho'}{\rho} (1 + \omega).$$

On a :

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{1 + \omega}{1 + \delta_o} = 1 + \frac{\omega - \delta_o}{1 + \delta_o} = 1 + \frac{M}{\chi \rho \left(\frac{S}{x} + P + \frac{M}{\rho} \right)}$$

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho} + \frac{M}{\chi \rho^2 \left(\frac{S}{x} + P + \frac{M}{\rho} \right)}$$

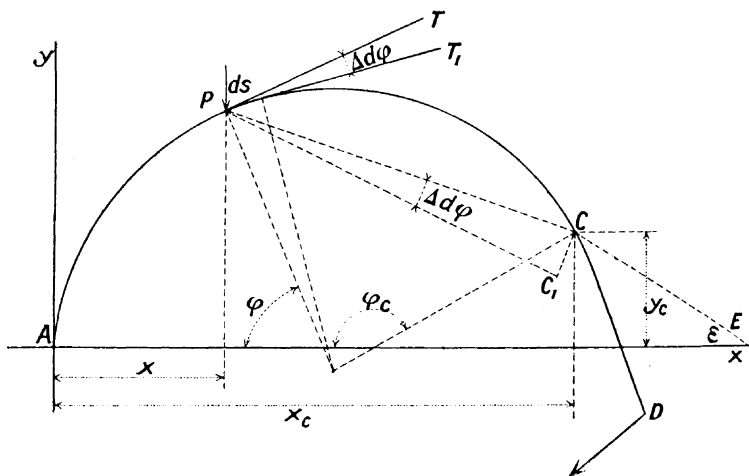


Fig. 196.

En général δ a une faible valeur et on peut poser :

$$\frac{\rho}{\rho'} = 1 + \frac{\omega - \delta_o}{1 + \delta_o} = 1 + \omega - \delta_o.$$

Reprenons l'équation :

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho} + x \frac{M}{\chi S \rho^2}$$

Si le rayon de courbure ρ est très grand vis-à-vis de z et qu'on puisse écrire $\chi S \rho^2 = I$, il viendra :

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho} + \alpha \frac{M}{I} \quad (19)$$

ou

$$M = \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) \frac{I}{\alpha}$$

Considérons maintenant (fig. 196) une pièce courbe APCD, encastrée en A et soumise à l'action d'une force extérieure à son extrémité libre D. Rapportons à deux axes rectangulaires AY, tangent à l'axe longitudinal en A, AX perpendiculaire sur AY. Un point C quelconque possède les coordonnées x_c et y_c . Sous l'action de l'effort extérieur, la forme de l'axe longitudinal varie, il en est de même des coordonnées du point C qui deviennent $x_c + \Delta x_c$, $y_c + \Delta y_c$. Soit maintenant un second point, P, de coordonnées x et y ; le rayon de courbure en P est ρ . L'élément de longueur ds , en P, a pour valeur $ds = \rho d\varphi$. Sous l'action de l'effort extérieur l'élément ds s'infléchit autour du point P; la tangente PT vient en PT_1 , $d\varphi$ devient $\Delta d\varphi = \omega d\varphi$, ds subit un allongement $\delta_0 ds$. Le point C a décrit l'arc de cercle $CC_1 = PC \cdot \Delta d\varphi$. L'abscisse du point C a pris la valeur

$$-PC \cdot \Delta d\varphi \sin \text{CEA} = -PC \sin \text{CEA} \cdot \Delta d\varphi = -(y - y_c) \Delta d\varphi.$$

Son ordonnée est devenue

$$-PC \cdot \Delta d\varphi \cos \text{CEA} = -PC \cos \text{CEA} \cdot \Delta d\varphi = -(x_c - x) \Delta d\varphi.$$

Par suite de l'allongement de ds , le point C se meut dans la direction PT; son abscisse subit un accroissement $\delta_0 ds \sin \varphi = \delta_0 dx$ et son ordonnée un accroissement $\delta_0 ds \cos \varphi = \delta_0 dy$.

L'accroissement des coordonnées x_c et y_c qui résulte de l'infléchissement de l'élément ds et de son allongement

a donc pour expression :

$$d(\Delta x_c) = -(y - y_c) \Delta d\varphi + \delta_o dx = y_c \omega d\varphi - y \omega d\varphi + \delta_o dx$$

$$d(\Delta y_c) = -(x_c - x) \Delta d\varphi + \delta_o dy = -x_c \omega d\varphi + x \omega d\varphi + \delta_o dy.$$

L'accroissement total dû à tous les éléments compris entre les points A et C est donc :

$$\Delta x_c = y_c \int_0^{z_c} \omega d\varphi - \int_0^{z_c} y \omega d\varphi + \int_0^{x_c} \delta_o dx$$

$$\Delta y_c = -x_c \int_0^{z_c} \omega d\varphi + \int_0^{z_c} x \omega d\varphi + \int_0^{y_c} \delta_o dy.$$

Dans le cas où les dimensions de toute section normale à l'axe longitudinal sont faibles vis-à-vis du rayon de courbure ρ , le terme $P + \frac{M}{\rho}$ disparaît et on a :

$$\omega = \frac{\alpha}{S} \frac{M}{\rho} = \alpha \frac{M}{I} \rho$$

Il vient :

$$\Delta x_c = \alpha \left[y_c \int_0^{z_c} \frac{M}{I} \rho d\varphi - \int_0^{z_c} y \frac{M}{I} \rho d\varphi + \int_0^{x_c} \frac{P}{S} dx \right]$$

$$\Delta y_c = \alpha \left[-x_c \int_0^{z_c} \frac{M}{I} \rho d\varphi + \int_0^{z_c} x \frac{M}{I} \rho d\varphi + \int_0^{y_c} \frac{P}{S} dy \right]$$

en négligeant $\frac{M}{\rho}$ vis-à-vis de P.

Il convient maintenant de calculer l'expression

$$\chi = -\frac{1}{S} \int \frac{z}{z + \rho} ds$$

pour différentes sections.

Section rectangulaire de largeur b , de hauteur h . Il vient :

$$S = bh; \quad ds = b dz$$

$$\chi = -\frac{1}{bh} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z}{\rho + z} b dz = -\frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 - \frac{\rho}{\rho + z}\right) dz$$

$$\chi = -1 + \frac{\rho}{h} l_n \frac{\rho + \frac{h}{2}}{\rho - \frac{h}{2}}$$

Soit

$$\frac{h}{2} = e; \quad l_n \frac{\rho + \frac{h}{2}}{\rho - \frac{h}{2}} = l_n \frac{1 + \frac{e}{\rho}}{1 - \frac{e}{\rho}}.$$

Soit $\rho > e$:

$$l_n \frac{1 + \frac{e}{\rho}}{1 - \frac{e}{\rho}} = 2 \left[\frac{e}{\rho} + \frac{1}{3} \left(\frac{e}{\rho}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{e}{\rho}\right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{e}{\rho}\right)^7 + \dots \right]$$

$$\chi = \frac{1}{3} \left(\frac{e}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{e}{\rho}\right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{e}{\rho}\right)^6 + \dots$$

Section circulaire. Section elliptique. Développons en série :

$$\chi = -\frac{1}{S\rho} \int \frac{1}{1 + \frac{z}{\rho}} z ds = -\frac{1}{S\rho} \int \left(1 - \frac{z}{\rho} + \frac{z^2}{\rho^2} - \frac{z^3}{\rho^3} + \frac{z^4}{\rho^4} - \frac{z^5}{\rho^5} + \frac{z^6}{\rho^6} \dots\right) z ds$$

$$= -\frac{1}{S\rho} \left(-\frac{1}{\rho} \int z^2 ds + \frac{1}{\rho^2} \int z^3 ds - \frac{1}{\rho^3} \int z^4 ds + \dots\right)$$

$$\chi = \frac{1}{S} \left(\frac{1}{\rho^2} \int z^2 ds - \frac{1}{\rho^3} \int z^3 ds + \frac{1}{\rho^4} \int z^4 ds - \frac{1}{\rho^5} \int z^5 ds + \dots\right).$$

Pour le cercle, par suite de symétrie, on a :

$$\int z^3 ds = 0; \quad \int z^5 ds = 0.$$

Soit r le rayon du cercle :

$$S = \pi r^2; \quad z = r \sin \varphi; \quad ds = 2r^2 \cos^2 \varphi d\varphi$$

$$\int z^2 ds = \frac{\pi}{4} r^2$$

$$\int z^4 ds = 4r^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{8} r^6$$

$$\int z^6 ds = 4r^8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{5}{64} \pi r^8$$

$$\chi = \frac{1}{\pi r^2} \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\pi}{4} r^2 + \frac{1}{\rho^4} \frac{\pi}{8} r^6 + \frac{1}{\rho^6} \frac{5}{64} \pi r^8 + \dots \right)$$

$$\chi = \frac{1}{4} \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{\rho} \right)^4 + \frac{5}{64} \left(\frac{r}{\rho} \right)^6 + \dots$$

On obtient la même valeur pour une ellipse, r représentant, dans ce cas, le demi-axe de l'ellipse qui tombe dans le plan de l'axe longitudinal de la pièce.

Trapèze avec axe de symétrie (fig. 197.)

$$S = \frac{b+b_1}{2} h; \quad ds = y dz; \quad y = b_1 + \frac{b-b_1}{h} (v'-z),$$

$$ds = \left(b_1 + \frac{b-b_1}{h} v' - \frac{b-b_1}{h} z \right) dz$$

$$\chi = - \frac{1}{S} \int \left(1 - \frac{\rho}{\rho+z} \right) ds = -1 + \frac{\rho}{S} \int \frac{ds}{\rho+z}$$

$$\int \frac{ds}{\rho+z} = \left(b_1 + \frac{b-b_1}{h} v' \right) \int_{-v}^{v'} \frac{dz}{\rho+z} - \frac{b-b_1}{h} \int_{-v}^{v'} \frac{z dz}{\rho+z}$$

$$\int_{-v}^{v'} \frac{z dz}{\rho+z} = \int_{-v}^{v'} \left(1 - \frac{\rho}{\rho+z} \right) dz = v + v' - \rho \ln \frac{\rho+v'}{\rho-v}$$

$$\int \frac{ds}{\rho+z} = \left(b_1 + \frac{b-b_1}{h} v' \right) \ln \frac{\rho+v'}{\rho-v} - \frac{b-b_1}{h} \times$$

$$\left(v + v' - \rho \ln \frac{\rho+v'}{\rho-v} \right)$$

$$= \left[b_1 + \frac{b - b_1}{h} (v' + \rho) \right] l_n \frac{\rho + v'}{\rho - v} - (b - b_1)$$

$$\chi = -1 + \frac{2\rho}{(b + b_1)h} \left[b_1 + \frac{b - b_1}{h} (v' + \rho) \right] l_n \frac{\rho + v'}{\rho - v} - (b - b_1)$$

Triangle équilatéral. — Faisons, dans cette dernière expression,

$$b_1 = 0; \quad v' = \frac{2}{3} h; \quad v = \frac{1}{3} h,$$

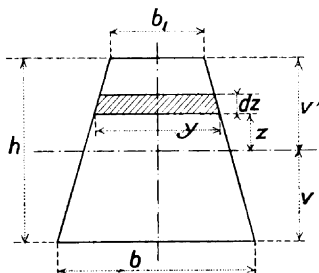


Fig. 197.

il vient :

$$\chi = -1 + \frac{2\rho}{h} \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{\rho}{h} \right) l_n \frac{1 + \frac{2}{3} \frac{h}{\rho}}{1 - \frac{1}{3} \frac{h}{\rho}} - 1 \right]$$

Section quelconque. — On divise la section en un certain nombre de bandes perpendiculaires au plan de l'axe longitudinal. Soient ΔS la surface d'une bande, z sa distance à l'axe longitudinal, positive dans un sens, négative dans l'autre sens; on cherche la valeur $\frac{z}{\rho + z} ds$ de chacun des éléments, on fait la somme algébrique et on divise par S . On obtient ainsi la valeur de χ .

CAS DÉTERMINÉS DE CHARGES

Crochet de grue. — Un crochet de grue (fig. 198) à section trapézoïde supporte une charge Q . Le moment maximum se produit dans la section BOC à laquelle se

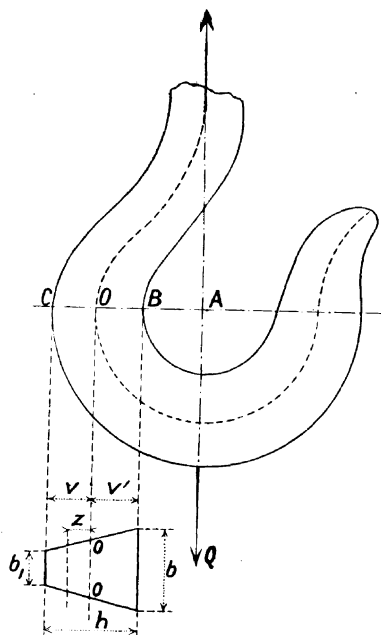


Fig. 198.

trouve aussi appliqué l'effort normal Q . L'axe du centre de gravité est ici la droite OO . La tension à la distance z de cet axe a pour expression

$$t = \frac{Q}{S} + \frac{M}{S\rho} + \frac{M}{\lambda S\rho} \frac{z}{\rho + z}$$

$$S = \frac{b + b_1}{2} h; \quad M = -Q(a + v')$$

en appelant a la distance de Q à la base b .

$$\chi = -1 + \frac{2\rho}{(b+b_1)h} \left[v + \frac{b-b_1}{h} (v+\rho) \right] l_n \frac{\rho+v}{\rho-v} - (b-b_1)'$$

Prenons, pour rayon de courbure ρ sur l'axe OO , la distance $OA = a + v'$: on a donc $v + \rho = a + h$ et $\rho - v' = a$

$$\chi = -1 + \frac{2\rho}{(b+b_1)h} \left[b_1 + \frac{b-b_1}{h} (a+h) \right] l_n \frac{a+h}{a} - (b-b_1)'$$

$$\chi = -1 + \frac{2\rho}{(b+b_1)h} \left\{ \left[b \left(1 + \frac{a}{h} \right) - b_1 \frac{a}{h} \right] \times \right. \\ \left. l_n \left(1 + \frac{h}{a} \right) - (b-b_1)' \right\}$$

Si $h = 2a$ et $b = 3b_1$,

$$v' = \frac{h}{3} \frac{b+2b_1}{b+b_1} = \frac{h}{3} \frac{5}{4} \frac{b_1}{b_1} = \frac{5}{12} h = \frac{5}{6} a$$

$$\rho = a + v' = \frac{11}{6} a.$$

Il vient :

$$\chi = -1 + \frac{11}{24} (4l_n 3 - 2) = 0,0974$$

$$\frac{1}{\chi} = 10,27$$

$$\rho = a + v' = \frac{11}{6} a.$$

On a, pour la tension :

$$t = -10,27 \frac{Q}{S} \frac{z}{\frac{11}{6} a + z}$$

Par suite :

$$\text{Pour } z = -v' = -\frac{5}{6} a, \quad t = +8,56 \frac{Q}{S} \text{ (au point B)}$$

$$z = -\frac{3}{6} a, \quad t = +3,83 \frac{Q}{S}$$

$$\begin{aligned}
 z &= 0, & t &= 0 \\
 z &= +\frac{3}{6} a, & t &= -2,20 \frac{Q}{S} \\
 z &= c = +\frac{7}{6} a, & t &= -3,99 \frac{Q}{S} \text{ (au point C)}
 \end{aligned}$$

Représentons (fig. 199) ces tensions par la courbe AOE obtenue en élevant des normales à la ligne moyenne du

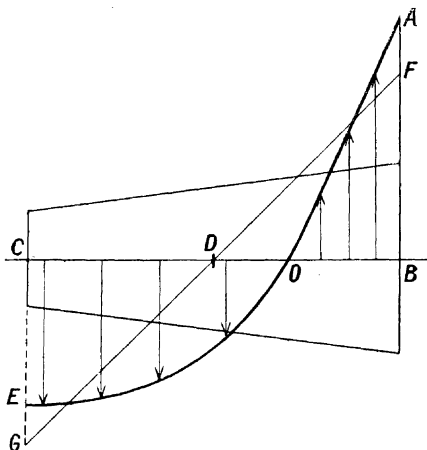


Fig. 199.

trapèze, égales aux tensions ; pour le point B on a $BA = +8,56 \frac{Q}{S}$; en C il vient $CE = -3,99 \frac{Q}{S}$.

Si la section BOC était considérée comme travaillant à la flexion plane composée on aurait :

$$\frac{I}{v'} = \frac{11}{30} b_1 h^2 = \frac{11}{60} Sh = \frac{11}{30} aS.$$

La tension au point B serait :

$$t = \frac{Q}{S} + \frac{Q \frac{11}{6} a}{\frac{1}{v'}} = \frac{Q}{S} + 5 \frac{Q}{S} = +6 \frac{Q}{S}$$

et au point C :

$$t = \frac{Q}{S} - \frac{Q \frac{11}{6} a}{\frac{I}{r}} = \frac{Q}{S} - 7 \frac{Q}{S} = -6 \frac{Q}{S}.$$

La ligne représentant la tension calculée de cette manière est la droite FDG. On voit que la tension en B, déterminée comme si la pièce travaillait à la flexion plane composée, est de

$$100 \frac{8,56 - 6}{8,56} = 30 \text{ p. } 100$$

plus faible que celle déterminée en supposant la pièce primitivement courbe. De plus, l'effort de traction en B n'est nullement égal à l'effort de pression en C ; le premier a pour valeur $8,56 \frac{Q}{S}$ et le second $3,99 \frac{Q}{S}$, soit 100 p. 100 plus petit que l'effort de traction. On ne peut considérer avec approximation la pièce comme travaillant à une charge excentrée que si le rayon de courbure ρ est très grand. Il convient donc de faire la courbure la plus faible possible, c'est-à-dire de reporter le centre de courbure beaucoup à droite du point A.

Cylindre chargé. — Considérons (fig. 200) un cylindre chargé longitudinalement d'un poids $2Q$ par unité de longueur. Les quatre portions AB, BC, CD et DA se comportent identiquement et il n'y a lieu de considérer que l'un de ces quarts, AB par exemple. Nous supposons que AB est fixé en A et que, en B, agit un effort Q donnant lieu d'ailleurs à un moment M considéré comme positif ou négatif suivant qu'il a une tendance à augmenter ou à diminuer la courbure. Considérons une section COC quelconque (fig. 201) faisant l'angle φ avec la section MB. On peut appliquer à cette section deux efforts égaux et con-

traires à Q ; cette section est donc soumise à un effort normal $P = -Q \cos \varphi$, à un moment fléchissant $M_c = M - Qr(1 - \cos \varphi)$ et à un effort tranchant $T = Q \sin \varphi$ que nous négligeons. La tension a pour expression

$$t = \frac{P}{S} + \frac{M_c}{Sr} + \frac{M_c}{\gamma Sr} \frac{z}{r+z},$$

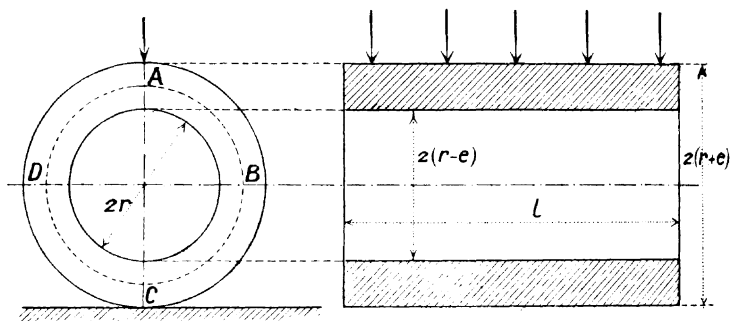


Fig. 200.

S représentant la section par unité de longueur du cylindre. Par suite :

$$St = -Q \cos \varphi + \frac{M}{r} - Q + Q \cos \varphi + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{M}{r} - Q + Q \cos \varphi \right) \frac{z}{r+z}$$

$$St = \frac{M}{r} - Q + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{M}{r} - Q + Q \cos \varphi \right) \frac{z}{z+r}.$$

M est inconnu. Nous allons le déterminer.

Soit $C_1 O_1 C_1$ une seconde section infiniment voisine de la première et formant avec celle-ci l'angle $d\varphi$ avant l'application de la charge. Une fois celle-ci appliquée l'angle $d\varphi$ varie de

$$\Delta d\varphi = \omega d\varphi.$$

Reprenons l'expression de St :

$$St = -\frac{2Q}{(1+\gamma)\pi} + \frac{1}{\gamma} \left(-\frac{2Q}{(1+\gamma)\pi} + Q \cos \varphi \right) \frac{z}{r+z}$$

$$t = \frac{Q}{S} \left[-\frac{2}{(1+\gamma)\pi} + \frac{1}{\gamma} \left(-\frac{2}{(1+\gamma)\pi} + \cos \varphi \right) \frac{z}{r+z} \right]$$

Pour une section rectangulaire :

$$\gamma = \frac{1}{3} \left(\frac{e}{r} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{e}{r} \right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{e}{r} \right)^6 + \dots$$

$$\text{Soit } \frac{e}{r} = \frac{1}{5},$$

$$\gamma = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{5} \right)^6 + \dots = 0,01366.$$

Donc :

$$t = \frac{Q}{S} \left[-0,63 + 73,2 \left(-0,63 + \cos \varphi \right) \frac{z}{5e+z} \right].$$

Les valeurs limites correspondent à $\varphi = 0$ (section en B),
 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (section en A), ainsi que pour $z = \pm e$. On a,
 pour la section en B où $\varphi = 0$, pour la fibre interne,
 $z = -e$:

$$t_i = -\frac{Q}{S} \left(0,63 + 73,2 \cdot 0,37 \frac{1}{4} \right) = -7,40 \frac{Q}{S}$$

et, pour la fibre externe, $z = +e$:

$$t_{ex} = \frac{Q}{S} \left(-0,63 + 73,2 \cdot 0,37 \frac{1}{6} \right) = +3,88 \frac{Q}{S}.$$

Pour la section en A, où $\varphi = \frac{\pi}{2}$, pour la fibre interne,
 $z = -e$:

$$t_i = \frac{Q}{S} \left(-0,63 + 73,2 \cdot 0,63 \frac{1}{4} \right) = +10,90 \frac{Q}{S}$$

et, pour la fibre externe, $z = + e$:

$$t_{ee} = - \frac{Q}{S} \left(0,63 + 73,2 \cdot 0,63 \frac{1}{6} \right) = - 8,32 \frac{Q}{S} .$$

Le plus grand effort se produit donc dans la section A, vers l'intérieur du cylindre où la tension de traction, tangentielle, acquiert la valeur $10,90 \frac{Q}{S}$. Dans la même section, vers l'extérieur, règne une tension de compression égale à $8,32 \frac{Q}{S}$. Dans la section B, une tension de pression existe vers l'intérieur; elle a pour valeur $7,40 \frac{Q}{S}$; vers l'extérieur, règne une tension de traction égale à $3,88 \frac{Q}{S}$. Dans les deux sections il existe donc un endroit où la tension est nulle. La position de l'axe neutre correspondant, pour la section B, où $\varphi = 0$, est donnée par la condition :

$$0 = - 0,63 + 73,2 \cdot 0,37 \frac{z}{3e + z} ,$$

d'où

$$z = 0,12 e$$

et, pour la section A, où $\varphi = \frac{\pi}{2}$, l'axe neutre est déterminé par la condition :

$$0 = - 0,63 - 73,2 \cdot 0,63 \frac{z}{3e + z} ,$$

d'où :

$$z = - 0,067 e .$$

Observons que si on fait $z = 0$ on a :

$$t = - 0,63 \frac{Q}{S} .$$

donc la tension ici est indépendante de φ ; par conséquent, en tous points de la directrice moyenne du cylindre, il y a *compression constante*. De même il existe une section dans chacune des quatre portions du cylindre pour laquelle il y a *compression constante* en tous points. Posons

$$\cos \varphi = \frac{2}{(1 + \lambda) \pi} = 0,63$$

il vient :

$$t = - \frac{Q}{S} \frac{2}{(1 + \lambda) \pi} = - 0,63 \frac{Q}{S} .$$

On peut déterminer le lieu des points où, dans toute section normale à l'axe du cylindre, la tension est nulle. En faisant $t = 0$ on a :

$$\sigma = - \frac{2}{(1 + \lambda) \pi} + \frac{1}{\lambda} \left(- \frac{2}{(1 + \lambda) \pi} + \cos \varphi \right) \frac{z}{r + z},$$

d'où :

$$\cos \varphi = \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{\lambda}{1 + \lambda} \frac{r}{z} \right) = 0,64 + 0,043 \frac{e}{z}$$

ou

$$z = r \frac{\lambda}{1 + \lambda} \frac{1}{\frac{\pi}{2} \cos \varphi - 1} = 0,0675 e \frac{1}{\frac{\pi}{2} \cos \varphi - 1} .$$

Pour les fibres internes, c'est-à-dire pour $z = -e$, $t = 0$ si

$$\cos \varphi = 0,64 - 0,043 = 0,597.$$

Pour les fibres externes, c'est-à-dire pour $z = +e$, $t = 0$, si

$$\cos \varphi = 0,64 + 0,043 = 0,683.$$

Avec $\cos \varphi = 0,5$ on a $t = 0$ pour

$$z = 0,0675 \frac{1}{\frac{\pi}{4} - 1} e = - 0,31 e$$

et avec $\cos \varphi = 0,8$, $t = 0$ si

$$z = 0,0675 \frac{1}{0,4 \pi - 1} e = + 0,26 e$$

ESSAIS DE PIÈCES PRIMITIVEMENT COURBES SOUMISES A LA FLEXION

I. Cylindres creux en fonte. — Les essais effectués par Bach ont montré que la rupture se produisait bien en même temps dans les sections A et C (fig. 200); la croûte de fonte diminue la résistance de 10 à 15 p. 100; il y a donc avantage à tourner extérieurement et même intérieurement les cylindres. Toutes les fontes n'ont pas montré la même résistance, ce qui est dû à la variabilité du coefficient α . Les sections sont restées très approximativement circulaires. Enfin il a été constaté que la résistance de la fonte travaillant dans ces conditions était en moyenne 2,22 fois sa résistance à la traction comme prisme droit.

II. Essais pour vérifier la loi de répartition des tensions.
— Dans l'étude de la flexion on a admis jusqu'ici : 1° que les sections transversales restent planes; 2° la loi de Hooke. Ces deux hypothèses conduisent aux résultats suivants :

A. Pièces primitivement droites, dans le cas où le plan des forces extérieures renferme un axe principal des sections successives. *a.* L'axe neutre passe par le centre de gravité et coïncide avec le second axe principal de la section; *b.* Les tensions t croissent proportionnellement à la distance z à l'axe neutre de sorte que si t_1 est la tension à l'unité de distance, la tension à la distance z sera $t = t_1 z$. La loi des tensions est donc une ligne droite.

B. *Pièces primitivement courbes*, dans le cas où l'axe longitudinal est une ligne à simple courbure dont le plan renferme un axe principal de toutes les sections successives et coïncide avec le plan des forces extérieures. *a.* Le second axe principal des sections n'est plus l'axe neutre; *b.* Les tensions t ne croissent plus proportionnellement avec la distance z à l'axe neutre, mais plus rapidement du côté du centre de courbure et plus lentement de l'autre côté.

La différence entre les résultats obtenus dans l'un et l'autre cas, quoique en partant d'hypothèses semblables, provient de ce que les fibres ont toutes même longueur entre deux sections consécutives d'un prisme droit alors que cette longueur varie entre deux sections d'un prisme courbe. Si une fibre courte est soumise au même effort qu'une longue, la dilatation spécifique qu'elle éprouve est plus considérable de même que la tension qui en est la cause.

Föppl admet pour les pièces primitivement courbes une répartition des tensions d'après la loi $t = t_1 z$; hypothèse qui entraîne, étant donnée la loi de Hooke que cet auteur conserve, la courbure des sections primitivement droites sous l'action du moment fléchissant. Föppl base cette hypothèse sur divers essais qu'il a effectués avec des cylindres d'acier aux extrémités desquels avant essai il a marqué des cercles concentriques et des rayons équidistants. Il a constaté, après essai, que les rayons du milieu des quatre cadrans avaient pris la forme d'S. D'après cet auteur, la répartition linéaire des actions moléculaires est aussi vraisemblable dans les prismes à axe courbe que dans le cas de prismes à axe rectiligne et on pourrait appliquer sans changement la formule relative aux actions moléculaires dans les pièces droites, c'est-à-dire $t = \frac{Mz}{I}$; la variation $\Delta d\varphi$ de l'angle $d\varphi$ des plans de deux sections

est remplacée dans les calculs par la variation de l'angle compris entre deux tangentes infiniment voisines de la fibre neutre; cette variation se calcule à l'aide de l'équation

$$\Delta d\varphi = ds \frac{Mx}{I}$$

dans laquelle ds est la longueur de l'élément de fibre

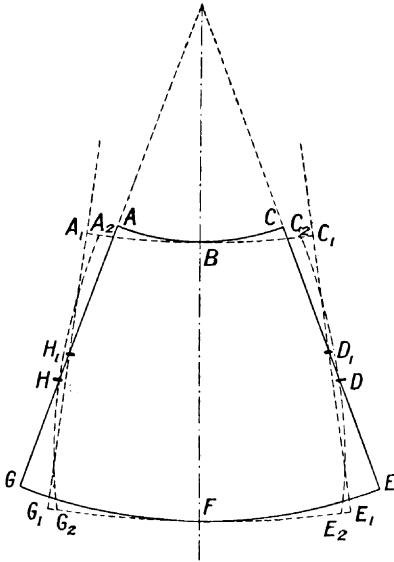


Fig. 202.

neutre. Bach discute longuement cette hypothèse de la répartition des tensions en ligne droite et préfère prendre comme point de départ l'hypothèse de Bernoulli ou des sections restant planes. Il arrive ainsi à des formules plus compliquées mais, dit-il, plus exactes. Considérons (fig. 202) un élément ABCDEFGH de prisme soumis à la flexion; AHG et CDE sont deux sections primitivement droites. Dans l'hypothèse où les sections restent planes, la

section AHG tourne autour du point H, où se projette l'axe neutre et vient en $A_1H_1G_1$; la section CDE tourne autour de l'axe neutre D_1 relatif à cette section et vient en $C_1D_1E_1$. Supposons maintenant avec Föppl que les sections ne restent pas planes et que la répartition obéisse à la loi $t = t_1 z$; les fibres les plus longues se raccourcissent le plus, les fibres les plus courtes s'allongeront le moins; les sections prendront les formes courbes A_2HG_2 et C_2DE_2 représentées en trait mixte; elles présenteront donc leur concavité vers la section moyenne BF. On voit bien que, sous l'action du moment fléchissant seul, les sections n'ont aucune tendance à prendre la forme en S. Cette dernière forme trouvée dans les essais est le résultat de l'effort tranchant qui intervient aussi, comme on a vu, dans la flexion des prismes droits. L'effort tranchant peut acquérir souvent une très grande valeur et il intervient alors, comme il a été observé dans l'étude de la flexion, pour faire courber les sections.

Il résulte d'essais de Bach sur des pièces en fonte en forme d'U à branches rapprochées, soumises à la flexion par l'écartement des branches de l'U, que l'hypothèse d'une répartition linéaire des tensions doit être écartée, les efforts auxquels résistent les sections dangereuses étant évalués dans ce cas en moyenne 33 p. 100 trop bas. Avec des U à branches écartées, la rupture dans l'hypothèse d'une répartition linéaire devait se produire au milieu de la partie droite qui réunit les deux branches, alors qu'en réalité elle se produit aux coudes de raccordement de cette partie droite avec les branches; les efforts ici sont encore évalués en moyenne 31,5 p. 100 trop bas. L'écart est d'autant plus considérable que la largeur de la pièce dans le sens des rayons de courbure est plus grande par rapport à ce rayon.

ÉTUDE DU CISAILLEMENT PAR LA THÉORIE MATHÉMATIQUE
DE L'ÉLASTICITÉ

Considérons (fig. 203) un prisme à section rectangulaire, le plus grand côté étant parallèle à l'axe OX de la pièce ; les axes OY et OZ sont dans une section. Cherchons les conditions pour qu'une section descende d'une certaine

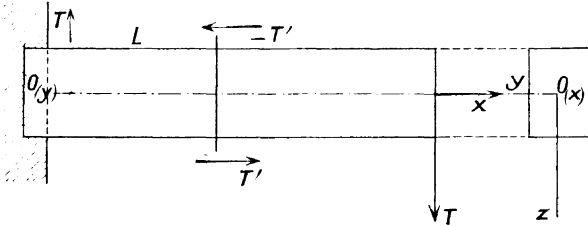


Fig. 203.

quantité parallèlement à l'axe des Z. Par hypothèse on a

$$u = 0; \quad v = 0; \quad w = f(x).$$

Cette déformation est-elle théoriquement possible ? Il vient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

donc

$$e = 0.$$

De plus

$$t_x = \lambda e + 2\mu$$

$$t_y = 0$$

$$t_z = 0.$$

Quant aux composantes tangentielles, elles deviennent :

$$\theta_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

$$\theta_{zy} = \mu \left(\frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x} \right) = 0$$

$$\theta_{xz} = \mu \left(\frac{\delta w}{\delta u} + \frac{\delta u}{\delta z} \right) = \mu f'(x).$$

Enfin les équations d'équilibre sont : $X = 0$; $Y = 0$; $\mu f'(x) + Z = 0$. Nous négligeons le poids de la pièce, donc $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ et

$$f''(x) = 0$$

d'où

$$f'(x) = \alpha_1$$

α_1 étant une constante et

$$f(x) = \alpha_1 x + \beta.$$

La section d'encastrement est immobile ; pour $x = 0$, $w = 0$; or $w = f(x)$, donc

$$w = \alpha_1 x + \beta_1.$$

On a $\beta_1 = 0$
donc

$$w = \alpha_1 x.$$

On trouve :

$$t_x = t_y = \theta_{zx} = \theta_{xy} = \theta_{yz} = 0$$

$$\theta_{xz} = \mu \alpha_1.$$

Les équations de la force élastique en un point deviennent :

$$X = p\mu\alpha_1 ; \quad Y = 0 ; \quad Z = m\mu\alpha_1.$$

Considérons en premier lieu la face du prisme parallèle au plan des ZX, donc normale sur OY ; $m = 0$; $n = 1$; $p = 0$; pour cette face on a donc

$$X = Y = Z = 0.$$

Aucune force n'agit sur les deux faces normales sur OY. Voyons maintenant les faces parallèles au plan YZ ou normales sur OX. Pour la face de l'extrémité libre $m = 1, n = 0, p = 0$; donc

$$X = Y = 0; \quad Z = \mu\alpha_1.$$

Sur cette face intervient donc une force parallèle à l'axe des Z et positive; soit T la résultante, b et c les dimensions de la section :

$$T = Zbc = \mu\alpha_1 bc.$$

Dans la face d'encastrement $m = -1, n = 0, p = 0$

$$-T = -\mu\alpha_1 bc.$$

Dans la face supérieure, parallèle aux XY ou normale sur OZ : $m = 0, n = 0, p = -1$

$$X = -\mu\alpha_1; \quad Y = Z = 0 \\ -T' = -\mu\alpha_1 bL$$

Dans la face inférieure :

$$T' = \mu\alpha_1 bL.$$

Les deux forces T et $-T$ constituent un couple de moment $T \cdot L$; les deux forces T' forment également un couple $T' \cdot c$; la condition d'équilibre est

$$T \cdot L = T'c,$$

équation vérifiée puisqu'on a

$$\mu\alpha_1 bcL = \mu\alpha_1 bLc.$$

Soit s le glissement total du prisme ou $s = \alpha_1 L$, ou valeur de $w = \alpha_1 x$ pour $x = L$. Il vient :

$$\alpha_1 = \frac{s}{L} \\ T = \mu \frac{s}{L} S$$

si $S = bc$; T est ce que nous avons appelé *l'effort tranchant*, l'inverse $\frac{1}{\mu}$ de μ est le *coefficient de glissement* β .

Nous avons trouvé, d'autre part, la relation

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{3\lambda + 2\mu}{1 + \frac{\lambda}{\mu}}.$$

Dans l'hypothèse de Poisson $\lambda = \mu$, on aurait

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{5\mu}{2} = \frac{5}{2} \frac{1}{\beta}$$

ou

$$\beta = \frac{5}{2} \alpha$$

ou, en nous servant des notations modules :

$$G = \frac{2}{5} E.$$

ÉTUDE DE LA FLEXION PAR LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉLASTICITÉ

Considérons (fig. 204 et 205) une pièce prismatique soumise à l'action d'un couple agissant normalement sur les sections, l'encastrement étant un couple égal et contraire au précédent. La fibre moyenne s'infléchit, un point M vient en M' , $OM = x$; $MM' = w$. Si on regarde l'axe OM' comme un arc de cercle de rayon R , on pourra écrire :

$$x^2 = w(2R - w)$$

w est très petit et on a

$$\begin{aligned} x^2 &= 2R \cdot w \\ w &= \frac{x^2}{2R} = ax^2. \end{aligned}$$

Il vient donc : $u = 0$; $v = 0$; $w = ax^2$ pour la fibre

moyenne seulement. En vue de satisfaire aux équations d'élasticité, posons

$$w = ax^2 - by^2 - fz^2$$

$$u = cxz$$

$$v = dyz$$

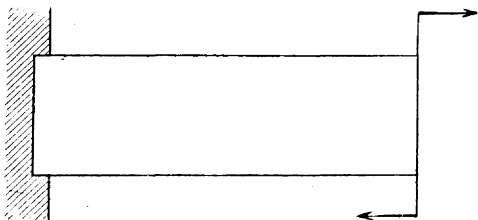


Fig. 204.

pour un point quelconque et déterminons les cinq coefficients a , b , f , c , d par la condition du problème qui est

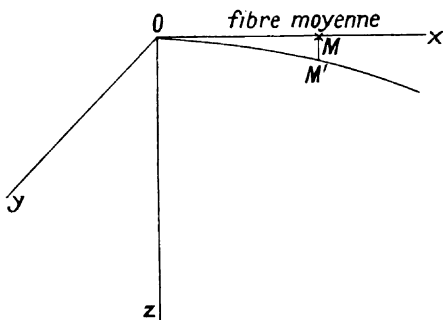


Fig. 205.

qu'il n'existe pas de force le long de la surface latérale et que les bases sont soumises à l'action de couples dont les plans sont normaux sur ces bases. Il vient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = cz; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = dz; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -2fz$$

$$c = z(c + d - 2f).$$

Les composantes agissant sur trois éléments perpendiculaires ont pour valeur :

$$\begin{aligned}
 t_x &= \lambda e + 2\mu \frac{\delta u}{\delta x} = \lambda z(c + d - 2f) + 2\mu zc = z[\lambda(c + d - 2f) + 2\mu c] \\
 t_y &= z[\lambda(c + d - 2f) + 2\mu d] \\
 t_z &= z[\lambda(c + d - 2f) - 4\mu f] \\
 \theta_{xy} &= \theta_{yx} = \mu \left(\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \right) = 0 \\
 \theta_{yz} &= \theta_{zy} = \mu \left(\frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} \right) = \mu y(d - 2b) \\
 \theta_{xz} &= \theta_{zx} = \mu \left(\frac{\delta w}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta z} \right) = \mu x(c + 2a).
 \end{aligned}$$

Les équations d'équilibre sont vérifiées pour $X = Y = Z = 0$, ce que nous avons supposé; négligeons comme d'habitude le poids du corps. Les forces sont nulles pour la face latérale du prisme; pour cette face, la normale est perpendiculaire sur OX et $m = 0$; $n^2 + p^2 = 1$; X , Y et Z doivent être nulles; donc :

$$\begin{aligned}
 \lambda(c + d - 2f) + 2\mu d &= 0 \\
 \lambda(c + d - 2f) - 4\mu f &= 0 \\
 d - 2b &= 0 \\
 c + 2a &= 0.
 \end{aligned}$$

Calculons quatre des coefficients, c , d , b , f en fonction du cinquième a . Posons :

$$\frac{\lambda}{2\mu} = \Sigma;$$

on trouve :

$$\begin{aligned}
 d = 2b = -2f &= \frac{2a\Sigma}{1 + 2\Sigma} \\
 c &= -2a.
 \end{aligned}$$

De plus

$$u = -2axz$$

Or $\int z ds = 0$, le centre de gravité de la section étant sur OX. Les forces se ramènent donc à un couple dont le plan est normal sur la section puisque ce couple provient de forces toutes perpendiculaires sur cette section. Soit M sa valeur et projetons sur OY et OZ.

$$M \cos \alpha = \int Xz ds = -2a \frac{1}{\alpha} \int z^2 ds$$

$$M \sin \alpha = - \int Xy ds = 2a \frac{1}{\alpha} \int zy ds$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{- \int zy ds}{\int z^2 ds} .$$

On peut se donner M et α ; l'une des formules précédentes fournira a et le problème est résolu. L'étude de la flexion par la théorie de l'élasticité se poursuit de la même façon que la théorie élémentaire que nous avons longuement exposée.

CHAPITRE IV

TORSION

Définitions. — Un prisme droit est soumis à torsion quand les forces extérieures donnent naissance dans chaque section à un couple dont le plan est perpendiculaire à l'axe du prisme. Les sections successives subissent donc un glissement transversal les unes par rapport aux autres. Dans ce qui suit nous désignerons par :

M' le moment du couple de torsion dû aux forces extérieures ; I_Y et I_X les deux moments d'inertie principaux de la section considérée ;

I_p le moment d'inertie polaire ;

S la surface de la section ;

θ la tension de glissement en un point quelconque de la section ;

γ''' l'effort admissible de la matière à la torsion ;

β le coefficient de glissement, considéré comme invariable ;

$\gamma = \beta\theta$ le glissement d'un point quelconque de la section ;

l la longueur de la pièce prismatique droite ;

δ l'angle de torsion ou angle dont a tourné le système d'axes principaux d'une section par rapport au même système dans une section située à la distance l de la première.

PRISMES CIRCULAIRES ET ANNULAIRES

Formules fondamentales. — Le couple de forces PP (fig. 206) est dans un plan perpendiculaire sur l'axe droit; son moment M fait équilibre aux tensions développées

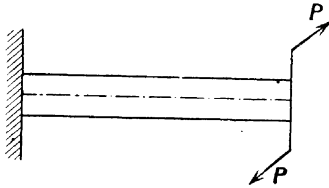


Fig. 206.

dans la pièce dont les sections tournent par rapport l'une à l'autre. Dessinons sur la pièce, supposée de section

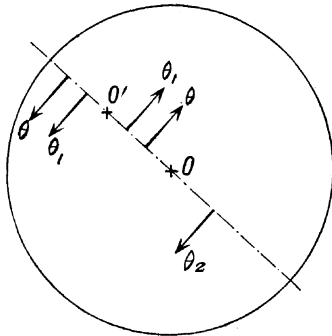


Fig. 207.

circulaire constante, et avant la torsion, une série de génératrices équidistantes et de directrices également équidistantes : nous formons ainsi toute une série de carrés curvilignes égaux. Soumettons la pièce à torsion.

Nous observons :

1° Que les directrices sont restées planes et normales à l'axe du prisme ;

2° Que deux sections consécutives ont tourné proportionnellement à leur distance au point d'application du couple ;

3° Que les carrés curvilignes sont devenus des losanges curvilignes.

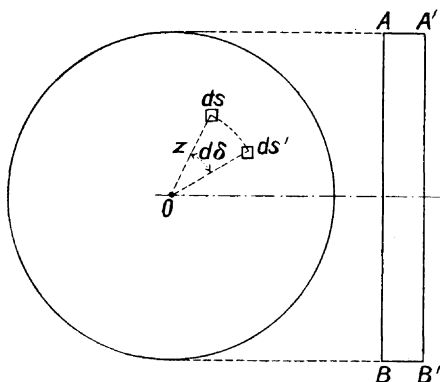


Fig. 208.

On peut donc conclure que le centre de rotation de chaque section se confond avec le centre de la circonférence. Ce résultat était à prévoir. Supposons en effet le centre de rotation en O' (fig. 207) en dehors du centre du cercle et considérons deux efforts tangentiels θ de part et d'autre de O' . Ces deux tensions forment un couple ; il en est de même de deux tensions symétriques θ_1 . Mais si on prend une tension θ_2 à droite de O il n'y a plus de tension qui lui corresponde à gauche. Il se produirait donc un couple résultant de tous les couples $\theta_1\theta_1$ et ce couple ferait équilibre au couple extérieur ; il se produirait de plus une force résultante des forces telles que θ_2 et à laquelle aucune force extérieure ne ferait équilibre. Le centre de rotation est donc bien le centre O du cercle.

Considérons maintenant (fig. 208) deux sections voisines AB et A'B', AB étant supposée fixe ; A'B' tourne d'un angle $d\delta$ par rapport à AB. Un élément ds , à la distance z du centre, vient en ds' après avoir décrit un arc de cercle. Le déplacement par glissement est :

$$g = zd\delta$$

d'où :

$$\gamma = \frac{zd\delta}{dx}$$

$d\delta$ est un arc dans une circonférence de rayon égal à l'unité. La tension tangentielle sera donc :

$$\theta = \frac{zd\delta}{\beta dx} \quad (4)$$

équation fondamentale de la torsion. Établissons l'équilibre entre les tensions intérieures et les forces extérieures. Il vient :

$$M' = \int \theta ds \cdot z = \frac{d\delta}{\beta dx} \int z^2 ds = \frac{1}{\beta} \frac{d\delta}{dx} I_p$$

On tire de là :

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{\beta M'}{I_p} \quad (1)$$

En combinant (1) et (4) il vient :

$$\theta = \frac{Mz}{I_p}, \quad \text{d'où} \quad \theta_v = \frac{M'v}{I_p}.$$

Le quotient $\frac{I_p}{v}$ s'appelle *module de torsion*. Dans le cercle on a $I_p = \frac{\pi v^4}{2}$ et pour une surface annulaire $I_p = \frac{\pi}{2} (v^4 - v_0^4)$.

Section de plus grande résistance. — C'est une section qui, à moment et à surface donnés, subit un θ_v maximum

ou qui, à surface et à tension données, résiste au plus grand moment de torsion. A surface égale une section annulaire est plus résistante qu'une section circulaire, car on a respectivement les deux formules :

$$\theta_v = \frac{2M'}{\pi v^3 (1 - k^4)} \quad \text{et} \quad \theta_v = \frac{2M'}{\pi v^3},$$

en posant $k = \frac{v_0}{v}$; de plus, la formule $M' = \int \theta ds$, montre que la section annulaire de plus grande résistance serait celle pour laquelle z serait infini, donc pour laquelle tous les éléments seraient rejetés à l'infini.

Section d'égale résistance. — Toutes les sections sont d'égale résistance.

Angle de torsion. — On appelle $d\delta$ la différentielle de l'angle de torsion. L'angle δ que fait une section avec une autre prise pour origine est l'angle de torsion. L'angle δ_i des deux sections extrêmes est l'angle de torsion total. C'est la longueur d'arc dans une circonférence de rayon égal à l'unité, correspondant à δ° . On a, en appelant δ cette longueur :

$$\frac{\delta}{2\pi} = \frac{\delta^\circ}{360^\circ} ; \quad \text{d'où} \quad \delta = \frac{2\pi}{360} \delta^\circ.$$

On peut écrire :

$$\delta = \int \frac{d\delta}{dx} dx.$$

Supposons $\frac{\beta M'}{I_p} = \frac{d\delta}{dx}$ constant ; c'est-à-dire toutes les sections ayant même diamètre ; il vient :

$$\delta = \frac{\beta M'}{I_p} x$$

résultat corroboré, comme nous avons vu, par la pratique.

Si $\frac{\beta M'}{I_p}$ n'est pas constant :

$$\delta = \int \frac{\beta M'}{I_p} dx.$$

De plus, à la distance l , on aura :

$$\delta_l = \int_0^l \frac{\beta M'}{I_p} dx$$

et, si $\frac{\beta M'}{I_p}$ est constant :

$$\delta_l = \frac{\beta M' l}{I_p}.$$

Observons que dans la torsion, à un effort tangentiel θ dans une section, correspond un effort longitudinal équivalent (Réciprocité des efforts tangentiels). Pour les sections transversales le glissement se réduit à un déplacement par rapport à un axe ; pour les sections longitudinales ou sections déterminées par des plans diamétraux, le glissement se réduit à une rotation autour de l'axe de la pièce. Dès lors une génératrice du cylindre devient une hélice par la torsion, si $\frac{\beta M'}{I_p}$ est constant, ce que nous a montré l'expérience ; si $\frac{\beta M'}{I_p}$ est variable, la courbe devient gauche et elle se rapproche plus ou moins de l'hélice. Un plan diamétral devient un hélicoïde à plan directeur ou une surface gauche se rapprochant plus ou moins de l'hélicoïde.

Il résulte de ce qui précède que si nous découpons dans le cylindre soumis à torsion un élément de volume ACDBEF (fig. 209) délimité par les plans ACD et BEF normaux sur l'axe et par les plans axiaux ABFD, ABEC, la loi de répartition des tensions de glissement dans les plans CDA et BFDA sera un triangle, ceci en supposant,

comme nous l'avons dit au début, que β soit invariable. La figure montre clairement l'action réciproque des efforts tangentiels.

Pour du fer soudant laminé, à cause de la direction des fibres du métal, les tensions de glissement axiales amènent souvent une rupture en longueur. Pour des

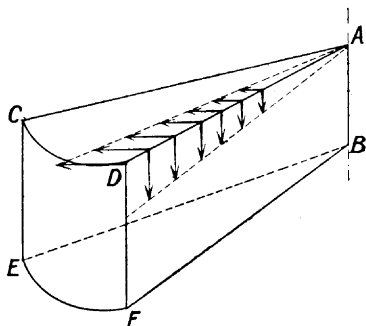


Fig. 209.

corps dont la propriété d'isotropie est plus parfaite la rupture se produit à 45° relativement à l'axe.

Applications. — *Pièce de section constante encastrée à un bout, soumise à l'extrémité libre à un couple M_1 .* —

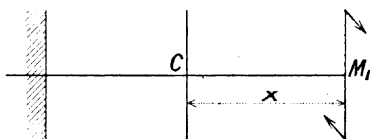


Fig. 210.

En un point C (fig. 210) quelconque on a $M' = M_1$. Donc :

$$\theta_v = \frac{M_1 v}{I_p}; \quad \delta = \frac{\beta M_1 x}{I_p}$$

$$\delta_l = \frac{\beta M_1 l}{I_p} .$$

La pièce étant circulaire,

$$\theta_v = \frac{2M_1}{\pi r^3}; \quad \delta = \frac{\beta 2M_1 x}{\pi r^4}$$

$$\delta_l = \frac{2\beta M_1 l}{\pi r^4}$$

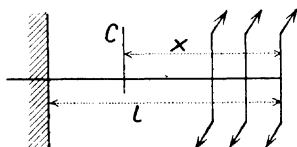


Fig. 211.

Cette pièce est d'égale résistance à la torsion, θ_v étant le même pour toutes les sections.

Même cas, M_1 étant uniformément réparti. — On a (fig. 211) :

$$M' = \frac{M_1 x}{l}; \quad \theta_v = \frac{2M_1 x}{\pi r^3 l}.$$

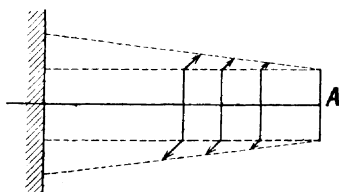


Fig. 212.

Le θ_v maximum se produit donc à l'encastrement où on a :

$$\theta_{v \max} = \frac{2M_1}{\pi r^3}.$$

De plus,

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{2\beta M_1 x}{l\pi r^4}; \quad \delta = \frac{\beta M_1 x^2}{l\pi r^4}; \quad \delta_l = \frac{\beta M_1 l}{\pi r^4}.$$

Même cas, le couple croissant uniformément à partir de l'extrémité libre. Soit M_1 (fig. 212) la somme de tous les couples ; m est le moment par unité de longueur. On a donc $m = kx$

$$M_1 = \int_0^l kx dx = \frac{kl^2}{2},$$

d'où

$$k = \frac{2M_1}{l^2},$$

et

$$m = \frac{2M_1x}{l^2}; \quad M' = \frac{M_1x^2}{l^2}; \quad \theta_v = \frac{2M_1x^2}{\pi v^3 l^2}; \quad \frac{d\delta}{dx} = \frac{\beta 2M_1x^2}{\pi v^4 l^2};$$

$$\delta = \frac{2}{3} \frac{\beta M_1 x^3}{\pi v^4 l^2}$$

$$\delta_l = \frac{2}{3} \frac{\beta M_1 l}{\pi v^4}.$$

La tension est maximum à l'encastrement et a pour valeur :

$$\theta_v \text{ max} = \frac{2M_1}{\pi v^3}.$$

Formes d'égale résistance. — Dans les deux derniers cas la formule d'égale résistance est $r'''' = \frac{M'v}{I_p}$. Pour les pièces circulaires elle sera $r'''' = \frac{2M'}{\pi v^3}$. Dans le second cas la formule devient $r'''' = \frac{2M_1x}{l\pi v^3}$ dans laquelle v est variable. La forme de la pièce est donc une parabole cubique :

$$v = \sqrt[3]{\frac{2M_1}{l\pi r''''}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$$

On, a de plus,

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{\beta M'}{I_p} = \frac{2\beta M_1 x}{l\pi v^4}.$$

Il vient, en remplaçant v par sa valeur :

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{2\beta M_1 x}{\pi l} \left(\frac{2M_1}{l\pi r''''} \right)^{-\frac{4}{3}} x^{-\frac{4}{3}}$$

d'où :

$$\delta = \frac{2\beta M_1}{\pi l} \left(\frac{2M_1}{\pi l r''''} \right)^{-\frac{4}{3}} \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} ; \delta_l = \frac{1}{(2M_1)^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \beta l \times \frac{1}{\pi} r''''^{\frac{4}{3}} \quad (3)$$

A l'encastrement

$$r'''' = \frac{M_1 v_l}{l p l} = \frac{2M_1}{\pi v l^3} ;$$

v_l est le rayon à l'encastrement ; (3) devient donc :

$$\delta_l = \frac{3\beta M_1 l}{\pi v^{\frac{4}{3}}} .$$

Dans le troisième cas la formule d'égale résistance devient :

$$r'''' = \frac{2M_1 x^2}{\pi l^2 v^3}$$

d'où

$$v = \left(\frac{2M_1}{l^2 \pi r''''} \right)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}$$

Le profil est une parabole semi-cubique. De plus, on a :

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{2\beta M_1 x^2}{l^2 \pi v^3} = \frac{2\beta M_1}{\pi l^2} \left(\frac{2M_1}{l^2 \pi r''''} \right)^{-\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}}$$

et on calculerait δ et δ_l comme dans le cas précédent.

Pièces non encastrees. — Soit une pièce appuyée à ses deux extrémités (fig. 213) et désignons par m le moment par unité de longueur ; pour une longueur dx le moment a

pour valeur $m \cdot dx$ et, pour un point quelconque C, $M = \int_0^x m dx$. Si la pièce est en équilibre on sait que la somme algébrique des moments doit être nulle, donc $\int_0^l m dx = 0$.

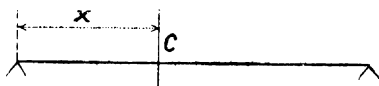


Fig. 213.

Pièce encastree à ses deux extrémités. — Soient X et Y (fig. 214) les moments de torsion aux encastresments. La somme algébrique de tous les moments est nulle s'il y a équilibre. Donc :

$$\int_0^l m dx + X + Y = 0 \quad (1)$$

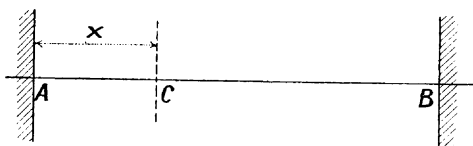


Fig. 214.

X et Y sont inconnus et ne peuvent être déterminés par la mécanique rationnelle. Posons

$$m = \varphi(x).$$

L'équation (1) devient :

$$\int_0^l \varphi(x) dx + X + Y = 0. \quad (1')$$

Pour un point C on a :

$$M = \int_0^x \varphi(x) dx + X, \quad (2)$$

d'où :

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{\beta M'}{I_p} = \frac{\beta \int_0^x \varphi(x) dx}{I_p} + \frac{\beta X}{I_p}.$$

Posons :

$$\frac{\int_0^x \varphi(x) dx}{I_p} = F(x).$$

Il vient :

$$\frac{d\delta}{dx} = \beta \left[F(x) + \frac{X}{I_p} \right]$$

d'où

$$\delta = \beta \int_0^x F(x) dx + \beta X \int_0^x \frac{dx}{I_p} \quad (3)$$

équation à deux inconnues δ et X . Observons que pour $x = l$, $\delta = 0$; donc :

$$0 = \beta \int_0^l F(x) dx + \beta X \int_0^l \frac{dx}{I_p} \quad (4)$$

d'où on tire X .

Théorème. — SI LA SECTION EST CONSTANTE, LES MOMENTS AUX ENCASTREMENTS SE RÉPARTISSENT COMME DES RÉACTIONS AUX POINTS D'APPUI DANS LE CAS D'UNE PIÈCE APPUYÉE A SES EXTRÉMITÉS ET SOUMISE A LA FLEXION PLANE SIMPLE. — Considérons (fig. 215) deux pièces, l'une encastree et soumise à un couple m par unité de longueur, l'autre appuyée et soumise à un effort p par unité de longueur. Supposons $m = \varphi(x)$ et $p = \varphi(x)$, donc $m = p$, numériquement. On a :

$$M = \int_0^x \varphi(x) dx + X.$$

Pour la première pièce :

$$\frac{d\delta}{dx} = \beta \frac{1}{I_p} [F(x) + X]$$

$$\delta = \beta \frac{1}{I_p} \left[\int_0^x F(x) dx + X \cdot x \right]$$

$$0 = \beta \frac{1}{I_p} \left[\int_0^l F(x) dx + X \cdot l \right].$$

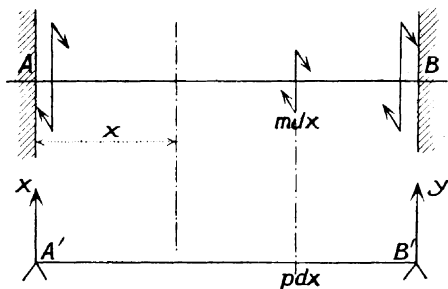


Fig. 215.

Pour la seconde pièce :

$$T = \int_0^x p dx + X = \int_0^x \varphi(x) dx + X = F(x) + X$$

$$M = \int_0^x F(x) dx + X \cdot x$$

Pour $x = l, M = 0$ et

$$0 = \int_0^l F(x) dx + X \cdot l.$$

Les deux dernières équations relatives à la première et à la deuxième pièce sont identiques ; les valeurs de X tirées de ces équations sont donc numériquement égales ; il en est de même pour Y .

Pièce de section constante encastrée aux deux extré-

mités et soumise à l'action d'un couple. — Soit M_1 le couple agissant en C (fig. 216). D'après le théorème précédent on a :

$$X = \frac{M_1 b}{l} ; \quad Y = \frac{M_1 a}{l}.$$

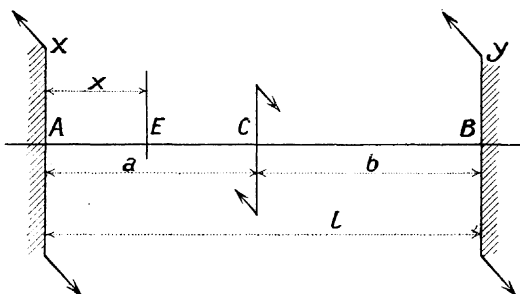


Fig. 216.

Pour un point E à la distance x de A il vient :

$$M' = \frac{M_1 b}{l} ; \quad \frac{d\delta}{dx} = \frac{2\beta M_1 b}{l\pi r^4}$$

$$\delta = \frac{2\beta M_1 b x}{l\pi r^4}$$

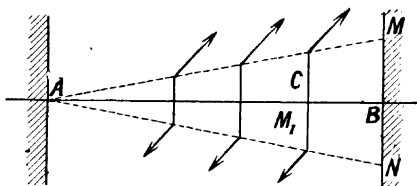


Fig. 217.

Le maximum de δ se produit pour $x = a$; donc :

$$\delta_a = \frac{2\beta M_1 b a}{l\pi r^4}.$$

Pièce de section constante encastée aux deux bouts et

soumise à des moments uniformément croissants. — On peut remplacer tous ces couples par un couple unique M_1 (fig. 217) appliqué au point C, centre de gravité du triangle AMN. Donc

$$AC = \frac{2}{3} l; \quad BC = \frac{1}{3} l; \quad X = \frac{M_1}{3}; \quad Y = \frac{2}{3} M_1$$

La question s'achèvera comme ci-dessus.

PRISMES A SECTION NON CIRCULAIRE

Vérification de l'hypothèse des sections droites restant planes. — Nous avons admis pour établir les formules relatives à la torsion des pièces circulaires que les sections transversales restaient planes après déformation. Nous allons montrer que cette hypothèse est parfaitement logique en ce qui concerne les pièces circulaires, mais qu'elle ne peut plus être admise dès que les sections transversales ont une forme différente du cercle. Reprenons les formules générales de la théorie mathématique de l'élasticité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 u + \frac{m}{m-2} \frac{de}{dx} + \beta X = 0 \\ \Delta^2 v + \frac{m}{m-2} \frac{de}{dy} + \beta Y = 0 \\ \Delta^2 w + \frac{m}{m-2} \frac{de}{dz} + \beta Z = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{xy} = \theta_{yx} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \\ \theta_{yz} = \theta_{zy} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) \\ \theta_{zx} = \theta_{xz} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} t_x = \frac{2}{\beta} \left(\frac{du}{dx} + \frac{e}{m-2} \right) \\ t_y = \frac{2}{\beta} \left(\frac{dv}{dy} + \frac{e}{m-2} \right) \\ t_z = \frac{2}{\beta} \left(\frac{dw}{dz} + \frac{e}{m-2} \right) \end{cases}$$

$$e = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

Soit un prisme soumis à la torsion simple et choisissons pour axe des X l'axe longitudinal du prisme ; dans le cas de torsion simple l'effort tangentiel dans le sens de l'axe est supposé nul ; de plus, les tensions t_x , t_y et t_z sont également nulles. On a donc :

$$t_x = 0; t_y = 0; t_z = 0; \theta_{yz} = 0.$$

Nous négligeons le poids du corps, supposé immobile ; il vient :

$$X = 0; Y = 0; Z = 0.$$

Du fait de $t_x = 0$, $t_y = 0$ et $t_z = 0$ on peut écrire :

$$\frac{du}{dx} = 0; \frac{dv}{dy} = 0; \frac{dw}{dz} = 0$$

donc :

$$e = 0.$$

Du fait de $\theta_{yz} = 0$, on a :

$$\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0. \quad (1)$$

Enfin les équations générales deviennent :

$$\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0 \quad (I)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = 0 \quad (II)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} = 0 \quad (III)$$

L'équation (1) peut s'écrire :

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{dw}{dy}.$$

Différentions par rapport à z :

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{d^2w}{dydz}.$$

Or on a :

$$\frac{dw}{dz} = 0; \quad \frac{d^2w}{dydz} = 0$$

donc

$$\frac{d^2v}{dz^2} = 0.$$

Introduisons cette valeur dans (II) ; il vient :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 0.$$

La condition (1) fournit encore :

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{dv}{dz}.$$

Différentions par rapport à y :

$$\frac{d^2w}{dy^2} = -\frac{d^2v}{dydz}.$$

Or $\frac{dv}{dy} = 0$; donc $\frac{d^2v}{dydz} = 0$ et $\frac{d^2w}{dy^2} = 0$.

A cause de (III) on aura aussi $\frac{d^2w}{dx^2} = 0$.

Dressons le tableau :

$$\frac{d^2v}{dz^2} = 0; \quad \frac{d^2v}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^2w}{dy^2} = 0; \quad \frac{d^2w}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = 0$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} = 0.$$

La fonction v est indépendante de y , car on a $\frac{dv}{dy} = 0$; elle est linéaire de x et z puisqu'on a

$$\frac{d^2v}{dz^2} = 0; \quad \frac{d^2v}{dx^2} = 0.$$

On peut donc écrire :

$$v = A_0 + A_1x + z(A_2 + A_3x)$$

On a de même :

$$w = B_0 + B_1x + y(B_2 + B_3x).$$

Or

$$\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0;$$

donc :

$$A_2 + A_3x + B_2 + B_3x = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} B_2 &= -A_2 \\ B_3 &= -A_3 \end{aligned}$$

A l'origine, $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$; donc :

$$A_0 = 0; \quad B_0 = 0.$$

En outre :

$$\frac{dv}{dx} = 0; \quad \frac{dw}{dx} = 0$$

l'axe des X étant supposé passer par un point infiniment voisin ; donc :

$$A_1 = 0; \quad B_1 = 0.$$

Enfin le plan XY renferme toujours un même point du corps :

$$\frac{dw}{dy} = 0$$

et

$$B_2 = 0$$

Il ne reste plus qu'une constante, $B_3 = -A_3$, que nous désignerons par θ . On aura donc :

$$v = \theta xz; \quad w = -\theta xy.$$

Intégrons enfin l'équation $\frac{du}{dx} = 0$; il vient

$$u = \varphi(y, z)$$

fonction qui doit répondre à la condition

$$\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0.$$

Les composantes θ_{xy} et θ_{xz} doivent donner une résultante tangente au contour de la section ; soit $z = f(y)$ l'équation de ce contour. Pour qu'il y ait tangence il faut qu'on ait

$$\frac{\theta_{xz}}{\theta_{xy}} = \frac{dz}{dy}.$$

Remplaçons θ_{xz} et θ_{xy} par leurs valeurs :

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}}{\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}}$$

Or $v = \theta xz$; $w = -\theta xy$:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\frac{du}{dz} - \theta y}{\frac{du}{dy} + \theta z} \quad (IV)$$

C'est la condition générale que, dans le cas de torsion simple, on doit remplir au pourtour de la section.

Voyons quelle est la condition pour que toutes les sections restent planes après déformation. Cette condition s'exprime par $u = 0$ partout ; $u = 0$ est une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0.$$

Alors $\frac{du}{dz}$ et $\frac{du}{dy}$ sont nuls ; l'équation de condition (IV) devient :

$$\begin{aligned} \frac{-\theta y}{\theta z} &= \frac{dz}{dy} \\ \frac{dz}{dy} &= -\frac{y}{z} \\ z dz + y dy &= 0. \end{aligned}$$

Intégrons :

$$z^2 + y^2 = a^2.$$

équation du cercle. *La condition pour que les sections restent planes après déformation par torsion est donc qu'elles soient circulaires.* Il résulte de là que l'hypothèse que nous avons faite lors de l'établissement de la théorie élémentaire de la torsion des pièces circulaires est parfaitement justifiée.

Cherchons maintenant le moment de torsion. Dans le plan d'une section un élément $ds = dy dz$ reçoit l'action des composantes $\theta_{xy} = \frac{1}{\beta} \theta z$; $\theta_{xz} = -\frac{1}{\beta} \theta y$. La composante θ_{xy} donne lieu à un moment $+ \theta_{xy} z$ par rapport à l'axe des Y, θ_{xy} étant dirigée vers les Y positifs ; la composante θ_{xz} donne lieu au moment $- \theta_{xz} Y$ par rapport à l'axe des Z, θ_{xz} étant dirigée vers les Z négatifs. Ces moments doivent faire équilibre au moment M' qui produit la torsion et on a :

$$\begin{aligned} M' &= \frac{1}{\beta} \int (\theta z^2 + \theta y^2) ds = \frac{\theta}{\beta} \int (z^2 + y^2) ds, \\ M' &= \frac{\theta}{\beta} I_p, \end{aligned}$$

I_p étant le moment d'inertie polaire de la section. La tension tangentielle en un point quelconque de la section considérée est la résultante $\sqrt{\theta_{xy}^2 + \theta_{xz}^2}$ de θ_{xy} et θ_{xz} . On a :

$$\sqrt{\theta_{xy}^2 + \theta_{xz}^2} = \theta \sqrt{x^2 + y^2} = \theta r.$$

r étant la distance du centre à l'élément ds considéré. La tension est donc maximum au contour où $r = v$, rayon de la section circulaire ; elle y a pour valeur θv . La condition de résistance sera

$$\frac{\theta v}{\beta} < r''''$$

ou, en observant que $\frac{\theta}{\beta} = \frac{M'}{I_p}$:

$$\frac{M'v}{I_p} < r''''.$$

relation que nous avons trouvée dans la théorie élémentaire. D'autre part $I_p = \frac{\pi v^4}{2} = S \frac{v^2}{2}$, si $S = \pi v^2$ est la surface de la section. Il vient :

$$M' \leq r'''' S \frac{v}{2}$$

On peut aussi écrire :

$$M' = \frac{I_p \theta}{\beta}$$

ou

$$M' = \frac{1}{4\pi^2} \frac{S^4}{I_p} \frac{\theta}{\beta}.$$

Section elliptique. — Reprenons l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0.$$

L'intégration de cette équation, qui donne la forme de la section transversale déformée, n'est pas toujours possible. Une solution très simple est $u = 0$ ou u linéaire ; elle nous a conduit à la forme circulaire pour laquelle seule les sections restent planes. L'équation différentielle ci-dessus est aussi satisfaite par la fonction

$$u = Ayz$$

qui représente un parabolôïde hyperbolique.

On déduit :

$$\frac{du}{dz} = Ay; \quad \frac{du}{dy} = Az.$$

L'équation du contour de la section est donc définie par

$$\frac{Ay - \theta y}{Az - \theta z} = \frac{dz}{dy} = \frac{y}{z} \frac{A - \theta}{A + \theta}.$$

Posons

$$\frac{A - \theta}{A + \theta} = - \frac{b^2}{a^2};$$

il vient :

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{b^2}{a^2} \frac{y}{z}$$

$$a^2 z dz + b^2 y dy = 0.$$

Intégrons :

$$a^2 z^2 + b^2 y^2 = a^2 b^2,$$

équation d'une ellipse. Un prisme à section elliptique se déforme donc de manière que ses sections transversales deviennent des paraboloides hyperboliques. Cherchons maintenant pour un prisme elliptique l'endroit où, dans une section, se produit la tension maximum, ainsi que l'expression de cette tension. Soit $S = \pi ab$ la surface de la section. Les moments d'inertie principaux sont :

$$I_y = \frac{b^2}{4} S; \quad I_z = \frac{a^2}{4} S.$$

Les composantes θ_{xy} et θ_{xz} deviennent :

$$\theta_{xy} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{du}{dy} + \theta z \right) = \frac{1}{\beta} (Az + \theta z) = \frac{z}{\beta} (A + \theta)$$

$$\theta_{xz} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{du}{dz} - \theta y \right) = \frac{1}{\beta} (Ay - \theta y) = \frac{y}{\beta} (A - \theta)$$

La composante θ_{xy} donne le moment $+ \theta_{xy} z$; θ_{xz} le moment $- \theta_{xz} y$. Ces moments font équilibre au moment

de torsion M' :

$$M' = \frac{1}{\beta} \int [z^2 (A + \theta) + y^2 (A - \theta)] ds.$$

Remplaçons A par sa valeur tirée de la relation

$$\frac{A - \theta}{A + \theta} = - \frac{b^2}{a^2};$$

il vient :

$$M' = \frac{2\theta}{a^2 + b^2} \frac{1}{\beta} \int (a^2 z^2 + b^2 y^2) ds = \frac{2\theta}{a^2 + b^2} \frac{1}{\beta} (b^2 I_z + a^2 I_y)$$

$$M' = \frac{2\theta}{a^2 + b^2} \left(b^2 S \frac{a^2}{4} + a^2 S \frac{b^2}{4} \right) = \frac{\theta}{a^2 + b^2} \frac{1}{\beta} S a^2 b^2$$

$$I_p = I_y + I_z = S \frac{a^2 + b^2}{4}$$

$$a^2 + b^2 = \frac{4I_p}{S}$$

$$M' = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\beta} \frac{S^4}{I_p} \theta = 0,02533 \frac{1}{\beta} \frac{S^4}{I_p} \theta$$

forme complètement différente de $M' = \frac{I_p \theta}{\beta}$ trouvée en supposant que les sections restent planes. La tension en un point quelconque est la résultante

$$\sqrt{\theta_{xy}^2 + \theta_{xz}^2} = \frac{2\theta}{a^2 + b^2} \sqrt{a^4 z^2 + b^4 y^2}$$

de θ_{xy} et θ_{xz} .

Pour une valeur déterminée de $\frac{z}{y}$, c'est-à-dire sur un même rayon vecteur, la tension résultante sera d'autant plus grande que y et z seront plus grands. La tension maximum se produit donc au contour de la section. A ce contour on a :

$$a^2 z^2 + b^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Introduisons la valeur de z tirée de cette équation dans l'expression de la tension, il vient :

$$\frac{2\theta b}{a^2 + b^2} \sqrt{a^4 - y^2 (a^2 - b^2)}$$

Supposons $a > b$ ou a le grand axe ; la tension est maximum pour $y = 0$; la tension est donc maximum à l'extrémité du petit axe de l'ellipse ; en cet endroit elle a pour valeur

$$\frac{2a^2b}{a^2 + b^2} \theta.$$

La condition de résistance sera

$$\frac{1}{\beta} \frac{2a^2b}{a^2 + b^2} \theta \leq r''''.$$

Introduisons l'expression du moment M' :

$$M' \leq \frac{b}{2} S r''''$$

ou

$$\theta_{\max} = \frac{2M'}{\pi ab^2}.$$

La tension maximum dans une pièce de section elliptique se produit donc à l'extrémité du petit axe et elle a pour expression :

$$\theta_{\max} = \frac{2M'}{\pi ab^2}.$$

Il serait aisé de représenter la loi de répartition des tensions en divers endroits d'une section elliptique.

Section rectangulaire. — Soit un prisme droit de section rectangulaire (fig. 218) sur la surface extérieure duquel on trace des carrés égaux limités par des génératrices et des directrices équidistantes. Après torsion nous observons :

1° Les carrés ont perdu leur forme primitive ; ils sont devenus des losanges. L'angle des génératrices avec les directrices a varié d'autant plus que ces génératrices sont plus près du milieu des côtés de la section. Le glissement

maximum se produit aux points du pourtour les plus rapprochés de l'axe ;

2° Les sections primitivement planes se sont courbées ;

3° Les deux axes principaux d'une section sont restés dans le plan primitif.

4° Chacun des deux axes principaux de deux sections successives a tourné de la même quantité.

Considérons, avec Föppl, une section rectangulaire rapportée à deux axes de symétrie OX et OY . Nous admettons que les efforts intérieurs sont dirigés dans le sens des côtés. Dans ces conditions les composantes θ_x et θ_y sur un élément ds auront le sens indiqué ; la tension sur les éléments symétriques dans les trois autres quadrants auront la direction figurée, car la torsion se produit partout dans le même sens. Ainsi, θ_x en A étant dirigé vers les X positifs, cette composante en B sera dirigée vers les X négatifs, en C vers les X négatifs et en D vers les X positifs. Donc pour y positif, θ_x est positif et pour y négatif, θ_x est négatif. On peut donc dire que θ_x est une fonction impaire de y car pour $y = \pm$ on a aussi $\theta_x = \pm$. D'autre part les tensions qui agissent sur deux éléments symétriques par rapport aux axes sont égales en valeur absolue ; ainsi θ_x en A est égale à θ_x en D ; donc pour $x = \pm$ les valeurs de θ_x sont égales. On peut donc dire que θ_x est une fonction paire de x ; θ_x est donc une fonction paire de x et impaire de y . Cette fonction ne peut être ni du premier, ni du second degré, si elle doit réaliser les conditions précédentes ; la plus simple sera nécessai-

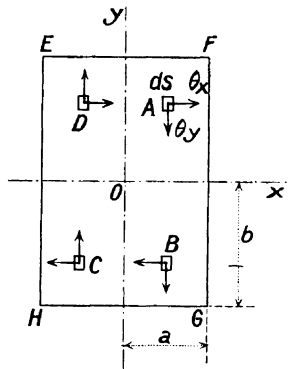


Fig. 218.

rement une fonction du troisième degré et on pourra écrire :

$$\theta_x = C_1 y + C_2 y x^2 + C_3 y^3.$$

Pour $x = \pm a$ cette fonction doit s'annuler, car sur les côtés FG et HE, $\theta = 0$, la tension étant dirigée suivant les côtés du pourtour. On a donc :

$$0 = C_1 y + C_2 y a^2 + C_3 y^3$$

$$0 = C_1 + C_2 a^2 + C_3 y^2$$

relation qui doit être satisfaite quel que soit y . On doit donc avoir $C_3 = 0$, donc $C_1 + C_2 a^2 = 0$, d'où :

$$C_2 = -\frac{C_1}{a^2}.$$

Il vient finalement :

$$\theta_x = C_1 y - \frac{C_1}{a^2} y x^2 \quad (4)$$

Opérons d'une façon analogue pour θ_y , qui est une fonction impaire de x et paire de y , c'est-à-dire :

$$\theta_y = C'_1 x + C'_2 x y^2 + C'_3 x^3$$

expression qui doit s'annuler pour $y = \pm b$; donc :

$$0 = C'_1 x + C'_2 x b^2 + C'_3 x^3$$

$$0 = C'_1 + C'_2 b^2 + C'_3 x^2 = 0,$$

équation qui doit être satisfaite quel que soit x . On a donc $C'_3 = 0$ et

$$C'_1 + C'_2 b^2$$

d'où

$$C'_2 = -\frac{C'_1}{b^2}$$

$$\theta_y = C'_1 x - \frac{C'_1}{b^2} x y^2.$$

- Les actions moléculaires qui agissent sur un élément de volume infiniment petit se font équilibre et on a

démontré (Elasticité) que

$$\frac{d\theta_x}{dx} = - \frac{d\theta_y}{dy} .$$

Or

$$\frac{d\theta_x}{dx} = - 2 \frac{C_1}{a^2} yx; \quad \frac{d\theta_y}{dy} = - 2 \frac{C'_1}{b^2} xy$$

donc

$$C'_1 = - \frac{C_1 b^2}{a^2}$$

et

$$\theta_y = - \frac{C_1 b^2}{a^2} x + \frac{C_1}{a^2} xy^2 . \quad (2)$$

L'équation des moments est :

$$M' = \int (\theta_x y - \theta_y x) ds$$

car θ_y est dirigé vers les y négatifs. Remplaçons θ_x et θ_y par leur valeur :

$$M' = \int \left\{ \left[C_1 y - \frac{C_1}{a^2} yx^2 \right] y - \left[- \frac{C_1 b^2}{a^2} x + \frac{C_1}{a^2} xy^2 \right] x \right\} ds$$

$$M' = C_1 \int \left(y^2 - \frac{y^2 x^2}{a^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2} - \frac{x^2 y^2}{a^2} \right) ds =$$

$$C_1 \int \left(y^2 - 2 \frac{x^2 y^2}{a^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2} \right) ds$$

$$M' = C_1 \int y^2 ds - \frac{2C_1}{a^2} \int x^2 y^2 ds + \frac{C_1 b^2}{a^2} \int x^2 ds$$

$$\int y^2 ds = I_x = 2 \int_0^b 2adz z^2 = \frac{4}{3} ab^3$$

$$C_1 \int y^2 ds = \frac{4}{3} C_1 ab^3$$

$$\int x^2 y^2 ds = \int 4x^2 y^2 dx dy = 4 \int_0^a x^2 dx \int_0^b y^2 dy = \frac{4}{9} a^3 b^3$$

$$- \frac{2C_1}{a^2} \int x^2 y^2 ds = - \frac{8}{9} C_1 ab^3$$

$$M' = \frac{4}{3} C_1 ab^3 + \frac{4}{3} C_1 ab^3 - \frac{8}{9} C_1 ab^3$$

$$C_1 = \frac{9}{16} \frac{M'}{ab^3}$$

Or

$$\theta_x = C_1 y - \frac{C_1}{a^2} y x^2$$

$$\theta_y = -\frac{C_1 b^2}{a^2} x + \frac{C_1}{a^2} x y^2$$

$$\theta_x = C_1 y \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{9}{16} \frac{M'}{ab^3} y \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\theta_y = \frac{C_1 x}{a^2} (-b^2 + y^2) = \frac{C_1 x b^2}{a^2} \left(-1 + \frac{y^2}{b^2}\right) = -\frac{C_1 x b^2}{a^2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$\theta_y = -\frac{9}{16} \frac{M'}{a^3 b} x \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Les valeurs de θ_x et θ_y montrent que les actions tangentielles sont perpendiculaires le long des axes de symétrie sur ces derniers et qu'elles croissent linéairement du centre à la périphérie. Sur les contours de la section ces actions sont dirigées suivant les côtés du rectangle et la loi de répartition est du second degré. Le long d'une diagonale les actions sont parallèles à l'autre diagonale et la loi est du troisième degré. Le long d'un vecteur quelconque leur direction varie d'un point à un autre. Cherchons le point où θ est maximum. On a :

$$\theta^2 = \theta_x^2 + \theta_y^2$$

$$\theta^2 = \left(\frac{9}{16} \frac{M'}{ab^3}\right)^2 y^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 + \left(-\frac{9}{16} \frac{M'}{a^3 b}\right)^2 x^2 \times \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{1}{a^4} \left(\frac{9}{16} \frac{M'}{ab^3}\right)^2 y^2 (a^2 - x^2)^2$$

$$+ \left(\frac{9}{16} \frac{M'}{a^3 b}\right)^2 x^2 (b^2 - y^2) \frac{1}{b^4}$$

$$\theta^2 = \left(\frac{9}{16} \frac{M'}{a^3 b^3}\right)^2 y^2 (a^2 - x^2)^2 + \left(\frac{9}{16} \frac{M'}{a^3 b^3}\right)^2 x^2 (b^2 - y^2)^2$$

$$\theta^2 = \left(\frac{9}{16} \frac{M'}{a^3 b^3}\right)^2 [y^2 (a^2 - x^2)^2 + x^2 (b^2 - y^2)^2]$$

Les valeurs de x et y qui rendent cette expression maximum s'obtiennent en égalant à zéro les dérivées partielles par rapport à x ou y , ou ce qui revient au même, par rapport à x^2 ou y^2 . Posons $y^2 = y_1$, $x^2 = x_1$; il vient :

$$\begin{aligned} \theta^2_1 &= y_1 (a^2 - x_1)^2 + x_1 (b^2 - y_1)^2 & (1) \\ \theta^2_1 &= y_1 (a^2 - x_1)^2 + x_1 (b^4 - 2b^2y_1 + y_1^2) \end{aligned}$$

Dérivons par rapport à y_1 , on a :

$$\begin{aligned} (a^2 - x_1)^2 + x_1 (-2b^2 + 2y_1) &= (a^2 - x_1)^2 - 2x_1 (b^2 - y_1) = \\ &= (a^2 - x_1)^2 - 2x_1 (b^2 - y_1) = 0 & (I) \end{aligned}$$

D'autre part (1) peut se mettre sous la forme :

$$y_1 (a^4 - 2a^2x_1 + x_1^2) + x_1 (b^2 - y_1)^2.$$

Dérivons par rapport à x_1 :

$$\begin{aligned} y_1 (-2a^2 + 2x_1) + (b^2 - y_1)^2 \\ - 2y_1 (a^2 - x_1) + (b^2 - y_1)^2 \end{aligned}$$

ou

$$- 2y^2 (a^2 - x^2) + (b^2 - y^2)^2 = 0. \quad (II)$$

On voit que les coordonnées du sommet du rectangle satisfont à ces relations. Les autres solutions s'obtiennent en résolvant. Tirons de (I)

$$(a^2 - x^2)^2 = 2x^2 (b^2 - y^2); \quad (b^2 - y^2) = \frac{1}{2x^2} (a^2 - x^2)^2 \dots (3)$$

Remplaçons dans (II) :

$$\begin{aligned} - 2y^2 (a^2 - x^2) + \frac{1}{4x^4} (a^2 - x^2)^4 &= 0 \\ - 2y^2 + \frac{1}{4x^4} (a^2 - x^2)^3 &= 0. & (4) \end{aligned}$$

De (3) on a :

$$\begin{aligned} - y^2 &= - b^2 + \frac{1}{2x^2} (a^2 - x^2)^2 \\ - 2y^2 &= - 2b^2 + \frac{1}{x^2} (a^2 - x^2)^2 \end{aligned}$$

d'où, dans (4) :

$$\begin{aligned} -2b^2 + \frac{1}{x^2} (a^2 - x^2)^2 + \frac{1}{4x^4} (a^2 - x^2)^3 &= 0 \\ -b^2 + \frac{1}{2x^2} (a^2 - x^2)^2 + \frac{1}{8x^4} (a^2 - x^2)^3 &= 0 \\ \frac{(a^2 - x^2)^3}{8x^4} &= b^2 - \frac{(a^2 - x^2)^2}{2x^2}, \end{aligned}$$

équation du troisième degré en x^2 . Résolvons cette équation dans le cas du carré, c'est-à-dire, quand $a = b$. On a alors :

$$3x^6 - 13 a^2 x^4 + a^4 x^2 + a^6 = 0$$

qui a pour racines :

$$x_1^2 = \frac{a^2}{3}; \quad x_2^2 = a^2 (2 + \sqrt{5}); \quad x_3^2 = a^2 (2 - \sqrt{5})$$

x_3^2 doit être rejetée car x_3 serait imaginaire; x_2 aussi car elle conduit pour l' y correspondant à une valeur imaginaire; en effet, en introduisant cette valeur de x_2 on trouve $y^2 = a^2 (2 - \sqrt{5})$. Il ne reste donc que les points qui ont pour coordonnées

$$x = \pm a \sqrt{\frac{1}{3}}; \quad y = \pm a \sqrt{\frac{1}{3}}$$

et si on introduit ces valeurs dans θ^2 il vient

$$\begin{aligned} \theta_{\max}^2 &= \frac{3 M'}{32 a^6} \\ \theta_{\max} &= 0,306 \frac{M'}{a^3}. \end{aligned}$$

Ce maximum de θ n'est pas nécessairement la plus grande valeur de cette quantité; le maximum de θ peut se produire en un point du contour de la section. Étant donnés les résultats obtenus sur la répartition des efforts à la périphérie il suffit de considérer le milieu des côtés.

Pour $x = a$, $y = 0$, on a :

$$\theta = \frac{9M'}{16 a^2 b} \quad (\text{III})$$

et dans le carré $\theta = 0,5625 \frac{M'}{a^3}$.

Cette valeur de θ est donc beaucoup plus grande que le maximum analytique qui se produit sur la diagonale. Donc pour les prismes dont la section diffère peu d'un carré il suffit de calculer la tension tangentielle maximum qui se produit à la périphérie. On arrive probablement au même résultat pour d'autres rapports entre les côtés du rectangle. Donc θ atteint sa plus grande valeur au milieu des grands côtés, donc aux points du pourtour les plus rapprochés du centre de la section. Dans l'application de la formule (III) on entendra donc par a le plus petit demi-côté du rectangle. Enfin, si on introduit les côtés entiers du rectangle a_1 et b_1 la formule (III) devient

$$\theta = \frac{9M'}{2 a_1^2 b_1}.$$

Sections de formes quelconques. — De Saint-Venant, en effectuant l'intégration de l'équation aux dérivées partielles et les calculs correspondants pour un certain nombre de sections de formes diverses, a montré que le gauchissement des sections droites est, en général, et pour un même genre de surfaces, d'autant plus prononcé que leur forme s'éloigne davantage du cercle, ou, en d'autres termes, que leurs dimensions maxima et minima diffèrent plus l'une de l'autre.

Ce gauchissement ayant pour résultat de diminuer la résistance à la torsion, la forme circulaire est la plus avantageuse de toutes à égalité de surface. Les fibres les plus fatiguées ne sont pas toujours celles qui sont les plus éloignées de l'axe.

Reprenons les formules relatives aux sections circu-

lares. En les exprimant en fonction de la section S on a

$$M' = 0,282 \theta S^{\frac{3}{2}} \quad (1)$$

$$M' = 0,0253 \frac{S^2 \delta}{\beta I_p l} \quad (2)$$

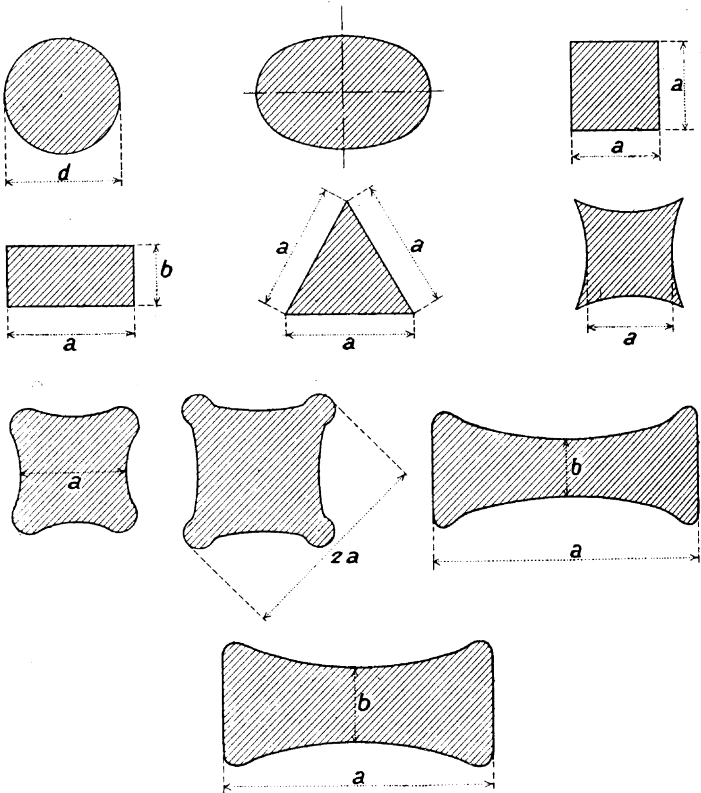


Fig. 219 à 228.

Ces formules sont encore utilisables pour toute autre section que le cercle en les écrivant

$$M' = \psi \theta S^{\frac{3}{2}};$$

$$M' = \psi' \frac{S^2 \delta}{\beta I_p l};$$

FORME de la section.	VALEURS des coefficients.		SURFACES et moments polaires des sections.
	ψ	ψ'	
F. 219	0,282	0,0253	$S = \frac{\pi d^2}{4}$ $I_p = \frac{1}{32} \pi d^4$
220 $a > b$	$0,282\sqrt{\frac{b}{a}}$	0,0253	$S = \pi ab$ $I_p = \frac{1}{64} \pi ab (a^2 + b^2)$
221	0,208	0,0234	$S = a^2$ $I_p = \frac{1}{6} a^4$
222	$a = 2b$ 0,174 $a = 5b$ 0,130 $a = 10b$ 0,099 $a = 50b$ 0,047 $a = \infty$ 0,000	0,0238 0,0252 0,0260 0,0274 0,0278	$S = ab$ $I_p = \frac{1}{12} ab (a^2 + b^2)$
223	0,175	0,0222	$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ $I_p = \frac{\sqrt{3}}{48} a^4$
224 Carré curviligne à angles aigus et à côtés con- caves ayant $\frac{1}{22}$ de flèche.	0,192	0,0220	$S = 1,064 a^2$ $I_p = 0,192 a^4$
225 Carré curviligne à angles arrondis et à côtés légèrement concaves.	0,200	0,0232	$S = 1,032 a^2$ $I_p = 0,179 a^4$
226 Etoile carrée curviligne à 4 pointes arrondies.	0,161	0,0211	$S = 1,220 a^2$ $I_p = 0,297 a^4$
227 Double spatule analogue à un rail.	0,128	0,0232	$S = 0,291 a^2$ $I_p = 0,126 a^4$
228 Autre forme de spatule.	0,119	0,0239	$S = 0,256 a^2$ $I_p = 0,113 a^4$

de Saint-Venant a calculé la valeur des coefficients ψ et ψ' pour les différentes formes de sections suivantes (voir tableau ci-dessus).

Le coefficient par lequel il faut multiplier $\frac{1}{\beta} \frac{S^2}{I_p} \theta$ pour obtenir la valeur du moment de torsion est donc à peu près constant.

Conclusion. — Les formules de torsion peuvent se mettre sous la forme générale

$$M' \leq \varphi r'''' \frac{I}{b},$$

M' , moment du couple tordant.

b , rayon de la circonférence, plus petit axe de l'ellipse ou côté le plus petit pour un rectangle ;

I , le plus petit des deux moments d'inertie principaux ;

φ , coefficient qui a pour valeur :

Cercle plein et section annulaire. 2

Ellipse et ellipse annulaire. 2

Rectangle. $\frac{8}{3}$

Pour un triangle à trois côtés égaux on a :

$$M' = \frac{1}{20} r'''' b^3$$

Pour un hexagone régulier :

$$M' = \frac{1}{1,09} r'''' b^3$$

b étant la longueur des côtés. On a donc ici :

$$\varphi = 1,385 \quad \text{et} \quad 1,694.$$

Il y a lieu d'observer que, pour l'établissement des formules précédentes, on a supposé que les sections successives avaient la faculté de se courber et qu'aucune résistance spéciale n'intervenait pour empêcher ce gau-

chissement. Ce n'est plus le cas pour les sections d'un prisme qui serait terminé par des plateaux avec congés de raccordement : il y a alors sujet à rupture vers les bases.

Ressorts de torsion. — Considérons (fig. 229) un ressort constitué par un arc de cercle ABCD de section constante, de rayon ρ , terminé par un bras radial DE. Le ressort est supposé encastré en A et soumis, à l'extrémité libre E, qui est au centre, à un effort P normal au plan de la figure. Une section quelconque EB, formant l'angle φ avec EA, est soumise à un moment de torsion $M = P \cdot \rho$ et à un effort tranchant P que nous laissons de côté. L'effort limite peut être déterminé par la formule

$$M' \leq \varphi r'''' \frac{I}{b}$$

si on admet que cette formule, trouvée pour des prismes droits est applicable à des prismes à axe courbé. La section EC distante de EB de $ds = \rho d\varphi$, par suite de l'action du moment tordant M' tourne par rapport à EB ; l'angle de torsion à l'unité de distance a pour valeur

$$\delta = \frac{32}{\pi} \frac{P\rho}{d^4} \beta,$$

pour une section circulaire ; et, pour une section rectangulaire :

$$\delta = \psi_0 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} P\rho\beta.$$

La torsion à la distance ds est

$$\delta ds = \delta \int d\varphi.$$

Le point d'application E de la force se déplacera dans

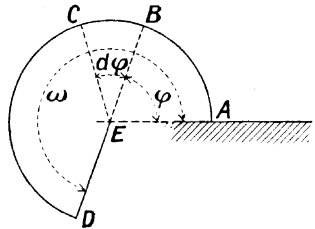


Fig. 229.

le sens de celle-ci de la quantité

$$\delta ds. \rho = \delta \rho^2 d\varphi$$

La flèche totale f du point E relative à la longueur complète ABCD a pour expression :

$$f = \int_0^{\omega} \delta \rho^2 d\varphi.$$

Posons $\delta = A.\rho$; pour une section circulaire

$$A = \frac{32}{\pi} \frac{1}{d^3} P \cdot \beta$$

et, pour une section rectangulaire,

$$A = \psi_0 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} P \beta.$$

On a donc

$$f = A \int_0^{\omega} \rho^3 d\varphi.$$

La flexion du point E relative au bras DE peut être considérée comme négligeable.

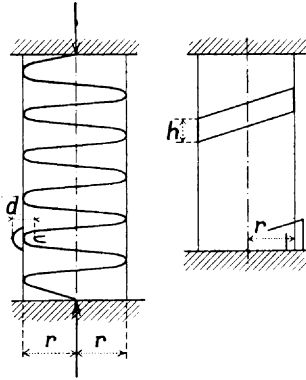


Fig. 230.

1 *Ressorts cylindriques* (fig. 230) — Ici $\omega = 2\pi i$, i nombre de spires. Soit r rayon moyen $= \rho$. On a :

$$f = A \int_0^{2\pi i} r^3 d\varphi = 2\pi i A r^3,$$

Pour une section circulaire

$$Pr = \frac{\pi}{16} r''' d^3$$

$$f = 64 i \frac{Pr^3}{d^3} \beta = 4\pi i \frac{r^2}{d} r'''' \beta,$$

et pour une section rectangulaire :

$$Pr = \frac{2}{9} r'''' b^2 h$$

$$f = 2\psi_0 i \pi \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} Pr^3 \beta = \frac{4}{9} \psi_0 \pi i \frac{b^2 + h^2}{b h^2} r^2 r'''' \beta$$

b étant le plus petit côté du rectangle si b ou h est dans la direction de l'axe du ressort.

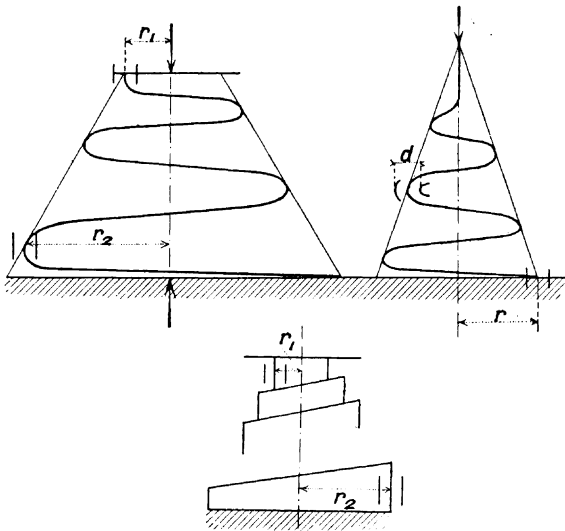


Fig. 231.

Ressorts coniques. (fig. 231). — On a ici, ρ étant variable :

$$\rho = r_2 - (r_2 - r_1) \frac{\varphi}{2\pi i}$$

$$d\rho = -\frac{r_2 - r_1}{2\pi i} d\varphi$$

$$d\varphi = -\frac{2\pi i}{r_2 - r_1} d\rho$$

$$f = -\frac{2\pi i}{r_2 - r_1} \Lambda \int_{r_2}^{r_1} \rho^3 d\rho = \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_2 - r_1} \frac{\pi i}{2} \Lambda$$

$$f = \frac{\pi i}{2} (r_1 + r_2) (r_1^2 + r_2^2) \Lambda$$

Pour une section circulaire :

$$f = \frac{\pi i}{r} (r_1 + r_2) (r_1^2 + r_2^2) \frac{32}{\pi} \frac{1}{d^4} \beta P = 16 i \frac{(r_1 + r_2) (r_1^2 + r_2^2)}{d^4} P \beta$$

et si $r_1 = 0$, $r_2 = r$

$$f = 16 i \frac{r^3}{d^4} P \beta.$$

En introduisant r''''

$$Pr_2 = \frac{\pi}{16} r'''' d^3$$

et

$$Pr = \frac{\pi}{16} r'''' d^3.$$

Pour une section rectangulaire :

$$\begin{aligned} f &= \frac{\pi i}{2} (r_1 + r_2) (r_1^2 + r_2^2) \psi_0 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} P \beta = \\ &= \frac{1}{2} \psi_0 \pi i (r_1 + r_2) (r_1^2 + r_2^2) \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} P \cdot \beta \end{aligned}$$

et

$$Pr_2 = \frac{2}{9} r'''' b^2 h.$$

ESSAIS A LA TORSION

Essais de Bauschinger. — Cet expérimentateur a voulu vérifier la formule de de Saint-Venant

$$\delta = \psi' M \frac{I_y}{S^4} \beta l,$$

δ angle à la distance l . Il a essayé des prismes en fonte à section circulaire, elliptique, carrée et rectangulaire

$\frac{h}{b} = \frac{2}{1}$ et $\frac{h}{b} = \frac{2}{4}$. L'équation de de Saint-Venant

pour les angles de torsion à l'unité de distance $\delta_a \delta_b \delta_c \delta_d$ donne

$$\delta_a : \delta_b : \delta_c : \delta_d = 1 : 1,25 : 1,13 : 1,40 : 9,1.$$

Bauschinger a trouvé

$$\delta_a : \delta_b : \delta_c : \delta_d : \delta_e = 1 : 1,24 : 1,20 : 1,47 : 9,65.$$

Les résultats de l'expérience sont donc concordants pour les sections circulaire et elliptique ; il n'en n'est plus de même pour les autres sections. Observons cependant que dans la formule de de Saint-Venant il n'est pas tenu compte de la variabilité du coefficient β alors que pour la fonte ce coefficient croît avec les tensions ; la concordance est donc suffisante. Elle s'est montrée aussi satisfaisante pour des échantillons d'acier Martin-Siemens de six degrés de dureté, pour de l'acier Bessemer, cinq degrés de dureté, pour du fer fin grain et du fer nerveux.

D'après le même auteur les coefficients de rupture pour la fonte, correspondant à la formule

$$M \approx \varphi r'''' \frac{I}{b}$$

ont pour valeur :

Cercle	$R'''' =$	1 950 kg/cm ²
Ellipse		2 541 —
Carré.		2 453 —
Rectangle $\frac{h}{b} = \frac{2}{1}$		2 740. —
— — $\frac{4}{1}$		3 262 —

Essais de Bach. — Bach a effectué de nombreux essais à la torsion.

1° Essais avec des prismes ronds et des vis de fer soudant et de fer fondu. Il ressort des résultats constatés une influence remarquable du sens du filet sur la résistance à la torsion. Des vis à filet droit, en fer soudant, tordues vers la gauche, se sont déchirées au filet alors que l'effort de rupture du noyau n'était pas atteint. Des vis à filet gauche en fer soudant soumises à un moment tordant à gauche et des vis à filet droit tordues à droite,

également en fer soudant, ne se sont rompues que lorsque l'effort a atteint sa valeur normale. Quand le moment est dirigé vers la gauche, il y a augmentation de longueur pour les filets à droite et raccourcissement pour les filets à gauche. Les éprouvettes rondes s'allongent aussi à la torsion ; la résistance des vis dans bien des cas est supérieure à la résistance des prismes ronds de même matière.

2° La résistance de la fonte, à la torsion, varie avec la forme de la section.

Prisme à section rectangulaire avec abouts renflés, $\frac{b}{h} = \frac{1}{1}$ à $\frac{1}{9}$; $\frac{R''''}{R} = 1,42$ à $1,59$. Rupture à proximité des extrémités de raccordement aux abouts.

Prisme à section circulaire avec abouts. $\frac{R''''}{R} = 1,02$ à $1,05$. Rupture à 45° .

Prisme creux, section circulaire. $\frac{R''''}{R} = 0,82$. Rupture dans la partie prismatique.

Prisme creux, section carrée. $\frac{R''''}{R} = 1,13$. Rupture dans la partie prismatique.

Si on compare la résistance à la torsion d'un prisme carré plein à celle d'un prisme carré creux on trouve $\frac{1,25}{1}$; la même comparaison entre un prisme rond plein et un prisme rond évidé fournit également le rapport $\frac{1,25}{1}$. La matière située vers l'axe est donc mieux utilisée que ne le montre la théorie ; ceci pour de la fonte, bien entendu, et le résultat est compréhensible car pour cette matière le coefficient de glissement β croît avec les tensions.

Prismes \square , I et $+$. Rupture aux extrémités en deux ou en quatre points diamétralement opposés. L'équation

$$M \leq \varphi r'''' \frac{I}{b} \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{8}{3}$$

paraît inapplicable pour la fonte, pour les sections précédentes. La section E est peu propice à la résistance à la torsion.

La résistance à la torsion de prismes travaillés, donc dépourvus de leur croûte, paraît supérieure à celle des prismes bruts.

Pour deux fontes A et B dont la résistance à la traction R a été respectivement 1579 et 1679 kgr/cm² on a obtenu les résultats suivants :

FORME DE LA SECTION	RÉSISTANCE A LA TORSION			
	R''' kg/cm ²		Rapportée à la résistance à la traction R	
	A	B	A	B
Circulaire pleine . .	1 618	»	1,02	»
Circulaire creuse . .	1 299	1 439	0,82	0,86
Rectangle $\frac{b}{h} = \frac{1}{4}$	2 228	2 598	1,42	1,55
$\frac{1}{2,5}$	2 529	»	1,60	»
$\frac{1}{5}$	2 366	2 663	1,50	1,59
$\frac{1}{9}$	2 508	»	1,59	»
Carrée creuse	1 788	»	1,13	»

Les rapports $\frac{R'''}{R}$ sont relatifs à de la bonne fonte de machine, travaillée. Les éprouvettes 6, 9 à 12 se sont toujours brisées à proximité des abouts de fixation à la machine à essayer ; on a vu qu'en cet endroit les sections ne pouvaient gauchir. C'est un cas de torsion combinée avec traction ; la valeur moyenne de R''' est donc ici plus faible.

Tableau récapitulatif.

FORME de la section.	MOMENT de torsion.	ANGLE DE TORSION δ à la distance 1.	$\frac{R''''}{R}$ pour la fonte.
Fig. 232	$\frac{\pi}{16} r'''' d^3$	$\frac{32}{\pi} \frac{M'}{d^4} \beta$	1
— 233	$\frac{\pi}{16} r'''' \frac{d^4 - d_o^4}{d}$	$\frac{32}{\pi} \frac{M'}{d^4 - d_o^4} \beta$	0,8 (4)
— 234	$\frac{\pi}{2} r'''' ab^2$	$\frac{1}{\pi} M' \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} \beta$	1 à 1,25 (2)
— 235 $a > b$ $\frac{a_o}{a} = \frac{b_o}{b} = m$	$\frac{\pi}{2} r'''' \frac{ab^3 - a_o b_o^3}{b}$	$\frac{1}{\pi} M' \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3 (1 - m^4)} \beta$	0,8 à 1 (3)
— 236	$\frac{1}{1,09} r'''' b^3$	$0,967 \frac{M'}{b^4} \beta$ pour $\frac{h}{b} = \frac{1}{1}$ $3,56 M' \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \beta$ pour $\frac{h}{b} = \frac{2}{1}$ $3,50 M' \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \beta$	
— 237 $h > b$	$\frac{2}{9} r'''' b^2 h$	pour $\frac{h}{b} = \frac{4}{1}$ $3,35 M' \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \beta$ pour $\frac{h}{b} = \frac{8}{1}$ $3,21 M' \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \beta$	1,4 à 1,6 (2)
— 238	$\frac{1}{20} r'''' b^3$	$46,2 \frac{M'}{b^4} \beta$	

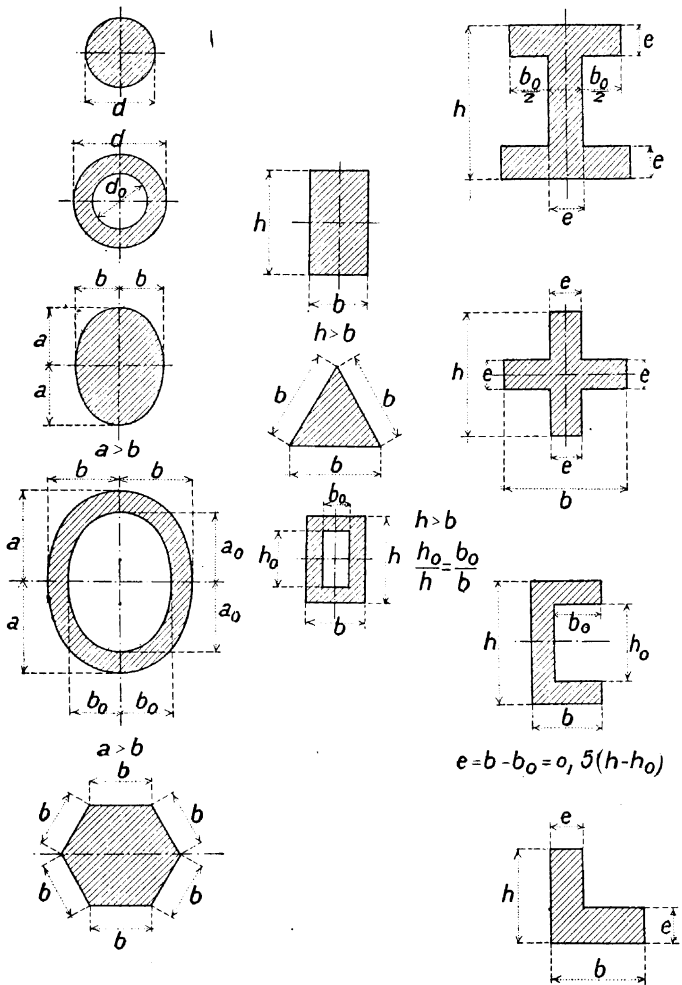


Fig. 232 à 243.

FORME de la section.	MOMENT de torsion.	ANGLE DE TORSION δ à la distance 1.	$\frac{R''''}{R}$ pour la fonte.
— 239 $h > b$ $\frac{h_0}{h} = \frac{b_0}{b}$	$\frac{2}{9} r'''' \frac{b^3 h - b_0^3 h_0}{b_0}$	»	1 à 1,25 (3)
Fig. 240	$\frac{2}{9} r'''' e^2 (h + 2b_0)$	»	1,4 à 1,6 (2)
— 241	$\frac{2}{9} r'''' e^2 (h + b - e)$	»	1,4 à 1,6 (2)
— 242 $e = b - b_0 =$ $0,5 (h - h_0)$	$\frac{2}{9} r'''' e^2 (h + 2b_0)$	»	1,4 à 1,6 (2)
Fig. 243	$\frac{2}{9} r'''' e^2 (h + b - e)$	»	1,4 à 1,6 (3)

Les éprouvettes 11 et 12 supposent au moins $\frac{e}{h} = \frac{1}{5}$. Pour 11, b_0 n'est pas supérieur à $e = b - b_0$.

1° Cette valeur dépend du rapport $\frac{d_0}{d}$ qui varie de 0,8 à 0,7.

2° Ces chiffres sont d'autant plus faibles que l'ellipse ressemble plus au cercle, le rectangle au carré, les sections double T et Σ au carré $b_0 = 0$, $h = e$, les sections + et équerre au carré $h = b = e$.

3° Même observation que (1) et (2). Plus a_0 et b_0 sont faibles vis-à-vis de a et b , b_0 et h_0 vis-à-vis de b et h plus on se rapproche de la limite supérieure. Celle-ci est relative aux longues sections.

CHAPITRE V

RÉSISTANCE COMPOSÉE

La résistance est dite composée quand des efforts de natures différentes agissent sur les pièces ; on peut avoir affaire, par exemple, à un effort tranchant et à une torsion, à une tension et à un effort tranchant, à une flexion et à une torsion, etc.

FORCES NORMALES DANS DES PLANS DIFFÉRENTS

Considérons (fig. 244) une pièce prismatique AB encastree en A et soumise à l'action de différentes forces P_1 , P_2 , P_3 , normales à son axe et situées dans des plans différents avec AB. Une section quelconque comprise entre B et D est soumise à la seule action de la force P_1 ; il n'y a rien de particulier à dire à ce sujet. Au delà de D jusqu'en E on a affaire aux deux forces P_1 et P_2 normales sur l'axe mais dans des plans différents. En D appliquons deux forces égales et contraires, de grandeur $\frac{P_1 a}{b}$; P_1 et DF donnent lieu sur la section S à des moments fléchissants égaux $P_1 a$ et $\frac{P_1 a}{b} b$ qui se détruisent ; cette section peut donc être considérée comme uniquement soumise aux forces P_2 et DG passant toutes deux par le point D ; par suite la section n'est sollicitée que par la résultante DH de ces forces, qui donne lieu à un moment

fléchissant DH . b agissant dans le plan HDG . La valeur de DH s'obtient par une construction graphique ou par la relation

$$\overline{DH}^2 = \left(\frac{P_1 a}{b}\right)^2 + P_2^2 + 2 \frac{P_1 a}{b} P_2 \cos \alpha$$

et le moment

$$DH \cdot b = \sqrt{(P_1 a)^2 + (P_2 b)^2 + 2(P_1 a)(P_2 b) \cos \alpha}$$

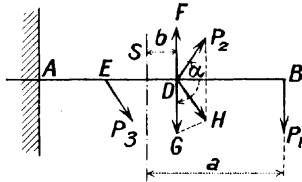


Fig. 244.

Soient $P_1 a = M_1$; $P_2 b = M_2$; il vient :

$$DH \cdot b = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2M_1 M_2 \cos \alpha}$$

Le moment relatif à une section quelconque est donc en grandeur et en direction la résultante des moments partiels. Si de D en A se trouvent de nouvelles forces normales on opérera de la même manière.

Observons que le plan des divers moments change avec la section considérée; pour que la flexion se produise dans le plan en question il faut donc que ce dernier coupe la section considérée suivant un axe principal d'inertie, c'est-à-dire qu'il doit y avoir égalité des moments d'inertie pour toutes les droites passant par le centre de gravité; c'est ce qui a lieu pour un cercle, un carré, un triangle équilatéral. Si cette condition n'est pas réalisée, la flexion est gauche.

Remarquons aussi que par suite des flexions dans des plans différents la fibre moyenne prend une double courbure; chacune des forces normales donne donc lieu à un

moment de torsion ; en général ce dernier est faible et on peut le négliger.

FORCES OBLIQUES DANS DES PLANS DIFFÉRENTS

Le problème se traite comme dans le cas précédent. Une force F (fig. 245) donne naissance dans une section S à un moment fléchissant

$$M_1 = P'a + Pb,$$

et à une force de traction P qu'on peut supposer uniformément répartie. Les moments M_1, M_2, \dots ainsi déterminés

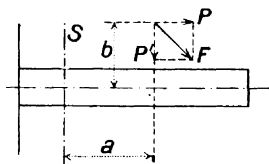


Fig. 245.

se composent entre eux comme ci-dessus et leur résultante M donne lieu pour la section S à une tension maximum $\frac{Mv}{I}$ à laquelle il faudra ajouter la traction

$$\frac{P + P_1 + P_2 + \dots}{S}.$$

EFFORT TRANCHANT ET TORSION

Les efforts extérieurs agissant sur le prisme supposé droit se réduisent pour toute section à un effort tranchant situé dans la section et à un moment de torsion dont le plan coupe normalement l'axe longitudinal. Sur un élément quelconque ds de la section considérée l'effort tranchant T donne naissance à un effort de glissement θ' et le moment tordant à un second effort de glis-

sement θ'' ; la résultante de θ' et θ'' fournit l'effort de glissement réel sur l'élément ds .

Section circulaire. — Nous avons vu que l'effort de glissement dû à l'effort tranchant est maximum sur le pourtour de la circonférence où il a pour valeur

$$\theta_1' = \frac{4}{3} \frac{T}{S} = \frac{16}{3\pi} \frac{T}{d^2} .$$

$S = \frac{\pi d^2}{4}$, surface de la section, d le diamètre du cercle. L'effort de glissement dû au moment tordant est aussi maximum sur la périphérie et il a pour expression

$$\theta_1'' = \frac{16}{\pi} \frac{M'}{d^3} .$$

Les efforts maximum θ_1' et θ_1'' s'ajoutent puisqu'ils sont tous deux tangents à la circonférence et on a, pour effort résultant :

$$\theta_1' + \theta_1'' = \frac{16}{3\pi} \frac{T}{d^2} + \frac{16}{\pi} \frac{M'}{d^3} = \frac{16}{\pi d^2} \left(\frac{T}{3} + \frac{M'}{d} \right) .$$

Section circulaire creuse à mince paroi. — On a ici :

$$\theta_1' = 2 \frac{T}{S} .$$

$$\theta_1'' = \frac{16}{\pi} M' \frac{d}{d^4 - d_o^4} = 2 \frac{M'}{d_m S} \text{ environ}$$

$$d_m = \frac{d + d_o}{2} ; \quad S = \frac{\pi}{4} (d^2 - d_o^2)$$

$$\theta_1' + \theta_1'' = \frac{2}{S} \left(T + \frac{M'}{d_m} \right) .$$

Solide de révolution en général. — On admet parfois que l'effort T est uniformément réparti dans la section ; soient l'axe de la pièce horizontal et l'effort T vertical.

Le couple de torsion M' donne lieu sur la circonférence extérieure à un effort tangentiel $\theta = \frac{M'v}{J_p}$ qui se combine

avec un autre effort de même nature $\frac{T}{S}$. La fatigue maximum a lieu à l'extrémité gauche du diamètre horizontal (fig. 246) où les deux efforts s'ajoutent et où on doit avoir

$$r''' \cong \frac{T}{S} \frac{M'v}{I_p}.$$

Si on voulait trouver la charge qui correspond à un autre point quelconque de la section on composerait

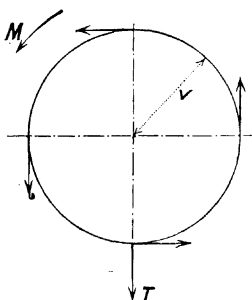


Fig. 246.

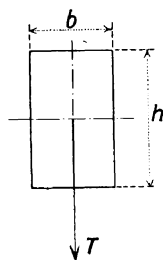


Fig. 247.

géométriquement entre elles les deux tensions; pour le point le plus bas, par exemple, où ces tensions sont à angle droit, leur résultante a pour valeur

$$r''' \cong \sqrt{\left(\frac{T}{S}\right)^2 + \left(\frac{M'v}{I_p}\right)^2}.$$

Section rectangulaire. — Supposons que l'effort tranchant T agisse normalement sur la largeur b (fig. 247); les deux glissements sont maxima au milieu des longs côtés. On a :

$$\begin{aligned} \theta_1' &= \frac{3}{2} \frac{T}{bh} \\ \theta_1'' &= \frac{9}{2} \frac{M'}{b^2h} \\ \theta_1' + \theta_1'' &= \frac{3}{2} \frac{1}{bh} \left(T + 3 \frac{M'}{b} \right) \end{aligned}$$

TRACTION OU PRESSION ET TORSION

Les forces extérieures agissant sur le prisme supposé droit donnent lieu dans une section quelconque à un effort normal P tangent à l'axe longitudinal et à un moment de torsion M' dont le plan est normal sur cet axe. Sur un élément ds quelconque de la section S considérée l'effort P , supposé de traction, engendre une tension normale

$$t = \frac{P}{S} .$$

Le moment tordant M' donne lieu au même point à un effort de glissement θ . La résultante des deux efforts est maximum, si on suppose l'effort P uniformément réparti, quand θ est maximum. Il s'agit ici d'une déformation composée et la formule de de Saint-Venant est applicable. Reprenons cette formule :

$$\frac{\delta a}{\alpha} = \frac{m-1}{2m} t + \frac{m+1}{m} \sqrt{\frac{t^2}{4} + \theta^2} .$$

On peut l'écrire, en appelant r l'effort admissible de traction :

$$r \cong \frac{m-1}{2m} t + \frac{m+1}{2m} \sqrt{t^2 + 4\theta^2} . \quad (1)$$

Nous avons vu, d'autre part, qu'entre le coefficient $\beta = \frac{\gamma}{\theta}$ et le coefficient de dilatation α existe la relation

$$\gamma = 2\alpha \frac{m+1}{m} \theta$$

établie en supposant une matière isotrope, ce qui n'est généralement pas le cas, notamment pour le fer laminé dont la résistance au glissement n'est pas la même dans le sens des fibres que dans le sens normal. Il y a donc

lieu, d'une manière générale, de corriger la relation ci-dessus, ce que l'on peut faire en introduisant un coefficient pratique α_0 et en écrivant :

$$\gamma = 2\alpha \frac{m+1}{m} \alpha_0 \theta \quad (2)$$

L'équation (1) devient :

$$r \cong \frac{m-1}{2m} t + \frac{m+1}{2m} \sqrt{t^2 + 4(\alpha_0\theta)^2}$$

Observons que l'introduction du coefficient α_0 dans (2) revient à son introduction dans la relation

$$r'''' = \frac{m}{m+1} r$$

entre les coefficients admissibles et à écrire :

$$\alpha r'''' = \frac{m}{m+1} r$$

d'où

$$\alpha_0 = \frac{r}{\frac{m+1}{m} r''''}$$

Les équations de condition seront donc :

$$\left. \begin{aligned} r &\cong \frac{m-1}{2m} t + \frac{m+1}{2m} \sqrt{t^2 + 4(\alpha_0\theta)^2} \\ \alpha_0 &= \frac{r}{\frac{m+1}{m} r''''} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Si } m = \frac{40}{3}$$

$$r \cong 0,3\bar{3} t + 0,6\bar{5} \sqrt{t^2 + 4(\alpha_0\theta)^2}$$

$$\alpha_0 = \frac{r}{1,3 r''''}$$

Supposons maintenant que l'effort P agisse par pression ; les équations de condition seront :

$$r \cong 0,35 t + 0,65 \sqrt{t^2 + 4 (\alpha \theta)^2}$$

$$\alpha_0 = \frac{r'}{1,3 r''''}$$

avec :

$$r \cong -0,35 t + 0,65 \sqrt{t^2 + 4 (\alpha_0 \theta)^2}$$

$$\alpha = \frac{r}{1,3 r''''}$$

si, bien entendu, le flambement ne peut se produire.

Plus simplement soit, pour un solide de révolution, M' le moment de torsion auquel est soumise la section S considérée ; P est la force de traction appliquée à la fibre moyenne. Le couple M' produit un glissement tangentiel dont la valeur est maximum à la circonférence et a pour expression $\theta = \frac{M'v}{I_p}$; l'effort P donne lieu en tous points à une tension normale $t = \frac{P}{S}$. On a donc :

$$r \cong 0,35 \frac{P}{S} + 0,65 \sqrt{\left(\frac{P}{S}\right)^2 + 4 \left(\alpha_0 \frac{M'v}{I_p}\right)^2}$$

ou tension de traction des points qui fatiguent le plus dans la section S et qui sont tous situés sur son contour extérieur.

FLEXION ET TORSION

Les forces extérieures agissant sur le prisme supposé droit donnent naissance, dans chaque section, à un moment fléchissant M et à un moment tordant M' ; le plan du premier coupe normalement le plan du second. En un point quelconque d'une section le moment fléchis-

sant engendrer une tension normale t et le moment de torsion un effort de glissement θ . L'effort résultant au point considéré doit réaliser les conditions :

$$r''' \geq 0,35 t + 0,65 \sqrt{t^2 + 4 (\alpha_0 \theta)^2}$$

$$\alpha_0 = \frac{r'''}{1,3 r'''}.$$

Il y a lieu de chercher dans la section l'endroit où se produit à la fois le maximum de t et de θ .

Pour un solide de révolution le moment tordant M' fait travailler d'une manière égale tous les points du contour extérieur; ceux qui fatiguent le plus à la flexion par le fait du moment fléchissant M sont dans le plan de flexion; ce sont donc ces derniers qui éprouvent la plus grande fatigue et on a :

$$r \text{ ou } r' \geq 0,35 \frac{Mv}{l} + 0,65 \sqrt{\left(\frac{Mr}{l}\right)^2 + 4 \left(\alpha_0 \frac{M'v}{l}\right)^2}$$

Observons que la plupart du temps il y a un effort tranchant dont il y a lieu éventuellement de tenir compte.

Section circulaire. — Les maxima de t et θ se produisent au même endroit et on a :

$$t_1 = \frac{32}{\pi} \frac{M}{d^3}$$

$$\theta_1 = \frac{16}{\pi} \frac{M'}{d^3}$$

donc

$$r''' \geq 0,35 \frac{32}{\pi} \frac{M}{d^3} + 0,65 \sqrt{\left(\frac{32}{\pi} \frac{M}{d^3}\right)^2 + \left(\frac{32}{\pi} \frac{M'}{d^3} \alpha_0\right)^2}$$

$$r''' \geq \frac{32}{\pi} \frac{1}{d^3} \left[0,35 M + 0,65 \sqrt{M^2 + (\alpha_0 M')^2} \right]$$

Le résultat est le même pour une section circulaire annulaire.

Section elliptique. — *a.* Le plan du moment fléchissant est parallèle au petit axe de l'ellipse. La tension normale maximum

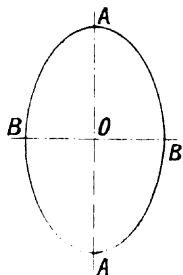


Fig. 248.

$$t_1 = \frac{4}{\pi} \frac{M}{ab^2}$$

se produit à l'extrémité B du petit axe (fig. 248). L'effort de glissement maximum

$$\theta_1 = \frac{2}{\pi} \frac{M'}{ab^2}$$

se produit au même endroit. On a donc :

$$r''' \cong 0,35 \frac{4}{\pi} \frac{M}{ab^2} + 0,65 \sqrt{\left(\frac{4}{\pi} \frac{M}{ab^2}\right)^2 + \left(\frac{4}{\pi} \frac{M'}{ab^2} \alpha_o\right)^2}$$

$$r''' \cong \frac{4}{\pi} \frac{1}{ab^2} [0,35 M + 0,65 \sqrt{M^2 + (\alpha_o M')^2}].$$

b. Le plan du moment fléchissant est parallèle au grand axe de l'ellipse. La tension normale t acquiert sa plus grande valeur à l'extrémité A du grand axe tandis que l'effort tangentiel θ est maximum à l'extrémité B du petit axe. Il y a donc lieu d'examiner où se produit l'effort résultant maximum. Il est évident, *a priori*, que cela ne peut être que sur la périphérie de l'ellipse. La tension normale t , à la distance y' du petit axe, a pour expression

$$t = \frac{M}{I} y' = \frac{M}{\frac{\pi}{4} a^3 b} y'.$$

L'effort tangentiel dû au moment tordant à la même distance y' du petit axe, a pour expression

$$\theta = \frac{2}{\pi} \frac{M'}{ab^2} \sqrt{\left(\frac{x'}{b}\right)^2 + \left(\frac{y'}{a}\right)^2} \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

Or :

$$\left(\frac{x'}{b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{y'}{a}\right)^2$$

$$\theta = \frac{2}{\pi} \frac{M'}{ab^2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4} y'^2}$$

L'effort résultant au point $y'x'$ de la périphérie a donc pour expression :

$$z = 0,35 \frac{4M}{\pi a^3 b} y' +$$

$$0,65 \sqrt{\left(\frac{4M}{\pi a^3 b} y'\right)^2 + \left(\frac{4M'}{\pi a b^2} \alpha_0\right)^2 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4} y'^2\right)}$$

$$z = \frac{4M}{\pi a^3 b} \left[0,35 y' + 0,65 \sqrt{y'^2 + \left(\frac{M'}{M} \frac{a^2}{b} \alpha_0\right)^2 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4} y'^2\right)} \right]$$

expression qui est maximum pour

$$\frac{dz}{dy'} = 0$$

d'où l'on tire $y = y'_0$

et on aura :

$$r''' \geq \frac{4M}{\pi a^2 b} \left[0,35 \frac{y'_0}{a} + \right.$$

$$\left. + 0,65 \sqrt{\left(\frac{y'_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{M'}{M} \frac{a}{b} \alpha_0\right)^2 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4} y_0'^2\right)} \right]$$

Section rectangulaire. — a. *Le plan du moment fléchissant est parallèle au petit côté b du rectangle.* — La tension normale et l'effort tangentiel sont maxima en même temps au milieu du grand côté (fig. 249).

On a

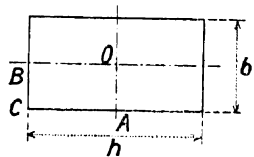


Fig. 249.

$$t = 6 \frac{M}{b^2 h} :$$

$$\theta = 4,5 \frac{M'}{b^2 h}$$

et :

$$r''' \cong \frac{6}{b^2 h} \left[0,35 M + 0,65 \sqrt{M^2 + (1,5 \alpha_0 M')^2} \right].$$

Pour le carré, $h = b$ et il vient :

$$r''' \cong \frac{6}{b^3} \left[0,35 M + 0,65 \sqrt{M^2 + (1,5 \alpha_0 M')^2} \right].$$

b. *Le plan du moment fléchissant est parallèle au long côté h du rectangle.* — Ici t et θ n'acquièrent pas leurs valeurs maxima au même endroit; t est maximum sur le petit côté et θ sur le milieu du grand côté; il y a lieu d'opérer comme il a été fait pour l'ellipse (b).

c. *Le plan du moment fléchissant n'est parallèle à aucun des côtés.* — Pour un élément quelconque de surface x, y , la tension normale est déterminée par l'équation

$$t = M \left(\frac{x \cos \beta}{I_X} - \frac{y \sin \beta}{I_Y} \right)$$

$$I_X = \frac{1}{12} b h^3; \quad I_Y = \frac{1}{12} b^3 h.$$

L'effort tangential est donné par l'expression

$$\theta = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}$$

$$\theta_y = 9 \frac{M'}{b^3 h} \left[1 - \left(\frac{2x}{h} \right)^2 \right] y$$

$$\theta_x = 9 \frac{M'}{b h^3} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right] x$$

$$\theta = 9 \frac{M'}{b h} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{2x}{h} \right)^2 \right]^2 \frac{y^2}{b^4} + \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right]^2 \frac{x^2}{h^4}}$$

Ces valeurs de θ et de t sont à introduire dans la formule de de Saint-Venant; on cherchera le maximum de z comme il a été fait pour une section elliptique (b).

TRACTION OU PRESSION ET EFFORT TRANCHANT

Les forces extérieures donnent lieu dans une section S à une composante normale P de traction tangente à l'axe longitudinal et à un effort tranchant T perpendiculaire sur cet axe. La tension t due à P étant supposée uniformément répartie, on a

$$t = \frac{P}{S} .$$

La plus grande valeur de θ due à T est, pour un cercle

$$\theta = \frac{4}{3} \frac{T}{\frac{\pi}{4} d^2} ,$$

et pour un rectangle

$$\theta = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} .$$

On introduira ces valeurs dans l'expression :

$$r''' \cong 0,35 t + 0,65 \sqrt{t^2 + 4 (\alpha_0 \theta)^2}$$

$$\alpha_0 = \frac{r'}{1,3 r'''} .$$

Si P est une compression, il viendra :

$$r' \cong 0,35 t + 0,65 \sqrt{t^2 + 4 (\alpha_0 \theta)^2}$$

$$\alpha_0 = \frac{r'}{1,3 r'''} .$$

avec :

$$r \cong - 0,35 t + 0,65 \sqrt{t^2 + 4 (\alpha_0 \theta)^2}$$

$$\alpha_0 = \frac{r}{1,3 r'''} .$$

FLEXION ET EFFORT TRANCHANT

Les forces extérieures donnent lieu dans une section quelconque du prisme à axe droit à un moment fléchissant M dont le plan est normal au plan de la section, et à un effort tranchant T dans la section. Sur un élément quelconque ds de la section considérée agissent : 1° une tension normale t due au moment fléchissant M ; un effort tangentiel θ dû à l'effort tranchant. Nous supposons que le plan des forces extérieures coupe la section suivant un axe de symétrie dans la direction duquel nous supposons aussi qu'agit l'effort tranchant T . Pour tous les éléments de surface ds situés à la même distance z de l'axe central la tension t a pour valeur :

$$t = \frac{Mz}{I}.$$

L'effort tangentiel appliqué sur un élément ds parallèlement à l'effort tranchant T a pour expression :

$$\theta = \frac{T}{bI} \int_z^v b z dz.$$

L'effort tangentiel θ' appliqué tangentiellement sur un élément ds du pourtour de la section est lié à l'effort tangentiel θ appliqué parallèlement à T par la relation

$$\theta = \theta' \cos \varphi$$

d'où

$$\theta' = \frac{\theta}{\cos \varphi}.$$

On aura donc pour un élément ds du pourtour

$$r''' = 0,35 \frac{Mz}{I} + 0,65 \sqrt{\left(\frac{M}{I} z\right)^2 + 4 \left(\frac{T \alpha_0}{bI \cos \varphi} \int_z^v b z dz\right)^2}$$

$$\alpha_0 = \frac{r'''}{1,3 r''''}.$$

Section circulaire (fig. 250). — Ici

$$M = T \cdot l; \quad l = \frac{\pi r^4}{4}; \quad z = r \sin \varphi;$$

$$\theta = \frac{Tl}{\frac{\pi}{4} r^4} r \sin \varphi = \frac{4}{\pi} \frac{Tl}{r^3} \sin \varphi$$

$$\theta' = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi r^2} \cos \varphi$$

$$r''' \cong 0,35 \frac{4}{\pi} \frac{Tl}{r^3} \sin \varphi +$$

$$0,65 \sqrt{\left(\frac{4}{\pi} \frac{Tl}{r^3} \sin \varphi\right)^2 + 4 \left(\frac{4}{3} \alpha_0 \frac{T}{\pi r^2} \cos \varphi\right)^2}$$

$$r''' \cong \frac{Tl}{\frac{\pi}{4} r^3} \left[0,35 \sin \varphi + 0,65 \sqrt{\sin^2 \varphi + \left(\frac{2}{3} \alpha_0 \frac{r}{l} \cos \varphi\right)^2} \right]$$

Soit $\alpha_0 = 1$, c'est-à-dire $r''' = 1,3r'$ ou $r'' = 0,77r'''$;

$\frac{Tl}{\frac{\pi}{4} r^3}$ est la tension normale appliquée aux fibres

extrêmes dans le cas où l'effort tranchant serait nul ; désignons-la par t' ; on a :

$$r''' \cong t' \left[0,35 \sin \varphi + 0,65 \sqrt{\sin^2 \varphi + \left(\frac{2}{3} \frac{r}{l} \cos \varphi\right)^2} \right]$$

Faisons diverses hypothèses.

Soit $l = r = \frac{d}{2}$. Il vient :

$$r''' \cong t' \left[0,35 \sin \varphi + 0,65 \sqrt{\sin^2 \varphi + \left(\frac{2}{3} \cos \varphi\right)^2} \right] = Z.$$

Pour	$\varphi = 0$	$Z_{\max} = 0,43 t'$,	point 0
	$\sin \varphi = 0,25$	$Z_{\max} = 0,54 t'$	1
	$\varphi = 30^\circ$	$Z_{\max} = 0,67 t'$	2
	$\varphi = 45^\circ$	$Z_{\max} = 0,80 t'$	3
	$\varphi = 60^\circ$	$Z_{\max} = 0,91 t'$	4
	$\varphi = 90^\circ$	$Z_{\max} = 1,00 t'$	5

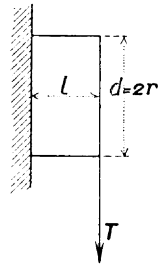


Fig. 250.

Pour	$\varphi = 0$	$Z_{\max} = 0,87 t'$
	$\sin \varphi = 0,25$	$Z_{\max} = 0,94 t'$
	$\varphi = 30^\circ$	$Z_{\max} = 0,99 t'$
	$\varphi = 45^\circ$	$Z_{\max} = 1,01 t'$
	$\varphi = 60^\circ$	$Z_{\max} = 1,01 t'$
	$\varphi = 90^\circ$	$Z_{\max} = 1,00 t'$

Le diagramme est la courbe $B_0B_1B_2B_3B_4A_5$. Donc pour $l = 0,5 r = 0,25 d$, l'effort tangential à l'axe neutre est encore notablement plus faible que l'effort normal t , au point 5, correspondant au cas où le moment fléchissant agirait seul. La plus grande valeur de l'effort résultant Z se produit entre $\varphi = 45^\circ$ et $\varphi = 60^\circ$ et surpasse t' d'environ 1,5 p. 100.

Soit $l = \frac{1}{3} r = \frac{d}{6}$. On a :

$$Z = t' \left[0,35 \sin \varphi + 0,65 \sqrt{\sin^2 \varphi + (2 \cos \varphi)^2} \right]$$

Pour	$\varphi = 0^\circ$	$Z_{\max} = 1,30 t'$
	$\sin \varphi = 0,25$	$Z_{\max} = 1,35 t'$
	$\varphi = 30^\circ$	$Z_{\max} = 1,35 t'$
	$\varphi = 45^\circ$	$Z_{\max} = 1,28 t'$
	$\varphi = 60^\circ$	$Z_{\max} = 1,16 t'$
	$\varphi = 90^\circ$	$Z_{\max} = 1,00 t'$

Le diagramme est la courbe $C_0C_1C_2C_3C_4A_5$. On voit qu'ici l'effort tangential à l'axe neutre surpasse l'effort dû au moment fléchissant, en 5, de 30 p. 100. La plus grande valeur de l'effort résultant se produit à une distance située entre $0,25 r$ et $0,5 r$ de l'axe neutre ; elle surpasse l'effort tangential sur cet axe de 4 p. 100 seulement. Il n'y a donc pas lieu, pour le rapport $l = \frac{d}{6}$, de tenir compte du moment fléchissant.

Soit enfin $l = 0,43 r = 0,215 d$. Dans le cas où $l = \frac{d}{4}$ l'effort tangential est les 0,87 de l'effort normal à la dis-

tance r ; pour $l = \frac{d}{6}$ il est de 30 p. 100 supérieur. Il est intéressant de déterminer pour quelle valeur de $\frac{l}{r}$ les deux efforts sont égaux.

Si $Z = t'$, $\varphi = 0$. on a :

$$1 = 0,65 \frac{2}{3} \frac{r}{l}$$

d'où

$$\frac{l}{r} = \frac{1,3}{3} = 0,43.$$

$$Z = t' \left[0,35 \sin \varphi + 0,65 \sqrt{\sin^2 \varphi + \left(\frac{2}{3} \frac{3}{1,3} \cos \varphi \right)^2} \right]$$

Pour	$\varphi = 0^\circ$	$Z_{\max} = 1,00 t'$
	$\sin \varphi = 0,25$	$Z_{\max} = 1,07 t'$
	$\varphi = 30^\circ$	$Z_{\max} = 1,10 t'$
	$\varphi = 45^\circ$	$Z_{\max} = 1,09 t'$
	$\varphi = 60^\circ$	$Z_{\max} = 1,06 t'$
	$\varphi = 90^\circ$	$Z_{\max} = 1,00 t'$

Le diagramme est la courbe $D_0D_1D_2D_3D_4A_5$; la valeur maximum de l'effort résultant est à peu près à mi-hauteur. Elle est de 10 p. 100 supérieure à l'effort tangentiel à l'axe neutre et supérieure à l'effort normal en 5.

Il résulte de ce qui précède que pour un prisme droit circulaire il suffit de calculer la résistance à l'effort de flexion

$$t' = \frac{Tl}{\frac{\pi}{32} d^3} = \frac{10 Tl}{d^3}$$

tant que la longueur l du prisme n'est pas beaucoup plus petite que $\frac{d}{4}$; si l est notablement inférieure à $\frac{d}{4}$ il y a lieu de ne considérer que l'effort tangentiel

$$t = \frac{4}{3} \frac{T}{\frac{\pi}{4} d^2}$$

Si le rapport α_0 est différent de l'unité il y a lieu de revenir à la formule générale.

Section rectangulaire bh ; T est supposé parallèle à h ; on a $M = Tl$

$$t = \frac{Tl}{\frac{1}{12} bh^3} z$$

et

$$0 = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]$$

expression des tensions à la distance z de l'axe neutre. Supposons encore $\alpha_0 = 1$; il vient :

$$r''' \cong t' \left(0,35 \frac{z}{h} + 0,65 \sqrt{\left(\frac{z}{h} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]^2} \right) = Z$$

en posant

$$t' = \frac{Tl}{\frac{1}{6} bh^2}$$

Prenons $l = 0,325 h$; il vient :

Pour	$z = 0$	$Z_{\max} = 1,00 t'$
	$z = \frac{1}{8} h$	$Z_{\max} = 1,04 t'$
	$z = \frac{1}{4} h$	$Z_{\max} = 0,99 t'$
	$z = \frac{3}{8} z$	$Z_{\max} = 0,91 t'$
	$z = \frac{1}{2} h$	$Z_{\max} = 1,00 t'$

Le diagramme est la courbe (fig. 252); on voit que l'effort résultant a une valeur maximum et une valeur minimum entre l'axe neutre et $z = \frac{h}{2}$. Dans le premier cas il

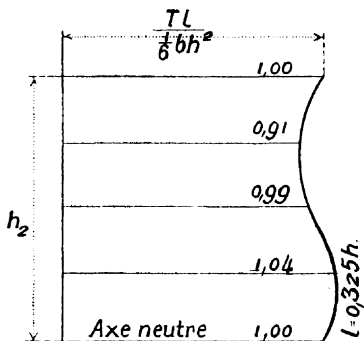


Fig. 252.

surpasse l' de 4 p. 100; dans le second cas il est inférieur de 9 p. 100 à l' . L'effort tangentiel à l'axe neutre, s'il y a

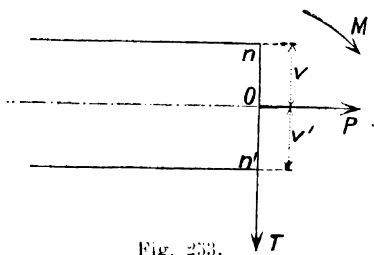


Fig. 253.

effort tranchant seul, est égal à l'effort normal aux fibres externes s'il y a flexion seule. Si $l < 0,325 h$ l'effort tangentiel à l'axe neutre a une valeur supérieure à l'effort normal vers l'extérieur; l'inverse a lieu pour $l > 0,325 h$. Donc dans le cas d'un prisme droit rectangulaire, il

suffit de calculer la résistance à l'effort normal seul

$$t = \frac{6 T l}{b h^2}$$

si $l \geq 0,325 h$; si $l < 0,325 h$ on ne considère que l'effort tangentiel

$$\theta = \frac{3}{2} \frac{T}{b h}$$

Si α_0 est différent de l'unité on utilisera la formule générale.

Section double T. — Pour cette section et d'autres semblables il y a lieu d'appliquer la formule générale.

TRACTION, FLEXION, EFFORT TRANCHANT

Soit M le moment fléchissant auquel est soumise la section S considérée de la pièce; P est la force de traction appliquée au centre de gravité O de cette section et supposée répartie uniformément. Pour les tensions en n et n' (fig. 253) aux fibres les plus fatiguées, on a

$$t = \frac{Mv}{I} + \frac{P}{S} \text{ traction}$$

et

$$t = \frac{Mv'}{I} - \frac{P}{S} \text{ compression.}$$

Supposons la différence $\frac{Mv'}{I} - \frac{P}{S}$ positive, c'est-à-dire qu'il y a réellement compression des fibres n' ; dans le cas contraire la fatigue est moindre en n qu'en n' et il n'y a pas lieu de s'en préoccuper. On devra avoir :

$$r \geq 0,35 \left(\frac{Mv}{I} + \frac{P}{S} \right) + 0,65 \sqrt{\left(\frac{Mv}{I} + \frac{P}{S} \right)^2 + 4 \left(\alpha_0 \frac{T}{S} \right)^2}$$

$$r' \geq 0,35 \left(\frac{Mv'}{I} - \frac{P}{S} \right) + 0,65 \sqrt{\left(\frac{Mv'}{I} - \frac{P}{S} \right)^2 + 4 \left(\alpha_0 \frac{T}{S} \right)^2}$$

Nous avons supposé dans ces formules que T était uniformément réparti. Si, au lieu d'une traction P , on a une compression, on changera $+ P$ en $- P$ dans les formules.

TRACTION, EFFORT TRANCHANT, FLEXION, TORSION

Nous supposons avoir affaire ici à un solide de révolution. En un point quelconque (fig. 254) du contour exté-

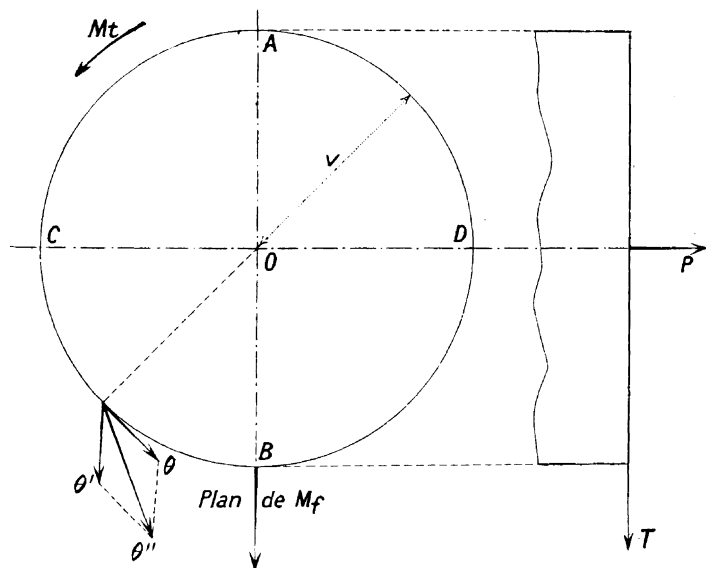


Fig. 254.

rieur de la section transversale considérée on a deux tensions tangentielles θ et θ' dues au couple de torsion M' et à l'effort tranchant T ; elles peuvent être remplacées par la règle du parallélogramme en une tension tangentielle θ'' ; celle-ci se combine avec la tension normale due à P et avec la tension normale de pression ou

d'extension due au moment fléchissant M. En A les deux tensions θ et θ' sont à angle droit et donnent lieu à un effort de cisaillement

$$\theta'' = \sqrt{\left(\frac{T}{S}\right)^2 + \left(\frac{M'v'}{I_p}\right)^2}.$$

D'autre part, en ce même point, les tensions normales $\frac{Mv}{I}$ et $\frac{P}{S}$ dues au moment fléchissant M et à la traction P s'ajoutent entre elles pour donner un effort de traction $\frac{Mv}{I} + \frac{P}{S}$; la fatigue maximum à la traction qui se produit en A a donc pour valeur :

$$0,35 \left(\frac{Mv}{I} + \frac{P}{S}\right) + 0,65 \sqrt{\left(\frac{Mv}{I} + \frac{P}{S}\right)^2 + 4 \alpha_o^2 \left[\left(\frac{T}{S}\right)^2 + \left(\frac{M'v'}{I_p}\right)^2\right]}$$

Au point B l'effort de traction $\frac{Mv}{I}$ est remplacé par un effort de compression $\frac{Mv}{I}$; on a donc pour la charge à la compression en B :

$$0,35 \left(\frac{Mv}{I} - \frac{P}{S}\right) + 0,65 \sqrt{\left(\frac{Mv}{I} - \frac{P}{S}\right)^2 + 4 \alpha_o^2 \left[\left(\frac{T}{S}\right)^2 + \left(\frac{M'v'}{I_p}\right)^2\right]}$$

En C l'effet produit par le moment fléchissant M est nul tandis que les tensions tangentielles θ et θ' s'ajoutent; on a donc pour la valeur de la fatigue maximum à la traction au point considéré :

$$0,35 \frac{P}{S} + 0,65 \sqrt{\left(\frac{P}{S}\right)^2 + 4 \alpha_o^2 \left[\left(\frac{T}{S}\right)^2 + \left(\frac{M'v'}{I_p}\right)^2\right]}$$

En D les deux tensions θ et θ' se retranchent l'une de l'autre, ce qui donne pour ce point :

$$0,35 \frac{P}{S} + 0,65 \sqrt{\left(\frac{P}{S}\right)^2 + 4 \alpha_0^2 \left[\left(\frac{T}{S}\right)^2 - \left(\frac{M'v}{I_p}\right)^2\right]}$$

Il n'y a évidemment pas lieu de tenir compte de cette valeur, car elle est inférieure à la précédente.

Si au lieu d'une traction P on a une compression, on remplacera $+P$ par $-P$ dans les formules précédentes. En pratique la flexion l'emporte souvent sur le glissement; la fatigue maximum se produit donc en A dans le cas d'une traction P et en B dans le cas d'une compression $-P$. On n'a donc le plus souvent besoin, pour s'assurer de la solidité de la pièce, qu'à faire usage de la formule

$$r' \text{ ou } r \cong 0,35 \left(\frac{Mv}{I} + \frac{P}{S}\right) + \\ + 0,65 \sqrt{\left(\frac{Mv}{I} + \frac{P}{S}\right)^2 + 4 \alpha_0^2 \left[\left(\frac{T}{S}\right)^2 + \left(\frac{M'v}{I_p}\right)^2\right]}$$

Nous avons supposé dans ce qui précède que les pièces comprimées sont assez courtes vis-à-vis de leurs dimensions transversales pour que le flambement ne soit pas à craindre.

CHAPITRE VI

RÉSISTANCE DES ENVELOPPES ET DES PLAQUES

ENVELOPPES CYLINDRIQUES A PRESSION INTÉRIEURE ET EXTÉRIEURE

Théorie. — Nous désignons par :

a le rayon intérieur du cylindre ;

b le rayon extérieur ;

p la pression intérieure spécifique ;

p' la pression externe spécifique.

Rapportons l'enveloppe cylindrique à un système de trois axes rectangulaires (fig. 255) : OX suivant l'axe du cylindre, OY et OZ dans un des plans normaux sur l'axe. L'enveloppe est supposée terminée aux deux extrémités par des calottes n'ayant aucune influence sur la déformation de l'enveloppe proprement dite.

Considérons un point quelconque de l'enveloppe dans le plan des YZ ; il a pour coordonnées $x = 0$, y et z . Après déformation ces coordonnées ont varié.

Appelons :

t_x la tension agissant en ce point dans le sens de l'axe des X ;

t_y la tension au même point agissant dans la direction OY ;

t_z la tension au même point agissant dans la direction OZ.

Concevons (fig. 256) autour d'un point un élément volu-

mique infiniment petit compris : 1° entre deux plans radiaux AB, CD faisant entre eux un angle $d\varphi$; 2° entre

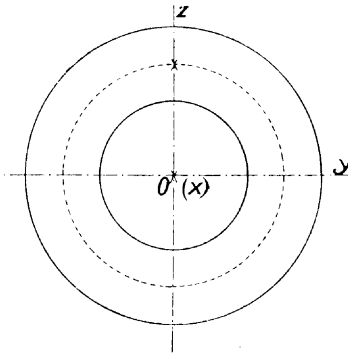


Fig. 255.

deux plans normaux sur l'axe du cylindre et distants de dx ; 3° entre deux surfaces cylindriques, distantes de dz , concentriques avec les autres.

Dans le plan de la section ABCD agissent :

1° Les efforts spécifiques t_y , t_y normaux respectivement sur AB et DC; leur résultante sur chacun des plans est $t_y dz \cdot dx$; ces résultantes sont de sens contraires.

2° L'effort spécifique t_z sur AC; la résultante est $t_z \cdot z \cdot d\varphi \cdot dx$; en passant sur l'élément BD, t_z change de sens et subit un accroissement; en développant par le théorème de Taylor et s'arrêtant aux termes carrés, l'effort spécifique sur AC sera $t_z + \frac{dt_z}{dz} dz$, la résultante,

$$\left(t_z + \frac{dt_z}{dz} dz\right) (z + dz) d\varphi \cdot dx.$$

L'équation d'équilibre dans le sens OZ est donc :

$$t_z \cdot z \cdot d\varphi dx - \left(t_z + \frac{dt_z}{dz} dz\right) (z + dz) d\varphi dx + 2 t_y dz dx \sin \frac{d\varphi}{2} = 0$$

$d\varphi$ est très faible et on peut écrire

$$2 \sin \frac{d\varphi}{2} = 2 \frac{d\varphi}{2} = d\varphi.$$

Divisons par $d\zeta dx dz$ et négligeons le terme $\frac{dt_z}{d\zeta} dz$ qui est un infiniment petit du second ordre ; il vient :

$$\frac{dt_z}{d\zeta} = \frac{t_y - t_z}{z} \quad (I)$$

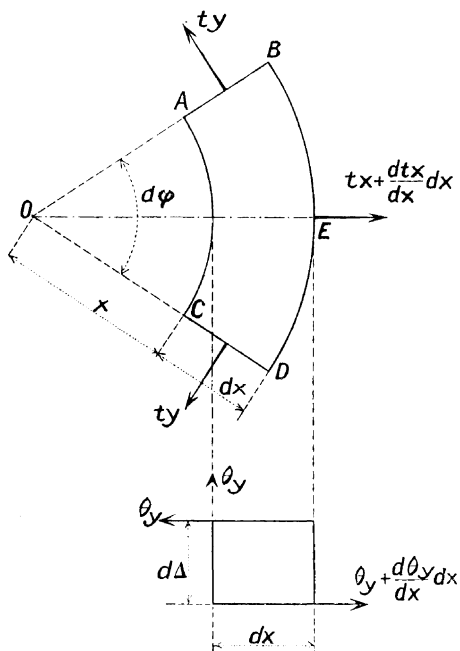


Fig. 256¹.

D'autre part on a :

$$(II) \quad \left. \begin{aligned} \delta_x &= \alpha \left(t_x - \frac{t_y + t_z}{m} \right) \\ \delta_y &= \alpha \left(t_y - \frac{t_x + t_z}{m} \right) \\ \delta_z &= \alpha \left(t_z - \frac{t_x + t_y}{m} \right) \end{aligned} \right\}$$

¹ Dans la figure 256 remplacer partout x par z .

Additionnons :

$$\delta_x + \delta_y + \delta_z = \alpha \left(t_x + t_y + t_z + 2 \frac{t_x + t_y + t_z}{m} \right) = e$$

e , dilatation cubique. Nous avons établi dans la théorie de l'élasticité :

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_x = \frac{2}{\beta} \left(\delta_x + \frac{e}{m-2} \right) \\ t_y = \frac{2}{\beta} \left(\delta_y + \frac{e}{m-2} \right) \\ t_z = \frac{2}{\beta} \left(\delta_z + \frac{e}{m-2} \right) \end{array} \right.$$

Du fait des pressions intérieures et extérieures l'ordonnée z subit un accroissement w ; la circonférence AC, de rayon z , se dilate concentriquement et acquiert le rayon $z + w$; cette dilatation est évidemment δ_y et elle a pour expression :

$$\delta_y = \frac{w}{z} = \frac{2\pi(z+w) - 2\pi z}{2\pi z}$$

En même temps δ_z subit un accroissement dw et la dilatation radiale ou δ_z prend pour valeur

$$\delta = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Les équations (III) deviennent en y introduisant ces expressions de δ_y et δ_z :

$$(IV) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_x = \frac{2}{\beta} \left(\delta_x + \frac{w}{z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ t_y = \frac{2}{\beta} \left(\frac{w}{z} + \frac{\delta_x + \frac{w}{z} + \frac{\partial w}{\partial z}}{m-2} \right) \\ t_z = \frac{2}{\beta} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\delta_x + \frac{w}{z} + \frac{\partial w}{\partial z}}{m-2} \right) \end{array} \right.$$

Tirons δ_x de la première de ces relations :

$$\delta_x = \frac{m-2}{2(m-1)} \beta t_x - \frac{\frac{w}{z} + \frac{\partial w}{\partial z}}{m-1}$$

et introduisons cette expression dans les deux autres :

$$t_y = \frac{2}{m-2} \frac{1}{\beta} \left(m \frac{w}{z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{t_x}{m-1}$$

$$t_z = \frac{2}{m-2} \frac{1}{\beta} \left(\frac{w}{z} + m \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{t_x}{m-1}$$

Enfin introduisons ces deux dernières expressions dans l'équation (I); il vient :

$$z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{w}{z} = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial \left(\frac{w}{z} \right)}{\partial z} = 0.$$

Intégrons :

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{w}{z} = A$$

d'où

$$z \frac{\partial w}{\partial z} + w = Az$$

ou

$$\frac{\partial (wz)}{\partial z} = Az$$

Intégrons encore :

$$zw = \frac{1}{2} Az^2 + B.$$

divisons par z^2 :

$$\frac{w}{z} = \frac{A}{2} + \frac{B}{z^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{A}{2} - \frac{B}{z^2}$$

Introduisons ces valeurs dans les équations IV :

$$t_y = \frac{2}{m-1} \beta \left[\frac{A}{2} (m+1) + \frac{B}{z^2} (m-1) \right] + \frac{t_x}{m-1}$$

$$t_z = \frac{2}{m-1} \beta \left[\frac{A}{2} (m+1) - \frac{B}{z^2} (m-1) \right] + \frac{t_x}{m-1}$$

Déterminons les constantes d'intégration A et B :

$$\begin{array}{ll} \text{Pour } z = a & t_z = -p \\ & z = b & t_z = -p' \end{array}$$

c'est-à-dire :

$$-p = \frac{2}{m-1} \frac{1}{\beta} \left[\frac{A}{2} (m+1) - \frac{B}{a^2} (m-1) \right] + \frac{t_x}{m-1}$$

$$-p' = \frac{2}{m-1} \frac{1}{\beta} \left[\frac{A}{2} (m+1) - \frac{B}{b^2} (m-1) \right] + \frac{t_x}{m-1}$$

d'où l'on tire :

$$A = \frac{m-1}{m+1} \beta \left(\frac{pa^2 - p'b^2}{b^2 - a^2} - \frac{t_x}{m-1} \right)$$

$$B = \frac{p - p'}{2} \beta \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}$$

La pression effective sur l'enveloppe est la différence entre la pression intérieure et la pression externe ; sur une section normale sur l'axe du cylindre elle a pour expression :

$$\pi a^2 p - \pi b^2 p'$$

On peut admettre, puisqu'en général il s'agit d'un fluide, que la pression se répartit uniformément sur la section et on peut écrire :

$$\pi (b^2 - a^2) t_x = \pi (pa^2 - p'b^2)$$

$$t_x = \frac{pa^2 - p'b^2}{b^2 - a^2}$$

Introduisons cette valeur ainsi que celle des constantes A et B dans les expressions de t' et t_z :

$$(V) \quad \begin{cases} t_y = \frac{pa^2 - p'b^2}{b^2 - a^2} + (p - p') \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{1}{z^2} \\ t_z = \frac{pa^2 - p'b^2}{b^2 - a^2} - (p - p') \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{1}{z^2} \end{cases}$$

Les dilatations δ_x , δ_y et δ_z prennent la forme :

$$\begin{aligned} \delta_x &= \frac{m-2}{m} \alpha \frac{pa^2 - p'b^2}{b^2 - a^2} \\ \delta_y &= \frac{m-2}{m} \alpha \frac{pa^2 - p'b^2}{b^2 - a^2} + \frac{m+1}{m} \alpha \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (p - p') \frac{1}{z^2} \\ \delta_z &= \frac{m-2}{m} \alpha \frac{pa^2 - p'b^2}{b^2 - a^2} - \frac{m+1}{m} \alpha \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (p - p') \frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

Nous allons examiner différents cas.

Pression intérieure seule. — On a $p' = 0$. Il est visible que la dilatation δ_y est la plus grande ; c'est donc la seule à considérer ; δ_y et δ_z acquièrent d'ailleurs leur valeur maximum pour $z = a$ c'est-à-dire à la surface interne de l'enveloppe. Si $m = \frac{10}{3}$ on aura donc :

$$\left(\frac{\delta_y}{\alpha} \right)_{\max} = \frac{(m+1) b^2 + (m-2) a^2}{m (b^2 - a^2)} p = \frac{1,3 b^2 + 0,4 a^2}{b^2 - a^2}$$

Soit r , coefficient admissible à la traction, l'équation de résistance sera :

$$r \geq \frac{\frac{m+1}{m} b^2 + \frac{m-2}{m} a^2}{b^2 - a^2} p = \frac{1,3 b^2 + 0,4 a^2}{b^2 - a^2} p$$

ou (VI) :

$$b \geq a \sqrt{\frac{r + \left(1 - \frac{2}{m}\right) p}{r - \left(1 + \frac{1}{m}\right) p}} = a \sqrt{\frac{r + 0,4 p}{r - 1,3 p}}$$

Pour $1,3 p = r$, $b = \infty$ quel que petit que soit a à condition que a ne soit pas nul.

Il résulte de là qu'il est inutile d'augmenter l'épaisseur de la paroi de l'enveloppe une fois que la pression intérieure atteint une certaine limite ; on n'y gagne rien en résistance ; ensuite p ne peut dépasser la limite

$$p < \frac{r}{1,3}$$

ou, en général,

$$p < \frac{m+1}{m} r$$

La matière située vers l'extérieur est donc très mal utilisée ; cette inertie au delà de $r = 1,3 p$, valeur pour laquelle le métal ne travaille plus, a conduit à l'emploi des *tubes frettés* ou de cylindres concentriques.

Tubes frettés. — Le frettage consiste à appliquer à chaud sur le cylindre une enveloppe dont le diamètre est à froid légèrement inférieur à celui de l'enveloppe interne. Reprenons l'équation :

$$\frac{w}{z} = \frac{A}{2} + \frac{B}{z^2}$$

ou

$$w = \frac{A}{2} z + \frac{B}{z}$$

Affectons de l'indice 1 les lettres se rapportant à la frette, de l'indice 2 celles qui sont relatives à l'enveloppe. On a :

$$w_1 = \frac{A_1}{2} z + \frac{B_1}{z} ; \quad w_2 = \frac{A_2}{2} z + \frac{B_2}{z}$$

Il s'agit de déterminer les quatre constantes A_1 , A_2 , B_1 et B_2 . Nous ferons pour cela quatre hypothèses :

1° $t = 0$ pour $z = a$;

2° $t_z = 0$ pour $z = c$;

c étant le rayon intérieur de la frette ; ces deux conditions proviennent de l'application de la frette ;

3° t_z prend la même valeur pour l'enveloppe et la frette pour $z = b$.

4° Appelons Δ la différence entre les diamètres c et b ; cette quantité est fixée *à priori*. La somme des valeurs absolues de w_1 et w_2 pour $z = b$ est égale à la différence Δ ; w_1 est positif (la frette subit une dilatation) ; w_2 est négatif (l'enveloppe est comprimée). — Ecrivons ces quatre conditions en nous reportant à la valeur de t_z ; il vient :

$$\frac{A_2}{2} (m + 1) - \frac{B_2}{a^2} (m - 1) = 0$$

$$\frac{A_1}{2} (m + 1) - \frac{B_1}{c^2} (m - 1) = 0$$

$$\frac{A_1}{2} b + \frac{B_1}{b} - \frac{A_2}{2} b + \frac{B_2}{b} = \Delta$$

$$\frac{A_1}{2} (m + 1) - \frac{B_2}{b^2} (m - 1) = \frac{A_1}{2} (m + 1) - \frac{B_1}{b^2} (m - 1)$$

On tire de ces quatre relations :

$$\frac{A_1}{2} = - \frac{(c^2 - b^2) (m - 1) \Delta}{2 (c^2 - a^2) mb}$$

$$B_1 = - a^2 \frac{(c^2 - b^2) (m + 1) \Delta}{2 (c^2 - a^2) mb}$$

$$\frac{A_2}{2} = \frac{(b^2 - a^2) (m - 1) \Delta}{2 (c^2 - a^2) mb}$$

$$B_2 = c^2 \frac{(b^2 - a^2) (m + 1) \Delta}{2 (c^2 - a^2) mb}$$

La pression qu'exerce la frette sur l'enveloppe a pour expression :

$$(t_z)_f = \frac{2}{m - 1} \beta \left[\frac{A_1}{2} (m + 1) - \frac{B_1}{b^2} (m - 1) \right]$$

$$(t_z)_f = - \frac{(b^2 - a^2) (c^2 - b^2)}{2 b^2 (c^2 - a^2)} \frac{1}{z} \frac{\Delta}{b}$$

Reprenons d'autre part les formules

$$t_z = p \frac{a^2 (z^2 - b^2)}{z^2 (b^2 - a^2)}$$

$$t_y = p \frac{a^2 (z^2 + b^2)}{z^2 (b^2 - a^2)}$$

obtenues des formules (V) en y faisant $p' = 0$. On peut calculer t_z et t_y en un point quelconque de la frette en écrivant dans ces formules b au lieu de a et c au lieu de b ; enfin $(t_z)_f$ au lieu de p . Empruntons un exemple à Föppl. Soient $a = 10$ cm., $b = 15$, $c = 20$. A 100° le diamètre interne de la frette est égal au diamètre extérieur de l'enveloppe; Δ est la différence de ces diamètres à froid; si $\frac{1}{80\,000}$ est le coefficient de dilatation calorifique

$$\Delta = \frac{b}{80\,000} 100 = 0,187 \text{ mm.}$$

Prenons

$$m = \frac{10}{3}; \quad \alpha = \frac{1}{2\,500\,000} \text{ (acier)}$$

On trouve pour la pression de la frette sur l'enveloppe intérieure :

$$(t_z)_f = - 506 \text{ kg/cm}^2.$$

A la paroi intérieure du tube on a ($z = a$) :

$$t_z = - 1820 \text{ kg/cm}^2.$$

A la surface interne de la frette

$$t_z = + 1960 \text{ kg/cm}^2.$$

Soit maintenant une pression $p = 2\,000$ kg/cm²; on trouve sur la face intérieure de l'enveloppe :

$$t_z = + 3930 \text{ kg/cm}^2.$$

et sur la face interne du tube

$$t_z = + 2010 \text{ kg/cm}^2.$$

Ajoutons aux chiffres ci-dessus :

Face interne de l'enveloppe :

$$- 1\ 820 + 3\ 930 = 2\ 110 \text{ kg 'cm}^2.$$

Face interne de la frette :

$$+ 1\ 960 + 2\ 010 = 3\ 970 \text{ kg cm}^2.$$

Enveloppes en mince paroi. — Si l'épaisseur de la paroi $e = b - a$ d'une enveloppe est relativement faible on peut admettre avec suffisamment d'exactitude que les pressions se répartissent uniformément sur la section du cylindre ; soit l longueur de l'enveloppe. On a :

$$2\ a\ l\ p \leq 2\ e\ l\ r$$

d'où

$$r \geq p \frac{a}{e} \quad \text{ou} \quad e \geq a \frac{p}{r}$$

relation que l'on peut tirer de l'égalité (VI) en y faisant $m = \infty$, c'est-à-dire en supposant que la contraction latérale $\frac{\delta}{m}$ est nulle ; cette égalité devient :

$$b = a \sqrt{\frac{r+p}{r-p}} = a \sqrt{1 + 2 \frac{p}{r-p}}$$

Pour une enveloppe en mince paroi, p ne représente qu'une faible portion de r et on a :

$$b = a \sqrt{1 + 2 \frac{p}{r}} = a \left(1 + \frac{p}{r} \right)$$

$$b - a = e = a \frac{p}{r}$$

comme ci-dessus. La tension t sur la section normale à l'axe, $\pi (b^2 - a^2)$, se tire de la relation

$$\pi a^2 p = \pi (b^2 - a^2) t$$

$$t = p \frac{a^2}{b^2 - a^2} = p \frac{a}{\frac{a+b}{a} (b-a)} = \frac{1}{2} p \frac{a}{e}$$

Elle n'est donc que la moitié de la tension dans le sens du pourtour de la section.

Pression extérieure seule. — Ici $p = 0$

$$\delta_x = - \frac{m-2}{m} \alpha \frac{b^2}{b^2-a^2} p'$$

$$\delta_y = - \frac{m-2}{m} \alpha \frac{b^2}{b^2-a^2} p' - \frac{m+1}{m} \alpha \frac{a^2 b^2}{b^2-a^2} p' \frac{1}{z^2}$$

$$\delta_z = - \frac{m-2}{m} \alpha \frac{b^2}{b^2-a^2} p' - \frac{m+1}{m} \alpha \frac{a^2 b^2}{b^2-a^2} p' \frac{1}{z^2}$$

δ_x est la dilatation la plus faible ; on peut ne considérer que δ_y et δ_z qui sont maxima pour $z = a$

$$\left(- \frac{\delta_y}{\alpha} \right)_{\max} = \frac{2m-1}{m} \frac{b^2}{b^2-a^2} p' = 1,7 \frac{b^2}{b^2-a^2} p'$$

$$\left(\frac{\delta_z}{\alpha} \right)_{\max} = \frac{3}{m} \frac{b^2}{b^2-a^2} p' = 0,9 \frac{b^2}{b^2-a^2} p'$$

pour $m = \frac{10}{3}$. On peut écrire :

$$r' \geq 1,7 \frac{b^2}{b^2-a^2} p' \quad \text{ou} \quad b = \frac{a}{\sqrt{1 - 1,7 \frac{p'}{r'}}}$$

$$r \geq 0,9 \frac{b^2}{b^2-a^2} p' \quad \text{ou} \quad b = \frac{a}{\sqrt{1 - 0,9 \frac{p'}{r}}}$$

valables pour

$$p' < \frac{r'}{1,7} \quad \text{et} \quad p' < \frac{r}{0,9}.$$

Pour une enveloppe en mince paroi $e = b - a$ on est amené, en opérant comme ci-dessus, à

$$r' \geq p' \frac{b}{e} \quad \text{ou} \quad e = b \frac{p'}{r'}.$$

Enveloppes sphériques. — Soient a le rayon intérieur de la sphère, b son rayon externe. On opère comme pour les enveloppes cylindriques.

Pression intérieure seule. — Effort maximum à la paroi interne. Tangentiellement au contour on a :

$$r = \frac{\frac{m+1}{2m} b^3 + \frac{m-2}{m} a^3}{b^3 - a^3} p = \frac{0,63 b^3 + 0,4 a^3}{b^3 - a^3} p$$

Radialement :

$$r' = \frac{\frac{m+1}{m} b^3 - \frac{m-2}{m} a^3}{b^3 - a^3} p = \frac{1,3 b^3 - 0,4 a^3}{b^3 - a^3} p$$

Pour une enveloppe en mince paroi :

$$e = b - a \\ \pi a^2 p \leq r 2\pi a e$$

d'où

$$r \geq \frac{1}{2} p \frac{a}{e} \quad \text{ou} \quad e = \frac{1}{2} a \frac{p}{r}.$$

Pression extérieure seule. — Efforts maxima vers la face interne. Direction tangentielle au contour :

$$r = \frac{3(m-1)}{2m} \frac{b^3}{b^3 - a^3} p' = 1,03 \frac{b^3}{b^3 - a^3} p'$$

Radialement :

$$r = \frac{3}{m} \frac{b^3}{b^3 - a^3} p' = 0,9 \frac{b^3}{b^3 - a^3} p'$$

et pour une enveloppe en mince paroi :

$$r' \geq \frac{1}{2} p' \frac{b}{e} \quad \text{ou} \quad e = \frac{1}{2} b \frac{p'}{r'}$$

PLAQUES

Plaques circulaires planes. — La théorie de la résistance des plaques est due à Winckler et à Grashof.

Considérons (fig. 257) un disque circulaire plein, d'épaisseur h , de rayon r , reposant librement sur son contour ou bien encastré par ses bords. Nous le supposons chargé d'un poids unique P appliqué au centre, nor-

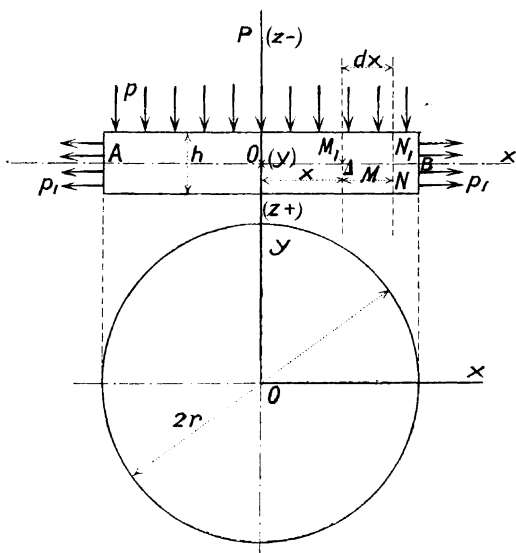


Fig. 257.

malement sur la plaque et d'un poids uniformément réparti p par unité de surface. La surface latérale $2\pi rh$ est soumise radialement à l'action d'un effort p_l , par unité de surface, uniformément réparti.

Rapportons ce disque à un système de trois axes coordonnés rectangulaires ; OX et OY sont dans le plan médian primitif de la plaque ; l'origine est au centre ; l'axe OZ est normal sur le plan des XY ; les Z positifs sont comptés vers le bas.

Le problème présente une certaine analogie avec celui des prismes fléchis ; au lieu d'une ligne élastique nous

Soit une seconde droite N_1N à la distance dx de M_1M ; la fibre MN est devenue $M'N'$: elle s'est allongée par rapport à $M_1N_1 = dx$; cet allongement peut se décomposer en deux composantes, suivant t_x et t_z ; mais t_z sera nécessairement extrêmement faible.

Rappelons les formules :

$$\left. \begin{aligned} t_x &= \frac{2}{\beta} \left(\delta_x + \frac{\delta_x + \delta_y + \delta_z}{m-2} \right) \\ t_y &= \frac{2}{\beta} \left(\delta_y + \frac{\delta_x + \delta_y + \delta_z}{m-2} \right) \\ t_z &= \frac{2}{\beta} \left(\delta_z + \frac{\delta_x + \delta_y + \delta_z}{m-2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Nous venons de voir que t_z était très faible, la hauteur h de la plaque étant petite vis-à-vis du diamètre $2r$. On peut donc écrire :

$$\delta_z + \frac{\delta_x + \delta_y + \delta_z}{m-2} = 0$$

d'où

$$\delta_z = - \frac{\delta_x + \delta_y}{m-1}$$

et :

$$\left. \begin{aligned} \delta_x &= \frac{2}{(m-1)\beta} (m\delta_x + \delta_y) \\ \delta_y &= \frac{2}{(m-1)\beta} (\delta_x + m\delta_y) \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Nous allons déterminer maintenant les valeurs de δ_x et de δ_y . Calculons d'abord δ_x . La fibre MN est devenue $M'N'$; elle a subi d'abord une extension due aux efforts p_1 sur le contour, dans le sens t_x , puis dans le sens t_y ; la tension composée due à ces deux efforts est :

$$p_1 - \frac{p_1}{m} = \frac{(m-1)p_1}{m}$$

et la dilatation correspondante,

$$\delta = x \frac{(m-1)}{m} p_1.$$

La fibre MN, devenue M'N', a subi d'autre part une dilatation caractérisée par

$$\frac{M'N'}{M_1N_1} = \frac{\rho + \Delta}{\rho}$$

ou

$$\frac{M_1N'_1(1 + \delta)}{M_1N_1} = 1 + \frac{\Delta}{\rho}$$

d'où

$$\delta = \frac{\Delta}{\rho}.$$

Ici $\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2z}{dx^2}$; on a donc pour δ_x :

$$\delta_x = xp_1 \frac{m-1}{m} - \Delta \frac{d^2z}{dx^2}.$$

Voyons maintenant δ_y ; c'est la dilatation dans le sens t_y ; ici encore agissent deux efforts p_1 et la dilatation correspondante est

$$xp_1 \frac{m-1}{m},$$

comme ci-dessus. Le rayon x est devenu $x + M_2M' = x + M'M_1 \sin \widehat{M_2M_1M'} = x + \Delta \sin \varphi$; la circonférence croît nécessairement dans le même rapport que le rayon; la dilatation a pour expression

$$\frac{\Delta \sin \varphi}{x}.$$

Calculons $\sin \varphi$ ou, ce qui revient très sensiblement au même, les angles étant toujours très faibles, $\text{tg} \varphi$. L'angle $N_1M_1A = \varphi$, car ils ont leurs côtés normaux; $N_1A =$

— dz ; $M_{1A} = dx$ et $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{dz}{dx}$. La dilatation δ a donc pour expression

$$\delta_y = \alpha p_1 \frac{m-1}{m} - \frac{\Delta}{x} \frac{dz}{dx}.$$

Introduisons la valeur de δ_x et de δ_y dans les relations (II) et celles-ci dans les équations (I) en négligeant δ_z et t^z :

$$t_x = p_1 - \frac{m}{(m^2-1)x} \Delta \left(m \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} \right)$$

$$t_y = p_1 - \frac{m}{(m^2-1)x} \Delta \left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{m}{x} \frac{dz}{dx} \right)$$

Les valeurs des actions moléculaires étant trouvées nous allons établir les conditions d'équilibre d'un élément de la

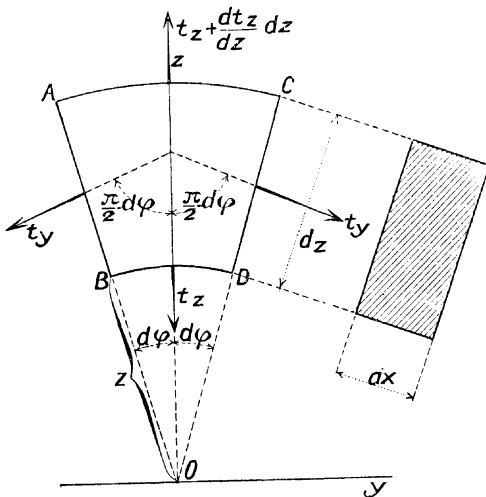


Fig. 259.

plaque. Conduisons (fig. 259) par l'axe OX deux plans formant entre eux un angle infiniment petit $d\varphi$; cet angle ne subit pas de variation pendant la déformation; l'élément

est limité d'autre part par deux cylindres d'axe OZ et de rayons x et $x + dx$; il a pour hauteur $d\Delta$. Sur chacune des sections AB, CD, AC et BD agissent les tensions t_x et t_y , mais il existe en outre, dans ces sections, des tensions tangentielles θ_y ; en effet, les tensions t_x et t_y étant horizontales ne pourraient faire équilibre aux charges verticales. Écrivons l'équation d'équilibre suivant OE: on a :

$$t_x v d\varphi d\Delta + 2 t_y \sin \frac{d\varphi}{2} d\Delta dx + \theta_y \left(x + \frac{dx}{2} \right) d\varphi dx - \left(t_x + \frac{dt_x}{dx} dx \right) (x + dx) d\varphi d\Delta - \left(\theta_y + \frac{d\theta_y}{d\Delta} d\Delta \right) \left(x + \frac{dx}{2} \right) \times d\varphi dx = 0.$$

On tire de là

$$t_y - t_x - x \frac{dt_x}{dx} - x \frac{d\theta_y}{d\Delta} = 0$$

$$\frac{d\theta_y}{d\Delta} = \frac{t_y}{x} - \frac{t_x + x \frac{dt_x}{dx}}{x} = \frac{t_y}{x} - \frac{1}{x} \frac{d(xt_x)}{dx}$$

Introduisons dans cette relation les valeurs de t_x et t_y ; il vient :

$$\frac{d\theta_y}{d\Delta} = \frac{1}{x} \left[p_1 - \frac{m}{m^2 - 1} \frac{1}{\alpha} \Delta \left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{m}{x} \frac{dz}{dx} \right) - p_1 + \frac{m}{m^2 - 1} \frac{1}{\alpha} \Delta \left(mx \frac{d^3z}{dx^3} + m \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dx^2} \right) \right]$$

$$\frac{d\theta_y}{d\Delta} = \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{1}{\alpha} \Delta \left(\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{x} \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dz}{dx} \right)$$

Intégrons par rapport à la variable Δ :

$$\theta_y = \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta^2}{2} \left(\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{x} \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dz}{dx} \right) + A.$$

La constante A se détermine en observant que pour $\Delta = \pm \frac{h}{2}$ on a $\theta_y = 0$; d'où :

$$\theta_y = - \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{1}{\alpha} \frac{h^2 - 4\Delta^2}{8} \left(\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{x} \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dz}{dx} \right) \quad (3)$$

Les tensions tangentielles θ_y sont équilibrées par les charges verticales et on a :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \theta_y 2\pi x d\Delta = P + \pi x^2 p$$

Introduisons l'expression de θ_y dans cette relation :

$$2\pi x \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{1}{x} \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dz}{dx} \right) \times \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{h^2 - 4\Delta^2}{8} d\Delta = P + \pi x^2 p$$

d'où :

$$\frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{1}{x} \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dz}{dx} = 6 \frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{1}{h^3} \left(px + \frac{P}{\pi x} \right)$$

équation différentielle de la surface élastique.

Le premier membre de cette relation est identique à l'un des membres de la relation (3) ; on a donc :

$$\theta_y = \frac{3}{4} \frac{h^2 - 4\Delta^2}{h^3} \left(px + \frac{P}{\pi x} \right)$$

Pour $x = 0$, c'est-à-dire au milieu de la plaque, θ_y devient infini si $P > 0$. Observons que la charge P n'est pas appliquée en un point, mais en réalité sur une petite surface circulaire πr_o^2 , r_o étant petit vis-à-vis de r .

Posons :

$$\frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{6}{h^3} p = a; \quad \frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{6}{h^3} \frac{P}{\pi} = b$$

L'équation de la surface élastique devient :

$$\frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{1}{x} \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dz}{dx} = ax + \frac{b}{x}$$

On peut écrire :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dz}{dx} \right) \right)$$

d'où :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dz}{dx} \right) \right) = ax + \frac{b}{x}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dz}{dx} \right) &= \frac{a}{2} x^2 + b \log_n x + B \\ x \frac{dz}{dx} &= \frac{a}{8} x^4 + b \int x \log_n x dx + \frac{B}{2} x^2 + C \\ \int x \log_n x dx &= \frac{x^2}{4} (2 \log_n x - 1) \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{a}{8} x^3 + \frac{b}{4} x (2 \log_n x - 1) + \frac{B}{2} x + \frac{C}{x} \quad (5) \end{aligned}$$

$$z = \frac{a}{32} x^4 + \frac{b}{4} x^2 (\log_n x - 1) + \frac{B}{4} x^2 + C \log_n x + D \quad (6)$$

Jetons un coup d'œil sur les expressions de t_x et t_y ci-dessus ; on aura pour valeur de certains de leurs termes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} &= \frac{a}{8} x^2 + \frac{b}{4} (2 \log_n x - 1) + \frac{B}{2} + \frac{C}{x^2} \\ \frac{d^2z}{dx^2} &= \frac{3}{8} ax^2 + \frac{b}{4} (2 \log_n x - 1) + \frac{B}{2} - \frac{C}{x^2} \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de déterminer la valeur des constantes B, C et D. Observons que pour $x = 0$, $\frac{dz}{dx} = 0$, la tangente au sommet de la surface élastique est horizontale ; la relation (5) fournit :

$$(5') \quad 0 = \frac{b}{2} x \log_n x + \frac{C}{x}$$

Or

$$x \log_n x = \frac{\log_n x}{\frac{1}{x}}$$

prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$ pour $x = 0$. Cherchons la vraie valeur de cette expression en écrivant le quotient des

dérivées :

$$\frac{b}{2} \left[\frac{\frac{d}{dx} (\log_n x)}{\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right)} \right]_{x=0} = \frac{b}{2} \left[\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right]_{x=0} = -\frac{b}{2} (x)_{x=0} = 0$$

(5') peut donc s'écrire :

$$0 = 0 + \left(\frac{C}{x} \right)_{x=0} = 0$$

et $C = 0$.

Si la plaque est complètement libre au pourtour on a, pour $x = r$, quel que soit Δ , $t_x = p_1$ ce qui n'est possible, si on jette un coup d'œil sur l'expression de t_x , que si

$$m \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} = 0.$$

Remplaçons $\frac{d^2 z}{dx^2}$ et $\frac{1}{x} \frac{dz}{dx}$ par leurs valeurs :

$$B = -\frac{1}{4} \frac{3m+1}{m+1} ar^2 - b \left(\log_n r + \frac{m-1}{m+1} \frac{1}{2} \right)$$

Si la plaque est encadrée au pourtour, l'axe des X est tangent à la surface élastique à l'encastrement ; donc pour $x = r$, $\frac{dz}{dx} = 0$ et l'équation (5) devient :

$$0 = \frac{a}{8} r^3 + \frac{b}{4} r (2 \log_n r - 1) + \frac{B}{2} r$$

d'où

$$B = -\frac{a}{4} r^2 - b \left(\log_n r - \frac{1}{2} \right).$$

Nous avons déterminé la constante $C = 0$ dans tous les cas et B dans deux cas différents ; reste à déterminer la constante D. Nous allons examiner différents cas.

A. — Supposons la plaque chargée seulement du poids

uniformément réparti p par unité de surface ; $P = 0$ et

$$b = \frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{6}{h^3} \frac{P}{\pi} = 0.$$

Observons que pour $x = r$, $z = 0$; l'équation (6) devient :

$$0 = \frac{a}{32} r^4 + \frac{B}{4} r^2 + D$$

$$D = -\frac{a}{32} r^4 - \frac{B}{4} r^2$$

et

$$z = -\frac{a}{32} (r^4 - x^4) - \frac{B}{4} (r^2 - x^2) = -\left(a \frac{r^2 + x^2}{8} + B\right) \frac{r^2 - x^2}{4}$$

Si la plaque est libre sur son pourtour on a vu

$$B = -\frac{3m + 1}{m + 1} \frac{1}{4} a r^2$$

car $b = 0$; d'autre part

$$a = \frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{6}{h^3} p$$

donc

$$z = \frac{3}{16} \frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{p}{h^3} \left(\frac{5m + 1}{m + 1} r^2 - x^2 \right) (r^2 - x^2).$$

Faisons $x = 0$; il viendra pour la flèche au milieu

$$f = \frac{3}{16} \frac{(m - 1)(5m + 1)}{m^2} \alpha p \frac{r^4}{h^3}$$

et si $m = \frac{10}{3}$:

$$f = 0.7 \alpha p \frac{r^4}{h^3} \bullet$$

Si $p_1 = 0$ les expressions de δ_x et δ_y deviennent :

$$\delta_x = -\Delta \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{p}{h^3} \Delta \left(\frac{3m + 1}{m + 1} r^2 - 3x^2 \right)$$

$$\delta_y = -\frac{\Delta}{x} \frac{dz}{dx} = \frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{p}{h^3} \Delta \left(\frac{3m + 1}{m + 1} r^2 - x^2 \right).$$

Elles atteignent leur valeur maximum pour $x = 0$, au milieu de la plaque, et pour $\Delta = \pm \frac{h}{2}$, aux fibres les plus éloignées. Les maxima sont :

$$(\delta_x)_{\max} = \pm \frac{3}{8} \frac{(m-1)(3m+1)}{m^2} \alpha \left(\frac{r}{h}\right)^2 p = (\delta_y)_{\max}$$

En ces endroits les efforts tangentiels θ_y sont nuls ; $\left(\frac{\delta_x}{\alpha}\right)$ est donc l'effort maximum subi par la matière et si r''' est l'effort admissible à la flexion on devra avoir

$$r''' \geq \pm \frac{3}{8} \frac{(m-1)(3m+1)}{m^2} \left(\frac{r}{h}\right)^2 p$$

et, pour $m = \frac{10}{3}$:

$$r''' > \pm 0,87 \left(\frac{r}{h}\right)^2 p$$

Si la plaque est encadrée, B devient, pour $b = 0$

$$B = -\frac{9}{4} r^2$$

En opérant comme dans le cas d'une plaque libre on trouve

$$z = \frac{3}{16} \frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{p}{h^3} (r^2 - x^2)^2;$$

la flèche au centre, ou pour $x = 0$ est :

$$f = \frac{3}{16} \frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha p \frac{r^4}{h^3}$$

Si $m = \frac{10}{3}$:

$$f = 0,17 \alpha p \frac{r^4}{h^3}$$

D'autre part :

$$\frac{1}{x} \frac{dz}{dx} = \frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{p}{h^3} (r^2 - x^2)$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{p}{h^3} (r^2 - 3x^2)$$

$$\frac{\partial_r}{\alpha} = \frac{m-1}{m} p_1 + \frac{3}{4} \frac{m^2-1}{m^2} \frac{p}{h^3} \Delta (r^2 - 3x^2)$$

$$\frac{\partial_y}{\alpha} = \frac{m-1}{m} p_1 + \frac{3}{4} \frac{m^2-1}{m^2} \frac{p}{h^3} \Delta (r^2 - x^2)$$

B.—Supposons p_1 différent de zéro; $\frac{\partial_r}{\alpha}$ passe par deux maxima; l'un correspond à $x = 0$ et $\Delta = \frac{h}{2}$; il correspond aux fibres inférieures du milieu; l'autre répond à $x = r$ et $\Delta = -\frac{h}{2}$; ce sont les fibres supérieures de l'encastrement. Le premier a pour valeur

$$\left(\frac{\partial_r}{\alpha}\right)_{\max_1} = \frac{m-1}{m} p_1 + \frac{3}{8} \frac{m^2-1}{m^2} \left(\frac{r}{h}\right)^2 p$$

et le second

$$\left(\frac{\partial_r}{\alpha}\right)_{\max_2} = \frac{m-1}{m} p_1 + \frac{3}{4} \frac{m^2-1}{m^2} \left(\frac{r}{h}\right)^2 p$$

Le second maximum est supérieur au premier; on aura donc à écrire la condition

$$r''' \geq \frac{m-1}{m} p_1 + \frac{3}{4} \frac{m^2-1}{m^2} \left(\frac{r}{h}\right)^2 p$$

étant donné que pour $\Delta = \pm \frac{h}{2}$, θ_y est nul.

Si $p_1 = 0$,

$$r''' \geq \frac{3}{4} \frac{m^2-1}{m^2} \left(\frac{r}{h}\right)^2 p$$

Pour $m = \frac{10}{3}$:

$$r''' \geq 0,68 \left(\frac{r}{h}\right)^2 p$$

Plaque libre, poids unique P. Ici $p = 0$

$$a = \frac{m^2-1}{m^2} \alpha \frac{6}{h^3} p = 0$$

C = 0: pour $x = r$, $z = 0$.

L'équation de l'élastique devient :

$$z = - \frac{b}{4} \left[r^2 (\log_n r - 1) - x^2 (\log_n x - 1) \right] - \frac{B}{4} (r^2 - x^2)$$

$$B = - b \left(\log_n r + \frac{1}{2} \frac{m-1}{m+1} \right)$$

$$b = \frac{m^2 - 1}{m^2} \propto \frac{6}{h^3} \frac{P}{\pi}$$

Finalement

$$z = \frac{3}{4\pi} \frac{m^2 - 1}{m^2} \propto \frac{P}{h^3} \left[2x^2 \log_n \frac{x}{r} + \frac{3m+1}{m+1} (r^2 - x^2) \right]$$

La flèche au milieu, ou pour $x = 0$, est :

$$f = \frac{3}{4\pi} \frac{(m-1)(3m+1)}{m^2} \propto P \frac{r^2}{h^3}$$

et, pour $m = \frac{10}{3}$:

$$f = 0,55 \propto P \frac{r^2}{h^3}$$

Il vient pour δ_x et δ_y en tenant compte de la condition $p_1 = 0$, $C = 0$ et de la valeur de B :

$$\delta_x = \frac{3}{\pi} \frac{m^2 - 1}{m^2} \propto \frac{P}{h^3} \left(\log_n \frac{r}{x} - \frac{1}{m+1} \right) \Delta$$

$$\delta_y = \frac{3}{\pi} \frac{m^2 - 1}{m^2} \propto \frac{P}{h^3} \left(\log_n \frac{r}{x} - \frac{m}{m+1} \right) \Delta$$

En réalité la charge P est appliquée, non en un point, mais elle est uniformément répartie sur une petite surface de rayon r ; la valeur maximum de θ_y a lieu pour $\Delta = 0$, $p = 0$, $x = r_0$ et elle est

$$\theta_{y \max} = \frac{3}{4\pi} \frac{P}{hr_0}$$

D'autre part le maximum de δ_x et δ_y a lieu pour $x = r_0$ et $\Delta = \frac{h}{2}$, mais δ_y est le plus grand ; il est :

$$\left(\frac{\delta_y}{\alpha} \right)_{\max} = \frac{3}{2\pi} \frac{m^2 - 1}{m^2} \left(\log_n \frac{r}{r_0} + \frac{m}{m+1} \right) \frac{P}{h^2}$$

L'équation de condition sera donc :

$$r''' \geq \frac{3}{2\pi} \frac{m^2 - 1}{m^2} \left(\log_n \frac{r}{r_0} + \frac{m}{m + 1} \right) \frac{P}{h^2}$$

et pour $m = \frac{10}{3}$:

$$r''' \geq 0.334 \left(1.3 \log_n \frac{r}{r_0} + 1 \right) \frac{P}{h^2}$$

pour autant que pour la matière considérée on ait

$$\frac{3}{4\pi} \frac{P}{hr} \frac{m + 1}{m} \leq \left(\frac{\sigma_y}{\alpha} \right)_{\max}$$

hypothèse réalisée quand h est relativement faible vis-à-vis de r .

Discussion.

Dans la plupart des cas de la pratique, les efforts extérieurs sont constitués par la pression de fluides. Les plaques sont alors fortement pressées sur des surfaces d'appui et on ne peut les considérer ni comme libres ni comme encastrées. Considérons par exemple (fig. 260) une plaque fixée par boulons à une enveloppe cylindrique soumise à pression intérieure; il est visible que, même avant l'arrivée du fluide, la plaque doit se courber sous l'action du serrage des écrous de fixation, la flexion étant d'autant plus considérable que la distance x de l'axe du boulon à la surface d'appui est plus grande. Mais même dans le cas où cette distance serait nulle, ce qui n'est pas impossible à réaliser, les faits ne concordent pas encore avec les hypothèses qui ont été admises dans les développements ci-dessus. Soit une plaque reposant sur la surface d'appui du cylindre par l'intermédiaire d'une bague circulaire formant joint (fig. 261), la fixation supérieure donnant lieu à des efforts dirigés sur la bague; le bras de levier x est donc supprimé. Sous l'action de la pression intérieure la plaque fléchit et tend à glisser,

glisse réellement même, sur la bague et il se produit un frottement des deux côtés du disque; ce frottement fait intervenir des efforts supplémentaires radiaux qui agissent sur la déformation et sur la flexion de la plaque; le moment dû à cette action a été laissé complètement de côté dans les équations d'équilibre de Grashof.

Les résultats d'essais effectués par Bach et Ensslin sur des plaques circulaires en tôle d'acier fondu ont con-

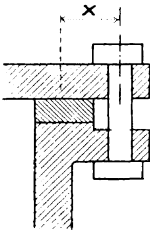


Fig. 260.

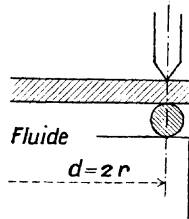


Fig. 261.

firmé les déductions précédentes et ont montré qu'il n'y avait lieu d'appliquer la théorie de Winckler qu'avec une certaine réserve. L'acier fondu possède un coefficient de dilatation α constant. Ce coefficient, déterminé de la manière connue sur des éprouvettes, a été trouvé égal à $\frac{1}{2147000}$, alors que calculé d'après la formule

$$z' = 0.55 \alpha P \frac{r^2}{h^3}$$

il a été trouvé en moyenne de $\frac{1}{2672000}$, soit

$$100 \frac{2672000 - 2147000}{2147000} = 24.5 \text{ p. } 100$$

plus petit que le coefficient de dilatation réel de la matière considérée. Il a été constaté de plus que, en faisant croître graduellement la flexion, le coefficient α diminue au début

très lentement pour diminuer encore par la suite. Les résultats précédents sont relatifs à des plaques chargées au centre. Les résultats sont les mêmes pour des charges uniformément réparties dues à des fluides. — Ces essais divers ont amené Bach à établir une théorie approchée que l'on rencontre aujourd'hui dans la plupart des traités relatifs à la résistance des matériaux et dont les formules paraissent concorder suffisamment avec les faits observés.

Théorie approchée de Bach. — a) *Plaque circulaire reposant librement sur son contour, soumise à la pression p d'un fluide sur la surface πr^2 .* On peut admettre par raison de symétrie que les plus grands efforts se produisent dans les sections passant par le centre de la plaque; on peut donc opérer comme si la moitié de la plaque était considérée comme un prisme encastré suivant un diamètre, la section d'encastrement étant un rectangle de largeur $d = 2r$ et de hauteur h . Ce prisme est soumis : 1° à la pression p sur la surface $0,5\pi r^2$; la résultante de ces pressions passe par le centre de gravité du demi-cercle, c'est-à-dire à la distance $\frac{4r}{3\pi}$ du centre; le moment fléchissant, pour la section d'encastrement, dû à la pression, est donc :

$$0,5 \pi r^2 p \frac{4r}{3\pi}$$

2° à la résultante des réactions $0,5\pi r^2 p$ sur la demi-circonférence que forme le contour; cette résultante passe par le centre de gravité de la demi-circonférence, c'est-à-dire à la distance $\frac{2r}{\pi}$ du centre; le moment dû aux réactions est donc

$$0,5 \pi r^2 p \frac{2r}{\pi}$$

Le moment résultant ou moment fléchissant réel a pour

valeur

$$0,5 \pi r^2 p \frac{2r}{\pi} = 0,5 \pi r^2 p \frac{4r}{3\pi} = \frac{1}{3} r^3 p$$

Il vient :

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{1}{12} 2rh^3}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6} 2rh^2$$

et

$$\frac{1}{3} r^3 p \leq r''' \frac{1}{6} 2rh^2$$

dans l'hypothèse que le moment se répartit uniformément sur la section de largeur $d = 2r$ et abstraction faite que des tensions normales entre elles interviennent. En réalité donc, les éléments de surface de la section dangereuse sont soumis à des efforts plus considérables que ceux supposés et on tiendra compte de ce fait en supposant que ces efforts ne s'exercent que sur une partie $\frac{2r}{\mu}$ de la largeur; on a donc :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{3} r^3 p &\leq r''' \frac{1}{6} \frac{2r}{\mu} h^2 \\ r''' &\geq \mu \left(\frac{r}{h}\right)^2 p = \frac{1}{4} \mu \left(\frac{d}{h}\right)^2 p \\ h &\geq r \sqrt{\mu \frac{p}{r'''}} = 0,5 d \sqrt{\mu \frac{p}{r'''}} \end{aligned} \right\} (1)$$

μ est un coefficient à déterminer par l'expérience; il ne dépend pas simplement de la non-uniformité de la répartition des pressions (sans quoi il serait plus grand que 1), mais aussi de l'existence de tensions normales entre elles (par le fait seul desquelles il serait plus petit que 1); il dépend aussi du mode de fixation de la plaque, du genre de réaction et ainsi de suite; d'après les essais de Bach le coefficient μ varie entre 0,8 et 1,2 pour la fonte.

D'après les équations ci-dessus on a, pour la flèche au milieu,

$$z' = \psi \alpha \frac{r^4}{h^3} p \quad (2)$$

formule dans laquelle, d'après les essais de Bach, ψ varie entre $\frac{1}{6} = 0,167$ et $\frac{3}{5} = 0,6$ d'après le mode de fixation.

b) *Plaque circulaire de rayon r, reposant librement sur son contour, chargée au milieu d'un poids P uniformément réparti sur une surface circulaire πr_0^2 .*

En opérant de la même façon que ci-dessus on trouve, pour le moment relatif à une section diamétrale dû à la réaction $0,5P$ supposée uniformément répartie sur la moitié πr de la circonférence d'appui :

$$0,5 P \frac{2r}{\pi} .$$

Ce moment agit en sens inverse du moment dû à la charge $0,5P$ supposée répartie sur la surface du demi-cercle $0,5\pi r_0^2$, c'est-à-dire $0,5P \frac{4r_0}{3\pi}$.

Le moment fléchissant résultant a donc pour expression :

$$M = 0,5 P \frac{2r}{\pi} - 0,5 P \frac{4r_0}{3\pi} = P \frac{r}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{r} \right)$$

et :

$$P \frac{r}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{r} \right) \leq r''' \frac{1}{6} \frac{2r}{\mu} h^2$$

D'où :

$$\left. \begin{aligned} r''' &\geq \mu \frac{3}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{r} \right) \frac{P}{h^2} \\ h &\geq \sqrt{\mu \frac{3}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{r} \right) \frac{P}{r'''} } \end{aligned} \right\} (3)$$

Pour $P = \pi r^2 p$ et $r_o = r$ on a :

$$h \cong r \sqrt{\mu \frac{p}{r'''}}$$

Pour de très petites valeurs de r_o ou pour $r = o$ on a

$$h \cong \sqrt{\mu \frac{3}{\pi} \frac{P}{r'''}}$$

donc indépendant de r ou de d . La flèche se détermine par les équations connues :

$$z' = \psi \mu \frac{r^2}{h^3} P. \quad (4)$$

Bach a trouvé pour de petites valeurs de r_o , jusque $0,1r$

$$\mu = 1,5 \quad \text{et} \quad \psi = 0,4 \text{ à } 0,5.$$

Pour des valeurs supérieures de r_o les deux coefficients μ et ψ diminuent, ψ décroissant plus rapidement que μ .

Plaques elliptiques planes. — On supposera $a > b$ (fig. 262). Il y a lieu d'examiner ici si les plus grands

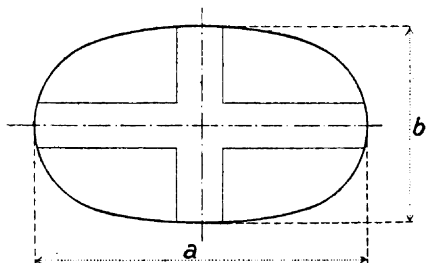


Fig. 262.

efforts se produisent dans la section du grand axe ou dans celle du petit axe de l'ellipse. Considérons deux bandes étroites de largeur l , de longueurs respectives a et b

dans le sens du grand et du petit axe. Ces deux bandes se coupent à angle droit au centre de l'ellipse où agit l'effort extérieur P normal à la plaque. Les réactions d'appui aux extrémités des bandes se répartissent de façon à produire une égale flexion au centre. Représentons par X_a les réactions aux extrémités de la bande de longueur a et par X_b les réactions aux bouts de la bande de longueur b ; l'effort P peut donc être considéré comme constitué de deux efforts X_a et de deux efforts X_b agissant au centre. La flèche au milieu d'un prisme de longueur l reposant à son extrémité sur deux appuis de niveau et chargé au milieu d'un poids T a pour expression, I étant le moment d'inertie d'une section,

$$f = T \frac{\alpha}{I} \frac{l^3}{48}.$$

La flexion f_a de la bande de longueur a est donc :

$$f_a = 2X_a \frac{\alpha}{I} \frac{a^3}{48}$$

et la flèche relative à la bande b :

$$f_b = 2X_b \frac{\alpha}{I} \frac{b^3}{48}$$

Mais $f_a = f_b$; donc ;

$$X_a a^3 = X_b b^3$$

ou

$$\frac{X_b}{X_a} = \frac{a^3}{b^3} \quad (1)$$

L'effort maximum t_a au milieu de la bande a , abstraction faite de l'influence que peut avoir une bande sur l'autre, est donnée par la formule

$$X_a \frac{a}{2} = \frac{1}{6} t_a h^2$$

d'où

$$t_a = 3X_a \frac{a}{h^2}$$

On a de même, pour l'effort sur la bande b :

$$t_b = 3X_b \frac{b}{h^2}$$

En tenant compte de la relation (1) on voit que

$$\frac{t_b}{t_a} = \frac{X_b b}{X_a a} = \frac{a^2}{b^2}$$

ou

$$t_b = t_a \left(\frac{a}{b} \right)^2 \quad (2)$$

Donc, si $a > b$,

$$t_b > t_a$$

Ainsi, pour

$$a = 2b, \quad t_b = t_a \left(\frac{2b}{b} \right)^2 = 4 t_a$$

et si

$$a = 3b, \quad t_b = t_a \left(\frac{3b}{b} \right)^2 = 9 t_a$$

On conclut de là que les fibres les plus étendues dans le sens du petit axe subissent des tensions normales beaucoup plus considérables que celles dirigées dans le sens du grand axe et que par suite la rupture doit se produire dans le sens du grand axe.

a) *La plaque elliptique repose sur son contour par son grand et son petit axe; elle est soumise à la pression p d'un fluide sur sa surface $\frac{\pi}{4} ab$.*

Le moment fléchissant M résultant est la différence entre le moment M' dû aux réactions produites sur la moitié du contour elliptique et le moment M'' dû à la

pression directe du fluide ou $M'' = \frac{1}{8} \pi abp \frac{2}{3\pi} b = \frac{1}{12} ab^2p$. Mais le moment M' n'est pas aussi simple à déterminer. Pour une plaque circulaire on peut admettre une répartition uniformé de réaction sur le contour circulaire; mais cette hypothèse n'est plus admissible pour une plaque elliptique; c'est en effet ce que montre la formule (1) qui indique que les réactions aux extrémités des deux axes sont entre elles en raison inverse des cubes des axes. On peut admettre que là où le rayon de courbure de l'ellipse est le plus petit, la réaction d'appui atteint son minimum de valeur. En effet, le rayon de courbure de l'ellipse dans le sens du grand axe a , comme on sait, pour expression

$$\rho_a = \frac{b^2}{2a}$$

le rayon de courbure, dans le sens du petit axe, a pour valeur

$$\rho_b = \frac{a^2}{2b}$$

On a donc :

$$\frac{\rho_b}{\rho_a} = \frac{a^3}{b^3}$$

c'est-à-dire le même rapport qu'établit la formule (1) entre les réactions X_b et X_a . Les réactions X_b et X_a se comportent comme les rayons de courbure correspondants; plus a et b diffèrent l'un de l'autre, moins la répartition est uniforme. Rapportons l'ellipse à un système de coordonnées rectangulaires, l'origine étant au centre de la plaque, l'axe des X dans la direction du grand axe, l'axe des Y dans le sens du petit axe. Désignons par ds l'élément de courbe situé au point x, y de l'ellipse; la réaction en ce point est Xds ; on a :

$$M' = \int yXds$$

le signe d'intégration se rapportant à une demi-ellipse.

L'équation de l'ellipse est

$$\left(\frac{x}{\frac{a}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{b}{2}}\right)^2 = 1.$$

On a, d'autre part, $x = \frac{a}{2} \sin \varphi$; donc

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - x^2} = \frac{b}{2} \cos \varphi$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - x^2}} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi$$

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} d\left(\frac{a}{2} \sin \varphi\right) \\ &= \frac{a}{2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} d\varphi \end{aligned}$$

Posons

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = n^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

Il vient

$$\begin{aligned} ds &= \frac{a}{2} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \\ y ds &= \frac{ab}{4} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi} \cos \varphi d\varphi \end{aligned}$$

Nous avons vu ci-dessus que la réaction X au point x, y est proportionnelle au rayon de courbure en ce point ou que

$$\frac{X}{X_b} = \frac{\rho}{\rho_b} = X_b \frac{\rho}{a^2}$$

Or

$$\rho = \pm \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}^3}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2b}{a^2} \frac{1}{\cos^3 \varphi}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{a^2}{2b} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}^3 \cos^3 \varphi = \\ &= \frac{a^2}{2b} \sqrt{\cos^2 \varphi + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2 \varphi}^3 \\ &= \frac{a^2}{2b} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}^3 = \frac{a^2}{2b} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi}^3 \end{aligned}$$

valeur absolue du rayon de courbure.

$$\text{Pour } x = 0 \text{ ou } \varphi = 0, \quad \rho = \rho_b = \frac{a^2}{2b}$$

$$\text{Pour } x = \frac{a}{2} \text{ ou } \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \rho = \rho_a = \frac{b^2}{2a}$$

Avec

$$X = X_b \frac{\rho}{\frac{a^2}{2b}} = X_b \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi}^3$$

on aura, pour une demi-ellipse :

$$M' = \int y X ds = 2 \frac{ab}{4} X_b \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - n^2 \sin^2 \varphi)^2 \cos \varphi d\varphi$$

$$M' = \frac{ab}{2} X_b \left(1 - \frac{2}{3} n^2 + \frac{1}{5} n^4\right)$$

La valeur de X_b se détermine en observant que la force qui résulte de la pression p sur la moitié de la plaque, ou $\frac{\pi ab}{8} p$ doit faire équilibre à la somme des réactions sur la moitié du contour elliptique :

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\pi ab}{8} p &= \int X ds = 2 \frac{a}{2} X_b \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - n^2 \sin^2 \varphi)^2 d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} a X_b \left(1 - n^2 + \frac{3}{8} n^4 \right) \\ X_b &= \frac{b}{a} p \frac{1}{1 - n^2 + \frac{3}{8} n^4} \end{aligned}$$

Par suite

$$M' = \frac{ab^2}{8} p \frac{1 - \frac{2}{3} n^2 + \frac{1}{5} n^4}{1 - n^2 + \frac{3}{8} n^4} = \frac{ab^2}{15} p \frac{8 + 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^4}$$

Le moment fléchissant résultant sur la section de largeur a et de hauteur h , eu égard au coefficient de correction μ , a pour expression :

$$M = \frac{ab^2}{15} p \frac{8 + 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^4} - \frac{\pi ab}{8} p \frac{2b}{3\pi} \leq \frac{1}{6} r''' \frac{a}{\mu} h^2$$

d'où

$$r''' \geq \frac{1}{2} \mu \frac{3,4 + 1,2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 0,6 \left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^4} p \left(\frac{b}{h}\right)^2$$

ou

$$h \geq \frac{1}{2} b \sqrt{2\mu \frac{3,4 + 1,2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 0,6 \left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^4} \frac{p}{r'''}} \quad (3)$$

Pour $a = b = d$ il vient

$$r''' \geq \frac{1}{4} \mu \left(\frac{d}{h}\right)^2 p \quad \text{ou} \quad h \geq \frac{1}{2} d \sqrt{\mu \frac{p}{r'''}}$$

expressions identiques à celles que nous avons trouvées pour les plaques circulaires.

On peut écrire avec approximation :

$$\frac{3,4 + 1,2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 0,6 \left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^4} = \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Dès lors :

$$\left. \begin{aligned} r''' &\cong \frac{1}{2} \mu \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \left(\frac{b}{h}\right)^2 p \\ h &\cong \frac{1}{2} b \sqrt{\frac{2\mu}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \frac{p}{r'''} } \end{aligned} \right\} (4)$$

Pour un trou d'homme où $a = 1,5b$ les équations (3) donnent :

$$r''' \cong \frac{1}{2} \mu \frac{3,4 + 1,2 \frac{4}{9} - 0,6 \frac{16}{81}}{3 + 2 \frac{4}{9} + 3 \frac{16}{81}} \left(\frac{b}{h}\right)^2 p = 0,425 \mu \left(\frac{b}{h}\right)^2 p$$

ou

$$h \cong 0,65 b \sqrt{\mu \frac{p}{r'''}}$$

et les équations (4)

$$r''' \cong \frac{1}{2} \mu \frac{1}{1 + \frac{4}{9}} \left(\frac{b}{h}\right)^2 p = 0,346 \mu \left(\frac{b}{h}\right)^2 p$$

ou

$$h \cong 0,59 b \sqrt{\mu \frac{p}{r'''}}$$

Dans l'exemple considéré les équations (4) conduisent donc à une épaisseur de

$$100 \frac{0,65 - 0,59}{0,65} = 9 \text{ p. } 100$$

inférieure à celle qui est donnée par les équations (3).

Le coefficient μ , d'après les recherches de Bach, varie entre $\frac{2}{3} = 0,67$ et $\frac{9}{8} = 1,12$, suivant que l'on peut considérer la plaque comme plus ou moins encadrée ou plus ou moins libre.

b) *La plaque elliptique précédente est chargée au milieu d'un poids P.* On trouve, pour le moment M' :

$$M' = \frac{ab}{2} X_b \left(1 - \frac{2}{3} n^2 + \frac{1}{5} n^4 \right)$$

$$n^2 = 1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2$$

$$\frac{P}{2} = \int X ds = 2 \frac{a}{2} X_b \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - n^2 \sin^2 \varphi)^2 d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} a X_b \left(1 - n^2 + \frac{3}{8} n^4 \right)$$

$$X_b = \frac{P}{\pi a \left(1 - n^2 + \frac{3}{8} n^4 \right)}$$

L'introduction de cette valeur dans l'expression de M' , en admettant que la charge P se répartisse sur une petite surface au centre de la plaque, conduit à la condition :

$$\frac{b}{2\pi} P \frac{1 - \frac{2}{3} n^2 + \frac{1}{5} n^4}{1 - n^2 + \frac{3}{8} n^4} \leq r''' \frac{1}{6} \frac{a}{\mu} h^2$$

d'où :

$$r''' \geq \frac{8}{5\pi} \mu \left. \frac{8 + 4 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a} \right)^4}{3 + 2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a} \right)^4} \frac{b}{a} \frac{P}{h^2} \right\} \quad (5)$$

$$h \geq \sqrt{\frac{8}{5\pi} \mu \frac{8 + 4 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a} \right)^4}{3 + 2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a} \right)^4} \frac{b}{a} \frac{P}{r'''}}$$

D'après les recherches de Bach, $\mu = \frac{3}{2} = 1,5$ à $\frac{5}{3} = 1,67$.

Si $b = a$ l'équation (5) devient :

$$r''' = \frac{3}{\pi} \mu \frac{P}{h^2}$$

la même que l'équation relative aux plaques circulaires, en faisant $r_0 = 0$.

Plaque carrée plane. — Soit a longueur d'un côté. Il y a lieu ici aussi de rechercher la section la plus dangereuse. Considérons (fig. 263), dans la plaque non chargée, un élément de surface carré dont les côtés BAB sont parallèles aux côtés de la plaque. Sous l'action de la charge les longueurs MA deviennent MA₁; l'allongement est donc AA₁; les droites AB se dilatent donc vers le dehors et la figure prend la forme A₁B₁A₁B₁A₁B₁A₁B₁, un côté B₁A₁B₁ présentant une certaine courbure. La dilatation dans le sens MA a pour expression

$$\frac{\Delta A_1}{MA}$$

Le quadrant MABA se transforme en MAA₁ B₁A₁A; la dilatation dans le sens A₁A₁ est mesurée par

$$\frac{A_1 A_1 - AA}{AA} = \frac{2 AA_1 \sqrt{0,5}}{MA\sqrt{2}} = \frac{\Delta A_1}{MA}$$

Les dilatations dans les autres directions sont plus petites. Le plus grand effort en dehors du point M se produit donc dans la direction AA ou A₁A₁; la section dangereuse sera donc une diagonale du carré.

a) *La plaque carrée repose sur son pourtour 4a et elle est soumise à la pression p d'un fluide sur sa surface a².* — La section dangereuse étant la diagonale $a\sqrt{2}$ (fig. 264), on pourra considérer une demi-plaque comme encadrée

suivant cette diagonale. Le moment fléchissant résultant M s'obtient en considérant que sur chacun des quatre côtés du carré agit une réaction $\frac{1}{4} a^2 p$ dont le point d'application est au milieu des côtés, donc à la distance

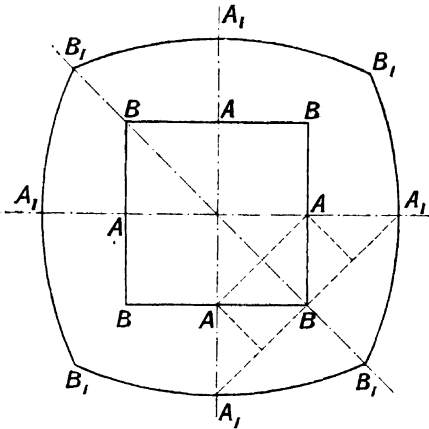


Fig. 263.

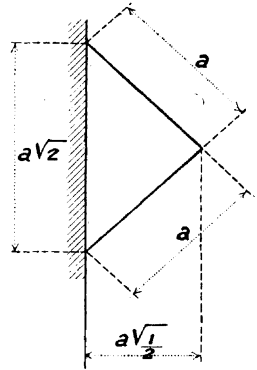


Fig. 264.

$\frac{1}{2} a \sqrt{\frac{1}{2}}$ de la section d'encastrement et que, par suite, le moment M' a pour expression $2 \cdot \frac{1}{2} \times a^2 p \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{1}{2}}$; le moment M'' est dû à la force $\frac{1}{2} a^2 p$ agissant au centre de gravité de l'aire considérée, c'est-à-dire à la distance $\frac{1}{3} a \sqrt{\frac{1}{2}}$ de la section dangereuse. On a :

$$M = 2 \cdot \frac{1}{4} a^2 p \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} a^2 p \cdot \frac{a}{3} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12} a^3 p \sqrt{\frac{1}{2}}$$

La section dangereuse a une largeur $a \sqrt{2}$ et une hauteur h ; il vient :

$$\frac{1}{12} a^3 p \sqrt{\frac{1}{2}} \leq r''' \frac{1}{6} \frac{a \sqrt{2}}{\mu} h^2 = \frac{1}{3\mu} \sqrt{\frac{1}{2}} r''' a h^2$$

d'où :

$$\left. \begin{aligned} r''' &\geq \frac{1}{4} \mu \left(\frac{a}{h}\right)^2 p \\ h &\geq \frac{1}{2} a \sqrt{\mu \frac{p}{r'''} } \end{aligned} \right\} (1)$$

D'après les essais de Bach,

$$\mu = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ à } \frac{9}{8} = 1,12$$

suivant que la plaque peut être considérée comme plus ou moins encastree ou libre.

b) *La plaque carrée précédente est chargée au centre d'un poids P.* — En opérant comme dans le cas précédent on trouve :

$$\frac{P}{2} \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{1}{2}} \leq r''' \frac{1}{6} \frac{a\sqrt{2}}{\mu} h^2$$

d'où :

$$\left. \begin{aligned} r''' &\geq \frac{3}{4} \mu \frac{P}{h^2} \\ h &\geq \frac{1}{2} \sqrt{3 \mu \frac{P}{r'''} } \end{aligned} \right\}$$

Bach a trouvé :

$$\mu = \frac{7}{4} = 1,75 \text{ à } 2.$$

Plaque rectangulaire plane. — On supposera $a > b$.

a) *La plaque repose sur son contour 2 (a + b) et elle est soumise à la pression p d'un fluide sur sa surface ab.* — Les considérations qui ont amené dans l'étude des plaques elliptiques à conclure que l'effort maximum au centre se produisait dans la direction du petit axe conservent toute

leur valeur ici. Par conséquent, pour une plaque rectangulaire l'effort maximum au centre se produit dans la direction du petit côté et par suite la section dangereuse en cet endroit est dans la direction du grand côté du rectangle. Cependant il résulte de l'expérience que les crevasses de rupture se produisent généralement dans le sens de la diagonale, ce qui résulte probablement du

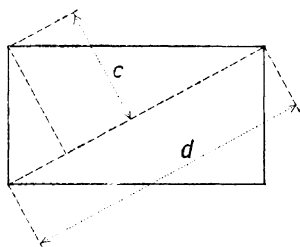


Fig. 263.

manque d'homogénéité de la matière ou du mode de fixation des plaques. Il en résulte que la détermination de la section dangereuse présente ici une certaine insécurité; la présence du coefficient de rectification pratique μ dans la formule nous permet de faire l'hypothèse que la section dangereuse est dirigée suivant une diagonale; ce sera la section d'encastrement de la demi-plaque à considérer. La pression totale $p.ab$ ne se répartit pas uniformément sur les côtés a et b ; il est certain que la réaction sera plus grande vers le milieu que vers les extrémités des côtés et qu'elle diminue de ce milieu aux sommets. Quoi qu'il en soit admettons que la réaction résultante pour chacun des côtés passe par son milieu, donc à la distance

$$\frac{b}{2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

de la section d'encastrement.

Le moment fléchissant aura pour expression :

$$M = \frac{1}{2} abp \frac{b}{2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{1}{2} abp \frac{1}{3} b \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{12} \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} p$$

La section considérée a pour longueur $\sqrt{a^2 + b^2}$ et pour hauteur h ; il vient :

$$\frac{1}{12} \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} p \leq r''' \frac{1}{6} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\mu} h^2$$

$$r''' \geq \frac{1}{2} \mu \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \left(\frac{b}{h}\right)^2 p \quad (1)$$

ou

$$h \geq \frac{1}{2} b \sqrt{\frac{2\mu}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \frac{p}{r'''}}$$

Appelons c (fig. 265) la distance d'un sommet à la diagonale de longueur d ; on pourra aussi écrire :

$$h \geq c \sqrt{\frac{\mu p}{2r'''}} \quad (1 a)$$

Si $b = a$ il vient :

$$r''' \geq \frac{1}{4} \mu \left(\frac{a}{h}\right)^2 p \quad \text{ou} \quad h \geq \frac{a}{2} \sqrt{\mu \frac{p}{r'''}}$$

identiques aux formules trouvées pour les plaques carrées.

b) *Plaque rectangulaire portant une charge P au milieu.*

— En opérant comme dans le cas précédent on trouve :

$$\frac{P}{2} \frac{b}{2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq r''' \frac{1}{6} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\mu} h^2$$

d'où

$$r''' \cong \frac{3}{2} \mu \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} \frac{P}{h^2} \quad (2)$$

ou

$$h \cong \sqrt{\frac{3}{2} \mu \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} \frac{P}{r'''}}$$

Si $b = a$:

$$h \cong \sqrt{\frac{3}{2} \mu \frac{c}{d} \frac{P}{r'''}} \quad (2a)$$

comme pour une plaque carrée.

Résultats d'essais. — Bach a fait un très grand nombre d'essais relatifs à la résistance de plaques en tôle d'acier fondu et en fonte. Ces essais ont surtout porté sur la détermination de la section dangereuse ou de rupture. Il résulte de ces essais que les hypothèses émises dans la théorie approchée se sont très approximativement réalisées en pratique, c'est-à-dire que les plaques circulaires se sont rompues suivant un diamètre, les plaques elliptiques dans la direction du grand axe, les plaques carrées suivant une diagonale et les plaques rectangulaires très approximativement aussi. Le même expérimentateur a contrôlé la loi des formules approchées, à savoir que la résistance des plaques planes est proportionnelle au carré de leur épaisseur. Cette loi s'est aussi vérifiée.

CHAPITRE VII

TRAVAIL DE DÉFORMATION DES PRISMES DROITS A LA TRACTION, A LA COMPRESSION, A LA FLEXION, A LA TORSION ET AU CISAILLEMENT.

TENSIONS ET DILATATIONS A L'ÉTAT DYNAMIQUE

I. — IL Y A MOUVEMENT DU SOLIDE SANS DÉFORMATION.

A. Considérons (fig. 266) un solide prismatique soumis de bas en haut à une force Q plus grande que son poids ;

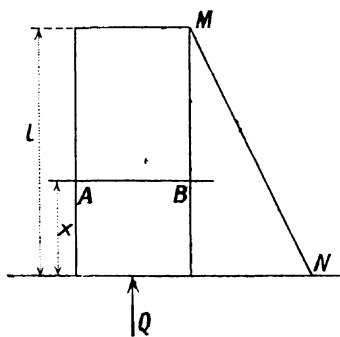


Fig. 266.

donc $Q > mg$. Sous l'action de cette force le solide se déplace. Isolons la portion au-dessus de la section AB. Si, pour une longueur l on a une masse m , pour une longueur 1 on aura une masse $\frac{m}{l}$ et pour une longueur

$l - x$, une masse $\frac{m(l-x)}{l}$, masse de la portion du prisme au-dessus de AB. On sait qu'entre la force qui produit l'accélération, la masse et l'accélération, existe la relation $F = m J$. Pour le solide complet, en appelant γ l'accélération, on aura $Q - mg = m \gamma$ (1); γ est donc l'accélération que prend le solide sous l'action de la force $Q - mg$. Pour la portion du solide située au-dessus de AB, la force agissante n'est plus Q , mais $S \times t'$, S section AB, t' tension spécifique sur cette section. On a donc :

$$St' - mg \frac{l-x}{l} = \gamma \frac{m(l-x)}{l} \quad (2)$$

De l'équation (1) on tire γ qu'on introduit dans l'équation (2); on obtient une relation de t' en fonction de quantités connues; l'équation (2) montre que t' diminue quand x augmente; pour $x = l$, $t' = 0$; le diagramme des tensions t' est une droite MN.

B. Considérons (fig. 267) un arbre soumis au moment moteur M_1 et à un moment résistant M_2 , et soit $M_1 > M_2$; l'arbre tournera. Cherchons le moment de torsion M dans une section quelconque C et soit I le moment d'inertie de l'arbre par rapport à l'axe de rotation; I_1 et I_2 sont les moments d'inertie de l'arbre à droite et à gauche de C. Pour la partie de droite on a :

$$I_1 \frac{d\omega}{dt} = M_1 - M \quad (1)$$

et, pour la portion de gauche :

$$I_2 \frac{d\omega}{dt} = M - M_2 \quad (2)$$

Ces deux équations n'en font en réalité qu'une seule. Pour l'arbre complet on a :

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_1 - M_2 \quad (3)$$

De (3) on tire $\frac{d\omega}{dt}$; en remplaçant dans (1) il vient :

$$M_1 - M = \frac{I_1}{l} (M_1 - M_2)$$

d'où on tire M.

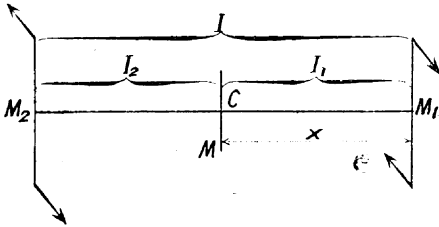


Fig. 267.

Supposons la section constante, $I_1 = \frac{I_2}{l}$, donc

$$M_1 - M = \frac{x}{l} (M_1 - M_2);$$

le diagramme des moments est une ligne droite.

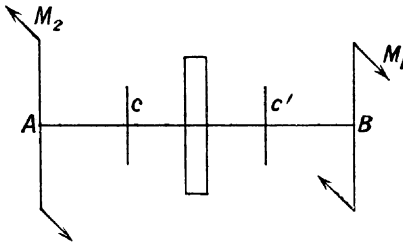


Fig. 268.

Supposons que l'arbre porte un volant (fig. 268). Dans ce cas on ne peut considérer que le moment d'inertie I du volant et il vient, pour une section C :

$$I_1 \frac{d\omega}{dt} = M_1 - M.$$

On peut supposer $I_1 = I$; $M = M_1 - I \frac{d\omega}{dt}$, d'où $M = M_2$; pour une section à droite, telle que C' , on aurait $M = M_1$.

II. — LE MOUVEMENT RÉSULTE DES DÉFORMATIONS DU SOLIDE

TRAVAIL DE TRACTION ET PRESSION

Un prisme droit de longueur l (fig. 269) et de section S est fixé à l'une de ses extrémités; à l'extrémité libre il est soumis à une charge croissante de 0 à P . Il subit, comme on sait, trois allongements :

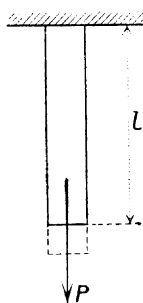


Fig. 269.

- 1° L'allongement total Δ ;
- 2° L'allongement permanent Δ' ;
- 3° L'allongement élastique Δ'' .

Ces allongements sont fonctions de la force P , et on a :

$$\begin{aligned} \Delta &= \varphi(P) & \text{ou} & & P &= \Phi(\Delta) \\ \Delta' &= \varphi'(P) & \text{ou} & & P &= \Phi'(\Delta') \\ \Delta'' &= \varphi''(P) & \text{ou} & & P &= \Phi''(\Delta'') \end{aligned}$$

Si l'on s'agit, par exemple, d'une courroie, on sait que les dilatations croissent plus lentement que les tensions, la courbe relative à $\Delta = \varphi(P)$ ou $P = \Phi(\Delta)$ est représentée figure 270. Le travail mécanique dépensé pour passer de l'allongement $\Delta = 0$ à $\Delta = OQ_2$, correspondant à l'effort OQ_1 , est représenté par l'aire OQQ_2 dont l'expression est

$$T_1 = \int_0^{\Delta} P d\Delta = \int_0^{\Delta} \Phi(\Delta) d\Delta$$

On aurait de même, pour le travail mécanique correspondant aux dilatations permanentes :

$$T_2 = \int_0^{\Delta'} P d\Delta' = \int_0^{\Delta'} \Phi'(\Delta') d\Delta'$$

de sorte que le travail élastique de la matière, restitué par celle-ci quand on supprime la charge, a pour expression :

$$T_3 = T_1 - T_2 = \int_0^{\Delta''} P d\Delta'' = \int_0^{\Delta''} \Phi'' (\Delta'') d\Delta''$$

On ne considère généralement que ce dernier travail, appelé travail de déformation ou travail élastique et on admet qu'il y a proportionnalité entre les dilatations et les tensions, en d'autres termes que la courbe des dilatations est une droite. Dans ces conditions, en désignant le travail élastique par T et l'allongement élastique par Δ on aura

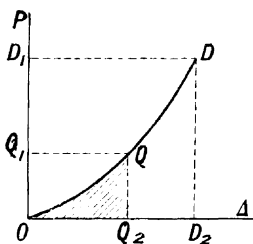


Fig. 270.

$$T = \frac{1}{2} P\Delta = \frac{1}{2} S\epsilon\Delta$$

D'autre part

$$\Delta = \alpha l\epsilon$$

donc

$$T = \frac{1}{2} \alpha l^2 S \epsilon^2 = \frac{1}{2} \alpha l^2 V \epsilon^2 \tag{4}$$

$V = Sl$, volume du prisme droit; le travail élastique est donc proportionnel au volume du prisme et au carré de la tension. Si on introduit dans la formule le coefficient r , on aura le travail élastique maximum admissible $T = \frac{1}{2} \alpha r^2 V$; et, si on va jusqu'à la limite d'élasticité, $T = \frac{1}{2} \alpha R^2 V$; le terme $\frac{\alpha R^2}{2}$ représente le *travail élémentaire* de la matière ou travail rapporté à l'unité de volume. Il résulte de ce qui précède que le travail élastique est le même pour deux pièces de même matière et de même

volume quelles que soient leurs formes. On ne peut plus appliquer la formule au delà des limites d'élasticité, car la loi de Hooke n'est plus vraie alors. Celle-ci donne $\delta = \alpha t$; (4) devient

$$T = \frac{1}{2\alpha} \delta^2 S l = \frac{1}{2\alpha} \delta^2 V \quad (5)$$

S'il s'agit d'un prisme à section variable, dans l'hypothèse où α est constant, on obtiendra comme suit le travail de déformation. A la distance x de l'extrémité libre, l'élément $S dx$ est soumis, dans la direction de x , à un allongement δdx ; on a aussi $t = \frac{\delta}{\alpha}$ et, pour le travail de cet élément :

$$dT = \frac{1}{2} S t \cdot \delta dx = \frac{1}{2\alpha} S \delta^2 dx = \frac{\alpha}{2} S t^2 dx$$

Pour le prisme entier

$$T = \frac{1}{2\alpha} \int_0^l \delta^2 S dx = \frac{\alpha}{2} \int_0^l t^2 S dx \quad (6)$$

et, si le prisme est à section constante :

$$T = \frac{1}{2\alpha} \delta^2 S l = \frac{\alpha}{2} t^2 S l$$

comme ci-dessus.

Supposons (fig. 271) la pièce présentant plusieurs sections droites différentes. A l'état statique elle résiste de la même façon que si on enlève la partie hachurée, à condition que la longueur soit assez faible pour qu'on puisse ne pas tenir compte du poids. Il n'en est pas ainsi à l'état dynamique. Soit V le volume de la partie la plus étroite et S la section correspondante. A l'état statique l'effort le plus grand que l'on puisse développer est $P = rS$. Soient V_1, V_2 , les volumes des diverses autres parties de la pièce; Sn_1, Sn_2 les surfaces des sections correspondantes, n_1, n_2 étant supérieurs à l'unité. Cher-

chons le travail que l'on peut développer ; t est la tension sur la section S , t_1 sur S_1 , t_2 sur S_2 ; on a $t_1 = \frac{t}{n_1}$; $t_2 = \frac{t}{n_2}$; donc :

$$T = \frac{1}{2} \alpha V t^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{n_1^2} V_1 t^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{n_2^2} V_2 t^2 + \dots$$

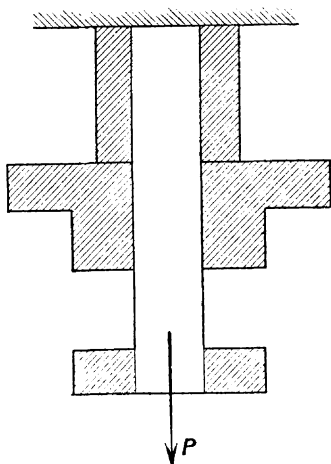


Fig. 271.

ou :

$$T = \sum \frac{\alpha V}{2} \left(\frac{t}{n} \right)^2$$

et, pour le travail maximum :

$$T_{\max} = \frac{\alpha r^2}{2} \sum \frac{V}{n^2} \tag{4}$$

Supposons maintenant qu'on réduise toute la pièce à sa section minimum ; V_1 devient $\frac{V_1}{n}$, S_1 devient $\frac{S_1}{n}$; V_2 est devenu $\frac{V_2}{n_2}$, et ainsi de suite. De plus, toutes les ten-

sions sont égales à t . Il vient :

$$T_{\max} = \frac{\alpha r^2}{2} \sum \frac{V}{n}$$

Ce travail est plus grand que (I) et la pièce résiste mieux qu'autrement.

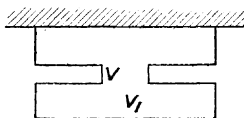


Fig. 272.

Considérons maintenant le cas particulier ci-contre (fig. 272). Soit V le volume total, v et v_1 sont les volumes du petit tronçon intermédiaire et du vide.

$$V = v + v_1$$

On a :

$$T_{\max} = \frac{\alpha r^2}{2} \left(v + \frac{v_1}{n^2} \right)$$

v est négligeable à côté de v_1 ; on peut donc écrire $V = v_1$ et $T_{\max} = \frac{\alpha R^2}{2} \frac{1}{n^2}$. Donc, si dans une pièce prismatique on fait une entaille, T_{\max} est réduit dans le rapport $\frac{1}{n^2}$; au point de vue statique ce rapport ne serait que $\frac{1}{n}$.

Observons que si les pièces travaillent par pression, t étant négatif, l'expression du travail reste la même, car t figure au carré dans la formule et on a :

$$T_{\max} = \frac{\alpha r^2 V}{2}$$

Cas d'un choc. — Considérons (fig. 273) une pièce encastrée à l'une de ses extrémités et présentant à l'autre extrémité une saillie. Le long de la pièce glisse un

mouton qu'on laisse tomber du haut et qui vient frapper la saillie. Le phénomène qui se produit est fort complexe. Au moment où le mouton vient en contact avec la saillie son mouvement, uniformément accéléré, se ralentit par

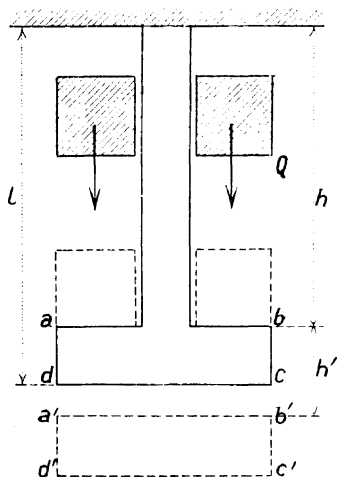


Fig. 273.

suite de la réaction de la pièce fixe; en même temps la pièce mobile exerce une pression motrice qui est précisément égale à cette réaction. Par suite de cette pression motrice la pièce fixe va s'allonger de façon que la saillie $abcd$ vienne en $a'b'c'd'$, par exemple. Quant à la pièce mobile trois cas peuvent se présenter :

1^o Au moment où la pièce fixe atteint son allongement maximum la pièce mobile est en contact avec elle et son centre de gravité atteint son point le plus bas;

2^o Au moment où la pièce fixe atteint son allongement maximum le centre de gravité du mouton n'a pas encore atteint son point le plus bas; la matière du mouton se tasse; c'est le cas où cette matière est très déformable;

donc, au moment où la pièce fixe s'arrête, le mouton subit une contraction ;

3° Le centre de gravité du mouton a atteint son point le plus bas avant que la tige fixe ne se soit complètement allongée ; c'est le cas où le mouton s'est relevé après avoir touché la saillie. De plus, les efforts dans la pièce fixe ne se produisent pas comme si la pièce était à l'état statique ; au moment où le mouton touche la saillie les molécules de celle-ci descendent avec une vitesse accélérée, puisqu'elles partent avec une vitesse nulle ; donc un élément de la pièce fixe n'est pas en équilibre, car la résultante des forces est plus grande que la résultante des résistances ; puis la vitesse diminue jusqu'à devenir nulle, alors les forces motrices font équilibre aux forces résistantes ; les tensions dans la pièce fixe diminuent donc de haut en bas. On voit donc bien que la question est complexe et, pour la résoudre, nous émettrons les hypothèses suivantes :

1° Nous supposons que les tensions se produisent comme à l'état statique, c'est-à-dire qu'elles sont uniformément réparties ;

2° Nous négligerons le travail de déformation dans les deux régions de contact de la pièce fixe et de la pièce mobile ;

3° Nous admettrons qu'au moment où la pièce fixe atteint son maximum d'allongement, le centre de gravité du mouton atteint son point le plus bas. Appliquons le théorème des forces vives. L'accroissement des forces vives est nul puisque les molécules partent d'une vitesse nulle pour arriver à une vitesse nulle. Soit θ le poids du mouton. Le travail de la pesanteur est $\theta (h + h')$. Le travail résistant de la pièce est $-\frac{\alpha V t^2}{2}$; on a donc

$$\theta (h + h') - \frac{\alpha V t^2}{2} = 0 ; \quad \theta (h + h') = \frac{\alpha V t^2}{2} \quad (1)$$

Nous avons une hypothèse trop favorable en supposant les tensions t uniformément réparties ; mais observons que nous faisons une hypothèse défavorable en supposant que le travail moteur est annulé par le travail résistant, alors qu'il faudrait tenir compte de la déformation du mouton. On a :

$$h' = \delta \cdot l = \alpha t l$$

L'équation (1) devient :

$$\theta (h + \alpha t l) = \frac{\alpha V t^2}{2} \quad (2)$$

On pourrait se demander la hauteur maximum dont le mouton peut tomber sans occasionner de déformation permanente de la pièce fixe ; R étant la limite d'élasticité on a :

$$\theta (h + \alpha R l) = \frac{\alpha R^2 V}{2}$$

d'où

$$h_{\max} = \frac{1}{\theta} \left(\frac{\alpha R^2 V}{2} - \alpha R l \right) \quad (3)$$

Cherchons la valeur de la tension t ; l'équation (2) donne

$$t^2 - \frac{2\theta t l}{V} - \frac{2\theta h}{\alpha V} = 0$$

or

$$\frac{l}{V} = \frac{1}{S}$$

S étant la section ; on a donc :

$$t^2 - \frac{2\theta}{S} t - \frac{2\theta h}{\alpha V} = 0$$

et enfin :

$$t = \frac{\theta}{S} + \sqrt{\left(\frac{\theta}{S}\right)^2 + \frac{2\theta h}{\alpha V}} \quad (4)$$

Le radical est plus grand que $\frac{\theta}{S}$; or t est positif ; on prendra le signe + devant le radical.

Dans la plupart des cas $h' = \alpha tl$ est négligeable devant h ; les formules deviennent :

$$\theta h = \frac{\alpha l^2 V}{2} ; \quad h_{\max} = \frac{\alpha R^2 V}{2\theta} ; \quad t = \sqrt{\frac{2\theta h}{\alpha V}} .$$

Un cas particulier intéressant est celui qui correspond à $h = 0$, la charge est appliquée brusquement sans cependant qu'il y ait choc. L'équation (4) devient

$$t = \frac{2\theta}{S} .$$

Dans le cas d'une charge statique on avait $t = \frac{\theta}{S}$; l'effort est donc doublé. Il pourrait y avoir là une contradiction. Observons cependant que dans le cas statique la force θ est appliquée en augmentant graduellement, tandis que, dans le cas actuel, le mouton est placé sur la saillie de façon qu'il y ait contact sans pression, puis lâché brusquement ; au moment où on le lâchait les efforts dans la pièce fixe étaient nuls ; quand on lâche le mouton celui-ci tend à se mettre en équilibre et la pièce fixe prend un mouvement accéléré qui devient uniforme au moment où l'effort total tS dans la pièce égale θ , donc quand la tension dans la pièce est $t = \frac{\theta}{S}$; mais en vertu de la vitesse acquise les deux pièces dépassent le point limite et alors $tS > \theta$; le mouvement est retardé jusqu'à une certaine limite telle que $tS = 2\theta$ ou $t = \frac{2\theta}{S}$. Cette remarque est très importante pour le cas où on a affaire à des pièces soumises à des efforts très brusques. De telles pièces doivent être calculées comme si les efforts étaient doubles de ceux qui se produisent à l'état statique. Si donc on a affaire à une pièce qui doit subir un

effort P' à l'état statique et de plus un effort P'' plus ou moins brusque, on calculera la section d'après la formule $P = P' + 2P''$.

Voyons maintenant ce qui se produit quand la pièce fixe a subi son maximum de dilatation. Si les deux pièces étaient parfaitement élastiques, la pièce fixe subirait une accélération vers le haut, se raccourcirait et remonterait suivant une loi inverse de la loi de descente, en communiquant au mouton une impulsion égale et de signe contraire à celle que le mouton lui-même lui avait commu-

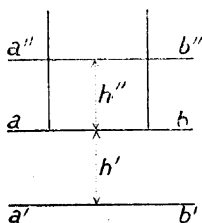


Fig. 274.

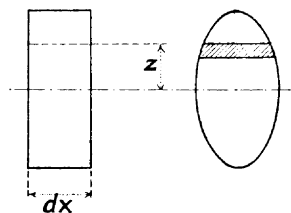


Fig. 275.

niquée; celui-ci remonterait donc à sa hauteur primitive. Mais cela ne se passe pas ainsi. Admettons que le mouton reste en contact avec la pièce et que celle-ci oscille en portant le mouton; donc le mouton, primitivement en repos en $a'b'$, est soumis à un travail moteur de la part de la pièce et à un travail résistant dû à son poids. Le premier travail est exprimé par $\frac{\alpha t^2 V}{2}$; le second par $-\theta \delta l = -\theta z l l$ (5); or, d'après l'équation (2), $\alpha \theta l l < \frac{\alpha t^2 V}{2}$ à moins que $h = 0$. La somme des deux travaux (5) ne peut donc être nulle et on a

$$\frac{\alpha t^2 V}{2} - \alpha \theta l l \geq 0$$

Cela prouve que lorsque la pièce est arrivée en $a b$ (fig. 274) sa vitesse n'est pas encore nulle; elle re-

monte donc jusqu'en $a''b''$ à une hauteur de ab égale à $h'' = -\alpha t'l$; t' est négatif. Pendant cette dernière période la pièce fixe développe un travail résistant $-\frac{\alpha t'^2 V}{2}$; la pièce mobile développe un travail moteur sur la pièce fixe, égal à $\alpha \theta t'l$. On a donc

$$\frac{\alpha t^2 V}{2} - \alpha \theta t l = \frac{\alpha t'^2 V}{2} - \alpha \theta t' l;$$

t et t' jouent le même rôle dans cette équation; t' étant négatif sera donné par la seconde racine de l'équation (4) et on aura :

$$t' = \frac{\theta}{S} - \sqrt{\left(\frac{\theta}{S}\right)^2 + \frac{2\theta h}{\alpha V}}$$

Les dilatations extrêmes sont αt et $-\alpha t'$. La dilatation moyenne est la dilatation correspondant à la tension moyenne $t'' = \frac{t + t'}{2}$; on a $t'' = \frac{2\theta}{2S} = \frac{\theta}{S}$. Elle est donc égale à la tension à l'état statique. La pièce oscille donc de part et d'autre d'une position correspondant à la dilatation à l'état statique.

TRAVAIL DE FLEXION

Considérons un prisme soumis à la flexion simple plane et laissons de côté l'effort tranchant; admettons la constance du coefficient α . Pour un élément de section ds (fig. 275), de longueur dx mesurée dans le sens de l'axe longitudinal, à la distance z de l'axe neutre on a un travail

$$dT = \frac{t ds}{2} \delta dx = \frac{\alpha}{2} t^2 ds dx$$

sachant que $t = \frac{\alpha}{\delta}$.

Or, si le plan des forces extérieures coïncide avec l'un

des deux axes principaux de la section dont le moment d'inertie par rapport à l'autre axe est I , on a

$$t = \frac{Mz}{I}$$

et

$$dT = \frac{\alpha}{2} \frac{M^2}{I^2} z^2 ds dx,$$

et, pour le prisme entier,

$$T = \frac{\alpha}{2} \int \frac{M^2}{I^2} dx \int z^2 ds = \frac{\alpha}{2} \int \frac{M^2}{I} dx \quad (1)$$

l'intégrale se rapportant à la longueur totale de la pièce.

Soit un prisme fixé à une extrémité, chargé à l'extrémité libre d'un poids P ; désignons $l - x$ par ξ et dx par $d\xi$; on a :

$$T = \frac{\alpha}{2} \int_0^l \frac{P^2 \xi^2}{I} d\xi = \frac{\alpha}{6} \frac{P^2}{I} l^3$$

Cette équation permet de trouver très rapidement la valeur de la flèche f de l'extrémité libre; en effet, le travail $\frac{1}{2} Pf$ pour une charge croissant de 0 à P , doit être égal à T ; il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Pf &= \frac{\alpha}{6} \frac{P^2}{I} l^3 \\ f &= \frac{\alpha}{3} \frac{P}{I} l^3 \end{aligned}$$

Soit r''' l'effort à l'encastrement à la distance $z = V$ de l'axe neutre :

$$\begin{aligned} Pl &= r''' \frac{l}{V} \\ T &= \frac{\alpha}{6} r'''^2 \frac{l}{V^2} \\ I &= \psi SV^2 \end{aligned}$$

Pour une section rectangulaire :

$$I = \frac{1}{12} bh^3 = \psi bh \left(\frac{h}{2}\right)^2; \quad \psi = \frac{1}{3}$$

Pour une section circulaire :

$$I = \frac{\pi}{64} d^4 = \psi \frac{\pi}{4} d^2 \left(\frac{d}{2}\right)^2; \quad \psi = \frac{1}{4};$$

d'autre part $Sl = V$, volume :

$$T = \frac{\alpha}{6} \psi r''^2 Sl = \frac{\alpha}{6} \psi r''^2 V \quad (2)$$

Le travail de flexion est proportionnel au volume du prisme et au carré de l'effort de la matière.

Soit maintenant une pièce d'égale résistance à la flexion; $r'' = \frac{M}{I} V = \text{constante}$. Introduisons cette valeur dans l'expression (1) :

$$T = \frac{\alpha}{2} \int \left(\frac{Ir''}{V}\right)^2 \frac{dx}{I} = \frac{\alpha}{2} r''^2 \int \frac{I}{V^2} dx$$

$$I = \psi SV^2$$

$$T = \frac{\alpha}{2} \psi r''^2 \int_0^l S dx = \frac{\alpha}{2} \psi r''^2 V \dots \quad (3)$$

Ici le travail à la flexion est donc indépendant de la charge et du mode de fixation de la pièce; il est proportionnel au volume et au carré de l'effort; il est trois fois supérieur à la valeur du travail relatif à une pièce prismatique ordinaire.

Considérons une pièce portée par deux points d'appui et soumise en son milieu à un effort P croissant graduellement; on a, pour le travail élastique :

$$T = \int P df$$

$$t = \frac{MV}{I}$$

$$M = -\frac{Pl}{4}; \quad P = \frac{4tI}{Vl};$$

d'autre part :

$$f = \frac{Pl^3\alpha}{48I} = \frac{4tl^3\alpha}{Vl48I} = \frac{tl^2\alpha}{12V}$$

$$T = \int \frac{4tI}{Vl} \frac{l^2\alpha}{12V} dt = \int \frac{1}{3} \frac{Il\alpha}{V^2} t dt = \frac{1}{6} \frac{Il^2\alpha}{V^2}$$

$$T_{\max} = \frac{1}{6} \frac{IlR^2\alpha}{V^2}.$$

Si la pièce est encastree à un bout et soumise à l'effort P à l'extrémité libre,

$$P = \frac{tI}{Vl} ; \quad f = \frac{tl^2\alpha}{3V}$$

P est quatre fois moindre que dans le cas précédent mais f est quatre fois plus grand ; on a toujours $T = \frac{1}{6} \frac{Il^2\alpha}{V^2}$.

Soit enfin une pièce appuyée à ses extrémités et un mouton tombant d'une hauteur h ; nous ferons les mêmes hypothèses que dans le cas du travail de tension. Il vient :

$$\theta (h + f) = \frac{Il^2\alpha}{6V^2}$$

ou

$$\theta \left(h + \frac{tl^2\alpha}{12V} \right) = \frac{t^2Il\alpha}{6V^2} \quad (1)$$

Dans le cas d'un mouton tombant sur l'extrémité d'une pièce encastree, on aurait

$$\theta \left(h + \frac{tl^2\alpha}{3V} \right) = \frac{t^2Il\alpha}{6V^2} \quad (2)$$

On voit que, quoique le travail résistant développé dans les deux cas soit le même, le poids θ que l'on pourra faire agir dans le premier cas est plus grand, toutes choses égales d'ailleurs, que celui qu'on peut faire agir dans le second cas ; la pièce appuyée résiste donc mieux.

En général on peut négliger les termes $\frac{tl^2\alpha}{12V}$ ou $\frac{tl^2\alpha}{3V}$

et on a alors, pour les deux cas, $\theta h = \frac{t^2 l \alpha}{6 V^2}$; d'où, pour une hauteur h donnée, $\theta_{\max} = \frac{R^2 l \alpha}{6 V^2 h}$ et, pour un poids θ donné, $h_{\max} = \frac{R^2 l \alpha}{6 V^2 \theta}$; d'autre part, $t = V \sqrt{\frac{6 \theta h}{\alpha l}}$. Reprenons la formule

$$T = \frac{l t^2 \alpha}{6 V^2}; \quad I = r_g^2 S$$

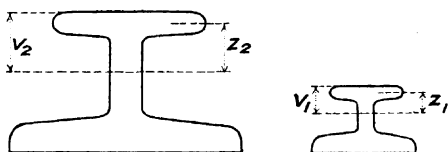


Fig. 276.

Soit r_g le rayon de giration. On a $I = r_g^2 S$, en assimilant la surface à la masse; donc

$$I = r_g^2 S l = r_g^2 V$$

V volume de la pièce; dès lors

$$T = \frac{V r_g^2 t^2 \alpha}{6 V^2}; \quad T_{\max} = \frac{V R^2 \alpha r_g^2}{6 V^2};$$

donc pour les pièces de sections identiques, c'est-à-dire pour lesquelles r_g est le même, le T_{\max} est proportionnel au volume. Ce principe est encore vrai si les sections sont semblables. En effet, on peut écrire $T = \frac{V t^2 \alpha}{6} \left(\frac{r_g}{V} \right)^2$.

Démontrons que $\frac{r_g}{V}$ est le même pour deux pièces de section semblable. Soient (fig. 276) deux sections dont les dimensions sont dans le rapport $\frac{1}{n}$. On a :

$$S_2 = S_1 n^2; \quad V_2 = V_1 n^3; \quad Z_2 = Z_1 n; \quad I_2 = \int z_1^2 ds_1;$$

$$I_2 = \int z^2 ds = \int ds_1 n^2 z_1^2, \quad n^2 = \int n^4 ds_1 z_1 = n^4 I_1;$$

$$r_{1g} = \sqrt{\frac{I_1}{S_1}}; \quad r_{2g} = \sqrt{\frac{n^4 I_1}{n^2 S_1}} = nr_{1g};$$

donc

$$\frac{r_{1g}}{V_1} = \frac{r_{1g}u}{V_1 u} = \frac{r_{1g}}{V_1} = \text{constante.}$$

Observons que le travail de flexion $\frac{Vl^2 \alpha}{6} \left(\frac{r_g}{V}\right)^2$ est plus petit que le travail d'extension $\frac{\alpha Vl^2}{2}$. Le premier facteur

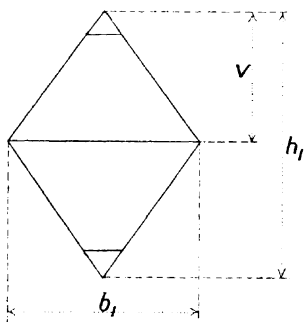


Fig. 277.

est $\frac{1}{6}$ d'un côté, tandis qu'il n'est que $\frac{1}{4}$ de l'autre côté; de plus il est certain que $\frac{r_g}{V} < 1$. Ce fait était évident *a priori* car dans le cas d'extension toutes les sections subissent la tension R dans toutes leurs parties; tandis que dans le cas de flexion il n'y aura qu'une seule section qui subit R et seulement dans ses parties extrêmes.

La formule $T = \frac{\alpha Vl^2}{2} \left(\frac{r_g}{V}\right)^2$ ou $T = \frac{\alpha ll^2}{6V^2}$ montre qu'à égalité de section le travail T est proportionnel à la longueur; donc des deux pièces ci-dessus, (2) résiste le mieux; l'inverse a lieu à l'état statique, car alors on a

$t = \frac{MV}{I}$, $M = \frac{Pl}{4}$; $P = \frac{4I}{Vl} t$ et on voit que P est inversement proportionnel à la longueur.

Observons enfin que la forme de plus grande résistance n'est pas la même qu'à l'état statique. En effet, à l'état statique, on a $P = \frac{4I}{Vl} t = \frac{4t}{l} \frac{1}{V}$ et il faut chercher à avoir $\frac{1}{V}$ maximum. À l'état dynamique on a $T = \frac{1}{V^2} \times \frac{lt^2\alpha}{6}$ et il faut chercher à avoir $\frac{1}{V^2}$ maximum. Considérons, par exemple, une section en losange à bouts recoupés (fig. 277). On a

$$I = 2b_1 \left(\frac{V^3}{3} - \frac{V^4}{2h_1} \right)$$

$$\frac{1}{V} = 2b_1 \left(\frac{V^2}{3} - \frac{V^3}{2h_1} \right)$$

Annulons la dérivée pour avoir $\frac{1}{V}$ maximum; on a : $V = \frac{4}{9} h_1$; il faut donc recouper à $\frac{4}{9}$ de h_1 ; d'autre part

$$\frac{1}{V^2} = 2b_1 \left(\frac{V}{3} - \frac{V^2}{2h_1} \right)$$

d'où, en annulant la dérivée

$$\frac{1}{3} = \frac{2V}{k}; \quad V = \frac{h_1}{3}.$$

Théorèmes sur la déformation. — Nous avons eu l'occasion de voir que toutes les forces extérieures agissant sur un prisme ne sont en général pas connues. Les réactions d'appui, par exemple, les liaisons de corps entre eux demandent des calculs spéciaux pour leur détermination. Parfois les équations d'équilibre de la mécanique rationnelle suffisent et le système est *isostatique*; si elles ne suffisent pas il faut faire intervenir les lois de l'élas-

ticité et le système est *hyperstatique* ; c'est notamment ce que nous avons fait lors de l'étude générale de la déformation des corps. On doit à Castigliano et à Maxwell deux théorèmes qui facilitent singulièrement la recherche des liaisons, particulièrement quand il s'agit de charges roulantes, pour le calcul des ponts à plusieurs appuis. Ces théorèmes sont basés sur l'étude des déformations.

Théorème de Castigliano. — Le déplacement du point d'application d'une des forces extérieures agissant sur un corps obéissant à la loi de Hooke est égal, dans le cas d'une déformation élastique du corps, à la dérivée partielle du travail de déformation prise par rapport à la force considérée. Considérons, en effet, une force extérieure P_e agissant sur un corps et ayant un déplacement y_e ; elle donne donc lieu à un travail de déformation T_e . Supposons que P_e reçoive un accroissement infiniment petit dP_e ; l'accroissement correspondant du travail de déformation sera dT_e . Il s'agit de calculer la dérivée partielle

$$\frac{dT_e}{dP_e}$$

Appliquons d'abord sur le corps la seule force dP_e ; le travail de déformation correspondant est

$$\frac{1}{2} dP_e \frac{dy_e}{dP_e} dP_e$$

Appliquons ensuite progressivement la force P_e en la faisant croître de zéro à son maximum; le corps subit la même déformation que précédemment et le travail est le même ou $T = \frac{1}{2} \Sigma P y$. Le point d'application de dP_e se déplace de y^c ; le travail de dP_e est

$$y^c dP_e$$

donc :

$$T + dT = \frac{1}{2} \Sigma P y + y_e dP_e + \frac{1}{2} \frac{dy_e}{dP_e} dP_e^2$$

Négligeons les infiniment petits du second ordre :

$$dT = y_e dP_e$$

$$y_e = \frac{dT}{dP_e}$$

relation qui démontre le théorème.

Supposons donc que la mécanique rationnelle ne fournisse pas un nombre suffisant d'équations dans un cas d'équilibre déterminé. On exprime alors en fonction d'inconnues que l'on choisit les autres inconnues en utilisant les équations d'équilibre; on opère de même pour les efforts tranchants et les moments fléchissants; on exprime le travail de déformation par l'équation

$$T = \frac{1}{2} \int \frac{\alpha M^2}{I}$$

et on applique la relation de Castigliano

$$y_e = \frac{dT}{dP_e} \tag{1}$$

autant de fois qu'il y a d'inconnues. Si la liaison est fixe $y_e = 0$ et pour ce point $\frac{dT}{dP_e} = 0$; d'où le second théorème de Castigliano :

Théorème du travail minimum. — Les forces de liaison dont le travail est nul sont telles que le travail de déformation du système hyperstatique est minimum; ou pour résumer en même temps le premier théorème :

La dérivée partielle du travail de déformation d'un corps obéissant à la loi de Hooke, par rapport à une force extérieure ne produisant aucun travail est nulle.

Cette force est telle que le travail de déformation du système hyperstatique est minimum.

Nous allons intéresser le théorème de Castigliano par un exemple. Considérons une poutre uniformément chargée d'un poids p par unité de longueur et reposant sur trois appuis (fig. 278). La seule inconnue est la réac-

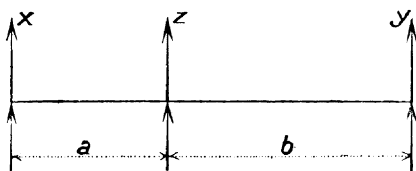


Fig. 278.

tion Z de l'appui intermédiaire. Les conditions d'équilibre sont :

$$X = \frac{p(a+b)}{2} - Z \frac{b}{a+b}$$

$$Y = \frac{p(a+b)}{2} - Z \frac{a}{a+b}$$

Le moment fléchissant dans une section de la travée de gauche a pour valeur

$$M = Xx - p \frac{x^2}{2}$$

Le travail de déformation s'obtient par la relation

$$T = \frac{1}{2} \int \frac{xM^2}{I} dx$$

Calculons dT et admettons x et I constants; M dépend de Z ;

d'où pour la travée de gauche :

$$\int_0^a \left(Xx - p \frac{x^2}{2} \right) x \frac{dX}{dz} dx = \left(\frac{Xa^3}{3} - p \frac{a^4}{8} \right) \frac{dX}{dZ}$$

D'où

$$\frac{d\Gamma}{dz} = \frac{\alpha}{M} \left[\left(\frac{Xa^3}{3} - p \frac{a^4}{8} \right) \frac{dX}{dz} + \left(\frac{Yb^3}{3} - p \frac{b^4}{8} \right) \frac{dY}{dZ} \right]$$

l'intégrale relative à la travée de droite se trouvant de la même manière que celle relative à la travée de gauche.

D'autre part

$$\frac{dX}{dZ} = - \frac{b}{a+b}; \quad \frac{dY}{dZ} = - \frac{a}{a+b}$$

Le point d'application de Z ne se déplace pas; donc

$$\frac{d\Gamma}{dZ} = 0 \text{ et :}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{b}{a+b} \left[\frac{2a^3}{3} \left(p \frac{a+b}{2} - Z \frac{b}{a+b} \right) - p \frac{a^4}{4} \right] \\ & - \frac{a}{a+b} \left[\frac{2b^3}{3} \left(p \frac{a+b}{2} - Z \frac{a}{a+b} \right) - p \frac{b^4}{4} \right] = 0 \end{aligned}$$

d'où

$$Z = p \frac{a^3 + 4a^2b + 4ab^2 + b^3}{8ab}$$

Soit $a = b$; il vient

$$Z = \frac{5}{4} pa$$

Théorème de Maxwell. — Les influences réciproques de deux forces sur le déplacement de leurs points d'application sont égales entre elles. On a vu :

$$T = \frac{1}{2} \Sigma P_e y_e \quad (1)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dP_e} &= \frac{1}{2} \Sigma P_e \frac{dy_e}{dP_e} + \frac{1}{2} y_e \\ y_e &= 2 \frac{d\Gamma}{dP_e} - \Sigma P_e \frac{dy_e}{dP_e} \end{aligned} \quad (2)$$

De (1) et (2) on tire

$$\frac{dT}{dP_e} = \Sigma P_e \frac{dy_e}{dP_e} \quad (3)$$

$$y_e = \Sigma P_e \frac{dy_e}{dP_e} \quad (4)$$

Dérivons par rapport à l'une des forces P, par exemple par rapport à P_k , en observant que dans le second membre le terme seul en P_k dépend de y_k .

$$\frac{dy_e}{dP_k} = \Sigma P_e \frac{d^2y}{dP_e dP_k} + \frac{dy_k}{dP_e}$$

Or les déplacements y sont des fonctions linéaires des forces, la loi de Hooke étant supposée applicable; admettons aussi le principe de superposition. On a donc :

$$y_e = \alpha_{n1}P_1 + \alpha_{n2}P_2 + \dots + \alpha_{nn}P_n + \dots$$

Les coefficients α sont appelés *coefficients d'influence*; ils dépendent des propriétés élastiques de la matière considérée et du mode de répartition des forces extérieures. On déduit :

$$\frac{d^2y_e}{dP_e dP_k} = 0; \quad \text{donc} \quad \frac{dy_e}{dP_k} = \frac{dy_k}{dP_e}$$

et

$$\alpha_{ne} = \alpha_{en}$$

Par suite :

L'influence de la force K sur le déplacement du point d'application de la force e est égale à l'influence de la force e sur le déplacement du point d'application de la force K.

Reprenons le cas de la poutre reposant sur trois appuis. Supposons le point d'appui intermédiaire enlevé et appliquons en ce point une force égale à l'unité de force. Déterminons analytiquement ou graphiquement l'élas-

tique correspondant à cette répartition d'efforts extérieurs. Désignons par x une abscisse quelconque à partir de l'appui de gauche. L'ordonnée de l'élastique en ce point est α_{xa} . Le théorème de Maxwell donne $\alpha_{ax} = \alpha_{xa}$. On connaît l'inflexion en a si, l'appui intermédiaire étant enlevé, on applique en x l'unité de force. La valeur de la réaction doit être telle qu'elle compense l'inflexion. On connaît l'élastique donc l'inflexion α_{aa} de la section a qui se produit sous l'influence de l'unité de force agissant dans cette section ; la déformation élastique est proportionnelle à la valeur de la force. Soient P la force en x , Z la réaction de l'appui intermédiaire développée par P . On a

$$\alpha_{aa} P = \alpha_{ax} P$$

et, d'après le théorème de Maxwell :

$$Z = \frac{\alpha_{xa} P}{\alpha_{aa}}$$

Le rapport des ordonnées de l'élastique primitivement tracée correspondant aux abscisses x et a fournit de suite la fraction de la charge P supportée par l'appui médian. Cette fraction est proportionnelle à l'ordonnée α_{aa} de l'élastique. Donc celle-ci étant tracée le calcul de la poutre continue est ramené à un problème isostatique.

TRAVAIL DE TORSION

La pièce est soumise à des efforts tels que la torsion simple intervient. On admettra l'invariabilité du coefficient β . Considérons un point quelconque P de la section, où se trouve l'élément $ds = dy dx$, à la longueur l . On a :

$$\theta = \frac{\gamma}{\beta}$$

et

$$dT = \frac{\theta ds}{2} \gamma l = \frac{\beta}{2} l \theta^2 ds$$

et, pour le prisme entier :

$$T = \frac{\beta}{2} l \int \theta^2 ds \quad (1)$$

l'intégrale se rapportant à la section entière.

Pour une autre section circulaire, r'' étant l'effort de torsion à la distance r ,

$$\begin{aligned} \theta &= r'' \frac{\rho}{r} \\ T &= \frac{\beta}{2} l \frac{r''^2}{r^2} \int \rho^2 ds = \frac{\beta}{2} l \frac{r''^2}{r^2} \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\beta}{4} r''^2 \pi r^2 l \\ \pi r^2 l &= V \text{ volume :} \\ T &= \frac{\beta}{4} r''^2 V ; \end{aligned} \quad (2)$$

on tire r'' de

$$M' = \frac{\pi}{16} r'' d^3$$

Pour un cylindre creux :

$$\begin{aligned} T &= \frac{\beta}{4} r''^2 \frac{d^2 + d_0^2}{d^2} V \\ V &= \frac{\pi}{4} (d^2 - d_0^2) l \\ r'' &= \frac{16}{\pi} M' \frac{d}{d^2 - d_0^2} \end{aligned} \quad (3)$$

Comparons le travail d'un cylindre creux de volume V à la traction, à la flexion et à la torsion. On a :

$$\begin{aligned} T_t &= \frac{1}{2} \alpha r^2 V \quad \text{si } t = r \\ T_f &= \frac{1}{24} \alpha r''^2 V : \\ T_t &= \frac{1}{4} \beta r''^2 V \end{aligned}$$

Or

$$\beta = 2 \frac{m+1}{m} \alpha ; \quad r'' = \frac{m}{m+1} r$$

Soient

$$m = \frac{10}{3}, \quad r''' = r$$

$$\beta = 2,6 \alpha ; \quad r'' = \frac{10}{13} r$$

On a :

$$\begin{aligned} T_t : T_f : T'_t &= \frac{1}{2} \alpha r^2 : \frac{1}{24} \alpha r^2 : \frac{1}{4} 2,6 \alpha \left(\frac{10}{13} r \right)^2 \\ &= 1 : \frac{1}{12} : \frac{10}{13} \\ &= 1 : 0,083 : 0,769 \end{aligned}$$

Pour une section elliptique de demis-axes a et b on a

$$\theta = \frac{2}{\pi} \frac{M'}{a^3 b^3} \sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}$$

$$T = 2 \frac{\beta}{\pi^2} \frac{M^2}{a^6 b^6} l \int (a^4 y^2 - b^4 x^2) ds$$

$$\int y^2 ds = \frac{\pi}{4} ab^3 ; \quad \int x^2 ds = \frac{\pi}{4} a^3 b$$

$$T = \frac{\beta}{2\pi} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} M'^2 l \quad (4)$$

$$T = \frac{\beta}{2} \frac{\pi}{4} r''^2 \frac{b}{a} (a^2 + b^2) l = \frac{\beta}{8} \frac{a^2 + b^2}{a^2} r''^2 V \quad (5)$$

$$V = \pi a b l$$

La formule (4) permet de déterminer facilement l'angle dont l'une des sections extrêmes a tourné vis-à-vis de l'autre ; cet angle, divisé par l , fournit l'angle spécifique de torsion δ , l'angle total de torsion étant $\delta.l$. Le moment de torsion croît de 0 à M' et donne lieu à un travail de torsion d'une section à l'autre, de

$$\frac{1}{2} M' \delta l$$

Ce travail est égal à celui que fournit l'équation (4) :

$$\frac{1}{2} M' \delta l = \frac{\beta}{2\pi} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} M'^2 l$$

$$\delta = \frac{1}{\pi} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} M' \beta \quad (6)$$

Pour une section rectangulaire de largeur b et de hauteur h on a, pour la tension θ du point quelconque P,

$$\theta = \sqrt{\theta_y^2 + \theta_x^2} = \sqrt{m^2 \left[1 - \left(\frac{2x}{h} \right)^2 \right]^2 y^2 + n^2 \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right]^2 x^2}$$

$$\int \theta^2 ds = m^2 \int y^2 ds + n^2 \int x^2 ds - 8 \left(\frac{m^2}{h^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \int y^2 x^2 ds$$

$$+ \frac{16 m^2}{h^4} \int y^2 x^4 ds + \frac{16 n^2}{b^4} \int y^4 x^2 ds$$

$$\int y^2 ds = \frac{1}{12} b^3 h; \quad \int x^2 ds = \frac{1}{12} b h^3; \quad \int y^2 x^2 ds = \frac{1}{144} b^3 h^3$$

$$\int y^2 x^4 ds = \frac{1}{960} b^3 h^5; \quad \int y^4 x^2 ds = \frac{1}{960} b^5 h^3$$

$$\int \theta^2 ds = \frac{1}{10} m^2 b^3 h + \frac{1}{10} n^2 b h^3 - \frac{1}{18} \left(\frac{m^2}{h^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) b^3 h^3$$

$$m = \frac{2}{b} \theta'_a; \quad n = \frac{2b}{h^2} \theta'_a$$

Soit r'' , tension θ'_a en A :

$$\int \theta^2 ds = \frac{8}{45} r''^2 b \frac{b^2 + h^2}{h}$$

$$T = \frac{4}{45} \beta r''^2 \frac{b}{h} (b^2 + h^2) l = \frac{4}{45} \beta \frac{b^2 + h^2}{h^2} r''^2 V \quad (7)$$

$$V = bhl.$$

Or

$$r'' = \frac{9}{2} \frac{M'}{b^2 h}$$

$$T = \frac{9}{5} \beta \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} M'^2 l \quad (8)$$

Le travail que le couple M' engendre par la rotation d'une section vis-à-vis d'une autre à la distance l fournit

$$\frac{1}{2} M' \delta l = \frac{9}{5} \beta \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} M'^2 l$$

$$\delta = 3,6 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} M' \beta \quad (9)$$

Les résultats déduits de cette formule diffèrent de ceux que donnent de de Saint Venant ; ils se rapprochent davantage des chiffres obtenus par Bauschinger. Les coefficients de de Saint Venant sont dans le rapport

$$\delta_a : \delta_b : \delta_c : \delta_d : \delta_e = 1 : 1,25 : 1,13 : 1,40 : 9,1.$$

Ceux de Bauschinger sont :

$$\delta_a : \delta_b : \delta_c : \delta_d : \delta_e = 1 : 1,24 : 1,20 : 1,47 : 9,65.$$

Enfin ceux que l'on déduit de la formule (9) :

$$\delta_a : \delta_b : \delta_c : \delta_d : \delta_e = 1 : 1,24 : 1,14 : 1,44 : 9,76.$$

Les recherches de Bach montrent que le coefficient ψ_0 dans la formule

$$\delta = \psi_0 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} M' \beta \quad (9 a)$$

décroit avec le rapport $\frac{b}{h}$, un peu plus rapidement que les coefficients de de Saint Venant. On aura :

$$T = \frac{1}{2} \psi_0 \beta \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} M'^2 l \quad (8 a)$$

En introduisant le rayon de giration il vient, pour le travail d'un prisme circulaire encastré et portant à son extrémité un bras de levier au bout duquel agit l'effort F (fig. 279) :

$$T = \int F a dx$$

$$M = F a = \frac{6 I_p}{V}$$

car

$$\theta = \frac{M'V}{I_p} ; \quad \alpha = \frac{M\beta}{I_p} = \frac{6I_p}{V} \frac{\beta l}{I_p} = \frac{6l\beta}{V}$$

$$T = \int_0^{\beta} \frac{I_p l^2}{V^2} \theta d\theta = \frac{I_p \theta^2 \beta}{2V^2} ;$$

soit k rayon de giration polaire,

$$I_p = Sk^2$$

$$T = \frac{Vk^2\theta^2\beta}{2V^2}$$

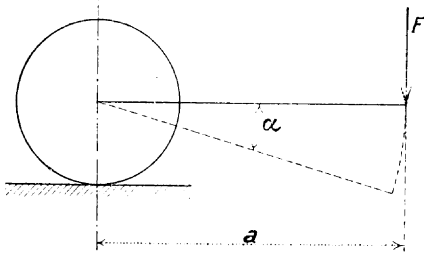


Fig. 279.

Pour des sections semblables $\frac{k}{V}$ est constant, T est donc proportionnel au volume. On suppose la pièce appuyée sur un support pour éviter la flexion ; s'il y a choc à l'extrémité du levier :

$$\theta \left(h + \frac{6l\beta}{V} \right) = \frac{I_p \theta^2 \beta}{2V^2}$$

et, en négligeant

$$\frac{6l\beta}{V} , \quad \theta h = \frac{I_p \theta^2 \beta}{2V^2} .$$

On tire de là h_{\max} étant donné θ ; ou θ_{\max} étant donné h .

TRAVAIL DE CISAILLEMENT

L'effort extérieur T pour une section considérée tombe dans cette section et coupe normalement l'axe longitudinal de la pièce. Généralement l'effort tranchant est accompagné d'un moment fléchissant que nous laissons de côté ici pour l'étude du travail de déformation. Pour un point quelconque on a, comme on sait,

$$\theta = \frac{T}{2y \cos \varphi} \frac{Mz}{I}$$

le coefficient β étant supposé invariable. L'élément de surface est $ds = dn dz$, à la distance z de l'axe principal; il a une longueur dx ; il y naît une tension tangentielle $\theta = \frac{\gamma}{\beta}$ et il y a un travail mécanique

$$d\Gamma = \frac{\theta ds}{2} \gamma dx = \frac{\beta}{2} \theta^2 ds dx$$

Pour la déformation totale on a

$$\Gamma = \frac{\beta}{2} \int dx \int \theta^2 ds = \frac{\beta}{2} \int dx \int \int \theta^2 dn dz$$

Soit une section rectangulaire de largeur b , de hauteur h ; il vient :

$$\varphi = \varphi' = 0; \quad \theta = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} \left[1 - \left(\frac{n}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right]; \quad ds = b dn$$

$$\Gamma = \frac{\beta}{2} \int dx \cdot \frac{9}{4} \frac{T^2}{bh^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[1 - \left(\frac{n}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right]^2 dn$$

$$\Gamma = \frac{3}{5} \beta \int \frac{T^2}{bh} dx.$$

TABLE DES MATIÈRES

ÉLASTICITÉ

<i>Tensions intérieures.</i> — Principes. Théorèmes sur les tensions. Ellipsoïde d'élasticité. Propriétés de l'ellipsoïde	1
<i>Déformations.</i> — Etude des déformations normales ou dilata-tions. Coefficient de dilatation. Loi générale des dilatations. Détermination expérimentale de la loi de Schüle. Contraction transversale. Déformations composées. Etude des glisse-ments. Relation entre les coefficients de dilatation normale et de glissement. Equations fondamentales de la théorie ma-thématique de l'élasticité. Déformations composées. Formule de de Saint-Venant. Coefficients admissibles pour les matériaux de construction	23

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

<i>Traction.</i> — Cas divers. Influence de la température. Etude par la théorie de l'élasticité. Essais à la traction. Résultats d'essais	109
<i>Compression.</i> — Cas divers. Billes et cylindres. Influence de la température. Essais à la compression. Résultats d'essais. .	133
<i>Flexion.</i> — Flexion des pièces à axe droit. Eléments interve-nant. Flexion plane simple. Moments et modules. Rayon de courbure. Elastique. Effort tranchant. Calcul des moments. Diagrammes. Calcul des résistances. Examen de divers modes de charge. Pièces à charge commune. Pièces d'égale résis-tance. Charge roulante. Examen des hypothèses. Essais à la flexion plane simple. Essais au cisaillement.	
Flexion plane composée. Application. Flambement. Formules d'Euler, de Navier, leur discussion. Essais au flambement.	
Flexion gauche simple. Ellipse d'inertie. Ses propriétés. Calculs divers.	

Flexion gauche composée. Propriétés diverses de l'ellipse d'inertie. Noyau central. Calcul des résistances.	
Flexion des pièces primitivement courbes. Théorie générale et applications diverses. Essais des pièces primitivement courbes.	
Etude de la flexion et du cisaillement par la théorie mathématique de l'élasticité.	449
<i>Torsion.</i> — Prismes circulaires et annulaires. Applications diverses. Prismes à section non circulaire. Théorie générale. Sections elliptique, rectangulaire, diverses. Ressorts de torsion. Essais à la torsion. Résultats d'essais	365
<i>Résistance composée.</i> — Forces normales dans des plans différents. Forces obliques. Effort tranchant et torsion. Traction ou pression et torsion. Flexion et torsion. Traction ou pression et effort tranchant. Flexion et effort tranchant. Traction, flexion, effort tranchant. Traction, effort tranchant, flexion, torsion.	409
<i>Résistance des enveloppes et des plaques.</i> — Enveloppes cylindriques à pression intérieure et extérieure. Théorie générale. Cas divers. Tubes frettés. Enveloppes en mince paroi. Enveloppes sphériques.	
Plaques. Théorie générale. Discussion. Théorie approchée de Bach. Discussion. Essais. Résultats d'essais.	433
<i>Travail de déformation des prismes droits.</i> — Généralités. Travail de traction. Compression, flexion, torsion, cisaillement. Cas divers.	479

CATALOGUE DE LIVRES
SUR
LES TRAVAUX PUBLICS

PUBLIÉS PAR

La Librairie Polytechnique CH. BÉRANGER

Successesseur de BAUDRY et C^{ie}

15, RUE DES SAINTS-PÈRES, A PARIS

21, RUE DE LA RÉGENCE, A LIÈGE

Le catalogue complet est envoyé franco sur demande.

Annales de la construction.

Nouvelles Annales de la construction, fondées par OPPERMANN. — 12 livraisons par an, formant un beau volume de 50 à 60 planches et 200 colonnes de texte.

Abonnements : Paris, 15 fr. Départements et Belgique, 18 fr. — Union postale, 20 fr.

Prix de l'année parue, reliée 20 fr.

Agenda Oppermann.

Agenda Oppermann paraissant chaque année. Élegant carnet de poche contenant tous les chiffres et tous les renseignements techniques d'un usage journalier. Rapporteur d'angles, coupe géologique du globe terrestre, guide du mètreur. — Résumé de géodésie. — Poids et mesures, monnaies françaises et étrangères. Renseignements mathématiques et géométriques. — Renseignements physiques et chimiques. — Résistance des matériaux. — Electricité. — Règlements administratifs. — Dimensions du commerce. — Prix courants et séries de prix. — Tarifs des Postes et Télégraphes.

Relié en toile, 3 fr.; en cuir, 5 fr. — Pour l'envoi par la poste, 25 cent. en plus.

Aide-mémoire de l'ingénieur.

Aide-mémoire de l'ingénieur. Mathématiques, mécanique, physique et chimie, résistance des matériaux, statique des constructions, éléments des machines, machines motrices, constructions navales, chemins de fer, machines outils, machines élévatoires, technologie, métallurgie du fer, constructions civiles, législation industrielle. Quatrième édition française du Manuel de la Société « Hütte », par PHILIPPE HUGUENIN. 1 volume in-12 contenant plus de 1200 pages, avec 500 figures dans le texte, solidement relié en maroquin. 15 fr.

Aide-mémoire français.

Aide-mémoire français. Mécanique générale, électricité, par J. BUCHETTI, ingénieur E. C. Paris, 2^e édition. 1 volume in-18 relié 10 fr.

Manuel de l'ingénieur.

Manuel de l'ingénieur civil et industriel. Mathématiques. Physique industrielle. Hydraulique. Pneumatique. Agronomie. Résistance des matériaux. Constructions. Mécanique. Technologie. Lois, décrets et règlements officiels français, par G. COLOMBO, ingénieur, professeur de mécanique industrielle à l'École Royale technique supérieure de Milan. Traduit de l'italien par EM. A. M. DELLA SANTA, ingénieur civil à Bruxelles. 19^e édition modifiée et augmentée. 1 volume in-18 avec 221 figures dans le texte. Relié 7 fr. 50

Aide-mémoire des conducteurs des ponts et chaussées.

Aide-mémoire des conducteurs et commis des ponts et chaussées, agents-voyers, chefs de section, conducteurs et piqueurs des chemins de fer, contrôleurs des mines,

adjoints du génie, entrepreneurs et, en général, de toute personne s'occupant de travaux, par J. EUG. PETIT, conducteur des ponts et chaussées, 2^e édition revue et considérablement augmentée, 1 volume in-12 avec de nombreuses figures dans le texte, solidement relié en maroquin. 15 fr.

Traité de constructions civiles.

Traité de construction : civiles. Fondation, maçonnerie, pavages et revêtements, marbrerie, vitrerie, charpente en bois et en fer, couverture, menuiserie et ferrures, escaliers, monte-plats, monte-charges et ascenseurs, plomberie d'eau et sanitaire, chauffage et ventilation, décoration, éclairage au gaz et à l'électricité, acoustique, matériaux de construction, résistance des matériaux, renseignements généraux, par E. BARBEROT, architecte. 2^e édition, 1 volume in-8^e avec 1637 figures dans le texte dessinées par l'auteur. Relié 20 fr.

Dictionnaire d'architecture.

Dictionnaire d'architecture donnant l'explication de tous les termes employés en architecture, beaux-arts, jurisprudence et travaux publics, par GUÉDY, architecte. 1 volume in-8^e contenant 368 figures dans le texte. Relié. 12 50

Cours de construction.

Cours pratique de construction, rédigé conformément au programme officiel des connaissances pratiques exigées pour devenir ingénieur. Terrassements, — ouvrages d'art, — conduite des travaux, — matériel, — fondations, — dragage, — mortiers et bétons. — maçonnerie, — bois, — métaux, — peinture, — jaugeage des eaux, — règlement des usines, etc., par PRED'HOME. 4^e édition. 2 volumes in-8^e. avec 363 figures dans le texte. 16 fr.

Maçonnerie.

Architecture et constructions civiles. Maçonnerie : pierres et briques ; leur emploi dans les maçonneries ; proportion des murs ; fondations ; murs de cave et murs en élévation ; des moulures et des ordres ; décoration des murs extérieurs des édifices ; cloisons, planchers, voûtes ; escaliers en maçonnerie ; éléments de décoration intérieure ; revêtement des sols ; roches naturelles ; chaux et ciments, du plâtre, produits céramiques, par J. DENFER, architecte, professeur à l'École centrale. 2 volumes grand in-8^e, avec 794 figures dans le texte. 40 fr.

Charpente en bois et menuiserie.

Architecture et constructions civiles. Charpente en bois et menuiserie ; les bois, leurs assemblages ; résistance des bois ; tableaux, calculs faits ; linteaux et planchers ; pans de bois ; combles ; étaielements, échafaudages, appareils de levage ; travaux hydrauliques, cintres, ponts et passerelles en bois ; escaliers ; menuiserie en bois ; parquets, lambris, portes, croisées, persiennes, devantures, décorations par J. DENFER, architecte, professeur à l'École centrale, 1 volume grand in-8^e ; avec 680 figures dans le texte 25 fr.

Série de prix provinciale. — Aide-Mémoire.

Séries de prix sous-détaillées, avec commentaires, par ALBERT PASQUET, ingénieur-architecte. 6 vol. in-4^e, contenant un grand nombre de figures dans le texte et hors texte. 80 fr.

On vend séparément :

- Tome I. Terrassement, maçonnerie, plâtrerie, fumisterie, transports. 25 fr.
- II. Charpente, menuiserie, ameublement, tapisserie 12 fr.
- III. Couverture, électricité, ferblanterie. 12 fr.
- IV. Serrurerie, électricité mécanique. 13 fr.
- V. Peinture, vitrerie, décors, miroiterie. 12 fr.
- VI. Encyclopédie élémentaire du bâtiment, législation. 12 fr.

On peut également se procurer à part chacune des parties suivantes :

- 1^{re} 2^e, et 3^e PARTIES. Terrassements, dragages, vidanges, parcs et jardins, puits et galeries, transports 8 fr.
- 4^e PARTIE. Maçonnerie, ciment armé, béton comprimé, sculpture, mosaïque de marbre, asphalte, égouts 15 fr.
- 5^e et 6^e PARTIES. Plâtrerie, fumisterie, stucs, voûtes d'églises, plâtre armé, marbrerie, fours, calorifères 8 fr.
- 7^e PARTIE. Charpente, pilotis, encoffrements, escaliers, charonnages rustiques. 5 fr.
- 8^e et 9^e PARTIES. — Menuiserie, ameublement, parquets, moulures sculptées, tentures pour meubles, ébénisterie. 8 fr.
- 10^e PARTIE. — Couverture, travaux d'ardoiserie, chaperons et couvertures de murs, toitures, terrasses 5 fr.
- 11^e PARTIE. — Ferblanterie, canalisations, tôlerie, poêlerie, chaudronnerie, éclairage, pompes. 8 fr.

12 ^e PARTIE. — Serrurerie, ferronnerie, charpentes en fer, escaliers en fer, quincaillerie, ascenseurs	10 fr.
13 ^e et 14 ^e PARTIES. Electricité, paratonnerres, mécanique, acoustique.	8 fr.

Séries de prix passe-partout.

Séries passe-partout maçonnerie, charpente, couverture et ferblanterie, menuiserie, serrurerie, plâtrerie, peinture, par ALBERT PASQUET, Ingénieur et architecte. 1 volume in-4^o. 4 fr.

Série locale type.

Série locale type servant de base et de guide pour la rédaction des séries locales (maçonnerie, charpente, couverture et ferblanterie, menuiserie, serrurerie, plâtrerie, peinture), par ALBERT PASQUET, Ingénieur architecte. 1 volume in-4^o. 15 fr.

Unification du mode de métré.

Unification du mode de métré pour les travaux de bâtiment entre tous les constructeurs français. Projet soumis à l'agrément de toutes les sociétés d'architectes, métrés-vérificateurs, constructeurs et syndicats patronaux du bâtiment conformément à la décision du congrès des architectes français à Pau, le 19 juin 1903, par ALBERT PASQUET, Ingénieur et architecte. 1 brochure in 4^o. 2 fr.

Distribution d'eau.— Assainissement.

Salubrité urbaine, distribution d'eau et assainissement. *Salubrité urbaine*. L'eau dans les villes. Aperçu historique. *Distribution d'eau*. Besoins. Ressources. Recherche, examen et choix des eaux destinées à l'alimentation. Captage des eaux. Procédés employés pour l'amélioration des eaux naturelles. Aménée de l'eau par la gravité. Élévation mécanique de l'eau. Réservoirs. Distribution générale. Service public, l'eau sur la voie publique et dans les promenades. Vente et livraison de l'eau. Service privé, l'eau dans la maison. *Assainissement*. L'efflux des villes. Systèmes d'évacuation. Déversement ou traitement final. Canalisation intérieure des maisons. Canalisation des voies publiques. Réseaux d'égouts. Construction des égouts. Curage. Epuration des eaux d'égout par le sol. Traitement artificiel des eaux d'égout. Réglementation. Statistique. par G. BECHMANN, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 2^e édition, très augmentée. 2 volumes in-8^o avec figures dans le texte 40 fr.
Chaque volume se vend séparément au prix de 20 francs.

Assainissement de Paris.

Notice sur le Service des eaux et de l'assainissement de Paris. Les eaux et les égouts il y a 100 ans. Les eaux et les égouts dans la première moitié du xiv^e siècle. Période de Belgrand. Période d'Alphand. *Etat actuel*. Ensemble. Organisation. Personnel. Alimentation des services publics et privés. Réservoirs. Distribution, égouts et collecteurs. Champs d'épuration. Canaux de navigation. Fonctionnement des services, exploitation et entretien. Résultats techniques et financiers dressés par les soins de G. BECHMANN, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1 volume in-8^o, contenant des figures dans le texte. Relié 7 fr. 50

Terrassements, tunnels, etc.

Procédés généraux de construction. Travaux de terrassement, tunnels, dragages et dérochements. Renseignements généraux. Terrassements à bras d'hommes. Terrassements à l'aide de machines. Déblai de rocher. Mode d'exécution des déblais et des remblais. Des *Tunnels* en général. Monographies de tunnels. Tunnels en terrains difficiles. Terrassements sous l'eau. Reconnaissance du terrain. *Dragage*. Dérasement de roches sous-marines. Remblais sous-marins. Entreprises de terrassements. Déblais souterrains. Fonctionnement des dragues à aspiration. *Dérochements*, par ERNEST PONTZEN. 1 vol. in-8^o, avec 234 fig. dans le texte. 25 fr.

Travaux d'art.

Procédés généraux de construction. Travaux d'art, par A. DE PRÉAUDEAU, avec la collaboration de E. Pontzen.

Tome I. Eléments des ouvrages. Généralités. Qualités et mode d'emploi des matériaux. Travaux préparatoires (*Terrassements, Dragages, Pieux, Bâtardeaux, Epuisements*, etc.). Travaux accessoires (*Cintres, Echauffages et Ponts de service*). 1 volume grand in-8^o. 20 fr.

Tome II. Construction des ouvrages. Fondations à l'air libre, à sec et sous l'eau. Procédés de consolidation du sous-sol, accidents. Fondations à l'air comprimé. Entretien et réparation des ouvrages, démolition. Travaux en élévation. Prix de revient (*Fondations, travaux en élévation*). 1 volume grand in-8^o, avec 389 figures dans le texte 20 fr.

Le Bouclier dans la construction des souterrains.

Emploi du bouclier dans la construction des souterrains. Exposé, enveloppe, couloir, avant- bec, divisions horizontales, divisions verticales, la cloison, corps du

bouclier, queue, longueur totale, vérins, poids des boucliers, blindage du front d'attaque, dispositions relatives à l'emploi de l'air comprimé. Revêtement. Conditions générales d'emploi de la méthode. Applications diverses du bouclier, par RAYNALD LEGOUËZ, ingénieur des ponts et chaussées 1 volume in-8°, avec 337 figures dans le texte, relié. 20 fr.

Le Bouclier dans la construction des souterrains.

Le Bouclier et les méthodes nouvelles de percement des souterrains. 1^{re} partie. Collecteur de Clichy. Siphon de l'Oise. Prolongement du chemin de fer d'Orléans à Paris. Collecteur de Bièvre. Chemin de fer métropolitain de Paris. Boucliers de Diouonnaat, de Weber, de Lamarre. Souterrain de Meudon. Dérivation du Loing et du Lunain. Applications à l'étranger. 2^e partie. Méthode. Avantages et inconvénients de la méthode. L'engin. Utilisation de l'engin, par RENÉ PHILIPPE, ingénieur des ponts et chaussées. 1 vol. in-8°, contenant 225 fig. dans le texte. Relié. 20 fr.

Mesurage et Métrage.

Traité pratique et complet de tous les mesurages, métrages, jaugeages de tous les corps, appliqué aux arts, aux métiers, à l'industrie, aux constructions, aux travaux hydrauliques, aux nivellements pour construction de routes, de canaux et de chemins de fer, drainage, etc., enfin à la rédaction de projets de toute espèce de travaux du ressort de l'architecture et du génie civil et militaire, terminé par une analyse et série de prix avec détails sur la nature, la qualité, la façon et la mise en œuvre des matériaux, par E. SERGENT, 8^e édition. 2 volumes grand in-8° et 1 atlas de 47 planches in-folio. 50 fr.

Géométrie descriptive.

Cours de géométrie descriptive. Perspective, ombres, courbes et surfaces, charpente. Professé à l'École centrale des arts et manufactures. par CH. BRISSE, rédigé et annoté par H. PICQUET, examinateur d'admission à l'École polytechnique. 1 volume in-8°, avec 300 figures dans le texte 17 fr. 50

Coupe des pierres.

Traité pratique de la coupe des pierres, précédé de toute la partie de la géométrie descriptive qui trouve son application dans la coupe des pierres, par LEJEUNE. 1 volume in-8° et 1 atlas in 4° de 59 planches, contenant 381 figures . . . 40 fr.

Coupe des pierres.

Coupe des pierres, précédée des principes du trait de stéréotomie, par EUGÈNE ROCCHÉ, examinateur de sortie à l'École Polytechnique, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, et CHARLES BRISSE, professeur à l'École centrale. 1 volume grand in-8° et 1 atlas in-4° de 33 planches. 25 fr.

Matériaux de construction.

Connaissance, recherche et essais des matériaux de construction et de ballastage, *Matériaux divers*. Sables, pouzzolane, chaux, ciments, plâtre, pierres à bâtir, pierres artificielles, briques, tuiles, carreaux, pavés, boutisses, bordures, bitumes, asphaltes, goudron, brai. *Bois de construction*. Division des bois, classification et usages des bois de construction, causes de destruction des bois, préservation, conservation, carbonisation, dessiccation, stérilisation, ignifugation, métallisation, coloration. *Métaux*. Composés ferreux, fonte, fer, acier, cuivre, plomb, étain, zinc, poids des métaux au mètre carré, action des huiles sur les métaux, essais des métaux, qualité des matières, épreuves à leur faire subir, réglementation des essais. *Matériaux pour ballastage*. 2^e édition par EM. BAUDSON, inspecteur au service central des travaux de surveillance au chemin de fer du Nord. 1 fort volume in-8°. Relié. 10 fr.

Chimie appliquée à l'art de l'ingénieur.

Chimie appliquée à l'art de l'ingénieur. *Première partie* : Analyse chimique des matériaux de construction. Généralités. Matériaux de maçonnerie. Métaux. Matériaux divers. Eaux naturelles, terres, amendements et produits agricoles, par CH. LÉON DURAND-CLAYE, inspecteur général, et DÉRÔME, chimiste de ce Laboratoire. *Seconde partie* : Etude spéciale des matériaux d'agrégation. Historique. Classification. Fabrication. Propriétés. Essais. Mortiers. Bétons. Applications. Comparaison de divers liants hydrauliques, par RENÉ FERET, ancien élève de l'École polytechnique. 1 volume in-8°, avec gravures dans le texte. 15 fr.

Chaux hydrauliques et ciments.

Fabrication et emploi des chaux hydrauliques et des ciments. Chaux hydrauliques. — Ciments de grappiers. — Ciments naturels et artificiels. Leur fabrication, leurs essais et leur emploi. Formant un guide pratique du fabricant, de l'ingénieur, de l'architecte et de l'entrepreneur, par BOERO, ingénieur des Arts et Manufactures. 1 volume in-8°, avec 148 figures dans le texte, relié 10 fr.

Ciments et chaux hydrauliques.

Ciments et chaux hydrauliques. Fabrication, propriétés, emploi. Chaux hydrauliques. Ciments Portland. Ciment de laitiers, ciments naturels, ciments mixtes, ciments de grappiers, ciments prompts, ciments romains. Pouzzolanes. Trass. Essais des produits hydrauliques. Emploi des produits hydrauliques. Cause de destruction des mortiers. Théories diverses sur la constitution, la prise et le durcissement des chaux, cimente et mortiers, etc., par E. CANDLOR, 2^e édition revue et considérablement augmentée. 1 volume grand in-8°, avec 98 figures dans le texte et 23 tableaux graphiques de résistance des ciments, relié.

Chaux et sels de chaux.

Chaux et sels de chaux appliqués à l'art de l'ingénieur. Chaux et sels de chaux considérés minéralogiquement, chimiquement et industriellement. Propriétés et procédés de fabrication des chaux grasses et maigres, des chaux hydrauliques et des ciments divers. Propriétés et modes d'extraction du carbonate de chaux, des pierres calcaires, des marbres, des albâtres, du sulfate de chaux et des plâtres. Théorie de la solidification des chaux, ciments, mortiers et plâtres. Essais mécaniques et essais chimiques des chaux, sels de chaux et ciments, par GRANGE, agent voyer en chef du département de la Vienne. 1 vol. grand in-8° avec 8 fig. dans texte. 18 fr.

Murs de soutènement.

Études théoriques et pratiques sur les murs de soutènement et les ponts et viaducs en maçonnerie, par DUBOSQUE, sous-ingénieur des ponts et chaussées, 5^e éditions revue, corrigée et augmentée. 1 volume in-8°, avec 13 planches et 141 figures, relié. 15 fr.

Murs de soutènement.

Tracé du profil des murs de soutènement et de pilastres de portes, par EUGÈNE JOYEUX, architecte. 1 volume in-8°, avec 36 figures dans le texte 5 fr.

Poussée des terres. — Murs de soutènement.

Poussée des terres. Stabilité des murs de soutènement. Formules générales relatives à l'équilibre intérieur d'un corps dépourvu de cohésion. Équilibre d'un massif indéfini limité par une surface libre plane. Équilibre d'un massif limité par deux plans. Stabilité des murs de soutènement. Renseignements numériques. Cours professé à l'École des Ponts et Chaussées, par J. RÉSAL, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. 1 volume grand in-8° avec 134 figures dans le texte 10 fr.

Résistance des matériaux.

Cours pratique de résistance des matériaux. Professé à la Société d'enseignement professionnel du Rhône, par J. NOUAT, ingénieur des arts et manufactures. 1 volume in-18 contenant de nombreuses figures intercalées dans le texte. Relié. 5 fr.

Résistance des matériaux.

Résistance des matériaux. Notions préliminaires de géométrie et de statique graphique. Principes généraux de la théorie mathématique de l'élasticité. Classification et propriétés élastiques des matériaux. Résistance des matériaux. Propriétés physiques et élastiques des matériaux de construction. Cours de l'école des ponts et chaussées, par JEAN RÉSAL, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8°, avec de nombreuses figures dans le texte. 16 fr.

Stabilité des constructions.

Traité élémentaire de la stabilité des constructions. Principes d'analyse, de résistance des matériaux et de statique graphique. Poutres droites et courbes. Charpentes en bois et en métal. Cintres. Aiguilles de barrage. Planchers, travées solidaires, leur lançage. Arcs articulés et encastrés. Piles métalliques. Ponts, grues, ponts tournants, ponts suspendus, déformations et contreventement. Portes d'écluses et vannes. Barrages en maçonnerie. Voûtes, piles et culées en maçonnerie. Murs de soutènement. Pieux à vis. Applications. Renseignements numériques. Règlements ministériels, à l'usage des ingénieurs, architectes, officiers d'artillerie et du génie, conducteurs et commis des ponts et chaussées. agents voyers, entrepreneurs et employés d'entrepreneurs de travaux publics et particuliers, par E. MÉTOUT, ingénieur des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8°, avec 400 figures dans le texte et 15 planches hors texte. Relié 30 fr.

Stabilité des constructions.

Stabilité des constructions. Calculs des poutres. Pièces courbes et arcs. Systèmes articulés. Systèmes rigides. Constructions en maçonnerie. Cours de l'École des ponts et chaussées, par JEAN RÉSAL, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° avec de nombreuses figures dans le texte. 20 fr.

Résistance des matériaux.

Stabilité des constructions et résistance des matériaux. Moments d'inertie. Théorie de l'élasticité. Constructions en maçonnerie. Poussées des terres. Murs de soutènement. Voûtes. Systèmes articulés. Extension ou compression, torsion, flexion. Poutres encastrees. Pièces chargées debout. Poutres composées. Poutres arc-boutées. Flexion des arcs. Plaques minces. Portes d'écluses. Flexion des ressorts. Charge roulante, par A. FLAMANT, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 2^e édition, revue et augmentée. Un volume grand in-8° avec 251 figures dans le texte. . . . 25 fr.

Statique graphique.

Statique graphique appliquée aux constructions, toitures, planchers, poutres, ponts, etc. Eléments du calcul graphique. — Des forces et de leur résultante. — Des moments fléchissants, des efforts tranchants. — Recherche des maxima. — Sur charge permanente concentrée et répartie. — Surcharge mobile. — Données pratiques sur le poids propre des toitures et sur leur surcharge accidentelle. — Poutres pleines. — Poutres à treillis, simples et multiples. — Centre de gravité. — Notions sur la résistance des matériaux. — Moment d'inertie. — Exemples et applications, par MAURICE MACRER, ingénieur. 1 volume grand in-8° avec figures et 1 atlas in-4° de 20 planches. 12 fr. 50

Statique graphique.

Eléments de statique graphique, par EUGÈNE ROUCHÉ, examinateur de sortie à l'Ecole polytechnique. 1 volume grand in 8°, avec gravures dans le texte. 12 fr. 50

Statique graphique.

Application de la statique graphique. Règlements ministériels, charges des ponts et des charpentes, poutres droites, poutres courbes, pleines, à treillis, continues, ponts-grucs, arcs métalliques, fermes métalliques, piles métalliques, influence du vent sur les constructions, leurs déformations, calcul des poutres pour le lançage et le montage, piles en maçonnerie, calcul des joints des poutres, formules et tables usuelles, par MAURICE KÖEHLIN, administrateur de la Société de Construction de Levallois-Perret, 2^e édition. 1 volume grand in 8°. avec figures dans le texte et 1 atlas in-4° de 34 planches 30 fr.

Statique graphique.

Eléments de statique graphique appliquée à l'équilibre des systèmes articulés, par ARTHUR THIRÉ, ancien élève de l'Ecole polytechnique, 1 volume grand in-8° et 1 atlas in-4° de 18 planches. 10 fr.

Cours de mathématiques.

Cours de mathématiques pures et appliquées, à l'usage des conducteurs des ponts et chaussées, agents voyers, chefs de section, architectes, conducteurs de travaux, entrepreneurs, etc., comprenant : *Arithmétique, Géométrie plane, Géométrie de l'espace, Algèbre, analyse et géométrie analytique, Mécanique.* par L. LANGLIN, inspecteur général des ponts et chaussées. 1 volume in-8°, avec de nombreuses figures dans le texte, relié. 10 fr.

Résumé des connaissances mathématiques.

Résumé des connaissances mathématiques nécessaires dans la pratique des travaux publics et de la construction, par E. MUSSAT, ingénieur des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8°, avec 133 figures dans le texte. 10 fr.

Voirie. — De l'alignement.

De l'alignement ou du régime des propriétés privées bordant le domaine public, par C. MORIN. 1 volume grand in-8°. 15 fr.

Traité de topographie.

Traité de topographie. Appareils d'optique, applications de la géodésie à la topographie, instruments de mesure, levé des plans de surface, levés souterrains, théorie des erreurs, par ANDRÉ PELLEFAN, ingénieur en chef des mines. 1 volume in-8°, avec 235 figures dans le texte, relié. 15 fr.

Topographie.

Cours de topographie. Levé des plans de surface et levé des plans de mines, par A. HABETS, ingénieur honoraire des mines, 3^e édit. 1 vol in-8° avec 107 fig., relié. 10 fr.

Levé des plans et nivellement.

Levé des plans et nivellement. 1^o Opérations sur le terrain. 2^o Opérations souterraines. 3^o Nivellement de haute précision, par LÉON DURAND-GLAYE, ingénieur en chef des ponts et chaussées, PELLETAN et LALLEMAND, ingénieurs des mines. 1 volume in-8°, avec figures dans le texte. 25 fr.

Levé des plans.

Traité du levé des plans et de l'arpentage. Notions relatives aux lignes et aux angles. — Description des instruments. — Levé des plans. — Triangulation. — Arpentage. — Polygonométrie. — Mesures des distances inaccessibles, par J. DUPLESSIS, 4^e édition. 1 volume in-8^o, avec 105 figures dans le texte. 3 fr.

Nivellement.

Traité du nivellement, contenant les principes généraux, la description et l'usage des instruments, les opérations et les applications, par J. DUPLESSIS, 3^e édition. 1 volume in-8^o, contenant 112 figures. 10 fr.

Tables trigonométriques centésimales.

Tables trigonométriques centésimales pour le tracé des courbes des voies de communication, augmentées de tables tachéométriques, suivi d'un recueil des coordonnées polaires et des coordonnées rectangulaires, de tables donnant les éléments de raccordement des courbes et des dénivelités des voies de fer et de nombreuses tables relatives à la pose des voies de fer, par TH. WRONECKI, ingénieur, ancien élève de l'École polytechnique de Zurich. 1 volume in-8^o, cartonné. 12 fr. 50

Tables tachéométriques.

Tables tachéométriques donnant sans calculs ni interpolation les distances et les hauteurs des points levés au tachéomètre comprenant les éléments relatifs à tous les calculs des levés tachéométriques, par TH. WRONECKI, ingénieur, ancien élève de l'École polytechnique de Zurich. 1 volume in-8^o, relié. 13 fr.

Tables tachéométriques.

Nouvelles tables tachéométriques centésimales et sexagésimales pour calculer les distances réduites à l'horizon, les différences de niveau, les coordonnées rectangulaires et les courbes. Précédées d'une instruction détaillée sur leurs différents usages, par J. ORLANDI, ingénieur civil. 1 volume in 12, cartonné. 7 fr. 50

Tables tachéométriques.

Nouvelles tables tachéométriques centésimales et sexagésimales pour calculer les distances réduites à l'horizon, les différences de niveau, les coordonnées rectangulaires et les courbes. Précédées d'une instruction détaillée sur leurs différents usages, par J. ORLANDI, ingénieur civil. 1 volume in-12, cartonné. 7 fr. 50

Tables tachéométriques.

Tables tachéométriques, donnant aussi rapidement que la règle logarithmique tous les calculs nécessaires à l'emploi du tachéomètre, par LOUIS PONS, ingénieur d'études de chemins de fer. 1 volume in-8^o, relié. 10 fr.

Tachéométrie.

Suppression du chaînage, des règles à calcul, des tables tachéométriques et des tables logarithmiques dans le nivellement et le levé des plans, méthode donnant simultanément la configuration et le relief des terrains de toute étendue par la lecture directe des distances horizontales, des différences de niveau et des coordonnées rectangulaires des points visés par rapport à l'orientation de chaque station, par LOIR ERASME, agent voyer, 3^e édition. 1 volume in-8^o, avec 3 planches. 5 fr.

Courbes de raccordement.

Tables pour le tracé des courbes circulaires de raccordement des voies de communication, par CHARLES GRIMMEISEN, ancien ingénieur. 1 volume in-12, avec figures dans le texte, relié. 9 fr.

Courbes de raccordement.

Tracé des courbes sans aucun chaînage de cordes ni d'ordonnées et levé des profils en travers sans niveau, par LOIR ERASME, 3^e édit. 1 vol. in-8^o, avec 1 pl. 1 fr.

Calcul des raccordements paraboliques.

Calculs des raccordements paraboliques dans les tracés de chemins de fer comprenant de nombreuses tables numériques et la théorie complète des courbes à considérer en plan et en profil, par MAXIMILIEN DE LEBER, inspecteur des chemins de fer, avec une introduction par CHARLES BRICKA, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1 volume in-8^o, avec figures et planches, relié. 23 fr.

Courbes de raccordement.

Nouvelles tables pour le tracé des courbes de raccordement en arc de cercle (chemins de fer, canaux, routes et chemins), par CHAUVAC DE LA PLACE, 6^e édition. 1 volume in-12, relié. 7 fr. 50

Airomètre.

Procédé graphique ou airomètre, très simple pour évaluer rapidement les surfaces de déblai et de remblai des profils en travers, concernant les chemins en lacune à élargir et à construire, par EUG. DUMETZ, conducteur des ponts et chaussées, ancien agent cantonal. 1 brochure in-8° contenant 5 figures dans le texte et une planche hors texte. 2 fr. 50

Mouvement des terres.

Théorie et pratique du mouvement des terres d'après le procédé Bruckner, par ERNEST HENRY, inspecteur général des ponts et chaussées. 1 vol. gr. in 8°. 2 fr. 50

Tables de déblais et de remblais.

Tables des surfaces, largeurs d'emprises et longueurs des talus, des profils en travers des voies de communication, mais plus spécialement destinées aux chemins de fer à voie étroite, par L. HENRIET, chef de section. 1 volume in-8°, relié. 12 fr.

Cours de routes.

Cours de routes professé à l'École des ponts et chaussées. Dispositions générales, définition, formes des différentes parties des routes. Etude et préparation des projets. Etude des tracés. Rédaction des projets. Construction des routes. Terrassements, chaussées, ouvrages accessoires. Entretien des chaussées empierrées. Entretien des chaussées pavées. Entretien des parties accessoires, des routes. Evaluation et répartition des dépenses d'entretien, par CH. LÉON DURAND CLAYE, inspecteur général des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8°. avec figures dans le texte. . . 20 fr.

Chemins vicinaux.

Traité pratique des chemins vicinaux. Généralités, personnel, assiette des chemins vicinaux, ressources de la voirie vicinale, exécution des travaux, comptabilité des chemins vicinaux, police de la voirie vicinale, police de roulage, objets divers, par ERNEST HENRY, inspecteur général des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8°. 20 fr.

Réparation et entretien des chaussées.

Réparation et entretien des chaussées en empiècement. Instructions pratiques à l'usage des ingénieurs, conducteurs, commis et agents voyers et plus spécialement à celui des cantonniers, par J. DUBOSQUE, sous-ingénieur des ponts et chaussées. 2^e édition mise à jour. 1 volume in-12, cartonné. 1 fr. 50

Pavage en bois.

Le bois et ses applications au pavage à Paris, en France et à l'étranger. Divers systèmes de pavage en bois; bois employé au pavage; étude des propriétés physiques, mécaniques, anatomiques et chimiques des bois; conservation et préparation des bois; fabrication des pavés; entretien et durée des pavages en bois; pavage en bois dans les voies à tramways; régime des sociétés de pavage en bois; contrats et cahiers des charges; fonctionnement du système de la régie, à Paris; prix de revient, par ALBERT PETSCHÉ, ingénieur des ponts et chaussées. 1 volume in-8°, avec 223 figures dans le texte, relié 20 fr.

Asphalte.

L'asphalte. Son origine, sa préparation, ses applications, par LÉON MALO. 2^e édition, entièrement refondue et mise au courant des derniers perfectionnements de l'industrie de l'asphalte. 1 volume in-12, avec 2 planches. 3 fr. 50

Traité complet des Chemins de fer.

Traité complet des chemins de fer. Historique et organisation financière, construction de la plate-forme, ouvrages d'art, voie, stations, signaux, matériel roulant, traction, exploitation, chemins de fer à voie étroite, tramways, par G. HUMBERT, ingénieur des ponts et chaussées. 3 volumes grand in-8°, avec 700 figures dans le texte. 50 fr.

Réception du matériel des chemins de fer.

Guide pour la réception du matériel des chemins de fer et tramways (*Manuel de l'Inspecteur*). Rails ordinaires et de tramways, traverses, bandages et essieux, attaches de rails, tôles, plats, solives, cornières, fers profilés, etc., considérations relatives à la rédaction des cahiers des charges pour rails d'acier, pièces détachées des locomotives, tenders et autre matériel roulant, remarques sur les essais de traction et les essais par gravure, par G. R. BODMER, traduit et adapté de l'anglais, par A. HOULLETTE, ingénieur, professeur à l'Association polymatique, officier d'Académie. 1 volume in-8°, contenant 25 figures dans le texte. Relié 6 fr.

Chemins de fer. Notions générales et économiques.

Chemins de fer. Notions générales et économiques. Historique, formalités et règlements relatifs à l'exécution des travaux, régimes, développements, dépenses. comparaison des voies ferrées avec les routes et les voies de navigation intérieure-prix de revient des transports sur rails, tarifs et leur application, recettes d'exploitation, voie et traction, chemins de fer à voie étroite, considérations économiques. par LÉON LEYDUE, ancien ingénieur des ponts et chaussées, ingénieur civil. 1 volume grand in-8° 15 fr.

Construction des chemins de fer.

Instructions pour la préparation des projets et la surveillance des travaux de construction de la plate-forme des chemins de fer, suivies de tables pour le calcul des courbes et pour l'évaluation des volumes des déblais et des remblais, par L. PARTIOT, inspecteur général des ponts et chaussées. 1 volume petit in-4°, avec 8 planches et de nombreuses figures intercalées dans le texte, relié 15 fr.

Chemins de fer.— Superstructure.

Chemins de fer. Superstructure. Les diverses voies de communication. Composition et largeur de la voie, divers types de rails, longueur, fabrication, éclissage, fixation et durée des rails. Traverses, longrines, ballast. Pose de la voie. Appareils de communication entre les voies. Appareils d'arrêt des véhicules. Outillage de la voie. Passages à niveau. Gares et stations, service des voyageurs, voie unique, voie double. Stations intermédiaires, stations de grande circulation, gares de bifurcation, gares terminales. Service des marchandises. Service du matériel roulant, détails. Signaux. Signaux de la voie. Langage, structure des signaux mobiles. Réglementation des signaux. Installation, enclenchements. Application de l'électricité aux signaux, par E. DEHARME, ingénieur du service central de la Compagnie du Midi. 1 volume in-8° avec 310 figures dans le texte et 1 atlas de 73 planches doubles. 50 fr.

Chemins de fer d'intérêt local.

La réglementation des chemins de fer d'intérêt local, des tramways et des automobiles. Enquêtes. Historique de la réglementation des chemins de fer d'intérêt local et des tramways. Réglementation d'administration publique concernant l'état blissement et l'exploitation des voies ferrées sur le sol des voies publiques. Cahier des charges-types des chemins de fer d'intérêt local. Cahier des charges-types des tramways. Réglementation des automobiles. Documents officiels. Lois, décrets et circulaires ministérielles, par A. DONIOL, inspecteur général des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° 10 fr.

SUPPLÉMENT. — La réglementation des chemins de fer d'intérêt local et des tramways. Ouvrage complétant l'ouvrage ci-dessus publié en 1900 et traitant de la jurisprudence administrative des concessions d'après les lois, décrets et circulaires ministérielles qui ont paru dans ces dernières années, par H. DONIOL, inspecteur général des ponts et chaussées en retraite. 1 volume grand in-8°. 3 fr.

Chemins de fer d'intérêt local.

Traité des chemins de fer d'intérêt local. Chemins de fer à voie étroite, tramways, chemins de fer à crémaillère et funiculaires, par G. HUMBERT, ingénieur des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° avec 212 figures dans le texte. Relié. 20 fr.

Chemins de fer à voie de 0,60 centimètres.

Construction et exploitation des chemins de fer à voie de 0,60 centimètres. Voie, terrassements, ouvrages d'art, machines et matériel roulant, avec étude d'un tracé entre deux points donnés. par R. TARTARY, conducteur des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° avec 97 figures dans le texte. 10 fr.

Chemins de fer funiculaires.— Transports aériens.

Chemins de fer funiculaires. Transports aériens. Funiculaires à mouvements alternatifs mus par une machine fixe. Funiculaires à contre-poids d'eau. Funiculaires à câbles sans fin. Principes, théorie, description, voie, poulies de supports, câbles, machines motrices, description. Câbles aériens porteurs, par A. LÉVY-LAMBERT, ingénieur civil. 1 volume grand in-8°, avec figures dans le texte. 15 fr.

Chemins de fer funiculaires.

Etude des chemins de fer funiculaires. Historique et classification, étude du profil en long, résistance au mouvement des trains, engins spéciaux et voie, construction et exploitation, par ALPHONSE VAUTIER, ingénieur civil. 1 brochure grand in-8° avec figures dans le texte. 2 fr. 50

Moyens de transport.

Les moyens de transport appliqués dans les mines, les usines et les travaux publics ; voitures, tramways, chemins de fer, plans inclinés, trainage par câble et par chaîne, etc., organisation et matériel, par EVRARD. 2 volumes in-8° avec 1 atlas de 123 planches in-folio contenant 1.400 figures. 100 fr.

Tarifs de chemins de fer.

Traité général des tarifs de chemins de fer, contenant une étude spéciale des tarifs appliqués en Allemagne, Autriche-Hongrie, Suisse, Italie, France, Belgique, Hollande, Angleterre et Russie, par F. ULRICH, conseiller intime au ministère des travaux publics de Berlin. Edition française revue et augmentée par l'auteur. 1 volume grand in-8° 16 fr.

Chemin de fer métropolitain de Paris.

Le chemin de fer métropolitain municipal de Paris. Description du réseau général. — Lignes en exploitation. Type des ouvrages. — Usines et sous-stations électriques. Résultats de l'exploitation des lignes en service. *Publié avec l'approbation de M. le Préfet de la Seine*, par J. HERVIEU, conducteur des ponts et chaussées, chef des bureaux du service technique du métropolitain, précédé d'une préface par F. BIENVENUE, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef du service technique du métropolitain. 1 volume grand in-8° contenant 75 gravures dans le texte et 19 planches hors texte. 15 fr.

Hydraulique agricole.

Hydraulique agricole. Aménagement des eaux ; irrigation des terres labourables, des cultures maraichères, des jardins, des prairies, etc. ; création et entretien des prairies ; dessèchements, dessalage, limonage et colmatage, curage ; irrigation et drainages combinés ; renseignements complémentaires techniques et administratifs, par J. CHARPENTIER DE COSSIGNY, ancien élève de l'École polytechnique. 2^e édition revue et augmentée. 1 vol. gr. in-8° avec de nombreuses figures dans le texte. 15 fr.

Drainage.

Drainage et assainissement agricole des terres. *Généralités*. Considérations générales sur l'assainissement et le drainage. *Assainissement et dessèchement*. Principes du dessèchement et de l'assainissement des grandes surfaces. Assainissement agricole des surfaces de petite étendue. *Drainage*. Tracé du drainage. Exécution des travaux. Economie du drainage. Etude et rédaction des projets. Applications des données à un exemple, par L. FAURE, inspecteur des améliorations. 1 volume in-8° contenant 119 figures dans le texte. Relié 12 fr. 50

Navigation intérieure. — Rivières à courant libre.

Rivières à courant libre. Etat naturel des cours d'eau. Opérations et observations pour l'étude des cours d'eau et de leur régime. Matériel et procédés de la navigation fluviale. Premières améliorations. Travaux contre les inondations. Régularisation des fleuves et rivières. Exploitation. Cours de navigation intérieure de l'École nationale des ponts et chaussées, par F.-B. DE MAS, inspecteur général des ponts et chaussées. 1 vol. gr. in 8° avec 48 pl. intercalées dans le texte. 17 fr. 50

Navigation intérieure. — Rivières canalisées.

Rivières canalisées. Généralités. Barrages autres que les barrages mobiles. Barrages mobiles à fermettes. Barrages mobiles à pont supérieur. Barrages mobiles à hausses. Barrages mobiles à tambour. Règles à suivre pour l'établissement d'une retenue d'eau au moyen d'un barrage mobile. Ecluses à sas. Portes d'écluses. Emplacement, abords et accessoires des écluses. Exploitation. Cours de navigation intérieure de l'École nationale des ponts et chaussées, par F.-B. DE MAS, inspecteur général des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° avec 85 planches et 91 figures intercalées dans le texte. 17 fr. 50

Navigation intérieure. Canaux.

Canaux. Section transversale, tracé, ouvrages à la rencontre des voies de communication par terre, ouvrages à la traversée des cours d'eau, ascenseurs et plans inclinés, consommation d'eau dans les canaux, alimentation des canaux-réservoirs, exploitation. Cours de navigation intérieure de l'École nationale des ponts et chaussées, par F. B. DE MAS, inspecteur général des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° avec 101 planches et 89 figures dans le texte. 17 fr. 50

Travaux maritimes.

Cours de travaux maritimes professé à l'École nationale des ponts et chaussées par le baron QUINETTE DE ROCHEMONT, inspecteur des ponts et chaussées, et HENRI DESPREZ, ingénieur des ponts et chaussées. Marées, courants et vents. Propagation

de la marée dans les fleuves. Lames. Régime des plages. — Action de la mer sur les matériaux de construction. Navires, navigation. — Rades, Ports, Entrée des ports, Digués, jetées. Brise-lames. Estacades. Mode d'exécution des digués et jetées. Avant-ports. Bassins. Darses. Murs de quai. Appontements. Modes d'exécution des quais. Ecluses de navigation. Portes d'écluses. Ponts mobiles. Formes de radoub. Bateaux-postes. Appareils de radoub divers. Ouvrages divers. — Moyens d'obtenir et de maintenir les profondeurs dans les ports et à leurs abords. Chasses, Dragages. — Défense des côtes. — Fleuves maritimes. — Canaux maritimes. Eclairage et balisage des côtes. Outillage des ports. — Administration et exploitation des ports de commerce. — Renflouement et dispersion des épaves. 2 volumes grand in-8° avec 982 figures intercalées dans le texte et 1 atlas de 18 planches. 90 fr.

Travaux maritimes.

Travaux maritimes ; phénomènes marins ; accès des ports. Mouvements de la mer. — Régime des côtes. — Matériaux dans l'eau de mer. — Atterrage. Entrée des ports. Jetées, par LAROCHE, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° et 1 atlas in-4° de 46 planches doubles. 40 fr.

Ports maritimes.

Ports maritimes. Ports d'échouage. — Bassins à flot. — Ecluses des bassins à flot. Portes d'écluses. — Ponts mobiles. — Moyens d'obtenir et d'entretenir la profondeur à l'entrée des ports. — Ouvrages et appareils pour la réparation des navires. Défense des côtes. Eclairage et balisage des côtes. Exploitation des ports. Canaux maritimes, par F. LAROCHE, inspecteur général des ponts et chaussées. 2 volumes in-8° avec figures dans le texte et 2 atlas in 4° contenant 37 planches doubles. 50 fr.

Ports maritimes de la France.

Ports maritimes de la France. Notices historiques, hydrographiques et descriptives sur les ports maritimes de la France, publiées par le MINISTÈRE DES TRAVAUX PUBLICS. 8 volumes grand in-8°, avec 166 planches in-folio, gravées et imprimées sur cuivre.

- Tome I. MANCHE. — De Dunkerque à Étretat, avec 14 planches (pl. 1 à 14.) 40 fr.
- Tome II. MANCHE. — Du Havre au Becquet, avec 16 planches (pl. 15 à 30.) 40 fr.

NOTA. Les textes des Tomes I et II. sont épuisés.

- Tome III. MANCHE. — De Cherbourg à Argentan, avec 21 planches (pl. 31 à 51.) 50 fr.
- Tome IV. OcéAN. — D'Ouessant au Pouliguen, avec 27 planches (pl. 52 à 78.) 50 fr.
- Tome V. OcéAN. — De Saint-Nazaire à Ars-en-Ré, avec 13 planches (pl. 79 à 93.) 50 fr.
- Tome VI. 1^{re} partie. OcéAN. — De la Rochelle à Maubert, avec 12 planches (pl. 94 et 94 bis à 104.) 32 fr.
- Tome VI. 2^e partie. OcéAN. — Des Calonges à Hendaye, avec 11 planches (pl. 105 à 115.) 30 fr.

Tome VII. 1^{re} partie. MÉDITERRANÉE. — Banyuls à Aigues-Mortes, avec 8 planches (pl. 116 à 123.) 25 fr.

Tome VII. 1^{re} partie (suite). MÉDITERRANÉE. — D'Arles à Carri-le-Rouet, avec 7 planches (pl. 124 à 130.) 20 fr.

Tome VII, 2^e partie, 1^{re} section. MÉDITERRANÉE. — Marseille, avec 12 planches (pl. 131 à 142.) 45 fr.

Tome VIII. 1^{re} partie. MÉDITERRANÉE. — Corse, Algérie, de Nemours à Tipazza, avec 15 planches (pl. 143 à 157.) 30 fr.

Tome VIII. 2^{re} partie MÉDITERRANÉE. — Algérie, d'Alger à la Calle, avec 9 planches (pl. 158 à 166.) 30 fr.

Les volumes de texte dont se compose l'ouvrage peuvent être vendus séparément, aux prix suivants :

- Tomes I et II. De Dunkerque au Becquet (*Epuisés*).
- III. De Cherbourg à Argentan 12 fr. »
- IV. D'Ouessant au Pouliguen 12 fr. »
- V. De Saint-Nazaire à Ars-en-Ré. 12 fr. »
- VI. 1^{re} partie. De la Rochelle à Maubert 7 fr. 50
- VI. 2^e partie. De Callonges à Hendaye 7 fr. 50
- VII. 1^{re} partie. De Banyuls à Aigues-Mortes 7 fr. 50
- VII. 1^{re} partie (suite). D'Arles à Carri-le-Rouet. 7 fr. 50
- VII. 2^e partie (1^{re} section). Marseille 12 fr. »
- VII. 2^e partie (2^e section). De Marseille à Menton. 10 fr. »
- VIII. 1^{re} partie. Corse et Algérie de Nemours à Tipazza. 7 fr. 50
- VIII. 2^e partie. Algérie, d'Alger à la Calle. 7 fr. 50

Ponts en maçonnerie.

Ponts en maçonnerie, par E. DEGRAND, inspecteur général des ponts et chaussées, et J. RÉSAL, ingénieur des ponts et chaussées. 2 volumes grand in-8° avec de nombreuses figures dans le texte. 40 fr.

Barème des poutres métalliques.

Barèmes des poutres métalliques à âmes pleines et à treillis, par PASCAL, ingénieur civil. 1 volume in-4° avec figures dans le texte. Relié. 12 fr. 50

Constructions métalliques.

Constructions métalliques. Notions sur la théorie mathématique de l'élasticité. Propriétés élastiques des matériaux. Résistance des matériaux. Fonte, fer et acier. Méthodes générales et formules usuelles. par JEAN RÉSAL, ingénieur des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° avec figures dans le texte. 20 fr.

Ponts métalliques.

Traité pratique des ponts métalliques ; statique graphique : applications pratiques. Conditions d'établissement des ponts métalliques. Projets de ponts métalliques à une seule travée. Ponts pour voie charretière. Ponts à une travée et supportant des voies ferrées de largeur normale. Ponts métalliques à plusieurs travées solidaires. Pont en arc à longeron droit. Formules. Renseignements divers. Tableaux. Règlements, par M. PASCAL, ingénieur. 2^e édition. 1 volume in-8° avec 125 figures dans le texte et 15 planches hors texte. Relié. 15 fr.

Ponts métalliques.

Ponts métalliques, par JEAN RÉSAL, ingénieur des ponts et chaussées.
Tome premier. — Calcul des pièces prismatiques ; renseignements pratiques ; formules usuelles ; poutres droites à travées indépendantes ; ponts suspendus ; ponts en arc. Un volume grand in-8° avec de nombreuses gravures dans le texte. 20 fr.

Tome second. — Poutres à travées solidaires : théorie générale des poutres à section constante ; calcul des poutres symétriques ; poutres continues à section variable ; théorie générale des poutres de hauteur variable ; montage des ponts par encorbellement ; ponts grues ; calcul des systèmes articulés ; piles métalliques ; tables numériques. Un volume grand in-8° avec de nombreuses figures dans le texte. 20 fr.

Ponts métalliques.

Calcul des ponts métalliques à poutres droites, à une ou plusieurs travées par la méthode des lignes d'influence. Formules et tables servant au calcul rapide des moments fléchissants et des efforts tranchants maximums déterminés, en divers points des poutres par des charges uniformément réparties et des charges concentrées mobiles, par ADRIEN CART et LÉON PORRES, ingénieurs civils. 1 volume grand in-8° avec figures dans le texte et 2 planches, relié. 20 fr.

Ponts et viaducs métalliques.

Calculs de résistance des ponts et viaducs métalliques à poutres droites, d'après la circulaire ministérielle du 29 août 1891, par MAURICE HULEWICZ, ingénieur, ancien élève de l'École des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° avec 1 planche. 10 fr.

Ponts métalliques.

Études théoriques et pratiques sur les ponts métalliques à une travée et à poutres droites et pleines, par E. DUMETZ, commis des ponts et chaussées. 1 volume gr. in-8° avec 117 figures dans le texte. 10 fr.

Ponts métalliques.

Ponts métalliques à travées continues. Méthode de calcul satisfaisant aux nouvelles prescriptions du règlement ministériel du 29 août 1891, avec tables numériques pour en faciliter l'emploi, par BERTRAND DE FONTVOLIANT, ingénieur à la Compagnie de Fives-Lille. Un volume grand in-8° avec 3 planches. 10 fr.

Arches surbaissées en maçonnerie.

Tables et graphiques pour le calcul des arches surbaissées en maçonnerie, d'après la méthode de M. Tourtay, ingénieur des ponts et chaussées, par N. DE TEDESCO, ingénieur civil. 1 volume in-4° avec 25 planches. 7 fr. 50

Emploi des pieux métalliques.

Étude sur l'emploi des pieux métalliques dans les fondations d'ouvrages d'art. Cas où il peut être fait emploi des pieux métalliques. Diverses sortes de pieux métalliques. Mise en place ou fongage des pieux métalliques. Disposition des ouvrages d'art reposant sur pieux métalliques, application, par C. GRANGE, agent voyer en chef du département de la Vienne. 1 vol. gr. in-8° avec 51 fig. dans le texte. 7 fr.