

## APRES TROIS CENTS ANS ... (3)

Avoir si longuement bavardé sur les circonstances et sur la genèse des idées de Newton ne devrait pas nous enlever l'envie de pénétrer vraiment dans l'oeuvre. Avec le risque d'envahir ces Cahiers de la prose de Newton. Il faut se limiter à une vue panoramique et quelques échantillons.

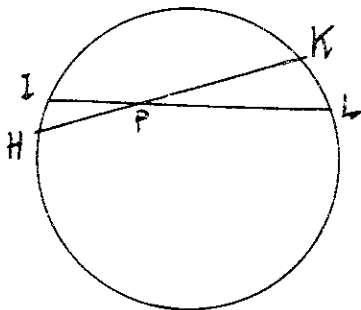
Pour le panorama, le plus simple est de consulter la table des matières des Principia. En tête (prenez le mot dans tous ses sens), les définitions et les axiomes ou lois du mouvement ; nous nous y sommes suffisamment attardés dans le précédent numéro. Vient alors le Livre premier "Du mouvement des corps" subdivisé en quatorze sections. Depuis la première "De la méthode des premières et dernières raisons employée dans cet ouvrage" - autrement dit un chapitre de méthodologie - à la quatorzième "Du mouvement des corpuscules attirés par toutes les parties d'un corps quelconque". Chaque section est une suite de propositions dont l'énoncé précède la démonstration. Ainsi la douzième section, "Des forces attractives des corps sphériques" va de la proposition LXX à la proposition LXXXIV, une suite sur laquelle nous reviendrons.

Le Livre second "Du mouvement des corps" prolonge le premier en abordant des problèmes plus compliqués. Ainsi sa section première concerne le mouvement des corps qui éprouvent une résistance en raison de leur vitesse. La cinquième section traite de l'équilibre des fluides, la sixième des corps oscillants, la septième des mouvements des fluides et de la résistance des projectiles, la huitième de la propagation du mouvement dans les fluides.

### Des forces attractives des corps sphériques

Avant de feuilleter le livre 3 qui nous intéressera spécialement puisqu'il applique cette belle théorie mathématique aux mouvements dans le système solaire, je vous propose de nous attarder sur cette douzième section du livre premier. Rappelons-nous en effet que, dès 1665, Newton était acquis à l'idée de l'attraction universelle mais qu'il lui semblait impossible de l'annoncer tant qu'il ne pouvait prouver que l'attraction de la Terre sur la Lune était celle de toute sa masse placée au centre. Ici, dans les Principia, il donne sa démonstration.

Son exposé commence par la Proposition LXX qu'il dénomme aussi Théorème "Un corpuscule placé dans l'intérieur d'une surface sphérique dont toutes les parties attirent en raison inverse du carré des distances, n'éprouve aucune attraction de cette superficie."

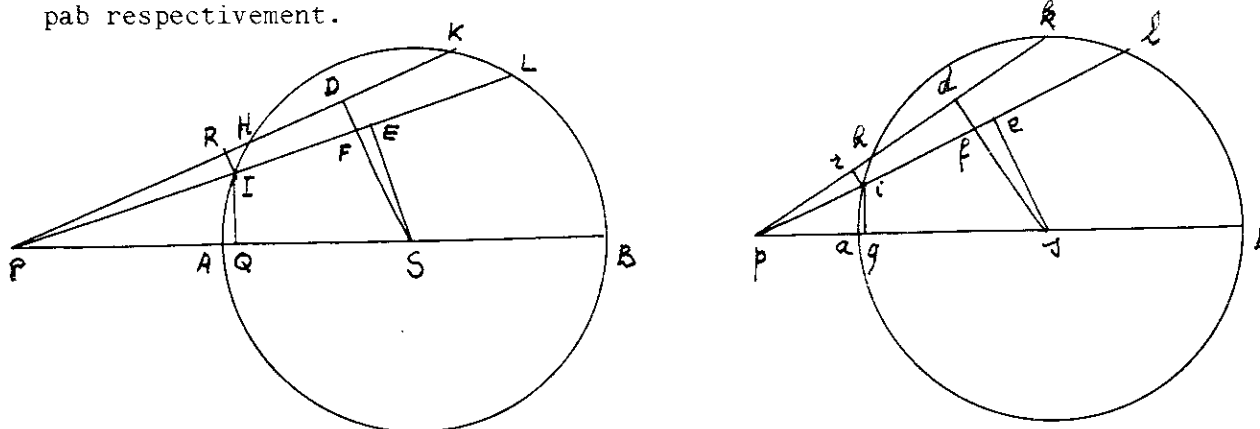


Newton dessine une figure plane, un cercle et le point P à l'intérieur ; il trace deux droites IPL et HPK qui délimitent deux arcs HI et KL supposés infiniment petits et qui seront proportionnels à PH et PL. Les petites parties de la sphère découpées par des lignes telles que HK et IL seraient comme les carrés de PH et PL. D'où il suit que les attractions de ces petites parties de sphère sur P sont exactement opposées et s'annulent.

Suit alors la Proposition LXX ou Théorème XXXI qui va retenir, je vous le demande avec insistance, toute votre attention :

"La même loi d'attraction étant posée, un corpuscule placé en dehors de la surface sphérique est attiré par cette surface en raison renversée du carré de la distance de ce corpuscule au centre."

Je vous invite à suivre pas à pas la démonstration de Newton. Je recopie les figures qui, dans l'édition de la Marquise sont loin du texte dans des planches de dessins ce qui n'est pas très pratique. Newton imagine donc deux surfaces sphériques égales de diamètres AB et ab, de centres S et s, les deux corpuscules P et p étant placés chacun à une distance quelconque du centre. De ces points il trace les droites PHK et PIL, phk et pil de telle façon que les arcs HK et IL soient respectivement égaux aux arcs hk et il. Des centres S et s, il mène les apothèmes SD, SE, sd et se ; IR et IQ sont les perpendiculaires menées de I sur PHK et sur PAB respectivement ; ir et iq les perpendiculaires menées de i sur phk et sur pab respectivement.



Refaites les dessins vous-même, cela vous aidera à vous familiariser avec les notations de Newton. Ceci fait notre savant suppose que les angles DPE et dpe "s'évanouissent", c'est son expression pour dire qu'ils deviennent infiniment petits. Puisque DS = ds et ES = es, on peut regarder PE et PF comme égales, de même que pe et pf, DF et df.

On pose alors les proportions suivantes :

$$PI/PF = RI/DF \quad \text{et} \quad pf/pi = df/ri \quad (\text{qu'on peut écrire } pf/pi = DF/ri)$$

La multiplication membre à membre de la première et de la troisième égalité donne :

$$(PI \times pf)/(PF \times pi) = RI/ri$$

ou, encore mieux :

$$(1) \quad (PI \times pf)/(PF \times pi) = IH/ih$$

C'est le moment de comprendre l'astuce de Newton, la double astuce : avoir introduit deux sphères égales et faire "s'évanouir" les angles pour avoir deux arcs infiniment petits.

On recommence :

$$PI/PS = IQ/SE \quad \text{et} \quad ps/pi = se/iq \quad (\text{qu'on écrit } ps/pi = SE/iq)$$

Encore une multiplication membre à membre :

$$(2) \quad (PI \times ps)/(PS \times pi) = IQ/iq$$

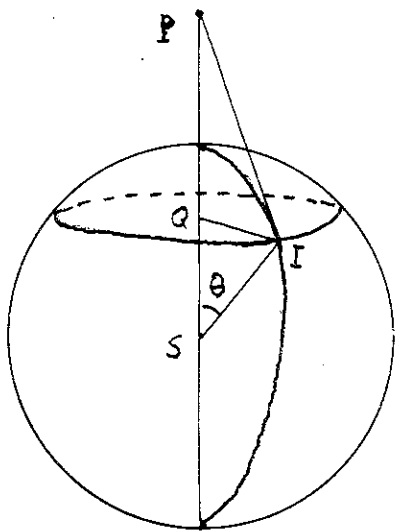
Troisième multiplication membre à membre, cette fois des égalités (1) et (2), rassurez-vous c'est la fin des calculs :

$$(3) \quad (PI^2 \times pf \times ps)/(pi^2 \times PF \times PS) = (IQ \times HI)/(iq \times ih)$$

La petite surface sphérique engendrée par la révolution de HI autour de PS est à la petite surface sphérique engendrée par la révolution de hi autour de ps comme  $(PI^2 \times pf \times ps)$  à  $(pi^2 \times PF \times PS)$ . Mais les forces avec lesquelles ces petites surfaces tirent vers elles les corpuscules P et p sont comme ces surfaces et inversement comme les carrés des distances PI et pi donc ces forces sont comme  $(pf \times ps)$  à  $(PF \times PS)$ . Je laisse pour finir la parole à Newton :

"En décomposant ces forces pour avoir les parties qui en résultent dans la direction des diamètres PS et ps, les forces résultantes dans cette direction seront aux forces totales comme PS à PF et comme ps à pf. Donc la force suivant PS de la petite surface produite par HI sera à la force suivant ps de la petite surface produite par hi comme pf ps PF/PS à PF PS pf/ps c'est à dire en raison renversée des carrés des distances PS et ps. On trouverait la même chose pour toutes les autres petites surfaces dont les deux surfaces sphériques sont composées..."

Bon, j'admets que le style de Newton a pu vous déconcerter. Pour vous rassurer, je vous propose de reprendre rapidement la démonstration dans un langage plus familier, celui du calcul intégral devenu classique et qui ne l'était pas en 1687. Au lieu de calculer des forces et d'avoir à ajouter des vecteurs, nous calculerons le potentiel de la surface sphérique de diamètre AB en un point P extérieur à cette sphère puisque le champ des forces dérive de ce potentiel.



Soit  $m$  la densité surfacique de la sphère,  $K$  la constante de la gravitation,  $u$  le rayon de la sphère,  $a = PS$ . La position d'un élément de la surface sphérique en  $I$  est précisée par les deux angles  $\theta = \text{PSI}$  (colatitude) et  $\varphi$  (longitude). La distance de  $P$  à cet élément de surface est  $PI = r$  tel que  $r^2 = a^2 + u^2 - 2au \cos \theta$

qui nous donnera (ce sera très utile dans la suite

$$r \, dr = au \sin \theta \, d\theta$$

Le potentiel en  $P$  s'obtient par intégration à toute la surface de la sphère ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) de

$$- \frac{K m u^2}{r} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \quad \text{soit}$$

$$- 2\pi K m u^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta \, d\theta}{r} = - 2\pi K m \frac{u}{a} \int_{a-u}^{a+u} dr = - 4\pi \frac{u^2 K m}{a} = - KM/a$$

en posant  $M = 4\pi u^2 m$  la masse totale de la surface sphérique. Fin de l'intermède de calcul intégral. Si vous n'aimez pas ça, sautez !

Revenons alors à la douzième section du livre I des Principia. Vous imaginez sans mal qu'après avoir étudié l'attraction par une surface sphérique Newton passe à l'attraction d'une boule sphérique homogène ou encore mieux d'une boule où les densités sont réparties en fonction de la seule distance au centre. il étudie aussi le cas de deux boules sphériques en présence l'une de l'autre tant il est vrai qu'il ne peut avoir oublié ses méditations de jeunesse sur la chute de la Lune vers la Terre.

### "Du système du Monde"

Poursuivons maintenant notre lecture panoramique. Le troisième livre s'intitule "Du système du Monde". Je vois aussitôt votre oeil s'allumer surtout si les considérations géométriques précédentes vous ont un rien lassés. Mais, là encore, Newton prend son temps, il revient sur des questions de méthode en donnant les "Règles qu'il faut suivre dans l'étude de la physique". Texte qui nous paraît assez naïf, c'est justement pourquoi il est intéressant. Je recopie seulement l'énoncé des règles :

1 - Il ne faut admettre de causes, que celles qui sont nécessaires pour expliquer les phénomènes.

2 - Les effets du même genre doivent toujours être attribués, autant qu'il est possible, à la même cause.

3 - Les qualités des corps qui ne sont susceptibles ni d'augmentation ni de diminution, et qui appartiennent à tous les corps sur lesquels on peut faire des expériences, doivent être regardées comme appartenant à tous les corps en général.

4 - Dans la Philosophie expérimentale, les propositions tirées par induction des phénomènes doivent être regardées malgré les hypothèses contraires, comme exactement ou à peu près vraies, jusqu'à ce que quelques autres phénomènes les confirment complètement ou fassent voir qu'elles sont sujettes à des exceptions."

Les commentaires de Newton sont brefs sauf pour la troisième règle où je relève cette jolie phrase : "On ne peut pas opposer des rêveries aux expériences, et on ne doit point abandonner l'analogie de la nature qui est toujours simple et semblable à elle-même." Qualités de tous les corps : l'extension, la dureté, l'impénétrabilité, la mobilité, l'inertie... Après l'énoncé de la règle 4, cette simple phrase, irremplaçable : "Car une hypothèse ne peut affaiblir les raisonnements fondés sur l'induction tirée de l'expérience."

Viennent ensuite les énoncés des phénomènes : les mouvements des satellites de Jupiter (avec leurs périodes et leurs distances à la planète), les mouvements des satellites de Saturne, les mouvements des planètes, le mouvement de la Lune. Tel est le stock des phénomènes astronomiques étudiés ensuite en détail. Exemples, la Proposition IX "La gravité à l'intérieur des planètes décroît à peu près en raison des distances au centre" ou encore la Proposition XIV "L'aphélie et les noeuds des orbites sont en repos".

La proposition XXIV, en six pages d'explication sans calcul énonce "Le flux et le reflux de la mer sont causés par les actions de la Lune et du Soleil" (mais, à mon avis, dans le Cahier 31 nous avons eu mieux ; il est vrai aussi que Newton ne pouvait pas savoir). Par contre, il pose un problème très important : "Trouver les forces du Soleil pour troubler les mouvements de la Lune" ; notre savant se doutait bien que le problème des trois corps allait faire travailler les cervelles mathématiciennes au XVIII<sup>ème</sup> siècle. Dans la solution du problème XX "Trouver la précession des équinoxes", Newton explique le phénomène par une quantité de matière qui est la partie de la Terre en excédent sur le sphéroïde et qu'il place à l'équateur ; c'est encore une belle histoire du XVIII<sup>ème</sup> siècle.

Newton traite enfin des comètes, s'intéressant particulièrement à la détermination des orbites à partir d'un nombre donné d'observations ; exemple, Problème XXI, orbite parabolique déterminée par trois observations. Tout l'exposé sur les comètes est enrichi du récit de nombreuses observations, ce qui tranche avec le caractère plus austère des Livres 1 et 2. Je tombe au hasard sur ce paragraphe :

*"Kepler attribue l'ascension des queues de comètes qui s'élèvent de l'atmosphère de leurs têtes, et le mouvement progressif de ces queues vers les parties opposées au Soleil, à l'action des rayons de lumière qui emportent avec eux la matière des queues. Et il n'est point absurde de penser que des vapeurs très rares puissent céder à l'action des rayons dans des espaces libres de toute résistance, quoique les vapeurs épaisses ne puissent être mues sensiblement par les rayons du Soleil dans notre atmosphère."*

N'est-ce pas bien dit ? Il faudrait que je m'arrête sur ces bons mots mais, quel que soit le plaisir que j'ai à remettre les yeux dans les mots écrits par Newton, il faut se limiter. Et pourtant citer la conclusion générale, ce que Newton intitule Scholie général. La première phrase en est percutante : "L'hypothèse des tourbillons est sujette à beaucoup de difficultés" et en quelques lignes, voici la physique de Descartes rangée au magasin des accessoires inutiles. C'est aussi un peu l'impression que

me donnent les paragraphes suivants dans lesquels Newton tente d'établir une relation entre l'Être infini ou Dieu et les deux concepts d'espace et de temps absolus qui ont été posés dans les définitions premières. Assez longue dissertation qui se termine par "Voilà ce que j'avais à dire de Dieu, dont il appartient à la philosophie naturelle d'examiner les ouvrages."

La véritable conclusion, nous pouvons la relire en entier :

*"J'ai expliqué jusqu'ici les phénomènes célestes et ceux de la mer par la force de la gravitation, mais je n'ai assigné nulle part la cause de cette gravitation. Cette force vient de quelque cause qui pénètre jusqu'au centre du Soleil et des planètes, sans rien perdre de son activité ; elle n'agit point selon la grandeur des superficies, (comme les causes mécaniques) mais selon la quantité de matière ; et son action s'étend de toutes parts à des distances immenses, en décroissant toujours dans la raison doublée des distances.*

*La gravité vers le Soleil est composée des gravités vers chacun de ses particules, et elle décroît exactement, en s'éloignant du Soleil, en raison doublée des distances, et cela jusqu'à l'orbe de Saturne, comme le repos des aphélie des planètes le prouve, et elle s'étend jusqu'aux dernières aphélie des comètes, si ces aphélie sont en repos.*

*Je n'ai pu encore parvenir à déduire des phénomènes la raison de ces propriétés de la gravité, et je n'imagine point d'hypothèses. Car tout ce qui ne se déduit point des phénomènes est une hypothèse : et les hypothèses, soit métaphysiques, soit physiques, soit mécaniques, soit celles des qualités occultes, ne doivent pas être reçues dans la philosophie expérimentale.*

*Dans cette philosophie, on tire les propositions des phénomènes, et on les rend ensuite générales par induction. C'est ainsi que l'impénétrabilité, la mobilité, la force des corps, les loix du mouvement, et celles de la gravité ont été connues. Et il suffit que la gravité existe, qu'elle agisse selon les loix que nous avons exposées, et qu'elle puisse expliquer tous les mouvements des corps célestes et ceux de la mer.*

*Ce serait ici le lieu d'ajouter quelque chose sur cette espèce d'esprit subtil qui pénètre à travers tous les corps solides, et qui est caché dans leur substance ; c'est par la force, et l'action de cet esprit que les particules des corps s'attirent mutuellement aux plus petites distances, et qu'elles cohèrent lorsqu'elles sont contiguës ; c'est par lui que les corps électriques agissent à de plus grandes distances, tant pour attirer que pour repousser les corpuscules voisins ; et c'est encore par le moyen de cet esprit que la lumière émane, se réfléchit, s'infléchit, se réfracte, et chauffe les corps ; toutes les sensations sont excitées, et les membres des animaux sont mus, quand leur volonté l'ordonne, par les vibrations de cette substance spiritueuse qui se propage des organes extérieurs des sens, par les filets solides des nerfs, jusqu'au cerveau, et ensuite du cerveau dans les muscles. Mais ces choses ne peuvent s'expliquer en peu de mots ; et on n'a pas fait encore un nombre suffisant d'expériences pour pouvoir déterminer exactement les loix selon lesquelles agit cet esprit universel."*

°°

J'avais pensé clore ici cette commémoration du tricentenaire des Principia. A la réflexion, il me semble pourtant que manque l'épilogue : quelques mots sur Newton lui-même, surtout quelques perspectives sur les portes que ce grand génie a ouvertes pour la science . Celle du XVIII ème siècle pour commencer, mais encore après.. jusqu'à demain. Ce sera pour un prochain numéro.