



Universidad de San Carlos de Guatemala  
Facultad de Ingeniería  
Escuela de Ingeniería Civil

**PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO PARA LA ELABORACIÓN DE ESPECTROS  
SÍSMICOS PARA EL DISEÑO SISMORRESISTENTE DE ESTRUCTURAS**

**Eder Keith Paz Tiguila**

Asesorado por el Ing. Mario Rodolfo Corzo Ávila

Guatemala, noviembre de 2012

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

**PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO PARA LA ELABORACIÓN DE ESPECTROS  
SÍSMICOS PARA EL DISEÑO SISMORRESISTENTE DE ESTRUCTURAS**

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
POR

**EDER KEITH PAZ TIGUILA**

ASESORADO POR EL ING. MARIO RODOLFO CORZO ÁVILA

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE

**INGENIERO CIVIL**

GUATEMALA, NOVIEMBRE DE 2012

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
FACULTAD DE INGENIERÍA



**NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA**

DECANO	Ing. Murphy Olympto Paiz Recinos
VOCAL I	Ing. Alfredo Enrique Beber Aceituno
VOCAL II	Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco
VOCAL III	Inga. Elvia Miriam Ruballos Samayoa
VOCAL IV	Br. Juan Carlos Molina Jiménez
VOCAL V	Br. Mario Maldonado Muralles
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

**TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO**

DECANO	Ing. Murphy Olympto Paiz Recinos
EXAMINADOR	Ing. Claudio Castañón Contreras
EXAMINADOR	Ing. Marco Antonio García Díaz
EXAMINADOR	Ing. Nicolás de Jesús Guzmán Saenz
SECRETARIA	Inga. Marcia Ivónne Véliz Vargas

## **HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR**

En cumplimiento con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

### **PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO PARA LA ELABORACIÓN DE ESPECTROS SÍSMICOS PARA EL DISEÑO SISMORRESISTENTE DE ESTRUCTURAS**

Tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ingeniería Civil, con fecha 16 de septiembre de 2009.

**Eder Keith Paz Tiguila**

Guatemala, 18 de septiembre de 2012

Ingeniero  
Ronald Estuardo Galindo Cabrera  
Jefe del Departamento de Estructuras  
Escuela de Ingeniería Civil  
Facultad de Ingeniería

Respetado Ingeniero Galindo

Por medio de la Presente, me permito informarle que he revisado el trabajo de graduación realizado por el estudiante: **Eder Keith Paz Tigula**, titulado "**Procedimiento de Cálculo para la Elaboración de Espectros Sísmicos para el Diseño Sismorresistente de Estructuras**", previo a optar el título de Ingeniero Civil, habiéndolo encontrado completamente satisfactorio.

Sin otro particular, me suscribo de usted, atentamente.

  
Mario Rodolfo Corzo A.  
INGENIERO CIVIL  
Colegiado No. 2089

**Asesor.**



UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL  
[www.ingenieria-usac.edu.gt](http://www.ingenieria-usac.edu.gt)



Guatemala,  
15 de octubre de 2012

Ingeniero  
Hugo Leonel Montenegro Franco  
Director Escuela Ingeniería Civil  
Facultad de Ingeniería  
Universidad de San Carlos

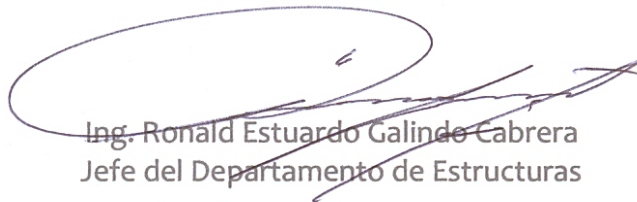
Estimado Ingeniero Montenegro.

Le informo que he revisado el trabajo de graduación **PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO PARA LA ELABORACIÓN DE ESPECTROS SÍSMICOS PARA EL DISEÑO SISMORRESISTENTE DE ESTRUCTURAS**, desarrollado por el estudiante de Ingeniería Civil Eder Keith Paz Tiguilá, quien contó con la asesoría del Ing. Mario Rodolfo Corzo Ávila.

Considero este trabajo bien desarrollado y representa un aporte para la comunidad del área y habiendo cumplido con los objetivos del referido trabajo doy mi aprobación al mismo solicitando darle el trámite respectivo.

Atentamente,

ID Y ENSEÑAD A TODOS

  
Ing. Ronald Estuardo Galindo Cabrera  
Jefe del Departamento de Estructuras



FACULTAD DE INGENIERIA  
DEPARTAMENTO  
DE  
ESTRUCTURAS  
USAC

/bbdeb.



El director de la Escuela de Ingeniería Civil, después de conocer el dictamen del Asesor Ing. Mario Rodolfo Corzo Ávila y del Jefe del Departamento de Estructuras, Ing. Ronald Estuardo Galindo Cabrera al trabajo de graduación del estudiante Eder Keith Paz Tiguila, titulado **PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO PARA LA ELABORACIÓN DE ESPECTROS SÍSMICOS PARA EL DISEÑO SISMORRESISTENTE DE ESTRUCTURAS**, da por este medio su aprobación a dicho trabajo.

  
Ing. Hugo Leonel Montenegro Franco 

Guatemala, noviembre de 2012.

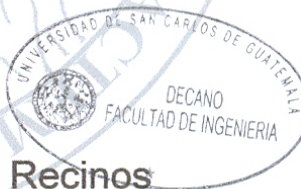
/bbdeb.



El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ingeniería Civil, al trabajo de graduación titulado: **PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO PARA LA ELABORACIÓN DE ESPECTROS SÍSMICOS PARA EL DISEÑO SISMORRESISTENTE DE ESTRUCTURAS** presentado por el estudiante universitario **Eder Keith Paz Tigula**, autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

  
Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos  
Decano



Guatemala, 26 de noviembre de 2012

/cc



## **ACTO QUE DEDICO A:**

<b>Dios</b>	Por darme sabiduría y permitirme este triunfo.
<b>Mis padres</b>	Justo Germán Paz Soto y Elena Tiguila Pacheco, por su ejemplo, amor y apoyo incondicional.
<b>Mis hermanos</b>	Germán Estuardo, Sergio Moisés y Astrid Estela, por su ayuda y cariño fraternal.
<b>Mi abuela, tíos, tías, primos y primas</b>	Por su cariño incondicional.
<b>La Universidad de San Carlos de Guatemala</b>	Por permitirme culminar mis estudios a nivel superior.
<b>Mi patria</b>	Guatemala.

## **AGRADECIMIENTOS A:**

- Dios** Por darme la sabiduría, entendimiento, paciencia, fortaleza y perseverancia para alcanzar esta meta y culminar con éxito esta etapa de mi vida. Gracias por todos los dones que me has dado y por todas las bendiciones derramadas a lo largo de mi vida.
- Mis padres** Por todo el amor esfuerzo y sacrificio realizado para que pueda salir adelante y cumplir mis sueños; por todas sus enseñanzas, valores y principios inculcados en mi persona. Que Dios los bendiga siempre y me permita corresponderlos de igual manera.
- Mis hermanos** Por ser mi buena compañía a lo largo de estos años, por estar siempre juntos y apoyarme en todo.
- Ing. Mario Corzo** Por su valiosa amistad y asesoría tanto intelectual como ética y moral.

## ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES .....	V
LISTA DE SÍMBOLOS .....	XI
GLOSARIO .....	XV
RESUMEN .....	XIX
OBJETIVOS.....	XXI
INTRODUCCIÓN .....	XXIII
1. SISMOS .....	1
1.1. Introducción .....	1
1.2. Causas de los sismos .....	1
1.2.1. Teoría de la tectónica de placas.....	3
1.2.2. Guatemala en la teoría de placas.....	8
1.2.3. Sismos de origen tectónico, volcánico y artificial ....	10
1.2.4. Premonitorios y réplicas .....	11
1.3. Fallas geológicas. ....	11
1.3.1. Definición.....	12
1.3.2. Tipos de falla .....	13
1.4. Ondas sísmicas.....	21
1.4.1. Ondas internas o de cuerpo .....	21
1.4.2. Ondas superficiales .....	23
1.5. Instrumentos de medición y registros sísmicos.....	25
1.5.1. Sismómetro .....	26
1.5.2. Acelerómetro .....	26
1.6. Medidas de los sismos.....	28
1.6.1. Magnitud.....	28

1.6.1.1.	Módulo de corte de la corteza del epicentro.....	31
1.6.2.	Intensidad.....	31
1.6.3.	Mapas de isosistas.....	31
1.6.4.	Relación entre escala de intensidad y medida .....	32
1.7.	Actividad sísmica de una región .....	34
1.8.	Algunos efectos de los sismos.....	35
1.9.	Sismicidad guatemalense .....	38
2.	CONCEPTOS GENERALES EN EL ANÁLISIS DINÁMICO .....	45
2.1.	Introducción .....	45
2.2.	Masa, peso y sistema de unidades.....	45
2.3.	Rigidez.....	47
2.4.	Amortiguamiento.....	52
2.4.1.	Amortiguamiento viscoso .....	53
2.4.2.	Amortiguamiento de Coulomb.....	54
2.4.3.	Amortiguamiento histerético.....	55
2.5.	Grados de libertad .....	58
3.	VIBRACIÓN LIBRE .....	61
3.1.	Introducción .....	61
3.2.	Vibración libre no amortiguada .....	63
3.3.	Vibración libre con amortiguamiento viscoso.....	72
4.	VIBRACIÓN FORZADA POR CARGA ARMÓNICA .....	83
4.1.	Introducción .....	83
4.2.	Sistema amortiguado con carga armónica .....	83
4.2.1.	Ecuación de movimiento .....	83
4.2.2.	Resonancia y frecuencia resonante .....	87

5.	VIBRACIÓN FORZADA POR CARGA GENERAL .....	97
5.1.	Introducción .....	97
5.2.	Carga impulsiva .....	97
5.3.	Excitación general.....	99
6.	RESPUESTA SÍSMICA A SISTEMAS LINEALES .....	107
6.1.	Introducción .....	107
6.2.	Ecuación de movimiento .....	107
6.3.	Métodos paso a paso.....	110
6.3.1.	Método por tramos exactos .....	111
6.3.2.	Método de la aceleración lineal .....	114
6.3.3.	Método beta de Newmark.....	117
6.4.	Espectro de respuesta .....	139
6.4.1.	Obtención del espectro de respuesta .....	140
6.4.2.	Concepto del espectro de respuesta .....	142
6.4.3.	Representación Tripartita de Newmark .....	142
6.4.4.	Construcción del espectro de respuesta.....	145
6.5.	Espectro elástico de diseño .....	156
6.5.1.	Método de Newmark – Hall .....	158
6.5.2.	Método de Newmark – Blume – Kapur .....	172
6.5.3.	Método de Shibata y Sozen.....	181
7.	RESPUESTA SÍSMICA A SISTEMAS INELÁSTICOS .....	189
7.1.	Introducción .....	189
7.2.	Rango inelástico.....	191
7.3.	Respuesta histerética.....	192
7.3.1.	Modelo elastoplástico .....	193
7.4.	Ductilidad.....	194
7.5.	Tenacidad .....	197

7.6.	Capacidad de disipación de energía.....	197
7.7.	Espectros inelásticos de diseño.....	200
7.7.1.	Método de Newmark-Hall .....	200
7.7.1.1.	Sistemas elastoplásticos.....	200
7.7.1.2.	Construcción del espectro inelástico de diseño.....	208
7.7.2.	Método de Riddell y Newmark.....	217
7.7.3.	Método de Gulkan - Shibata - Sozen .....	230
7.8.	Factores de reducción de resistencia.....	234
7.8.1.	Newmark y Veletsos (1960) .....	235
7.8.2.	Newmark y Hall (1972).....	235
7.8.3.	Riddell y Newmark (1979) .....	236
7.8.4.	Lai y Biggs (1980) .....	236
7.8.5.	Riddell, Hidalgo y Cruz (1989).....	236
7.8.6.	Nassar y Krawinkler (1992) .....	237
7.8.7.	Miranda (1993).....	237
7.8.8.	Riddell (1993).....	238
7.8.9.	Vidic, Fajfar y Fischinger (1994).....	239
7.8.10.	Priestley (1995) .....	239
7.8.11.	Ordaz y Rocha (1998).....	239
7.8.12.	Lee, Han y Oh (1999).....	240
7.8.13.	Tiwari y Gupta (2000).....	240
7.8.14.	Manfredi (2001).....	240
7.9.	Selección de factores de reducción de resistencia .....	241
CONCLUSIONES.....		243
RECOMENDACIONES.....		245
BIBLIOGRAFÍA.....		247

## ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

### FIGURAS

1.	Analogía de la corteza terrestre con la cáscara de un huevo .....	3
2.	Modelos de las placas de la tierra .....	4
3.	Distribución de las placas tectónicas.....	5
4.	Movimiento de las placas, (a) zona de expansión, (b) subducción .....	7
5.	Placas tectónicas que interactúan en Guatemala .....	8
6.	Dirección del movimiento de las placas, subducción Placa de Cocos .....	9
7.	Ejemplo típico de falla profunda .....	12
8.	Orientación y desplazamiento de los tipos básicos de fallas.....	13
9.	Falla geológica normal, genera esfuerzos de tensión .....	14
10.	Falla normal, los bordes se separan, Guatemala sismo de 1976.....	15
11.	Falla geológica inversa, genera esfuerzos de compresión.....	15
12.	Falla inversa, los bordes se comprimen, Guatemala sismo de 1976 .....	16
13.	Falla geológica de desgarradura, genera esfuerzos de corte.....	16
14.	Fallas geológicas más activas de Guatemala .....	17
15.	Fallas geológicas de Guatemala .....	18
16.	Falla del Motagua, Gualán, Zacapa .....	18
17.	Vista aérea de una falla con trazo cerca de Las Ovejas, El Progreso....	19
18.	Idealización geométrica en la relación de fuente y sitio .....	20
19.	Deformaciones por las ondas de cuerpo: (a) onda P, (b) onda S.....	22
20.	Ondas superficiales: (a) onda Rayleigh, (b) onda Love.....	24
21.	Ondas Love, rieles del ferrocarril en Zacapa.....	24
22.	Sismógrafo de tambor rotatorio .....	25
23.	Acelerogramas de las tres componentes de un sismo .....	27

24.	Mecanismo de Wood-Anderson, para calcular la energía liberada.....	29
25.	Relación entre momento, magnitud y varias escalas de magnitud .....	30
26.	Mapa de isosistas, intensidad de Mercalli modificada del sismo de Guatemala 1976 .....	32
27.	Costa de la isla de Sumatra .....	35
28.	Licuefacción sismo de Niigata, Japón, 16 de junio de 1964 (M=7.5) .....	36
29.	Colapso segundo nivel, edificio del colegio Liceo Javier zona 12.....	37
30.	Edificio Hotel Terminal, ubicado en Guatemala zona 4.....	37
31.	Sismicidad registrada en julio de 2008 .....	43
32.	Sismicidad registrada en agosto de 2008 .....	43
33.	Sismicidad registrada en septiembre de 2008 .....	44
34.	Relación fuerza-desplazamiento para un resorte.....	48
35.	Viga en voladizo y simplemente apoyada .....	49
36.	Relación fuerza-velocidad para un amortiguador viscoso.....	53
37.	Estructura idealizada con amortiguamiento viscoso .....	54
38.	Amortiguamiento de Coulomb.....	55
39.	Curva fuerza-deformación para un material inelástico .....	56
40.	Disipación de energía en un sistema inelástico .....	57
41.	Grados de libertad .....	59
42.	Idealización de un sistema a un sólo grado de libertad .....	63
43.	Vibración libre sin amortiguación .....	64
44.	Vibración libre de un sistema sin amortiguamiento.....	65
45.	Vibración libre, representación vectorial .....	67
46.	Marco articulado, semiarticulado y empotrado.....	68
47.	Marco empotrado con plancha sobrepuesta .....	70
48.	Vibración libre de un sistema críticamente amortiguado, sobreamortiguado y subamortiguado.....	74
49.	Efecto del amortiguamiento en vibración libre .....	75
50.	Impacto de un objeto sobre una viga .....	77



51.	Respuesta para un sistema amortiguado sujeto a carga armónica.....	85
52.	Factor de amplificación dinámica - razón de frecuencias.....	87
53.	Tanque hidrostático con sección tubular.....	91
54.	Factor de amplificación – relación de frecuencias ( $\xi = 2\%$ ).....	96
55.	Fuerza impulsiva.....	98
56.	Fuerza de excitación general.....	100
57.	Marco expuesto a carga explosiva.....	102
58.	Curva que describe la ecuación de movimiento.....	104
59.	Movimiento sísmico en la base y diagrama de cuerpo libre.....	108
60.	Notación para el análisis por tramos exactos.....	112
61.	Aceleración de la masa.....	115
62.	Aceleración de la masa método beta de Newmark.....	118
63.	Acelerograma Hollister South Street & Pine Drive.....	132
64.	Ampliación de la primera parte del acelerograma.....	132
65.	Respuesta para desplazamiento relativo.....	137
66.	Respuesta para velocidad relativa.....	137
67.	Respuesta para la aceleración absoluta.....	138
68.	Espectro de desplazamientos, amortiguamiento 5%.....	140
69.	Representación tripartita del espectro, sismo El Centro, $\xi = 2\%$ .....	144
70.	Espectro de respuesta de desplazamiento.....	148
71.	Espectro de respuesta de velocidad.....	148
72.	Espectro de respuesta de aceleración.....	149
73.	Espectros: velocidad y pseudovelocidad.....	151
74.	Espectros: aceleración y pseudoaceleración.....	151
75.	Relación espectral $S_v / PS_v$ .....	152
76.	Relación espectral $S_a / PS_a$ .....	153
77.	Espectro Hollister en representación tripartita.....	154
78.	Representación tripartita sismo de El Centro ( $\xi = 0, 2, 5$ y $10\%$ ).....	159
79.	Temblor del Imperial Valley, “El Centro” - mayo 18 de 1940.....	160

80.	Construcción del espectro de diseño elástico de Newmark y Hall .....	164
81.	Valores máximos del terreno y amplificaciones .....	168
82.	Líneas guías para la construcción del espectro de diseño.....	169
83.	Espectro de diseño elástico Hollister $\xi = 5\%$ .....	170
84.	Espectros de respuesta y diseño $\xi = 5\%$ .....	171
85.	Coeficiente $\alpha$ amplificación para los períodos de control $A, B, C$ y $D$ ....	174
86.	Localización de puntos espectrales .....	177
87.	Espectro de diseño Newmark, Blume y Kapur .....	178
88.	Espectro de respuesta y Newmark, Blume y Kapur .....	179
89.	Espectros de respuesta y diseño N-H y N-B-K .....	180
90.	Espectro de diseño elástico de Shibata y Sozen para $\xi = 2\%$ .....	183
91.	Espectro de diseño elástico de Shibata y Sozen $\xi = 5\%$ .....	184
92.	Espectro de diseño Hollister Shibata – Sozen .....	185
93.	Espectros de diseño Shibata – Sozen $\xi = 2\%, 5\%$ .....	186
94.	Espectro de respuesta y de diseño Shibata – Sozen.....	187
95.	Material: (a) lineal elástico, (b) no lineal elástico, y (c) inelástico .....	191
96.	Modelos de histéresis .....	193
97.	Disipación de energía en un sistema elastoplástico .....	194
98.	Curva fuerza-desplazamiento, material elastoplástico .....	196
99.	Definición de la capacidad de disipación de energía .....	199
100.	Espectro aceleraciones máximas, sistemas elastoplásticos $\xi = 2\%$ .....	201
101.	Espectro desplazamientos totales, sistemas elastoplásticos $\xi = 2\%$ ....	202
102.	Energía de deformación en el sistema inelástico .....	204
103.	Espectro inelástico de deformaciones totales .....	207
104.	Espectro inelástico de aceleraciones máximas.....	208
105.	Espectros inelásticos de Newmark - Hall .....	209
106.	Espectro elástico Newmark & Hall .....	211
107.	Espectro inelástico de aceleraciones N & H .....	213

108.	Espectro inelástico de desplazamientos .....	214
109.	Extracción del espectro elástico con el valor $A_{te}$ .....	215
110.	Espectro de diseño elástico e inelástico N & H .....	216
111.	Coeficientes de reducción de resistencia, sistemas con degradación de rigidez, zona de periodos cortos, $\xi = 5\%$ .....	220
112.	Espectro inelástico de aceleraciones máximas, rigidez degradante ....	221
113.	Líneas guía y semitrazo del espectro Riddell y Newmark .....	226
114.	Espectro de diseño inelástico Riddell y Newmark .....	227
115.	Comparación de espectros Riddell y Newmark.....	229
116.	Espectro inelástico Gulkan, Shibata y Sozen .....	233

## TABLAS

I.	Escala de intensidad Mercalli modificada.....	33
II.	Victimas y daño, por departamento.....	40
III.	Reporte de las agencias del sismo de 11 de julio de 1999 en el golfo de Honduras .....	42
IV.	Acelerograma del sismo de Hollister .....	121
V.	Valores de respuesta para desplazamiento y velocidad .....	136
VI.	Valores espectrales.....	147
VII.	Valores pseudoespectrales .....	150
VIII.	Valores acordes a la representación tripartita .....	155
IX.	Relaciones entre los movimientos máximos del terreno .....	161
X.	Factores de amplificación: espectro de diseño elástico .....	163
XI.	Acelerogramas utilizados para plantear el espectro de Shibata.....	181
XII.	Relaciones de los espectros de diseño, elastoplástico al elástico .....	209
XIII.	Valores de $R_A$ , $R_V$ y $R_D$ para sistemas de rigidez degradante $\xi = 5\%$ ..	223



## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>Símbolo</b>	<b>Significado</b>
$\ddot{u}(t)$	Aceleración del sistema
$\ddot{u}_g(t)$	Aceleración del suelo
<b>Gales (cm/s<sup>2</sup>)</b>	Aceleración del suelo por sismo
$A_{te}$	Aceleración máxima del terreno
$P_0$	Amplitud de fuerza externa
$u_0$	Amplitud de movimiento
$\phi$	Ángulo de fase
$c$	Coefficiente de amortiguamiento
$c_{cr}$	Coefficiente de amortiguamiento crítico
$F_a$	Coefficiente de sitio para periodos cortos
$F_v$	Coefficiente de sitio para periodos largos

<b>R</b>	Coeficiente de reducción de resistencia por capacidad de disipación de energía
<b>N<sub>a</sub></b>	Coeficiente por proximidad de fallas y fuentes sismogénicas activas, para periodos cortos
<b>N<sub>v</sub></b>	Coeficiente por proximidad de fallas y fuentes sismogénicas activas, para periodos largos
<b>δ</b>	Deformación de desplazamiento
<b>u(t)</b>	Desplazamiento del sistema
<b>D<sub>te</sub></b>	Desplazamiento máximo del terreno
<b>u<sub>g</sub>(t)</b>	Desplazamiento del suelo
<b>FAD<sub>d</sub></b>	Factor de amplificación dinámica de desplazamiento
<b>μ</b>	Factor de daño / demanda de ductilidad
<b>k</b>	Factor de rigidez
<b>ω<sub>n</sub></b>	Frecuencia natural
<b>ω<sub>a</sub></b>	Frecuencia natural amortiguada
<b>f<sub>n</sub></b>	Frecuencia natural cíclica

$\omega_e$	Frecuencia natural externa
$P(t)$	Función de fuerza externa
$I$	Inercia de sección
$\Delta t$	Intervalo de tiempo
$E$	Módulo de elasticidad (Young)
$m$	Masa del sistema
$MM$	Intensidad de Mercalli modificada
$M_w$	Magnitud escala de Richter
$S_{cd}$	Ordenada espectral de diseño, para periodos cortos
$S_{cr}$	Ordenada espectral de período corto en roca
$S_{1d}$	Ordenada espectral de diseño, para el período de 1 s
$S_{1r}$	Ordenada espectral de período 1 s en roca
$T$	Período
$\xi$	Razón de amortiguamiento
$S_a$	Respuesta espectral de aceleración

$S_d$	Respuesta espectral de desplazamiento
$PS_a$	Respuesta espectral de pseudoaceleración
$PS_v$	Respuesta espectral de pseudovelocidad
$S_v$	Respuesta espectral de velocidad
$u_c(t)$	Solución función complementaria
$u_p(t)$	Solución función particular
$t$	Tiempo
$V_{te}$	Velocidad del terreno



## GLOSARIO

<b>Aceleración espectral</b>	Respuesta de aceleración máxima absoluta a un periodo dado de un sistema estructural.
<b>Aceleración pico</b>	Es la aceleración máxima de un punto en la superficie del suelo alcanzada durante un sismo, expresada como fracción de la gravedad (g).
<b>Acelerograma</b>	Descripción en el tiempo de las aceleraciones a que estuvo sometido el terreno durante la ocurrencia de un sismo real.
<b>Amenaza sísmica</b>	Es el valor esperado de futuras acciones sísmicas en el sitio de interés y se cuantifica en términos de una esperada aceleración horizontal del terreno, que tiene una probabilidad de excedencia dada en un lapso de tiempo predeterminado.
<b>Amortiguamiento</b>	Disipación de energía que se produce en un sistema con el tiempo o la distancia.
<b>Amplitud</b>	Máximo desplazamiento de un sistema con respecto a su posición de equilibrio.

<b>AMS o PGA</b>	Aceleración máxima del suelo, para un período de retorno de referencia.
<b>Distancia epicentral (D)</b>	Es la distancia horizontal desde un punto en la superficie al epicentro.
<b>Distancia focal (R)</b>	Es la distancia desde un punto en la superficie al foco, hipocentro o fuente.
<b>Ductilidad</b>	Es la capacidad de un material de aceptar deformaciones después de sobrepasar su límite de fluencia, sin llegar a la ruptura. Numéricamente, es el cociente entre la deformación postelástica última y la deformación a la fluencia o cedencia.
<b>Espectros de respuesta</b>	Indican la respuesta máxima absoluta de osciladores simples de un grado de libertad con cierto amortiguamiento, ante una excitación sísmica, en función del periodo o frecuencia propia del oscilador. Dicha respuesta puede expresarse en términos de aceleración, velocidad o desplazamiento para los distintos periodos del movimiento.
<b>Epicentro</b>	Punto que se encuentra en la superficie de la tierra inmediatamente por encima del foco.

<b>Fallas geológicas</b>	Ruptura, o zona de ruptura, en la roca de la corteza terrestre, cuyos lados han tenido movimientos paralelos al plano de ruptura.
<b>Hipocentro</b>	Foco sísmico o fuente, es el punto o grupo de puntos subterráneos desde donde se origina el sismo.
<b>Licuefacción</b>	Respuesta de los suelos sometidos a vibraciones, en la cual estos se comportan como un fluido denso y no como una masa de suelo húmeda.
<b>Microzonificación</b>	División de una región o de un área urbana en zonas más pequeñas, que presentan un cierto grado de similitud en la forma como se ven afectadas por los movimientos sísmicos, dadas las características de los estratos de suelo subyacente.
<b>Ondas sísmicas</b>	Son vibraciones que se propagan a través de la corteza terrestre causadas por la repentina liberación de energía en el foco.
<b>Periodo de vibración</b>	Tiempo para una oscilación completa (ciclo) de un cuerpo elástico, vibrando en un modo dado de vibración libre.
<b>Profundidad focal (H)</b>	Es la distancia entre el foco y el epicentro.

**Sismicidad**

Es la frecuencia de ocurrencia de sismos por unidad de área en una región dada. A menudo esta definición es empleada inadecuadamente, por lo que se define en forma más general como “la actividad sísmica de una región dada”, esta última definición implica que la sismicidad se refiere a la cantidad de energía liberada en un área en particular.

**Sismo**

Vibraciones de la corteza terrestre inducidas por el paso de las ondas sísmicas provenientes de un lugar o zona donde han ocurrido movimientos súbitos de la corteza terrestre (disparo sísmico o liberación de energía).

**Sismo de diseño**

Es la caracterización de los movimientos sísmicos en un sitio dado que deben utilizarse en la realización del diseño sismo resistente.

**Sismograma**

Es un registro del movimiento sísmico y mide la magnitud de los sismos.

**Sismología**

Es la ciencia y estudio de los sismos, sus causas, efectos y fenómenos asociados.

## RESUMEN

La experiencia ha mostrado el poder destructivo de los sismos; nada puede hacerse para evitarlos. Pero es conveniente prepararse para responder a sus efectos en las construcciones, y evitar calamidades lo máximo posible, comprendiendo el fenómeno desde su causa hasta su desarrollo, para dar una respuesta satisfactoria. La siguiente definición es muy utilizada en sismología.

Sismo, temblor o terremoto son vibraciones de la corteza terrestre inducidas por el paso de las ondas sísmicas provenientes de un lugar o zona donde han ocurrido movimientos súbitos de la corteza terrestre (disparo sísmico o liberación de energía). Por lo cual es necesario un estudio de vibraciones; estas se refieren a los movimientos oscilatorios de los cuerpos, y a las fuerzas asociadas con ellos.

La mayoría de las estructuras experimentan vibración hasta cierto grado, su diseño, requiere generalmente consideración de su conducta oscilatoria. La vibración que tiene lugar bajo la excitación de un sismo es una vibración forzada.

Cuando el sistema es obligado a vibrar a la frecuencia de excitación, si esta coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, se produce una situación de resonancia y ocurren oscilaciones peligrosamente grandes. La falla de estructuras mayores como puentes y edificios es una horrible posibilidad bajo resonancia. Así el cálculo de las frecuencias naturales es de importancia capital en el estudio de las vibraciones.

Los valores máximos (frecuencias resonantes) conducen a los espectros de respuesta y estos a los espectros de diseño para ser integrados a las normativas sísmicas de seguridad pública y generar diseños estructurales sismorresistentes.

## **OBJETIVOS**

### **General**

Generar e interpretar los espectros sísmicos, utilizados para obtener datos esenciales de diseño como: la cortante basal, el momento de volteo, el desplazamiento máximo, el esfuerzo de fluencia y el factor de reducción de resistencia.

### **Específicos**

1. Dar un fundamento para la interpretación de los métodos de diseño sismorresistente en estructuras.
2. Optimizar económica y funcionalmente diseños sismorresistentes.
3. Comprender la respuesta de las estructuras deformadas dentro del rango inelástico durante un movimiento intenso del suelo.
4. El uso de modelos matemáticos, para la mejor comprensión de los fenómenos naturales asociados.
5. Desarrollar la teoría pertinente de vibraciones de una partícula para su aplicación sísmica.
6. Generar un documento que permita al interesado contar con información valiosa y actualizada sobre el tema.





## INTRODUCCIÓN

Este trabajo está enfocado primordialmente a los espectros sísmicos, herramienta para el análisis y diseño de estructuras, dentro del ámbito de ingeniería civil, y con el énfasis principal en las solicitaciones sísmicas.

El tema se ha dividido en tres partes: la primera que corresponde a información general de los sismos (capítulo 1), la segunda destinada a la teoría de vibraciones de una partícula aplicada a las estructuras (capítulos 2 a 5) que es sobre lo que se fundamenta este trabajo y los espectros sísmicos, y la tercera parte que es el aporte principal (capítulos 6, 7 y 8), que trata sobre los espectros de respuesta y de diseño.

Se inicia, con información básica de los sismos, su origen, efectos, mediciones de datos y estudios de la frecuencia de ocurrencia, con énfasis en territorio guatemalense.

En el capítulo dos se describen las propiedades mínimas de un cuerpo para su análisis dinámico, estas son: masa, amortiguamiento (fricción) y rigidez; donde se mencionan los sistemas de unidades empleadas para la medición de estas propiedades, porque en el medio se utilizan varias.

En el capítulo tres se inicia la teoría de vibraciones de una partícula que es suficiente para generar los espectros, dadas las lecturas sísmicas, trata del movimiento libre que es el más sencillo de analizar, es decir una vez puesta la partícula en movimiento, no hay ninguna fuerza externa que la obligue a seguir en vibración, las fuerzas de fricción inherentes al cuerpo detendrán el

movimiento; a esta condición se le denomina movimiento libre con amortiguamiento. Si se desprecia la fricción o amortiguamiento del cuerpo condición que sólo se da en teoría, se llama movimiento libre sin amortiguación, esta se utiliza para simplificar el modelo matemático.

En el capítulo cuatro se considera la vibración forzada del cuerpo o sistema (representado por la partícula) por algún agente exterior como el provocado por el sismo; no obstante para simplificar en este capítulo se inicia con la fuerza armónica, que es senoidal y representa variedad de situaciones reales; el movimiento es considerado con y sin amortiguamiento. El capítulo cinco considera la vibración forzada por un impulso que conduce a fuerzas generales que producen el movimiento, donde incluye aceleraciones en la base como el que provoca el sismo.

En el capítulo seis, se analizan los sistemas lineales, es decir los que en teoría obedecen la ley de Hooke, por tanto sólo se consideran deformaciones pequeñas, se obtiene la respuesta de la partícula o un sistema con un sólo grado de libertad a un registro sísmico (acelerograma), que representa la aceleración del suelo por el sismo, hay varios métodos para obtener la respuesta, los más utilizados son los paso a paso.

El gráfico que representa las respuestas máximas, para distintos sistemas, es el espectro de respuesta, para simplificar y representar una población de espectros de respuesta se emplea un espectro de diseño apto para el diseño elástico. En el capítulo siete, se analizan los aspectos inelásticos de los sistemas; el rango útil de las estructuras se encuentra en este rango, donde es posible afectar por parámetros o coeficientes los sistemas elásticos, para incluir los efectos no lineales en estos y tener un diseño más realista. Se integran estos resultados a las normativas, en la última parte de este informe.

# **1. SISMOS**

## **1.1. Introducción**

Existen diversas teorías muy interesantes, a las posibles causas que generan los sismos; no obstante, la de mayor aceptación por el respaldo de los numerosos datos es la teoría de la tectónica de placas, donde la corteza terrestre está compuesta por grandes bloques o placas que se mantienen en movimiento; este desplazamiento se da en relación con los límites de las placas que son fracturas llamadas fallas geológicas.

Puede no haber movimiento por diversas causas, acumulándose esfuerzos locales hasta que se vence la resistencia de la roca cortical, produciéndose una liberación de energía generadora de vibraciones llamadas ondas sísmicas que son las que finalmente producen los sismos en la superficie. La captación de estas ondas se logra con instrumentos como sismómetros o acelerómetros, expresados en registros llamados sismogramas y acelerogramas, respectivamente. Lográndose así la medición de los sismos, de diferentes formas; las más usadas son la magnitud de Richter y la intensidad de Mercalli. La región donde se producen sismos frecuentes define su actividad sísmica; con base en esta teoría, se discute la sismicidad de Guatemala.

## **1.2. Causas de los sismos**

El origen de los sismos ha sido asignado a muchas causas a lo largo de la historia. En muchos casos, estas explicaciones han estado vinculadas a las creencias religiosas de los diferentes pueblos.

Han sido atribuidas a la acción de los dioses (como, por ejemplo, a Poseidón en la teogonía griega), o la lucha entre deidades maléficas y protectoras. No han faltado intentos de explicación científica. Aunque la consideración de un sismo como una respuesta elástica a fenómenos geológicos ya fue anunciada por Hooke en su “Discurso sobre sismos” (1668); se puede considerar que el planteamiento moderno se inicia a principios del siglo antepasado, cuando los sismos comienzan a vincularse con fallas geológicas observables en el terreno.

Von Humboldt parece ser uno de los primeros defensores de este punto de vista, que sin embargo, no es compartido por Robert Mallet en su estudio del Sismo de Nápoles, trabajo considerado pionero de la sismología moderna; ni por Lyell, quien en 1868 describió el fallamiento y la deformación producidos por sismos. Para este autor y en continuidad con las teorías del siglo XVII, los sismos tenían un origen térmico; como manifestación de un proceso volcánico o como resultado de la contracción y expansión térmicas.

De todas formas, la relación entre los sismos y las fallas fue abriéndose paso con los años, en buena medida gracias a los trabajos de Gilbert en 1884, de manera que a finales del siglo XIX ya era comúnmente aceptado que los sismos se originaban por el movimiento relativo de las dos partes de una fractura de la corteza terrestre.

En realidad no se sabe a ciencia cierta el génesis del sismo, pero varios fenómenos son los causantes de que la superficie de la tierra tiemble; dependiendo de estos, actualmente se reconocen tres clases de sismos: los de origen tectónico, volcánico y los producidos por la actividad de los hombres.

Los sismos más devastadores son los de origen tectónico, y por ende los de mayor interés dentro la ingeniería. A lo largo de este trabajo, un sismo se define como la vibración de la corteza terrestre; terremoto es el sismo que causa daño en determinado lugar; temblor es el sismo que no causa daño en determinado lugar, se menciona un lugar específico porque el mismo sismo puede ser terremoto en una región y temblor en otra. No obstante, estos términos suelen ser intercambiables. En otras literaturas, terremoto es la vibración de la corteza terrestre y sismo la vibración de la estructura causada por el terremoto.

### **1.2.1. Teoría de la tectónica de placas**

La corteza terrestre es relativamente delgada. Se extiende hasta profundidades de 70 km en los océanos y 150 km bajo los continentes. Es muy válida la analogía, (Gere y Shah, 1984), de que al comparar la Tierra con un huevo duro, la corteza tendría un espesor semejante a la cáscara y esta estaría fracturada en una serie de fragmentos que se conocen con el nombre de placas tectónicas.

**Figura 1. Analogía de la corteza terrestre con la cáscara de un huevo**

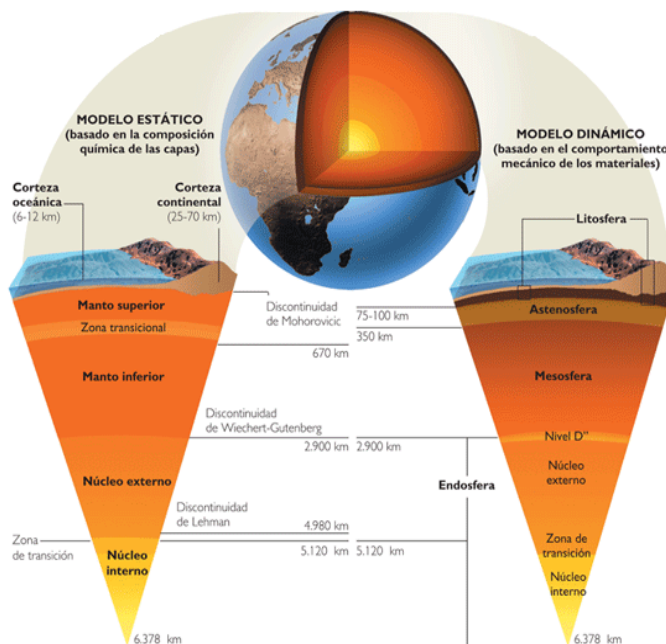


Fuente: CORZO, Mario. Base sismológica de Guatemala. p. 5.

La teoría de placas tectónicas es la de mayor aceptación en la actualidad, la cual considera que la litósfera que es la capa que corresponde a los primeros 100 km de la superficie terrestre, se comporta como un material rígido, quebradizo y poco denso, que descansa sobre una capa de material más denso y fluido denominado astenósfera, con 75-100 km de espesor, a una profundidad total desde la superficie de unos 200 km, como lo muestra la figura 2.

Seguidamente, la corteza y el manto se encuentran separados por la discontinuidad de Mohorovic, similarmente en forma más profunda se encuentran otras discontinuidades; Wiechert-Gutenberg y Lehman, opinan que está dividida en 17 placas principales que se desplazan lateralmente impulsadas por las corrientes de convección del manto terrestre, que se mueven a diferentes velocidades y en distintas direcciones.

Figura 2. Modelos de las placas de la Tierra



Fuente: CORZO, Mario. Base sismológica de Guatemala. p. 6.

La dirección del movimiento relativo y la composición de las placas definen las características del límite o contacto entre las mismas; estos límites se refieren a la evolución de la forma de la corteza terrestre y pueden ser:

- Divergente o generación de corteza
- Convergente o destrucción de corteza
- Transcurrente o conservación de corteza

El origen de la mayoría de los sismos es explicado satisfactoriamente por la “teoría de la tectónica de placas”. La idea básica es que la corteza terrestre, la litósfera, está compuesta por un mosaico de doce o más bloques grandes y rígidos llamados placas, que se mueven uno respecto de otro. La corteza terrestre se encuentra dividida en seis placas continentales (África, América, Antártida, Australia, Europa y la placa del Pacífico) y cerca de catorce placas subcontinentales (placa de Nazca, del Caribe, etc.).

Figura 3. **Placas tectónicas alrededor del mundo**



Fuente: CORZO, Mario. Base sismológica de Guatemala. p. 3.

La validez de la teoría tectónica de placas recibió un fuerte apoyo de los datos sísmicos reunidos a través de los años, mediante la red sísmica mundial, que fue establecida hacia el final de la década de 1950. Los datos demostraron que las zonas en donde ocurren la mayor parte de los terremotos del mundo, son muy estrechas y muy bien definidas, sugiriendo que la mayoría de los sismos registrados resultan de los movimientos de las placas en las zonas donde colisionan unas contra otras.

Una explicación aceptable (Rosenblueth, 1992) para la causa del movimiento de las placas se basa en el equilibrio térmico de los materiales que componen la Tierra. Nuestro planeta se formó por la unión de meteoritos. El incremento en la masa ha aumentado la radioactividad. Consecuentemente, el planeta se ha calentado y su núcleo crece a costa de la fusión del manto. La parte superior del manto, que está en contacto con la corteza, se encuentra a una temperatura relativamente baja, mientras que la parte inferior está en contacto con el núcleo a una temperatura mucho más alta.

Es evidente que el material caliente (en las profundidades) posee una densidad menor al material frío (cerca de la corteza), lo que hace que tienda a subir, mientras que el material de la superficie una vez frío tiende a bajar por la acción de la gravedad. Este proceso cíclico se denomina “convección”. Las corrientes convectivas generan esfuerzos de corte en la base de las placas, provocando su movimiento en distintas direcciones.

Estas corrientes también hacen que la lava ascienda continuamente en los llamados lomos oceánicos. La roca formada se mueve lentamente por ambos lados del lomo como nuevo piso o base oceánica, desplazando las placas a velocidad constante. Estas zonas son denominadas “zonas de expansión”.

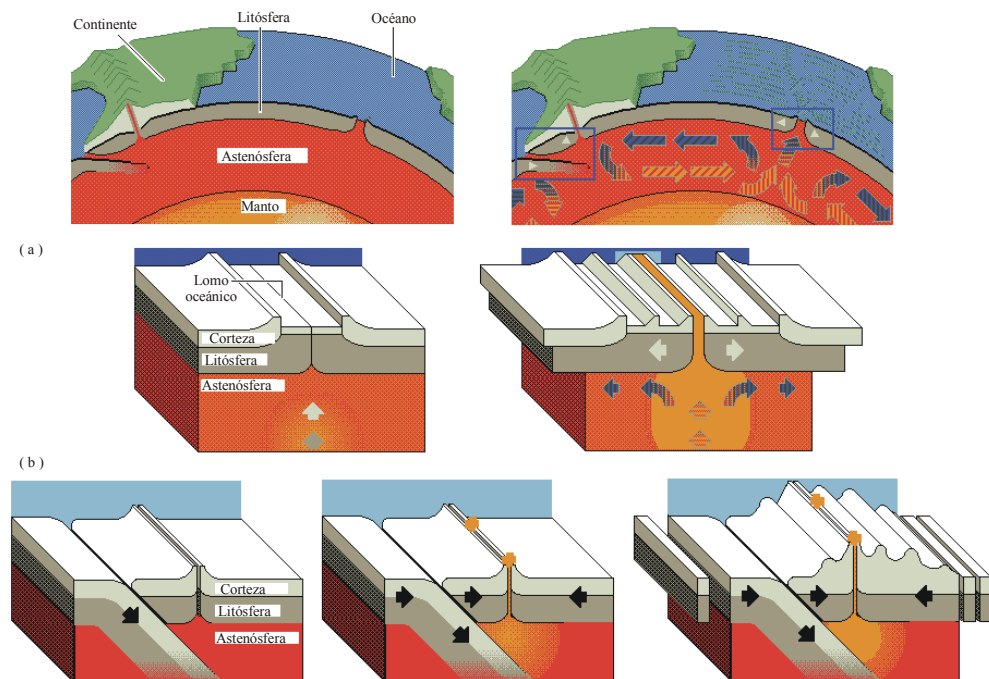


Las placas se mueven libremente respecto de la astenósfera subyacente, y también pueden moverse una con respecto de la otra de tres formas:

- Una placa se desliza pasando frente a la otra a lo largo de su margen
- Dos placas se mueven alejándose mutuamente
- Dos placas se mueven de forma que una se desliza por debajo de la otra

El primero de estos movimientos tiene su expresión en la superficie de la tierra. El segundo tipo de movimiento da origen a los “lomos oceánicos”. El tercero tiene su acción en las profundas trincheras oceánicas donde el borde de una placa se mueve por debajo de la otra; este proceso se conoce como “subducción”. La figura 4 ilustra los conceptos expuestos en párrafos anteriores.

Figura 4. **Movimiento de las placas, (a) expansión, (b) subducción**



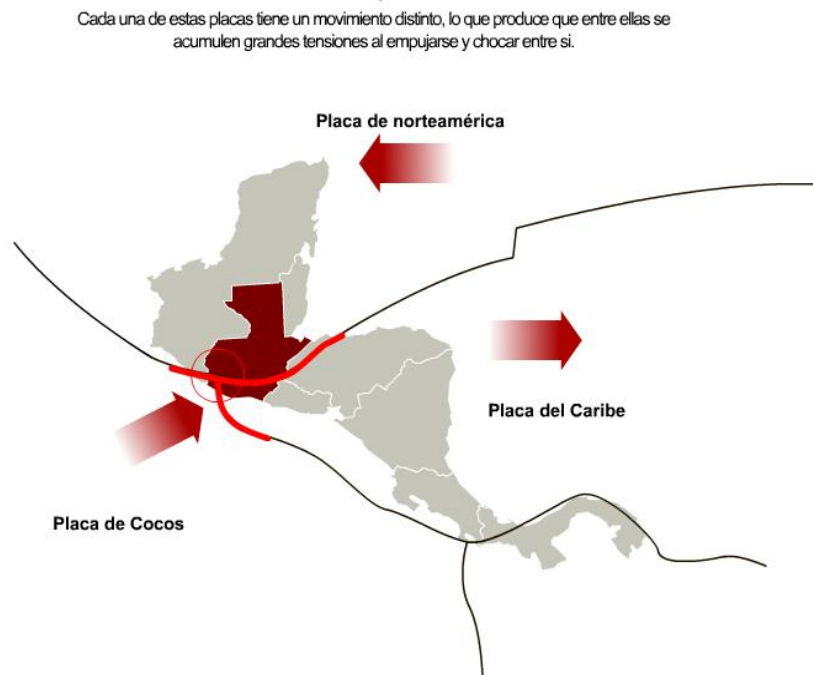
Fuente: MICROSOFT, Home (1995). Encarta 95. Interactivo.

La formación de piso oceánico nuevo en los lomos de expansión implica la separación de los continentes, aumentando de esta manera el área de piso oceánico. Este aumento es equilibrado por la destrucción de la placa por medio de la subducción cuando la corteza oceánica es transportada al manto, en donde se consume.

### 1.2.2. Guatemala en la teoría de placas

De las placas tectónicas de la Tierra, la de Norteamérica, Cocos y el Caribe, son para Guatemala la amenaza sísmica que determina la actividad que tiene lugar en los márgenes de dichas placas; como se muestra en la figura 5, las flechas indican la dirección del movimiento.

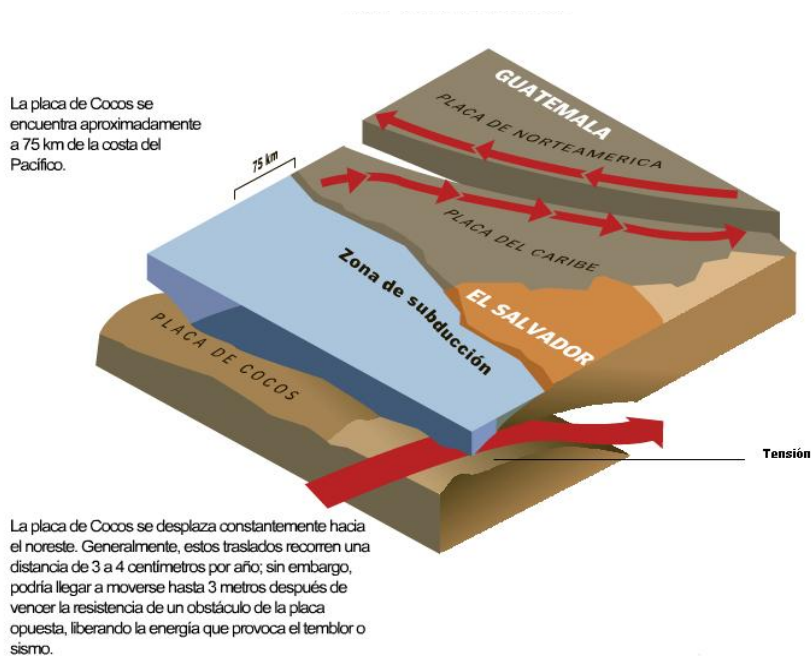
Figura 5. **Placas tectónicas que interactúan en Guatemala**



Fuente: CORZO, Mario. Base sísmológica de Guatemala. p. 8.

Una de las fuentes principales de sismos es la fosa de subducción, asociada al límite de la Placa de Cocos y el Caribe que es del tipo convergente. Dentro de ella cabe distinguir una zona de subducción superficial ( $h = 50$  km), localizada a unos 120 km de la costa, donde la Placa de Cocos comienza a sumergirse bajo la Placa del Caribe (figura 6), y otra de subducción intermedia y profunda ( $h > 50$  km), localizada ya bajo el continente, llegando a profundidades de hasta 250 km.

Figura 6. **Dirección del movimiento de las placas, subducción de la Placa de Cocos**



Fuente: KNUDSON, C. F. USGS terremoto de Guatemala 1976. p. 56.

Los límites de placas Norteamérica-Caribe del tipo transcurrente, definen la zona de sismos con las fallas del Chixoy-Polochic y la de Motagua; que se extiende desde la costa del Caribe (zona de falla del Caymán) hasta México, hacia el estrecho de Tehuantepec (zona de falla de Tehuantepec).

A su vez, lo anterior genera (deformaciones al interior de la Placa del Caribe) fallas secundarias como: Jalpatagua, Mixco, Santa Catarina Pínula, etc. Las fallas están alineadas paralelamente en dirección ENE-WSW, donde los desplazamientos producidos por terremotos alcanzan los 3 metros, como el sismo de 1976, de  $M_w = 7,6$ , en la falla de Motagua, o el de 1816 en Chixoy-Polochic, de magnitud similar al del 76.

Otra fuente de actividad sísmica es la cadena de volcanes paralela a la fosa de subducción del Pacífico, que se extiende desde México hasta El Salvador. Debido a fuerzas originadas por una componente de colisión oblicua en la zona de subducción, los sismos son acompañados de erupciones volcánicas. Estos sismos de magnitud menores a 6,5 grados, han causado destrucción, debido a que tienen foco superficial (profundidad menor que 25 km) y sus epicentros se encuentran en áreas pobladas. La depresión de Honduras, registra segmentos de fallas normales, por el accionar del bloque Chortís; por último, la zona del Petén con eventos de pequeña magnitud.

### **1.2.3. Sismos de origen tectónico, volcánico y artificial**

Se producen por el desplazamiento súbito de las placas tectónicas a lo largo de las fracturas llamadas “fallas”. Estos movimientos bruscos liberan el esfuerzo al que están sometidas las rocas corticales. El esfuerzo se acumula localmente por varias causas hasta que supera la resistencia de las rocas, que es cuando ocurre la ruptura y deslizamiento a lo largo de las fracturas. El choque o disparo sísmico se traduce en una gran liberación de energía, seguido algunas veces de un rebote elástico, hasta que las placas involucradas alcanzan nuevas posiciones de equilibrio.

De las dos clases de sismos no tectónicos, los del origen volcánico son raramente muy grandes o destructivos. Ellos son de interés principalmente porque anuncian las erupciones volcánicas inminentes. Los temblores se originan a causa de la subida del magma, llenando las cámaras internas del volcán, también tienden a cambiar la orografía por los deslizamientos de las fallas; el resultado se traduce en elevación o descenso de los niveles de agua.

El hombre puede inducir sismos mediante una variedad de actividades, tal como el relleno de nuevos depósitos, la detonación subterránea de explosivos atómicos, o el bombeo profundo de fluidos en la tierra mediante pozos.

#### **1.2.4. Premonitorios y réplicas**

En algunos casos se presentan uno o varios sismos pequeños, antes de la ocurrencia del evento principal. Estos eventos se conocen con el nombre de premonitorios. De igual manera, con posterioridad a un sismo importante, se presentan temblores de menor magnitud, a los que se les conoce con el nombre de réplicas. Sólo los sismos superficiales y de profundidad moderada producen réplicas, las cuales son de gran importancia para determinar el plano de falla, y esta es la razón por la cual se instalan redes sismológicas móviles con posterioridad a un sismo de importancia.

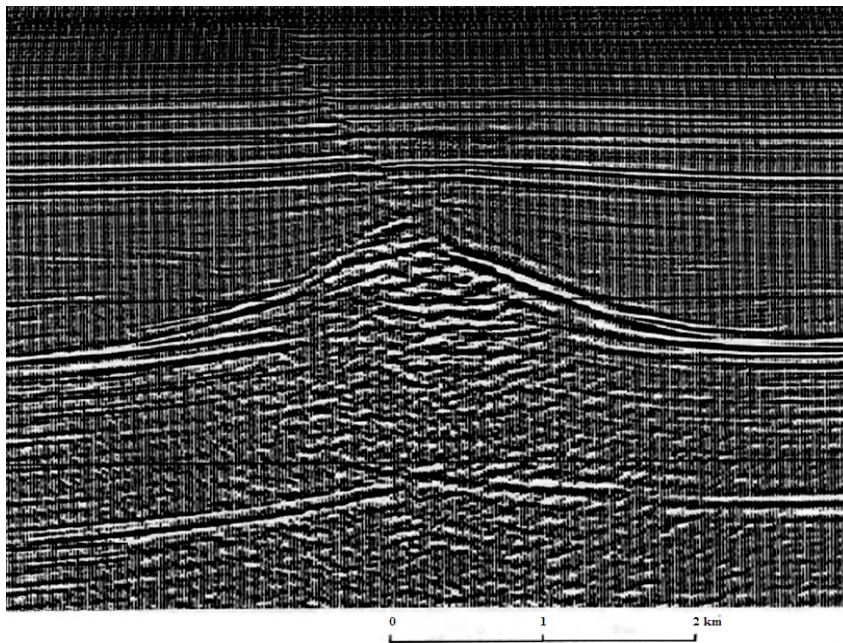
#### **1.3. Fallas geológicas**

La corteza está fracturada; a cada bloque se le llama placa, y a los bordes de las placas se les llama fallas.

### 1.3.1. Definición

Las fallas son fracturas en las cuales ha tenido lugar el desplazamiento relativo de los dos lados de la ruptura. Las fallas geológicas que son capaces de producir sismos se conocen con el nombre de fallas activas; la longitud de las fallas puede alcanzar desde varios metros hasta cientos de kilómetros, y extenderse desde la superficie a varias decenas de kilómetros de profundidad.

Figura 7. Ejemplo típico de falla profunda



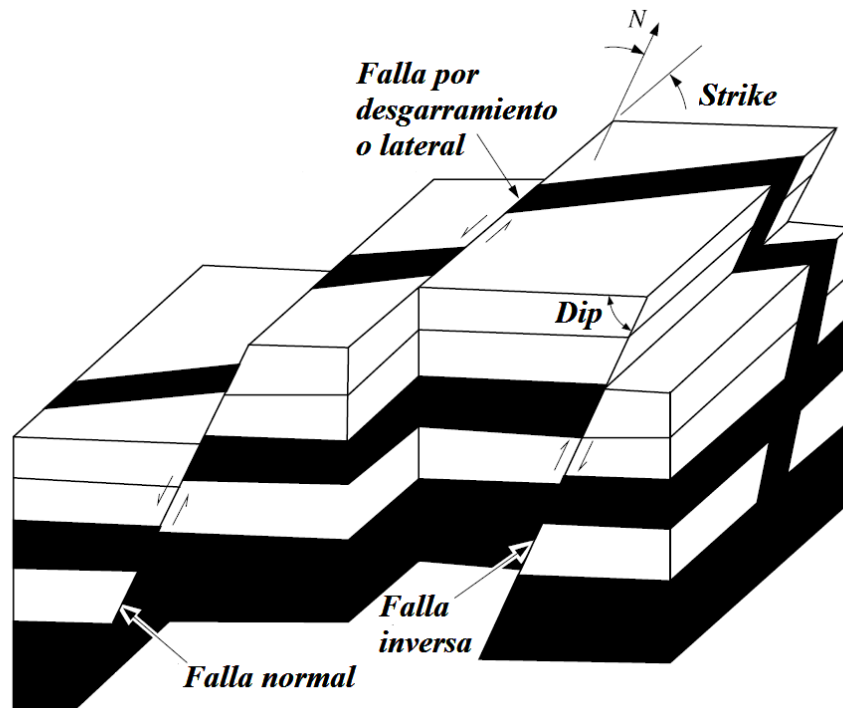
Fuente: CORZO, Mario. Base sísmológica de Guatemala. p. 9.

La presencia de fallas en la superficie no necesariamente implica que el área tiene actividad sísmica, así como la inexistencia de las mismas no implica que el área sea asísmica, ya que muchas veces las fracturas no alcanzan a aflorar en la superficie; más ejemplos de fallas profundas como el de la figura 7, se encuentran en la referencia de la misma.

### 1.3.2. Tipos de falla

Se denomina falla geológica al plano de fractura de la roca de la corteza terrestre, a través del cual se han producido desplazamientos relativos de un bloque respecto de otro adyacente; si bien la superficie en una falla suele ser irregular, esta puede ser representada aproximadamente como un plano. La clasificación de las fallas depende de la geometría y la dirección relativa del deslizamiento (slip). El ángulo de la falla (dip), es el formado por la falla en la superficie del terreno de un plano horizontal y la línea de corte hacia abajo del suelo. El agrietamiento repentino forma un ángulo (strike) medido en relación con el norte y la dirección de la ruptura superficial del suelo de la línea de falla.

Figura 8. Orientación y desplazamiento de los tipos básicos de fallas

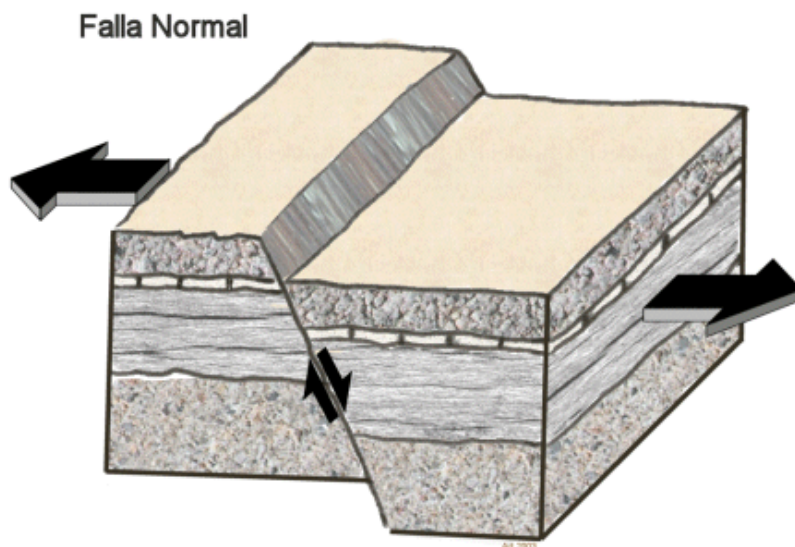


Fuente: BOLT, Bruce. Earthquakes a premier. p.154.

Estos tipos de falla son:

- Normal: los bloques están sometidos a esfuerzos de tensión.
- Inversa: los bloques están sometidos a esfuerzos de compresión.
- Desgarradura: los bloques están sometidos a esfuerzos de corte.
- Vertical: es una particularidad de las fallas normal o inversa, en la cual el plano de falla y el movimiento relativo entre los bloques es predominantemente vertical.

Figura 9. **Falla geológica normal, genera esfuerzos de tensión**



Fuente: BOLT, Bruce. Earthquakes a premier. p. 160.

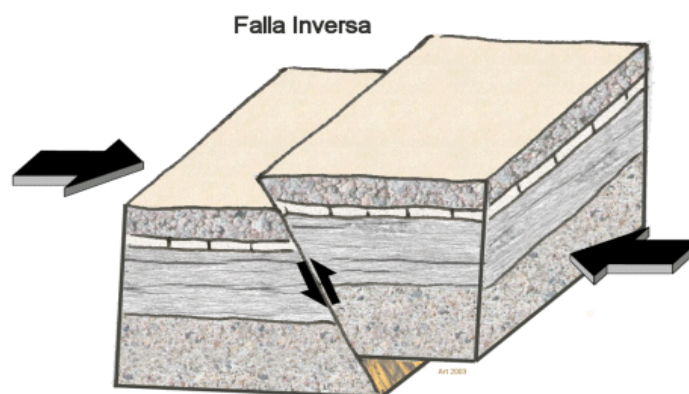


Figura 10. **Falla normal, los bordes se mueven alejándose, Guatemala sismo de 1976**



Fuente: PLAFKER, George. et al. Simposio internacional sobre el terremoto de Guatemala, del 4 de febrero de 1976. p. 112.

Figura 11. **Falla geológica inversa, genera esfuerzos de compresión**



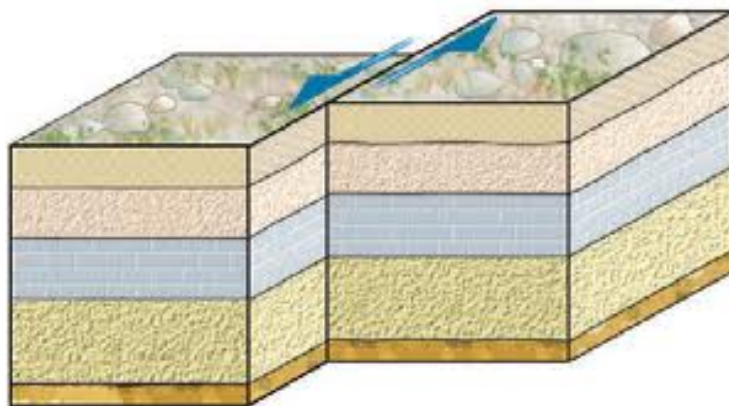
Fuente: BOLT, Bruce. Earthquakes a premier. p. 160.

Figura 12. **Falla inversa, los bordes se comprimen, Guatemala sismo de 1976**



Fuente: PLAFKER, George. et al. Simposio internacional sobre el terremoto de Guatemala, del 4 de febrero de 1976. p. 117.

Figura 13. **Falla geológica de desgarradura, genera esfuerzos de corte**

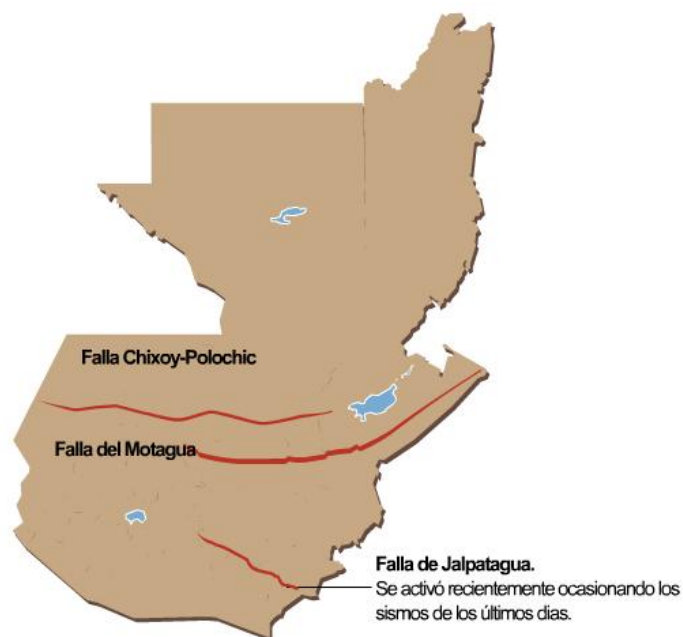


Fuente: BOLT, Bruce A. Earthquakes a premier. p. 161.

Generalmente los sismos se concentran en las cercanías de las fallas. Estas se mueven más rápidamente que otras que tienen gran actividad sísmica.

Figura 14. **Fallas geológicas más activas de Guatemala**

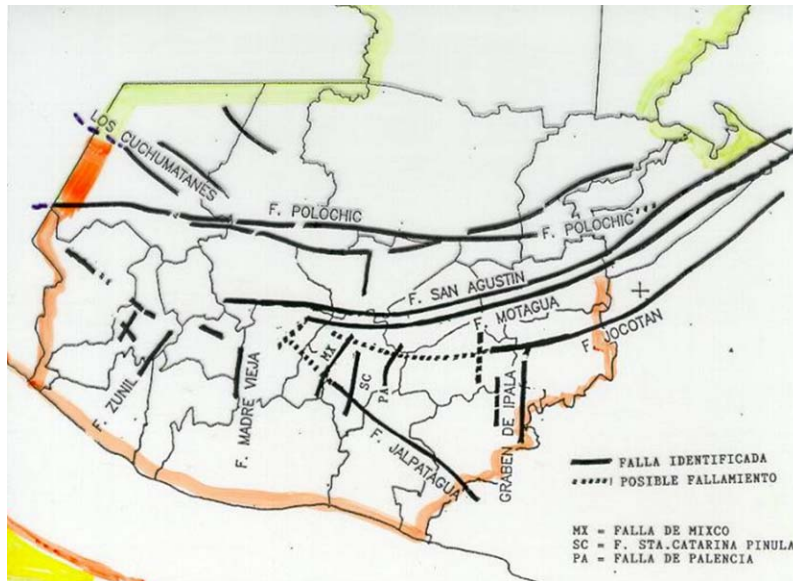
Guatemala posee muchas fallas geológicas, entre las más activas están:



Fuente: CORZO, Mario. Base sismológica de Guatemala. p. 11.

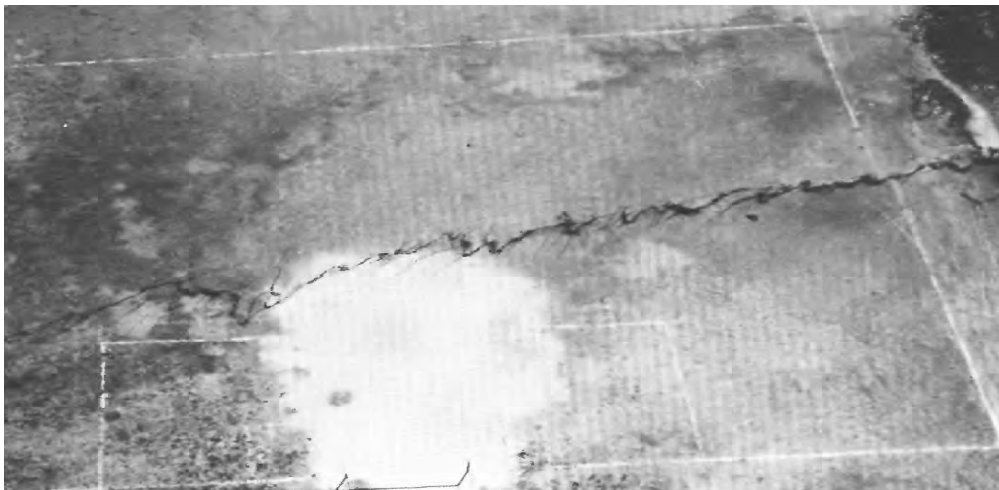
En la figura precedente se muestran las fallas activas más importantes en la actualidad (2012); no obstante hay muchas otras que deben considerarse aunque algunas sean secundarias o incluso posibles; la figura 15 muestra lo expuesto.

Figura 15. **Fallas geológicas de Guatemala**



Fuente: MONZÓN DESPANG, Héctor. Sismos y sismorresistencia. Slide.

Figura 16. **Falla del Motagua, Gualán, Zacapa**



Fuente: PLAFKER, George. et al. The Guatemalan earthquake of february 4, 1976. p. 43.

En la figura 16 se muestra una porción de la falla Motagua en vista aérea después del terremoto ocurrido el 4 de febrero de 1976, que cruza una cancha de fútbol en Gualán.

En la figura 17, se muestra la vista de otra falla en las cercanías del municipio de Las Ovejas en el Progreso.

**Figura 17. Vista aérea de una falla con trazo cerca de Las Ovejas, El Progreso**

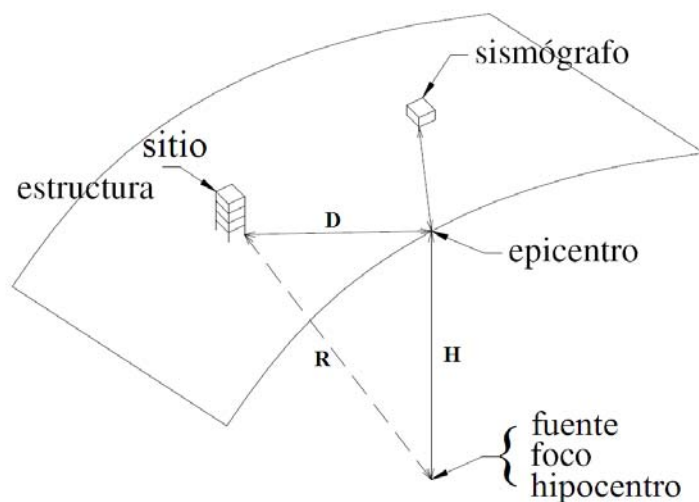


Fuente: ESPINOSA, A. F. et al. The Guatemalan earthquake of february 4, 1976. p. 59.

El concepto de fuente foco o hipocentro, como un punto en el interior de la corteza terrestre donde se cree que se originan las ondas sísmicas, es una idealización, ya que en realidad, el desplazamiento relativo de la falla se produce a lo largo de una línea extensa; de allí que se considera como el instante de tiempo en que se generan las ondas y la propagación de estas, hasta alcanzar la superficie, produciendo movimientos oscilatorios irregulares en el suelo. Por ejemplo, la falla de Motagua, es la causante de terremotos a lo largo de 200 kilómetros.

El epicentro es el punto a flor de tierra o en la superficie del suelo, en la vertical con el foco. Si se supone una población cercana al epicentro del sismo, a la distancia (horizontal) de la población o sitio al epicentro, se le llama distancia epicentral y si se considera la distancia del sitio al foco, se denomina distancia focal; también es de interés la profundidad focal que se define como la distancia del foco al epicentro; estos conceptos se ilustran en la figura 18.

Figura 18. **Idealización geométrica en la relación de fuente y sitio**



Fuente: CORZO, Mario. Base sismológica de Guatemala. p. 11.

Según la profundidad focal (valores no fijos), los sismos se clasifican en:

- Superficiales: menores a 20 kilómetros; que causan mayor daño
- Someros: profundidad entre 20 y 70 kilómetros
- Intermedios: entre 70 y 300 kilómetros
- Profundos: mayor a 300 kilómetros

Para calcular las coordenadas del foco: latitud, longitud y profundidad, se utilizan los registros del temblor en varias estaciones. En cada registro se miden los tiempos de arribo de las ondas; estas se reconocen por el cambio brusco en la amplitud y frecuencia del registro respecto del ruido ambiente. En el registro de un sismo local, se distinguen dos fases o arribos de ondas, conocidas como: fase P (primaria) y fase S (secundaria).

#### **1.4. Ondas sísmicas**

La repentina liberación de energía en el foco o hipocentro del sismo, cuando este ocurre, se propaga en forma de ondas o vibraciones elásticas de deformación. De acuerdo con el medio en que se propagan las ondas sísmicas, se pueden dividir en ondas internas y ondas superficiales.

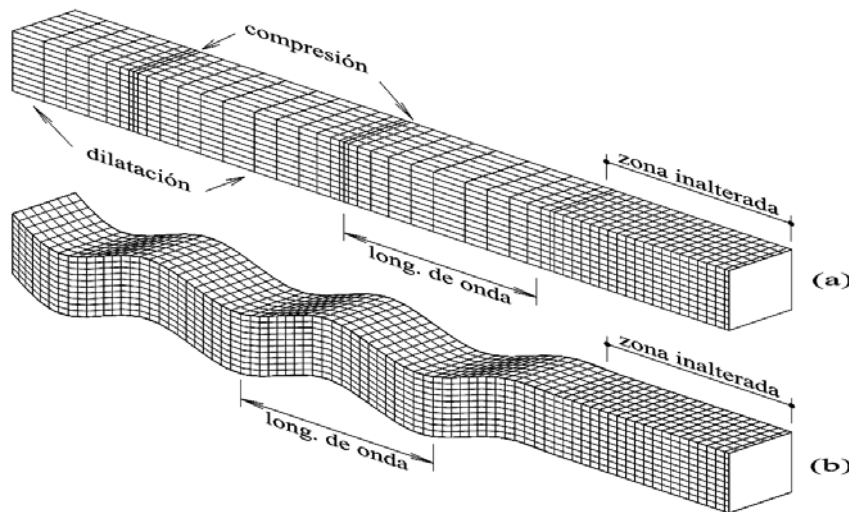
##### **1.4.1. Ondas internas o de cuerpo**

Son las que se propagan en el interior de la tierra; estas pueden ser:

- Primarias u ondas P: las que hacen vibrar una partícula en el sentido de la propagación de la onda, originando compresión y dilatación en el medio por el cual se desplazan. Cuando estas ondas alcanzan la superficie de la Tierra, parte de ellas se transforma en ondas sonoras.

- Ondas secundarias u ondas S: son las que hacen vibrar las partículas en forma horizontal, perpendicular a la dirección de propagación, produciendo esfuerzos de corte en el medio en el que se desplazan. Por las características de estas ondas, ellas se disipan en un medio líquido, porque como es sabido, estos no soportan esfuerzos de corte.

Figura 19. **Deformaciones producidas por las ondas de cuerpo: (a) onda P, (b) onda S**



Fuente: BOLT, Bruce. Earthquakes. p. 8.

Las ondas P se propagan con velocidades mayores que las ondas S. Estas velocidades de propagación dependen fundamentalmente de la densidad y elasticidad del medio en que se desplazan (densidad  $\rho$ , módulo de incompresibilidad  $k$ , módulo de cortante  $G$ ).



Para determinar la velocidad de propagación de las ondas se tiene:

Primarias P

$$V_p = \sqrt{\frac{k + \frac{4G}{3}}{\rho}}$$

Secundarias S

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Por ejemplo:

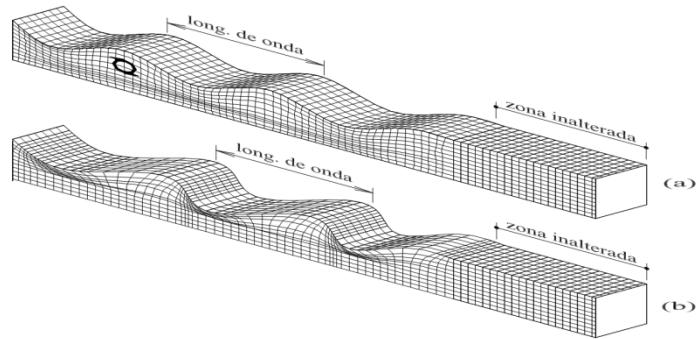
Medio de desplazamiento	Vp	Vs
Granito	5,5 km/s	1,5 km/s
Agua	1,5 km/s	0 km/s

#### 1.4.2. Ondas superficiales

Son las originadas por las ondas S, que se transmiten en la superficie de la tierra, hasta profundidades de 30 km, estas se clasifican por su forma en:

- Ondas Rayleigh: las partículas se desplazan sobre un plano en dirección de la trayectoria de las ondas con un movimiento elíptico horizontal y vertical simultáneamente (como las olas del mar).
- Ondas Love: hacen que el terreno se desplace en sentido perpendicular a la dirección del movimiento vertical.

Figura 20. **Deformaciones producidas por las ondas superficiales:  
(a) onda Rayleigh, (b) onda Love**



Fuente: BOLT, Bruce. Earthquakes. p. 9.

En la figura 21 se expresan los efectos de las ondas Love, fotografía tomada días después del terremoto de 1976.

Figura 21. **Ondas Love, rieles del ferrocarril en Zacapa**



Fuente: ESPINOSA, A. F. et al. The Guatemalan earthquake of february 4, 1976. p. 59.

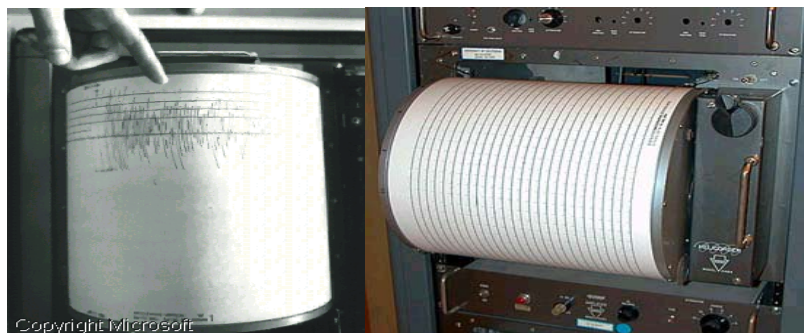
Por la forma de movimiento de las ondas (P & S) a través de los estratos de la Tierra, estas pueden ser reflejadas o refractadas entre las diferentes densidades de material del suelo, razón por la cual se presenta una amplificación del movimiento en la superficie del suelo.

### 1.5. Instrumentos de medición y registros sísmicos

Las características de las ondas sísmicas y su propagación han podido estudiarse gracias a instrumentos que registran las vibraciones sísmicas.

Uno de los instrumentos empleados en sismología es el sismógrafo (figura 22), el cual es adecuado para registrar sismos que ocurren a distancias apreciables, inclusive de miles de kilómetros. Los sismógrafos, en general, se salen de rango de medición cuando el sismo ocurre cerca de su localización. El registro obtenido por este instrumento se denomina sismograma. Dependiendo del tipo de instrumento utilizado, se puede obtener el desplazamiento, velocidad o aceleración del suelo; lo cual está determinado por el rango útil de frecuencias a medir ( $\omega$ ), respecto de la frecuencia natural del instrumento ( $\omega_n$ ).

Figura 22. **Sismógrafo de tambor rotatorio**



Fuente: MICROSOFT, Home (1995). Encarta 95, Interactivo.

Los sismógrafos registran el movimiento respecto del tiempo de un péndulo que oscila libremente dentro de un marco sujeto al suelo; este movimiento es registrado por un estilete o pluma sobre un tambor rotatorio. En los sismógrafos modernos, el movimiento del péndulo se convierte en señales electrónicas que se registran en la memoria de una computadora.

### **1.5.1. Sismómetro**

Aparato que mide o registra las amplitudes de onda (si  $\omega_n < \omega$ ), los sismogramas permiten a los sismólogos localizar el epicentro de un sismo y calcular su magnitud. Midiendo la amplitud máxima del registro y calculando la diferencia entre los tiempos de llegada de las ondas S y P, con ayuda de fórmulas sencillas, se obtiene la magnitud del sismo y con un mínimo de tres instrumentos colocados en diferentes lugares, por triangulaciones, se puede localizar el epicentro.

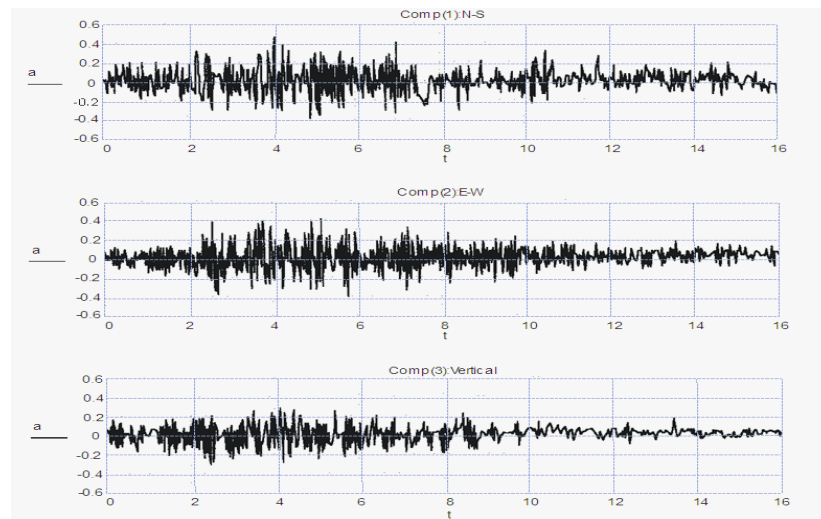
Sin embargo, la interpretación exacta de un sismograma y la distinción de los distintos tipos de ondas que se superponen en el registro, es un problema bastante delicado. Existe una desventaja adicional, los valores de desplazamiento o velocidad no se obtienen directamente del registro, sino que están en función de la amplificación, voltaje y frecuencia natural del instrumento.

### **1.5.2. Acelerómetro**

Los acelerómetros, también conocidos como sismógrafos de movimiento fuerte, se diseñan para registrar directamente aceleraciones (si  $\omega_n > \omega$ ), del suelo cercano y producen un registro conocido como acelerograma.

Los instrumentos se orientan de tal forma que registran la aceleración del suelo en función del tiempo para tres direcciones o componentes normales. En la figura 23 se muestran los acelerogramas registrados en una estación durante un sismo en Friuli (Italia), el 5 de mayo de 1976.

Figura 23. **Acelerograma correspondiente a las tres componentes de un sismo**



Fuente: GOYTIA, Ivan y VILLANUEVA, Rolando. Ingeniería antisísmica. p. 11.

El análisis sísmico requiere la digitalización numérica de acelerogramas; es decir convertir el registro en una serie de datos de aceleración – tiempo. Los acelerogramas dan una información directa del movimiento sísmico, especialmente apta para estimar la respuesta de las estructuras y edificios. La aceleración como medida instrumental de la intensidad se ha constituido así en el parámetro base para el análisis estructural sísmico.

## 1.6. Medidas de los sismos

Comúnmente existen dos sistemas para cuantificar el tamaño y la fuerza de un sismo, los cuales son la magnitud y la intensidad. A pesar de ser parámetros ampliamente utilizados y conocidos, desde el punto de vista de la ingeniería sísmica, ninguno de ellos es completamente satisfactorio.

### 1.6.1. Magnitud

Es la que se relaciona con la cantidad de energía liberada durante el movimiento. La energía se calcula indirectamente de la amplitud máxima observada en el sismograma; (escala de Richter, una de las formas cuantitativa de medir el tamaño del sismo, sin importar el lugar en que se mida). Richter, en 1935, fue el primero en definir la magnitud de un sismo, como:

$$M_L = \log A - \log A_o$$

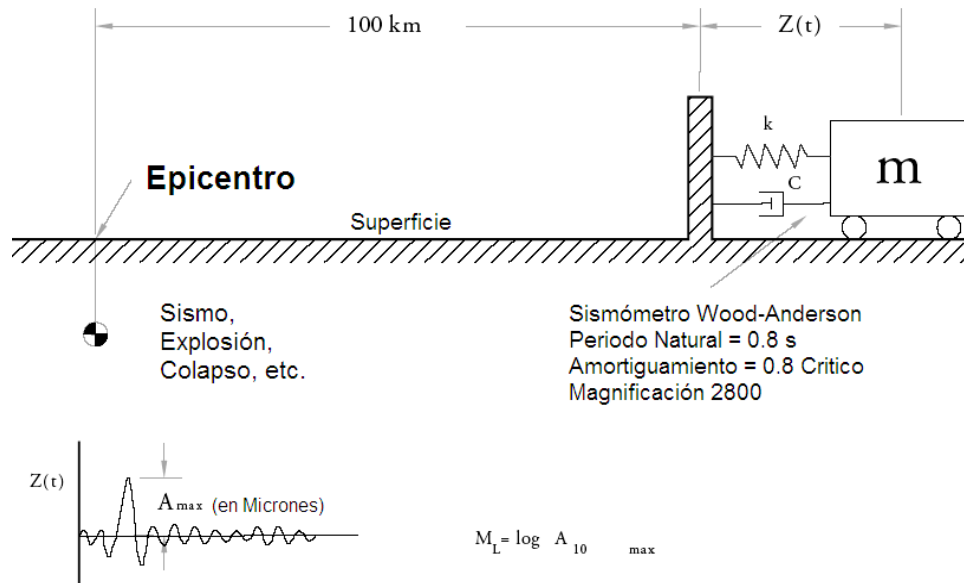
Donde:

$M_L$ : magnitud local (el cual Richter lo definió para el sur de California).

A: es el máximo trazo de amplitud registrado en micrones de medida estandarizada (Wood-Anderson) para períodos cortos de torsión del sismómetro (instrumento con un período natural de 0,8 segundos, valor crítico de amortiguamiento de 0,8, con magnificación de 2 800), ubicado a 100 kilómetros del epicentro.

$A_o$ : valor estandarizado como una función de la distancia, de instrumentos localizados a una distancia comprendida entre 100 y 600 kilómetros.

Figura 24. **Mecanismo de Wood-Anderson, para calcular la energía liberada**



Fuente: LEE, et al. Ingeniería de terremotos. p. 33.

Como consecuencia, el valor de otras magnitudes deben ser definidas, dentro de ellas:

- $M_s$ : Magnitud de la onda superficial (*surface wave magnitude*)
- $m_b$ : Magnitud de la onda interna, período corto (*body wave magnitude*)
- $M_w$ : Magnitud del momento (*moment magnitude*)

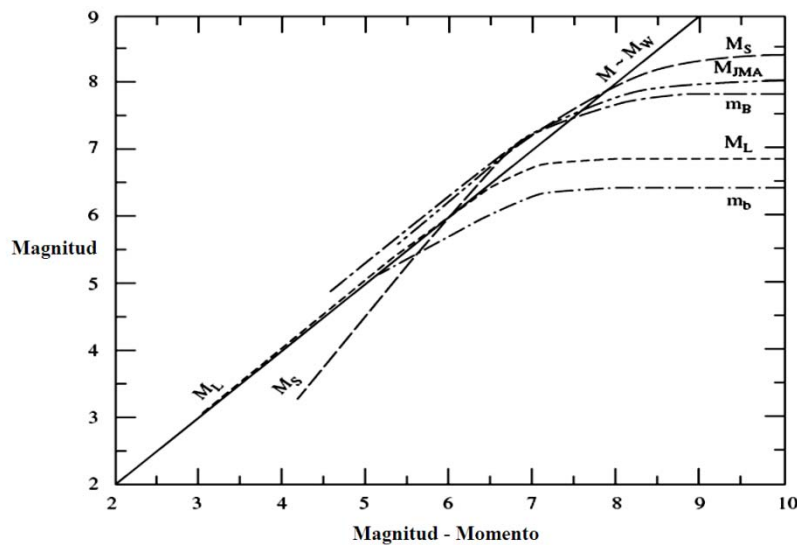
Debido al hecho que  $M_L$  está definido como un valor para California (para eventos registrados por instrumentos de estaciones de control, dentro de un radio de 600 kilómetros), el valor de  $M_s$  es similar a  $M_L$ , observación de la superficie de onda para un período de 20 segundos.

La relación empírica de Richter, está definida sobre la base de la amplitud de desplazamiento del suelo, que se relaciona con la energía total liberada de onda:  $\log_{10} E_s = 11,8 + 1,5M_s$ , donde:

$E_s$ : energía total en ergios

Existen otras formas de calcular la magnitud de los terremotos (Gutenberg y Richter, 1956), (Hanks y Kanamori, 1979), entre ellos hay diferentes escalas que pueden ser usadas para definir la magnitud. La magnitud de la escala comúnmente usada es desarrollada como la relación de atenuación, del momento ( $M$  o  $M_w$ ), magnitud local ( $M_L$ ), magnitud logarítmica ( $m_{Lg}$  o  $m_N$ ) y magnitud  $J_{apan}$   $M_{eteorological}$   $A_{gency}$  ( $M_{JMA}$ ):

Figura 25. **Relación entre momento y varias escalas de magnitud**



Fuente: CAMPBELL, Knight. Earthquake spectra. p. 9.



#### **1.6.1.1. Módulo de corte de la corteza del epicentro**

Los modelos matemáticos basados en el desplazamiento (slip) de la falla en la superficie de la corteza se toman como un medio elástico, concepto planteado por Aki, en 1966; resulta ser una manera equivalente del desplazamiento elástico y la acción de un par (fuerzas paralelas) como un medio para medir físicamente la acción de un sismo. Proponiendo como valor constante el módulo de ruptura ( $\mu$ ) =  $3,3 \times 10^{11}$  dinas/cm<sup>2</sup> en mantos rocosos. (Brune, 1970) da un valor de ( $\mu$ ) =  $3,3 \times 10^{11}$  dinas/cm<sup>2</sup>. Hiroo Kanamori utilizó en Guatemala para el terremoto de 1976, un valor de ( $\mu$ ) =  $3,5 \times 10^{11}$  dinas/cm<sup>2</sup>. La energía medida en ergios (erg) es una fuerza por longitud, lo que equivale a un momento, 1 erg = dina·cm.

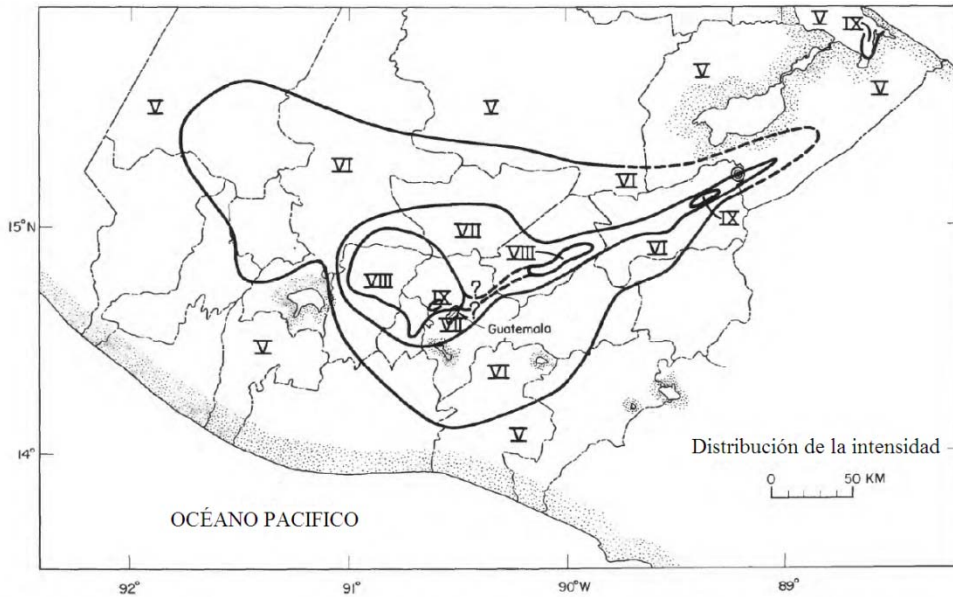
#### **1.6.2. Intensidad**

Es una medida subjetiva de los efectos de un sismo; se refiere al grado de destrucción causado por un sismo en un sitio determinado, que generalmente es mayor en el área cercana al epicentro, como se muestra en la figura 26. La escala adoptada más ampliamente es la de Mercalli modificada y se denota por MM, que tiene doce grados identificados por los números romanos del I al XII. En la tabla I se da una descripción detallada de esta escala de intensidad.

#### **1.6.3. Mapas de isosistas**

Una vez se ha determinado la intensidad en diferentes lugares, es posible definir un mapa de isosistas en el cual se dibujan contornos de áreas afectadas por la misma intensidad. Rutinariamente, estos mapas se evalúan con posterioridad a la ocurrencia de sismos importantes. A modo de ejemplo, en la figura 26 se presenta el mapa de isosistas del sismo en Guatemala 1976.

Figura 26. **Mapa de isosistas, intensidad de Mercalli modificada del sismo de Guatemala 1976**



Fuente: ESPINOSA, A. F. et al. The Guatemalan earthquake of february 4, 1976. p. 60.

#### 1.6.4. **Relación entre escala de intensidad y medida**

Para llevar a cabo un análisis realista del comportamiento de estructuras sometidas a sismos, el ingeniero debe conocer suficientes características dinámicas del movimiento del suelo, que son obtenidas con la ayuda de acelerómetros, y la falta de estos, supone la carencia de registros de aceleración, fundamentales para el análisis estructural sísmico. Por esta razón y con el afán de deducir valores útiles para diseño, aun a partir de intensidades referidas a escalas subjetivas, se han desarrollado diversos estudios que correlacionan los valores de intensidad en diversas escalas, con las características dinámicas de los sismos como la velocidad y aceleración del suelo, que tienen la ventaja de ser magnitudes instrumentales.

Tabla I. **Escala de intensidad Mercalli modificada**

<b>Medida de Intensidad Acel. Máx. Suelo (% g)</b>	<b>Grado Sísmico</b>	<b>Efectos sobre las personas, objetos y construcciones</b>
0,001 g	I	El sismo lo sienten unas pocas personas en circunstancias excepcionalmente favorables.
0,002 g	II	Lo sienten las personas en reposo, en los pisos superiores o favorablemente situadas.
0,005 g	III	Se siente en el interior de los edificios y especialmente en las plantas superiores; los objetos colgantes se mecen; se puede estimar la duración.
0,015 g	IV	Los carros estacionados se mecen; las ventanas, la vajilla y las puertas vibran; en el rango más alto de IV los muros y marcos de madera crujen.
0,030 g	V	Se siente en el exterior de los edificios; los objetos pequeños e inestables se desplazan o se vuelcan; los relojes de péndulo se detienen.
0,061 g	VI	Lo sienten todas las personas; muchos se asustan y corren al exterior; los enyesados caen, las chimeneas sufren averías; los árboles y arbustos se agitan.
0,132 g	VII	Es difícil estar de pie; oleaje en los estanques; el agua se enturbia con fango; averías ligeras y hasta moderadas en las estructuras normales; averías importantes en los edificios mal contruidos.
0,306 g	VIII	Averías ligeras en las construcciones antisísmicas; averías considerables en las construcciones normales; caen las chimeneas y estatuas; fallan columnas; grietas en el terreno húmedo y en las pendientes muy empinadas.
0,637 g	IX	Pánico general; averías de importancia en estructuras antisísmicas; caen las estructuras mal ejecutadas; se rompen las tuberías subterráneas; aparecen grietas en la superficie terrestre.
1,121 g	X	La mayoría de las construcciones antisísmicas son destruidas; grandes deslizamientos de tierra; los rieles se doblan ligeramente.
2,548 g	XI	Las tuberías subterráneas se destruyen completamente; los rieles se doblan mucho; aparecen fallas en la superficie de la tierra.
>3,567 g	XII	Destrucción total; se desplazan grandes masas de rocas; objetos arrojados al aire; se observan las ondas sísmicas en la superficie de la tierra.

Fuente: BELES, Aurel. et al. Elementos de ingeniería sísmica. p. 65.

En la tabla I se expone como medida de intensidad la aceleración máxima del suelo y como escala de intensidad la de Mercalli modificada; las cuales han sido correlacionadas.

Es necesario señalar que las apreciaciones de las aceleraciones están basadas en la experiencia de quien propuso la correlación, basándose principalmente en observaciones de eventos sísmicos pasados y ensayos de laboratorio que permitieron correlacionar las roturas producidas en diferentes modelos a escala, contruidos sobre mesas vibrantes con las aceleraciones en ellas aplicadas. De este modo se puede hacer una analogía entre los daños de los modelos contruidos a escala, con el nivel del daño en las estructuras reales, especificados en grados de intensidad según sea la escala utilizada, y relacionándolos con la aceleración correspondiente que los provocó.

### **1.7. Actividad sísmica de una región**

Debido a que el riesgo sísmico de un proyecto depende de la actividad sísmica de la región, debe realizarse una evaluación previa de esta. Las fuentes de estos antecedentes pueden ser las autoridades locales, ingenieros, sismólogos y otros. Sin embargo, los datos disponibles en muchas regiones son escasos o bien no muy confiables, por lo cual la literatura especializada recomienda realizar un estudio básico de la sismicidad del área de interés, que comprende los siguientes puntos:

- Geología regional
- Preparación de mapas de eventos sísmicos
- Estudios de deformación – liberación de energía
- Estudios de probabilidad sísmica

Mediante un conjunto apropiado de datos, pueden hacerse varios estudios de probabilidad, usando métodos estadísticos estándar para estimar parámetros de diseño. Uno de los más valiosos consiste en estimar el mayor sismo probable que podría ocurrir cerca del sitio durante la vida de la estructura que está diseñándose, es decir períodos de retorno para la magnitud y aceleración de las cargas sísmicas de diseño.

### **1.8. Algunos efectos de los sismos**

Los sismos producen diversos efectos en regiones sísmicamente activas. Ellos pueden ocasionar la pérdida de gran cantidad de vidas humanas, y ser los causantes del colapso de muchas estructuras tales como edificios, puentes, presas, etc. Otro efecto destructivo de los sismos es la generación de olas de gran tamaño, comúnmente causadas por temblores de las placas bajo cuerpos acuáticos (maremotos). Estas olas son también llamadas Tsunami, las cuales al llegar a la costa pueden causar la destrucción de poblaciones enteras.

Figura 27. **Costa de la isla de Sumatra**



Fuente: CORZO, Mario. Base sismológica de Guatemala. p. 13.

En la figura anterior, quizás quien obtuvo la impresionante imagen del tsunami (la ola mide 32 m), dejó de existir pocos segundos después de accionar el disparador de la cámara. La licuefacción de suelos es otro peligro sísmico, cuando el suelo es sometido al choque de ondas sísmicas puede perder toda su capacidad portante, y se comporta, para tal efecto, como arena movediza. Los edificios que están sobre estos materiales han sido literalmente tragados.

**Figura 28. Licuefacción sismo de Niigata, Japón, 16 de junio de 1964  
(M=7.5)**



Fuente: GOYTIA, Ivan y VILLANUEVA, Rolando. Ingeniería antisísmica. p. 16.

El contenido de agua del suelo es un factor importante en la respuesta del sitio, debido a que el sismo produce la licuefacción de suelos no cohesivos saturados; cuando estos suelos están sometidos a vibraciones intensas, experimentan un incremento en la presión de poros debido a la redistribución de sus partículas, dando como resultado una reducción en la resistencia al corte del suelo. Esto produce condición rápida en la arena con pérdida de capacidad portante, causando asentamiento y colapso de la estructura.

Figura 29. **Colapso del segundo nivel, edificio del colegio Liceo Javier zona 12**



Fuente: HUSID, Raul et al. The Guatemalan earthquake of february 4, 1976. p. 68.

Figura 30. **Edificio Hotel Terminal, ubicado en Guatemala zona 4**



Fuente: HUSID, Raul et al. The Guatemalan earthquake of february 4, 1976. p. 71.

En la figura 30 se muestra el colapso parcial del Hotel Terminal, causado por la falla de las columnas de concreto reforzado en el tercer nivel, localizado en Guatemala de la Asunción, zona 4.

Se han presentado sólo algunas fotografías del terremoto del 76, pero si se consulta la referencia (Espinosa, 1976) se encuentran gran cantidad de edificios destruidos parcialmente con los detalles del elemento fallido; también otras edificaciones cuya destrucción fue total.

### **1.9. Sismicidad guatemalense**

En 1902, el día 18 de abril a las 20:23:50 hrs. ocurrió un sismo fuerte que ocasionó daños principalmente en Quetzaltenango y Sololá. La magnitud del evento, 7,5. Localización en 14,90 grados de latitud norte, 91,50 grados de longitud oeste, y 60 km de profundidad. El día 8 de marzo de 1913, a las 08:55 hrs., tuvo como principal acontecimiento la destrucción de Cuilapa, cabecera departamental de Santa Rosa, donde se reportaron muchas víctimas. Es importante mencionar que este y otros eventos sucedidos en los fallamientos del norte, son de poca profundidad (5 a 6,5 km). No se tiene localización exacta del epicentro.

El 27 de noviembre de 1917 se hizo sentir un fuerte evento en las proximidades de la capital, en el municipio de Villa Nueva. Según información de los diarios de la época, la actividad se continuó percibiendo en los días subsiguientes; hasta que el día 26 de diciembre a las 05:21 hrs. destruyó en gran parte el centro de la capital y las proximidades. El 4 de enero de 1918, a las 04:30:10 y 04:32:25 hrs., dos nuevos eventos sacudieron la ciudad. El final de la fuerte actividad lo marcó el 24 de enero, aproximadamente a las 07:30 hrs. Este último reportó bastantes daños.



El día 6 de agosto de 1942 a las 23:36:98 hrs. se registró el terremoto de mayor magnitud hasta la fecha  $M_s = 8,3$ . Tuvo localización en 13,9 grados latitud norte y 90,8 grados longitud oeste. La profundidad fue de 60 km y reportó daños en los siguientes departamentos: Guatemala, Quiché, Sacatepéquez, Chimaltenango, San Marcos, Totonicapán, Sololá, Escuintla, Huehuetenango, Santa Rosa, Chiquimula, Alta y Baja Verapaz. El día 20 de febrero de 1959, a las 18:16:33 hrs. tuvo localización en 15,94 grados latitud norte y 90,59 grados longitud oeste, la profundidad fue de 48 km; el evento presentó los estragos más importantes en el departamento de El Quiché.

El terremoto de 1976, fue registrado el día 4 de febrero a las 03:03:33 hrs., localizado en 15,32 grados latitud norte y 89,10 grados longitud oeste, de características superficiales, alrededor de 5 km de profundidad y magnitud  $M_s = 7,5$  grados. Los efectos de la ruptura fueron desastrosos; se registraron mediciones de desplazamiento horizontal de más de 3,00 m en algunas partes a lo largo de la falla, se crearon aceleraciones muy altas y se activó el sistema de fallas de Mixco. Lo más lamentable fueron las miles de vidas que se perdieron, la tabla II resume lo expuesto.

En 1985, en Uspantán, Quiché, se registró un sismo el 11 de octubre a las 03:39:17 hrs. Se considera característico de las fallas del norte, fue superficial (5 km de profundidad), localizado en 15,3 grados latitud norte y 90,9 grados longitud oeste, magnitud  $M_s = 5,0$  grados. El 18 de septiembre de 1991 a las 03:48:13 se produjo un evento sísmico superficial en Pochuta; profundidad focal: 32 km de 5,3 grados de magnitud, en la región sur-oeste de Chimaltenango, epicentro:  $14^{\circ} 24.12'N$ ,  $91^{\circ} 03.06'W$ . Registrándose una intensidad máxima de VII MM en la zona de mayor desastre. Posterior al evento principal se desarrolló un enjambre sísmico que en las primeras 24 horas registró por lo menos 436 réplicas oscilando entre 0,6 y 4,0.

Tabla II. **Victimas y daño, por departamento**

<b>Departamento</b>	<b>Población</b>	<b>Muertes</b>	<b>Heridos</b>	<b>Porcentaje de daño</b>
Guatemala	1 681 736	3 370	16 549	68,82
El Progreso	78 364	2 028	7 767	90,43
Sacatepéquez	105 210	1 582	8 855	71,00
Chimaltenango	214 290	13 754	32 392	88,00
Santa Rosa	20 591	40	291	1,60
Sololá	30 707	110	300	10,00
Totonicapán	162 678	27	89	34,00
Quezaltenango	79 241	14	228	1,00
Huehuetenango	34 362	10	50	—
Quiche	150 073	843	5 722	73,00
Baja Verapaz	49 820	152	718	82,50
Alta Verapaz	59 664	18	953	67,50
Izabal	183 370	73	379	40,00
Zacapa	107 148	693	1 998	72,86
Chiquimula	76 603	50	378	50,00
Jalapa	88 802	91	473	31,67
Jutiapa	91 303	13	48	10,00
	$\Sigma$ 3 213 962	$\Sigma$ 22 868	$\Sigma$ 77 190	

Fuente: ESPINOSA, A. F. et al. The Guatemalan earthquake of february 4, 1976. p. 53.

El 19 de diciembre de 1995, en Tukurú a las 14:56:06 hrs. se registró un sismo de magnitud  $M_I = 5,3$  en la escala de Richter, localizado en  $15^{\circ} 30.1' N$ ,  $90^{\circ} 15.4' W$ , a una profundidad de 10 Km. La máxima intensidad reportada fue IV (Cobán, Alta Verapaz) y fue sensible en la ciudad capital, con intensidad III.

El 10 de enero de 1998 a las 02:20:10, se produjo un sismo de magnitud 5,8 Mc en la Escala de Richter, epicentro: 14° 00.13'N, 91° 45.60'W, profundidad focal: 33 km máxima intensidad VII MM.

Este evento inició una serie de réplicas que se extendió hasta el 20 de enero. El evento principal fue seguido de otro, de menor magnitud, a las 02:37:31 hrs; la magnitud de este evento fue de 4,4 Mc en la escala de Richter, epicentro: 14° 14.94'N, 90° 57.12'W profundidad focal: 33 Km máxima intensidad: VI MM.

Todos los eventos sísmicos tuvieron sus epicentros en la zona de subducción, frente a las costas de Retalhuleu y Suchitepéquez.

El 11 de julio de 1999, se produjo un sismo a las 08:14 hrs., localizado en el golfo de Honduras con magnitud 6,1; fue producido por el extremo oriental de la falla del Motagua, la cual en su parte oceánica se denomina fractura de Swan.

El sismo fue reportado sensible en todo el territorio nacional (MMI=IV en la capital, escala internacional Mercalli modificada), Honduras, Belice y la Península de Yucatán (tabla III).

Tabla III. **Reporte de las agencias del sismo 11 de julio de 1999 en el golfo de Honduras**

Agencia	Lat. N.	Lon. O.	Prof. Km.	Mc	MI	Mb	Ms	Mw
GUA	15,890	87,993	10*	6,1				
CASC	15,700	88,260	10*		5,8			6,5
NEIC	15,782	88,330	10*			6,0	6,6	6,7

Fuente: CORZO, Mario. Base sismológica de Guatemala. p. 16.

GUA= INSIVUMEH

CASC= Central America Seismological Center, Costa Rica

NEIC= National Earthquake Information Center, USA.

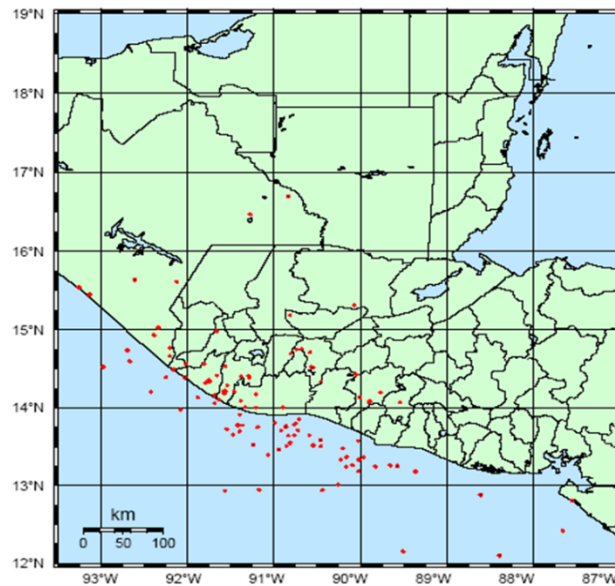
Lat. N.= Latitud norte; Lon. O = Longitud oeste

Prof. km = Profundidad focal en kilómetros

Mc = Magnitud con base en la duración en segundos de la onda S

Para finalizar esta sección se presenta la sismicidad registrada en los meses de julio a septiembre de 2008, donde es interesante notar que hay una región de recurrencia para los movimientos telúricos mostrados en las figuras 31-33, con puntos de color rojo, mayormente en Retalhuleu, Suchitepéquez, Escuintla y Santa Rosa. Se muestra información de sismicidad sólo de tres meses, porque la información de los eventos de magnitud mayor a 5,0 está en los catálogos mundiales; varios de ellos disponibles en internet.

Figura 31. **Sismicidad registrada en julio de 2008**



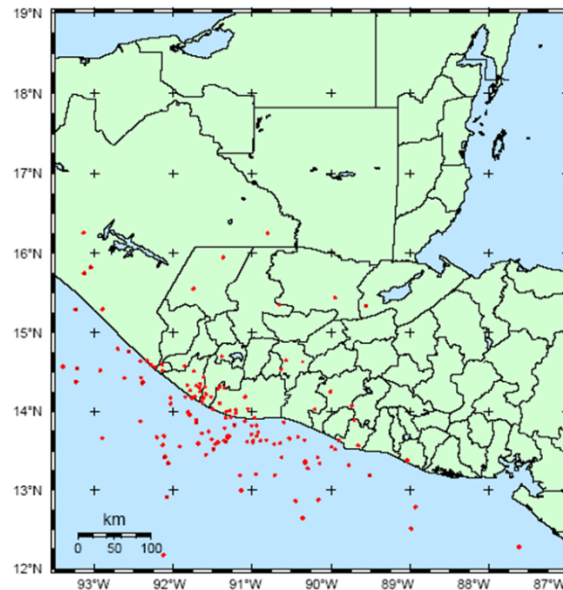
Fuente: CORZO, Mario. Base sismológica de Guatemala. p. 20.

Figura 32. **Sismicidad registrada en agosto de 2008**



Fuente: CORZO, Mario. Base sismológica de Guatemala. p. 21.

Figura 33. **Sismicidad registrada en septiembre de 2008**



Fuente: CORZO, Mario. Base sismológica de Guatemala. p. 21.

Los mapas anteriores fueron extractados del catálogo electrónico USGS-2008 (Corzo, inédito).

## **2. CONCEPTOS GENERALES EN EL ANÁLISIS DINÁMICO**

### **2.1. Introducción**

En este capítulo se presentan las propiedades mínimas de la estructura para su análisis: masa, rigidez y amortiguamiento; se consideran los distintos sistemas de unidades más comunes y algunos conceptos que esclarecen estas propiedades.

### **2.2. Masa, peso y sistema de unidades**

La masa,  $m$ , es una medida de la cantidad de materia. El peso  $W$  es una medida de la fuerza necesaria para impartir una aceleración dada a una masa. En la tierra, al nivel del mar, la aceleración que impone la gravedad del planeta se denomina  $g$  y tiene un valor aproximado de  $9,81 \text{ m/s}^2$  ( $= 9\,806,65 \text{ mm/s}^2$ , por acuerdo internacional, para ser exactos). Por lo tanto el peso  $W$  que tiene una masa  $m$  en la tierra, al nivel del mar, es igual al producto  $W = m g$ .

Por muchos años los ingenieros utilizaron el sistema métrico tradicional, o sistema mks (metro-kilogramo-segundo), cuyas unidades son distancia, fuerza y tiempo. En este último sistema, el kilogramo (kg) es una unidad de peso, correspondiente al peso de un litro de agua al nivel del mar; por esta razón es una unidad de fuerza; muchas veces se denomina kilogramo-fuerza (kgf), o también como kilopondio (kp). La tonelada dentro de este sistema corresponde también a una unidad de fuerza y tiene un valor de 1 000 kgf.

En el sistema SI las unidades son distancia, masa y tiempo. Como unidad de distancia se utiliza el metro (m); como unidad de masa el kilogramo (kg) y como unidad de tiempo, el segundo (s). Dentro de este sistema, la unidad de fuerza es el Newton (N), definido como la fuerza que impone una aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$  a una masa de 1 kg.

La atracción gravitacional de la tierra impone a un cuerpo en caída libre una aceleración  $g$ , cuyo valor varía aproximadamente del orden 0,5 por ciento sobre la superficie de la Tierra, pero que se le ha dado un valor fijo estándar de  $9,806650 \text{ m/s}^2$ . Por lo tanto se requiere una fuerza de 9,806650 N para sostener una masa de 1 kg; esto se conoce como el peso del cuerpo.

Generalmente, la masa de un cuerpo se obtiene pesándolo, o sea comparando la atracción gravitacional de la masa con la de otra conocida por medio de una balanza; de ahí la confusión común entre masa y peso; en general si el kg se relaciona con el peso, entonces se está utilizando el sistema mks y si kg se relaciona con la masa, se está utilizando el sistema SI.

En el sistema de unidades inglés gravitacional, la unidad de fuerza es la libra (lb), la unidad de longitud es el pie (pie) y la unidad de tiempo es el segundo (s). Puesto que la masa es una dimensión secundaria, la unidad de masa, el slug, se define en términos de la Segunda Ley de Newton como  $1 \text{ slug} \equiv 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie}$  y el valor de  $g$  como se definió anteriormente, es de  $32,2 \text{ pie/s}^2$ .

Se han presentado estos sistemas (habiendo varios), por ser de uso común en el país, con el fin de evitar confusión en el uso del sistema SI y en los otros sistemas.



Existen las siguientes reglas aceptadas internacionalmente respecto de la sintaxis que debe emplearse:

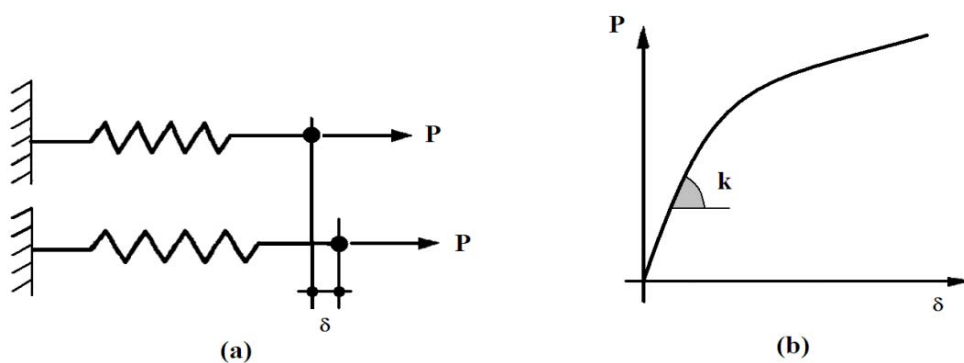
- Nunca se intercambian minúsculas y mayúsculas: mm y no MM
- Los símbolos no se alteran en el plural: kg, y no kgs
- No se deja espacio entre el prefijo y el símbolo: MPa y no M Pa
- No se agrega punto al final del símbolo, a menos que sea el punto final de una oración
- Los símbolos no son abreviaturas, por lo tanto: N y no Nts; m y no mts.
- En los productos de símbolos se utiliza un punto levantado: kN·m
- En los cocientes se utiliza un solo símbolo de división, o pueden utilizarse potencias negativas: kg/(m·s), o  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ , pero no kg/m/s
- Puede utilizarse punto o coma, para indicar los decimales, dependiendo de la costumbre local. Esto significa que ninguno de los dos se debe utilizar para separar grupos de dígitos, para esto se utiliza un espacio: 32 123 102,8
- Para números menores que la unidad, no se omite el cero inicial: 0,123 y no ,123
- Debe haber un espacio entre el número y las unidades: 12,3 mm/s, excepto cuando se trata de grados Celsius: 12°C
- Las unidades cuyo nombre es el apellido de un científico, se emplean con mayúscula: N, Pa, etc., pero cuando se refiere a ellas, no se utiliza la mayúscula: pascales, etcétera

### **2.3. Rigidez**

Todo cuerpo elástico que sea sometido a fuerzas externas, ya sean estáticas o dinámicas, sufre una deformación.

La rigidez se define como la relación entre estas fuerzas externas y las deformaciones que ellas inducen en el cuerpo. El caso más simple corresponde a un resorte helicoidal, como el que se muestra esquemáticamente en la figura 34 (a).

Figura 34. **Relación fuerza-desplazamiento para un resorte**



Fuente: elaboración propia.

La relación entre la fuerza que resiste el resorte y la deformación entre sus extremos tiene la forma mostrada en la figura 34 (b). En general esta relación no es totalmente lineal, pero cuando las deformaciones son pequeñas se puede idealizar como una línea recta.

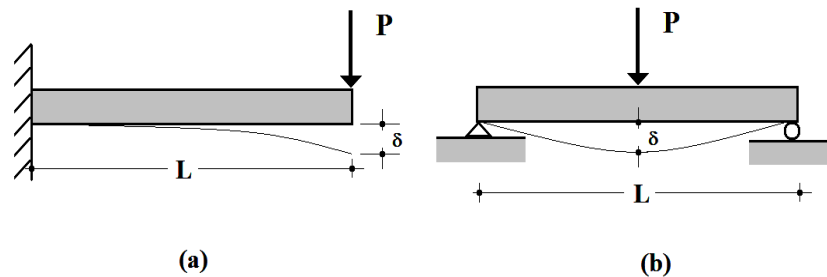
La rigidez es por lo tanto, la relación entre las fuerzas y los desplazamientos y usualmente se denomina por medio de la letra  $k$ . Matemáticamente, se expresa por medio de la siguiente relación:

$$k = \frac{P}{\delta} \quad (2.1)$$

Donde  $P$  es la fuerza y  $\delta$  el desplazamiento o deformación del elemento.

Ejemplo de rigideces de vigas: determinar la rigidez de las vigas mostradas en la figura 35:

Figura 35. **Viga en voladizo y simplemente apoyada**



Fuente: elaboración propia.

Solución: el enunciado del ejemplo es general, por tanto conviene considerar la ecuación (2.1) más detenidamente, obviamente para que estas ecuaciones sean válidas se sigue a Hooke y se está en el rango elástico; conviene preguntarse ¿la rigidez de qué depende?... quizá se llegue por la ecuación (2.1) a la conclusión, “la rigidez está en función de la carga (tipo y magnitud) y de la deformación que esta produce”. Esa respuesta es válida e implica que la rigidez varía a lo largo del elemento, no obstante aquí se busca lo óptimo.

Todo elemento tiene una rigidez límite y por tanto, dada la geometría y carga al elemento, ha de encontrarse la deformación máxima que esta produce, para asignarle por seguridad la rigidez mínima al elemento.

Las reacciones en el empotramiento por la carga son: un momento con dirección antihorario con magnitud  $PL$  y una fuerza vertical cortante hacia arriba de magnitud  $P$ .

La deformación puede encontrarse empleando variedad de métodos como el de la doble integración, área de momentos, flechas por superposición, método de energía, método de los tres momentos, el teorema de Castigliano, métodos matriciales etc. En general, se debe utilizar el que más convenga. Utilizando el método de la doble integración con la deformación positiva hacia abajo se obtiene:

$$EI\ddot{y}_{(u)} = PL - Pu \equiv P(L - u)$$

$$EI\dot{y}_{(u)} = -\frac{1}{2}P(L - u)^2 + c_1$$

La pendiente de la elástica en el soporte es cero, esto es  $\dot{y}_{(0)} = 0$

$$-\frac{1}{2}PL^2 + c_1 = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{2}PL^2$$

$$EIy_{(u)} = \frac{1}{6}P(L - u)^3 + c_1u + c_2$$

La deflexión en el empotramiento es nula, esto es  $y_{(0)} = 0$

$$\frac{1}{6}PL^3 + c_2 = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{6}PL^3$$

Por tanto la ecuación de la elástica es:

$$EIy_{(u)} = \frac{1}{6}P(L - u)^3 + \frac{1}{2}PL^2u - \frac{1}{6}PL^3$$

Se le llamará  $\delta$  a la deflexión máxima, que se da en el extremo izquierdo, esto es,  $y_{\max} = y_{(L)} = \delta$

$$EI\delta = \frac{1}{2}PL^3 - \frac{1}{6}PL^3 \equiv \frac{1}{3}PL^3 \quad \rightarrow \quad \delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

Sustituyendo este valor en (2.1) se obtiene la rigidez buscada.

$$\mathbf{k} = \frac{3EI}{L^3}$$

Por simetría para esta viga, la deformación máxima se da en el centro; para vigas similares, aunque no haya simetría, puede tomarse el centro como el lugar donde se produce la deflexión máxima, el error es insignificante. Por tanto la ecuación diferencial siguiente es válida sólo hasta la mitad del elemento; las reacciones son  $1/2P \uparrow$  con la flecha  $+ \downarrow$ .

$$EI\ddot{y}_{(u)} = -\frac{1}{2}Pu$$

$$EI\dot{y}_{(u)} = -\frac{1}{4}Pu^2 + c_1$$

La pendiente de la elástica en el centro es cero, esto es,  $\dot{y}_{(L/2)} = 0$

$$-\frac{1}{4}P\frac{L^2}{4} + c_1 = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{16}PL^2$$

$$EIy_{(u)} = -\frac{1}{12}Pu^3 + c_1u + c_2$$

La deflexión en el apoyo es nula, esto es  $y_{(0)} = 0$ , por tanto  $c_2 = 0$ . Por tanto la ecuación de la elástica es:

$$EIy_{(u)} = -\frac{1}{12}Pu^3 + \frac{1}{16}PL^2u$$

Como antes  $\delta$  es la deflexión máxima en el centro,  $y_{\max} = y_{(L/2)} = \delta$

$$EI\delta = -\frac{1}{12}P\frac{L^3}{8} + \frac{1}{16}PL^2\frac{L}{2} \equiv \frac{1}{48}PL^3 \quad \rightarrow \quad \delta = \frac{PL^3}{48EI}$$

Sustituyendo este valor en (2.1) la rigidez es:

$$\mathbf{k} = \frac{48EI}{L^3}$$

Es claro que en ambos casos, teniendo el mismo elemento se obtienen rigideces diferentes; en el segundo caso, por las condiciones de apoyo se aumento la rigidez 16 veces. Es visión del ingeniero disponer los elementos de la forma que más convenga, sólo como ejemplo, empotrar columnas de acero es sumamente caro y a veces no necesario, aumentar la rigidez no siempre es solución, generalmente el elemento muy rígido tiende a tener comportamiento frágil, prefiriéndose la ductilidad.

La rigidez depende fundamentalmente, dado un elemento, de la carga y las condiciones de apoyo; la deformación va implícita en ellos. Por ejemplo una viga como la (b) pero empotrada en ambos extremos tiene una rigidez de  $192EI/L^3$ , empotrada en uno y simplemente apoyada en otro  $768EI/7L^3$ .

#### **2.4. Amortiguamiento**

En general, todo cuerpo en movimiento tiende a disminuir con el tiempo. La razón de esta disminución está asociada con una pérdida de la energía presente en el sistema.

Esta pérdida de energía es producida por fuerzas de amortiguamiento o fricción que actúan sobre el sistema. La energía, ya sea cinética o potencial, se transforma en otras formas de energía tales como calor o ruido.

### 2.4.1. Amortiguamiento viscoso

Un cuerpo que se encuentra en movimiento dentro de un fluido tiende a perder energía cinética debido a que la viscosidad del fluido se opone al movimiento. Esta pérdida de energía cinética está directamente asociada con la velocidad del movimiento. La descripción matemática del fenómeno de amortiguamiento viscoso es la siguiente:

$$F_a = c\dot{u}$$

donde:

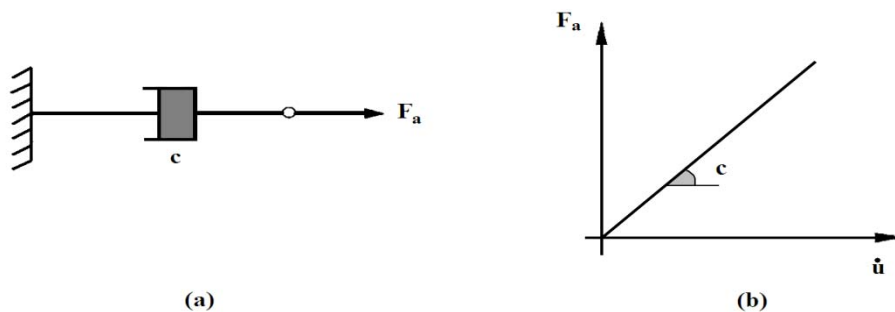
$F_a$ : fuerza del amortiguador (en escritura inglesa es  $F_D$  *damped force*)

$c$ : coeficiente del amortiguador

$\dot{u}$ : velocidad relativa entre los dos extremos del amortiguador

En general se representa por medio del diagrama de la figura 36 (a), como los amortiguadores utilizados en los automóviles, los cuales son amortiguadores viscosos, pues producen un efecto de amortiguamiento al forzar el paso de un fluido viscoso a través de unos orificios en el émbolo de un pistón de acción doble.

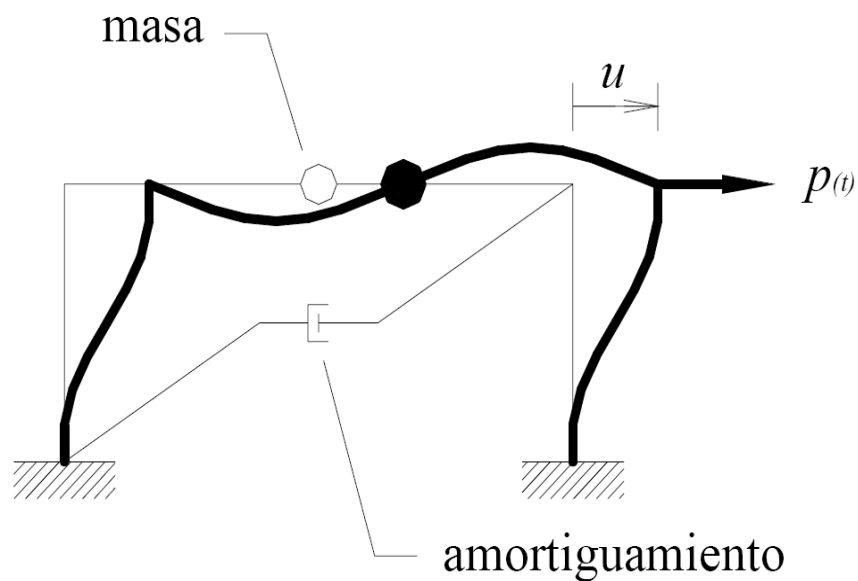
Figura 36. Relación fuerza-velocidad para un amortiguador viscoso



Fuente: elaboración propia.

El amortiguamiento viscoso se presta para una descripción matemática simple que permite resolver las ecuaciones diferenciales de movimiento de un sistema dinámico sin mayor problema, se muestra una estructura idealizada con amortiguamiento viscoso (figura 37).

Figura 37. **Estructura idealizada con amortiguamiento viscoso**



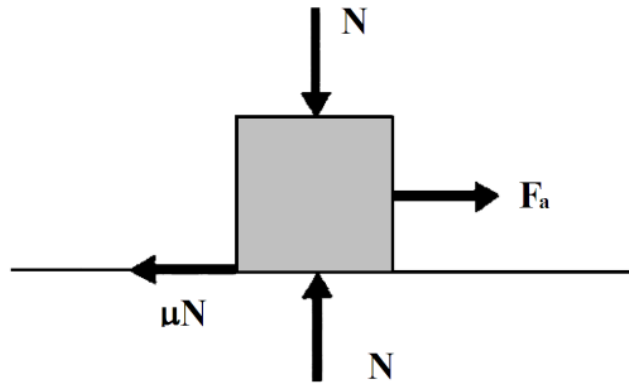
Fuente: CHOPRA, Anil K. *Dynamics of structures*. p. 7

#### 2.4.2. Amortiguamiento de Coulomb

Corresponde al fenómeno físico de fricción entre superficies secas. La fuerza de fricción es igual al producto de la fuerza normal a la superficie  $N$ , y el coeficiente de fricción,  $\mu$ .



Figura 38. **Amortiguamiento de Coulomb**



Fuente: elaboración propia.

Se supone que el amortiguamiento de Coulomb es independiente de la velocidad del movimiento, una vez este se inicia. Siempre se opone al movimiento, por lo tanto tiene el signo contrario al de la velocidad.

Su tratamiento matemático no puede realizarse por medio de funciones continuas, debido a que depende del signo de la velocidad, lo que introduce complejidad a la solución.

### **2.4.3. Amortiguamiento histerético**

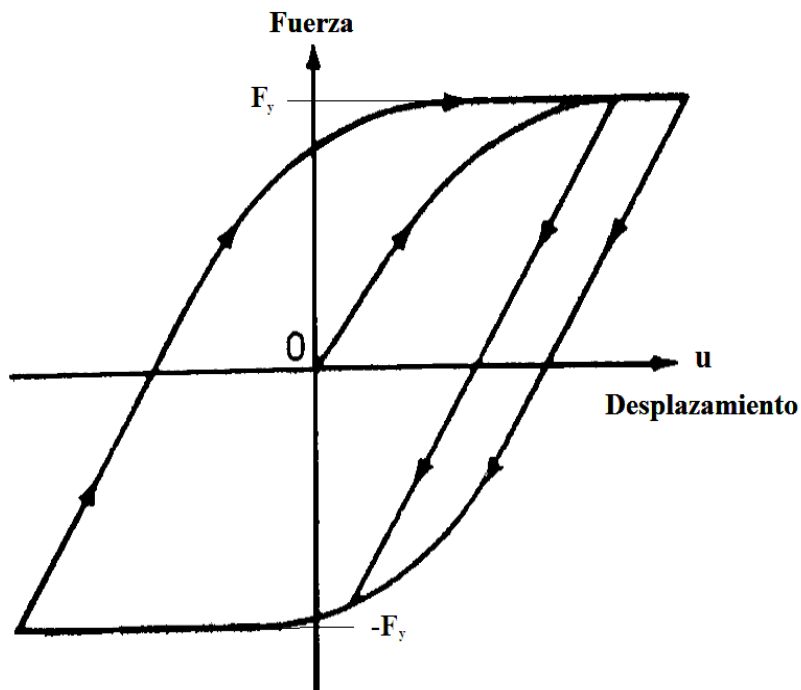
La histéresis es un fenómeno por medio del cual dos o más propiedades físicas se relacionan de una manera que dependen de la historia de su comportamiento previo.

Este tipo de amortiguamiento se presenta cuando un elemento estructural es sometido a inversiones en el sentido de la carga aplicada cuando el material del elemento se encuentra en el rango inelástico o no lineal.

El hecho de que la curva de carga tenga una trayectoria diferente a la curva de descarga, conduce a que no toda la energía de deformación acumulada en el elemento se convierta en energía cinética en el ciclo de descarga. Dependiendo del tipo de material, la forma tanto de la curva de carga como la de descarga varía.

A modo ilustrativo, en la figura 39 se muestra el comportamiento, en términos de fuerza-deformación, de un elemento estructural construido con un material inelástico durante unos ciclos de carga y descarga, incluyendo reversión del sentido de las fuerzas aplicadas.

Figura 39. **Curva fuerza-deformación para un material inelástico**

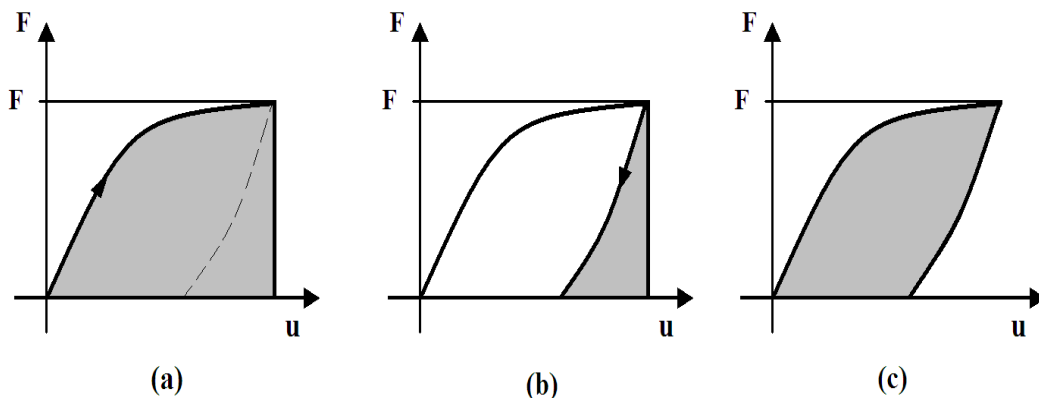


Fuente: Paz, Mario. Dinámica estructural. p. 171.

En la figura 39, se ilustra que a partir de la fuerza de fluencia  $F_y$  hay deformación, sin que se presente un aumento en la fuerza. Una vez se invierte el movimiento, se inicia el ciclo de descarga, y el material reacciona de una manera diferente a cuando fue cargado, hasta que llega a la fluencia en el lado opuesto,  $-F_y$ .

La acumulación de energía de deformación corresponde al área bajo la curva de carga, figura 40 (a). Cuando el sistema descarga la energía que el sistema transfiere para convertirse en energía cinética, corresponde al área bajo la curva de descarga, figura 40 (b). La diferencia entre las dos áreas se refiere a energía disipada por el sistema y que se convierte en calor, ruido u otros tipos de energía, figura 40 (c).

Figura 40. **Disipación de energía en un sistema inelástico**



Fuente: elaboración propia.

Aunque en algunos casos el comportamiento histerético de los elementos estructurales puede describirse por medio de modelos relativamente simples como el modelo elastoplástico sección (7.3.1), en la gran mayoría de los casos, hay necesidad de recurrir a modelos matemáticos más complejos.

## 2.5. Grados de libertad

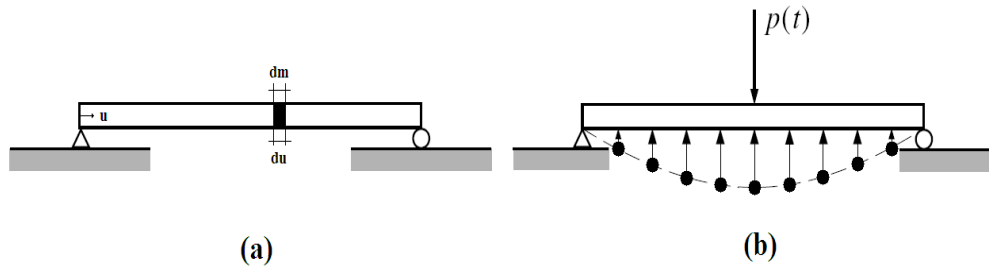
En dinámica estructural, el número de coordenadas independientes necesario para especificar la configuración o posición de un sistema en cualquier instante de tiempo, se conoce como el número de grados de libertad. Toda estructura continua tiene un número infinito de grados de libertad. Sin embargo, el proceso de selección o idealización de un modelo matemático apropiado permite reducir los grados de libertad a un número discreto y en algunos casos a uno solo.

Cuando se trata de sistemas rígidos, en los cuales no puede haber desplazamiento relativo entre las partículas de masa, las propiedades de la masa se pueden describir referidas a su centro de masa; en el sistema dinámico de un marco simple, su masa se simplifica a un punto figura 37. Esto conduce a lo que se conoce como sistemas de masa concentrada.

Cuando la masa hace parte de un elemento flexible se tiene un sistema de masa distribuida (y por consiguiente se puede hablar) de un número infinito de grados de libertad.

Para describir la posición de cada uno de estos elementos diferenciales de masa se necesita un número infinito de grados de libertad, figura 41 (a). Este mismo caso se puede visualizar acumulando porciones de la masa en algunos puntos escogidos y tratándolas allí como varias masas concentradas, tal como se muestra en la figura 41 (b).

Figura 41. Grados de libertad



Fuente: elaboración propia.

La cantidad de lugares donde se concentre la masa va a depender de la precisión que se requiera en la solución del problema y de otros factores que se harán evidentes más adelante. Los sistemas de masa concentrada, en la medida que el número de puntos donde esta se concentre se haga mayor, tienden en el límite a convertirse en sistemas continuos.



### **3. VIBRACIÓN LIBRE**

#### **3.1. Introducción**

El análisis de vibraciones es un tema muy amplio al cual se han dedicado estudios completos; esta introducción expone de forma resumida algunos aspectos teóricos de las vibraciones de los sistemas elásticos. El estudio de las vibraciones se refiere a los movimientos de los cuerpos y a las fuerzas asociadas con ellos. Todos los cuerpos que poseen masa y elasticidad, son capaces de vibrar. Una vibración mecánica es el movimiento de una partícula o cuerpo que oscila alrededor de una posición de equilibrio.

La mayoría de las máquinas y estructuras experimentan vibraciones hasta cierto grado, por lo que su diseño requiere la consideración de este efecto dinámico, debido a que ocasiona un aumento en los esfuerzos y tensiones.

Una vibración se produce cuando el sistema en cuestión es desplazado desde una posición de equilibrio estable; el sistema tiende a retornar a dicha posición bajo la acción de fuerzas de restitución elástica o gravitacional, moviéndose de un lado a otro hasta alcanzar su posición de equilibrio.

El intervalo de tiempo necesario para que el sistema efectúe un ciclo completo de movimiento se llama período de vibración; el número de ciclos por unidad de tiempo define la frecuencia y el desplazamiento máximo del sistema desde su posición de equilibrio; se denomina amplitud de vibración.

Los sistemas oscilatorios pueden clasificarse como lineales o no lineales. Para los sistemas lineales rige el principio de superposición y las técnicas matemáticas para su tratamiento están bien desarrolladas (Ley de Hooke).

Por el contrario, las técnicas para el análisis de sistemas no lineales son más complicadas y no muy conocidas.

Existen dos clases de vibraciones, las libres y las forzadas. Cualquier sistema elástico puede tener una vibración libre a consecuencia de un impulso inicial, donde el movimiento es mantenido únicamente por las fuerzas de restitución inherentes al mismo.

El sistema bajo vibración libre vibrará en una o más de sus frecuencias naturales, dependientes de la distribución de su masa y rigidez.

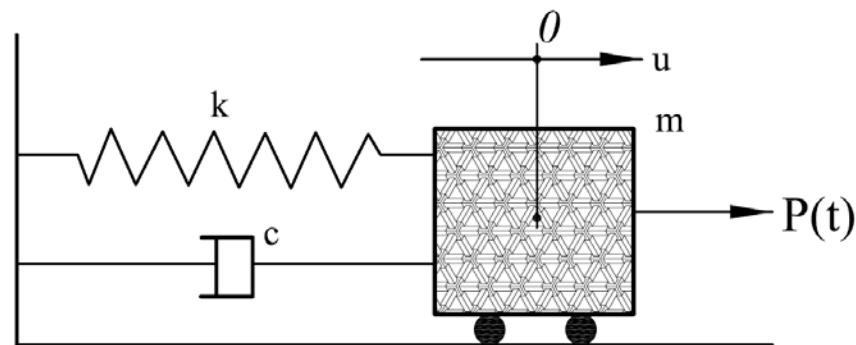
Cuando al sistema se le aplican fuerzas perturbadoras externas, el movimiento resultante es una vibración forzada. Cuando la excitación es oscilatoria, ya sea periódica o no, como la de un sismo, el sistema es obligado a vibrar a la frecuencia de excitación, si esta coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, se produce resonancia; en este estado tienen lugar oscilaciones peligrosamente grandes; así la falla por resonancia de estructuras como puentes o edificios es una dramática posibilidad que debe tenerse muy en cuenta como el colapso del puente colgante Tacoma Narrows. Por este motivo, el cálculo de las frecuencias naturales de vibración es de gran importancia en el diseño sísmico de estructuras.

Se mencionó que en el proceso de idealización matemática los grados de libertad de una estructura pueden reducirse a un número discreto.



Si se considera el marco de la figura 37, para su análisis estático es suficiente considerar tres grados de libertad referidos a los nodos (desplazamiento lateral y dos rotaciones); pero cuando se encuentra en movimiento horizontal debido a una fuerza en esa dirección, la masa suele concentrarse en el nivel superior como se muestra en la misma figura 37 y entonces el sistema se reduce a una estructura de simple grado de libertad SDF (*Single-Degree-of-Freedom System*), que es el desplazamiento lateral. Estos sistemas con un grado de libertad pueden ser representados convenientemente por el modelo matemático que aparece en la figura 42.

Figura 42. **Idealización de un sistema a un solo grado de libertad**



*Sistema lineal amortiguado*

Fuente: elaboración propia.

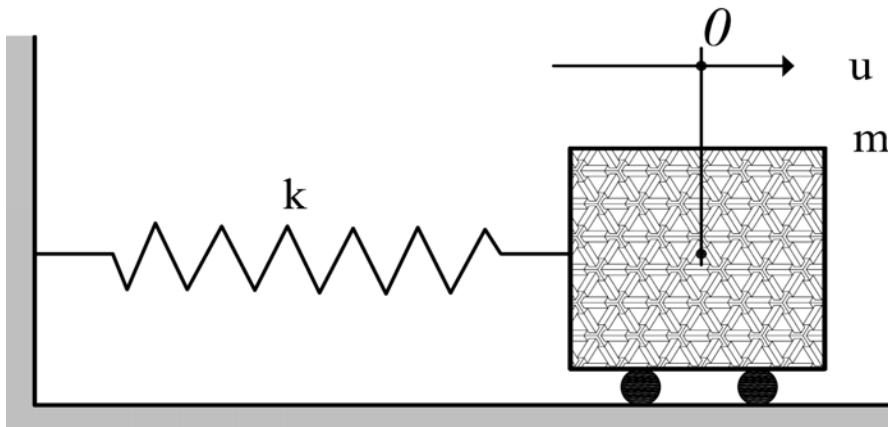
### 3.2. Vibración libre no amortiguada

Se inicia con el análisis de un sistema simple y fundamental, el sistema con un grado de libertad en el cual se “ignoran” o desprecian las fuerzas de amortiguación.

Se va a considerar además, se va a considerar a este sistema libre de la acción de fuerzas exteriores durante su movimiento vibratorio (figura 43).

En estas condiciones, el sistema en movimiento estaría gobernado sólo por la influencia de las llamadas “condiciones iniciales”, o sea el desplazamiento y la velocidad especificados, en el instante  $t = 0$ , cuando se inicia el estudio del sistema. Este sistema con un grado de libertad se conoce como oscilador simple sin amortiguación. Habitualmente se representa como se muestra en la figura 43, o en otra forma similar que sea dinámicamente equivalente.

Figura 43. **Vibración libre sin amortiguación**



Fuente: elaboración propia.

La ecuación que representa el movimiento de un sistema lineal SDF sin amortiguamiento y que no está sometido a la acción de una fuerza externa es:

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (3.1)$$

La ecuación característica es:  $mr^2 + k = 0 \rightarrow r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$  por tanto la

solución está dada por:  $u(t) = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$  con la sustitución

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.2)$$

resulta

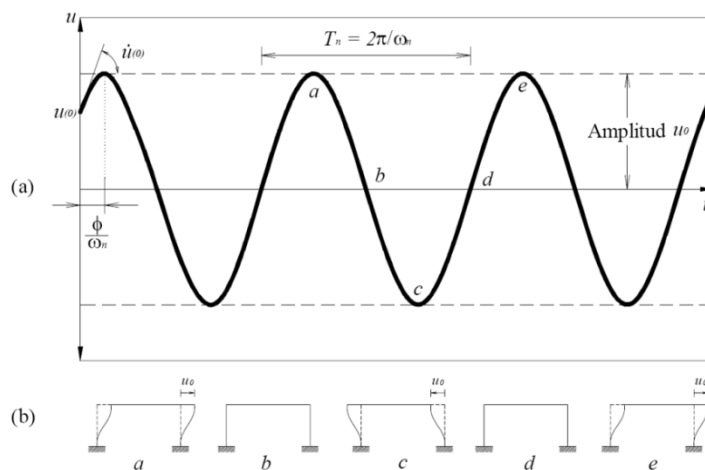
$$u(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t$$

donde  $\omega_n$  es la “frecuencia natural” del sistema. Las constantes  $A$  y  $B$  se hallan a partir de las condiciones iniciales:  $u(0)$  y  $\dot{u}(0)$ , el desplazamiento y la velocidad iniciales respectivamente. Obteniéndose por lo tanto:

$$u(t) = u(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (3.3)$$

La figura 44 (a) y (b), ilustran el movimiento de la masa durante la vibración libre del sistema para la ecuación (3.3).

Figura 44. **Vibración libre de un sistema sin amortiguamiento**



Fuente: CHOPRA, Anil K. Dynamics of structures. p. 36.

Las unidades de la frecuencia natural son radianes por segundo (rad/s), que son las unidades circulares que surgen de manera natural al medir el ángulo que barre un arco; no obstante, para ser más entendible, se suele expresar en ciclos por segundo (hertz) o revoluciones por minuto (rpm). Puesto que  $2\pi$  radianes equivalen a un ciclo, una revolución, una vuelta o un ir y venir, es decir donde la figura 44 vuelve a repetirse respecto de un punto, el  $a$  por ejemplo hasta el  $e$ ; puede llamarse  $f_n$  a la frecuencia más entendible y al multiplicarla por un factor unitario  $\frac{1 \text{ ciclo}}{2\pi \text{ rad}} = 1$ , se obtiene:

$$f_n = \omega_n \frac{\text{rad}}{\text{s}} * \frac{1 \text{ ciclo}}{2\pi \text{ rad}}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \tag{3.4}$$

Las unidades de (3.4) están expresadas en hertz o ciclos por segundo, por esa razón a  $f_n$  se le llama “frecuencia natural cíclica”, es decir cuántas veces se repite el ciclo  $a - e$  (de la figura 44), en un segundo. Es muy importante el concepto de la inversa de  $f_n$  o  $f_n^{-1}$ , que expresa en cuántos segundos se produce un ciclo, como el  $a - e$  de la figura 44, llamándose “período natural”  $T_n$  del sistema.

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = f_n^{-1} \tag{3.5}$$

Las propiedades de vibración natural,  $\omega_n$ ,  $T_n$  y  $f_n$ , dependen de la masa y rigidez de la estructura, y el término “natural” es utilizado para enfatizar el hecho de que estas son propiedades naturales inherentes del sistema, que dependen de la masa y la rigidez del mismo. El movimiento representado por la ecuación (3.3) puede también ser expresado en la forma de sustitución vectorial:

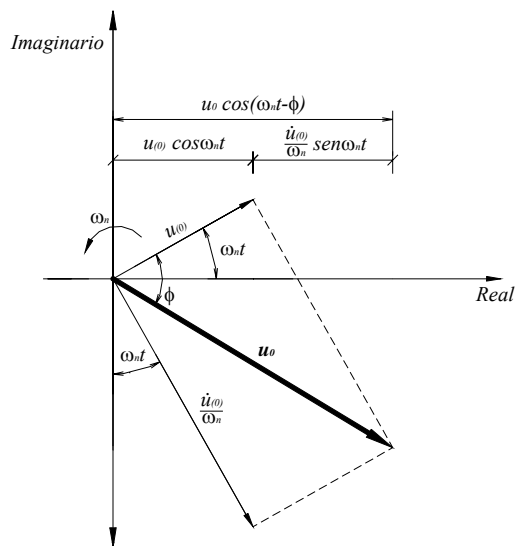
$$u_{(t)} = u_0 \cos(\omega_n t - \phi) \tag{3.6}$$

Donde  $u_0$  es la magnitud del desplazamiento máximo desde la posición de equilibrio y es llamada amplitud de movimiento, la cual está dada por:

$$u_0 = \sqrt{u_{(0)}^2 + \left(\frac{\dot{u}_{(0)}}{\omega_n}\right)^2}$$

y el ángulo de fase  $\phi$  está dado por:  $\phi = \tan^{-1} \frac{\dot{u}_{(0)}}{\omega_n u_{(0)}}$

Figura 45. **Vibración libre, representación vectorial**

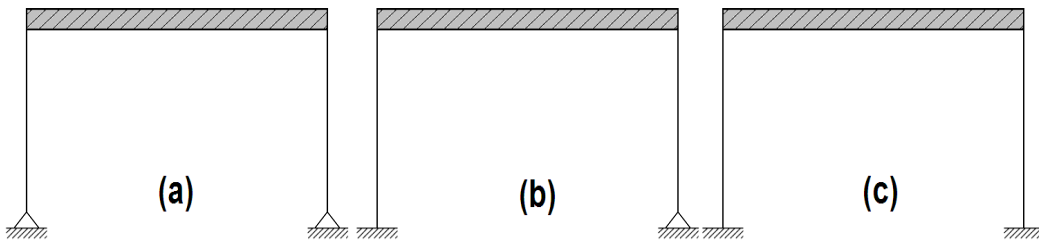


Fuente: CLOUGH, Ray y PENZIEN, Joseph. Dynamics of structures. p. 23.

En la figura 45 está representada vectorialmente la ecuación de movimiento, donde la respuesta está dada por la parte real o proyección horizontal de los dos vectores de rotación; y el ángulo de fase representa la distancia angular de retraso en la respuesta del término del coseno.

Ejemplo sobre propiedades dinámicas: considerar las distintas condiciones de apoyo con movimiento lateral para el marco mostrado en la figura.

Figura 46. Marco articulado, semiarticulado y empotrado



Fuente: elaboración propia.

- (a) ¿En cuánto se reduce el período del marco *a* al *c* según su apoyo?  
 (b) Si se quiere que los tres arreglos tengan el mismo período, ¿cuánto de masa hay que agregarle al marco *b* y *c*?

Solución: se recomienda consultar una tabla de rigideces. Para la condición de apoyo *a*, la rigidez de la columna es equivalente a la de una viga en voladizo  $3EI/L^3$ , para la condición de apoyo *c*, se considera doblemente empotrada  $12EI/L^3$ , la relación es:  $(12EI/L^3) / (3EI/L^3) = 4$ , por tanto si se asigna *k* a la rigidez de la columna empotrada articulada, la rigidez de la columna doblemente empotrada es  $4k$ .

- (a) El período está dado por:  $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \equiv \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} \rightarrow \frac{k}{m} = \left(\frac{2\pi}{T_n}\right)^2$  sea  $T_{na}$  el período del marco según la configuración *a*; su rigidez es la suma de la rigidez de cada columna siendo  $2k$ , por tanto se tiene  $\frac{2k}{m} = \left(\frac{2\pi}{T_{na}}\right)^2$  o sea

$\frac{k}{m} = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{T_{na}} \right)^2$ . Para la configuración *b* la rigidez es  $5k$  y se tiene  $\frac{5k}{m} = \left( \frac{2\pi}{T_{nb}} \right)^2 \rightarrow \frac{k}{m} = \frac{1}{5} \left( \frac{2\pi}{T_{nb}} \right)^2$ . Finalmente para el arreglo *c* la rigidez es  $8k$ , obteniéndose  $\frac{k}{m} = \frac{1}{8} \left( \frac{2\pi}{T_{nc}} \right)^2$ ; igualando las expresiones  $k/m$  se obtiene:
 
$$\frac{k}{m} = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{T_{na}} \right)^2 = \frac{1}{5} \left( \frac{2\pi}{T_{nb}} \right)^2 = \frac{1}{8} \left( \frac{2\pi}{T_{nc}} \right)^2$$
, dividiendo entre  $(2\pi)^2$  y aplicando el inverso  $2T_{na}^2 = 5T_{nb}^2 = 8T_{nc}^2 \rightarrow \sqrt{2}T_{na} = \sqrt{5}T_{nb} = \sqrt{8}T_{nc}$  de esta relación se tienen los periodos:

$$(T_{na}, T_{nb}, T_{nc}) = (T_{na}, 0.63T_{na}, 0.50T_{na})$$

Donde se aprecia que de la configuración *a* a la *b* se reduce el período hasta el 63% y en la tercera hasta el 50%; cabe mencionar que de la condición *b* a la configuración *c* se reduce a un 79%. Si el marco con la condición *a* tiene un período de 1 s, entonces el marco *b* y *c* tienen periodos de 0,63 s y 0,50 s; si el sistema *a* tiene 2 s de período, entonces *b* y *c* tienen periodos de 1,26 s y 1 s, respectivamente, etc.

- (b) Si dos sistemas tienen el mismo período  $T_n$  entonces  $T_n = \frac{2\pi}{\omega_{n1}}$  y  $T_n = \frac{2\pi}{\omega_{n2}}$  igualando, se concluye que  $\omega_{n1} = \omega_{n2}$ . Este resultado se esperaba, por tanto si los periodos son iguales las frecuencias también lo serán:

$$\omega_{na} = \omega_{nb} = \omega_{nc} \rightarrow \omega_{na}^2 = \omega_{nb}^2 = \omega_{nc}^2$$

Se eleva al cuadrado porque  $\omega_n^2 = k/m$ , sea  $m_b$  la masa añadida al arreglo *b* y  $m_c$  al arreglo *c* aparte de la agregada en *b*.

$$\frac{2k}{m} = \frac{5k}{m + m_b} = \frac{8k}{m + m_b + m_c}$$

Aplicando inversos y simplificando:

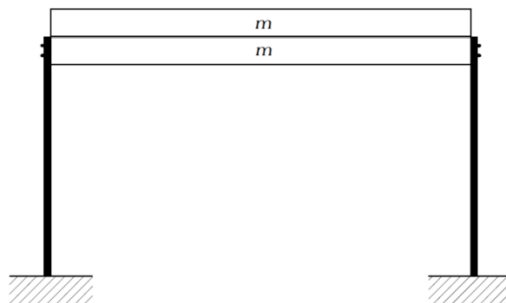
$$20 m = 8(m + m_b) = 5(m + m_b + m_c)$$

$$\boxed{m_b = 1,5 m \quad y \quad m_c = 1,5 m}$$

Por tanto, para obtener el mismo período en las tres condiciones de apoyo, en la primera debe tenerse una masa de  $m$ , a la segunda debe de añadirsele  $1,5 m$  teniendo un total de  $2,5 m$ , para la tercera debe añadirsele  $1,5 m$  teniendo un total de  $4 m$ . Si inicialmente se tiene un sistema  $a$  con  $1 \text{ kg}$  de masa, el  $b$  deberá tener  $2,5 \text{ kg}$  y el  $c$   $4 \text{ kg}$ , añadiendo  $1,5 \text{ kg}$  en cada ocasión.

Ejemplo sobre amplitud en vibración libre: determinar la amplitud lateral del marco mostrado en la figura, en vibración libre sin amortiguamiento, si se desea que la plancha superior, no se deslice, el coeficiente de fricción estática es de  $0,65$  y la frecuencia es de  $4 \text{ hertz}$ . Proponer una ecuación de movimiento.

Figura 47. **Marco empotrado con plancha sobrepuesta**



Fuente: elaboración propia.



Solución: no es factible resolver la ecuación (3.3) para encontrar la amplitud, porque no se dan las condiciones iniciales. Dado que es un movimiento libre, la amplitud es la deformación máxima estática  $ku$ ; en este caso siempre es contraria a la fuerza de fricción seca o amortiguamiento de Coulomb  $\mu N$ , por tanto con la ecuación de equilibrio:

$$ku = \mu N$$

De la ecuación (3.2) y (3.4)  $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \rightarrow \omega_n^2 = 4\pi^2 f_n^2 \rightarrow \frac{k}{m_t} = 4\pi^2 f_n^2$

$$k = 4\pi^2 f_n^2 m_t$$

Se utiliza la variable  $m_t$  para indicar que la frecuencia cíclica se refiere a la masa total soportada por todo el sistema que es  $2m$ ; la normal  $N$  a la superficie de la plancha es simplemente su peso  $mg$ ; sustituyendo estos valores a la ecuación de equilibrio resulta:

$$4\pi^2 f_n^2 m_t u = \mu mg \rightarrow u = \frac{\mu mg}{4\pi^2 f_n^2 (2m)}$$

$$u = \frac{\mu g}{8\pi^2 f_n^2} \rightarrow u = \frac{0,65 * 981 \text{ cm/s}^2}{8\pi^2 (4 \text{ Hz})^2}$$

$$\boxed{u = 0,50 \text{ cm} (= 0,20 \text{ pulg})}$$

Si se quiere que no ocurra el deslizamiento de la plancha sobrepuesta, el sistema debe oscilar como máximo a  $0,50 \text{ cm}$  desde su posición de equilibrio. Quizá la ecuación de movimiento más sencilla, que tenga esta amplitud sea la de condiciones iniciales  $u_{(0)} = 0,50 \text{ cm}$ ,  $\dot{u}_{(0)} = 0$ , de la ecuación (3.4)  $\omega_n = 2\pi f_n$ ,  $\omega_n = 2\pi (4 \text{ Hz})$ ,  $\omega_n = 8\pi$ , sustituyendo estos valores en (3.3) se tiene:

$$\boxed{u_{(t)} = 0,50 \cos 8\pi t}$$

### 3.3. Vibración libre con amortiguamiento viscoso

La ecuación de movimiento para un sistema lineal amortiguado en vibración libre es:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (3.7)$$

La ecuación característica es:  $mr^2 + cr + k = 0 \rightarrow r = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$

El valor del coeficiente de amortiguación ( $c$ ) que anula el determinante de la ecuación característica, obviamente es un caso especial, al que se le llama coeficiente de amortiguamiento crítico ( $c_{cr}$ ) y por inspección esta dado como:

$$c_{cr}^2 = 4mk \quad (3.8)$$

sustituyendo y manipulando algebraicamente esta última ecuación se obtiene:

$$r = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - c_{cr}^2}}{2m} \Rightarrow r = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - c_{cr}^2}}{c_{cr}} \cdot \frac{c_{cr}}{2m} \Rightarrow$$
$$r = \left[ -\frac{c}{c_{cr}} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2 - 1} \right] \cdot \frac{c_{cr}}{2m}$$

Si se observa, la expresión entre corchetes es adimensional y resulta muy provechoso definir la razón o relación de amortiguamiento ( $\xi$ ) como:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} \quad (3.9)$$

$$r = \left[ -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right] \cdot \frac{2\sqrt{km}}{2m} \Rightarrow r = \left[ -\xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2} \right] \cdot \omega_n \text{ de donde}$$

finalmente se obtienen las soluciones:  $r = -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$

Si  $c=c_{cr}$  o  $\xi=1$ , el sistema retorna a su posición inicial de equilibrio más rápido, sin oscilar; por tal razón es llamado sistema críticamente amortiguado o sistema con amortiguamiento crítico. El discriminante se anula y la solución es:

$$u(t) = Ae^{-\xi\omega_n t} + Bte^{-\xi\omega_n t}$$

Si  $c > c_{cr}$  o  $\xi > 1$ , el sistema no oscila pero retorna a su posición de equilibrio lentamente, por tal motivo es denominado sistema sobre amortiguado, no hay números complejos y  $r = (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n$  con la solución:

$$u(t) = Ae^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} + Be^{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}$$

Si  $c < c_{cr}$  o  $\xi < 1$ , el sistema oscila alrededor de la posición de equilibrio con una amplitud que decrece progresivamente, y es llamado sistema subamortiguado, la solución es inmediata a:

$$u(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left[ A \operatorname{sen} \left( \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t \right) + B \operatorname{cos} \left( \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t \right) \right]$$

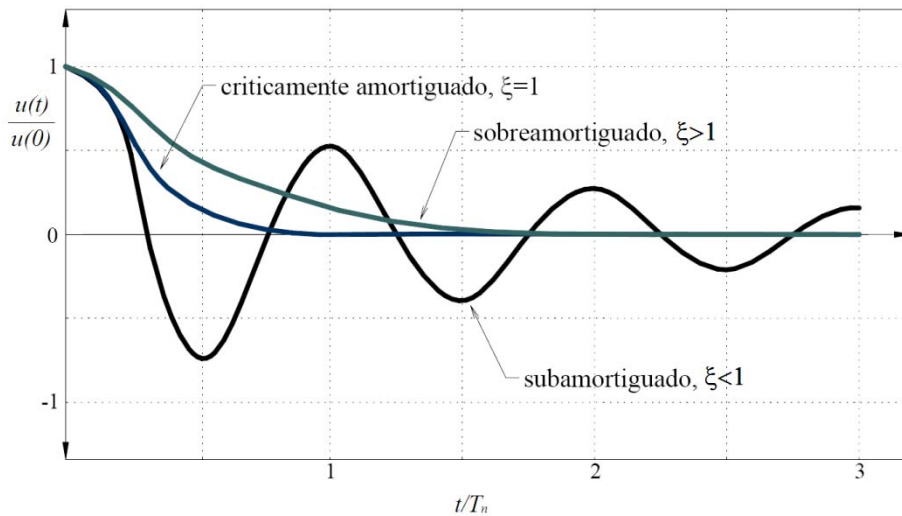
a la expresión  $\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$  se le llama "frecuencia natural amortiguada"  $\omega_a$

$$\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.10)$$

donde:

$$u(t) = e^{-\xi\omega_n t} [A \sin \omega_a t + B \cos \omega_a t] \quad (3.11)$$

Figura 48. **Vibración libre de un sistema críticamente amortiguado, sobre amortiguado y subamortiguado**



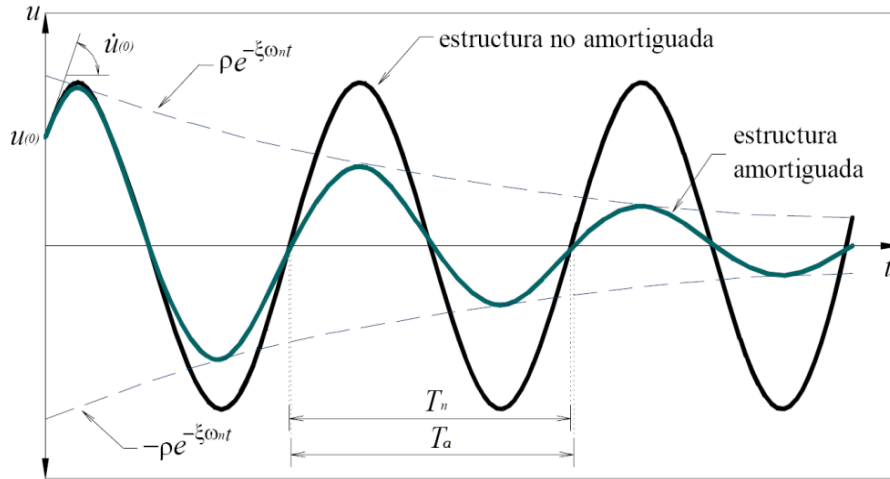
Fuente: GOYTIA, Ivan y VILLANUEVA, Rolando. Ingeniería antisísmica. p. 34.

Las estructuras civiles (puentes, edificios, embalses, etc.) poseen una relación de amortiguamiento  $\xi < 1$  la cual las cataloga como sistemas subamortiguados; es por esta razón que dichos sistemas se estudian con mayor preferencia. Para este caso también puede emplearse la representación vectorial, resultando:

$$u(t) = \rho e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_a t - \phi) \quad (3.12)$$

De forma análoga  $T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$  es el período natural amortiguado, que en realidad no es periódico pero lo hace de forma muy aproximada, por tanto también suele llamársele pseudoperíodo.

Figura 49. Efecto del amortiguamiento en vibración libre



Fuente: CHOPRA, Anil K. Dynamics of structures. p. 46.

La figura 49 ilustra una comparación entre un sistema subamortiguado y uno sin amortiguamiento; se observa que la amplitud del sistema no amortiguado es la misma en todos los ciclos de vibración, en cambio para el sistema amortiguado, la amplitud decrece y lo hace en forma exponencial.

Existen diferentes métodos para obtener el coeficiente de amortiguamiento crítico,  $\xi$ . Si se conocen las amplitudes de los picos de oscilaciones sucesivas,  $u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots$ , tal como se muestra en la figura 49, es posible ver que el intervalo de tiempo entre picos sucesivos es el período amortiguado  $T_a$ . Tomando el cociente entre la amplitud de dos picos sucesivos  $u_i/u_{i+1}$  y por medio de la ecuación (3.12), se obtiene:

$$\frac{u_i}{u_{i+1}} = \frac{\rho e^{-\xi \omega_n t_i} \cos(\omega_a t_i - \phi)}{\rho e^{-\xi \omega_n t_{i+1}} \cos(\omega_a t_{i+1} - \phi)}$$

La función coseno es periódica con un intervalo de tiempo de longitud  $T_a$  por lo que su valor es el mismo a cada múltiplo de  $T_a$  es decir:

$$\frac{u_i}{u_{i+1}} = \frac{\rho e^{-\xi \omega_n t_i} \cos(\omega_a t_i - \phi)}{\rho e^{-\xi \omega_n t_{i+1}} \cos(\omega_a t_i - \phi)} \Rightarrow \frac{u_i}{u_{i+1}} = e^{\xi \omega_n (t_{i+1} - t_i)} \Rightarrow \frac{u_i}{u_{i+1}} = e^{\xi \omega_n T_a}$$

De la última ecuación se llega a un resultado afortunado por ser constante, tomando el logaritmo natural en ambos lados y sustituyendo el valor de  $T_a$ :

$$\ln\left(\frac{u_i}{u_{i+1}}\right) = \xi \omega_n T_a \Rightarrow \ln\left(\frac{u_i}{u_{i+1}}\right) = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

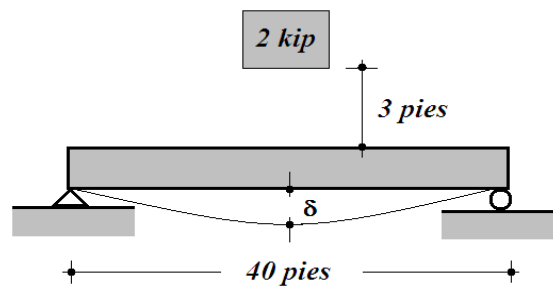
Para una relación de amortiguamiento  $\xi$  debajo del 20%, un rango en el cual están incluidas la mayoría de las estructuras, la expresión  $\sqrt{1-\xi^2}$ , es muy próxima a la unidad, por lo que se simplifica a:  $\ln\left(\frac{u_i}{u_{i+1}}\right) = 2\pi\xi$ ; obviamente si se considera la razón de amplitudes localizados a  $n$  ciclos o periodos, se obtiene  $n$  veces ese valor constante; esto es:  $\ln\left(\frac{u_i}{u_{i+n}}\right) = 2\pi n\xi$ ; finalmente se obtiene el valor de  $\xi$  si es menor del 20%.

$$\xi = \frac{\ln\left(\frac{u_i}{u_{i+n}}\right)}{2\pi n} \quad (3.13)$$

Ejemplo de vibración libre amortiguada: un objeto que pesa 2 000 lb es soltado a 3 pies de altura en el centro de una viga, simplemente apoyada de masa insignificante de 40 pies de luz. El objeto queda adherido a la viga desde el primer contacto. En 0,5 s se producen 6 ciclos en los cuales disminuye la amplitud del primer pico en el 90%.

Determinar el módulo o rigidez a la flexión, la ecuación de movimiento, la deflexión máxima, el momento flexionante máximo y finalmente si la viga es de acero, proponer una sección rectangular.

Figura 50. **Impacto de un objeto sobre una viga**



Fuente: elaboración propia.

Solución: el módulo a la flexión es el producto “EI” que relaciona el tipo de material del cuerpo simple con la geometría de su sección; como no se proporciona esa información, habrá que deducirla de las propiedades dinámicas. La rigidez de esta viga ya fue calculada en el ejemplo de rigideces.

$$k = \frac{48EI}{L^3} \quad \rightarrow \quad EI = \frac{kL^3}{48}$$

El módulo a la flexión está en función de la rigidez de la viga, por tanto ahora compete calcular dicha rigidez:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad \rightarrow \quad k = m\omega_n^2 \quad \rightarrow \quad k = \frac{W\omega_n^2}{g}$$

Donde W es el peso del objeto (= 2 kip), la frecuencia natural está dada en:

$$\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad \rightarrow \quad \omega_n = \frac{\omega_a}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Donde  $\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} \quad \rightarrow \quad T_a = \frac{0,5 \text{ s}}{6 \text{ ciclos}} \equiv \frac{1}{12} \text{ s}$

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} \equiv \frac{2\pi}{1/12} \equiv 24\pi$$

$\xi$  está dada por la ecuación (3.13); si el pico del primer ciclo es  $u_i$  en el sexto ha disminuido el 90% o sea  $u_{i+6} = 0,1u_i$  la razón de amortiguamiento es:

$$\xi = \frac{\ln\left(\frac{u_i}{0,1u_i}\right)}{2\pi \cdot 6} \equiv 0,0611$$

Con estos valores:

$$\omega_n = \frac{\omega_a}{\sqrt{1 - \xi^2}} \equiv \frac{24\pi}{\sqrt{1 - 0,0611^2}} \equiv 24,0\pi \quad \rightarrow \quad \omega_n \approx \omega_a$$

El valor numérico de la rigidez es:

$$k = \frac{W\omega_n^2}{g} \equiv \frac{(2 \text{ kip})(24\pi \text{ rad/s})^2}{32,2 \text{ pie/s}^2} \equiv 353,1 \text{ kip/pie} (= 29,43 \text{ kip/pulg})$$

Finalmente; la rigidez a la flexión tiene el valor de:

$$EI = \frac{kL^3}{48} \equiv \frac{(353,1 \text{ kip/pie})(40 \text{ pie})^3}{48} \equiv 470,8 \text{ Mlb} \cdot \text{pie}^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{EI = 471 \text{ Mlb} \cdot \text{pie}^2}$$



La ecuación de movimiento está dada por (3.11):

$$u_{(t)} = e^{-\xi\omega_n t} [A \operatorname{sen}\omega_a t + B \operatorname{cos}\omega_a t]$$

En el momento del impacto ( $t = 0$ ) no hay deformación por lo que  $u_{(0)} = 0$ :

$$u_{(0)} = e^{-\xi\omega_n \cdot 0} [A \operatorname{sen}\omega_a \cdot 0 + B \operatorname{cos}\omega_a \cdot 0] \equiv B = 0$$

Por lo que la ecuación se reduce a:

$$u_{(t)} = A e^{-\xi\omega_n t} \operatorname{sen}\omega_a t$$

Cuando el objeto es soltado, se pueden utilizar las ecuaciones de caída libre, con el eje positivo hacia abajo  $+\downarrow$ :

$$v = \dot{u}_{(0)} = \sqrt{2gh} \equiv \sqrt{2(32,2 \text{ pie/s}^2)(3 \text{ pie})} \equiv 13,90 \text{ pie/s} \equiv 166,8 \text{ pulg/s}$$

Derivando la ecuación de movimiento y con la condición inicial de velocidad se obtiene:

$$A = \frac{\dot{u}_{(0)}}{\omega_a} \equiv \frac{166,8 \text{ pulg/s}}{24\pi \text{ rad/s}} \equiv 2,21 \text{ pulg}$$

Finalmente, la ecuación de movimiento es:

$$u_{(t)} = 2,21 e^{-4,61t} \operatorname{sen}24\pi t$$

Como la ecuación inicia en el origen, en el primer período se encuentran dos picos; en el primer pico es donde se da el máximo desplazamiento, que corresponde a  $\frac{1}{4}$  de período  $T_a$  esto es  $t = T_a/4 = 1/48$  s. Sin embargo, no siempre se iniciará el movimiento en el origen y no será tan sencillo, como se muestra en la figura 49.

El proceso general (descartando los puntos críticos de la primera derivada por ser muy laborioso) consiste en reconocer la función asintótica o envolvente de la ecuación de movimiento  $pe^{-\xi\omega_n t}$ , se iguala a la ecuación de movimiento; los interceptos dan el tiempo en que se producen los picos; por el amortiguamiento en el menor tiempo, se produce el mayor pico, por tanto, de la ecuación de movimiento:

$$2,21e^{-4,61t} \text{ sen}24\pi t = 2,21e^{-4,61t}$$

$$\text{sen}24\pi t = 1 \quad \rightarrow \quad 24\pi t = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad t = \frac{1}{48} \text{ s}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación de movimiento se obtiene:

$$u_{(1/48)} = 2,21e^{-4,61/48} \frac{\text{sen}24\pi}{48} \equiv 2,01 \text{ pulg}$$

Este desplazamiento produce una fuerza inercial de:

$$P = k\delta \equiv (29,43 \text{ kip/pulg})(2,01 \text{ pug}) \equiv 59,2 \text{ kip}$$

Es decir que soltando un peso de 2 kip a 3 pie de altura produce un impacto de 59,2 kip. La deformación dinámica encontrada es la máxima respecto del equilibrio de la deformación estática de la masa sobre la viga, que la deforma:  $\delta_{\text{est}} = W/k \equiv 2 \text{ kip}/29,43 \text{ kip/pulg} \equiv 0,07 \text{ pulg}$

Por lo tanto, la deformación máxima es:

$$\delta_{\max} = (2,01 + 0,07) \text{ pulg} \equiv 2,08 \text{ pulg}$$

Esta deformación total produce una fuerza de  $(2,08)(29,43) \text{ kip} = 61,2 \text{ kip}$  que es la fuerza que se esperaba, porque un peso de 2 kip produce un golpe de 59,2 kip con lo que suma una fuerza total de 61,2 kip.

De un diagrama de momentos para la viga o por inspección, se deduce fácilmente que el momento máximo es  $PL/4$ :

$$M_{\max} = \frac{PL}{4} \equiv \frac{(61,2 \text{ kip})(40 \text{ pie})}{4} \equiv 612 \text{ kip} \cdot \text{pie}$$

Este momento es el que se usaría para diseñar por impacto, como por ejemplo una losa o una viga de concreto; pero en ese caso debe considerarse el peso del elemento, una viga típica con la luz del problema (40 pie) sería de una sección de  $15 \times 25 \text{ pulg}^2$  y considerando que el peso específico normal del concreto es de  $150 \text{ lb/pie}^3$  se tiene un peso de  $15\,600 \text{ lb} = 15,6 \text{ kip}$  que es un peso bastante considerable. También debe considerarse que el peso se trata como una carga repartida  $\omega$  a lo largo de su luz, produciendo un momento y una deformación en el centro del claro de  $M_c = \omega L^2/8$  y  $\delta_c = 5\omega L^4/384EI$ , respectivamente.

Si la viga es de acero, han de tomarse consideraciones parecidas a las anteriores, el módulo de elasticidad del acero es de  $E = 29 \cdot 10^6 \text{ lb/pulg}^2$ , suponiendo una base de 10 pulg con un peralte de  $h$  y del módulo a la flexión:

$$EI = 470,8 \text{ Mlb} \cdot \text{pie}^2 \quad \rightarrow \quad I = 470,8 \text{ Mlb} \cdot \text{pie}^2 / E$$

$$\frac{1}{12}(10 \text{ pulg})h^3 = \frac{470,8 \cdot 10^6 \text{ lb} \cdot \text{pie}^2 \cdot \frac{144 \text{ pulg}^2}{1 \text{ pie}^2}}{29 \cdot 10^6 \text{ lb/pulg}^2} \rightarrow h = 14,1 \text{ pulg}$$

Sección de acero: 10x14,1 pulg<sup>2</sup>

## 4. VIBRACIÓN FORZADA POR CARGA ARMÓNICA

### 4.1. Introducción

Este capítulo trata sobre el movimiento de estructuras idealizadas como sistemas con un solo grado de libertad con excitaciones armónicas, o sea estructuras sujetas a fuerzas o desplazamientos cuyas magnitudes pueden ser representadas por una función seno o coseno, en el tiempo. Este tipo de excitación produce uno de los movimientos más importantes en el estudio de las vibraciones mecánicas, así como en aplicaciones de dinámica estructural e instrumentación sísmica.

### 4.2. Sistema amortiguado con carga armónica

Se considera el sistema amortiguado y el no amortiguado como un caso específico de este.

#### 4.2.1. Ecuación de movimiento

Estableciendo  $p(t) = p_0 \cdot \text{sen} \omega_e t$  como la fuerza externa mostrada en la figura 37, para forzar el movimiento del sistema, la ecuación diferencial que gobierna el movimiento forzado por carga armónica para un sistema amortiguado según la mecánica newtoniana es:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \text{sen } \omega_e t \quad (4.1)$$

Donde  $p_0$  es la amplitud o valor máximo de la fuerza y  $\omega_e$  es la frecuencia natural externa de la fuerza armónica. La solución particular a la ecuación diferencial (4.1) es:

$$u_p(t) = C \operatorname{sen} \omega_e t + D \operatorname{cos} \omega_e t$$

Donde por coeficientes indeterminados:

$$C = \frac{p_0}{k} \frac{1 - (\omega_e / \omega_n)^2}{[1 - (\omega_e / \omega_n)^2]^2 + [2\xi(\omega_e / \omega_n)]^2} \quad (4.2)$$

$$D = \frac{p_0}{k} \frac{-2\xi(\omega_e / \omega_n)}{[1 - (\omega_e / \omega_n)^2]^2 + [2\xi(\omega_e / \omega_n)]^2} \quad (4.3)$$

La solución complementaria de la ecuación (4.1) es:

$$u_c(t) = e^{-\omega_n t} (A \operatorname{sen} \omega_n t + B \operatorname{cos} \omega_n t)$$

La solución total es la suma de ambas ecuaciones:

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

$$u(t) = \underbrace{e^{-\omega_n t} (A \operatorname{sen} \omega_n t + B \operatorname{cos} \omega_n t)}_{\text{Estado Temporal}} + \underbrace{C \operatorname{sen} \omega_e t + D \operatorname{cos} \omega_e t}_{\text{Estado permanente}} \quad (4.4)$$

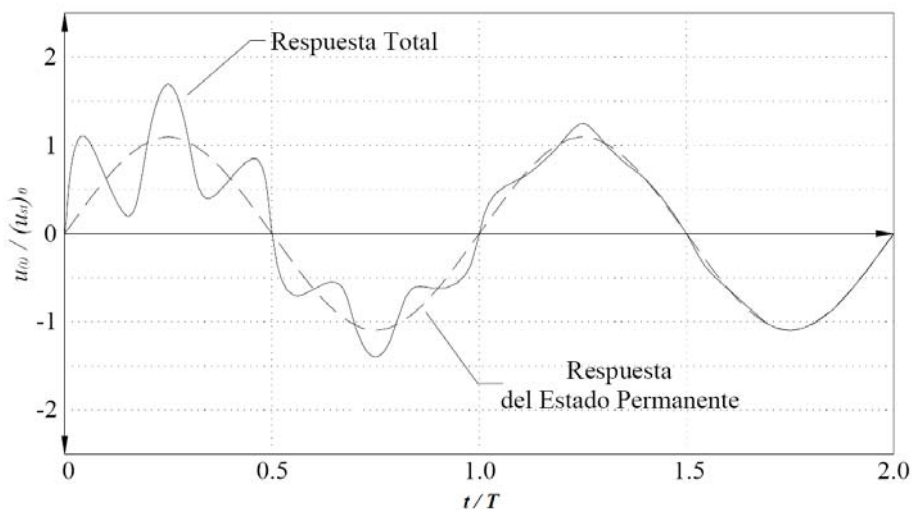
Donde las constantes A y B pueden determinarse mediante procedimientos estándar en términos de desplazamiento  $u(0)$  y velocidad  $\dot{u}(0)$ . Pueden notarse las tres frecuencias que intervienen, “la natural de la estructura, la amortiguada y la externa”.

La ecuación (4.4) contiene dos componentes de vibración distintas:

- El término  $u_p(t)$  para la oscilación en frecuencia de excitación, representa el estado “permanente de vibración” debido a que siempre está presente porque la fuerza aplicada no depende de las condiciones iniciales.
- El término  $u_c(t)$  para la oscilación en frecuencia natural del sistema, representa el estado “temporal de vibración” que depende de  $u(0)$  y  $\dot{u}(0)$ , el cual existe a pesar de que estos sean nulos. El término “estado temporal de vibración” se debe a que el amortiguamiento, siempre presente en sistemas reales, hace que la vibración libre decrezca en el tiempo.

La figura 51 muestra la ecuación (4.4) graficada para determinados valores.

Figura 51. **Respuesta para un sistema amortiguado sujeto a carga armónica**



Fuente: CHOPRA, Anil K. Dynamics of structures. p. 69.

La respuesta total es representada por una línea de trazo continuo y la respuesta del estado permanente por una línea discontinua; la diferencia entre ambas es la respuesta temporal, la cual tiende a cero exponencialmente con el tiempo, en un valor que depende de  $\omega_e/\omega_n$  y  $\xi$ ; quedando únicamente la respuesta forzada; es por esta razón que es llamada respuesta del estado permanente.

Como el efecto del estado temporal desaparece muy rápido, permite en los casos prácticos la evaluación del estado permanente como el dominante.

Naturalmente el estado permanente puede expresarse en la forma de suma de ángulos o vectorial esto es:

$$u_p(t) = u_0 \text{sen}(\omega_e t - \phi) = \frac{p_0}{k} FAD_d \text{sen}(\omega_e t - \phi) \quad (4.5)$$

Donde  $u_0 = \sqrt{C^2 + D^2}$  y  $\phi = \tan^{-1}(-D/C)$  y

$$FAD_d = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_e/\omega_n)^2]^2 + [2\xi(\omega_e/\omega_n)]^2}} \quad (4.6)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\xi(\omega_e/\omega_n)}{1 - (\omega_e/\omega_n)^2} \quad (4.7)$$

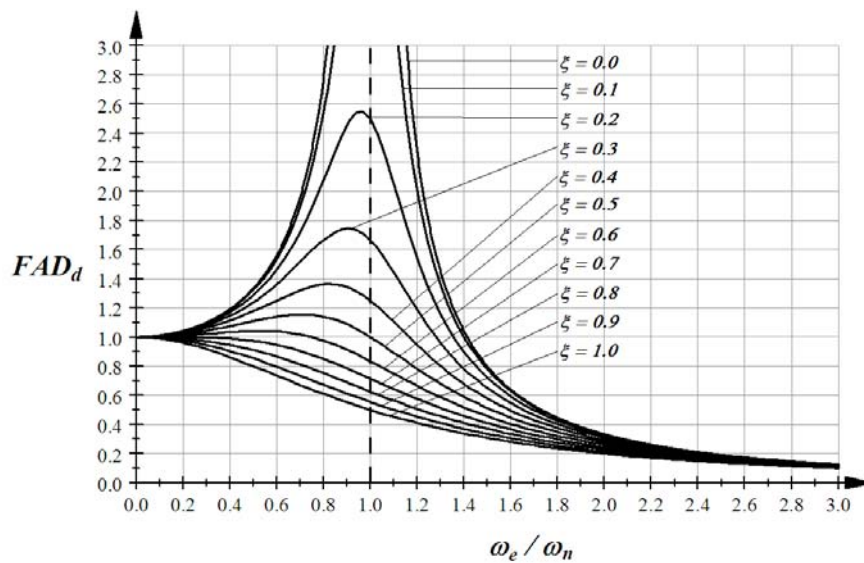
El término  $u_0$  es el valor máximo de desplazamiento para el estado permanente y para todo el sistema después de un lapso muy corto, una vez que la vibración forzada absorbe el estado transitorio (figura 51) y el  $FAD_d$  es el factor de amplificación dinámica, que puede reducir o aumentar la deformación estática  $p_0/k$  (figura 52).



### 4.2.2. Resonancia y frecuencia resonante

Ocurre una “resonancia” cuando la frecuencia natural del sistema coincide con la frecuencia externa de la fuerza aplicada. La ecuación (4.6) describe un fenómeno clásico de resonancia. Cuando el coeficiente de amortiguamiento crítico  $\xi$ , es igual a cero y la relación entre frecuencias  $\omega_e/\omega_n$ , es igual a la unidad (las frecuencias son iguales), el denominador de la ecuación (4.6) es cero, y por lo tanto la amplificación se dispara al infinito, condición que sólo se puede presentar en teoría.

Figura 52. **Factor de amplificación dinámica en función de la razón de frecuencias**



Fuente: elaboración propia.

El valor de 3,0 en las ordenadas de la figura 52 es el máximo utilizado en teoría para ingeniería sísmica, no es práctico ni económico usar valores mayores.

La “frecuencia resonante” está definida como la frecuencia de excitación en la cual ocurre la amplitud máxima de respuesta. El hecho de que el amortiguamiento no sea cero indica que este denominador es diferente de cero y por lo tanto la amplificación, aunque de magnitud importante, tiene un valor finito. La frecuencia resonante es determinada estableciendo la primera derivada igual a cero de  $FAD_d$  con respecto de  $\omega/\omega_n$  para  $\xi < 1/\sqrt{2}$  ( $= 0,71$ ); frecuencia resonante para el desplazamiento:

$$\omega_e = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (4.8)$$

Cuando el amortiguamiento es cero, la frecuencia resonante produce resonancia, condición que no se da en la realidad; de ahí se justifica la expresión en forma logarítmica  $e$ , que representa las fuerzas de fricción que detienen el movimiento.

Es importante anotar que la amplificación está dada en función del desplazamiento estático del sistema ( $P_0/k$ ), lo cual corresponde a la deflexión que tendría el sistema si la fuerza  $P$ , se aplica muy lentamente.

Ejemplo de frecuencia resonante: Demostrar que la frecuencia resonante para el desplazamiento es  $\omega_e = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$  y obtenga el máximo valor de la amplificación dinámica que produce.

Solución: el factor de amplificación dinámica es:

$$FAD_d = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_e/\omega_n)^2]^2 + [2\xi(\omega_e/\omega_n)]^2}}$$

Para simplificar sea:  $FAD_d(\omega_e/\omega_n) = f(x) \rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{[1-x^2]^2 + [2\xi x]^2}}$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4x(x^2 - 1) + 8x\xi^2}{([1 - x^2]^2 + [2\xi x]^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Calculando los puntos críticos con  $f'(x) = 0$  se obtiene el único punto válido:

$$x = \frac{\omega_e}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \rightarrow \boxed{\omega_e = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}}$$

con lo que queda demostrado.

Sustituyendo el punto crítico  $x = \sqrt{1 - 2\xi^2}$  en  $f(x)$  se obtiene el valor máximo para el desplazamiento.

$$\boxed{f(\sqrt{1 - 2\xi^2}) = FAD_{dmax} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - 2\xi^2}}}$$

Se especifica el factor para el desplazamiento  $FAD_d$  porque también hay factores para la velocidad y la aceleración. De la ecuación (4.5):

$$u_{p(t)} = \frac{p_0}{k} FAD_d \text{sen}(\omega_e t - \phi)$$

Derivando:

$$\dot{u}_{p(t)} = \frac{p_0}{k} \omega_e FAD \cos(\omega_e t - \phi) \rightarrow \dot{u}_{p(t)} = \frac{\omega_n}{\omega_n} \cdot \frac{p_0}{k} \omega_e FAD \cos(\omega_e t - \phi)$$

$$\dot{u}_{p(t)} = \frac{p_0}{\sqrt{km}} \cdot \frac{\omega_e}{\omega_n} FAD_d \cos(\omega_e t - \phi)$$

La expresión  $\frac{\omega_e}{\omega_n} FAD_d$  es el factor de amplificación dinámica para la velocidad,  $FAD_v = \frac{\omega_e}{\omega_n} FAD_d$  realizando un procedimiento igual al anterior se obtienen las relaciones que producen los máximos valores, que son:

$$\omega_e = \omega_n \quad \rightarrow \quad FAD_{vmax} = \frac{1}{2\xi}$$

El factor de amplificación dinámica para la aceleración se obtiene de forma análoga y es:

$$FAD_a = \frac{\omega_e}{\omega_n} FAD_v = \left(\frac{\omega_e}{\omega_n}\right)^2 FAD_d \quad (4.9)$$

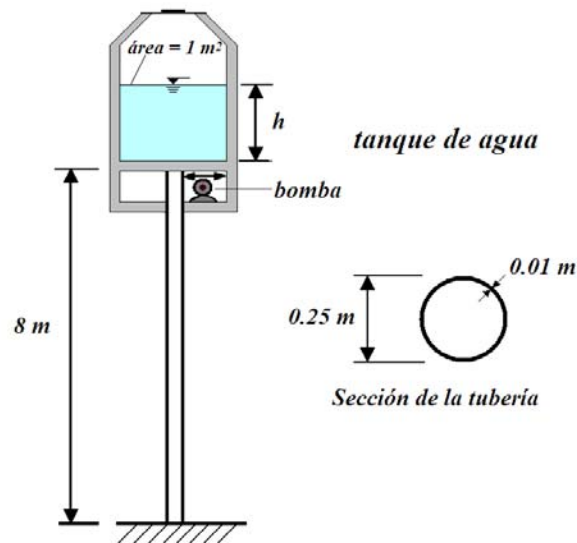
La frecuencia resonante y el máximo valor de amplificación dinámica para la aceleración son:

$$\omega_e = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} \quad \rightarrow \quad FAD_{amax} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - 2\xi^2}}$$

Ejemplo sobre momento de volteo por fuerza armónica: el tanque de agua mostrado en la figura, con una sección horizontal de  $1 \text{ m}^2$  de área, está colocado en la parte superior de una columna tubular de  $L = 8 \text{ m}$  de altura cuya sección tiene un diámetro  $d = 0,25 \text{ m}$  con una pared de espesor  $t = 0,01 \text{ m}$  y construida de un material con un módulo de elasticidad  $E = 200\,000 \text{ MPa}$ . En la parte inferior del tanque hay una bomba de agua que ejerce una fuerza horizontal armónica de  $P_0 = 100 \text{ N}$  con una frecuencia de  $\omega_e = 5 \text{ rad/s}$ ; el tanque vacío incluyendo la columna tiene una masa de  $500 \text{ kg}$ . El amortiguamiento del sistema es  $\xi = 2\%$  del crítico.

Determinar el momento de volteo, provocado por la fuerza horizontal máxima generada por la vibración de la bomba. Si la capacidad del tanque es: (a) 2 500 litros (= 2,5 m<sup>3</sup>) y (b) 2 000 litros (= 2 m<sup>3</sup>).

Figura 53. **Tanque hidrostático con sección tubular**



Fuente: elaboración propia.

Solución: el sistema se idealiza como una columna en voladizo con una masa en la parte superior; se puede intentar una idealización más fina interpretando el movimiento como un péndulo invertido.

Sea  $M$  el momento máximo en la base de la tubería por la fuerza horizontal máxima  $F$  producida por la vibración armónica de la bomba:

$$M = FL \quad \text{de donde} \quad F = ku_0$$

$$\text{De donde la rigidez } k \text{ es: } k = \frac{3EI}{L^3}$$

Reemplazando los valores apropiados:

$$E = 200\,000 \text{ MPa}$$

$$I = \frac{\pi d^3}{8} \equiv \frac{\pi(0,01 \text{ m})(0,25 \text{ m})^3}{8} \equiv 6,14 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$L = 8 \text{ m}$$

Entonces:

$$k = \frac{3(2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2)(6,14 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4)}{(8 \text{ m})^3} \equiv 72\,000 \text{ N/m}$$

El desplazamiento máximo  $u_0$  es:

$$u_0 = \frac{P_0}{k} \text{FAD}_{\text{dmax}} \equiv \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{2\xi\sqrt{1-2\xi^2}} \equiv \frac{100 \text{ N}}{72\,000 \text{ N/m}} \cdot \frac{1}{2(0,02)\sqrt{1-2(0,02)^2}}$$
$$u_0 = 0,035 \text{ m}$$

(a) La máxima fuerza por lo tanto es:

$$F = ku_0 \equiv (72\,000 \text{ N/m})(0,035 \text{ m}) = 2\,520 \text{ N}$$

El máximo momento en la base de la columna es:

$$M = FL \equiv (2\,520 \text{ N})(8 \text{ m}) \rightarrow \boxed{M = 20\,160 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

La masa total corresponde a la masa del tanque incluida la columna y la masa de agua que contenga el tanque a una altura de  $h$  metros.

$$m = m_{\text{tan+col}} + m_{\text{agua}} \equiv 500 \text{ kg} + (h \text{ m})(1 \text{ m}^2)(1\,000 \text{ kg/m}^3)$$

La frecuencia natural del sistema es:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{72\,000}{500 + 1\,000h}} \text{ rad/s}$$

La máxima fuerza horizontal se produce cuando se tiene la deformación máxima o sea cuando se presenta la frecuencia resonante. Esto ocurre cuando:

$$\omega_e = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \cong \omega_n \sqrt{1 - 2(0,02)^2} \cong 0,9996\omega_n$$

Por lo cual

$$\omega_e \cong \omega_n$$

$$\omega_n \cong \sqrt{\frac{72\,000}{500 + 1\,000h}} \text{ rad/s} = 5 \text{ rad/s} \cong \omega_e$$

$$h = \frac{7\,2000/5^2 - 500}{1\,000} \rightarrow \boxed{h = 2,38 \text{ m}}$$

Este resultado indica que el momento de volteo encontrado es válido sólo si la profundidad del tanque supera los 2,38 m. Como la capacidad del tanque es de 2,5 m<sup>3</sup> esto es una altura h de 2,50 m, con lo que el resultado es válido.

(b) si el tanque tiene una capacidad de 2 m<sup>3</sup> implica que tiene una profundidad de 2 m, con lo que el momento máximo de volteo es distinto del anterior aunque de menor valor, se puede encontrar por varios métodos.

Método uno: el desplazamiento máximo para este caso es de;

$$u_0 = \frac{P_0}{k} FAD_d \cong \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_e/\omega_n)^2]^2 + [2\xi(\omega_e/\omega_n)]^2}}$$

$$u_0 = \frac{100}{72\,000} \cdot \frac{1}{\sqrt{[1 - 5^2/\omega_n^2]^2 + (2 \cdot 0,02 \cdot 5)^2/\omega_n^2}}$$

Con el valor de  $\omega_n^2$  y simplificando resulta  $u_0$  en función de  $h$ :

$$\omega_n^2 \equiv \frac{72\,000}{500 + 1\,000h}$$

$$u_0(h) = (62500h^2 - 297210h + 354170)^{-1/2} \quad \rightarrow \quad h \in [0,2]$$

Ya que  $u_0(h)$  es continua en  $h \in [0,2]$  se utiliza el teorema del valor extremo para el valor máximo en  $h \in [0,2]$ . Derivando se encuentra el único valor crítico  $h = 2,3776$  m que produce la respuesta  $u_0(2,3776 \text{ m}) = 0,03461$  m, que demuestra los valores máximos del inciso anterior, pero se descarta para este caso porque ese valor no está en el intervalo de análisis, por lo que el valor buscado está en un extremo del intervalo:

$$u_0(0) = 0,00168 \text{ m} \quad \text{ó} \quad u_0(2 \text{ m}) = 0,01013 \text{ m}$$

La máxima fuerza es por lo tanto:

$$F = ku_0 \equiv (72\,000 \text{ N/m})(0,01013 \text{ m}) \cong 730 \text{ N}$$

El máximo momento en la base de la columna es:

$$M = FL \equiv (730 \text{ N})(8 \text{ m}) \quad \rightarrow \quad \boxed{M = 5\,840 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

El resultado sorprende, si el tanque tiene una capacidad de 2 000 litros debe resistir un momento de  $M = 5\,840 \text{ N} \cdot \text{m}$  y si la capacidad es de 2 500 litros debe resistir un momento de  $M = 20\,160 \text{ N} \cdot \text{m}$ .



La fuerza a resistir aumenta ( $20\ 160/5\ 840 \approx 3,5$ ) 3,5 veces; como ejemplo si en una opción se diseña para 1 tonelada, por agregarle unos litros de capacidad más, debe diseñarse para 3,5 toneladas, hay que deliberar para llegar a la mejor opción, en este caso, no es buen negocio sobrepasar la profundidad de 2,38 m a menos que se aumente la capacidad del tanque considerablemente, pues el momento máximo no se incrementará.

Este método es el general para optimización, no obstante es muy laborioso, el ingeniero es práctico, simplifica, pero para ello debe tener mayores conocimientos para optar a esas ventajas con seguridad.

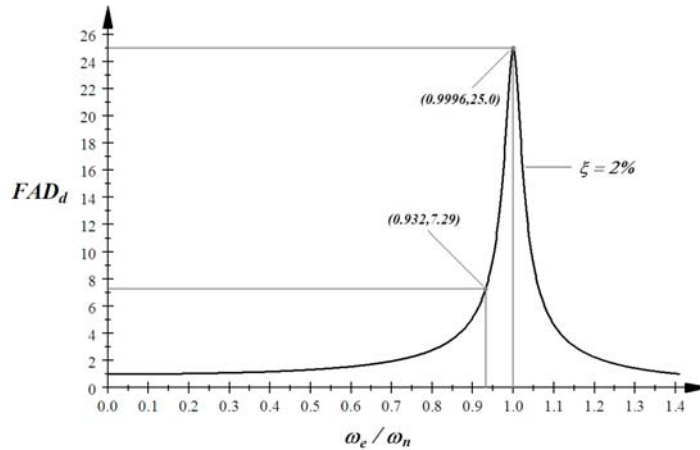
Método dos: considerar el resultado de  $\omega_n$  del inciso (a) y la relación de frecuencias  $\omega_e/\omega_n$ :

$$\frac{\omega_e}{\omega_n} = \frac{5}{\sqrt{\frac{72\ 000}{500 + 1\ 000h}}} \equiv 5 \sqrt{\frac{500 + 1\ 000h}{72\ 000}} \equiv \frac{5}{12} \cdot \sqrt{2h + 1}$$

En la última expresión en el intervalo  $h \in [0,2]$ , por inspección si la variable  $h$  aumenta de valor de 0 a 2, lo hace toda la expresión en forma creciente, es decir  $\omega_e/\omega_n$  aumenta de valor, de  $5/12$  a  $5\sqrt{5}/12$  ( $= 0,42$  a  $0,93$ ), si no se está convencido, puede graficarse la expresión o derivarse obteniendo:  $\frac{5}{12\sqrt{2h+1}}$ ; esta expresión es positiva para toda  $h > -1/2$ , por el criterio de la primera derivada  $\omega_e/\omega_n$  es estrictamente creciente para  $h \in [0,2]$ . Puede graficarse el  $FAD_d$  para  $\xi = 2\%$  donde se observa que el  $FAD_d$ ; es estrictamente creciente desde la relación de frecuencias  $\omega_e/\omega_n$  con valor de 0 hasta 0.9996.

$$\omega_e/\omega_n = \sqrt{1 - 2\xi^2} \equiv \sqrt{1 - 2(0,02)^2} \approx 0,9996$$

Figura 54. Factor de amplificación – relación de frecuencias ( $\xi = 2\%$ )



Fuente: elaboración propia.

Por lo tanto el  $FAD_d$  aumenta cuando  $h$  aumenta desde 0 a 2,38 m y para este caso el máximo es  $h = 2$  m, de donde la razón de frecuencias es:

$$\frac{\omega_e}{\omega_n} = \frac{5}{12} \cdot \sqrt{2h + 1} \cong \frac{5}{12} \cdot \sqrt{2(2) + 1} = 0,9317$$

Con este valor se obtiene el máximo desplazamiento:

$$u_0 = \frac{P_0}{k} FAD_d \cong \frac{100}{72\,000} \cdot \frac{1}{\sqrt{[1 - (0,9317)^2]^2 + [2(0,02)(0,9317)]^2}}$$

$$u_0 = 0,01013 \text{ m}$$

La máxima fuerza y el máximo momento en la base de la columna es:

$$F = ku_0 \cong (72\,000 \text{ N/m})(0,01013 \text{ m}) \cong 730 \text{ N}$$

$$M = FL \cong (730 \text{ N})(8 \text{ m}) \rightarrow \boxed{M = 5\,840 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

## **5. VIBRACIÓN FORZADA POR CARGA GENERAL**

### **5.1. Introducción**

El estudio del movimiento armónico es amplio y de muy variadas aplicaciones que no se consideraron, pero que son muy importantes. Se dan muchos casos en los que el cimiento o soporte de una estructura está sujeto a movimiento armónico producidas por equipos mecánicos. No obstante, las estructuras reales están sometidas a excitaciones que no son armónicas.

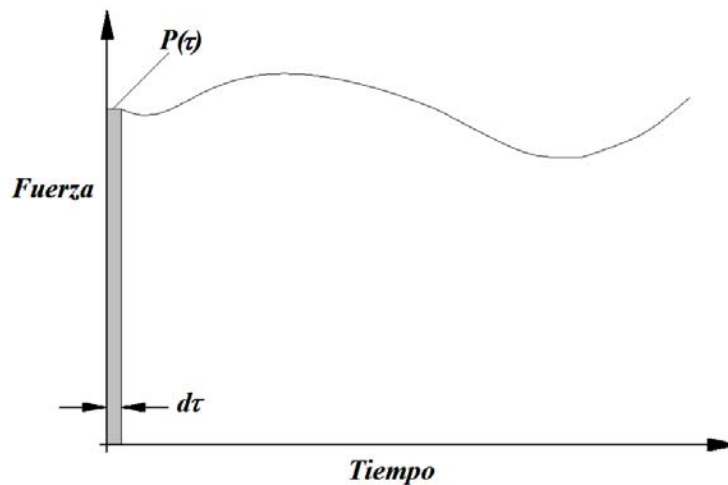
Se estudia la respuesta de un sistema con un grado de libertad excitado por una fuerza impulsiva, que conduce a fuerzas de tipo general. Esta respuesta puede obtenerse mediante una integral, que puede ser calculada analíticamente en muchos casos simples en que las excitaciones como explosiones y ráfagas de viento se expresan por medio de funciones simples. En muchos casos prácticos, donde se tienen excitaciones que no se prestan a una descripción matemática, hay necesidad de recurrir a métodos numéricos para obtener la solución.

### **5.2. Carga impulsiva**

Una excitación impulsiva es aquella que se aplica durante un corto intervalo de tiempo, debido a que la respuesta máxima es alcanzada en un lapso pequeño, antes de que las fuerzas de amortiguamiento puedan responder, es de dominio general “no considerar amortiguación” en ese lapso.

El impulso se define como el producto de la fuerza por el tiempo de su duración. En la figura 55, el impulso de la fuerza  $P(\tau)$  en el instante  $\tau$ , durante el intervalo  $d\tau$  está representado por el área sombreada y es igual a  $P(\tau)d\tau$ .

Figura 55. **Fuerza impulsiva**



Fuente: elaboración propia.

Si se suelta un objeto sobre la luz de una viga, la causa del movimiento generado, es por el impulso del objeto, por su peso y velocidad. Es decir cuando el impulso actúa sobre un cuerpo de masa  $m$  produce un movimiento que es gobernado por la Segunda Ley de Newton:

$$m \frac{dv}{d\tau} = P(\tau) \quad \rightarrow \quad dv = \frac{P(\tau)d\tau}{m} \quad (5.1)$$

La ecuación de movimiento sin amortiguación en el breve lapso del impulso es, ecuación (3.3):  $u(t) = u_{(0)} \cos \omega_n t + \frac{\dot{u}_{(0)}}{\omega_n} \text{sen} \omega_n t$

Un cuerpo de masa  $m$ , como el de la viga, antes del impacto en el tiempo  $t = 0$  está sin deformación, por lo que  $u_{(0)} = 0$ , la velocidad inicial es por el impulso, por tanto:  $\dot{u}_{(0)} = dv = \frac{P(\tau)d\tau}{m}$ , sustituyendo estos valores en la ecuación anterior, se obtiene un desplazamiento diferencial:

$$du = \frac{P(\tau)d\tau}{m\omega_n} \text{sen}\omega_n t \quad (5.2)$$

Si el impulso no es tan corto, entonces debe considerarse (5.2) como:

$$\Delta u = \frac{P(\tau)\Delta\tau}{m\omega_n} \text{sen}\omega_n t$$

Si hay que considerar el amortiguamiento, entonces la ecuación anterior se modifica a:

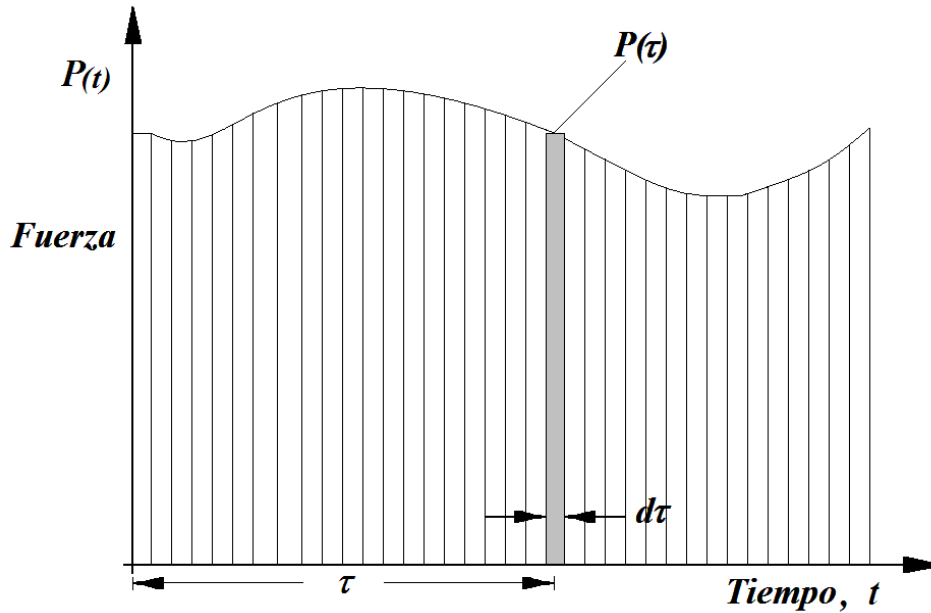
$$\Delta u = \frac{P(\tau)\Delta\tau}{m\omega_a} \cdot e^{-\omega_n t} \cdot \text{sen}\omega_a t \quad (5.3)$$

### 5.3. Excitación general

Cuando un sistema se somete a una excitación arbitraria expresada en términos de fuerza como la mostrada en la figura 56, se aprovechan los resultados de la sección anterior y se aplica un corrimiento en el tiempo para el impulso producido en el tiempo  $\tau$ , donde la ecuación (5.2) se modifica a:

$$du_{(t)} = \frac{P(\tau)d\tau}{m\omega_n} \text{sen}\omega_n(t - \tau) \quad (5.4)$$

Figura 56. **Fuerza de excitación general**



Fuente: elaboración propia.

La función de excitación puede entonces considerarse como una serie de impulsos cortos, que se presentan a incrementos de tiempo  $d\tau$ , cada uno de los cuales produce una respuesta diferencial en el tiempo  $t$  de la forma dada por la ecuación (5.4). Por lo tanto se puede concluir que el desplazamiento total en el instante  $t$  debido a la acción continua de la fuerza  $P(\tau)$  está dado por la suma o integral de los desplazamientos diferenciales  $du_{(t)}$  desde el instante  $\tau = 0$  al instante  $\tau = t$ , esto es, integrando (5.4), se llega a:

$$u_{(t)} = \frac{1}{m\omega_n} \cdot \int_0^t P(\tau) \text{sen}\omega_n(t - \tau) d\tau \quad (5.5)$$

Dado que la carga general puede durar el tiempo que sea, puede requerirse el amortiguamiento, con lo que la ecuación (5.5), se modifica a:

$$u_{(t)} = \frac{1}{m\omega_a} \cdot \int_0^t P(\tau) \cdot e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \cdot \text{sen}\omega_a(t-\tau) d\tau \quad (5.6)$$

Las integrales (5.5) y (5.6) se conocen como “integrales de convolución o de Duhamel”, representan el desplazamiento total producido por la fuerza excitante  $P(\tau)$  aplicada al oscilador simple e incluye ambos componentes del movimiento: el permanente y el transitorio.

Lo que no incluye según la obtención de las integrales es el efecto de las condiciones iniciales, si bien es cierto se consideró la condición del impulso, pero debe recordarse que se aplicó un corrimiento, donde los impulsos diferenciales son inherentes a lo largo de toda la función de excitación; antes de la carga, el cuerpo puede estar en movimiento, lo que corresponde a las propias condiciones iniciales del cuerpo. Si hay condiciones iniciales, entonces es necesario superponer las soluciones complementarias:

$$u_{(t)} = u_{(0)} \cos\omega_n t + \frac{\dot{u}_{(0)}}{\omega_n} \text{sen}\omega_n t + ec \text{ [(5.5) ó (5.6)]} \quad (5.7)$$

Para el caso con amortiguamiento, es válido el mismo argumento:

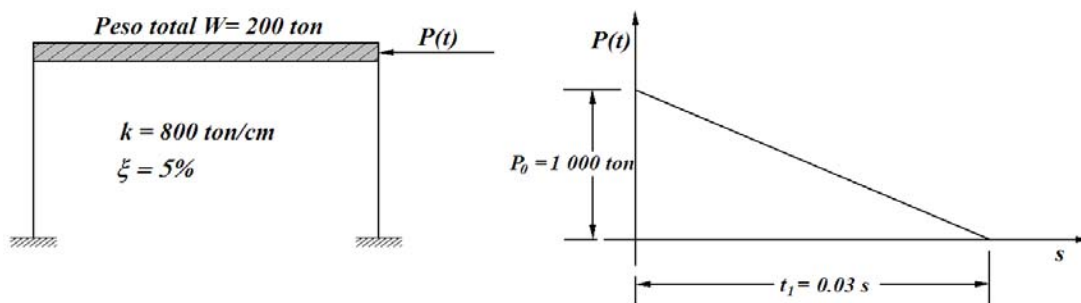
$$u_{(t)} = e^{-\xi\omega_n t} \left( u_{(0)} \cos\omega_a t + \frac{\dot{u}_{(0)} + \xi u_{(0)} \omega_n}{\omega_a} \text{sen}\omega_a t \right) + ec \text{ (5.6)} \quad (5.8)$$

Si la expresión analítica de la función  $P(\tau)$  es desconocida, las integrales de convolución (o de Duhamel) pueden ser calculadas aproximadamente, usando un método numérico apropiado.

La integral de convolución expresa un fenómeno físico en forma matemática simplificada del fenómeno estudiado, proveyendo límites finitos reales equivalentes a tendencias infinitas.

Ejemplo sobre la integral de convolución: un sistema estructural de un grado de libertad con un peso de 200 ton, una rigidez lateral total de 800 ton/cm y una razón de amortiguación del 5% ( $\xi = 0,05$ ), experimentan una fuerza explosiva, que decrece linealmente en 0,03 s, desde un valor inicial de 1 000 ton a cero. Determinar (a) el máximo desplazamiento horizontal y (b) la fuerza que absorbe el amortiguamiento.

Figura 57. **Marco expuesto a carga explosiva**



Fuente: elaboración propia.

Solución: “fase I”  $0 < t < t_1 (= 0,03 \text{ s})$ . La función que describe la carga en términos generales en esta fase es:

$$P(t) = P_0 \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)$$



La solución particular a la ecuación de movimiento para esta carga es:

$$u_p(t) = \frac{P_0}{k} \left( 1 - \frac{t}{t_1} \right)$$

La carga por explosión es de muy corta duración, por lo que el amortiguamiento del sistema no logra responder  $\xi = 0$ , aplicando en la solución general las condiciones iniciales en reposo ( $u(0) = 0$  y  $\dot{u}(0) = 0$ ) se determinan las constantes de integración A y B

$$u(t) = A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{P_0}{k} \left( 1 - \frac{t}{t_1} \right)$$

Obteniendo la ecuación de respuesta para esta fase:

$$u(t) = \frac{P_0}{k} \left( \frac{\operatorname{sen} \omega_n t}{\omega_n t_1} - \cos \omega_n t - \frac{t}{t_1} + 1 \right)$$

Claro que esta solución puede obtenerse por la integral de convolución ecuación (5.5)

$$u(t) = \frac{1}{m \omega_n} \cdot \int_0^t P(\tau) \operatorname{sen} \omega_n (t - \tau) d\tau$$

$$u(t) = \frac{\omega_n}{k} \cdot \int_0^t P_0 \left( 1 - \frac{\tau}{t_1} \right) \operatorname{sen} \omega_n (t - \tau) d\tau$$

Integrando por partes la ecuación de movimiento para esta fase es:

$$u(t) = \frac{P_0}{k} \left( \frac{\operatorname{sen} \omega_n t}{\omega_n t_1} - \cos \omega_n t - \frac{t}{t_1} + 1 \right)$$

Sustituyendo los valores resulta la ecuación de respuesta en cm:

$$u(t) = 1.25 \left( \frac{\text{sen}62,64t}{1,879} - \cos62,64t - \frac{t}{0,03} + 1 \right)$$

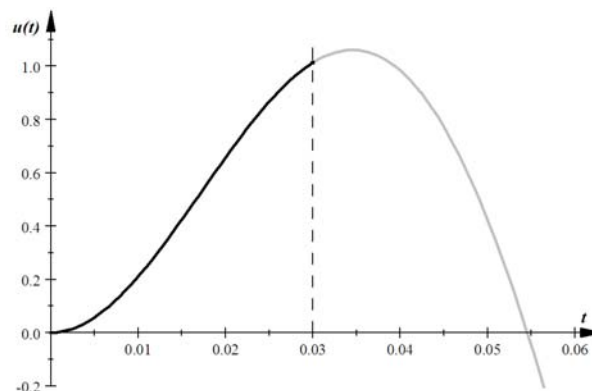
(a)  $u_{\max}$ ? el período del sistema es  $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \equiv \frac{2\pi}{62.64} \text{ s} \cong 0,10 \text{ s}$ .

Si la duración de la fuerza, es mayor que el período del sistema, el valor máximo ocurre durante la fuerza excitadora; si el tiempo de la fuerza impulsora es menor al período del sistema, puede o no estar el máximo desplazamiento durante ese lapso. Diferenciando la ecuación de movimiento e igualando a cero:

$$t = 0,03454 \text{ s} \quad \rightarrow \quad u_{(0.03454)} \equiv u_{\max} = 1,061 \text{ cm}$$

No obstante, el valor del tiempo para el desplazamiento máximo ocurre mas allá de la duración de la fuerza excitatriz, por lo que el resultado ya no es válido, tal como se puede visualizar en la figura 58.

Figura 58. **Curva que describe la ecuación de movimiento**



Fuente: elaboración propia.

En la figura sólo es válido el trazo en negro, del intervalo  $0 < t < 0,03$  s, y el valor de desplazamiento máximo ocurre en el trazo gris, cuando  $t = 0,03454$  s donde la ecuación de movimiento encontrada ya no es válida por lo que seguramente el desplazamiento máximo ocurre en la fase II.

“Fase II”  $t \geq t_1$  ( $= 0,03$  s). Los valores en el tiempo para  $t = 0,03$  s de las ecuaciones anteriores, son:

$$u_{(0,03)} = 1,25 \left( \frac{\text{sen}62,64(0,03)}{1,879} - \cos62,64(0,03) - \frac{(0,03)}{0,03} + 1 \right) \equiv 1,013 \text{ s}$$

$$\dot{u}_{(0,03)} = 41,67 \cos62,64(0,03) + 78,3 \sin62,64(0,03) - 41,67 \equiv 20,29 \text{ cm/s}$$

Sustituyendo estos valores con  $P(\tau) = 0$ , en la ecuación (5.8) resulta:

$$u_{(t)} = e^{-\xi\omega_n t} \left( u_{(0,03)} \cos\omega_a t + \frac{\dot{u}_{(0,03)} + \xi u_{(0,03)} \omega_n}{\omega_a} \text{sen}\omega_a t \right) + \frac{1}{m\omega_n} \cdot \int_0^t P(\tau) \text{sen}\omega_n(t - \tau) d\tau$$

$$u_{(t)} = e^{-3,132t} (1,013 \cos62,56t + 0,375 \text{sen}62,56t)$$

El tiempo de valor máximo usando la técnica del ejemplo de vibración libre amortiguada se da cuando se cumpla la ecuación:

$$e^{-3,132t} (1,013 \cos62,56t + 0,375 \text{sen}62,56t) = 1,0802 e^{-3,132t}$$

$$t = 0,005374 \text{ s} \quad \rightarrow \quad \boxed{u_{(0,005374)} \equiv u_{\max} = 1,062 \text{ cm}}$$

(b)  $F_{ab}$ ? sea  $F_{ab}$  la fuerza que absorbe el amortiguamiento, aunque lo que se solicita no deja de ser impreciso, pues al final el amortiguamiento llega a detener el movimiento, debe entenderse entonces que se quiere, la diferencia entre la máxima fuerza sin amortiguamiento y con amortiguamiento.

Si se ignora la amortiguación en el sistema, la ecuación de movimiento es:

$$u(t) = u_{(0,03)} \cos \omega_n t + \frac{\dot{u}_{(0,03)}}{\omega_n} \sin \omega_n t \rightarrow u(t) = 1,013 \cos 62,64 t + 0,3239 \sin 62,64 t$$

El máximo desplazamiento está dada por:

$$u_{\max} = \sqrt{1,013^2 + 0,3239^2} \rightarrow u_{\max} = 1,064 \text{ cm}$$

De una fuerza máxima sin amortiguamiento:

$$F_{sa} = k u_{\max} = (800 \text{ ton/cm})(1,064 \text{ cm}) \rightarrow F_{sa} = 851,2 \text{ ton}$$

A una fuerza máxima con amortiguamiento de:

$$F_{ca} = k u_{\max} = (800 \text{ ton/cm})(1,062 \text{ cm}) \rightarrow F_{ca} = 849,6 \text{ ton}$$

Por tanto, la fuerza absorbida es:

$$F_{ab} = F_{sa} - F_{ca} \equiv 851,2 \text{ ton} - 849,6 \text{ ton} \rightarrow F_{ab} = 1,6 \text{ ton}$$

El mismo resultado se obtiene con la diferencia de desplazamientos:

$$F_{ab} = k(\Delta u_{\max}) \equiv (800 \text{ ton/cm})(1,064 \text{ cm} - 1,062 \text{ cm}) \rightarrow \boxed{F_{ab} = 1,6 \text{ ton}}$$

En realidad la fuerza que absorbe el amortiguamiento de la estructura es mínima, es mejor considerar la estructura sin amortiguamiento para propósitos de diseño, donde se presentan las ventajas de que, el cálculo es simple y se tiene un rango conservador por las imprecisiones físicas y numéricas.

## **6. RESPUESTA SÍSMICA A SISTEMAS LINEALES**

### **6.1. Introducción**

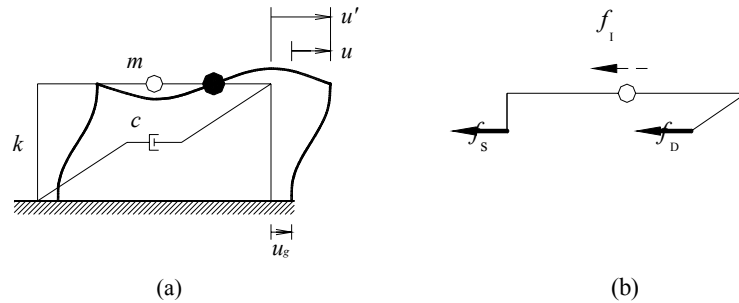
He aquí la espina dorsal de este tratado, “los espectros lineales de respuesta”, aspecto esencial para entender los problemas del diseño, que con su refinada interpretación generan los espectros de diseño sísmico. La caracterización del movimiento del suelo (máximo o probable) por medio de espectros de respuesta, es generalmente, el paso final de todo estudio de peligrosidad dirigido a diseño sismorresistente, con el que concluye el aspecto más sismológico del problema. A partir de ahí, comienza el análisis de la respuesta de la estructura, cuyo diseño se pretende que se aborde ya desde un punto de vista ingenieril.

Los registros acelerográficos obtenidos de los movimientos del terreno inducidos por un sismo, son en general movimientos que varían aleatoriamente en el tiempo. El siguiente paso es obtener la respuesta de un sistema dinámico de un grado de libertad a uno de estos registros acelerográficos.

### **6.2. Ecuación de movimiento**

El problema que concierne (según lo lógico) es el comportamiento de la estructura que está sujeta a movimiento sísmico en su base, es debido a ello que a continuación se explica la ecuación de movimiento que gobierna este fenómeno.

Figura 59. **Movimiento sísmico en la base y diagrama de cuerpo libre**



Fuente: CHOPRA, Anil K. Dynamics of structures. p. 20.

En la figura 59, el desplazamiento del suelo ( $u_g$ ), el desplazamiento total de la masa ( $u_t$ ) y el relativo entre la masa y el suelo ( $u$ ) están relacionados por la expresión:

$$u_{t(t)} = u_{(t)} + u_{g(t)} \quad (6.1)$$

Se obtiene la ecuación de equilibrio dinámico de D'Alembert, donde es considerada una fuerza de inercia ficticia que es igual al producto de la masa por la aceleración y actúa en dirección opuesta a la aceleración; este estado, incluida la fuerza de inercia, es un sistema equilibrado en todo instante. Del diagrama de cuerpo libre de la figura 59 (b), se obtiene:

$$f_I + f_D + f_S = 0 \quad (6.2)$$

La fuerza elástica y de amortiguamiento son producidas por el movimiento relativo,  $u$ , entre la masa y la base; entre tanto la fuerza de inercia  $f_I$  es relacionada a la aceleración total de la masa; se utiliza la aceleración total dado que la Segunda Ley de Newton está postulada respecto de una aceleración absoluta.

La fuerza inercial sobre la masa es igual al producto de la masa por la aceleración total  $\ddot{u}_t$ , por:

$$f_I = m\ddot{u}_t \quad (6.3)$$

Sustituyendo las ecuaciones (6.1) y (6.3) en la ecuación (6.2) se tiene:

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_t + c\dot{u} + ku &= 0 \\ m(\ddot{u} + \ddot{u}_g) + c\dot{u} + ku &= 0 \\ m\ddot{u} + c\dot{u} + ku &= -m\ddot{u}_g \end{aligned} \quad (6.4)$$

La ecuación (6.4) es la que gobierna el desplazamiento relativo,  $u(t)$ , del sistema lineal de la figura 59, sujeto a la aceleración del suelo,  $\ddot{u}_{g(t)}$ .

Comparando las ecuaciones (6.4) y la de vibración general  $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_{(t)}$  se observa que la ecuación de movimiento para el mismo sistema sujeto a dos excitaciones por separado ( $\ddot{u}_g$  y  $p_{(t)}$ ) es una y la misma. De este modo, el desplazamiento relativo debido a la aceleración del suelo,  $\ddot{u}_{g(t)}$ , será idéntico al desplazamiento de la estructura con base estacionaria sometida a la acción de una fuerza externa igual a  $-m\ddot{u}_g$ . Por lo tanto, el movimiento del suelo puede ser reemplazado por una fuerza sísmica efectiva (Chopra, 1995).

$$p_{eff(t)} = -m \ddot{u}_{g(t)}$$

Es importante reconocer que esta fuerza actúa en sentido opuesto a la aceleración y sobre todo, que es proporcional a la masa de la estructura. Está claro que para una  $\ddot{u}_{g(t)}$  dada, la respuesta  $u(t)$  del sistema depende sólo de la frecuencia natural,  $\omega_n$ , o del período natural del sistema,  $T_n$ , y del amortiguamiento; es decir  $u \equiv u(t, T_n, \xi)$ .

En la medida que la excitación se hace más compleja, su tratamiento por medio de la integral de convolución, se hace más difícil, si no imposible. Por esta razón hay necesidad de recurrir a métodos numéricos de solución, los cuales utilizan diferentes técnicas y son apropiados para distintos problemas especiales, fácilmente solucionables por medio del computador digital.

La aceleración del suelo durante un sismo varía irregularmente; por tal motivo, la solución continua de la ecuación de movimiento debe ser descartada; por tanto, es necesario el empleo de métodos numéricos para determinar la respuesta estructural.

### **6.3. Métodos paso a paso**

El procedimiento paso a paso es una segunda aproximación a la respuesta general del análisis dinámico, y también es muy adecuado para el análisis de la respuesta no lineal, ya que evita el uso de la superposición. Existen varios métodos paso a paso, pero en todos, la carga y el historial de la respuesta se divide en una secuencia de intervalos de tiempo o "pasos". Entonces, la respuesta a cada paso se calcula a partir de las condiciones iniciales (desplazamiento y velocidad) existentes al inicio de la etapa y del historial de carga durante el paso. Así, la respuesta para cada paso es un análisis independiente, y no hay necesidad de combinar las contribuciones de respuesta en el paso.

De hecho, estos métodos son tan eficaces y convenientes que los análisis en el dominio del tiempo casi siempre se realizan por algún tipo de análisis paso a paso; independientemente de si el comportamiento de respuesta es lineal, el método de la integral de convolución o de Duhamel rara vez se utiliza en la práctica.



### 6.3.1. Método por tramos exactos

Un método paso a paso simple para el análisis de los sistemas de un grado de libertad es el llamado *piecewise exact method* o método de tramos exactos, que se basa en la solución exacta de la ecuación de movimiento de respuesta para una estructura lineal a una carga que varía linealmente durante un intervalo de tiempo discreto.

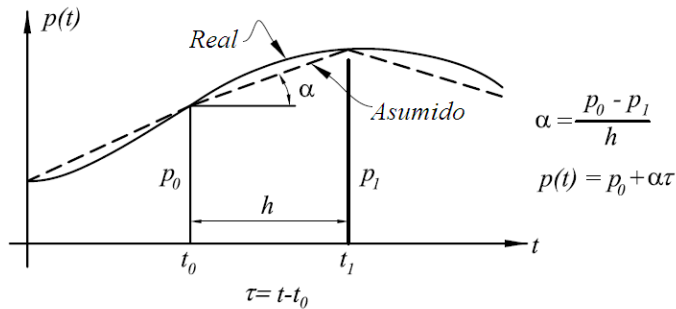
Al utilizar este método, el historial de carga se divide en intervalos de tiempo, por lo general se define por los cambios significativos de la pendiente en la historia real de la carga; entre estos puntos, se supone que la pendiente de la curva de carga se mantiene constante.

Aunque la expresión de respuesta derivada de estas fases de carga linealmente variable es exacta, el historial de carga real es sólo aproximado por los pasos de pendiente constante.

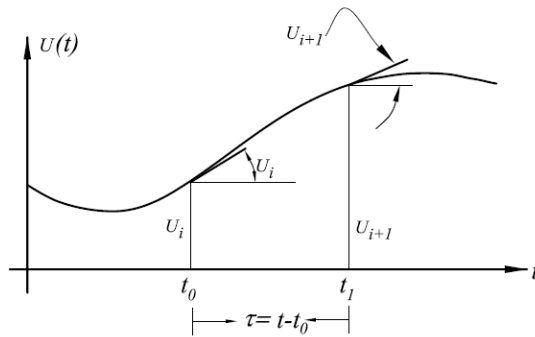
Así, la respuesta calculada por lo general no es una representación exacta de la verdadera respuesta a la carga real, sin embargo, el error puede ser reducido a un valor aceptable sólo por la reducción de la duración de los intervalos de tiempo.

La notación utilizada en la formulación de este método de análisis se define por un paso del historial de carga como se muestra en la figura 60.

Figura 60. **Notación para el análisis por tramos exactos**



(a) *Historial de carga*



(b) *Historial de respuesta*

Fuente: CLOUGH, Ray y PENZIEN, Joseph. Dynamics of structures. p. 113.

La duración de la etapa se denota por  $h$  y que se extiende desde  $t_0$  a  $t_1$ . La supuesta variación lineal de carga durante el paso de tiempo está dada por:

$$p(\tau) = p_0 + \alpha\tau$$

Donde  $\alpha$  es la pendiente constante,  $\tau$  es la variable de tiempo durante el paso, y  $p_0$  es la carga inicial. La introducción de esta expresión en la ecuación general de movimiento dinámico vibratorio para un grado de libertad con sistema de amortiguación viscosa lleva a:  $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 + \alpha\tau$

Como se sabe, la solución o respuesta de esta ecuación está dada por la suma de la parte complementaria y la particular, esto es:

$$u_{(\tau)} = u_{c(\tau)} + u_{p(\tau)}$$

Donde la parte complementaria está dada por

$$u_{c(\tau)} = e^{-\omega_n \tau} (A \operatorname{sen} \omega_a \tau + B \operatorname{cos} \omega_a \tau)$$

y obteniéndose por rutina la solución particular es

$$u_{p(\tau)} = \frac{1}{k} (p_0 + \alpha \tau) - \frac{\alpha c}{k^2}$$

La combinación de estas expresiones y la evaluación de las constantes A y B por consideración de las condiciones iniciales en el momento  $\tau = 0$ , lleva finalmente a la siguiente expresión para el desplazamiento durante el paso de tiempo:

$$u_{(\tau)} = A_0 + A_1 \tau + A_2 e^{-\xi \omega_n \tau} \operatorname{cos} \omega_a \tau + A_3 e^{-\xi \omega_n \tau} \operatorname{sen} \omega_a \tau \quad (6.5)$$

En el que:

$$A_0 = \frac{p_0}{\omega_n^2} - \frac{2\xi\alpha}{\omega_n^3}$$

$$A_1 = \frac{\alpha}{\omega_n^2}$$

$$A_2 = u_0 - A_0$$

$$A_3 = \frac{1}{\omega_a} \left[ \dot{u}_0 + \xi \omega_n A_2 - \frac{\alpha}{\omega_n^2} \right]$$

Es idéntica a la ecuación que se ha estado trabajando, escrita de forma diferente. Del mismo modo la velocidad durante el paso del tiempo es

$$\dot{u}(\tau) = A_1 + (\omega_a A_3 - \xi \omega_n A_2) e^{-\xi \omega_n \tau} \cos \omega_a \tau - (\omega_a A_2 + \xi \omega_n A_3) e^{-\xi \omega_n \tau} \sin \omega_a \tau \quad (6.6)$$

Por supuesto, la velocidad y el desplazamiento al final de este paso del tiempo pasan a convertirse en las primeras condiciones para el próximo paso de tiempo, y entonces las ecuaciones equivalentes se pueden utilizar para el paso siguiente hasta el final de ese paso.

Para situaciones en las que se puede aproximar la carga aplicada por una serie de segmentos de línea recta, el método de tramos exactos, sin duda, es el más eficiente medio para calcular la respuesta de un sistema de un grado de libertad. Sin embargo, siempre debe de recordarse que la carga que se está considerando es sólo una aproximación del verdadero historial de carga, que normalmente es una curva suavemente variable, y que la longitud de paso debe ser elegida con el fin de lograr una aproximación aceptable a la verdadera respuesta.

### 6.3.2. Método de la aceleración lineal

Cuando se pretende determinar la respuesta de un sistema lineal de un grado de libertad utilizando procedimientos paso a paso, en general se conoce el desplazamiento de la masa, su velocidad y su aceleración en un instante  $t$ ; obteniendo su desplazamiento, velocidad y aceleración al final de un intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Si inicialmente se supone el movimiento rectilíneo con una aceleración constante  $a$ , entonces la velocidad  $v$ , después de un intervalo de tiempo  $\Delta t$  está dada por la siguiente expresión:  $v = \int_t^{t+\Delta t} a \, dt = v_0 + (\Delta t)a$

Donde  $v_0$  es la velocidad al comienzo del intervalo. El espacio que se recorre durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$  corresponde a la siguiente expresión:

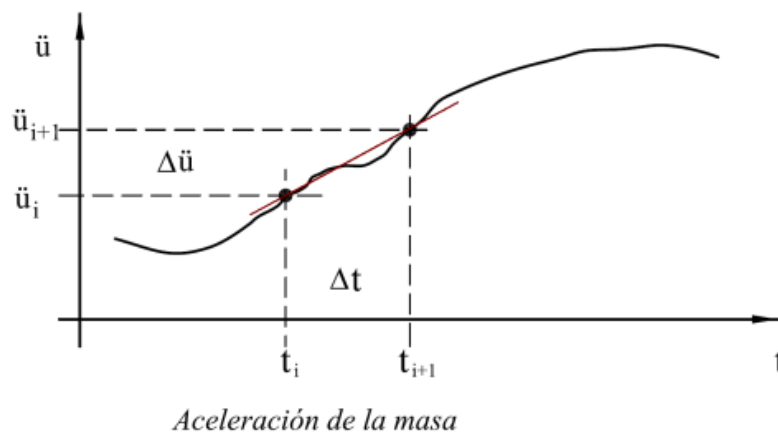
$$s = \int_t^{t+\Delta t} [v_0 + (\Delta t)a] dt = s_0 + (\Delta t)v_0 + (\Delta t)^2 a/2$$

Donde  $s_0$ , es el espacio recorrido hasta el comienzo del intervalo  $\Delta t$ . Si se toma un sistema lineal como el mostrado en la figura 59, el cual es afectado por una fuerza arbitraria que varía en el tiempo  $\mathbf{P}(t)$ , el comportamiento de este sistema está descrito por la ecuación general de vibraciones:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (6.7)$$

La respuesta del sistema en términos de la aceleración de la masa  $\ddot{u}$ , tiene la forma mostrada en la figura 61.

Figura 61. **Supuesta aceleración lineal de la masa**



Fuente: PAZ, Mario. Dinámica estructural. p. 167.

Allí puede observarse que la aceleración de la masa no permanece constante durante el intervalo  $\Delta t$ . Además, el hecho de que la fuerza no permanece constante durante el intervalo, introduce errores en la solución cuando se utiliza la aceleración promedio.

Si se supone que la aceleración varía linealmente durante el intervalo de tiempo; entonces:

$$\ddot{u}_{(t)} = \ddot{u}_i + \left( \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{\Delta t} \right) (t - t_i)$$

Integrando esta expresión se obtiene la ecuación para la velocidad:

$$\dot{u}_{(t)} = \dot{u}_i + \ddot{u}_i(t - t_i) + \left( \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{\Delta t} \right) \frac{(t - t_i)^2}{2}$$

Cuando esta última ecuación se evalúa en el tiempo  $t_{i+1}$  se obtiene la siguiente expresión para la velocidad al final del intervalo  $\Delta t$ :

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \quad (6.8)$$

Integrando la ecuación se obtiene la ecuación para el desplazamiento:

$$u_{(t)} = u_i + \dot{u}_i(t - t_i) + \ddot{u}_i \frac{(t - t_i)^2}{2} + \left( \frac{\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i}{\Delta t} \right) \frac{(t - t_i)^3}{6}$$

De la ecuación anterior se obtiene el recorrido al final del intervalo  $\Delta t$ :

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i(\Delta t) + \ddot{u}_i \frac{(\Delta t)^2}{3} + \ddot{u}_{i+1} \frac{(\Delta t)^2}{6} \quad (6.9)$$

Utilizando la ecuación general de vibración, (6.7), al final del intervalo:

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + ku_{i+1} = p(t = t_{i+1})$$

Ahora se puede despejar el valor de la aceleración al final del intervalo, utilizando las ecuaciones (6.8) y (6.9) para los valores de la velocidad y el desplazamiento, respectivamente:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{p(t = t_{i+1})/m - \omega_n^2 u_i - (2\xi\omega_n + \omega_n^2 \Delta t)\dot{u}_i - (\omega_n \Delta t)(\xi + \omega_n \Delta t/3)\ddot{u}_i}{1 + \xi\omega_n \Delta t + (\omega_n \Delta t)^2/6}$$

El intervalo de evaluación de la respuesta, debe ser lo suficientemente pequeño para garantizar que la respuesta se evalúa adecuadamente. Como mínimo debe corresponder a los puntos en los cuales cambia la fuerza de excitación.

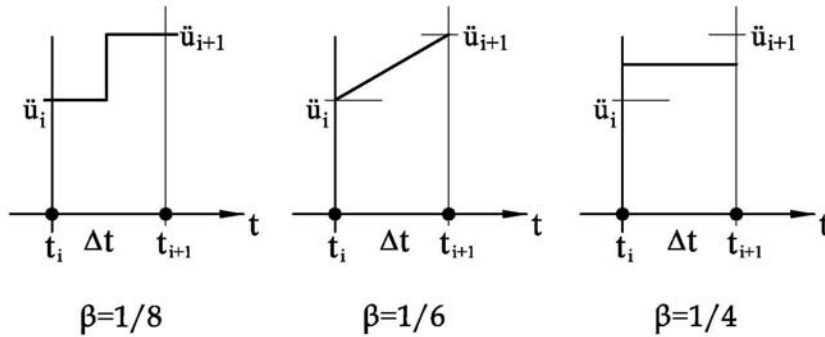
### 6.3.3. Método beta de Newmark

Otra manera de manejar el problema de que la aceleración no es constante durante el intervalo de evaluación fue desarrollada por Newmark (Newmark, 1959), utilizando un estimativo de la aceleración al final del intervalo, que se va corrigiendo por medio de un proceso iterativo lo que hace posible resolver el problema. Al respecto, Newmark propuso utilizar la aceleración  $a$  expresada de la siguiente manera:

$$a = (1 - 2\beta)\ddot{u}_i + 2\beta\ddot{u}_{i+1} \quad (6.10)$$

donde  $\beta$  es una constante que varía entre 0 y 1/2. En la figura 62 se muestra la interpretación que se puede dar a diferentes valores de  $\beta$ .

Figura 62. **Variación de la aceleración de la masa durante el intervalo  $\Delta t$  según el valor  $\beta$ , en el método beta de Newmark**



Fuente: GARCÍA. Luis. Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico. p. 52.

Ahora, utilizando la aceleración promedio y el valor de la aceleración dado por la ecuación (6.10); se obtienen las siguientes expresiones (6.11) y (6.12) para la velocidad y el desplazamiento, al final del intervalo de tiempo  $\Delta t$  en función de los valores al comienzo del intervalo:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \quad (6.11)$$

y

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i(\Delta t) + a \frac{(\Delta t)^2}{2} \quad (6.12)$$

Utilizando los valores de desplazamiento y velocidad al final del intervalo, obtenidos de las dos ecuaciones anteriores en la ecuación de equilibrio (6.7) del sistema, se obtiene un mejor valor de la aceleración al final del intervalo  $\Delta t$ :

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{p(t) - c\dot{u}_{i+1} - ku_{i+1}}{m} \quad (6.13)$$



Este valor de  $\ddot{u}_{i+1}$  se utiliza en la ecuación (6.10) y de nuevo se calculan los valores de  $\dot{u}_{i+1}$ ,  $u_{i+1}$  y  $\ddot{u}_{i+1}$  por medio de las ecuaciones (6.11), (6.12) y (6.13), respectivamente. Este proceso iterativo se repite hasta que se obtenga un valor de la aceleración al final del intervalo, que sea igual, con un error aceptable, a la estimada al inicio del proceso. En ese momento se incrementa el tiempo en un intervalo  $\Delta t$  y se repite el proceso para este nuevo intervalo de tiempo. De esta manera se determinan el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de la masa durante todo el tiempo de interés.

A medida que el intervalo de tiempo  $\Delta t$  que se utilice en el proceso numérico sea menor, mayor será la precisión de la respuesta. En general es recomendable utilizar valores menores de 1/10 del período de vibración del sistema. Respecto de la escogencia del valor de  $\beta$  no existe una regla definida, pero en general con  $\beta = 1/6$ , la respuesta es exacta si la aceleración varía linealmente durante el intervalo, con  $\beta = 1/4$  la respuesta es exacta si la velocidad es constante durante el intervalo. Newmark sugirió que si se utilizan valores entre 1/6 y 1/4, la respuesta es satisfactoria desde todo punto de vista y que un valor de  $\beta = 1/6$  es estable en todos los casos.

En resumen, el procedimiento de solución es el siguiente:

- Con los datos del sistema se selecciona un valor de  $\Delta t$  apropiado, en general menor de 1/10 del período del sistema:  $\Delta t \leq \frac{T}{10}$
- Se incrementa el tiempo (en el primer punto  $i = 1$ ,  $t_i = 0$ ) para localizarse en el punto  $i+1$  de tal manera que:  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ .

- Se estima la aceleración al final del intervalo  $\ddot{u}_{i+1}^0$ . En general se utiliza la aceleración del punto anterior  $\ddot{u}_i$ .
- Se encuentra  $\dot{u}_{i+1}$  utilizando la ecuación (6.11):  $\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \left(\frac{\ddot{u}_{i+1}^0 + \ddot{u}_i}{2}\right) \Delta t$
- Se calcula  $a$  utilizando la ecuación (6.10):  $a = (1 - 2\beta)\ddot{u}_i + 2\beta\ddot{u}_{i+1}^0$  y con este valor se determina  $u_{i+1}$  utilizando la ecuación (6.12):

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

- Se calcula  $\ddot{u}_{i+1}^1$  utilizando la ecuación (6.13):

$$\ddot{u}_{i+1}^1 = \frac{p(t) - c\dot{u}_{i+1} - ku_{i+1}}{m}$$

- Si  $|\ddot{u}_{i+1}^1 - \ddot{u}_{i+1}^0| < \varepsilon$ , donde  $\varepsilon$  es un error aceptable, los valores obtenidos son adecuados y  $\ddot{u}_{i+1}^1$  se convierte en el valor definitivo de  $\ddot{u}_{i+1}$  y el proceso se mueve al siguiente punto,  $i = i+1$ , incrementando el tiempo en el segundo paso. Si el valor del error no es aceptable, se realiza una nueva iteración haciendo  $\ddot{u}_{i+1}^0 = \ddot{u}_{i+1}^1$ , y este nuevo valor se utiliza en el cuarto paso y siguiente.

Ejemplo sobre la respuesta de un *SDF* a un acelerograma: determinar las respuestas (relativas y absoluta) y respuestas máximas (pico) a un sistema de un grado de libertad con período de 1 s y 5% del amortiguamiento crítico, sometido a la aceleración en su base por el sismo de Hollister – South Street and Pine y Drive (a falta de datos de movimiento fuerte en el país).

Los datos se leen en forma horizontal a cada 0,020 segundos; las unidades son  $\text{cm/s}^2$  haciendo un total de 3 000 lecturas.

**Tabla IV. Acelerograma del sismo de Hollister**

-2,132	-1,927	-1,013	-0,851	-1,034	-1,135	-0,619	2,398
3,088	-0,175	-2,14	-1,973	-3,018	-3,426	-4,046	-0,472
1,936	-1,352	-3,201	-3,296	-0,792	-1,064	-0,48	-2,043
-3,352	-3,673	-2,083	-0,92	-3,654	-3,262	-4,746	-2,2
3,083	4,132	-3,002	-5,47	-4,125	-1,179	1,873	-1,012
-0,085	-3,196	-8,309	-6,651	-3,367	-3,805	-3,341	-4,462
-1,382	-1,427	-1,04	2	1,432	0,792	4,043	4,612
1,119	3,295	-0,933	-2,993	-5,64	-5,566	-5,573	-6,177
-2,969	0,977	-2,467	-2,722	-2,613	-8,578	-7,813	-6,254
-2,1	-5,951	-5,768	-1,811	3,449	5,082	4,924	3,447
-9,087	-5,383	2,072	1,855	5,65	8,758	6,658	-3,277
-10,875	-10,249	0,489	4,453	8,523	9,348	-1,22	-5,595
-7,697	-15,152	-13,359	-0,332	-1,047	-5,735	0,044	0,87
-8,955	-9,596	-4,138	4,644	4,993	9,206	8,646	0,109
-7,632	-4,97	-1,429	0,84	6,942	1,075	-6,883	-10,459
-0,152	-0,728	-1,535	-1,762	-2,414	5,145	9,219	-6,025
-15,247	-0,215	11,163	10,836	5,669	1,092	-2,836	5,911
11,962	-1,037	2,15	3,339	8,73	-9,9	-19,759	-21,939
-20,161	-3,186	7,903	22,639	22,792	26,687	8,682	-15,914
-33,469	-20,637	-1,847	1,534	-8,029	-13,711	-19,588	-28,793
-3,484	11,31	16,614	32,339	48,192	33,596	10,529	-3,033
-10,588	9,748	23,739	18,957	10,797	2,355	-20,119	-35,341
-29,753	-8,035	4,231	0,308	-10,493	-28,548	-24,748	-21,363
-20,953	7,924	45,467	48,53	23,704	-1,115	-16,927	-14,388
-5,452	-0,661	3,292	3,449	1,392	10,797	17,429	5,935
13,279	22,026	4,988	-5,615	-1,892	6,497	4,73	-2,97
2,353	3,845	1,157	2,112	-7,515	-26,985	-35,268	-27,738
-5,915	15,735	26,087	28,787	25,93	7,01	-17,795	-13,679
-0,182	7,115	16,304	9,372	-14,316	-19,38	-1,4	20,246
29,528	13,255	-6,922	-16,598	-27,57	-14,811	-2,261	-5,082
-6,28	-1,316	19,823	31,149	24,923	20,978	13,402	2,918
3,304	2,724	-1,692	-7,319	-6,537	7,948	20,358	18,544

Continuación de la tabla IV.

12,315	3,909	-3,984	2,022	11,626	18,018	21,357	19,828
18,465	12,841	0,242	-8,332	-1,988	-0,643	-7,796	-20,497
-33,109	-33,014	-22,981	-7,999	-6,52	-0,045	19,805	38,25
47,238	42,536	26,075	4,687	-6,348	-1,134	-0,139	-6,208
-6,6	-5,506	3,663	12,464	9,463	-1,769	-13,159	-34,453
-58,95	-65,725	-52,881	-37,797	-33,127	-27,888	-23,461	-26,817
-32,95	-20,501	5,606	14,673	16,692	27,162	35,709	43,739
55,628	64,492	69,232	84,991	97,189	90,513	78,839	73,794
89,65	112,55	126,661	131,234	125,587	118,749	112,901	108
95,431	69,656	29,96	-20,111	-56,94	-61,363	-33,803	2,299
27,117	45,088	48,185	44,138	44,655	43,092	39,943	36,401
17,242	-35,283	-107,547	-169,204	-214,917	-235,184	-226,394	-202,944
-161,959	-104,062	-51,072	-25,985	-25,923	-27,024	9,05	76,7
123,729	143,668	160,334	178,589	192,385	201,895	204,05	202,055
208,842	219,719	224,618	221,815	212,353	186,704	137,438	65,924
-33,767	-139,444	-218,949	-270,535	-308,713	-330,487	-340,777	-344,835
-339,46	-329,073	-314,081	-297,881	-284,345	-269,609	-249,504	-218,773
-168,866	-121,728	-95,717	-88,141	-89,403	-87,009	-81,678	-79,302
-87,419	-108,214	-129,741	-142,559	-141,743	-124,144	-96,227	-64,45
-43,669	-33,072	-20,807	-8,126	16,085	49,985	89,816	132,473
172,528	213,091	246,541	277,388	303,858	327,543	346,898	359,696
361,9	347,63	300,441	193,691	63,08	-46,764	-107,789	-120,294
-129,263	-153,437	-175,638	-168,915	-132,97	-86,959	-48,394	-21,81
10,422	45,335	69,244	81,053	91,221	100,424	116,455	134,997
144,349	135,875	106,677	69,885	51,909	62,289	73,95	58,768
8,269	-63,015	-134,308	-185,828	-199,148	-186,256	-174,491	-171,879
-173,164	-172,996	-170,112	-162,297	-149,788	-132,832	-115,933	-107,101
-100,77	-88,499	-66,572	-39,807	-15,301	14,492	49,725	79,917
100,448	115,176	129,213	137,418	135,2	119,867	95,295	69,205
37,976	10,836	-1,701	-9,766	-18,753	-33,83	-47,791	-54,845
-52,586	-37,584	-14,725	6,555	7,888	-19,025	-62,536	-93,195
-96,432	-80,721	-51,751	-0,435	51,244	81,756	82,68	57,543
36,211	50,256	80,831	103,656	121,784	145,925	173,409	192,155
201,539	195,329	165,612	118,552	78,747	57,467	55,996	64,8
73,439	70,774	58,789	40,784	28,774	19,633	1,886	-25,227
-62,019	-103,871	-152,491	-186,984	-203,99	-206,115	-194,298	-169,854

Continuación de la tabla IV.

-129,745	-80,527	-31,88	11,223	53,29	90,353	119,478	136,49
124,495	90,097	36,95	-14,167	-43,042	-51,822	-47,943	-46,98
-57,849	-77,356	-94,608	-105,939	-99,109	-71,16	-30,941	10,077
33,711	38,758	34,171	28,812	30,281	31,234	22,504	-4,84
-44,438	-84,021	-120,613	-147,659	-164,463	-175,453	-175,143	-163,609
-143,875	-122,425	-110,053	-102,775	-90,271	-67,365	-31,038	1,906
21,39	34,67	50,625	72,237	97,14	120,404	140,833	158,365
171,831	186,39	201,766	215,063	225,544	228,705	217,381	186,666
139,967	94,859	56,987	28,63	7,312	-20,156	-47,683	-62,431
-64,816	-60,788	-57,422	-52,747	-44,389	-31,627	-17,093	1,572
23,939	44,962	57,671	60,733	58,15	50,466	42,756	27,406
3,79	-25,487	-42,652	-44,696	-36,708	-22,022	-4,087	15,244
30,224	38,739	38,321	24,087	2,817	-14,46	-32,684	-39,969
-36,339	-24,605	-11,181	0,186	9,665	11,571	6,726	1,992
2,054	5,328	10,08	14,498	20,829	26,665	31,002	28,871
20,272	6,425	-9,389	-14,708	-12,835	-7,44	-0,929	9,382
18,65	21,162	16,256	1,525	-13,199	-24,268	-29,025	-31,288
-33,173	-33,172	-35,622	-39,047	-44,248	-51,833	-64,524	-77,227
-86,958	-89,604	-86,098	-72,965	-47,528	-13,998	22,373	52,405
69,535	74,707	76,692	77,07	75,188	68,981	60,703	49,926
40,536	30,25	16,747	1,219	-14,339	-27,749	-38,979	-53,929
-71,163	-83,854	-90,569	-93,131	-94,477	-89,602	-75,672	-52,65
-27,848	-9,664	1,26	6,168	6,003	2,063	-9,678	-23,805
-30,389	-32,077	-29,622	-24,281	-24,382	-28,484	-35,424	-41,509
-45,032	-42,767	-34,309	-23,506	-8,802	5,65	20,21	29,564
32,767	36,311	43,599	52,027	59,587	65,602	70,388	77,347
86,851	96,739	104,839	110,478	112,078	110,023	99,725	79,458
51,519	20,579	-1,149	-12,323	-17,526	-20,13	-24,461	-26,679
-21,988	-11,222	-0,887	2,859	2,127	-0,815	-5,159	-6,654
-3,277	6,008	12,39	13,067	10,381	2,044	-8,531	-19,684
-27,228	-30,626	-34,824	-37,301	-39,691	-38,292	-32,259	-21,811
-5,37	12,731	27,568	38,127	44,24	47,648	49,866	49,571
45,967	40,302	35,215	31,387	25,814	13,867	-3,594	-21,796
-41,222	-55,061	-58,274	-54,513	-42,544	-31,132	-23,833	-24,885
-33,356	-44,7	-57,043	-66,965	-75,662	-82,334	-85,985	-88,315
-85,954	-77,554	-64,588	-48,685	-32,946	-17,112	-3,79	5,509

Continuación de la tabla IV.

11,896	18,359	25,906	37,179	44,71	48,09	47,235	43,63
37,151	24,216	13,097	6,736	7,062	7,824	9,342	9,325
7,813	3,887	-1,934	-5,587	-11,275	-19,43	-29,366	-36,281
-39,16	-36,625	-33,201	-27,637	-19,721	-10,818	1,389	12,231
20,014	21,342	19,303	17,801	19,358	24,312	29,879	31,395
26,657	17,723	8,776	1,639	-5,946	-14,097	-22,818	-33,07
-42,593	-48,849	-49,999	-49,347	-42,137	-29,977	-22,234	-19,237
-21,258	-26,435	-31,624	-35,065	-33,647	-23,91	-12,164	-1,846
2,268	-0,341	-6,875	-12,317	-12,018	-7,604	0,564	8,75
14,554	16,807	16,018	13,704	9,321	5,194	1,372	-0,402
2,723	7,531	13,381	19,761	21,029	20,483	16,615	9,373
3,025	-0,5	1,807	6,566	13,369	21,64	27,619	30,431
27,478	18,147	6,526	-6,235	-14,339	-24,741	-39,553	-51,532
-60,378	-63,968	-63,317	-57,614	-48,815	-38,783	-26,896	-13,77
-3,365	5,685	16,071	22,382	24,062	19,588	9,788	0,971
-4,532	-5,749	-3,367	2,949	9,295	13,428	13,529	7,547
-0,051	-8,127	-13,543	-15,043	-15,725	-16,951	-19,296	-17,584
-11,478	-3,588	3,557	9,707	13,194	12,937	12,902	13,031
14,828	17,017	18,023	17,186	15,74	14,025	14,588	16,852
18,748	21,363	24,186	29,019	35,859	44,197	53,602	60,704
68,172	74,313	77,179	76,462	73,083	68,361	64,53	65,377
68,216	69,079	67,992	64,751	58,375	52,301	46,925	47,27
49,796	53,342	56,139	55,073	52,209	44,017	36,625	29,877
23,149	17,446	13,629	10,966	10,446	11,648	12,69	12,575
8,92	1,364	-10,145	-19,741	-24,212	-24,084	-20,777	-17,262
-14,096	-15,159	-16,442	-16,896	-17,09	-11,29	-3,313	2,781
4,251	0,143	-4,358	-8,943	-14,141	-19,624	-21,789	-19,266
-15,077	-8,803	-2,868	2,089	-0,949	-11,489	-24,689	-33,086
-35,482	-33,692	-32,6	-34,097	-38,801	-47,646	-54,796	-60,596
-61,988	-59,565	-51,587	-40,832	-32,43	-24,935	-18,983	-15,06
-13,782	-13,589	-14,846	-17,115	-17,352	-12,707	-2,96	7,81
15,784	18,448	18,361	15,218	12,888	11,73	9,038	8,139
6,468	3,232	-0,952	-5,415	-7,117	-8,528	-13,035	-21,374
-29,555	-34,203	-36,948	-37,252	-35,262	-27,866	-14,126	1,406
12,87	18,752	18,957	17,183	15,403	13,336	11,899	8,397
7,635	8,278	12,088	20,328	28,048	34,257	38,661	41,628

Continuación de la tabla IV.

44,033	45,361	45,532	42,67	36,672	29,597	23,061	19,127
18,46	18,703	16,936	11,024	3,665	-2,185	-7,216	-7,996
-8,484	-8,128	-9,253	-13,249	-16,948	-22,363	-24,636	-23,88
-21,89	-21,784	-21,789	-21,751	-21,842	-20,53	-17,402	-12,358
-7,705	-5,755	-4,59	-2,837	-4,024	-7,154	-11,824	-16,874
-21,852	-29,884	-40,537	-50,079	-56,353	-59,51	-63,26	-66,995
-69,3	-70,361	-68,733	-65,204	-61,74	-59,015	-55,409	-51,252
-48,828	-47,057	-43,506	-37,717	-26,471	-12,234	2,737	15,7
22,849	28,797	30,22	31,395	31,311	30,473	30,03	27,267
26,371	25,136	21,343	14,946	8,58	1,008	-6,228	-11,267
-12,84	-9,705	-5,244	-0,416	1,805	-0,056	-5,5	-12,079
-14,487	-14,868	-10,27	-4,055	3,052	8,638	10,12	9,427
5,897	5,671	10,383	17,076	23,645	28,655	30,151	28,591
22,718	15,553	10,14	8,267	8,182	7,415	7,15	4,98
1,818	-2,488	-6,763	-7,798	-9,073	-10,235	-11,816	-15,003
-17,448	-17,523	-11,364	-1,119	9,447	15,877	22,184	28,609
30,267	28,593	23,056	16,068	5,795	-8,116	-19,744	-23,999
-21,729	-18,532	-18,265	-18,142	-16,23	-14,45	-12,029	-10,062
-6,914	-4,682	-3,643	0,287	4,472	8,086	11,193	13,011
13,554	13,529	13,434	11,599	10,946	11,042	10,028	9,605
10,781	13,742	17,191	18,03	15,454	11,547	6,916	2,952
-0,803	-0,573	2,407	5,755	11,266	16,978	21,691	23,91
24,624	23,701	21,197	17,394	14,21	12,555	11,43	11,458
10,921	10,576	9,188	5,675	0,1	-6,395	-10,873	-16,629
-22,378	-27,721	-31,431	-31,43	-30,147	-27,265	-25,115	-23,962
-22,169	-20,387	-16,37	-11,16	-5,317	1,105	7,543	12,791
17,444	20,971	24,762	28,979	32,52	35,818	38,255	43,522
49,457	55,12	60,588	64,976	69,008	71,188	71,396	69,981
67,275	63,774	60,774	60,544	60,493	60,466	58,619	55,154
51,797	48,609	46,089	43,217	39,126	33,721	26,517	19,173
14,914	10,703	5,697	0,01	-5,465	-10,152	-15,319	-18,507
-20,814	-22,811	-24,858	-26,08	-27,508	-29,263	-31,132	-32,855
-34,037	-34,212	-32,469	-29,995	-28,314	-26,384	-23,513	-22,516
-21,493	-22,204	-26,485	-29,99	-32,568	-31,035	-26,29	-20,609
-13,261	-8,047	-5,586	-5,775	-6,777	-8,837	-10,264	-11,536
-12,487	-13,651	-15,606	-17,804	-19,878	-20,321	-20,513	-19,28

Continuación de la tabla IV.

-19,468	-20,549	-20,451	-20,141	-18,97	-18,159	-18,179	-19,216
-21,858	-23,756	-24,285	-24,471	-23,863	-21,861	-19,486	-16,005
-13,224	-11,611	-11,022	-11,018	-11,519	-12,467	-13,465	-13,438
-11,686	-9,684	-6,525	-1,954	0,249	1,101	2,362	4,861
9,486	13,239	17,909	19,638	19,71	18,361	14,474	9,791
4,559	-1,181	-5,778	-9,524	-12,432	-13,72	-14,884	-15,169
-16,221	-16,831	-19,547	-21,273	-22,218	-25,529	-29,129	-33,327
-36,214	-37,16	-39,278	-40,27	-38,951	-36,765	-32,922	-28,017
-23,605	-20,732	-18,928	-15,391	-10,859	-5,972	-2,283	-1,267
-2,255	-5,139	-7,542	-9,866	-13,584	-14,423	-15,261	-17,006
-17,3	-17,549	-15,726	-13,753	-10,818	-6,86	-2,707	1,515
6,031	9,058	11,718	13,452	13,355	12,343	10,968	10,707
11,348	13,914	16,289	18,969	20,302	22,071	25,541	28,07
29,994	30,658	30,468	30,837	30,964	30,865	30,936	30,967
30,265	28,439	26,975	25,562	24,415	23,908	23,558	24,063
24,455	24,321	24,016	23,522	22,08	19,385	16,141	14,113
10,171	6,11	1,923	-0,918	-1,506	-0,497	4,467	9,462
13,727	15,006	14,766	13,611	11,811	10,424	8,676	6,242
2,195	-3,23	-7,713	-11,639	-14,144	-14,479	-14,394	-13,234
-11,346	-11,333	-10,221	-9,603	-7,213	-4,804	-5,487	-4,554
-5,14	-5,765	-7,932	-10,02	-11,994	-13,564	-14,281	-14,611
-12,726	-11,029	-7,874	-5,374	-3,802	-2,827	-1,711	0,557
2,383	7,517	11,656	15,234	16,731	16,359	17,05	15,743
15,203	15,078	15,166	15	14,948	14,491	13,675	12,792
12,373	12,719	12,293	12,304	10,821	9,766	9,748	9,22
7,346	5,751	5,641	5,621	5,527	5,656	6,579	8,007
7,825	8,575	10,176	12,593	14,634	15,461	16,371	16,247
16,875	16,491	15,18	12,627	9,353	5,416	2,125	-0,713
-2,646	-4,908	-7,263	-7,949	-9,341	-9,76	-9,693	-8,32
-6,365	-6,657	-5,005	-3,282	-1,152	-0,265	-0,837	-2,035
-5,008	-7,557	-11,316	-13,823	-15,316	-16,294	-16,941	-16,964
-18,151	-19,372	-20,054	-22,562	-22,28	-23,201	-23,932	-22,995
-20,486	-16,229	-13,841	-12,094	-10,737	-9,535	-8,617	-5,013
-0,271	4,474	7,245	9,624	9,281	6,771	3,829	-0,352
-3,59	-5,99	-6,22	-7,428	-9,087	-8,773	-10,181	-11,576
-12,653	-14,187	-13,305	-14,221	-14,505	-14,256	-12,884	-11,917



Continuación de la tabla IV.

-11,889	-11,853	-11,733	-12,074	-13,591	-14,398	-16,806	-17,095
-18,441	-19,533	-19,834	-18,434	-17,057	-17,066	-14,672	-14,448
-14,437	-12,412	-9,303	-3,989	-0,738	1,539	4,199	4,422
6,011	6,865	7,28	5,943	4,371	2,635	1,825	1,129
1,252	1,781	1,916	2,688	1,73	0,639	-3,189	-1,925
-1,156	-0,409	1,569	0,943	0,993	-1,031	-0,769	1,142
1,726	1,551	1,593	1,556	1,154	0,16	-0,958	-1,189
0,041	1,526	2,933	5,337	7,948	10,773	12,049	13,809
14,915	14,078	12,876	12,186	12,307	12,223	12,242	12,133
12,168	12,146	12,159	12,149	12,163	12,131	12,249	13,573
14,834	14,856	14,422	12,711	12,372	10,609	9,734	9,69
10,473	12,461	11,91	12,379	11,906	11,742	11,408	8,999
7,153	4,715	2,46	0,363	-1,79	-3,908	-6,286	-9,345
-11,821	-11,617	-12,005	-10,951	-8,612	-5,422	-2,276	-0,785
-1,28	-1,816	-2,457	-3,895	-1,96	-1,041	1,342	3,325
3,625	5,711	6,244	6,8	6,07	6,305	4,877	3,711
3,752	4,167	6,458	8,532	9,61	10,368	11,873	10,304
10,016	9,438	9,888	11,775	12,759	14,581	16,037	17,543
18,08	16,803	14,215	10,968	6,83	3,458	-0,693	-4,032
-6,238	-6,415	-4,278	-1,945	0,357	1,625	3,616	3,459
1,037	-0,17	-4,071	-5,805	-4,043	-3,443	-1,669	0,007
1,561	1,835	1,427	1,761	1,175	0,561	0,133	-1,148
-0,973	-1,126	-1,015	-1,111	-1,03	-1,099	-1,084	0,418
1,824	1,258	3,184	3,897	2,714	4,532	3,875	5,118
6,443	8,157	9,623	9,425	9,5	10,676	10,555	10,833
10,272	9,552	9,332	7,264	3,671	0,131	-3,054	-5,281
-7,239	-8,756	-9,836	-11,464	-13,615	-17,288	-17,122	-19,757
-19,86	-20,19	-17,989	-14,712	-14,673	-12,262	-11,966	-11,941
-11,929	-12,011	-10,634	-9,269	-9,343	-9,131	-10,322	-12,469
-13,99	-16,517	-17,628	-17,749	-17,608	-18,177	-16,113	-13,283
-11,699	-10,128	-10,522	-10,387	-10,592	-10,539	-10,694	-10,561
-10,761	-10,631	-10,736	-8,654	-8,124	-7,185	-4,876	-2,815
-0,611	0,563	0,993	-0,1	-2,78	-6,556	-11,363	-15,518
-16,173	-18,158	-19,16	-17,887	-16,052	-16,08	-16,247	-14,444
-13,223	-13,756	-12,111	-10,43	-11,042	-9,888	-9,818	-10,344
-11,917	-13,426	-15,23	-16,309	-15,863	-16,185	-15,939	-16,583

Continuación de la tabla IV.

-16,282	-14,745	-12,294	-9,053	-5,329	-0,014	3,864	6,989
9,443	11,057	11,467	11,626	11,45	13,233	14,614	14,193
16,579	17,167	19,17	20,077	19,902	19,8	18,511	19,097
17,698	15,828	17,588	17,622	17,617	17,608	17,594	19,684
20,338	19,819	21,308	23,13	24,938	25,737	25,462	25,748
25,549	25,986	24,202	23,456	22,083	20,342	20,754	19,391
18,239	17,782	15,151	13,191	12,059	12,568	12,608	13,193
15,528	15,321	15,75	15,442	15,886	14,748	13,045	12,973
13,21	10,966	10,505	9,901	7,932	7,694	7,938	6,69
4,793	5,423	2,806	0,606	0,232	-1,025	-2,621	-3,159
-2,739	-3,465	-5,38	-5,767	-7,806	-8,591	-8,137	-8,954
-10,161	-10,745	-11,118	-11,144	-11,119	-11,133	-11,012	-11,113
-10,889	-13,251	-13,411	-13,683	-15,803	-15,949	-15,603	-15,886
-15,279	-16,165	-15,812	-17,117	-17,414	-15,323	-14,888	-12,749
-11,171	-9,735	-7,835	-6,987	-4,829	-4,337	-3,083	-1,435
-0,235	1,507	1,109	3,492	3,981	3,36	4,129	3,813
1,715	1,59	-0,342	-1,302	-4,163	-6,325	-6,622	-8,782
-9,055	-8,987	-9,119	-8,832	-9,97	-9,94	-9,118	-9,352
-8,955	-8,895	-6,888	-6,315	-4,569	-3,421	-3,778	-2,951
-2,25	-2,143	-3	-3,526	-3,361	-3,461	-4,143	-3,69
-3,262	-3,519	-3,272	-3,54	-3,211	-4,574	-5,749	-6,371
-8,656	-8,625	-8,792	-8,479	-8,889	-6,975	-5,953	-5,282
-2,855	-1,635	0,396	1,682	3,467	4,737	4,746	2,71
1,984	-0,017	-0,675	-0,655	-0,925	-0,521	-0,673	-0,591
-0,627	-0,68	-3,036	-3,348	-3,829	-6,309	-5,587	-6,983
-7,898	-5,933	-6,166	-4,057	-3,227	-1,53	1,057	2,029
1,963	3,467	4,313	2,589	1,927	2,08	1,396	-0,616
-0,39	-2,021	-3,386	-3,685	-4,762	-3,728	-3,481	-3,368
-3,558	-2,852	-0,997	-0,932	-0,495	-0,668	-0,568	0,035
-0,561	1,622	1,819	3,585	4,51	4,759	6,642	7,168
8,431	9,225	11,293	12,366	14,136	15,216	16,974	17,815
18,178	18,934	18,935	20,951	21,478	22,75	23,382	24,864
26,202	25,944	24,795	23,853	22,534	20,761	18,005	14,936
12,784	9,75	7,43	5,726	4,604	4,548	4,5	4,6
3,776	2,708	1,668	1,367	2,817	3,575	4,463	4,767
6,281	7,317	6,239	5,833	6,081	5,829	6,698	7,335

Continuación de la tabla IV.

7,201	7,193	5,641	4,677	4,024	2,602	1,875	1,905
0,778	-0,872	-2,37	-4,564	-6,203	-6,154	-6,22	-6,201
-6,03	-4,862	-3,609	-3,878	-3,565	-3,553	-3,576	-3,504
-3,03	-3,434	-3,592	-3,534	-3,594	-3,519	-3,904	-3,563
-3,58	-3,58	-3,265	-1,472	-0,98	-0,093	1,969	1,649
2,003	0,783	0,231	0,924	-0,471	-0,955	-0,695	-0,976
-0,66	-1,061	-0,19	0,352	-0,605	-1,121	-3,102	-5,496
-7,699	-9,994	-11,369	-12,092	-13,903	-15,019	-17,036	-16,94
-16,971	-17,649	-18,748	-19,377	-18,774	-19,482	-19,741	-18,832
-18,36	-17,175	-16,974	-15,8	-14,564	-13,527	-12,182	-11,323
-9,679	-8,871	-7,584	-6,18	-4,882	-3,764	-3,834	-3,997
-2,614	-3,545	-3,285	-3,446	-3,016	-2,467	-3,763	-3,958
-2,918	-2,852	-3,019	-3,127	-3,127	-4,188	-5,998	-6,05
-6,238	-6,098	-4,826	-3,583	-3,631	-1,54	-0,652	-1,077
0,852	2,028	2,699	3,334	3,062	3,396	3,916	1,842
2,023	0,982	-0,722	-0,729	-0,869	-0,808	-0,531	1,119
1,835	1,82	1,946	1,837	1,858	1,806	1,889	1,692
0,927	0,253	2,399	4,419	4,295	6,06	7,077	9,155
9,109	9,234	10,122	9,73	9,979	9,89	7,975	6,807
4,982	4,497	3,124	1,8	1,756	-0,739	-0,655	-0,917
-0,64	-1,107	-1,332	0,64	1,882	1,738	2,248	3,015
4,352	4,488	4,173	4,592	4,455	4,558	4,483	4,54
4,504	4,515	4,566	3,646	1,885	1,989	0,261	-0,788
-0,733	-0,821	-0,654	-2,413	-1,42	0,359	1,964	1,884
3,25	4,656	4,629	4,85	3,656	2,498	2,057	2,015
2,059	1,791	1,017	0,786	0,272	1,156	2,169	2,974
5,283	6,83	8,973	9,966	10,978	12,931	14,09	15,632
15,162	15,887	16,161	15,305	15,353	15,522	13,925	12,548
12,794	11,689	10,268	9,91	9,948	9,945	9,918	9,97
9,894	9,997	9,856	10,079	9,428	9,514	10,112	7,735
7,467	5,046	4,617	4,069	1,878	1,944	1,895	-0,182
-0,681	-1,237	-3,203	-4,081	-6,222	-6,014	-6,811	-8,356
-8,776	-8,849	-8,699	-8,948	-8,531	-9,692	-11,223	-10,325
-11,554	-11,344	-11,507	-11,428	-9,961	-11,272	-11,48	-11,419
-11,471	-11,438	-11,45	-11,468	-11,405	-11,565	-9,95	-8,672
-8,802	-6,837	-6,155	-6,373	-7,516	-8,131	-9,428	-9,587

Continuación de la tabla IV.

-8,794	-9,227	-9,827	-11,472	-11,372	-11,119	-11,911	-13,772
-14,241	-14,209	-14,16	-14,737	-14,427	-14,136	-14,28	-14,18
-14,241	-14,25	-13,535	-11,824	-11,583	-10,391	-8,62	-9,129
-8,239	-6,435	-5,716	-3,865	-3,097	-0,962	-0,177	-0,924
-0,7	-0,9	-0,731	-0,875	-0,929	-1,463	-2,138	-1,87
-1,059	-0,919	-0,587	1,738	1,819	4,044	4,554	4,614
4,252	2,361	3,884	2,018	1,815	1,821	1,747	2,681
1,837	1,996	3,119	4,479	4,313	4,84	6,801	7,155
7,16	8,123	9,311	9,802	9,962	9,836	9,876	9,734
9,905	9,649	10,268	12,383	12,382	13,453	14,961	15,156
15,232	14,753	14,77	14,517	14,613	15,161	15,06	14,797
14,17	13,252	12,742	12,568	12,355	12,847	12,205	12,682
10,782	9,865	8,897	6,797	7,221	6,961	6,623	4,249
5,022	5,277	4,267	3,881	1,93	1,834	1,695	-0,238
-1,134	-0,67	-1,906	-3,112	-3,472	-3,596	-4,112	-6,268
-5,953	-7,66	-8,927	-10,438	-11,928	-11,651	-12,494	-11,533
-11,925	-11,115	-9,027	-10,463	-11,841	-11,705	-11,842	-11,76
-11,603	-10,465	-9,355	-9,078	-9,235	-9,162	-9,258	-9,181
-9,307	-8,902	-7,352	-6,387	-6,816	-7,34	-5,865	-4,221
-3,884	-2,85	-1,035	1,031	1,021	1,452	1,568	1,405
2,368	3,109	4,005	3,993	4,11	4,103	4,355	4,383
4,024	2,659	2,702	1,563	0,305	-0,868	-2,432	-1,635
-2,213	-2,176	-2,178	-1,535	-1,332	-2,012	-1,063	0,317
0,735	0,578	0,566	0,823	0,454	0,408	0,388	-0,083
-1,648	-2,257	-2,099	-2,084	-1,976	-1,862	-1,453	-1,779
0,514	1,043	1,421	2,182	2,746	3,66	3,537	3,483
3,443	3,321	3,457	3,235	3,666	4,262	4,309	4,629
4,527	4,405	3,205	3,103	3,097	2,952	3,186	2,539
2,308	3,943	4,518	4,63	4,412	3,425	3,751	1,326
0,138	-0,478	-1,972	-2,243	-2,611	-2,823	-4,389	-4,915
-4,817	-5,138	-4,986	-4,798	-4,951	-4,774	-4,909	-4,726
-5,244	-5,44	-3,813	-3,617	-2,87	-2,42	-2,165	-0,138
-0,304	0,013	0,331	0,273	0,364	-0,208	-0,563	-1,513
-0,846	-0,72	-0,78	-1,161	-1,041	-0,594	-0,632	-0,594
-0,625	-0,745	-1,828	-0,868	0,085	0,519	0,705	0,731
2,128	2,161	0,993	0,786	0,872	0,792	1,203	0,994

Continuación de la tabla IV.

1,024	1,259	0,764	1,032	0,791	1,001	1,404	1,034
0,545	1,135	1,016	0,474	2,127	1,818	1,957	1,795
1,604	1,359	0,378	-0,092	-0,932	-0,941	-1,011	-0,953
-1,013	0,168	0,335	0,765	1,21	1,493	1,702	1,514
1,663	1,341	1,977	0,825	0,798	1,564	1,268	1,062
0,171	0,591	0,974	-0,153	-0,283	-1,288	-1,653	-1,646
-2,885	-2,956	-3,003	-2,931	-3,07	-2,891	-3,286	-3,746
-4,282	-4,345	-4,372	-4,297	-4,523	-5,044	-3,661	-3,41
-3,028	-2,815	-2,163	-1,234	-2,441	-2,355	-1,686	-1,753
-1,003	-0,055	0,921	1,453	2,68	3,554	3,722	4,823
5,027	4,996	6,288	6,165	6,488	5,745	5,268	6,418
6,173	7,245	7,236	7,778	8,77	7,65	7,434	7,536
7,427	8,103	8,811	7,978	7,79	7,836	8,064	7,753
6,806	7,177	7,039	7,383	6,136	5,253	3,885	2,54
3,656	3,041	2,145	2,078	2	2,153	0,463	-0,546
-1,629	-3,294	-4,124	-5,432	-5,931	-5,865	-6,055	-7,304
-7,162	-7,547	-8,509	-8,573	-8,504	-8,645	-8,389	-9,049
-9,283	-8,415	-8,643	-8,513	-8,562	-8,592	-8,444	-9,012
-8,941	-8,763	-8,656	-8,492	-8,614	-8,49	-8,121	-8,37

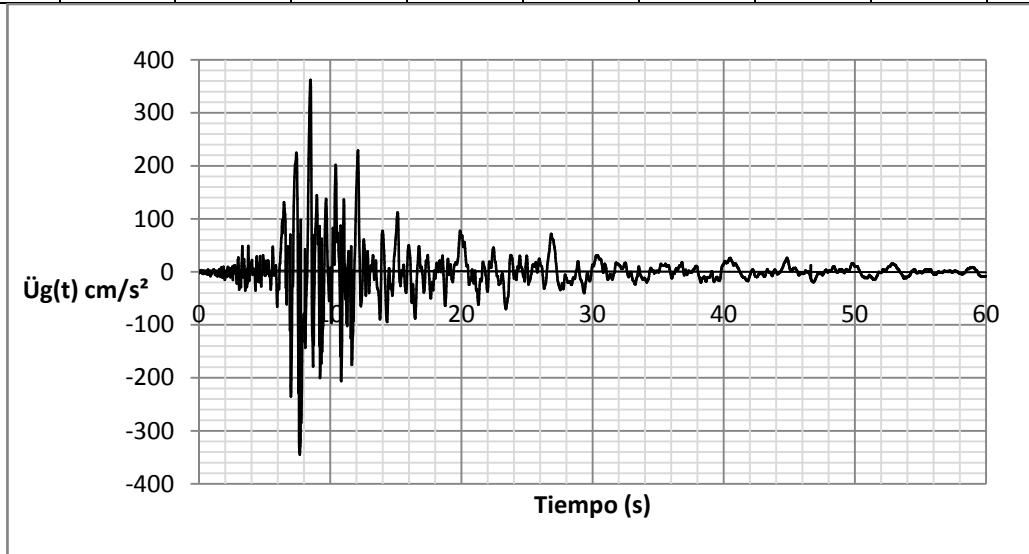
Fuente: elaboración propia.

Solución: al graficar los pares de datos y uniéndolos con una línea resulta el acelerograma de Hollister, South Street & Pine Drive como excitación en la base al sistema de un grado de libertad.

En caso de que el acelerógrafo de movimiento fuerte (acelerómetro) sea fotográfico se obtendría una gráfica del acelerograma y habría que discretizarlo para aplicar los métodos paso a paso y encontrar la respuesta; esto conlleva una ardua labor con el riesgo inherente de la introducción de imprecisiones numéricas; en este caso el acelerómetro es digital y no hay inconvenientes de este tipo.

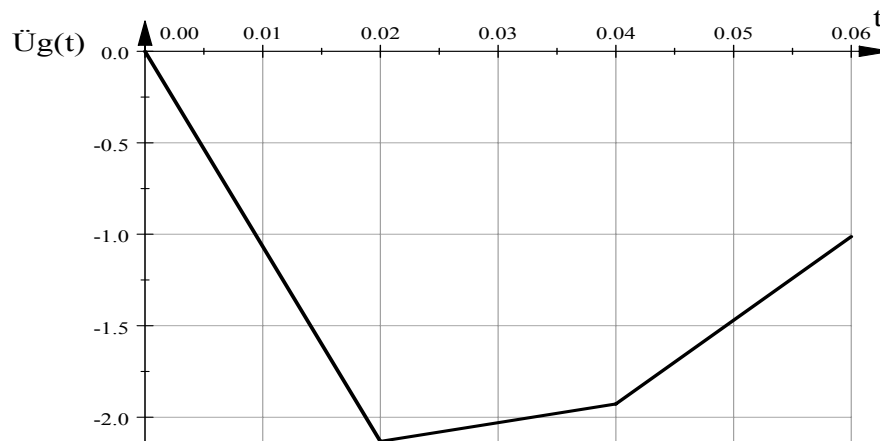
Figura 63. **Acelerograma Hollister South Street & Pine Drive**

$T$	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	...	59,98	60,00
$\ddot{u}_g(t)$	0	-2,132	-1,927	-1,013	-0,851	-1,034	...	-8,121	-8,370



Fuente: elaboración propia.

Figura 64. **Ampliación de la primera parte del acelerograma**



Fuente: elaboración propia.

Para aclarar el procedimiento del método se comienza con la primera porción del acelerograma ampliada exageradamente (figura 64). Se utilizará el método de tramos exactos por sus ventajas, pero puede utilizarse cualquier otro, según las necesidades. Los primeros tramos se efectuarán manualmente para indicar el proceso. Se iniciará con la metodología de resolver la ecuación general de vibraciones para cada tramo o intervalo ecuaciones (6.5) y (6.6).

$$u(\tau) = A_0 + A_1\tau + A_2e^{-\xi\omega_n\tau} \cos \omega_a\tau + A_3e^{-\xi\omega_n\tau} \sen \omega_a\tau$$

$$\dot{u}(\tau) = A_1 + (\omega_a A_3 - \xi\omega_n A_2)e^{-\xi\omega_n\tau} \cos \omega_a\tau - (\omega_a A_2 + \xi\omega_n A_3)e^{-\xi\omega_n\tau} \sen \omega_a\tau$$

Los valores  $\xi$ ,  $\omega_n$  y  $\omega_a$  permanecen constantes en todo el problema:

$$\xi = 0,05, \omega_n = 2\pi/T = 2\pi/(1 \text{ s}) = 2\pi \text{ y } \omega_a = \sqrt{1 - 0,05^2}(2\pi)$$

$\xi = 0,05$	$\omega_n = 6,283 \text{ rad/s}$	$\omega_a = 6,275 \text{ rad/s.}$
--------------	----------------------------------	-----------------------------------

Los valores  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  cambian para cada tramo, primer tramo:

$$\alpha = \frac{p_1 - p_0}{t_1 - t_0} = \frac{p_1 - p_0}{h}$$

$$\alpha = \frac{-2,132 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} - 0}{0,02 \text{ s} - 0} = -106,6 \text{ cm/s}^3$$

$$A_0 = \frac{p_0}{\omega_n^2} - \frac{2\xi\alpha}{\omega_n^3} \quad A_0 = \frac{0}{(6,283 \frac{\text{rad}}{\text{s}})^2} - \frac{2(0,05)(-106,6 \frac{\text{cm}}{\text{s}^3})}{(6,283 \frac{\text{rad}}{\text{s}})^3}$$

$$A_0 = 0,0430 \text{ cm}$$

$$A_1 = \frac{\alpha}{\omega_n^2} \quad A_1 = \frac{-106,6 \text{ cm/s}^3}{(6,283 \text{ rad/s})^2}$$

$$A_1 = -2,700 \text{ cm/s}$$

$$A_2 = u_0 - A_0 \quad A_2 = 0 - 0,0430$$

$$A_2 = -0,0430 \text{ cm}$$

$$A_3 = \frac{1}{\omega_a} \left[ \dot{u}_0 + \xi \omega_n A_2 - \frac{\alpha}{\omega_n^2} \right]$$

$$A_3 = \frac{1}{6,275 \text{ rad/s}} [0 + 0,05(6,283 \text{ rad/s})(-0,0430 \text{ cm}) + 2,7004 \text{ cm/s}]$$

$$\boxed{A_3 = 0,4281 \text{ cm}}$$

Con estos valores se obtiene la ecuación de movimiento en cm:

$$u(t) = 0,043 - 2,7t - 0,043e^{-0,31415t} \cos 6,275t + 0,4281e^{-0,1415t} \sin 6,275t$$

Derivando la expresión o sustituyendo se obtiene la ecuación en cm/s:

$$\dot{u}(t) = -2,7 + 2,7e^{-0,31415t} \cos 6,275t + 0,1353e^{-0,31415t} \sin 6,275t$$

Los valores de desplazamiento y velocidad final para este intervalo o tramo, serán las condiciones iniciales para el siguiente tramo:

$$u_{(0,02)} = u_{(0)} = -1,446 \cdot 10^{-4} \text{ cm} = -0,00014 \text{ cm}$$

$$\dot{u}_{(0,02)} = \dot{u}_{(0)} = -2,1183 \cdot 10^{-2} \frac{\text{cm}}{\text{s}} = -0,0212 \text{ cm/s}$$

Tramo 2  $0,02 \leq t \leq 0,04$

$$\alpha = \frac{-1,927 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} + 2,132 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}}{0,04 \text{ s} - 0,02 \text{ s}} = 10,25 \text{ cm/s}^3$$

$$A_0 = \frac{p_0}{\omega_n^2} - \frac{2\xi\alpha}{\omega_n^3} \quad A_0 = \frac{-2,132 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}}{\left(6,283 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2} - \frac{2(0,05)(10,25 \text{ cm/s}^3)}{\left(6,283 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^3}$$

$$\boxed{A_0 = -0,05814 \text{ cm}}$$

$$A_1 = \frac{\alpha}{\omega_n^2} \quad A_1 = \frac{10,25 \text{ cm/s}^3}{(6,283 \text{ rad/s})^2}$$

$$\boxed{A_1 = 0,2597 \text{ cm/s}}$$



$$A_2 = u_0 - A_0 \quad A_2 = -1,446 \cdot 10^{-4} \text{ cm} + 0,05814 \text{ cm}$$

$$\boxed{A_2 = 0,05800 \text{ cm}}$$

$$A_3 = \frac{1}{\omega_a} \left[ \dot{u}_0 + \xi \omega_n A_2 - \frac{\alpha}{\omega_n^2} \right]$$

$$A_3 = \frac{1}{6,275 \text{ rad/s}} \left[ -2,1183 \cdot 10^{-2} \frac{\text{cm}}{\text{s}} + 0,05 \left( 6,283 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) (0,058 \text{ cm}) - 0,2597 \text{ cm/s} \right]$$

$$\boxed{A_3 = -0,04186 \text{ cm}}$$

Con estos valores se obtiene la ecuación de movimiento en cm:

$$u_{(\tau)} = -0,05814 + 0,2597\tau + 0,058e^{-0,31415\tau} \cos 6,275\tau - 0,04186e^{-0,31415\tau} \sin 6,275\tau$$

Derivando esta expresión o sustituyendo valores en la ecuación de velocidad se tiene la ecuación de velocidad en cm/s:

$$\dot{u}_{(\tau)} = 0,2597 - 0,2809e^{-0,31415\tau} \cos 6,275\tau - 0,3508e^{-0,31415\tau} \sin 6,275\tau$$

El corrimiento en el tiempo es:  $\tau = t - t_0 = 0,04 \text{ s} - 0,02 \text{ s} = 0,02 \text{ s} = h$

Los valores de desplazamiento y velocidad final para este intervalo o tramo serán las condiciones iniciales para el siguiente tramo:

$$u_{(0,02)} = u_{(0)} = -9,694 \cdot 10^{-4} \text{ cm} = -0,0010 \text{ cm}$$

$$\dot{u}_{(0,02)} = \dot{u}_{(0)} = -6,088 \cdot 10^{-2} \frac{\text{cm}}{\text{s}} = -0,0609 \text{ cm/s}$$

El tercer tramo, se calcula de la misma forma y así sucesivamente, hasta el tramo 3 000; obviamente es un trabajo monumental; afortunadamente, es fácilmente programable en el computador digital u ordenador, en una hoja electrónica se obtienen los resultados presentados en la tabla V.

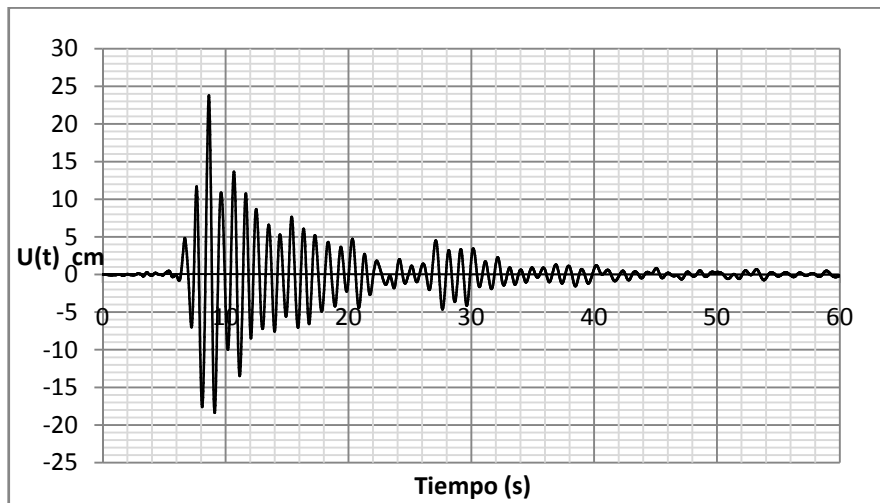
**Tabla V. Valores de respuesta para desplazamiento y velocidad**

$t$	$u_{(t)}$	$\dot{u}_{(t)}$	$t$	$u_{(t)}$	$\dot{u}_{(t)}$
0	0,0000	0,0000	0,78	-0,0742	0,1107
0,02	-0,0001	-0,0212	0,80	-0,0712	0,1749
0,04	-0,0010	-0,0609	0,82	-0,0673	0,2162
0,06	-0,0025	-0,0880	0,84	-0,0627	0,2319
0,08	-0,0044	-0,1027	0,86	-0,0586	0,1621
0,10	-0,0066	-0,1159	0,88	-0,0565	0,0565
0,12	-0,0090	-0,1299	0,90	-0,0560	0,0004
0,14	-0,0117	-0,1375	0,92	-0,0563	-0,0269
0,16	-0,0143	-0,1078	0,94	-0,0571	-0,0531
0,18	-0,0158	-0,0400	0,96	-0,0585	-0,0847
0,20	-0,0161	0,0019	0,98	-0,0604	-0,0950
0,22	-0,0161	-0,0086	1,00	-0,0620	-0,0737
0,24	-0,0165	-0,0366	1,02	-0,0633	-0,0481
0,26	-0,0176	-0,0724	1,04	-0,0637	0,0120
0,28	-0,0195	-0,1210	1,06	-0,0626	0,0956
0,30	-0,0225	-0,1774	1,08	-0,0600	0,1647
0,32	-0,0264	-0,2008	1,10	-0,0559	0,2564
0,34	-0,0301	-0,1615	⋮	⋮	⋮
0,36	-0,0329	-0,1290	59,60	-0,32750	-0,25074
0,38	-0,0356	-0,1458	59,62	-0,33160	-0,15862
0,40	-0,0388	-0,1794	59,64	-0,33384	-0,06588
0,42	-0,0426	-0,1858	59,66	-0,33422	0,02789
0,44	-0,0461	-0,1671	59,68	-0,33276	0,11602
0,46	-0,0492	-0,1429	59,70	-0,32966	0,19237
0,48	-0,0519	-0,1266	59,72	-0,32505	0,27106
0,50	-0,0545	-0,1369	59,74	-0,31881	0,35085
0,52	-0,0574	-0,1611	59,76	-0,31106	0,42319
0,54	-0,0608	-0,1699	59,78	-0,30193	0,48878
0,56	-0,0640	-0,1486	59,80	-0,29157	0,54512
0,58	-0,0668	-0,1409	59,82	-0,28018	0,59338
0,60	-0,0698	-0,1542	59,84	-0,26793	0,62756
0,62	-0,0731	-0,1759	59,86	-0,25518	0,64655
0,64	-0,0768	-0,1839	59,88	-0,24212	0,65765
0,66	-0,0799	-0,1112	59,90	-0,22892	0,66113
0,68	-0,0808	0,0252	59,92	-0,21573	0,65690
0,70	-0,0793	0,0988	59,94	-0,20271	0,64284
0,72	-0,0775	0,0748	59,96	-0,19008	0,61890
0,74	-0,0764	0,0389	59,98	-0,17799	0,59046
0,76	-0,0756	0,0454	60	-0,16652	0,55430

Fuente: elaboración propia.

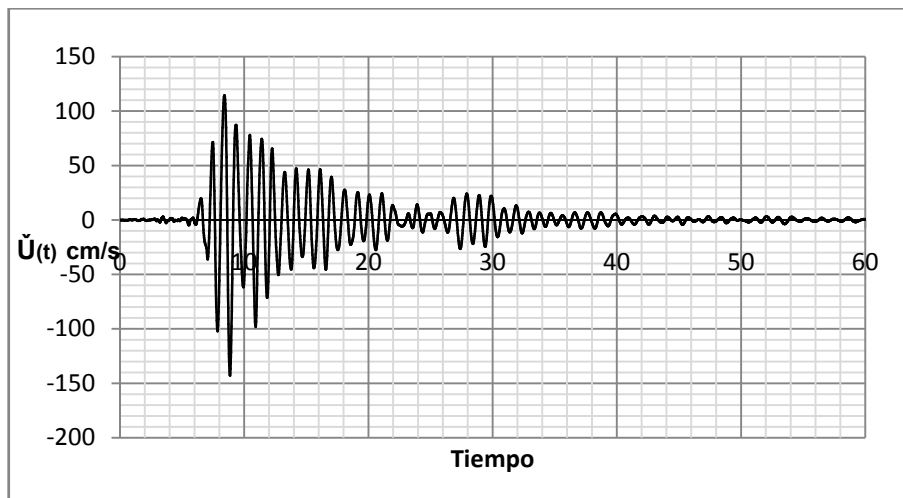
Las gráficas de respuesta para el desplazamiento y la velocidad relativa del sistema  $(t, u(t))$ ,  $(t, \dot{u}(t))$  son:

Figura 65. **Respuesta para desplazamiento relativo**



Fuente: elaboración propia.

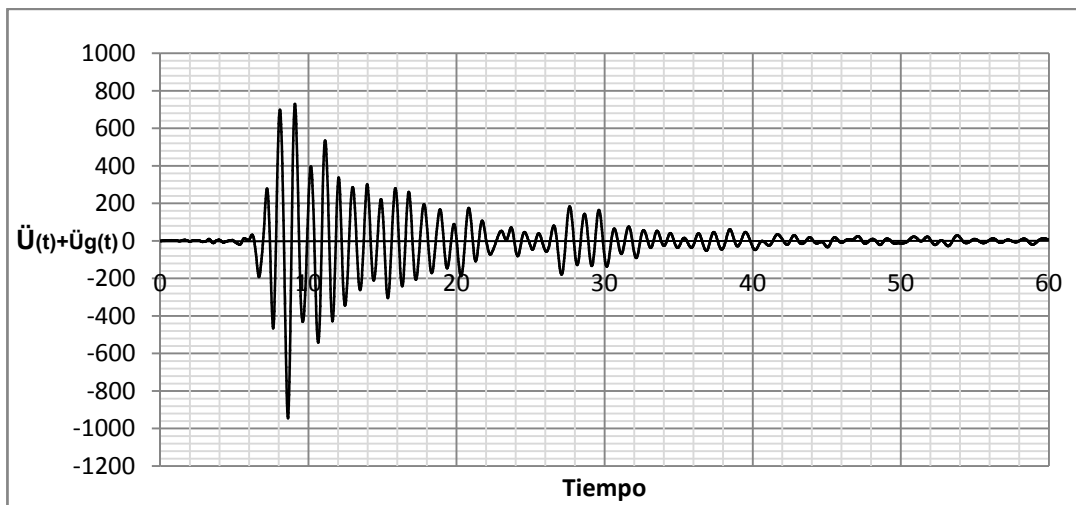
Figura 66. **Respuesta para velocidad relativa**



Fuente: elaboración propia.

Los valores de la aceleración absoluta se obtienen de la derivada de velocidad, pero en el siguiente problema se emplea un método más simple. La gráfica de respuesta de aceleración total del sistema ( $t, \ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t)$ ) es:

Figura 67. **Respuesta para la aceleración absoluta**



Fuente: elaboración propia.

De las gráficas o la tabla electrónica se obtienen los valores máximos o picos:

$$|u|_{\text{máx}} = 23,80 \text{ cm}$$

$$|\dot{u}|_{\text{máx}} = 142,8 \text{ cm/s}$$

$$|\ddot{u} + \ddot{u}_g|_{\text{máx}} = 944,8 \text{ cm/s}^2$$

Naturalmente no es seguro que sean los máximos verdaderos; según el teorema del valor extremo un valor máximo puede estar además de los extremos entre el intervalo, encontrándolo con la primera y segunda derivada, pero como los tramos son tan pequeños (0,02 s), el análisis no se justifica pues el valor tiende al real con diferencia insignificante.

Como aclaración, los valores de aceleración se introdujeron directamente por lo siguiente:

$$p(\tau) = p_0 + \alpha\tau \equiv p_0 + (p_1 - p_0) \frac{\tau}{h}$$

Por la fuerza sísmica efectiva:  $p_{\text{eff}(t)} = -m \ddot{u}_{g(t)}$

$$-m \ddot{u}_{g(t)} = -m \ddot{u}_{g0} - m (\ddot{u}_{g1} - \ddot{u}_{g0}) \frac{\tau}{h}$$

Dividiendo la última expresión entre  $-m$ , resulta:

$$\ddot{u}_{g(\tau)} = \ddot{u}_{g0} + (\ddot{u}_{g1} - \ddot{u}_{g0}) \frac{\tau}{h} \quad \rightarrow \quad \ddot{u}_{g(\tau)} = \ddot{u}_{g0} + \alpha\tau$$

#### 6.4. Espectro de respuesta

Ya se encontró la respuesta específica a un sistema dinámico de un grado de libertad (con período de 1 s y 5% de amortiguamiento del crítico), para un registro acelerográfico particular o sea para una aceleración  $\ddot{u}_{g(t)}$  del suelo. Es práctica común del ingeniero, trabajar con el valor crítico, porque si la estructura es segura para este, para los otros valores también lo será; así interesa el valor máximo del desplazamiento relativo, velocidad relativa y aceleración absoluta.

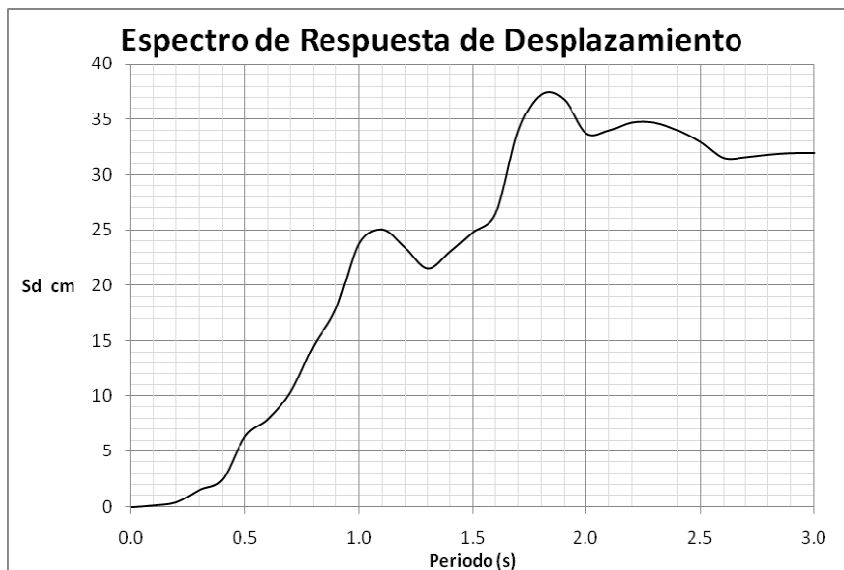
El máximo desplazamiento relativo multiplicado por la rigidez del sistema,  $k$ , conduce a la máxima fuerza de deformación que se ejerce sobre la estructura durante todo el movimiento estudiado. La máxima velocidad relativa multiplicada por la constante de amortiguamiento,  $c$ , define la máxima fuerza a disipar. La máxima aceleración absoluta multiplicada por la masa,  $m$ , da la máxima fuerza inercial. Es evidente que desde el punto de vista de ingeniería, estos máximos son los parámetros de mayor importancia.

### 6.4.1. Obtención del espectro de respuesta

Ahora, la suponer la misma aceleración del suelo y amortiguación pero la estructura a considerar tiene un período de 0,1 s, se repite nuevamente el mismo análisis del ejemplo para la respuesta del acelerograma y ahora los valores máximos son (0,16 cm, 4,49 cm/s) muy diferentes a los del ejemplo. Es evidente, que del estudio de la respuesta para diferentes valores del período de vibración, que la respuesta del sistema cambia notoriamente al variar su período y que dicho sistema filtra la excitación produciendo una respuesta en la cual está muy marcado el período mismo del sistema.

Si se consideran los periodos 0,1, 0,2, 0,3,...3,0 s, y su respectivo desplazamiento relativo máximo, graficados en el plano  $(T, |u|_{max})$ , se obtiene la figura 68.

Figura 68. Espectro de desplazamientos, amortiguamiento 5%



Fuente: elaboración propia.

Este gráfico se conoce con el nombre de espectro de “respuesta de desplazamiento” y es de gran utilidad, pues si se desea determinar la máxima fuerza en el sistema de un grado de libertad con un período dado, cuando se le somete al acelerograma del ejemplo de respuesta a Hollister, basta con entrar al gráfico con el período del sistema y leer el máximo desplazamiento relativo, el cual al ser multiplicado por la constante de rigidez, se obtiene la máxima fuerza a que este puede verse sometido. El desplazamiento relativo  $u(t)$  de la masa, es la respuesta de mayor interés, por estar relacionada linealmente a las fuerzas internas (momentos flexionantes, cortantes en vigas y columnas).

Para un edificio, una aproximación aceptada (Coburn et al., 1992) es considerar que cada piso añade 1/10 s al período natural de la estructura; por tanto, utilizar más de 3 s de período es considerar edificios mayores de 30 pisos o puentes con grandes luces; por eso en este trabajo, no se consideran esos periodos.

De una manera análoga, es posible construir gráficos de la máxima velocidad relativa a que se ve sometido el sistema, el cual se llama “espectro de respuesta de velocidades”, y de máxima aceleración absoluta, el cual se llama “espectro de respuesta de aceleraciones”.

El cálculo del espectro se puede realizar para diferentes valores del amortiguamiento. Por lo tanto la definición del espectro de respuesta de desplazamientos es:  $S_d(T_n, \xi) = |u|_{max}$

El valor del espectro de respuesta de desplazamientos, para un período de vibración  $T_n$  y un coeficiente de amortiguamiento  $\xi$ , es el máximo valor del desplazamiento relativo  $u$ , en valor absoluto, que tendría un sistema de un grado de libertad, con estas propiedades, al verse sometido a un acelerograma.

De igual manera, la definición del espectro de velocidades es:

$$S_v(T_n, \xi) = |\dot{u}|_{max}$$

La del espectro de respuesta de aceleraciones es:

$$S_a(T_n, \xi) = |\ddot{u} + \ddot{u}_g|_{max}$$

#### **6.4.2. Concepto del espectro de respuesta**

En ingeniería sísmica, el espectro de respuesta da un significado conveniente al sumario de respuestas pico de todos los posibles sistemas de un grado de libertad, sujeto a un componente particular de movimiento del suelo; también provee aproximaciones prácticas para aplicar los conocimientos de dinámica estructural.

Una gráfica de valores pico de respuesta de una cantidad como función del período natural de vibración del sistema o cualquier parámetro relacionado como  $\omega_n$  o  $f_n$ , es llamado espectro de respuesta para esa cantidad.

#### **6.4.3. Representación tripartita de Newmark**

Existe una relación aproximada entre los espectros  $S_d$ ,  $S_v$  y  $S_a$  si se utiliza la integral de convolución para la respuesta del sistema, bajo las premisas de que:

(a) en la mayoría de las aplicaciones prácticas el coeficiente de amortiguamiento  $\xi$ , es menor del 10%, y por lo tanto:

$$\sqrt{1 - \xi^2} = \sqrt{1 - 0,01} \cong 1,0 \text{ y}$$



(b) que el temblor es suficientemente largo de tal manera que el coseno que aparece en las ecuaciones puede ser aproximado por un seno; con base en estas aproximaciones se obtiene con facilidad la relación:

$$\boxed{S_d(T_n, \xi) \cong \frac{S_v(T_n, \xi)}{\omega_n} \cong \frac{S_a(T_n, \xi)}{\omega_n^2}} \quad (6.14)$$

La ecuación anterior se ha enmarcado para resaltar su importancia. Dado que hay una aproximación en esta operación, el espectro de velocidades obtenido de multiplicar cada ordenada del espectro de desplazamientos por el valor de  $\omega_n$  se conoce con el nombre de “espectro de pseudovelocidades” (del gr. pseudo que significa falso ficticio o supuesto):

$$PS_v(T_n, \xi) = \omega_n S_d(T_n, \xi) = \frac{2\pi}{T_n} S_d(T_n, \xi)$$

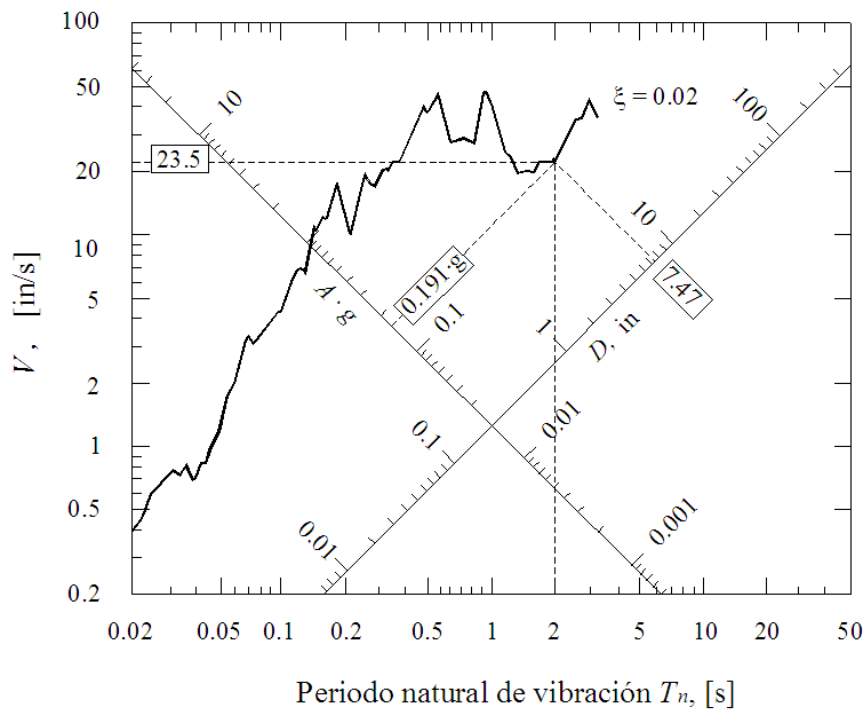
De igual manera, el espectro de aceleraciones que se obtiene al multiplicar el espectro de desplazamientos por el valor de  $\omega_n^2$  se conoce con el nombre de “espectro de pseudoaceleraciones”:

$$PS_a(T_n, \xi) = \omega_n^2 S_d(T_n, \xi) = \frac{4\pi^2}{T_n^2} S_d(T_n, \xi)$$

El prefijo pseudo es usado porque  $S_v \neq PS_v$  y  $S_a \neq PS_a$  son solo aproximaciones y se utilizan porque N. M. Newmark sugirió una manera de presentar los tres espectros en un solo gráfico; gracias a su interrelación, que denominó tripartita, ahí pueden graficarse simultáneamente varios espectros para distintos porcentajes de amortiguamiento donde se observan importantes simplificaciones para diseño.

En su construcción se coloca en el eje horizontal el logaritmo del período de vibración  $T_n$ , en el eje vertical el logaritmo de la ordenada del espectro de pseudovelocidades, en los ejes diagonales a 45° de la horizontal el eje de desplazamiento y para el eje de pseudoaceleración a 135° en la figura 69 se muestra su forma.

Figura 69. **Representación tripartita, sismo El Centro,  $\xi=2\%$**



Fuente: CHOPRA, Anil K. Dynamics of structures. p. 203.

En esta representación, sólo los desplazamientos corresponden al espectro verdadero, tanto el de velocidades como el de aceleraciones corresponden a los valores del espectro de desplazamientos, multiplicados por  $\omega_n$  y por  $\omega_n^2$  respectivamente.

#### 6.4.4. Construcción del espectro de respuesta

El espectro de respuesta tripartita para una componente  $\ddot{u}_{g(t)}$  de movimiento del suelo puede ser desarrollado a partir de los siguientes pasos (Chopra, 1995):

- Definición numérica de la aceleración del suelo,  $\ddot{u}_{g(t)}$ : típicamente, las ordenadas del movimiento del suelo son definidas cada 0,02 segundos
- Seleccionar el período natural de vibración  $T_n$  y la relación de amortiguamiento  $\xi$  de un sistema de un grado de libertad
- Calcular la respuesta de deformación  $u(t)$  de este sistema debido al movimiento del suelo  $\ddot{u}_{g(t)}$  por cualquier método numérico
- Determinar la amplitud máxima,  $|u_{m\acute{a}x}|$
- Las ordenadas espectrales son:  $V = (2\pi/T_n) |u_{m\acute{a}x}|$ , y  $A = (2\pi/T_n)^2 |u_{m\acute{a}x}|$
- Repetir los pasos del segundo al quinto para un rango de valores  $T_n$  y  $\xi$
- Presentar los resultados del segundo al sexto paso gráficamente.

Ejemplo de espectro de respuesta: construir el espectro de respuesta de desplazamiento, velocidad y aceleración para el problema del ejemplo de respuesta a Hollister donde se tiene que el sistema tiene un amortiguamiento del 5% del crítico, utilizando un paso de período de 0,1 s hasta 3 s.

Solución: ahora el problema es como si se tuvieran 30 semejantes al ejemplo anterior, obviamente sin un computador es insalvable.

Repitiendo el mismo razonamiento del ejemplo anterior, pero con un período de 0.1 s se obtienen los siguientes valores máximos.

$$S_d(T_n, \xi) = |u|_{\max}$$

$$S_v(T_n, \xi) = |\dot{u}|_{\max}$$

$$S_a(T_n, \xi) = |\ddot{u} + \ddot{u}_g|_{\max}$$

$$S_d(0,1 \text{ s}, 0,05) = |u|_{\max} = 0,16 \text{ cm}$$

$$S_v(0,1 \text{ s}, 0,05) = |\dot{u}|_{\max} = 4,49 \text{ cm/s}$$

$$S_a(0,1 \text{ s}, 0,05) = |\ddot{u} + \ddot{u}_g|_{\max} = 630,4 \text{ cm/s}^2$$

Para los valores de la aceleración absoluta el resultado directo sería derivar la ecuación (6.6) de velocidad y así obtener la expresión de aceleración relativa y sumarle el término  $\ddot{u}_{g(t)}$  de la aceleración del suelo; no obstante, aquí se realiza una hábil observación matemática dada la gran tarea de introducir en el ordenador muchos términos que implican la derivación de la velocidad.

Considerar la ecuación (6.4) general del movimiento del suelo, que aquí se reproduce por comodidad:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g \quad , \text{ Dividiendo entre la masa se tiene}$$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n\dot{u} + \omega_n^2u = -\ddot{u}_g \quad , \text{ transponiendo términos}$$

$$\ddot{u} + \ddot{u}_g = -2\xi\omega_n\dot{u} - \omega_n^2u \quad , \text{ finalmente factorizando}$$

$$\ddot{u}_{(t)} + \ddot{u}_{g(t)} = -\omega_n(\omega_n u_{(t)} + 2\xi\dot{u}_{(t)})$$

Esta última expresión es muy cómoda para programar la aceleración total en términos de los resultados recurrentes  $u_{(t)}$  y  $\dot{u}_{(t)}$ .

Con 0.2 s se obtienen los valores máximos:

$$S_d(0,2 \text{ s}, 0,05) = |u|_{\max} = 0,45 \text{ cm}$$

$$S_v(0,2 \text{ s}, 0,05) = |\dot{u}|_{\max} = 11,04 \text{ cm/s}$$

$$S_a(0,2 \text{ s}, 0,05) = |\ddot{u} + \ddot{u}_g|_{\max} = 446,3 \text{ cm/s}^2$$

Continuando este proceso se obtienen los resultados siguientes:

Tabla VI. **Valores espectrales**

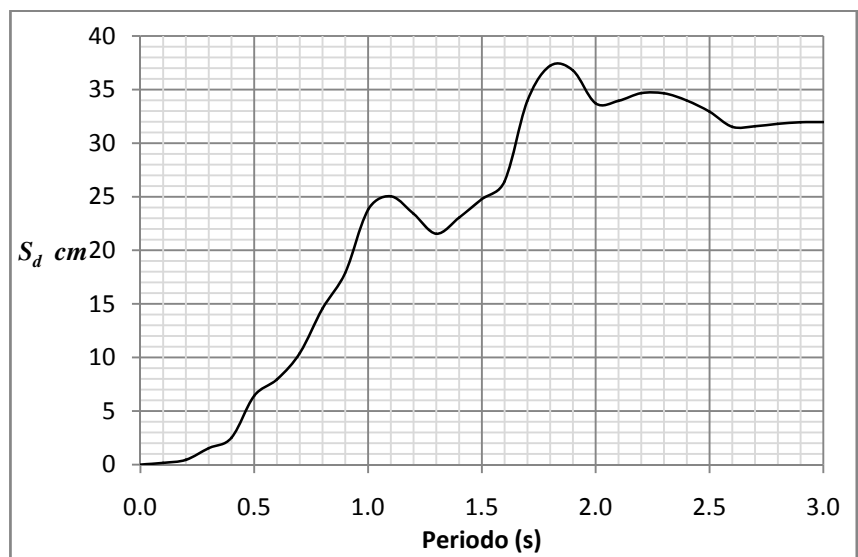
$T$	$S_d(T, 0,05)$	$S_v(T, 0,05)$	$S_a(T, 0,05)$
0,0	0,00	0,00	0,00
0,1	0,16	4,49	630,44
0,2	0,45	11,04	446,32
0,3	1,55	23,25	678,78
0,4	2,51	33,88	621,93
0,5	6,43	76,80	1017,53
0,6	7,97	78,88	875,53
0,7	10,41	78,65	840,11
0,8	14,58	99,67	902,45
0,9	17,91	127,79	877,06
1,0	23,80	142,79	944,75
1,1	25,03	128,61	821,05
1,2	23,41	127,30	645,38
1,3	21,55	116,59	505,86
1,4	23,06	108,22	467,22

$T$	$S_d(T, 0,05)$	$S_v(T, 0,05)$	$S_a(T, 0,05)$
1,5	24,79	107,00	437,49
1,6	26,42	114,48	410,50
1,7	33,94	116,10	466,07
1,8	37,21	141,64	455,42
1,9	36,78	136,64	404,28
2,0	33,71	114,76	335,32
2,1	33,95	108,66	306,05
2,2	34,66	103,02	285,03
2,3	34,65	96,65	260,77
2,4	33,99	89,63	234,91
2,5	32,94	87,74	209,39
2,6	31,52	87,98	185,70
2,7	31,58	87,12	173,31
2,8	31,81	86,06	162,52
2,9	31,95	84,97	152,25
3,0	31,96	83,11	142,56

Fuente: elaboración propia.

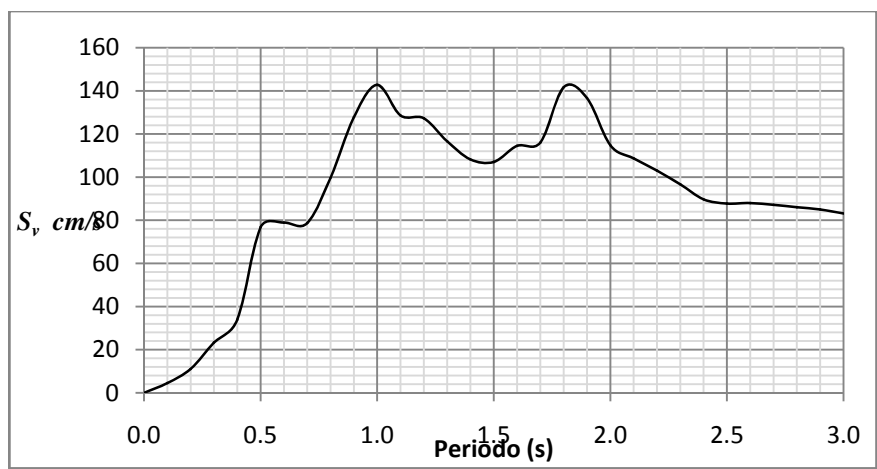
Los espectros de respuesta se presentan a continuación:

Figura 70. **Espectro de respuesta de desplazamiento**



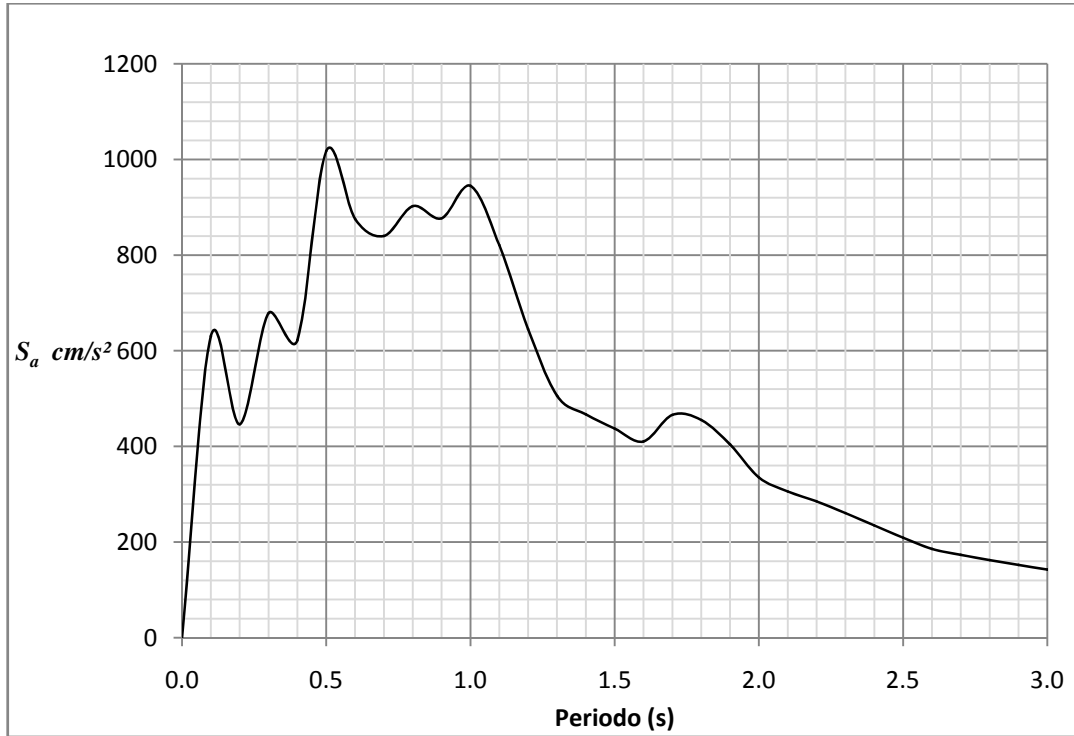
Fuente: elaboración propia.

Figura 71. **Espectro de respuesta de velocidad**



Fuente: elaboración propia.

Figura 72. **Espectro de respuesta de aceleración**



Fuente: elaboración propia.

Ejemplo sobre error en los pseudoespectros: Mostrar cualitativamente el error cuando se utilizan el espectro de pseudoaceleración y pseudovelicidad en lugar de los espectros de respuesta del ejemplo anterior.

Solución: lo más directo es graficar en un mismo plano ambos espectros y compararlos; entre más se asemejen, la aproximación será mejor; en el límite, la representación es exacta si se superponen, el espectro de pseudovelicidad es el espectro de respuesta de desplazamiento multiplicado por  $\omega_n$  y el de pseudoaceleración por  $\omega_n^2$  veces, el espectro de desplazamiento. Tabulando estos valores se obtiene la siguiente tabla:

Tabla VII. Valores pseudoespectrales

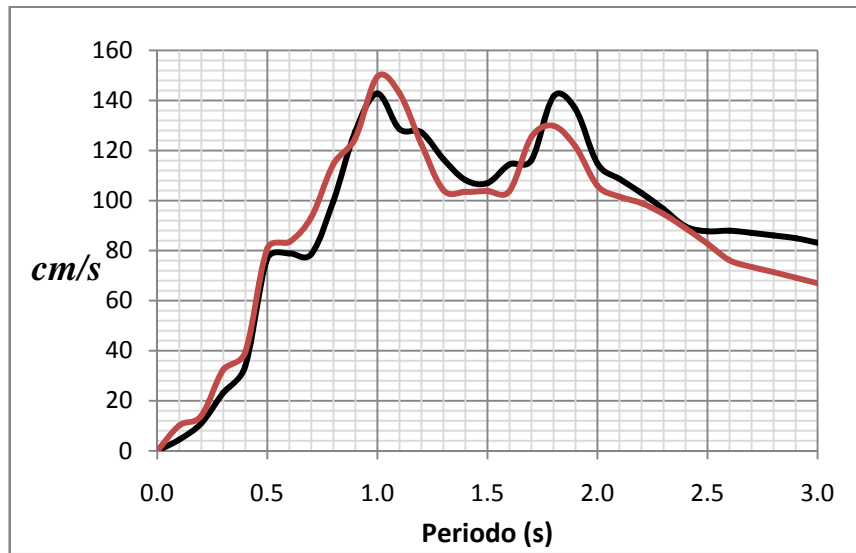
$T$	$\omega_n$	$S_d$	$S_v$	$S_a$	$PS_v$	$PS_a$
0,0	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1	62,8	0,16	4,49	630,44	10,15	637,66
0,2	31,4	0,45	11,04	446,32	14,00	439,69
0,3	20,9	1,55	23,25	678,78	32,42	678,98
0,4	15,7	2,51	33,88	621,93	39,48	620,19
0,5	12,6	6,43	76,80	1017,53	80,77	1014,95
0,6	10,5	7,97	78,88	875,53	83,42	873,57
0,7	9,0	10,41	78,65	840,11	93,46	838,87
0,8	7,9	14,58	99,67	902,45	114,47	899,06
0,9	7,0	17,91	127,79	877,06	125,02	872,82
1,0	6,3	23,80	142,79	944,75	149,53	939,50
1,1	5,7	25,03	128,61	821,05	143,00	816,80
1,2	5,2	23,41	127,30	645,38	122,56	641,74
1,3	4,8	21,55	116,59	505,86	104,15	503,40
1,4	4,5	23,06	108,22	467,22	103,48	464,42
1,5	4,2	24,79	107,00	437,49	103,83	434,90
1,6	3,9	26,42	114,48	410,50	103,77	407,50
1,7	3,7	33,94	116,10	466,07	125,43	463,57
1,8	3,5	37,21	141,64	455,42	129,90	453,44
1,9	3,3	36,78	136,64	404,28	121,64	402,25
2,0	3,1	33,71	114,76	335,32	105,91	332,71
2,1	3,0	33,95	108,66	306,05	101,58	303,92
2,2	2,9	34,66	103,02	285,03	98,99	282,71
2,3	2,7	34,65	96,65	260,77	94,65	258,56
2,4	2,6	33,99	89,63	234,91	88,97	232,93
2,5	2,5	32,94	87,74	209,39	82,78	208,04
2,6	2,4	31,52	87,98	185,70	76,17	184,07
2,7	2,3	31,58	87,12	173,31	73,49	171,01
2,8	2,2	31,81	86,06	162,52	71,38	160,17
2,9	2,2	31,95	84,97	152,25	69,22	149,97
3,0	2,1	31,96	83,11	142,56	66,95	140,21

Fuente: elaboración propia.



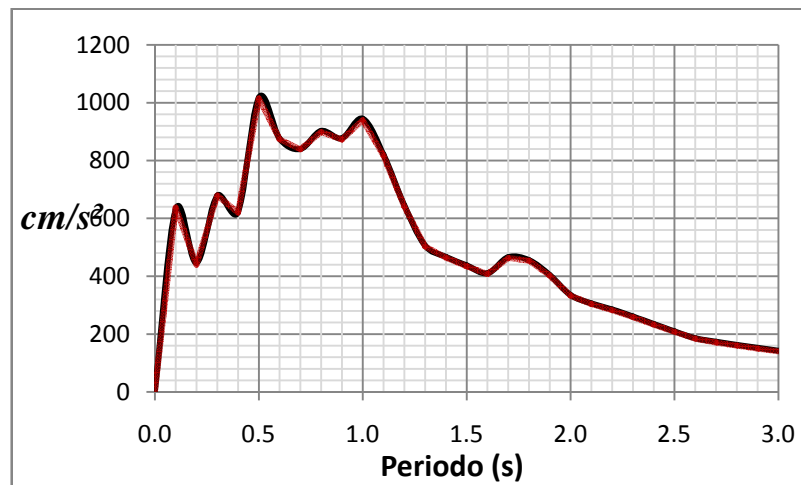
Con los valores anteriores se obtienen las gráficas siguientes:

Figura 73. **Espectros: velocidad — pseudovelocidad** —



Fuente: elaboración propia.

Figura 74. **Espectros: aceleración — pseudoaceleración** —



Fuente: elaboración propia.

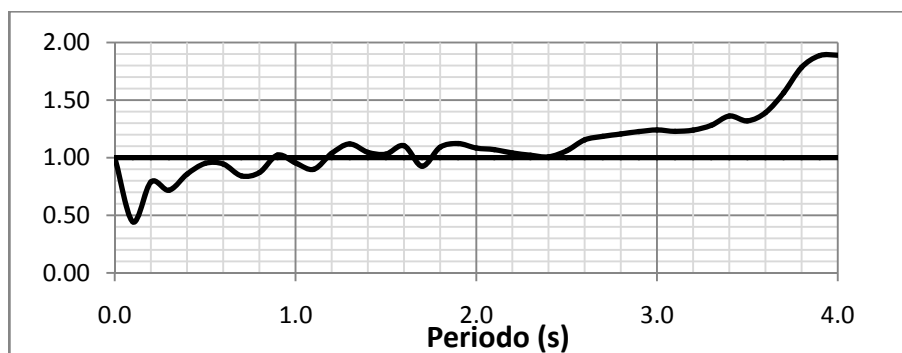
En las gráficas se muestra el error en que se incurre con esta representación, allí se indican las diferencias entre el espectro verdadero de aceleraciones y el espectro de pseudoaceleraciones; y entre el de velocidades y de pseudovelocidades para el registro de Hollister. Puede verse que para el caso del espectro de pseudoaceleraciones, prácticamente no hay error en todo el rango de periodos. Para el de pseudovelocidades, la diferencia es mayor pero la tendencia y forma de los espectros es similar, considerándose satisfactorias.

El error anterior puede interpretarse como error absoluto, también puede enfocarse el error de la siguiente manera. Considerar el resultado de Newmark cumplidas las premisas,  $S_v \approx PS_v$  y  $S_a \approx PS_a$  de tal forma que:

$$\frac{S_v}{PS_v} \approx 1 \quad Y \quad \frac{S_a}{PS_a} \approx 1$$

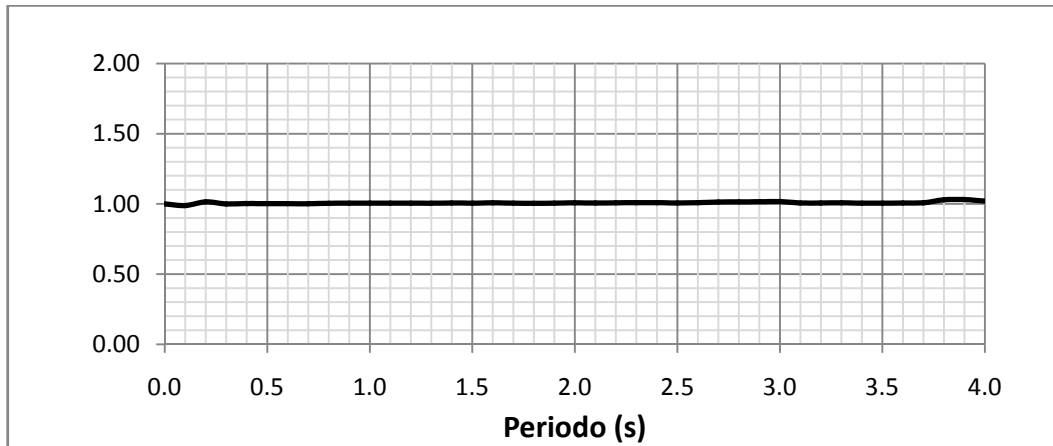
Graficando esos cocientes espectrales, si se tiene buena aproximación, el resultado rondará cerca de la unidad; si los espectros son idénticos implican una semirrecta paralela al eje horizontal espaciada una unidad.

Figura 75. **Relación espectral  $S_v / PS_v$**



Fuente: elaboración propia.

Figura 76. **Relación espectral  $S_a / P S_a$**



Fuente: elaboración propia.

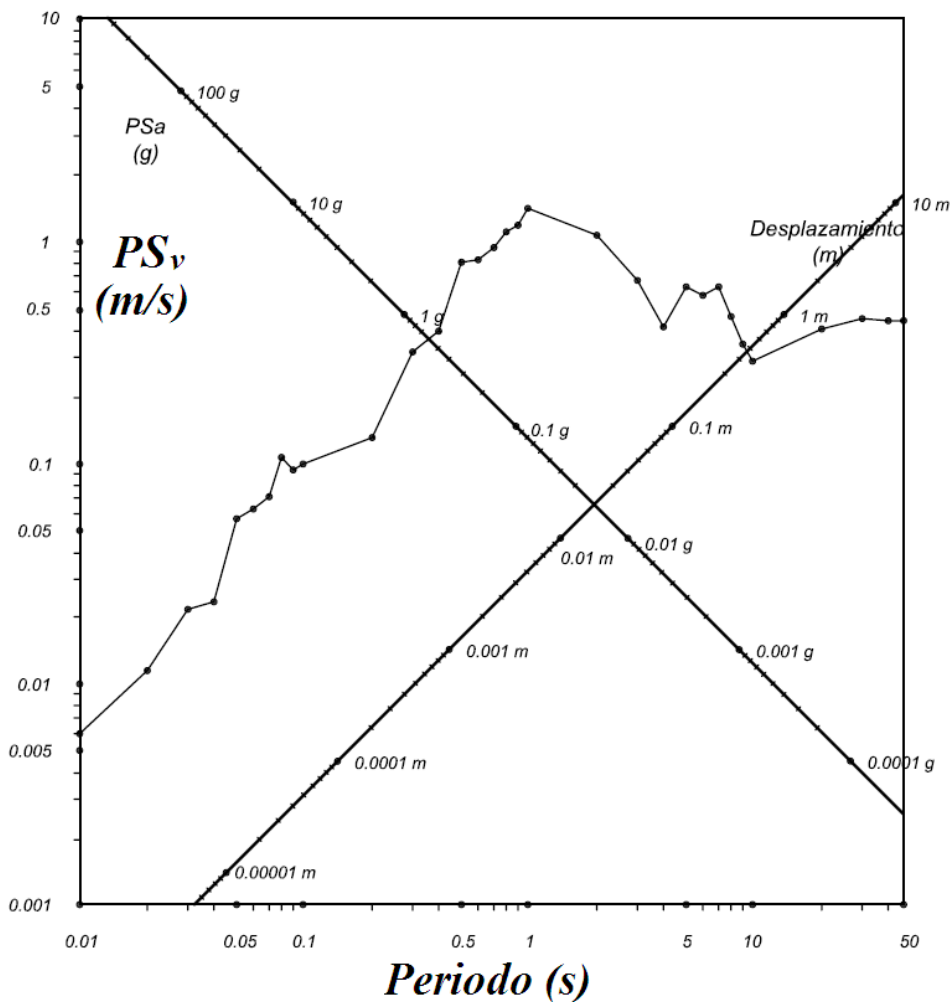
Se ha ampliado el rango de periodos hasta 4 s, y se confirma que para el caso del espectro de pseudoaceleraciones prácticamente no hay error en todo el rango, por tanto puede emplearse la pseudoaceleración con confianza. Para el espectro de pseudovelocidades, el error es mayor para periodos bajos (menos de 0,5 s) y para periodos altos (más de 2,5 s); esta observación no estaba clara en la representación anterior, indicando que el pseudoespectro de velocidades debe emplearse con cuidado o no emplearse en estos periodos; por fortuna la mayoría de estructuras están dentro de los periodos donde el error es aceptable.

Al ingeniero estructural le interesa más la aceleración que la velocidad para sus diseños, condición que satisface la relación espectral de pseudoaceleración.

Ejemplo sobre representación tripartita: obtener el espectro de respuesta para el acelerograma de Hollister, por medio de la representación tripartita.

Solución: en los ejemplos anteriores se encontraron el espectro de respuesta de desplazamiento, el espectro de pseudovelocidad y pseudoaceleración, ahora solo resta graficarlos en un mismo plano (figura 77), usando escalas logarítmicas, en la horizontal los periodos y en la ordenada los valores de pseudovelocidad, en los ejes diagonales para el desplazamiento a 45° con respecto a la abscisa y para la pseudoaceleración a 135°; en la obra de Paz, en 1995 se da una prueba de esta orientación de los ejes diagonales.

Figura 77. **Espectro Hollister en representación tripartita**



Fuente: elaboración propia.

Tabla VIII. **Valores acordes a la representación tripartita**

$T_n$ (s)	$\omega_n$ (rad/s)	$S_d$ (m)	$PS_v$ (m/s)	$PS_a$ (g)
0,01	628,319	0,00001	0,01	0,36
0,02	314,159	0,00004	0,01	0,37
0,03	209,440	0,00011	0,02	0,48
0,04	157,080	0,00015	0,02	0,38
0,05	125,664	0,00046	0,06	0,73
0,06	104,720	0,00061	0,06	0,68
0,07	89,760	0,00080	0,07	0,65
0,08	78,540	0,00139	0,11	0,87
0,09	69,813	0,00134	0,09	0,67
0,10	62,832	0,00162	0,10	0,65
0,20	31,416	0,00446	0,14	0,45
0,30	20,944	0,01548	0,32	0,69
0,40	15,708	0,02514	0,39	0,63
0,50	12,566	0,06427	0,81	1,03
0,60	10,472	0,07966	0,83	0,89
0,70	8,976	0,10412	0,93	0,86
0,80	7,854	0,14575	1,14	0,92
0,90	6,981	0,17908	1,25	0,89
1,00	6,283	0,23798	1,50	0,96
2,00	3,142	0,33711	1,06	0,34
3,00	2,094	0,31964	0,67	0,14
4,00	1,571	0,26966	0,42	0,07
5,00	1,257	0,50062	0,63	0,08
6,00	1,047	0,55696	0,58	0,06
7,00	0,898	0,69905	0,63	0,06
8,00	0,785	0,59388	0,47	0,04
9,00	0,698	0,47935	0,33	0,02
10,00	0,628	0,46599	0,29	0,02
20,00	0,314	1,30444	0,41	0,01
30,00	0,209	2,19806	0,46	0,01
40,00	0,157	2,84850	0,45	0,01
50,00	0,126	3,57241	0,45	0,01

Fuente: elaboración propia.

## 6.5. Espectro elástico de diseño

Se propone un espectro de respuesta del 5% del crítico para el diseño, siendo lo más normal, pero en verdad existe la certeza de que ese es el amortiguamiento de la estructura en combinación con la estratigrafía del lugar, quizá se idealice con un amortiguamiento crítico de 0%, 1%, 2%, 3%, ..., 10% y entonces se necesita el espectro de respuesta para cada uno de estos amortiguamientos, considerando que sólo se está tomando en cuenta un sismo.

¿Qué pasa si no es representativo de la región?, ¿cómo saber cuál lo es?; utilizar el más severo y menos frecuente es antieconómico y el más endeble no sirve para la seguridad, y cuántos sismos son los mínimos a tener en cuenta para llegar a adoptar parámetros confiables, esto es lo que el ingeniero estructural deberá considerar al hacer uso o aplicar el espectro de aceleración; de aquí que para propósitos de diseño el espectro de respuesta es insuficiente.

La forma dentada en el espectro de respuesta es característico de una sola excitación, el espectro de respuesta para otro movimiento del suelo registrado en el mismo sitio durante un sismo diferente es también dentado, pero los picos y valles no son necesariamente en los mismos periodos; igualmente no es posible predecir el espectro de respuesta con todos sus detalles para un movimiento del suelo que pueda ocurrir en el futuro.

Cuál usar ¿el promedio?, Housner ya lo propuso, el espectro promedio es el antecesor del espectro suavizado. El espectro de diseño debe consistir de un grupo de curvas suavizadas o una serie de curvas rectas con una para cada nivel de amortiguamiento y debe ser representativo de movimientos del suelo registrados en el sitio durante sismos pasados, si no existen registros del lugar, entonces a sismos registrados en otros sitios bajo condiciones similares.

Los factores que influyen en esta selección son: la magnitud del sismo, la distancia del sitio a la falla sísmica, el mecanismo de falla, la geología presente en la trayectoria del viaje de las ondas sísmicas y las condiciones locales del suelo en el sitio (Goytia y Villanueva, 2001).

Dado que es imposible estimar en detalle las características de los movimientos sísmicos que se presentan en el futuro, al menos en el estado del conocimiento actual, la gran mayoría de los métodos para definir un espectro de diseño se sustentan en el estudio estadístico de espectros de respuesta de registros acelerográficos que tienen algunas características en común. El hecho de que se componga de líneas suavizadas o rectas, inclusive, se justifica debido a las dificultades que se tienen al estimar los períodos de vibración de estructuras que van, con seguridad, a responder en el rango inelástico, durante un sismo fuerte (García, 1998).

Por otro lado, hay gran influencia de los efectos de campo cercano, tales como el tipo de fuente sismogénica, la forma en que se propaga la ruptura, las características de los materiales que se encuentran en la trayectoria de las ondas sísmicas y las condiciones locales del suelo (Mohraz y Elghadamsi, 1989).

Existen diferentes métodos para estimar el espectro de diseño, dado que se conocen ciertas características de los movimientos sísmicos esperados en el sitio. En general, cuando se habla de un espectro de diseño este se define en “suelo duro o roca” y por lo tanto no incluye el efecto que puede tener la estratigrafía del suelo en el lugar. En aquellos casos en que hay depósitos profundos de suelos blandos, en general se realiza un estudio de amplificación de onda, por medio del cual es posible incluir estos parámetros totalmente locales en el espectro de diseño (García, 1998).

Dado que en general los espectros de diseño se obtienen del estudio estadístico de registros que por su naturaleza propia no pueden ser iguales, esto conduce a que se tengan que normalizar de alguna manera; para lo cual existen diferentes procedimientos, dentro de los que se destacan la normalización respecto de una intensidad espectral y la normalización en relación con algunos de los “parámetros máximos del terreno”, ya sea aceleración, velocidad o desplazamiento ( $A_{te}$ ,  $V_{te}$  o  $D_{te}$ ).

Tal vez el primer espectro de diseño, dentro del sentido actual, fue desarrollado por Housner a comienzos de la década de 1950 (Housner, 1952), (Housner, 1959) y (Housner y Hudson, 1961). Housner desarrolló el concepto del espectro promedio, el cual fue el que concibió el espectro suavizado.

A continuación se presentan, algunos de los métodos más utilizados para definir el espectro de diseño en roca.

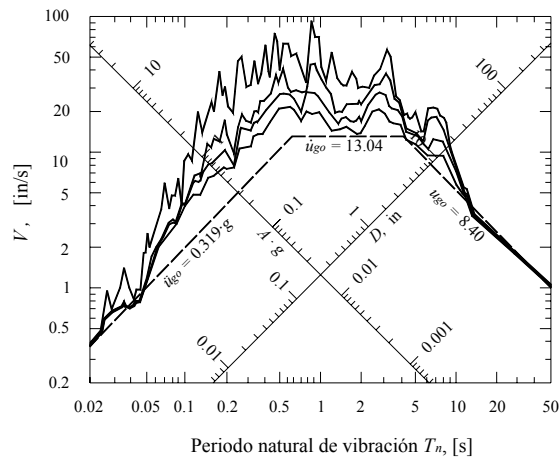
#### **6.5.1. Método de Newmark-Hall**

A mediados de la década de 1960, Newmark y Hall iniciaron una serie de investigaciones sobre las formas espectrales, principalmente para ser empleadas en el diseño de plantas nucleares. Con base en estos estudios, recomendaron la posibilidad de describir el espectro por medio de líneas rectas dibujadas en papel tripartito. En uno de los ejemplos se mostró la representación tripartita del espectro de respuesta para un 5% de amortiguamiento del crítico que es lo más usual para edificios normales pero no se duda que otras estructuras puedan ser idealizadas con un amortiguamiento de 0%, 2%, 10%, 20% etc.



Si se muestran estos espectros en el mismo plano, se obtiene un gráfico como el siguiente:

Figura 78. **Representación tripartita para el espectro del sismo de El Centro ( $\xi = 0, 2, 5$  y  $10\%$ )**



Fuente: CHOPRA, Anil K. Dynamics of structures. p. 211.

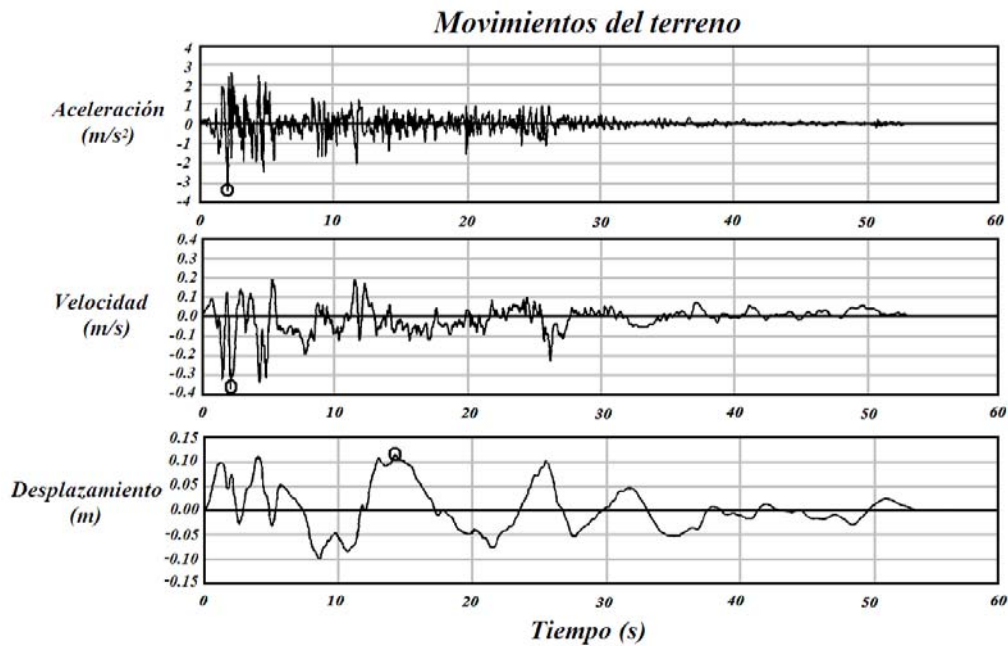
La forma aproximadamente trapezoidal del espectro es evidente en la figura 78; en general, en la zona de la derecha, de períodos largos, el desplazamiento espectral es constante, en la zona central, con períodos moderados, la velocidad espectral es aproximadamente constante y en la zona de la izquierda, de períodos cortos, la aceleración es constante.

En la figura 78 también se han graficado los movimientos máximos del terreno, para indicar la simplificación a que puede optarse; si estos movimientos máximos del terreno se multiplican por factores de amplificación, se cubre la gama de probabilidades que se desee de no excedencia; no obstante lo más común es para el 50% y 84,1% o sea el valor de la media y el valor de la media más una desviación estándar de las ordenadas espectrales.

Para aclarar los movimientos máximos del terreno, si un acelerograma se integra en el tiempo, se obtiene el registro de las velocidades que describió el terreno durante el sismo; si se integra nuevamente, se determinan los desplazamientos del terreno.

En la figura 79 se muestra para el temblor de “El Centro” en California mayo 18 de 1940, el registro original de aceleraciones, el de velocidades del terreno, que se obtuvo al integrar el de aceleraciones y el de desplazamientos del terreno, que a su vez proviene de integrar el de velocidades del terreno. En los gráficos se han marcado los máximos para la aceleración del terreno ( $A_{te} = 3,417 \text{ m/s}^2$ , equivalente a  $0,348g$ ), la velocidad del terreno ( $V_{te} = 0,334 \text{ m/s}$ ), y el desplazamiento del terreno ( $D_{te} = 0,109 \text{ m}$ ).

Figura 79. **Temblor del Imperial Valley, El Centro - mayo 18 de 1940**



Fuente: GARCÍA. Luis. Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico. p. 79.

La relación que puede existir entre estos tres parámetros ha sido estudiada desde hace algún tiempo. En (Newmark, 1968 y 1969), N. M. Newmark indicaba que la siguiente relación era siempre válida;  $D_{te}A_{te} > V_{te}^2$  y que en general:

$$\frac{D_{te}A_{te}}{V_{te}^2} \approx (5 \text{ a } 10)$$

Estudios posteriores realizados por B. Mohraz, (Mohraz, 1976), para diferentes tipos de suelo, indican las relaciones entre los diferentes movimientos máximos del terreno, evaluadas en la media estadística, dadas en la tabla IX.

Tabla IX. **Relaciones entre los movimientos máximos del terreno**

<b>Tipo de suelo</b>	$V_{te}/A_{te}$ (m/s)/g	$A_{te}D_{te}/(V_{te})^2$	$D_{te}/V_{te}$ (m/g)
Roca	0,61	5,3	0,20
Menos de 9 m de aluvión sobre la roca	0,76	4,5	0,28
De 9 a 60 m de aluvión sobre la roca	0,76	5,1	0,30
Más de 60 m de aluvión	1,22	3,9	0,58

Fuente: MOHRAZ, B. Bulletin of the seismological society of America. p. 921.

B. Seed, (Seed y Idriss, 1982), indica que a pesar de que los valores de  $V_{te}/A_{te}$  varían con la distancia al lugar de ocurrencia del sismo, para distancias menores de aproximadamente 50 km, los siguientes valores, en (m/s)/g son representativos: 0,55 para roca, 1,10 para depósitos de suelos rígidos de profundidad menores a 60 m, y 1,35 para depósitos de suelos rígidos con más de 60 m de profundidad.

En (Newmark y Hall, 1982) se sugiere que si sólo puede determinarse en el estudio de amenaza el valor máximo de la aceleración del terreno,  $A_{te}$ , pueden utilizarse estos valores representativos de  $V_{te}/A_{te}$ , 1,22 m/(s·g) para aluvión firme y 0,91 m/(s·g) para roca. Para que el espectro represente una banda adecuada de períodos, se recomienda que  $A_{te}D_{te}/(V_{te})^2$  se tome como 6,0.

En la figura 78 puede verse que para períodos bajos, menores de 0,1 s, el espectro tiende a la aceleración del terreno para cualquier amortiguamiento. Esto se debe a que el resorte es muy rígido y/o la masa pequeña; por lo tanto tiende a no haber deformación relativa entre los extremos del resorte y por ende la masa tiene aceleraciones aproximadamente iguales a la máxima del terreno.

Para períodos altos, mayores de 3 segundos, el espectro tiende a tener un desplazamiento igual al desplazamiento máximo del terreno. Esto se debe a que los sistemas con períodos altos tienen resortes flexibles y/o masas grandes; es de esperarse que la masa quede esencialmente estacionaria, mientras que el suelo se encuentra en movimiento, por lo tanto el desplazamiento relativo entre los extremos del resorte tiende a ser igual al máximo del terreno.

Para la zona de períodos intermedios la velocidad espectral tiende a ser constante, con un valor mayor que la velocidad máxima del terreno, dependiendo del amortiguamiento que tenga el sistema. De lo anterior se puede deducir que para períodos intermedios, hay una amplificación de la velocidad espectral respecto de la velocidad máxima del terreno (García, 1998).

El método de Newmark y Hall para el espectro de diseño se basa en que sea posible estimar independientemente, la máxima aceleración horizontal del terreno,  $A_{te}$ , la máxima velocidad horizontal del terreno,  $V_{te}$  y el máximo desplazamiento horizontal del terreno,  $D_{te}$  para el sismo de diseño.

Con base en el estudio de numerosos sismos, los autores encontraron que dentro de las tres zonas del espectro en las cuales la aceleración es aproximadamente constante; la velocidad es aproximadamente constante y el desplazamiento es aproximadamente constante, es posible definir coeficientes de amplificación que permiten dibujar un espectro normalizado. En la tabla X se presentan los coeficientes de amplificación para varios valores del coeficiente de amortiguamiento, los cuales corresponden a dos niveles diferentes de probabilidad de que las ordenadas del espectro de diseño no sean excedidas cuando se presente un evento que tenga los mismos movimientos máximos del terreno.

Tabla X. **Factores de amplificación: espectro de diseño elástico**

Amortig. $\xi$ (%)	Media más una Desviación estándar (84.1%)			Media (50%)		
	$\alpha_A$	$\alpha_V$	$\alpha_D$	$\alpha_A$	$\alpha_V$	$\alpha_D$
0,5	5,10	3,84	3,04	3,68	2,59	2,01
1	4,38	3,38	2,73	3,21	2,31	1,82
2	3,66	2,92	2,42	2,74	2,03	1,63
3	3,24	2,64	2,24	2,46	1,86	1,52
5	2,71	2,30	2,01	2,12	1,65	1,39
7	2,36	2,08	1,85	1,89	1,51	1,29
10	1,99	1,84	1,69	1,64	1,37	1,20
20	1,26	1,37	1,38	1,17	1,08	1,01

Fuente: CHOPRA, Anil K. Dynamics structures. p. 608.

Los valores dados en la tabla X, se pueden expresar en forma de ecuación así: para un nivel de probabilidad del 84,1% (media más una desviación estándar) de que no sean excedidas las ordenadas espectrales:

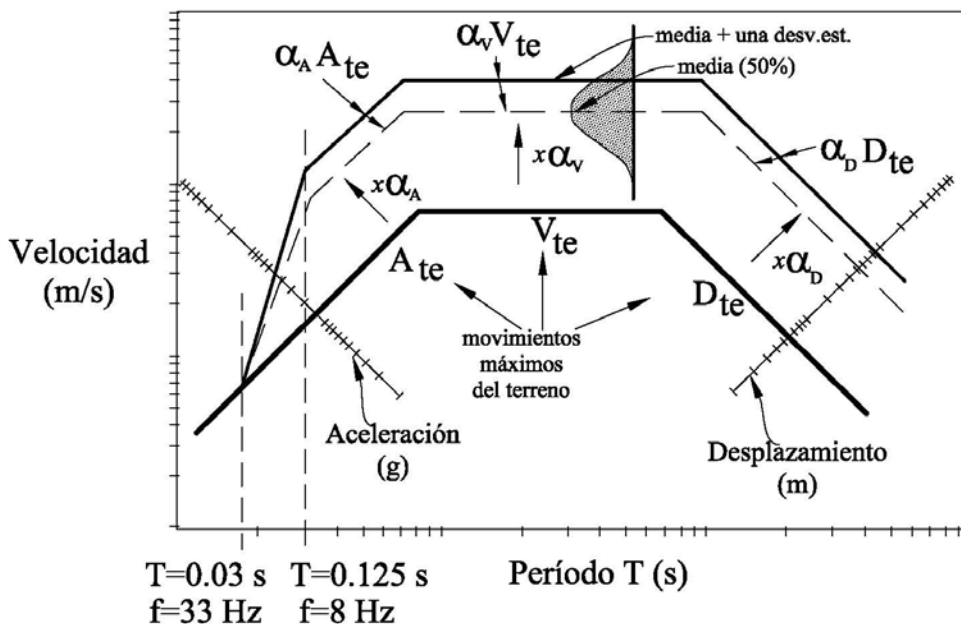
$$\begin{aligned}
 \alpha_A &= 4,38 - 1,04 \ln (\xi\%) \\
 \alpha_V &= 3,38 - 0,67 \ln (\xi\%) \\
 \alpha_D &= 2,73 - 0,45 \ln (\xi\%)
 \end{aligned}
 \tag{6.15}$$

Para un nivel de probabilidad del 50% (media) de que no sean excedidas las ordenadas espectrales:

$$\begin{aligned}\alpha_A &= 3,21 - 0,68 \ln(\xi\%) \\ \alpha_V &= 2,31 - 0,41 \ln(\xi\%) \\ \alpha_D &= 1,82 - 0,27 \ln(\xi\%) \end{aligned} \quad (6.16)$$

El espectro se construye como se muestra esquemáticamente en la figura 80 en papel espectral logarítmico tripartita se dibujan las líneas correspondientes a los máximos valores del terreno: máxima aceleración,  $A_{te}$ , máxima velocidad,  $V_{te}$ , y máximo desplazamiento,  $D_{te}$ , de los movimientos sísmicos de diseño. Estos valores provienen en general de un estudio de amenaza sísmica, (García et al., 1984 y 1996).

Figura 80. **Construcción del espectro de diseño de Newmark y Hall**



Fuente: GARCÍA. Luis. Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico. p. 177.

El procedimiento de definición del espectro es el siguiente: para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $\xi$ , dado, se buscan en la tabla X los valores de los coeficientes de amplificación correspondientes a la zona del espectro con aceleración aproximadamente constante,  $\alpha_A$ , con velocidad aproximadamente constante,  $\alpha_V$ , y con desplazamiento aproximadamente constante,  $\alpha_D$ , para el nivel de probabilidad deseado o se introduce el valor de  $\xi$  en las ecuaciones.

Luego se trazan líneas paralelas a los correspondientes valores máximos de los movimientos del terreno con los valores amplificados, o sea multiplicando el valor de movimiento máximo del terreno por el coeficiente  $\alpha$  apropiado.

En la zona de períodos cortos, a un valor de frecuencia de aproximadamente 8 Hz (período de 0,125 s) se inicia la transición hacia la aceleración del terreno, a la cual se debe llegar a un valor de frecuencia del orden de 33 Hz (período igual a 0,03 s) y a partir de este punto hacia la izquierda la aceleración espectral es igual a la del terreno.

Newmark y Hall recomiendan que el espectro se multiplique por las siguientes constantes de proporcionalidad: para roca competente, 0,67, para roca meteorizada o blanda, o suelos sedimentarios firmes (aluvión), 1,0, para suelos sedimentarios blandos, 1,5.

Respecto de la construcción de un espectro de aceleraciones verticales, indican que pueden emplearse 2/3 de las ordenadas espectrales para lugares donde los movimientos de la falla son transcurrentes horizontales, e iguales a la horizontal cuando los movimientos de la falla puedan tener componentes verticales grandes (Newmark y Hall, 1982).

Ejemplo de espectro de diseño elástico: obtener el espectro de diseño para el sismo de Hollister, con el método de Newmark y Hall, para un sistema con un coeficiente de amortiguamiento del 5% del crítico, se quiere un nivel de probabilidad de no exceder las ordenadas espectrales del 84,1%.

Nota: este ejemplo es estrictamente didáctico; en la práctica nunca debe obtenerse un espectro de diseño solo con un acelerograma.

Para un sitio específico el número mínimo para un análisis de historial en el tiempo es de tres registros y esto es de una forma muy burda; el número mínimo depende del grado de confiabilidad estructural que se desee, de la configuración y envergadura de la edificación; sobre todo dicho número mínimo de movimientos sísmicos depende de la dispersión de las distorsiones máximas de entepiso, producidas por movimientos sísmicos con un período de recurrencia dado, para un informe detallado se puede consultar “Escalamiento de acelerogramas y número mínimo de registros requeridos para el análisis de estructuras” (Chan et al., 2005).

Si sólo se tiene un registro y quiere utilizarse para diseño, es mejor usar su espectro de respuesta.

Solución: para este método se requiere de los movimientos máximos del terreno, la aceleración máxima del terreno para el sismo de Hollister, se obtiene de la tabla de datos o la gráfica del acelerograma que están en el ejemplo de respuesta a Hollister:

$$A_{te} = 361,9 \text{ cm/s}^2$$
$$A_{te} = 361,9 \text{ cm/s}^2 \cdot 1 \text{ g} / \left(981 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}\right) \rightarrow A_{te} = 0,369 \text{ g}$$



La velocidad máxima se obtiene de integrar el acelerograma y el desplazamiento máximo, a su vez de integrar la curva de los datos de velocidad y localizar el máximo. No obstante, para que el espectro de diseño sea lo más representativo, se usarán las sugerencias de (Newmark y Hall, 1982), se sitúa el sistema en roca, ya que de ahí, si se desea modificar, se puede afectar según las condiciones de sitio, por lo que se debe cumplir:

$$\frac{V_{te}}{A_{te}} = 0,91 \text{ m}/(\text{s} \cdot \text{g}) \quad \rightarrow \quad V_{te} = [0,91 \text{ m}/(\text{s} \cdot \text{g})]A_{te}$$

$$V_{te} = [0,91 \text{ m}/(\text{s} \cdot \text{g})](0,369 \text{ g}) \quad \rightarrow \quad V_{te} = 0,336 \text{ m/s}$$

También recomiendan que  $A_{te}D_{te}/(V_{te})^2$  se tome como 6,0:

$$\frac{A_{te}D_{te}}{(V_{te})^2} = 6 \quad \rightarrow \quad D_{te} = \frac{6(V_{te})^2}{A_{te}} \equiv \frac{6(0,336 \text{ m/s})^2}{3,619 \text{ m/s}^2} \quad \rightarrow \quad D_{te} = 0,187 \text{ m}$$

De donde se llega a los máximos movimientos del suelo:

$A_{te} = 0,37 \text{ g}$	$V_{te} = 0,34 \text{ m/s}$	$D_{te} = 0,19 \text{ m}$
---------------------------	-----------------------------	---------------------------

Los valores de amplificación para la media más una desviación estándar y 5% de amortiguamiento del crítico, se obtienen por ecuaciones o más sencillamente de la tabla X, los cuales son:

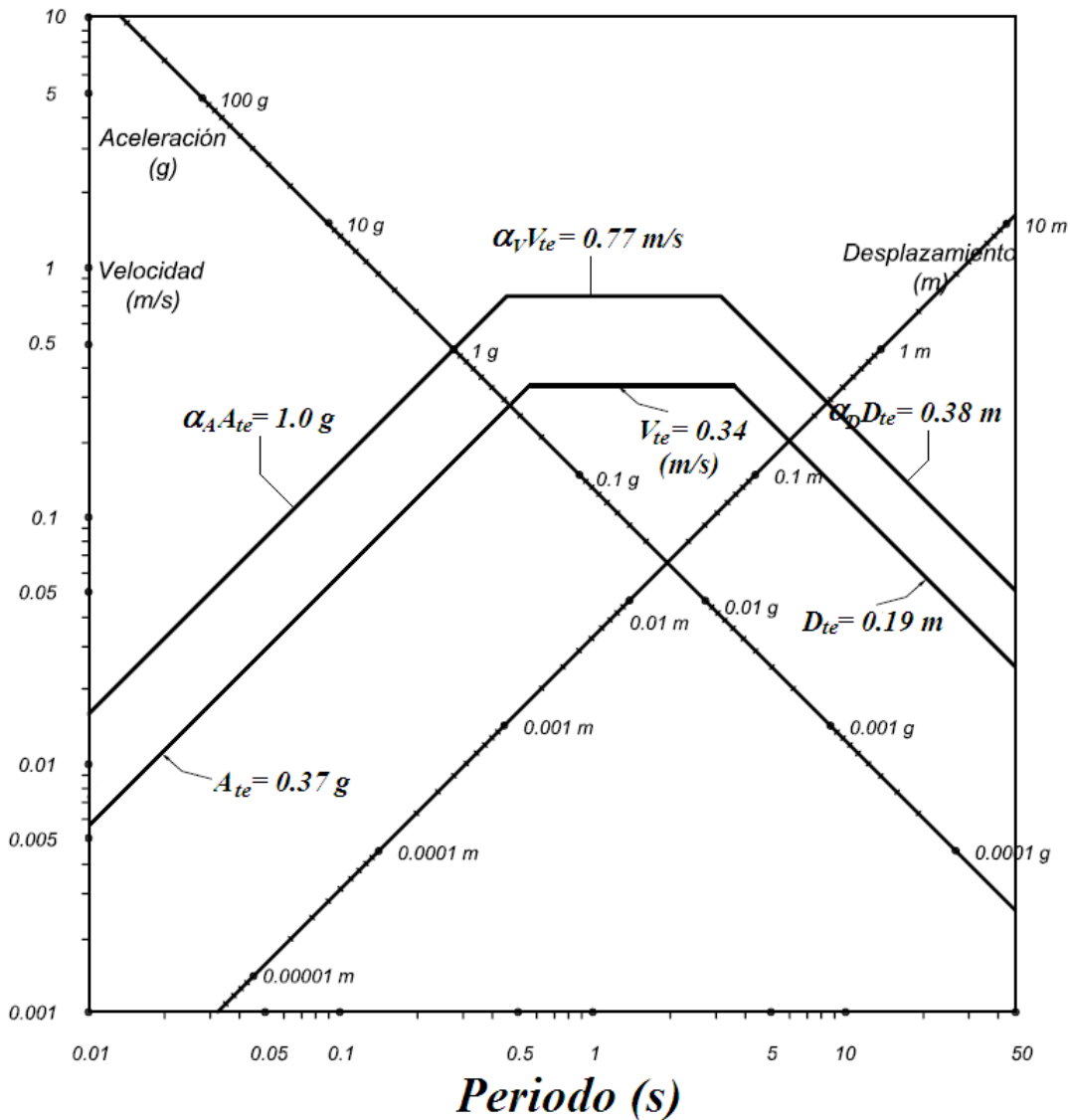
$$\alpha_A A_{te} = 2,71(0,369 \text{ g}) \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha_A A_{te} = 1,0 \text{ g}}$$

$$\alpha_V V_{te} = 2,30(0,336 \text{ m/s}) \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha_V V_{te} = 0,77 \text{ m/s}}$$

$$\alpha_D D_{te} = 2,01(0,187 \text{ m}) \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha_D D_{te} = 0,38 \text{ m}}$$

Ahora se grafican en escala tripartita las rectas que representan los valores de movimiento máximo del suelo y también los movimientos máximos amplificados por los factores correspondientes, resultando la siguiente gráfica:

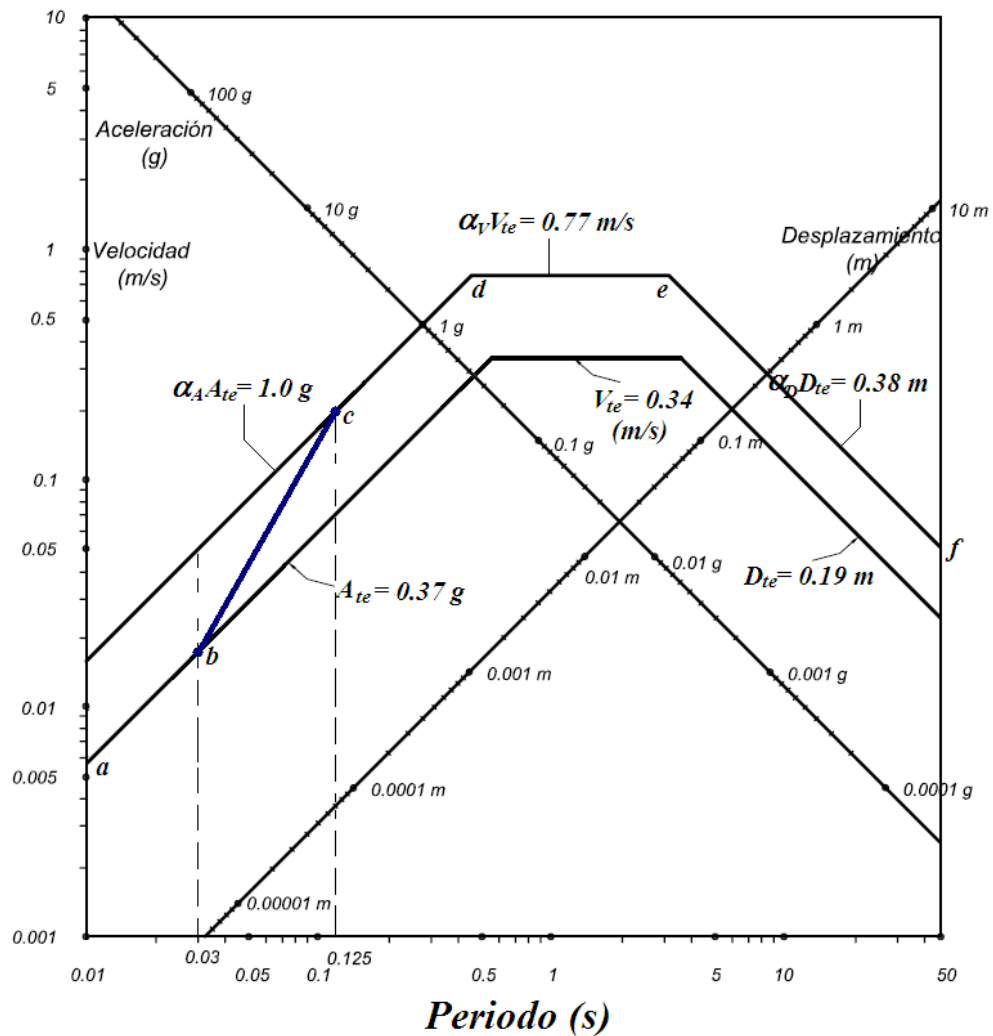
Figura 81. Valores máximos del terreno y amplificaciones



Fuente: elaboración propia.

A continuación se trazan líneas verticales; guía que representan los periodos de transición de la aceleración del terreno a la aceleración del sistema de 0,03 s (33 Hz) a 0,125 s (8 Hz). Las líneas guía se utilizan para dibujar la línea de transición de la aceleración máxima del terreno a la curva de valores amplificados por los factores  $\alpha$ ; estas curvas se unen por medio de una línea recta que va de b a c, o sea de los periodos 0,03 s a 0,125 s, resaltada con color azul en la gráfica:

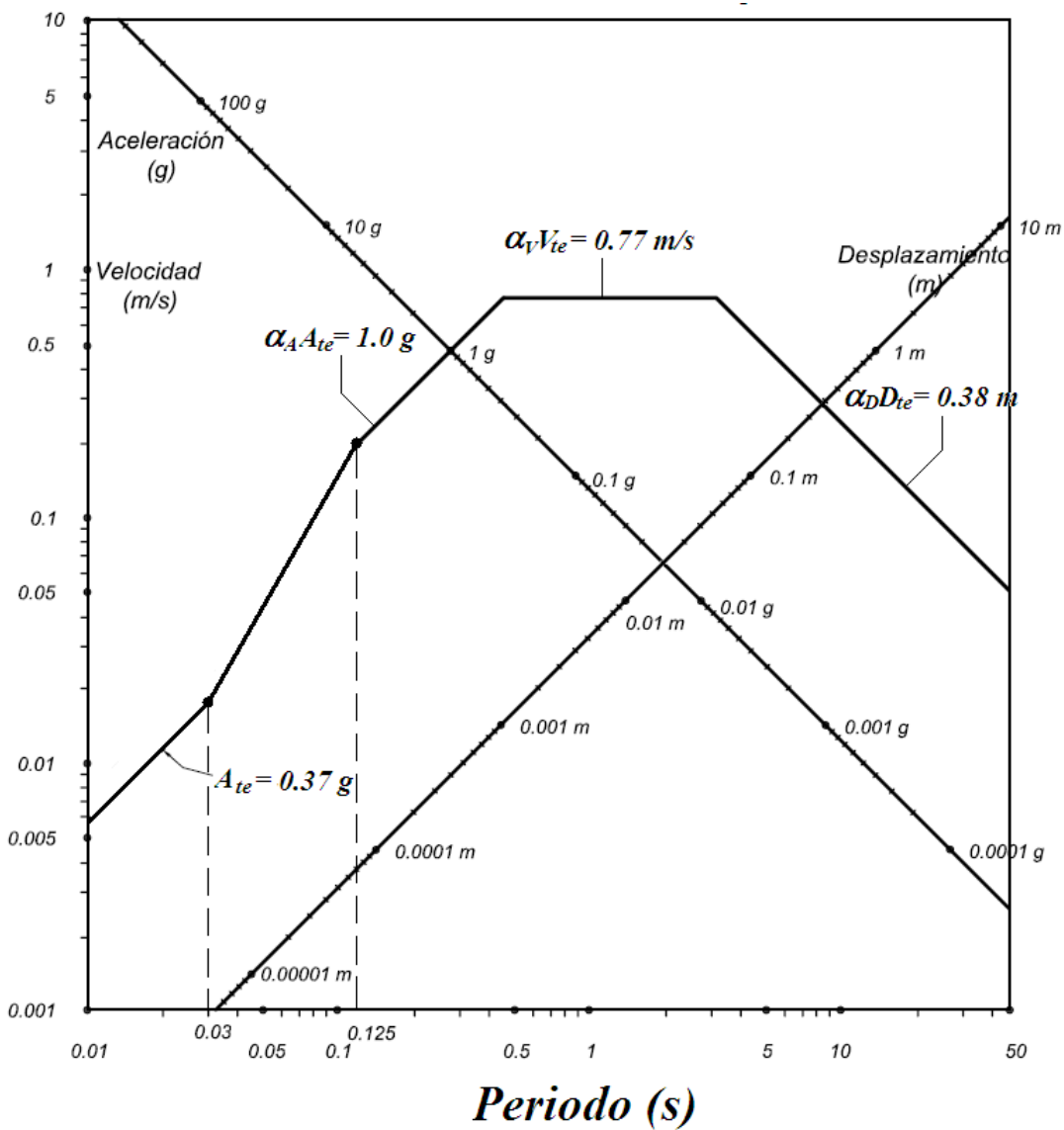
Figura 82. Líneas guías para la construcción del espectro de diseño



Fuente: elaboración propia.

Finalmente, el espectro de diseño sigue la secuencia *a-b-c-d-e-f*, mostrada en la figura anterior; su forma es la siguiente:

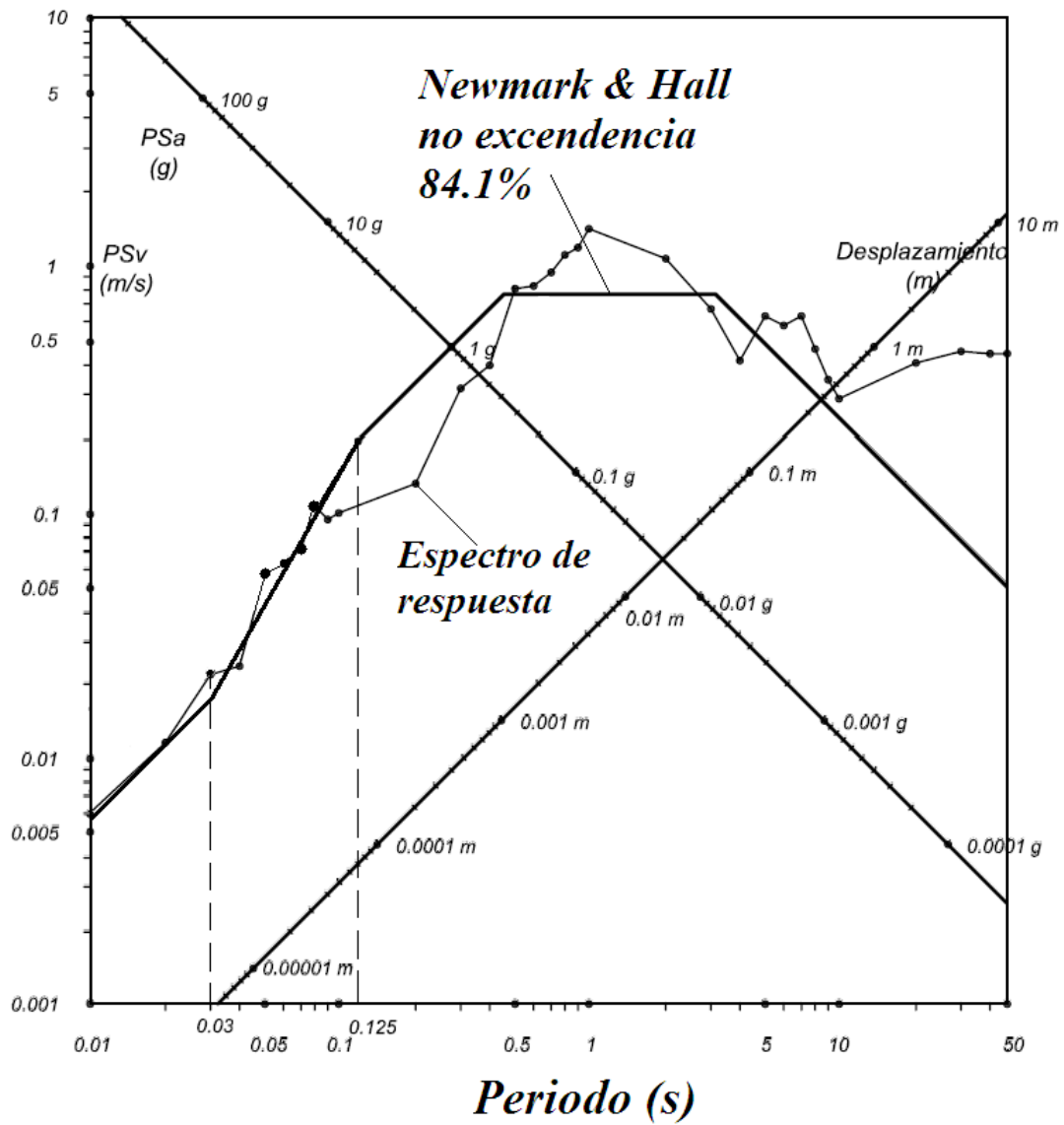
Figura 83. **Espectro de diseño elástico Hollister  $\xi = 5\%$**



Fuente: elaboración propia.

Se mencionó que el espectro de diseño es una idealización, que representa un proceso estadístico de movimientos del suelo y sus espectros de respuesta, por lo que a continuación se comparan estos.

Figura 84. Espectros de respuesta y diseño  $\xi = 5\%$



Fuente: elaboración propia.

Teóricamente las ordenadas del espectro de diseño exceden a las del espectro de respuesta un 84,1%; según la gráfica parece obedecerse esa teoría probabilística, excepto una anomalía del espectro de respuesta para periodos mayores a los 10 s; en ese rango el desplazamiento debería comportarse de forma aproximadamente constante; no obstante, aumenta de 45 cm a 3,6 m aproximadamente; quizá el método de tramos exactos falla para periodos altos.

El proceso que se ha descrito para obtener este espectro de diseño, es un proceso manual; a medida que se tenga práctica, el espectro de diseño se obtiene de un solo trazo. Se dibujan las líneas guía que representan los periodos de transición, y la recta del valor máximo de la aceleración del suelo hasta el período de 0,03 s (33 = Hz); se trazan los movimientos máximos del suelo amplificados desde el período de 0,125 s (8 Hz); se finaliza el espectro de diseño uniendo los trazos con una recta en los periodos de transición.

### **6.5.2. Método de Newmark – Blume – Kapur**

El estudio inicial se realizó independientemente por parte de J. A. Blume y N. M. Newmark. En esta fase se emplearon 42 y 33 acelerogramas, respectivamente. La forma del espectro en ambos casos fue determinada estadísticamente, utilizando distribuciones log-normales.

Los espectros se definen para tres niveles de probabilidad de no excedencia en sus ordenadas: media (50%), media más una desviación estándar (84,1%) y media más dos desviaciones estándar (97,7%); con cuatro períodos de control: el período  $A$ , que define el punto donde se inicia la amplificación de la aceleración respecto de la aceleración máxima del terreno,  $A_{ie}$ , se fijó en  $T_A = 0,03 \text{ s}$  ( $f = 33 \text{ Hz}$ ); el período  $B$ , marca el final de esta transición, fue fijado en  $T_B = 0,11 \text{ s}$  ( $f = 9 \text{ Hz}$ ).

El período  $C$  marca el punto de transición entre la zona de amplificación de la aceleración y la de amplificación de la velocidad, fue fijado en  $T_C = 0,4 \text{ s}$  ( $f = 2,5 \text{ Hz}$ ); por último, el período  $D$  define el punto de transición entre la zona de amplificación de velocidades y la zona de amplificación de desplazamientos, y fue fijado en  $T_D = 4,0 \text{ s}$  ( $f = 0,25 \text{ Hz}$ ).

Para cada uno de los períodos  $A$ ,  $B$  y  $C$  se fijaron coeficientes de amplificación que afectan la aceleración máxima del terreno,  $A_{te}$ , y que dependen del coeficiente de amortiguamiento crítico.

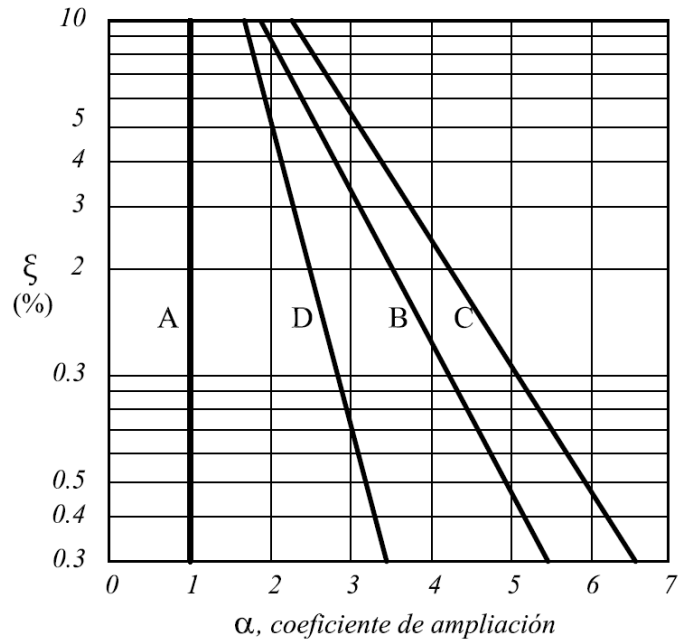
Para el período de control  $D$ , se prescribe un coeficiente de amplificación de desplazamiento, también en función del amortiguamiento, el cual afecta el desplazamiento máximo del terreno,  $D_{te}$ . El desplazamiento máximo del terreno,  $D_{te}$  (m), se estima en función de la aceleración máxima del terreno,  $A_{te}$  (g), por medio de la siguiente relación:

$$D_{te} = 0,91 \cdot A_{te} \quad (6.17)$$

En la figura 85 se muestran los coeficientes de amplificación para cada uno de los períodos de control, en función del coeficiente de amortiguamiento crítico,  $\xi$ , a que se desee producir el espectro. Los coeficientes de amplificación definen un espectro cuyas ordenadas espectrales tienen una probabilidad de no ser excedidas del 84,1% (media más una desviación estándar).

Todos amplifican respecto de la aceleración máxima del terreno,  $A_{te}$ , excepto el correspondiente al período de control  $D$ , que amplifica con respecto al desplazamiento máximo del terreno,  $D_{te}$ .

Figura 85. **Coeficiente  $\alpha$  de amplificación para los periodos de control A, B, C y D**



*Coeficientes de amplificación para los periodos de control A, B, C y D.*

Fuente: GARCÍA. Luis. Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico. p. 180.

Las ecuaciones que describen estos coeficientes de amplificación, para un nivel de probabilidad del 84,1% (media más una desviación estándar), son las siguientes, las cuales son válidas para valores del amortiguamiento menores o iguales al 10%:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{T_A} &= 1,0, & T_A &= 0,03 \text{ s} & (6.18) \\
 \alpha_{T_B} &= 4,25 - 1,02 \ln (\xi\%), & T_B &= 0,11 \text{ s} \\
 \alpha_{T_C} &= 5,1 - 1,224 \ln (\xi\%), & T_C &= 0,40 \text{ s} \\
 \alpha_{T_D} &= 2,85 - 0,50 \ln (\xi\%), & T_D &= 4,00 \text{ s}
 \end{aligned}$$



El espectro se construye dibujando primero, en papel espectral tripartita las líneas correspondientes a la aceleración máxima del terreno,  $A_{te}$ , Y al desplazamiento máximo del terreno,  $D_{te}$ . Estos valores provienen en general de un estudio de amenaza sísmica. Luego, para un valor del coeficiente de amortiguamiento  $\xi$ , se buscan en la figura 85 los valores de los coeficientes de amplificación correspondientes a los períodos de control  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ .

Luego en cada uno de estos períodos de control, se coloca punto al valor amplificado de la aceleración, excepto para el período  $D$ , donde se amplifica el desplazamiento. A partir del período  $D$  el espectro presenta un desplazamiento constante. Luego se unen estos puntos amplificados y las líneas que se obtienen definen el espectro.

Para lugares donde haya una gran preponderancia a amplificaciones (frecuencias resonantes) para las componentes del terreno con períodos mayores de 0.5 s, los espectros deben ajustarse apropiadamente. Este caso se presenta generalmente con situaciones donde haya suelos blandos.

Para el espectro vertical se sugiere tomar  $2/3$  del espectro de efectos horizontales, hasta el período de control  $C$ . En este punto, el espectro vertical debe prolongarse hacia la derecha hasta que toque la línea del espectro de efectos horizontales que une los períodos de control  $C$  y  $D$ , y a partir de este punto, los dos espectros son iguales, el valor  $2/3$  se fundamenta en la concentración lineal a que tiende las ondas sísmicas como centroide de un triángulo (Newmark, Blume y Kapur, 1973).

Ejemplo de espectro de diseño Newmark – Blume – Kapur: Obtener el espectro de diseño con el método de Newmark, Blume y Kapur, para las mismas condiciones del ejemplo anterior.

Solución: del ejemplo anterior se obtienen los parámetros relevantes. Nivel de probabilidad, media más una desviación estándar  $\mu+\sigma = 84,1\%$ , razón de amortiguamiento  $\xi = 5\%$ , aceleración máxima del suelo  $A_{te} = 0,369g$ . El desplazamiento máximo del suelo está dado por (6.17):

$$D_{te} = 0,91 \cdot A_{te} \text{ [m]} \equiv 0,91 \cdot 0,369 \text{ [m]} \rightarrow \boxed{D_{te} = 0,336 \text{ m}}$$

Los coeficientes de amplificación están en función del nivel de probabilidad y la razón de amortiguamiento (6.18), donde son:

$$\begin{aligned}\alpha_{T_A} &= 1,0 \\ \alpha_{T_B} &= 4,25 - 1,02 \ln(\xi\%) \equiv 4,25 - 1,02 \ln(5) \equiv 2,608 \\ \alpha_{T_C} &= 5,1 - 1,224 \ln(\xi\%) \equiv 5,1 - 1,224 \ln(5) \equiv 3,130 \\ \alpha_{T_D} &= 2,85 - 0,50 \ln(\xi\%) \equiv 2,85 - 0,50 \ln(5) \equiv 2,045\end{aligned}$$

Sea  $S_a(T)$  la ordenada espectral de aceleración y  $S_d(T)$  la ordenada espectral de desplazamiento, ambas en función del período  $T$ , según este método estos valores espectrales están dados de la siguiente forma:

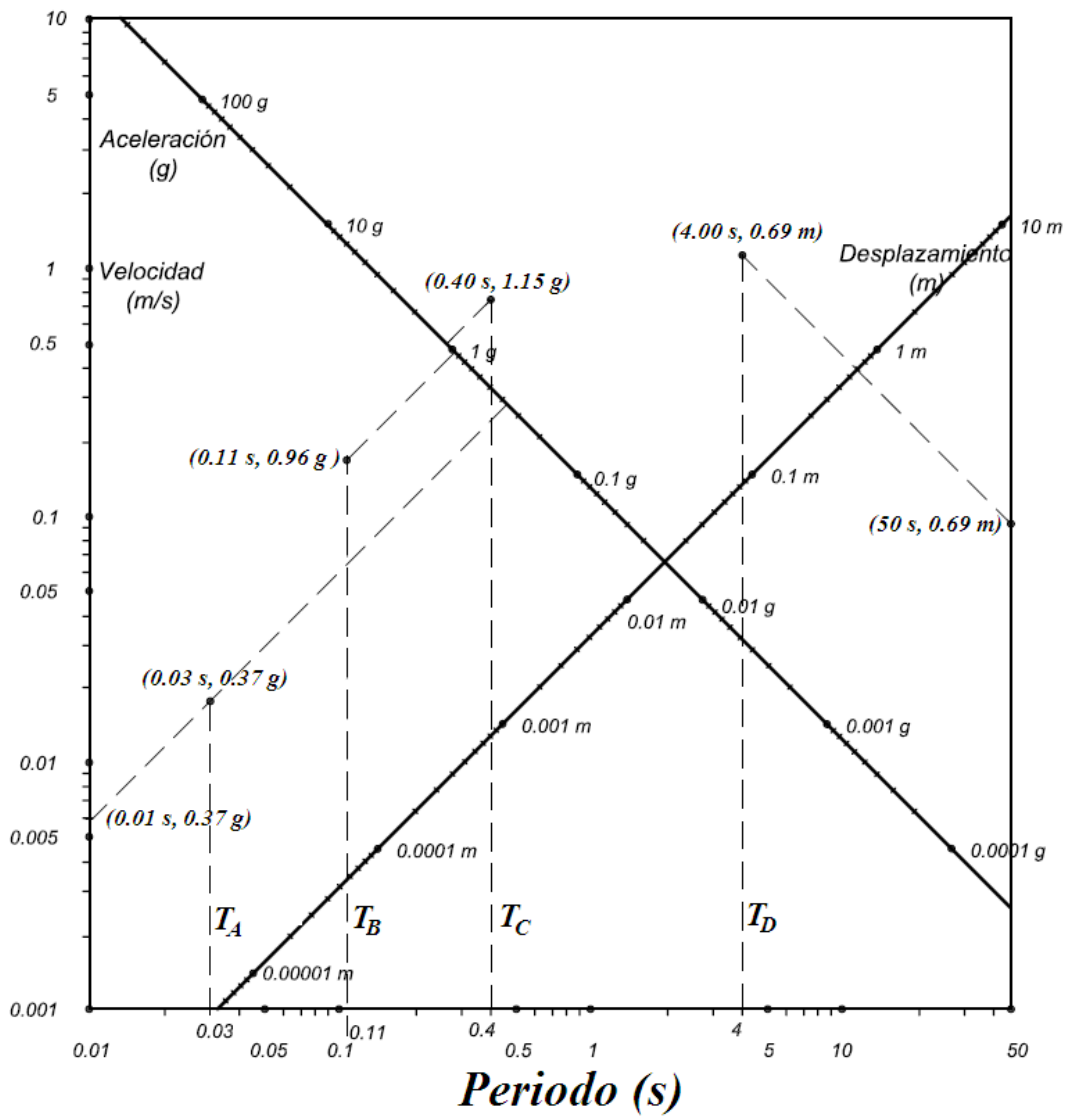
$$\begin{aligned}S_a(T_A) &\equiv S_a(0,03 \text{ s}) = \alpha_{T_A} \cdot A_{te} \equiv (1,0)(0,369 \text{ g}) \equiv 0,37 \text{ g} \\ S_a(T_B) &\equiv S_a(0,11 \text{ s}) = \alpha_{T_B} \cdot A_{te} \equiv (2,608)(0,369 \text{ g}) \equiv 0,96 \text{ g} \\ S_a(T_C) &\equiv S_a(0,40 \text{ s}) = \alpha_{T_C} \cdot A_{te} \equiv (3,130)(0,369 \text{ g}) \equiv 1,15 \text{ g} \\ S_d(T_D) &\equiv S_d(4,00 \text{ s}) = \alpha_{T_D} \cdot D_{te} \equiv (2,045)(0,336 \text{ m}) \equiv 0,69 \text{ m}\end{aligned}$$

Para periodos menores a  $T = 0,03 \text{ s}$ , el espectro de diseño es igual a la aceleración máxima del suelo, de forma semejante para periodos mayores a  $T = 4,0 \text{ s}$ , el espectro de diseño es igual al desplazamiento máximo del suelo; por lo tanto.  $S_a(0,01 \text{ s}) = S_a(0,03 \text{ s}) = 0,37 \text{ g}$  y  $S_d(50,0 \text{ s}) = S_d(4,0 \text{ s}) = 0,69 \text{ m}$

resumiendo, los puntos espectrales son:

$S_a(0,01 \text{ s}) = 0,37 \text{ g}$	$S_a(0,03 \text{ s}) = 0,37 \text{ g}$	$S_a(0,11 \text{ s}) = 0,96 \text{ g}$
$S_a(0,40 \text{ s}) = 1,15 \text{ g}$	$S_d(4,00 \text{ s}) = 0,69 \text{ m}$	$S_d(50,0 \text{ s}) = 0,69 \text{ m}$

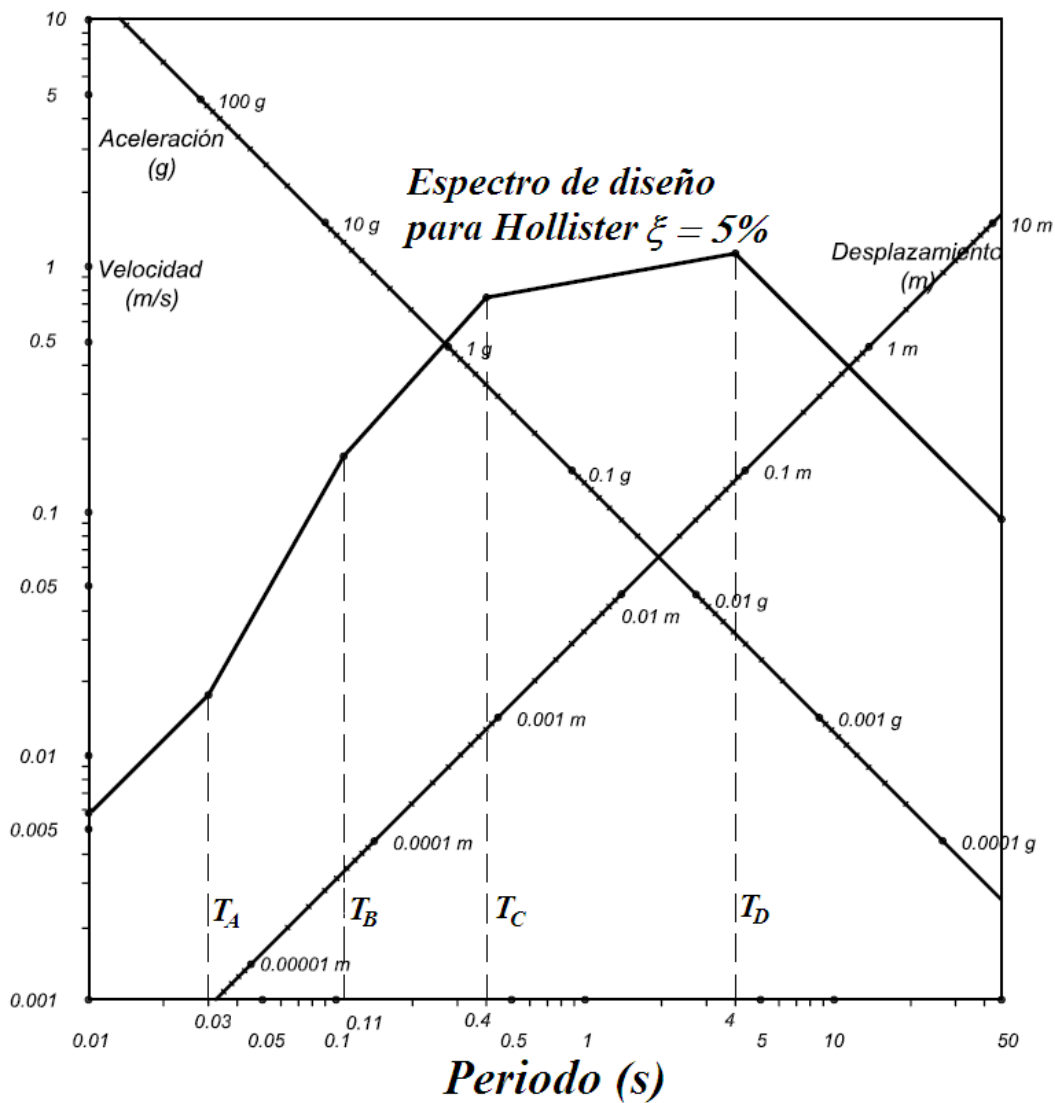
Figura 86. Localización de puntos espectrales



Fuente: elaboración propia.

Los valores espectrales están orientados a los ejes diagonales, los primeros cuatro al eje de aceleración y los últimos dos al eje de desplazamiento, se utilizan líneas guía para ubicar los puntos resultando la gráfica anterior. El espectro de diseño se obtiene uniendo los puntos espectrales:

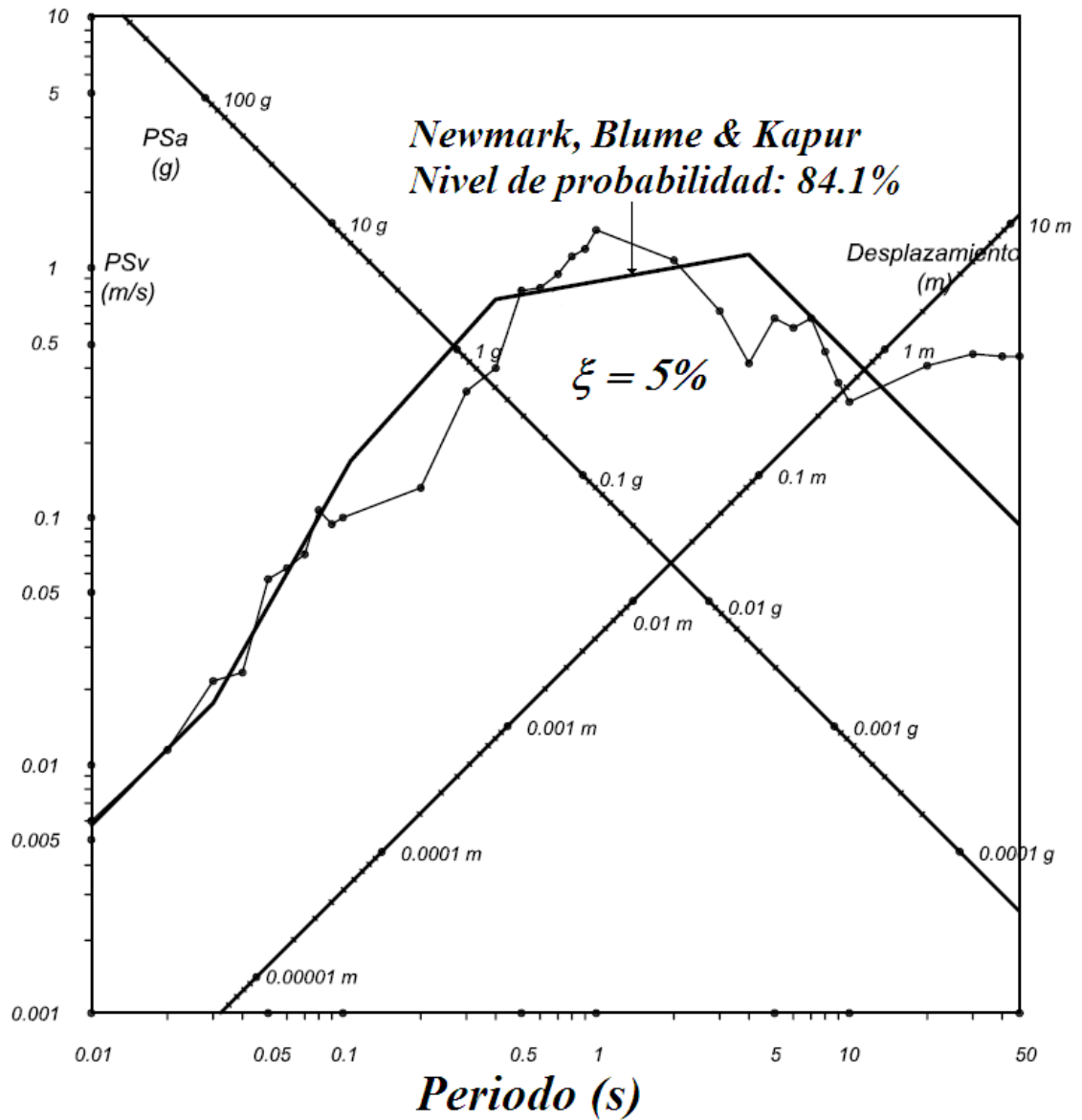
Figura 87. **Espectro de diseño Newmark, Blume y Kapur**



Fuente: elaboración propia.

De forma semejante al ejemplo anterior este espectro sólo es una idealización, se muestran a modo de comparación los espectros de diseño y respuesta:

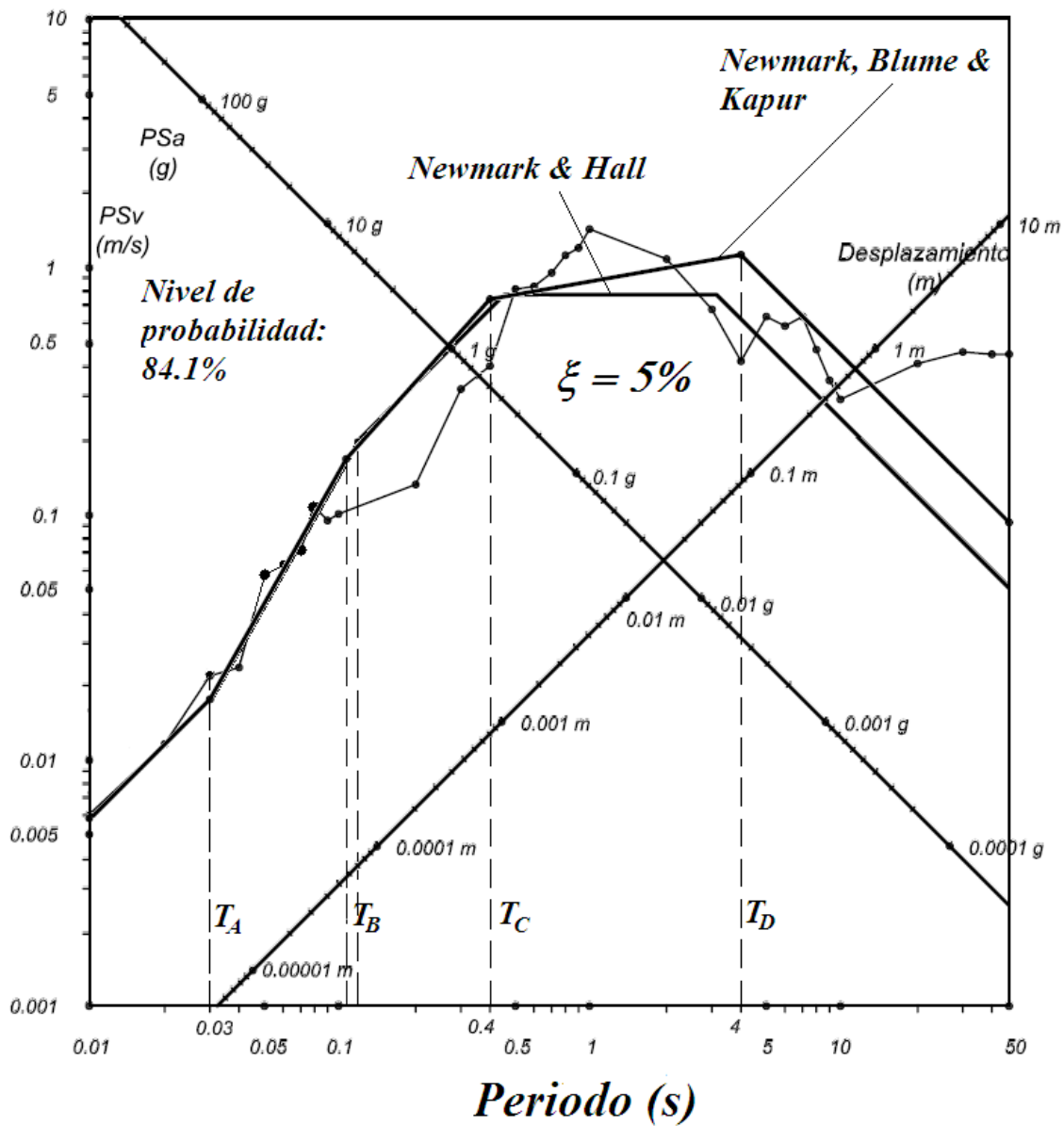
Figura 88. Espectro de respuesta y Newmark, Blume y Kapur



Fuente: elaboración propia.

Para finalizar, se comparan los espectros de diseño de este ejemplo y del anterior, con el espectro de respuesta:

Figura 89. Espectros de respuesta y diseño N-H y N-B-K



Fuente: elaboración propia.

Los tres espectros prácticamente coinciden en los periodos menores a 0,1 s y los espectros de diseño hasta periodos menores a 0,4 s; los espectros de diseño difieren para periodos mayores a los 0,4 s, por el periodo de control C en el método de Newmark, Blume & Kapur, en el cual se amplifica el valor espectral en la zona de velocidades; en general el método de Newmark, Blume & Kapur, es más conservador por esta razón.

### 6.5.3. Método de Shibata y Sozen

Shibata y Sozen, en 1976, presentaron una metodología para el diseño de estructuras de concreto reforzado ante acciones sísmicas. A pesar de que se indica que el propósito de la metodología no es presentar un espectro de diseño, dentro de la investigación que condujo a la validación del método se utilizaron tres tipos de espectro que fueron calculados de los sismos normalizados siguientes para una aceleración máxima del terreno  $A_{te}$  de 0,5 g:

Tabla XI. **Acelerogramas utilizados para el espectro de Shibata y Sozen**

No.	Acelerograma	$A_{te}(g)$
1	El Centro, CA, 1940, Comoonente NS	0,31
2	El Centro, CA, 1940, Componente EW	0,22
3	Taft, CA, 1952, Componente N21°E	0,18
4	Taft, CA, 1952, Componente S69°E	0,16
5	Managua, Nicaragua, 1972, Comp. EW	0,38
6	Managua, Nicaragua, 1972, Comp. NS	0,38
7	San Fernando, CA, 1971,8344 Orion, Comp. NS	0,26
8	San Fernando, CA, 1971, Castaic, comp. N21°E	0,32

Fuente: SHIBATA y SOZEN. Substitute structure method for seismic design in R C. p. 7.

Los autores encontraron que los seis primeros registros se pueden describir por medio de un mismo espectro, mientras que los otros dos requieren descripciones diferentes. Además, se supone que la aceleración de diseño leída del espectro de aceleraciones, para cualquier coeficiente de amortiguamiento crítico  $\xi$ , puede relacionarse con el valor del espectro de respuesta para un coeficiente de amortiguamiento crítico de 2% ( $\xi = 0,02$ ), utilizando:

$$S_a(T, \xi) = S_a(T, \xi = 0,02) \cdot \frac{8}{6+100\xi} \quad (6.19)$$

La compatibilidad del espectro suavizado de diseño con los espectros que sirvieron de base es mejor para coeficientes de amortiguamiento crítico  $\xi = 10\%$  que para  $\xi = 2\%$  debido a que valores dentro del rango cercano a 10% son típicos para estructuras de concreto reforzado para las cuales se dispuso la metodología.

En la figura 90 se muestra el espectro suavizado de diseño para amortiguamiento  $\xi = 2\%$ . Este espectro es compatible con movimientos sísmicos del tipo de los seis primeros de la tabla XI.

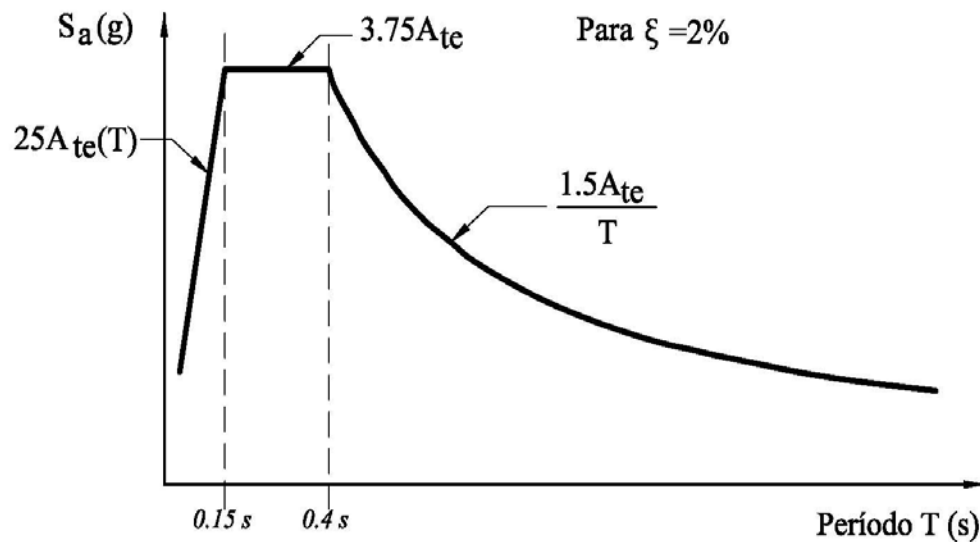
El espectro consta de tres zonas: para períodos cortos, y es directamente proporcional a la aceleración máxima del terreno; luego viene una zona de amplificación constante, y por último hay una zona en que la amplificación es proporcional al inverso del período. Al igualar los valores de amplificación de las zonas contiguas, se determina que la zona de amplificación constante está entre períodos de 0,15 y 0,4 s (García, 1998).



El espectro de diseño para una razón de amortiguamiento del 2% es:

$$S_a(T, \xi = 0,02) = \begin{cases} 25A_{te}T, & 0 < T \leq 0,15 \text{ s} \\ 3,75A_{te}, & 0,15 \text{ s} < T \leq 0,4 \text{ s} \\ \frac{1,5A_{te}}{T}, & T > 0,4 \text{ s} \end{cases} \quad (6.20)$$

Figura 90. **Espectro de diseño elástico Shibata y Sozen para  $\xi = 2\%$**



Fuente: SHIBATA y SOZEN. Substitute structure method for seismic design in R C. p. 55.

De las ecuaciones (6.19) y (6.20) se obtiene el espectro de diseño con una razón de amortiguamiento  $\xi$ .

Ejemplo de espectro de diseño Shibata – Sozen: obtener el espectro de diseño con el método de Shibata y Sozen, para las mismas condiciones de los dos ejemplos anteriores,  $\xi = 5\%$  y  $A_{te} = 0,369 \text{ g}$ .

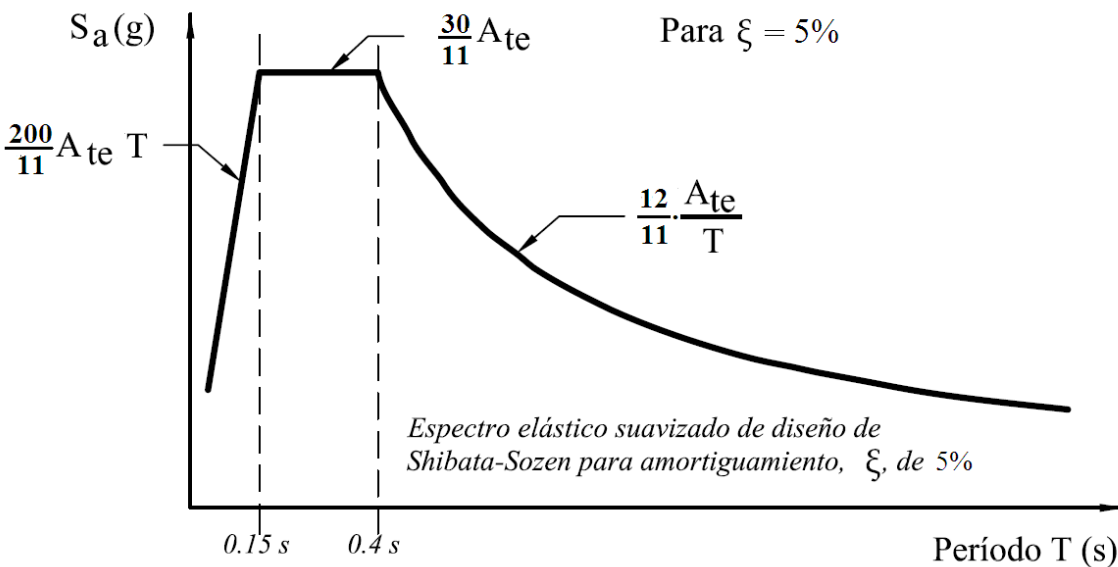
Solución: se utiliza la ecuación (6.19) con  $\xi = 5\%$ .

$$S_a(T, \xi = 0,05) = S_a(T, \xi = 0,02) \cdot \frac{8}{6 + 100(0,05)} \equiv \frac{8}{11} S_a(T, \xi = 0,02)$$

El espectro con  $\xi = 5\%$  es equivalente a 8 partes de 11 (o el 72,7%), del espectro con una razón de amortiguación  $\xi = 2\%$ , sustituyendo (6.20) en la ecuación anterior, se obtiene la ecuación y el espectro de diseño para  $\xi = 5\%$ :

$$S_a(T, \xi = 0,05) = \begin{cases} \frac{200}{11} A_{te} T, & 0 < T \leq 0,15 \text{ s} \\ \frac{30}{11} A_{te}, & 0,15 \text{ s} < T \leq 0,4 \text{ s} \\ \frac{12}{11} \cdot \frac{A_{te}}{T}, & T > 0,4 \text{ s} \end{cases}$$

Figura 91. **Espectro de diseño elástico de Shibata y Sozen  $\xi = 5\%$**



Fuente: elaboración propia.

Con el valor de la aceleración máxima del terreno  $A_{te} = 0,369 \text{ g}$ , la función y la gráfica del espectro de diseño (con  $\xi = 5\%$ ), quedan completamente definidas:

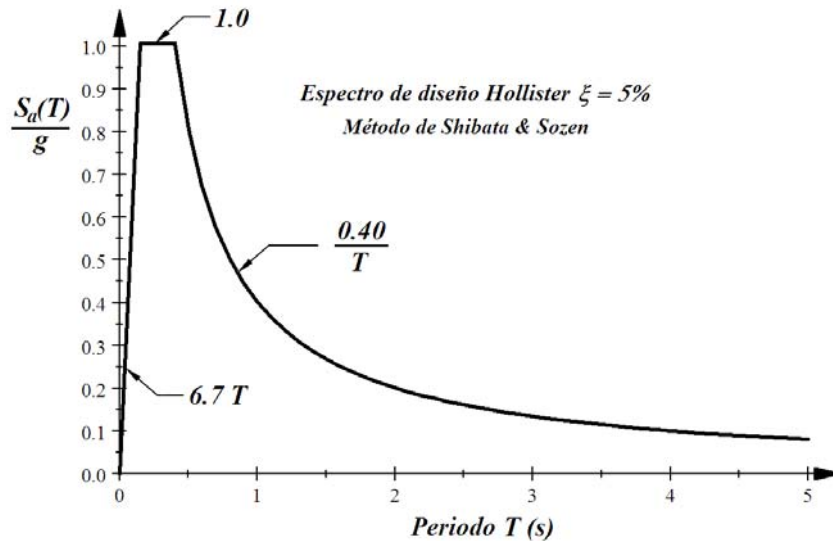
$$S_a(T, \xi = 0,05) = \begin{cases} (6,7 \text{ g})T, & 0 < T \leq 0,15 \text{ s} \\ 1,0 \text{ g}, & 0,15 \text{ s} < T \leq 0,4 \text{ s} \\ \frac{0,40 \text{ g}}{T}, & T > 0,4 \text{ s} \end{cases}$$

Dividiendo dentro de  $g$  se obtiene el espectro con  $\xi = 5\%$  en función del período:

$$\frac{S_a(T, 5\%)}{g} = \begin{cases} 6,7 T, & 0 < T \leq 0,15 \text{ s} \\ 1,0, & 0,15 \text{ s} < T \leq 0,4 \text{ s} \\ \frac{0,40}{T}, & T > 0,4 \text{ s} \end{cases}$$

El espectro de diseño elástico suavizado de Shibata y Sozen es:

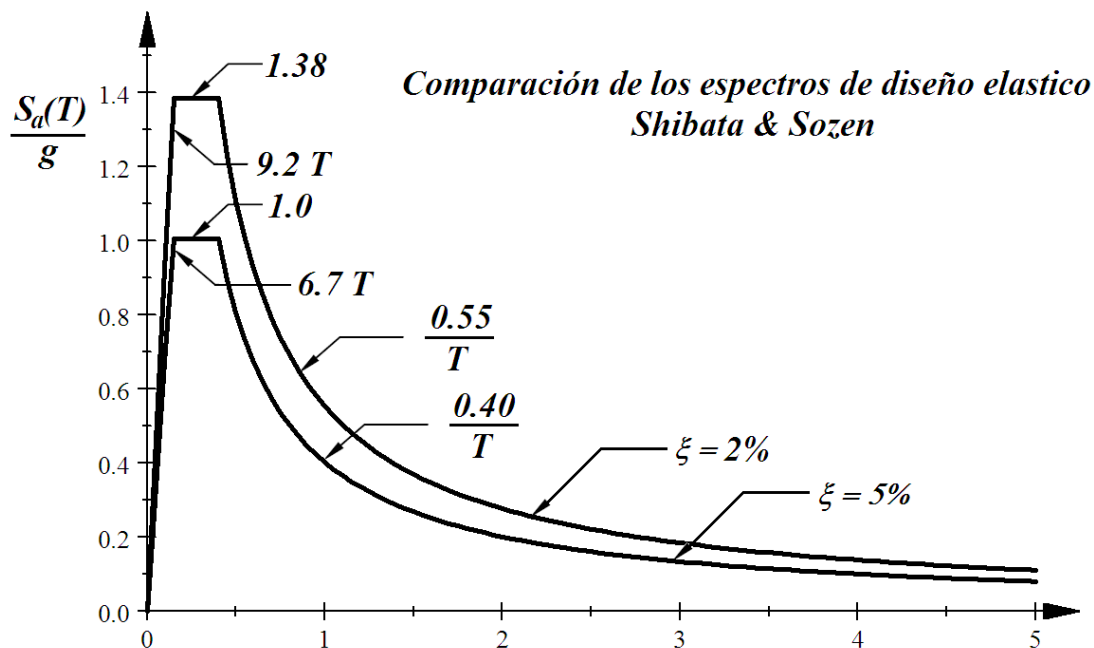
Figura 92. **Espectro de diseño Shibata – Sozen**



Fuente: elaboración propia.

De una forma semejante se obtiene el espectro de diseño con una razón de amortiguamiento del 2%,  $A_{te} = 0,369$  g y se compara con el de este ejemplo para visualizar la reducción proporcional que de él se hace:

Figura 93. Espectros de diseño Shibata – Sozen  $\xi = 2\%, 5\%$



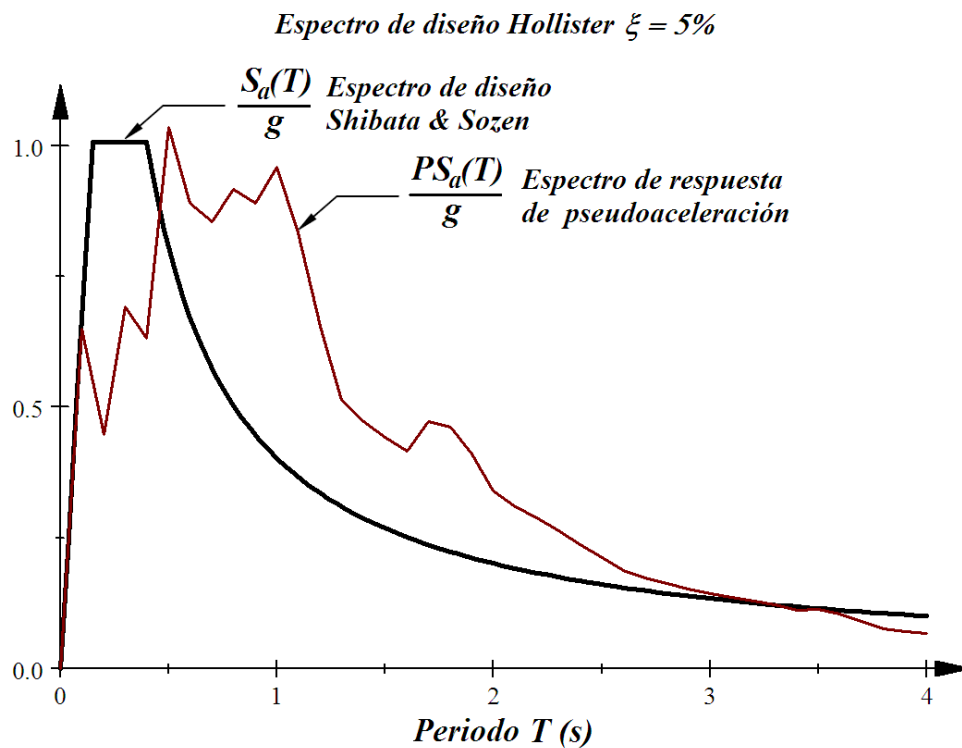
Fuente: elaboración propia.

La curva anterior esta modelada de acuerdo a la ecuación:

$$\frac{S_a(T, 2\%)}{g} = \begin{cases} 9,2 T, & 0 < T \leq 0,15 s \\ 1,38, & 0,15 s < T \leq 0,4 s \\ \frac{0,55}{T}, & T > 0,4 s \end{cases}$$

Este espectro de diseño también puede compararse con el espectro de respuesta de aceleración o pseudoaceleración, en todo caso, la diferencia es despreciable; se dividen los valores del espectro de respuesta por  $g$  ( $981 \text{ cm/s}^2$ ). Graficando los valores resultantes y el espectro de diseño en un mismo plano, se obtiene la gráfica siguiente.

Figura 94. **Espectro de respuesta y de diseño Shibata – Sozen**



Fuente: elaboración propia.

El corrimiento que se observa se comentará a posteriori.



## **7. RESPUESTA SÍSMICA A SISTEMAS INELÁSTICOS**

### **7.1. Introducción**

Las estructuras sujetas a severos movimientos del terreno experimentan deformaciones más allá del rango elástico. Estas deformaciones inelásticas dependen de las características de carga-deformación y a menudo resultan en deterioro de la rigidez. Debido a la naturaleza cíclica del movimiento del terreno, las estructuras experimentan etapas sucesivas de carga y descarga, y la relación de fuerza-desplazamiento o resistencia-deformación siguen una secuencia por ciclos conocido como ciclo histerético.

Los ciclos son una medida de la capacidad de la estructura para disipar energía, reduciendo la energía que se convierte en energía cinética, y disminuyendo las fuerzas inerciales a que se ve sometida la estructura. La forma y orientación de los ciclos histeréticos dependen primeramente de la rigidez de la estructura y del desplazamiento de fluencia. Factores tales como el material, el sistema estructural y la configuración de las conexiones influyen en el comportamiento histerético de la estructura.

El limitar el estudio de la respuesta estructural a sistemas linealmente elásticos reduciría su rango de aplicación enormemente, pues la gran mayoría de los materiales estructurales muestran dentro del rango de esfuerzos utilizados en la práctica, en alguna medida, características inelásticas. Más aún, algunos materiales como el concreto son inelásticos en casi todo el rango útil de esfuerzos.

De este modo no es de sorprenderse que las edificaciones sufran daños durante un movimiento intenso del suelo. Hay que diseñar la edificación de tal forma que el daño sea controlado dentro de un rango aceptable; obviamente el diseño fracasará si el sismo causa daños severos, los cuales no pueden ser reparados, o si se produce el colapso de la estructura.

El espectro de diseño inelástico se obtiene a partir de la reducción del espectro de diseño elástico por medio del uso de los factores de modificación o factores de reducción dependientes de la ductilidad. De este modo, la importancia central en ingeniería sísmica es comprender la respuesta de las estructuras deformadas dentro del rango inelástico durante un movimiento intenso del suelo.

La formulación de un modelo matemático que permita estudiar la respuesta inelástica de sistemas dinámicos, depende fundamentalmente de cómo actúa cada material estructural en particular. Esta particularidad de los materiales de resistir deformaciones en el rango inelástico sin falla, se ha enmarcado dentro de términos tales como ductilidad y tenacidad. Por lo tanto, es deseable que los materiales estructurales se diseñen y detallen de tal manera que tengan una ductilidad y tenacidad apropiada, con el fin de que puedan tener respuestas dinámicas inelásticas adecuadas.

Desafortunadamente, no existe una manera única de describir, a diferencia de los sistemas elásticos, el comportamiento inelástico de todos los materiales estructurales. Por esta razón hay modelos matemáticos apropiados para cada uno de ellos, y en algunos casos para algunos tipos particulares de elementos estructurales construidos con predominio de uno o dos materiales. Es menester para un estudio más completo estudiar cada uno de ellos, en particular el concreto, el acero y la mampostería estructural.

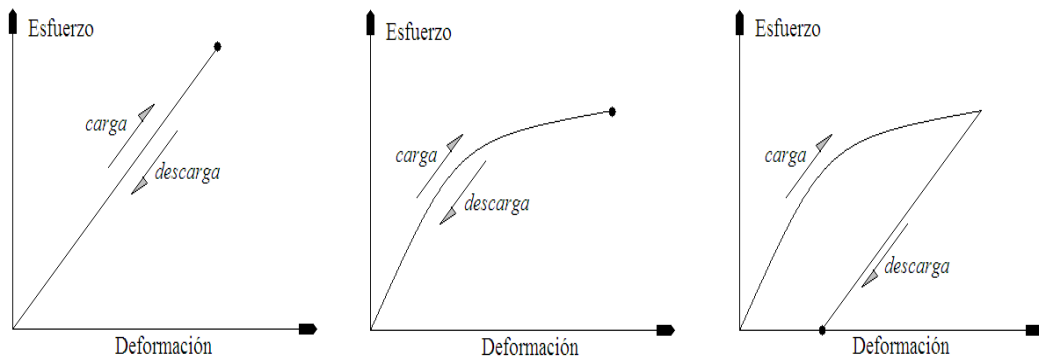


## 7.2. Rango inelástico

La elasticidad de un material se define como la capacidad de este de volver a sus dimensiones originales, después de que se haya retirado una fuerza impuesta, recobrando (en teoría) la forma que tenía antes de imponer la fuerza (Popov, 1968). Por lo tanto, el comportamiento elástico implica la ausencia de deformación permanente debido a que se haya aplicado y retirado la fuerza. Algunos materiales exhiben una relación esencialmente lineal entre esfuerzos y deformaciones, como muestra la figura 95 (a), y se denominan materiales linealmente elásticos.

Otros materiales muestran alguna curvatura en sus relaciones esfuerzo-deformación, como se muestra en la figura 95 (b); y se denominan materiales no linealmente elásticos. En ambos casos la curva de carga y de descarga es la misma. Un tercer caso es el material inelástico, en el cual la descarga no ocurre siguiendo la misma trayectoria de la carga y se presenta deformación permanente, como se muestra en la figura 95 (c).

Figura 95. **Material: (a) lineal elástico (b) no lineal elástico (c) inelástico**



Fuente: elaboración propia.

En general, la clasificación anterior hace referencia al comportamiento del material en el rango inicial de carga (resilencia), cuando esfuerzos y deformaciones son pequeños, dado que, todos los materiales presentan las dos características en todo el rango de esfuerzos posibles, hasta llevarlos a la falla.

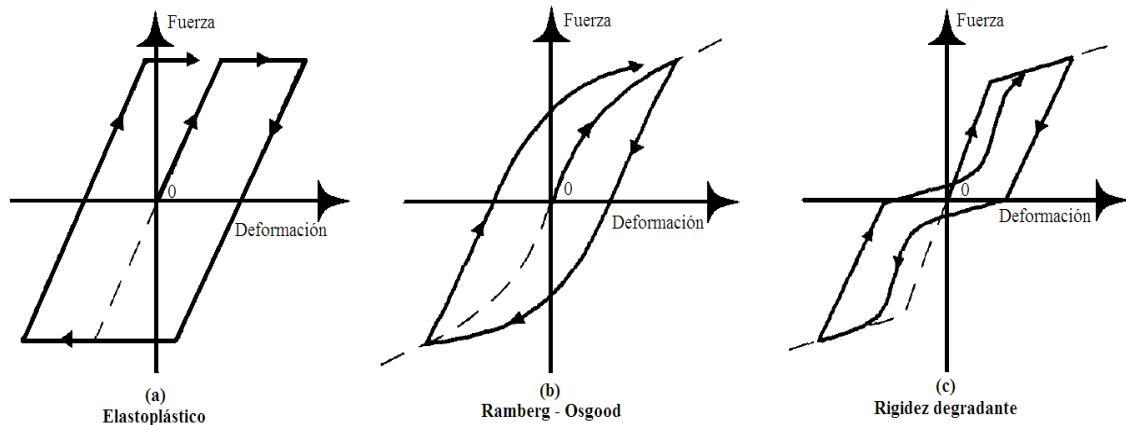
### **7.3. Respuesta histerética**

Cuando al material se le impone una serie de ciclos de carga, descarga, y carga en el sentido opuesto, en los cuales los esfuerzos sobrepasan el límite elástico del material, se obtiene el comportamiento que se mostró en la figura 39; este comportamiento se conoce con el nombre de respuesta histerética.

Tal como se indicó anteriormente, la histéresis es un fenómeno por medio del cual dos o más propiedades físicas se relacionan de una manera, que dependen de la historia de su comportamiento previo. Por lo tanto, hace referencia al comportamiento de los materiales estructurales cuando se ven sometidos a deformaciones o esfuerzos alternantes que están fuera del rango de respuesta lineal, o elástica, ante una sollicitación; ya sea de fuerza o de deformación impuesta. Una gran parte de la energía que es capaz de disipar el material estructural en el rango inelástico de respuesta, se asocia con el área comprendida dentro de los ciclos de histéresis.

El comportamiento inelástico de elementos estructurales construidos con diferentes materiales es complejo y sensitivo a un gran número de variables. En general, dentro del alcance de toda investigación experimental, se formula un modelo matemático que permita describir, lo fielmente posible, el fenómeno investigado. En la figura 96 se muestran tres modelos populares de histéresis: el elastoplástico, el de Ramberg-Osgood y un modelo de rigidez degradante.

Figura 96. Modelos de histéresis



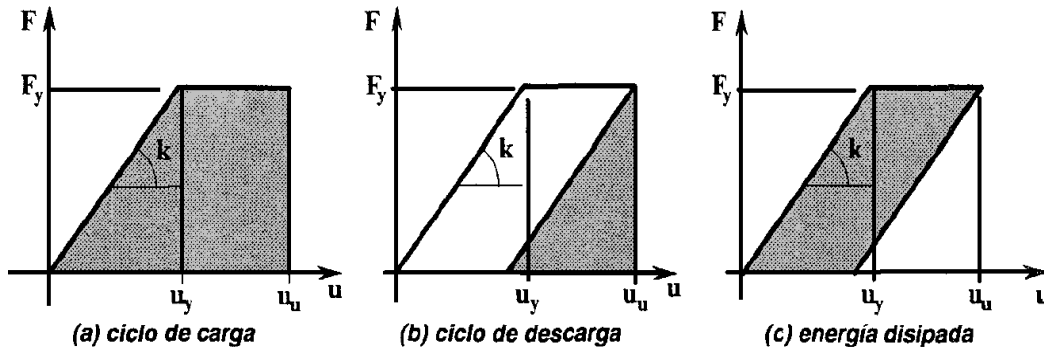
Fuente: elaboración propia.

### 7.3.1. Modelo elastoplástico

Dentro del modelo elastoplástico, el material se comporta como un material totalmente elástico, con rigidez  $k$ , hasta que llega al nivel de la fuerza de fluencia  $F_y$ , y a partir de este punto hay deformación sin que se presente un aumento en la fuerza. Una vez se invierte el movimiento, el material nuevamente reacciona como un material totalmente elástico, hasta que se llega a la fuerza de fluencia en el lado opuesto,  $-F_y$ .

La acumulación de energía de deformación corresponde al área bajo la curva de carga, figura 97 (a). Cuando hay descarga, la energía de deformación que el sistema transfiere a energía cinética corresponde al área bajo la curva de descarga, figura 97 (b). La diferencia entre las dos áreas corresponde a energía disipada por el sistema y que se convierte en calor, ruido u otros tipos de energía figura 97 (c).

Figura 97. **Disipación de energía en un sistema elastoplástico**



Fuente: GARCÍA. Luis. Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico. p. 135.

#### 7.4. Ductilidad

Es la capacidad que tiene un material estructural de resistir, sin fallar, deformaciones que lleven al material estructural más allá del límite elástico, o límite, donde las deformaciones son linealmente proporcionales al esfuerzo o fuerza aplicada (ver sección 7.6 de capacidad de disipación de energía, pues estos términos son confundidos). Dependiendo del parámetro que describe la deformación, la ductilidad puede hacer referencia, entre otras, a:

- Ductilidad de curvatura: cuando la ductilidad se mide respecto de la curvatura de la sección del elemento estructural. La curvatura es; el cociente entre el momento flector aplicado y la rigidez de la sección.
- Ductilidad de rotación: cuando la ductilidad se mide respecto de la rotación que tiene un sector longitudinal del elemento estructural. La rotación se define como la pendiente de la línea elástica del elemento medida respecto de la posición original del eje longitudinal del elemento.

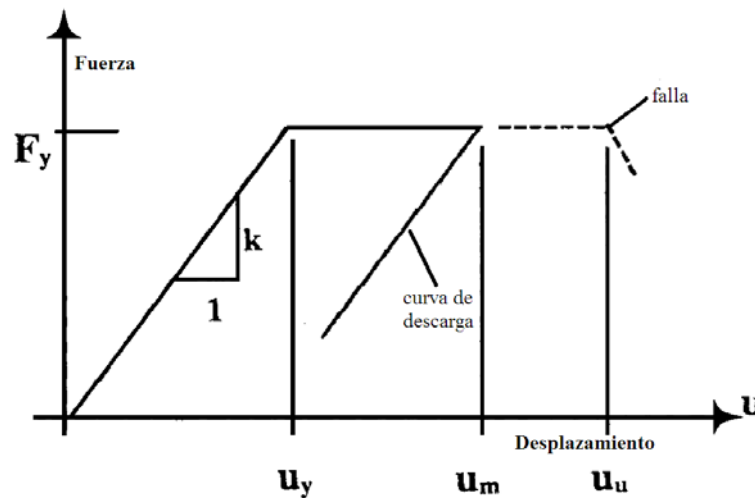
- Ductilidad de desplazamiento: cuando la ductilidad se mide respecto del desplazamiento o deflexión que tiene el elemento estructural. El desplazamiento se mide respecto de la posición original del eje longitudinal del elemento.
- Ductilidad de deformación: cuando la ductilidad se mide respecto de la deformación unitaria de una fibra paralela al eje neutro de la sección.

Los diferentes valores de ductilidad no son directamente comparables. En general en elementos de concreto reforzado, las ductilidades de deformación,  $\mu_\epsilon$ , medidas en el material en una fibra de la sección, tienen valores mucho mayores que las ductilidades de curvatura,  $\mu_\phi$ , las que a su vez son mayores que las ductilidades de rotación,  $\mu_\theta$ ; las cuales por último son, a su vez, mayores que las ductilidades de desplazamiento,  $\mu_\delta$ ; a pesar de que describan el mismo fenómeno, normas AIS 100-97 (AIS, 1997).

Si se tiene un sistema elastoplástico, en la figura 98, se muestra la carga y posterior descarga del sistema. El sistema responde elásticamente al inicio de la carga, hasta que llega a la fuerza de fluencia,  $F_y$ . En este sitio hay un desplazamiento asociado,  $U_y$ , el cual se puede obtener de  $U_y = F_y/k$ .

Si el sistema se sigue cargando, la respuesta es totalmente plástica. En el punto de desplazamiento  $U_m$  se descarga el sistema. Esta descarga en el sistema elastoplástico ocurre en una línea que tiene la misma pendiente,  $k$ , de la curva de carga original.

Figura 98. **Curva fuerza-desplazamiento, material elastoplástico**



Fuente: GARCÍA. Luis. Dinámica estructural aplicada al diseño Sísmico. p. 148.

La ductilidad de desplazamiento que alcanza el sistema se puede definir como:

$$\mu = \frac{u_m}{u_y}$$

Esta ductilidad se denomina ductilidad solicitada, o demanda de ductilidad; pues corresponde a la máxima ductilidad que se le solicita al sistema. La capacidad de ductilidad. Corresponde a la máxima ductilidad que se le puede exigir al sistema, y se determina con:

$$\mu = \frac{u_u}{u_y} \tag{7.1}$$

Cuando el material responde de forma diferente al sistema elastoplástico, el concepto es extensible; pero debe manejarse con algo de cautela, pues muchas veces el desplazamiento de fluencia no está claramente definido.

Algunas veces, cuando se trata de sistemas que responden de una manera diferente al sistema elastoplástico, el mismo parámetro se denomina coeficiente de daño, y se utiliza el mismo símbolo,  $\mu$ , para denominarlo.

### **7.5. Tenacidad**

El área bajo la curva esfuerzo-deformación de cualquier material que se lleva hasta la falla, es una medida de la capacidad del material para absorber energía por unidad de volumen, y se denomina “tenacidad” del material (*toughness*, en inglés). Entre mayor sea el área bajo la curva, el material tiene mayor tenacidad. Los materiales inelásticos muestran características especiales cuando la carga no se aumenta monotónicamente hasta la falla.

Se entiende por ensayo “monotónico” aquel en que se carga el material sin que haya inversión en el sentido de las fuerzas aplicadas. Este concepto ha sido extendido en la ingeniería sísmica a los elementos estructurales donde se define como la “capacidad de resistir una serie de oscilaciones en el rango inelástico de respuesta sin que se presente una disminución crítica de su resistencia”. En muchas situaciones se prefiere la tenacidad al término ductilidad, dado que no se presta a equívocos.

### **7.6. Capacidad de disipación de energía**

Es la capacidad que tiene un sistema estructural, un elemento estructural, o una sección de un elemento estructural, de trabajar dentro del rango inelástico de respuesta sin perder su resistencia. Se cuantifica por medio de la energía de deformación que el sistema, elemento o sección es capaz de disipar en ciclos histeréticos consecutivos.

Cuando hace referencia al sistema de resistencia sísmica de la edificación como un todo, se define por medio del coeficiente de capacidad de disipación de energía  $R$ . El grado de capacidad de disipación de energía se clasifica como especial (DES), moderado (DMO) y mínimo (DMI).

El coeficiente de capacidad de disipación de energía ( $R$ ), se prescribe para cada sistema estructural de resistencia sísmica, cuyo valor depende del tipo de sistema estructural y de las características de capacidad de disipación de energía propias del material estructural que se utiliza en el sistema. Es una medida de la capacidad de disipación de energía general del sistema de resistencia sísmica cuando los movimientos sísmicos hacen que responda inelásticamente (normas AIS 100-97).

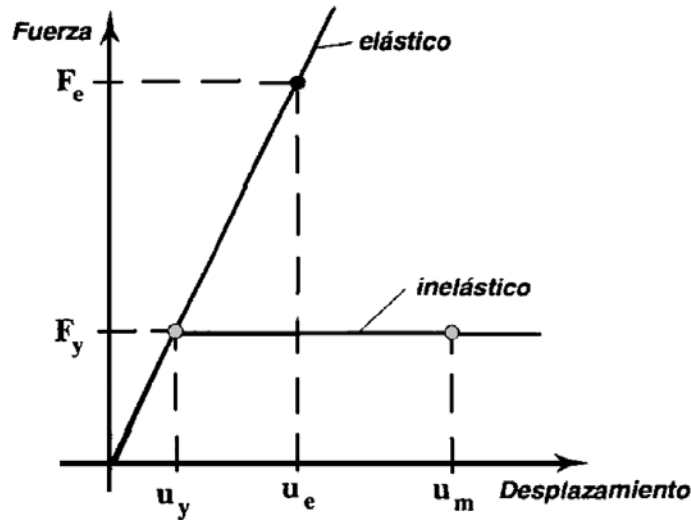
Si se supone (a modo de aclaración de la norma), que se tienen dos sistemas dinámicos compuestos por elementos estructurales que tienen la misma rigidez; uno de ellos es totalmente elástico, y el otro tiene posibilidad de responder inelásticamente.

Al someterlos a una excitación dinámica, como puede ser el registro acelerográfico de El Centro de 1940, se obtienen respuestas en desplazamiento, cuyo desplazamiento máximo es diferente si al sistema inelástico se le exigió más allá del límite elástico.

En la figura 99 se muestran dentro de un diagrama de fuerza-desplazamiento, los dos sistemas. El valor de  $u_e$  corresponde al nivel máximo de desplazamiento que llega el sistema elástico. A este nivel de desplazamiento le corresponde un nivel de fuerza en el elemento,  $F_e$ . Puede decirse que este nivel de fuerza es el nivel de resistencia mínimo que se requiere del sistema, para que este responda en el rango elástico, ante la sollicitación dada.



Figura 99. Definición de la capacidad de disipación de energía



Fuente: elaboración propia.

Ahora se define el coeficiente de reducción de resistencia,  $R_1$ , por la razón dada por triángulos semejantes:

$$R_1 = \frac{F_e}{F_y} = \frac{u_e}{u_y}$$

De la ecuación anterior, puede verse que:

$$F_y = \frac{F_e}{R_1} \quad \text{y} \quad u_y = \frac{u_e}{R_1} = \frac{F_e}{kR_1}$$

Con base en lo anterior puede decirse que la capacidad de disipación de energía de un sistema inelástico de un grado de libertad, corresponde a la capacidad que tiene el sistema para reducir la fuerza solicitada de un valor que tendría el sistema si permaneciera elástico,  $F_e$ , a un valor de fluencia,  $F_y$ .

Esta capacidad de disipación de energía se mide por medio del coeficiente de reducción de resistencia,  $R_1$ . Se ha utilizado el subíndice 1 para enfatizar que se trata de un coeficiente de reducción de resistencia para sistemas de un grado de libertad. Este coeficiente está asociado con el coeficiente de reducción de resistencia  $R$  para sistemas de varios grados de libertad que emplean los códigos de diseño sísmico.

## **7.7. Espectros inelásticos de diseño**

Estos espectros surgen por la necesidad de expresar la capacidad de los sistemas estructurales para responder en el rango inelástico, sobre todo en la acción de los sismos, lo resistente ayuda pero es insuficiente; lo importante es proveer la estructura de ductilidad, que es poder llegar a un primer límite de resistencia y tener capacidad adicional de resistir o mejor dicho desviar la fuerza inercial, disipándola en las muchas conexiones de la estructura; en ese momento la estructura está en el rango inelástico.

### **7.7.1. Método de Newmark-Hall**

Newmark, describe la respuesta en el rango inelástico para sistemas elastoplásticos con base en un sistema de un grado de libertad sometido a excitación en su base, como el mostrado en la figura 59.

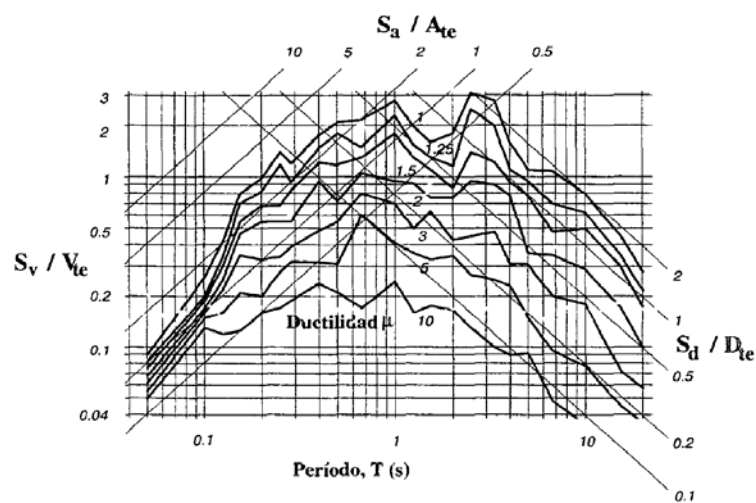
#### **7.7.1.1. Sistemas elastoplásticos**

Al querer dibujar en una hoja tripartita el espectro obtenido, se tiene la dificultad de que al salir el sistema del rango elástico, las relaciones que permiten dibujar el espectro en la forma tripartita, ecuación (6.14), dejan de ser válidas.

Debido a esto, debe decidirse si el espectro muestra las aceleraciones, o fuerzas, a que se ve sometido el sistema, caso en el cual los desplazamientos leídos en este espectro corresponden a la porción elástica de la deformación; o si el espectro muestra las deformaciones totales, y en este último caso, las aceleraciones que se leen en el espectro no corresponden a las aceleraciones verdaderas a que se ve sometida la masa del sistema.

En la figura 100 se muestra el espectro de aceleraciones del temblor de El Centro para diferentes valores de ductilidad alcanzada por sistemas elastoplásticos. El espectro se calculó para un coeficiente de amortiguamiento de 2% del crítico. Las deformaciones mostradas en esta figura corresponden únicamente a la componente elástica de la deformación y no es la deformación total, la cual es la suma de la parte elástica más la porción inelástica.

Figura 100. **Espectro de aceleraciones máximas, sistemas elastoplásticos  $\xi = 2\%$**

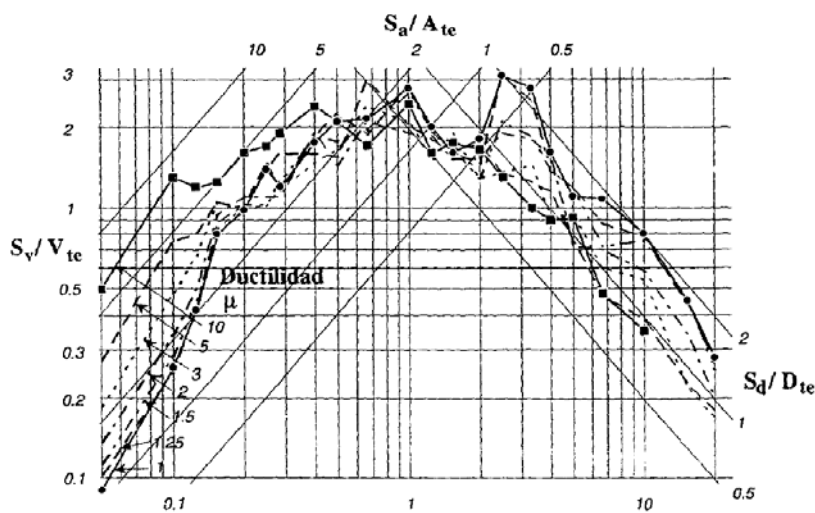


Fuente: GARCÍA. Luis. Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico. p. 155.

Los valores de aceleración son los correctos. Los valores de velocidad leídos no corresponden a las velocidades verdaderas. La figura se dibujó para ductilidades,  $\mu$ , de 1, 1,25, 1,5, 2, 3, 5 y 10. Este espectro se denomina espectro de aceleraciones máximas.

Si se gráfica el espectro colocando las deformaciones totales; conformadas por la componente elástica más la componente inelástica; se obtiene el espectro mostrado en la figura 101. Este se conoce con el nombre de espectro de desplazamientos totales.

Figura 101. **Espectro de desplazamientos totales, sistemas elastoplásticos  $\xi = 2\%$**



Fuente: GARCÍA. Luis. Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico. p. 156.

Debe tenerse en cuenta que los desplazamientos que se leen en el espectro de la figura 101, son los totales verdaderos, mientras que las velocidades como las aceleraciones que se muestran en este espectro, no son las verdaderas.

En los dos espectros de las figuras 100 y 101, el correspondiente a ductilidad  $\mu = 1$ , es el espectro elástico y por lo tanto es igual en ambos gráficos.

Del estudio de gráficos similares a los dos anteriores, para numerosos sismos, Newmark y Hall obtuvieron las siguientes conclusiones:

(a) Para períodos altos, los desplazamientos totales máximos para cualquier demanda de ductilidad  $\mu$  son prácticamente los mismos.

(b) Para períodos cortos, la máxima aceleración es la misma para cualquier demanda de ductilidad  $\mu$ , lo cual quiere decir que las fuerzas ejercidas por los resortes son las mismas.

(c) En el rango de períodos intermedios, la energía que absorbe el sistema elástico y el inelástico es la misma.

Las zonas son las mismas que se definieron en la sección anterior una zona de respuesta con aceleración, velocidad y desplazamiento aproximadamente constante. Los valores del período de vibración que limitan estas tres zonas varían para cada acelerograma en particular.

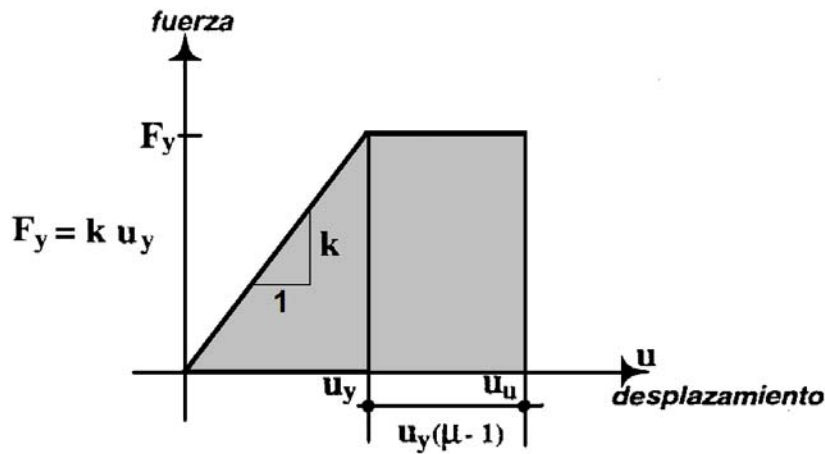
Si se da por válida la conclusión (c) de Newmark y Hall se tiene que:

$$E_e = E_m \quad (7.2)$$

Se utilizan los subíndices  $e$  y  $m$  para indicar que se trata de un sistema elástico e inelástico, respectivamente. La energía cinética máxima en el sistema elástico, de acuerdo con la física es igual a:  $E_e = \frac{1}{2}m(V_e)^2$

Para el sistema inelástico esta energía es igual a la energía de deformación acumulada en el resorte, la cual corresponde al área bajo la curva de fuerza-deformación presentada en la figura 102 y de (7.1)  $u_u = \mu u_y$ .

Figura 102. **Energía de deformación en el sistema inelástico**



Fuente: elaboración propia.

De donde:  $E_m = \frac{1}{2} F_y u_y (2\mu - 1)$

Igualando energías por (7.2), simplificando y utilizando, de la figura 102,  $F_y = k u_y$  y  $k/m = \omega^2$ , se llega al resultado:

$$V_e = \omega u_y \sqrt{2\mu - 1} \tag{7.3}$$

Según Newmark, es posible encontrar la relación entre el espectro elástico y el inelástico. Partiendo de que se dispone de un espectro elástico ( $\mu = 1$ ), el cual para cualquier período  $T$ , tiene como valores  $D_e$ ,  $V_e$  y  $A_e$ , y se quiere relacionar con un espectro inelástico.

Para los mismos períodos del espectro elástico se tienen unos valores máximos  $D_m$ ,  $V_m$  y  $A_m$  en cada una de las regiones del espectro (sensitiva al desplazamiento, a la velocidad y a la aceleración) se ha colocado el subíndice **m** para indicar que se trata de valores provenientes del espectro inelástico.

La relación entre los espectros inelástico y elástico se puede obtener de la siguiente manera:

(1) Espectro de desplazamientos totales: para el espectro de desplazamientos totales, en la “zona de períodos altos”, de acuerdo con la conclusión (a), el desplazamiento inelástico es igual al elástico:

$$D_e = D_m$$

Para la “zona de períodos intermedios” se utiliza el resultado anterior dado en la ecuación (7.3)  $V_e = \omega u_y \sqrt{2\mu - 1}$ , y la capacidad de ductilidad  $\mu u_y = u_u = D_m$ ; despejando el valor de desplazamientos totales para el espectro se obtiene:

$$D_m = \frac{V_e}{\omega} \cdot \frac{\mu}{\sqrt{2\mu - 1}}$$

De la relación (6.14) en la representación tripartita de Newmark:

$$\omega^2 D_e = \omega V_e = A_e, \text{ resulta: } D_m = \frac{\mu}{\sqrt{2\mu - 1}} D_e$$

Para la “zona de períodos cortos” por la conclusión (b):  $A_e = A_m$

En términos de fuerza:

$$F_y = u_y k = mA_e$$

$$A_e = u_y \frac{k}{m} \equiv \frac{u_u}{\mu} \omega^2 \equiv \frac{D_m}{\mu} \omega^2$$

De donde resulta:  $D_m = \mu D_e$

Los resultados para el espectro de desplazamientos totales son:

Zona de periodos cortos	$D_m = \mu D_e$
Zona de periodos intermedios	$D_m = \frac{\mu}{\sqrt{2\mu-1}} D_e$
Zona de periodos largos	$D_m = D_e$

No obstante, se trata de encontrar la relación entre el espectro elástico y el inelástico y en esta forma es difícil interpretar el vínculo, por tanto considere:

Zona de periodos cortos	$D_m = \mu \frac{A_e}{\omega^2} \rightarrow \omega^2 D_m = \mu A_e$
Zona de periodos intermedios	$D_m = \frac{\mu}{\sqrt{2\mu-1}} \frac{V_e}{\omega} \rightarrow \omega D_m = \frac{\mu}{\sqrt{2\mu-1}} V_e$
Zona de periodos largos	$D_m = D_e \rightarrow D_m = D_e$

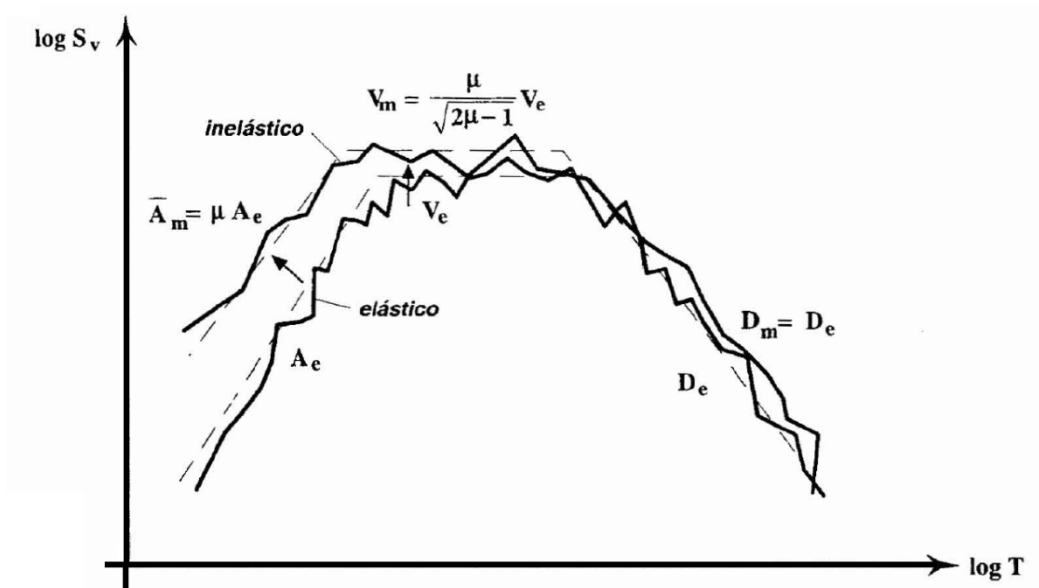
Se reconocen unidades de aceleración y velocidad en las expresiones  $\omega^2 D_m$ ,  $\omega D_m$  donde finalmente la relación es:

Zona de periodos cortos	$\bar{A}_m = \mu A_e$
Zona de periodos intermedios	$\bar{V}_m = \frac{\mu}{\sqrt{2\mu-1}} V_e$
Zona de periodos largos	$D_m = D_e$

Se han utilizado los símbolos  $\bar{A}_m$  y  $\bar{V}_m$ , para señalar que esa aceleración y velocidad no son las verdaderas. Entonces el espectro donde se leen los desplazamientos totales tiene la forma mostrada en la figura 103.



Figura 103. Espectro inelástico de deformaciones totales



Fuente: GARCÍA. Luis. Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico. p. 158.

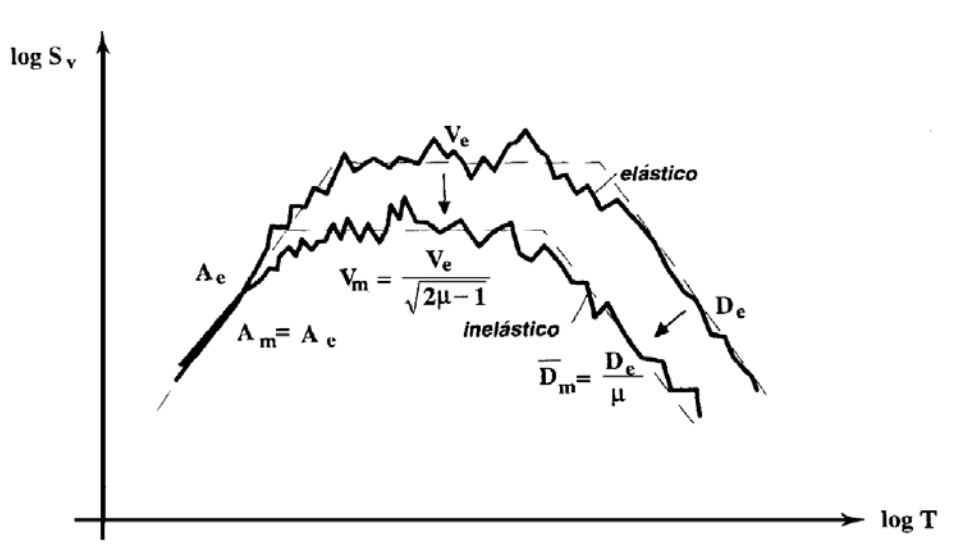
(2) Espectro de aceleraciones máximas: el procedimiento para determinar el efecto de la respuesta inelástica en el espectro de aceleraciones máximas es semejante al anterior; se hace la salvedad de mencionar de nuevo que este espectro es válido únicamente para aceleraciones. De la conclusión (b) para períodos cortos:  $A_m = A_e = u_y \frac{k}{m}$

Donde se debe llegar a la relación final:

Zona de períodos cortos	$A_m = A_e$
Zona de períodos intermedios	$\bar{V}_m = \frac{V_e}{\sqrt{2\mu-1}}$
Zona de períodos largos	$\bar{D}_m = \frac{D_e}{\mu}$

La forma del espectro de aceleraciones máximas para un sistema elastoplástico se muestra en la figura 104.

Figura 104. **Espectro inelástico de aceleraciones máximas**



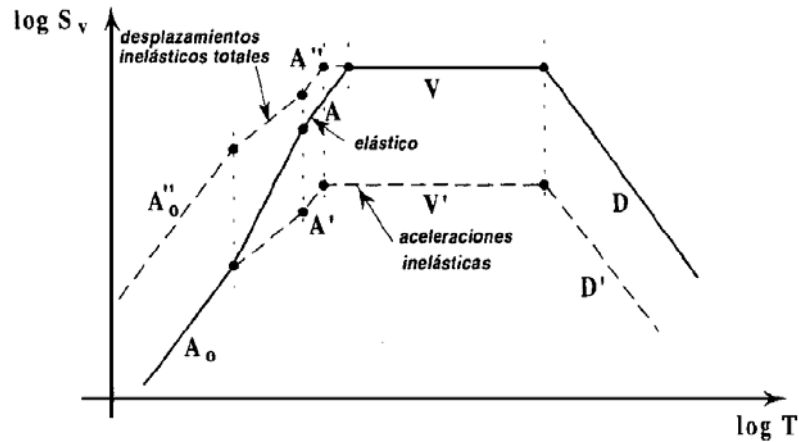
Fuente: GARCÍA. Luis. Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico. p. 160.

### 7.7.1.2. Construcción del espectro inelástico de diseño

El procedimiento consiste en afectar el espectro elástico de diseño, por medio de una demanda de ductilidad prefijada,  $\mu$ , como se muestra en la figura 105.

Allí se ha marcado por medio de las líneas  $A_0AVD$ , el espectro elástico de diseño para un coeficiente de amortiguamiento dado. Los puntos donde se intersectan las líneas rectas del espectro elástico permanecen constantes al trazar los espectros inelásticos.

Figura 105. **Espectros inelásticos de Newmark – Hall**



Fuente: GARCÍA. Luis. Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico. p. 188.

La línea punteada  $A_0A'V'D'$  muestra el espectro inelástico de aceleraciones máximas, y la línea punteada  $A''_0A''VD$ , el de desplazamientos totales. Los dos espectros inelásticos difieren en un valor constante igual a  $\mu$ , pero  $A$  y  $A'$  difieren en  $\sqrt{2\mu - 1}$ . Los coeficientes a aplicar se resumen en la tabla XII

Tabla XII. **Relaciones de los espectros de diseño, elastoplástico al elástico**

Zona del espectro	Elastoplástico ÷ Elástico	
	Desplazamientos Totales	Aceleraciones
Fuerza o aceleración	$\frac{A''_0}{A_0} = \mu$	$\frac{A'_0}{A_0} = 1$
Energía o velocidad	$\frac{A''}{A} = \frac{\mu}{\sqrt{2\mu - 1}}$	$\frac{A'}{A} = \frac{1}{\sqrt{2\mu - 1}}$
Desplazamiento	$\frac{D''}{D} = \frac{V''}{V} = 1$	$\frac{D'}{D} = \frac{V'}{V} = \frac{1}{\mu}$

Fuente: GARCÍA. Luis. Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico. p. 188.

Ejemplo sobre espectro de diseño inelástico Newmark – Hall: Trazar el espectro inelástico de diseño con el método de Newmark y Hall, para una demanda de ductilidad  $\mu = 8$  para sistemas con coeficiente de amortiguamiento crítico  $\xi$  del 5%, en un lugar en el cual se ha estimado que la máxima aceleración del terreno ( $A_{te}$ ) es de 0,369 g la máxima velocidad del terreno ( $V_{te}$ ) es de 0,336 m/s y el máximo desplazamiento del terreno ( $D_{te}$ ) es de 0,187 m.

Se quiere un nivel de probabilidad de 84,1% donde no se excedan las ordenadas espectrales.

Solución: el espectro de diseño elástico que se obtiene con estos valores es el mismo del ejemplo de diseño elástico N - H, por tanto:

$$\alpha_A A_{te} = 2,71(0,369 \text{ g}) \equiv 1,000 \text{ g} \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha_A A_{te} = 1,0 \text{ g}}$$

$$\alpha_V V_{te} = 2,30(0,336 \text{ m/s}) \equiv 0,773 \text{ m/s} \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha_V V_{te} = 0,77 \text{ m/s}}$$

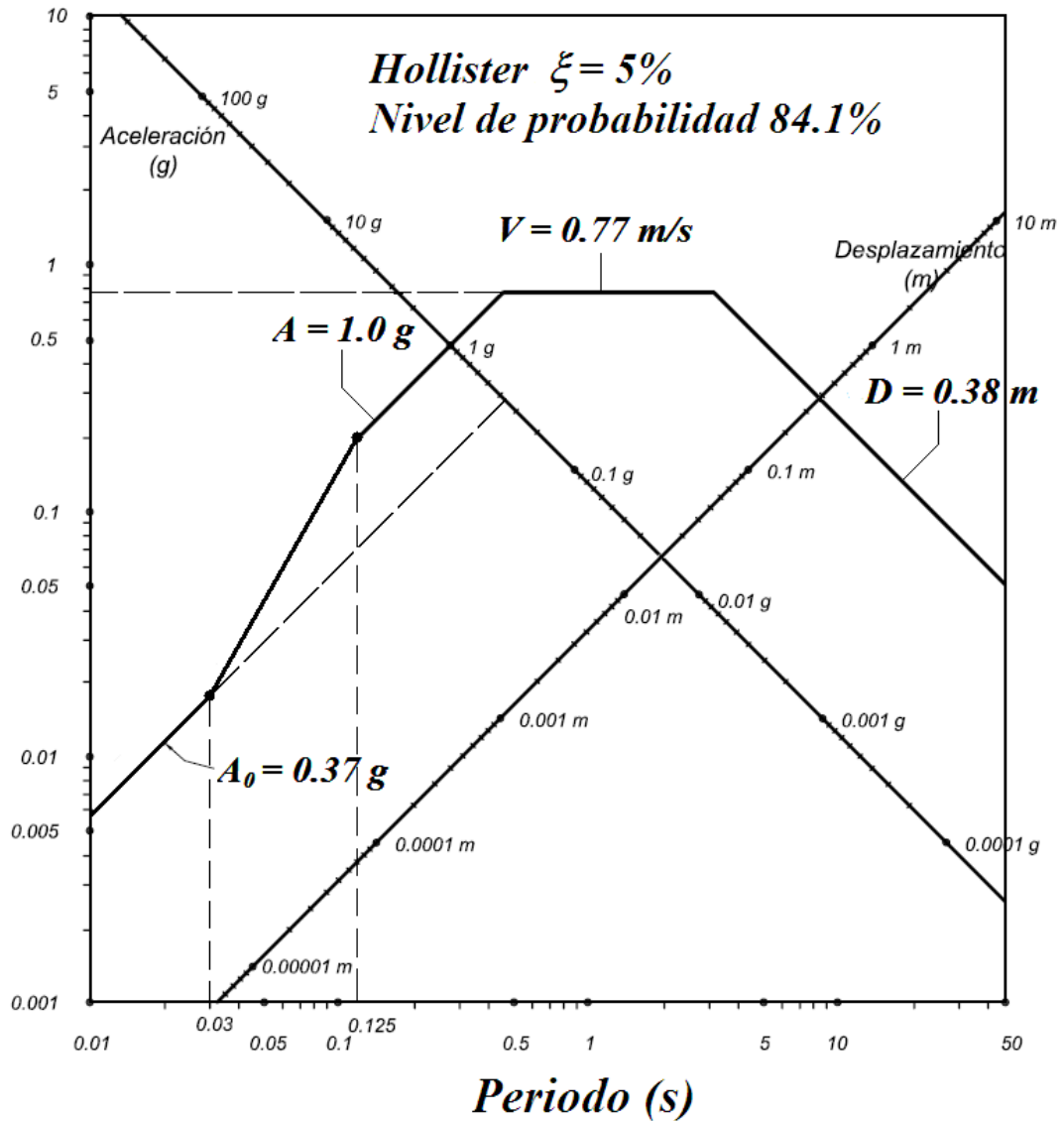
$$\alpha_D D_{te} = 2,01(0,187 \text{ m}) \equiv 0,376 \text{ m} \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha_D D_{te} = 0,38 \text{ m}}$$

Utilizando la nomenclatura de la figura 105 resultan las equivalencias:

$$\begin{array}{llll} A_0 = A_{te} & A = \alpha_A A_{te} & V = \alpha_V V_{te} & D = \alpha_D D_{te} \\ A_0 = 0,37 \text{ g} & A = 1,0 \text{ g} & V = 0,77 \text{ m/s} & D = 0,38 \text{ m} \end{array}$$

El espectro de diseño que resulta se muestra en la figura 106.

Figura 106. Espectro elástico Newmark & Hall



Fuente: elaboración propia.

La forma directa de obtención de este espectro es sencilla, se trazan las líneas verticales guías en forma intermitente para los periodos de 0,03 s y 0,125 s, se trazan los valores constantes de A, V y D en los periodos de 0,125 s hasta los 50 s.

La línea intermitente guía de 0,125 s y la línea de valor constante V ayudan para este propósito, por tanto es más fácil si la línea de valor V se dibuja primero. Para periodos menores a 0,03 s se dibuja la línea A<sub>0</sub> que representa la aceleración del terreno; finalmente se une con una recta el valor de A<sub>0</sub> y A en los periodos de 0,03 s a 0,125 s.

El proceso de construcción del espectro inelástico es idéntico al elástico. Los valores que representan el espectro inelástico de aceleraciones A'<sub>0</sub>, A', V' y D' son análogos a los valores A<sub>0</sub>, A, V y D para el proceso constructivo; se recuerda que este espectro es válido solo para las aceleraciones inelásticas.

$$\begin{aligned}
 A'_0 &= \frac{A_0}{1} & A' &= \frac{A}{\sqrt{2\mu - 1}} & V' &= \frac{V}{\mu} & D' &= \frac{D}{\mu} \\
 A'_0 &= \frac{0,369 \text{ g}}{1} & A' &= \frac{1,00 \text{ g}}{\sqrt{2(8) - 1}} & V' &= \frac{0,773 \text{ m/s}}{8} & D' &= \frac{0,376 \text{ m}}{8} \\
 A'_0 &= 0,369 \text{ g} & A' &= 0,258 \text{ g} & V' &= 0,0966 \text{ m/s} & D' &= 0,047 \text{ m} \\
 \boxed{A'_0 = 0,37 \text{ g}} & & \boxed{A' = 0,26 \text{ g}} & & \boxed{V' = 0,097 \text{ m/s}} & & \boxed{D' = 0,047 \text{ m}} & & 
 \end{aligned}$$

Se mostró el proceso de construcción para el espectro de diseño elástico porque para el espectro inelástico es el mismo, de donde resulta la figura 107.

Se sugiere memorizar los factores sólo para el espectro de aceleraciones máximas o desplazamientos totales; una vez obtenido cualquiera de estos, el otro se obtiene fácilmente multiplicando o dividiendo por  $\mu$  los valores espectrales constantes. En este caso, el espectro de desplazamientos totales se obtiene multiplicando todos los valores de aceleraciones máximas por  $\mu$ :

$$\begin{aligned}
 A''_0 &= \mu A'_0 & A'' &= \mu A' & V'' &= \mu V' & D'' &= \mu D' \\
 A''_0 &= 8 \cdot 0,369 \text{ g}, & A'' &= 8 \cdot 0,258 \text{ g}, & V'' &= 8 \cdot 0,0966 \text{ m/s}, & D'' &= 8 \cdot 0,047 \text{ m}
 \end{aligned}$$

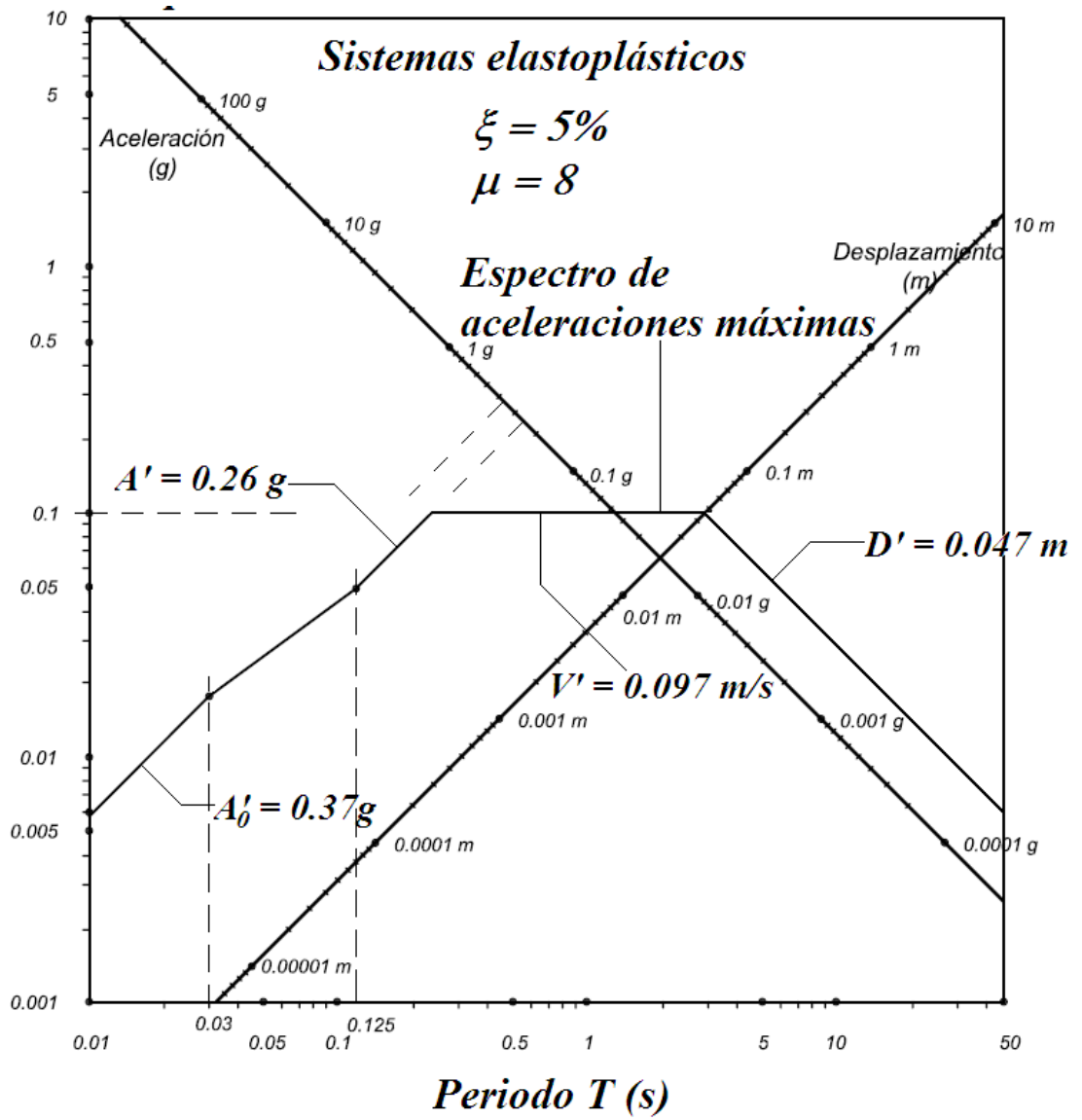
$$A_0'' = 2,95 \text{ g}$$

$$A'' = 2,06 \text{ g}$$

$$V'' = 0,77 \text{ m/s}$$

$$D'' = 0,38 \text{ m}$$

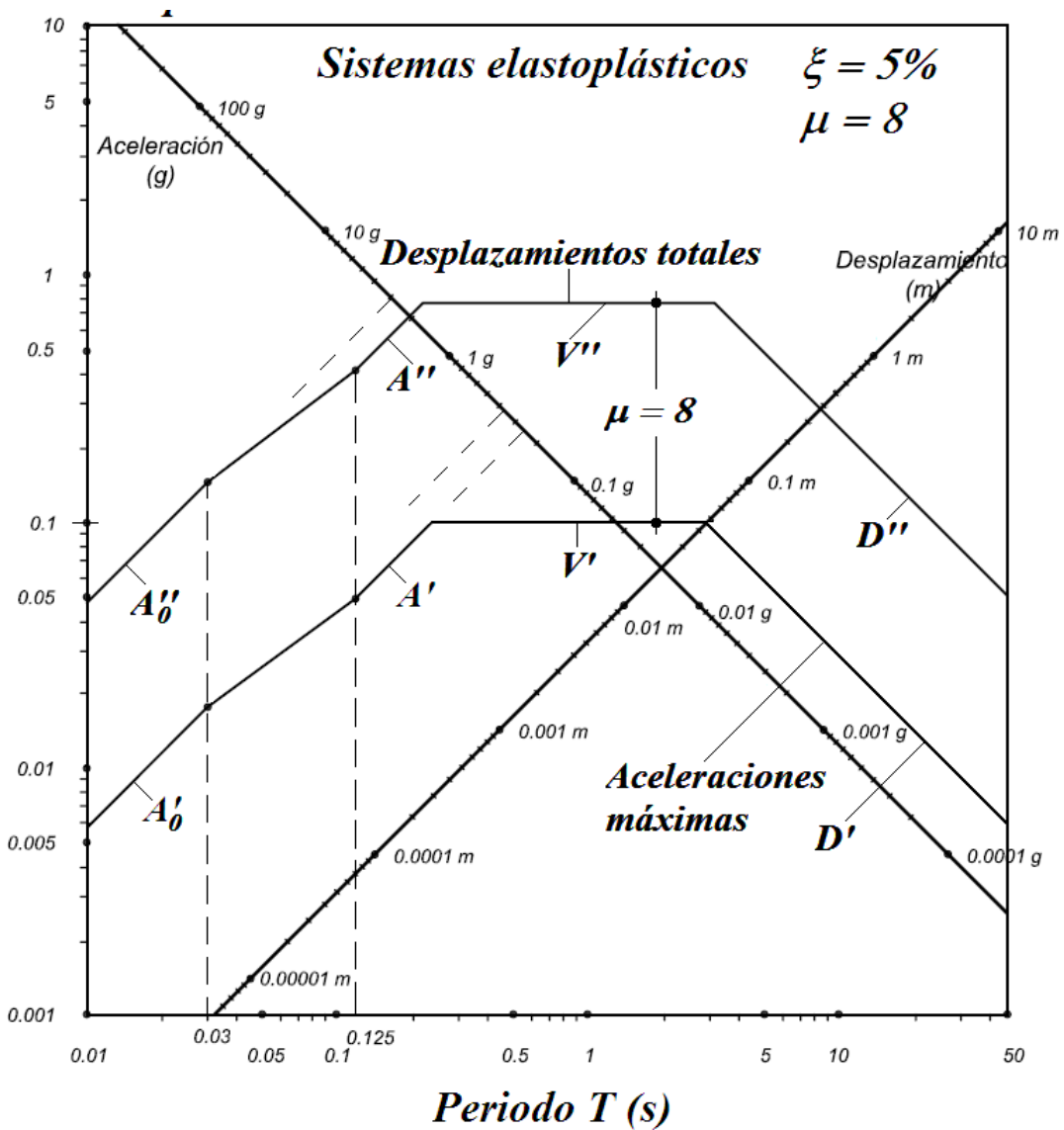
Figura 107. Espectro inelástico de aceleraciones N & H



Fuente: elaboración propia.

El espectro de diseño inelástico de desplazamientos se obtiene de forma análoga a los espectros anteriores; si se dibujan los espectros inelásticos en el mismo plano, resulta la figura 108.

Figura 108. Espectro inelástico de desplazamientos



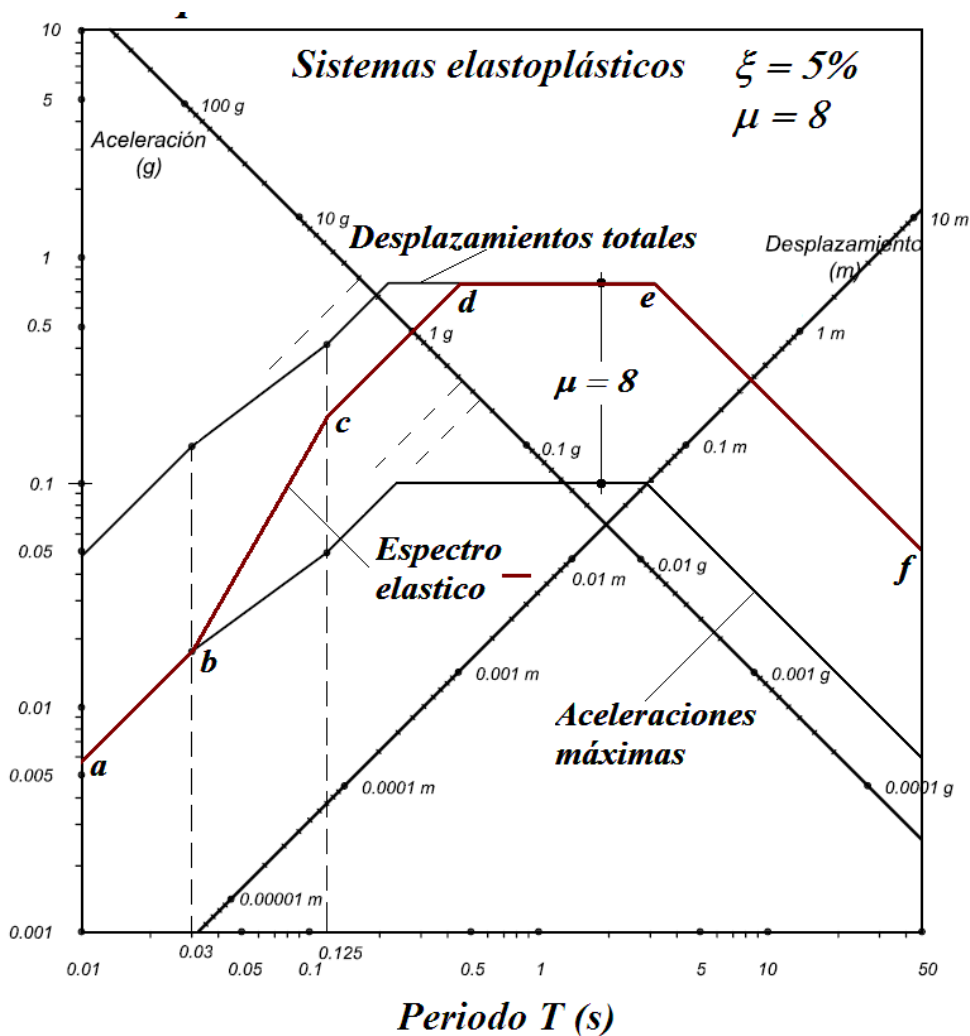
Fuente: elaboración propia.





Si se desea obtener el espectro de diseño elástico, una vez obtenidos los espectros inelásticos de desplazamientos y aceleraciones es sencillo; se traza el valor amplificado de aceleración del terreno  $A = 1,0 \text{ g}$ , del período  $T = 0,125 \text{ s}$  al espectro de desplazamientos totales, de la forma en que se muestra en la figura 109. Se muestra el trazo de color rojo oscuro de  $c$  a  $d$ ; ahora el espectro de diseño elástico es el que sigue la secuencia  $a-b-c-d-e-f$ ; figura 110.

Figura 110. **Espectro de diseño elástico e inelástico N & H**



Fuente: elaboración propia.

El espectro de diseño elástico se muestra de color rojo oscuro, y coincide con la primera figura de este ejemplo y con la tercera del ejemplo de diseño elástico N – H, pues se trata del mismo espectro; esta última figura es un caso particular del general mostrado en la figura 105.

### **7.7.2. Método de Riddell y Newmark**

El trabajo realizado por Riddell y Newmark en 1979, amplió lo encontrado solamente para sistemas elastoplásticos en los trabajos de Newmark y Hall, a sistemas bilineales y a sistemas con rigidez degradante. Esta metodología, nuevamente se sustenta en que "el método está basado en la aproximación de que los efectos no lineales pueden tenerse en cuenta gracias a un análisis linealmente elástico de la estructura, utilizando coeficientes de diseño determinados de un espectro inelástico para sistemas de un grado de libertad".

En él se estudian los efectos combinados del amortiguamiento y el efecto inelástico. Las conclusiones del estudio fueron posteriormente reestudiadas en trabajos como el de Elghadamsi y Mohraz, que fundamentalmente las validan.

Desde el punto de vista general, se observaron los siguientes aspectos:

- La respuesta de sistemas con períodos de vibración muy largos es independiente del tipo de relación fuerza-deformación del elemento estructural.
- Se observan diferencias para sistemas con períodos cortos menores de 0,1 s, pero estas diferencias son despreciables para demandas de ductilidad menores de 5, e insustanciales para demandas de ductilidad mayores.

- Para períodos intermedios, la respuesta de sistemas bilineales con demandas de ductilidad menores e iguales a 2 son prácticamente iguales a la de sistemas elastoplásticos con demandas de ductilidad similares. Para demandas de ductilidad mayores; “la respuesta máxima de sistemas bilineales es en general, más pequeña que la de sistemas elastoplásticos”.
- Para todos los períodos considerados, las ordenadas espectrales de sistemas elastoplásticos son, en promedio, “mayores que las ordenadas espectrales de sistemas con rigidez degradante”.
- Los espectros de sistemas con rigidez degradante no tienen los picos y variaciones abruptas que se presentan en los sistemas elastoplásticos. Se encontró que los sistemas con rigidez degradante eran los más eficientes respecto de la capacidad de disipación de energía. Además, se pudo observar que los sistemas con rigidez degradante eran mucho más eficientes en su recuperación después de una excursión inelástica.

Esto último se traduce en que las deformaciones permanentes de los sistemas con rigidez degradante fueron siempre menores que las de sistemas elastoplásticos y bilineales. Es razonable suponer que el comportamiento de sistemas degradantes está dominado por los efectos de ablandamiento producido por la degradación de rigidez, más que por el efecto de resistencia adicional causada por el endurecimiento por deformación del material.

Los sistemas con rigidez degradante empleados no incluyeron sistemas con degradación de la resistencia, ni ablandamiento de la rigidez de descarga; lo cual debe tenerse en cuenta al interpretar las conclusiones del estudio. Es importante tener en cuenta que existen numerosas situaciones en las cuales no es posible predecir la respuesta de un sistema en particular a un acelerograma.

En muchos casos, sistemas con el mismo tipo de relaciones fuerza-deformación, el mismo nivel de amortiguamiento, y sometidos al mismo acelerograma, se comportan en formas totalmente diferentes, dependiendo de los valores particulares de la fuerza de fluencia.

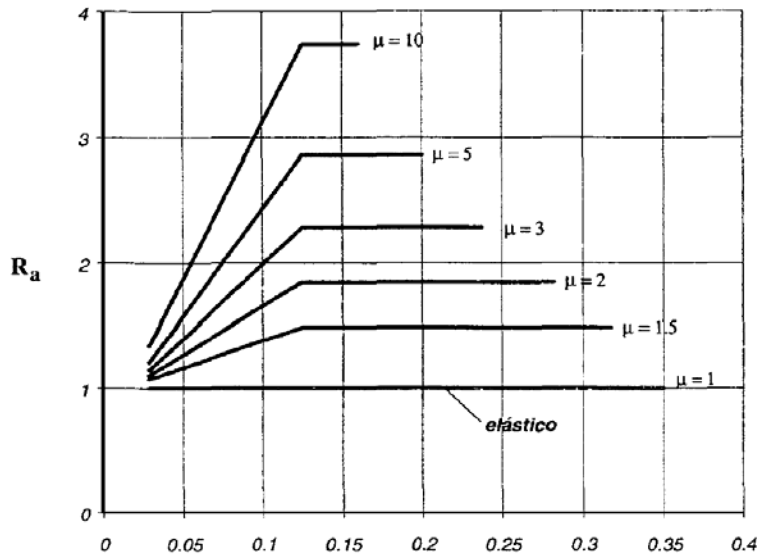
Una conclusión muy importante del estudio realizado, es la aseveración de que “en la gran mayoría de los casos, los resultados obtenidos para sistemas con relaciones fuerza-deformación elasto-plástica, consistentemente conducen a valores conservadores de la máxima respuesta, lo cual valida el empleo de este tipo de modelos en un gran número de aplicaciones” (Riddell y Newmark, 1979).

El estudio de Riddell y Newmark introdujo el concepto de coeficientes de deamplificación inelástica,  $\phi_{li}$ , los cuales permiten reducir las ordenadas espectrales elásticas a valores asociados con un nivel de demanda de ductilidad dado, para cada una de las zonas del espectro sensitivas a la aceleración, a la velocidad o al desplazamiento. Estos coeficientes se estudiaron estadísticamente para los acelerogramas empleados. Se obtuvieron valores medios y valores en la media más una desviación estándar.

El inverso del coeficiente de deamplificación corresponde a un coeficiente de disipación de energía. En este caso se denominan  $R_a$ ,  $R_v$  y  $R_d$ , según correspondan a la zona del espectro sensitiva a aceleración, a velocidad, o a desplazamiento, respectivamente. Estos coeficientes son sensitivos además, al nivel de amortiguamiento empleado, a las condiciones locales del suelo en el sitio donde se obtuvo el registro, y al período de vibración del sistema.

En la figura 111 se muestra el coeficiente de reducción  $R_a$  para la zona sensitiva a aceleraciones.

Figura 111. **Coefficientes de reducción de resistencia para sistemas con degradación de rigidez, zona de periodos cortos de amplificación de aceleración,  $\xi = 5\%$**



Fuente: GARCÍA. Luis. Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico. p. 163.

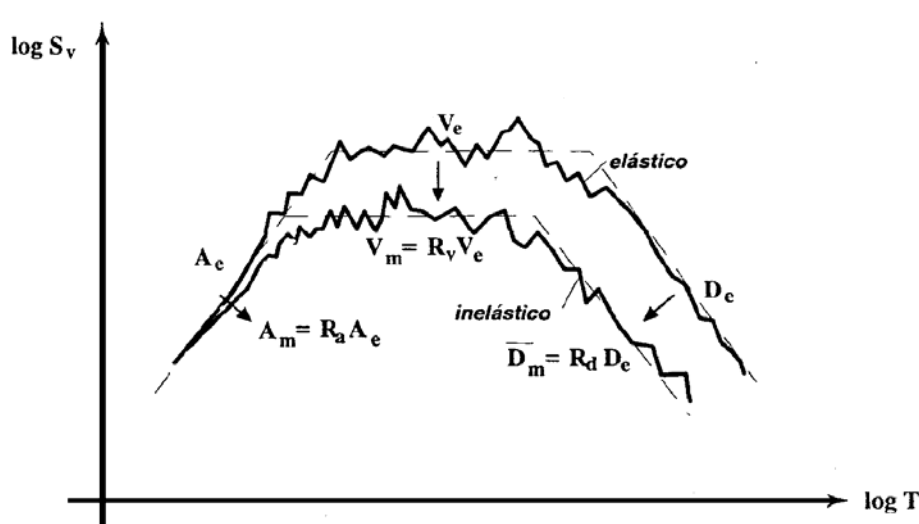
Es muy importante notar que la reducción de resistencia que se puede lograr para todas las demandas de ductilidad tiende a la unidad en la medida que el período tiende a cero. El sistema sufre la aceleración máxima del terreno, independientemente de los desplazamientos relativos, y por ende de la ductilidad. Esto quiere decir que en los sistemas inelásticos con periodos cortos, no es posible ejercer la ductilidad y las reducciones que se realicen a la resistencia, pondrían en peligro la estabilidad del sistema, pues no se produciría una demanda de ductilidad compatible con la reducción de resistencia.

Como consecuencia muy importante de este fenómeno, las estructuras muy rígidas deben diseñarse para las fuerzas que se derivan de aplicar la máxima aceleración del terreno,  $A_{te}$ , a la masa de la estructura.

El empleo de los coeficientes de reducción de resistencia, dentro de un espectro de aceleraciones máximas se muestra en la figura 112. Se insiste que los desplazamientos que se leen en el espectro inelástico, corresponden únicamente a la componente elástica del desplazamiento, por lo tanto para obtener el desplazamiento total hay necesidad de multiplicar el desplazamiento leído del espectro de aceleraciones máximas, por el factor de ductilidad,  $\mu$ .

Con base en estos resultados de la investigación sobre respuesta de sistemas elastoplásticos y de rigidez degradante Riddell y Newmark proponen una metodología para definir un espectro inelástico; para una demanda de ductilidad dada,  $\mu$ . Se encontró que los coeficientes eran prácticamente independientes del nivel de probabilidad de excedencia de las ordenadas espectrales del espectro elástico, por lo tanto son aplicables, en teoría, a cualquier espectro elástico.

Figura 112. **Espectro inelástico de aceleraciones máximas para rigidez degradante**



Fuente: GARCÍA. Luis. Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico. p. 163.

Para sistemas elastoplásticos se desarrollaron las siguientes expresiones para los coeficientes de reducción de resistencia, para valores de  $\xi$  entre 2% y 10%, y valores de  $\mu$  entre 1,5 y 10:

Región de aceleración aproximadamente constante.

$$R_A = (p_a \mu - q_a)^{r_a}$$

Donde:

$$p_a = q_a + 1 \quad q_a = 3,0(\xi\%)^{-0,3} \quad r_a = 0,48(\xi\%)^{-0,08}$$

Región de velocidad aproximadamente constante.

$$R_V = (p_v \mu - q_v)^{r_v}$$

Donde:

$$p_v = q_v + 1 \quad q_v = 2,7(\xi\%)^{-0,4} \quad r_v = 0,66(\xi\%)^{-0,04}$$

Región de desplazamiento aproximadamente constante:

$$R_D = \frac{\mu^{1,07}}{0,87(\xi\%)^{0,055}}$$

Para sistemas con rigidez degradante no se desarrollaron expresiones como las anteriores, pero en la tabla XIII se presentan los valores obtenidos, para diferentes valores de demanda de ductilidad,  $\mu$ , y para un coeficiente de amortiguamiento crítico  $\xi = 5\%$ .



“No obstante Riddell y Newmark demostraron que para los casos estudiados, la respuesta elastoplástica era conservadora al compararla con la respuesta para rigidez degradante; por lo tanto, se pueden utilizar los valores para sistemas elastoplásticos en la gran mayoría de los casos prácticos”.

Tabla XIII. **Valores de  $R_A$ ,  $R_V$  y  $R_D$  para sistemas con rigidez degradante y  $\xi = 5\%$**

Ductilidad	Región espectral		
	Aceleración $R_a$	Velocidad $R_v$	Desplazamiento $R_d$
1,0	1,00	1,00	1,00
1,5	1,49	1,65	1,68
2,0	1,85	2,32	2,38
3,0	2,28	3,44	3,73
5,0	2,86	5,08	6,62
10,0	3,75	8,33	14,30

Fuente: GARCÍA. Luis. Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico. p. 191.

El procedimiento sugerido por Riddell y Newmark es el siguiente: partiendo de un espectro elástico, como puede ser el de Newmark-Hall, en la zona de períodos cortos, menores de 0,03 s se sugiere tomarla igual a  $A_{te}$ . En la zona central del espectro, entre períodos del orden de 0,125 s y 10 s, se tiene amplificación de la aceleración, luego de la velocidad y por último del desplazamiento. En la zona cercana a períodos del orden de 0,125 s, se tiene amplificación de la aceleración. Allí se toma la aceleración del espectro elástico y se divide por el  $R_a$ , correspondiente a la demanda de ductilidad  $\mu$ , deseada.

En la zona central se reduce la velocidad del espectro elástico, dividiéndola por  $R_v$ ; y en la zona anterior al período de 10 s, se tiene amplificación del desplazamiento; allí se divide el desplazamiento del espectro elástico por  $R_d$ .

Las intersecciones entre estas líneas definen el espectro en la zona central. En la zona de períodos largos, más de 33 s, se obtiene dividiendo la ordenada de desplazamiento del espectro elástico por el valor de la demanda de ductilidad  $\mu$ . Una vez se tiene dibujada esta zona, se procede a dibujar las zonas de transición. La de períodos cortos se dibuja entre los períodos de 0,03 s y 0,125 s, y la de períodos largos, entre 10 s y 33 s.

Este procedimiento es satisfactorio, no obstante se advierte que en la investigación de Riddell y Newmark, se encontró que los períodos de vibración que dividen las zonas del espectro en regiones de aceleración, velocidad y desplazamiento aproximadamente constantes, varían para los diferentes niveles de ductilidad; si se quiere una mayor precisión consultar la gráfica de coeficientes de reducción de resistencia para sistemas con degradación de rigidez (Riddell y Newmark, 1979) y así ajustar los periodos de transición.

Ejemplo sobre espectro de diseño inelástico de Riddell y Newmark: Obtener el espectro inelástico de diseño para sistemas con rigidez degradante utilizando el procedimiento de Riddell y Newmark, para un coeficiente de daño (demanda de ductilidad)  $\mu = 5$  y un coeficiente de amortiguamiento crítico  $\xi = 5\%$  para los mismos movimientos sísmicos de diseño del ejemplo inelástico N - H.

La máxima aceleración del terreno ( $A_{te}$ ) es de 0,369 g la máxima velocidad del terreno ( $V_{te}$ ) de 0,336 m/s y el máximo desplazamiento del terreno ( $D_{te}$ ) es de 0,187 m. Se quiere un nivel de probabilidad del 84,1% que no se excedan las ordenadas espectrales.

Solución: Los valores relevantes del ejemplo anterior son:

$$A_{te} = 0,369 \text{ g} \quad A = 1,00 \text{ g} \quad V = 0,773 \text{ m/s} \quad D = 0,376 \text{ m}$$

Los valores amplificados  $A$ ,  $V$  y  $D$  del movimiento del suelo corresponden al espectro elástico de Newmark y Hall, donde va incluido el nivel de confianza.

A la propiedad inelástica  $\mu = 5$ , le corresponden los coeficientes dados en la tabla XIII:

$$R_A = 2,86 \quad R_V = 5,08 \quad R_D = 6,62$$

$A_m$ ,  $V_m$ ,  $D_m$  y  $D_{m33}$  son los valores espectrales de Riddell y Newmark para el espectro inelástico de aceleraciones máximas.

$$A_m = \frac{A}{R_A} \quad V_m = \frac{V}{R_V} \quad D_m = \frac{D}{R_D} \quad D_{m33} = \frac{D}{\mu}$$

$$A_m = \frac{1,00 \text{ g}}{2,86} \quad V_m = \frac{0,773 \text{ m/s}}{5,08} \quad D_m = \frac{0,376 \text{ m}}{6,62} \quad D_{m33} = \frac{0,376 \text{ m}}{5}$$

$$\boxed{A_m = 0,35 \text{ g}}$$

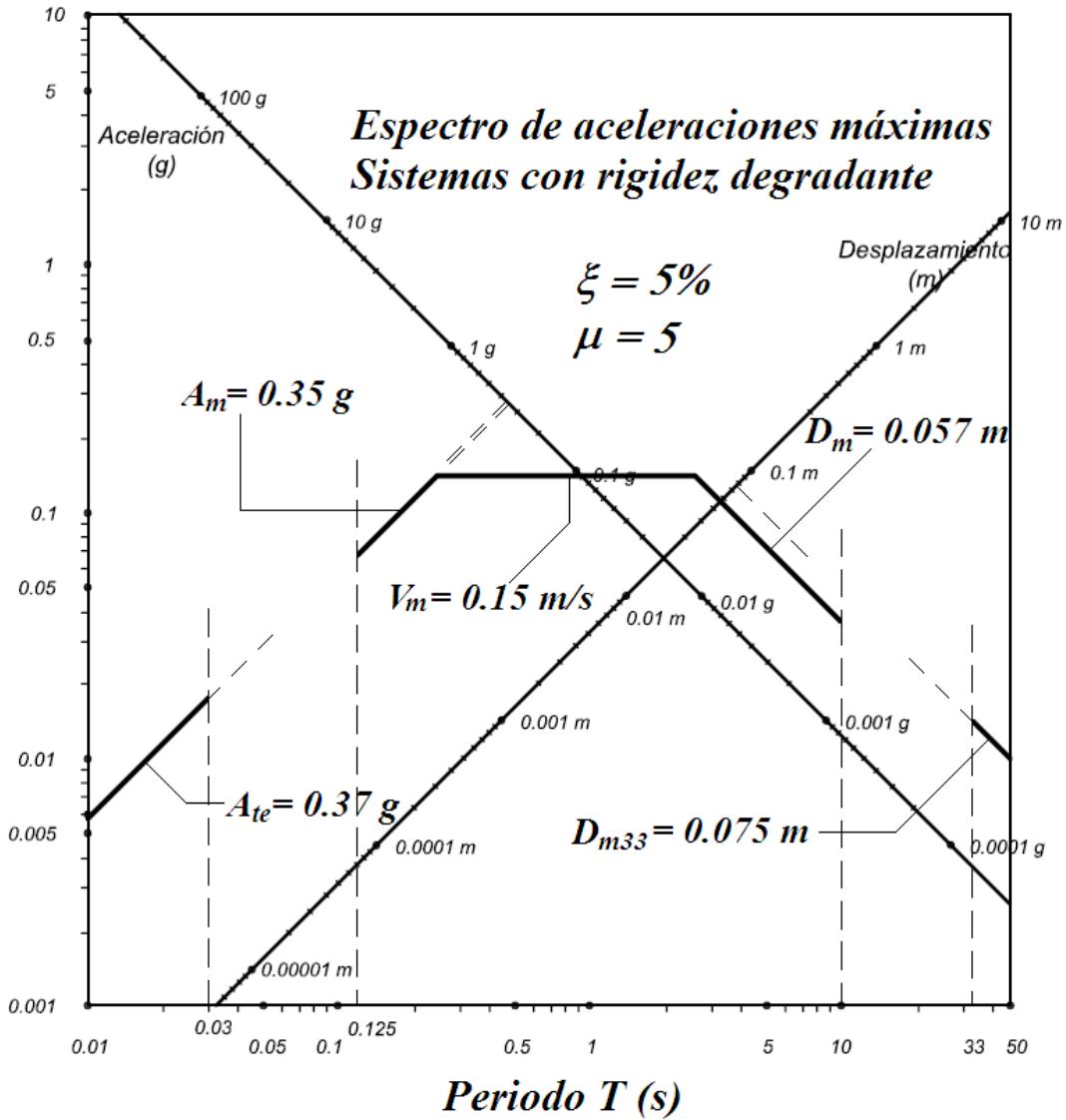
$$\boxed{V_m = 0,15 \text{ m/s}}$$

$$\boxed{D_m = 0,057 \text{ m}}$$

$$\boxed{D_{m33} = 0,075 \text{ m}}$$

Los valores espectrales  $A_m$ ,  $V_m$  y  $D_m$  se trazan en el intervalo  $T \in [0,125 \text{ s}, 10 \text{ s}]$ , para periodos menores a 0,03 s se traza el valor  $A_{te} = 0,37 \text{ g}$  de la aceleración del terreno, y para valores mayores a 33 s se traza el valor  $D_{m33} = 0,075 \text{ m}$  de desplazamiento máximo del terreno; se recomienda dibujar líneas guía en los periodos de transición, como las mostradas en las figuras, con estos valores se obtiene la figura 113.

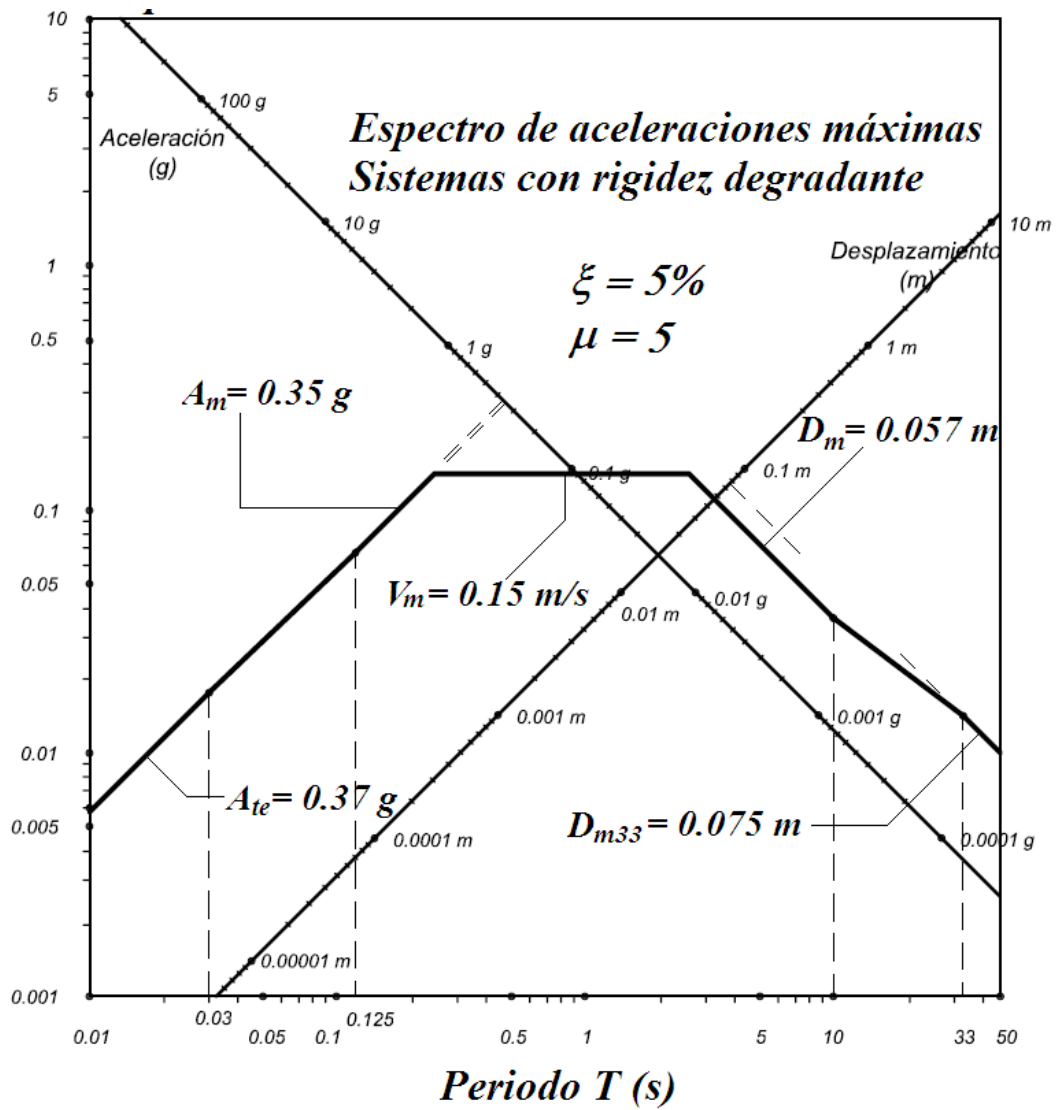
Figura 113. Líneas guía y semitrazo del espectro Riddell y Newmark



Fuente: elaboración propia.

Para terminar de trazar este espectro, se unen las líneas espectrales con una recta en los periodos de transición, donde el espectro de diseño inelástico de aceleraciones se muestra en la figura 114.

Figura 114. Espectro de diseño inelástico Riddell y Newmark



Fuente: elaboración propia.

También puede obtenerse el espectro para sistemas elastoplásticos con el método de Riddell y Newmark, considerar las ecuaciones elastoplásticas:

$$R_A = (p_a \mu - q_a)^{r_a}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 p_a &= q_a + 1 & q_a &= 3,0(\xi\%)^{-0,3} & r_a &= 0,48(\xi\%)^{-0,08} \\
 p_a &= q_a + 1 & q_a &= 3,0(5)^{-0,3} & r_a &= 0,48(5)^{-0,08} \\
 p_a &= 2,85 & q_a &= 1,85 & r_a &= 0,422 \\
 R_A &= (2,85 \times 5 - 1,85)^{0,422} & \rightarrow & R_A &= 2,89
 \end{aligned}$$

$$R_V = (p_v \mu - q_v)^{r_v}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 p_v &= q_v + 1 & q_v &= 2,7(\xi\%)^{-0,4} & r_v &= 0,66(\xi\%)^{-0,04} \\
 p_v &= q_v + 1 & q_v &= 2,7(5)^{-0,4} & r_v &= 0,66(5)^{-0,04} \\
 p_v &= 2,42 & q_v &= 1,42 & r_v &= 0,619 \\
 R_V &= (2,42 \times 5 - 1,42)^{0,619} & \rightarrow & R_V &= 4,33
 \end{aligned}$$

$$R_D = \frac{\mu^{1,07}}{0,87(\xi\%)^{0,055}} \rightarrow R_D = \frac{(5)^{1,07}}{0,87(5)^{0,055}} \rightarrow R_D = 5,89$$

En resumen los coeficientes de reducción de resistencia, para sistemas elastoplásticos son:

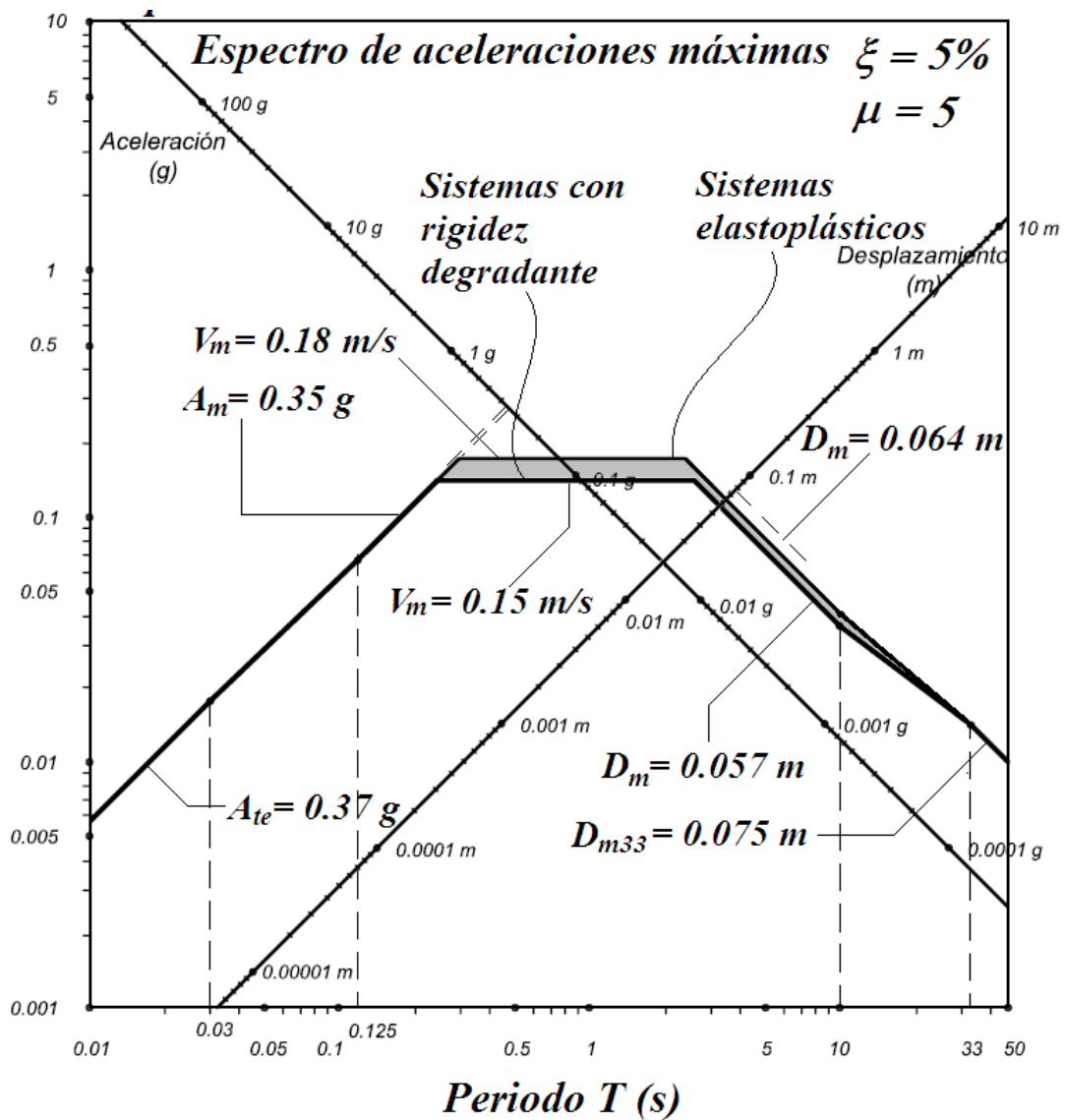
$$R_A = 2,89 \quad R_V = 4,33 \quad R_D = 5,89$$

Con los coeficientes de reducción los valores espectrales son:

$$\begin{aligned}
 A_m &= \frac{1,00 \text{ g}}{2,89} & V_m &= \frac{0,773 \text{ m/s}}{4,33} & D_m &= \frac{0,376 \text{ m}}{5,89} & D_{m33} &= \frac{0,376 \text{ m}}{5} \\
 \boxed{A_m = 0,35 \text{ g}} & & \boxed{V_m = 0,18 \text{ m/s}} & & \boxed{D_m = 0,064 \text{ m}} & & \boxed{D_{m33} = 0,075 \text{ m}}
 \end{aligned}$$

El procedimiento para la obtención de este espectro elastoplástico es el mismo que para el espectro con rigidez degradante. Se trazan en el mismo plano para propósitos comparativos figura 115.

Figura 115. Comparación de espectros Riddell y Newmark



Fuente: elaboración propia.

Al observar la gráfica, claramente se ve que el espectro para sistemas elastoplásticos es más conservador que para el espectro con rigidez degradante; la parte sombreada indica la zona conservadora. En vista de la simplicidad del modelo elastoplástico se ha ganado a muchos adeptos; la preferencia en su aplicación está validada gracias al margen de seguridad que aporta, sin caer en un sobrediseño, ya que el área sombreada es moderada.

### 7.7.3. Método de Gulkan - Shibata - Sozen

Gulkan, Sozen, y Shibata, demostraron experimentalmente, que la respuesta de un sistema de concreto reforzado de un solo grado de libertad, cuando se ve sometido a sollicitaciones en el rango inelástico, puede ser aproximada por medio del análisis elástico de un “sistema sustituto”, lineal y elástico, con rigidez reducida y amortiguamiento sustituto.

La rigidez a flexión del elemento del sistema de un grado de libertad en la estructura sustituta se relaciona con la rigidez del elemento real de la siguiente manera:

$$(EI)_s = \frac{(EI)_r}{\mu} \quad (7.4)$$

Donde  $(EI)_s$  es la rigidez a flexión del elemento de la estructura sustituta;  $(EI)_r$  es la rigidez a flexión del elemento en la estructura real y  $\mu$  es un factor de daño aceptable para el elemento de concreto reforzado. El amortiguamiento sustituto,  $\xi_s$ , depende del factor de daño, por medio de la siguiente relación:

$$\xi_s = 0,2 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \right] + 0,02 \quad (7.5)$$



El coeficiente  $\xi_s$  es una aproximación a la disipación de energía que ocurre durante la respuesta histerética, de un elemento de concreto reforzado sometido a un sismo. Por lo tanto, la respuesta no lineal histerética de un sistema que alcanza un factor de daño  $\mu$ , es equivalente a la respuesta lineal calculada utilizando un coeficiente de amortiguamiento igual a  $\xi_s$ .

Puede demostrarse que el período de vibración del sistema sustituto,  $T_s$ , se obtiene en función del período de la estructura real,  $T_r$ , así:

$$T_s = T_r \sqrt{\mu} \quad (7.6)$$

Si se desea extender este concepto de la estructura sustituta a la respuesta de diferentes sistemas estructurales a un temblor real, esto se puede llevar a cabo utilizando el espectro de respuesta del sismo. El efecto en el espectro de la respuesta inelástica, se obtiene entrando al espectro con el período correspondiente a la rigidez sustituta, ecuación (7.4), y leyendo la ordenada espectral correspondiente al amortiguamiento sustituto.

El procedimiento para dibujar un espectro inelástico de aceleraciones es el siguiente: se define un nivel de amortiguamiento sustituto correspondiente al coeficiente de daño seleccionado,  $\mu$ . La reducción en el espectro, respecto del espectro elástico dibujado para un amortiguamiento de 2% del crítico, debido a este amortiguamiento sustituto se puede calcular utilizando la ecuación (6.19), la cual es.

$$S_a(T, \xi) = S_a(T, \xi = 0.02) \cdot \frac{8}{6+100\xi} \quad (7.7)$$

El espectro que describe corresponde al espectro inelástico deseado, para entrar al espectro se debe emplear la rigidez sustituta.

Ejemplo de diseño inelástico Gulkan – Shibata – Sozen: Graficar el espectro inelástico de diseño, para estructuras de concreto reforzado, utilizando el método de Gulkan, Shibata y Sozen, para una aceleración máxima del terreno  $A_{te} = 0,369$  g, se necesita que los sistemas alcancen un factor de daño como mínimo de  $\mu = 3,3$

Solución: el espectro inelástico se obtiene aplicando el amortiguamiento sustituto al espectro elástico con 2% de amortiguamiento, ecuación (7.5).

$$\xi_s = 0,2 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{3,3}} \right] + 0,02 \rightarrow \xi_s = 0,11$$

Este amortiguamiento sustituto implica una reducción en el espectro elástico con una razón de amortiguamiento de  $\xi = 2\%$  ecuación (6.19) y (6.20):

$$S_a(T, 0,11) = S_a(T, \xi = 0,02) \cdot \frac{8}{6 + 11}$$

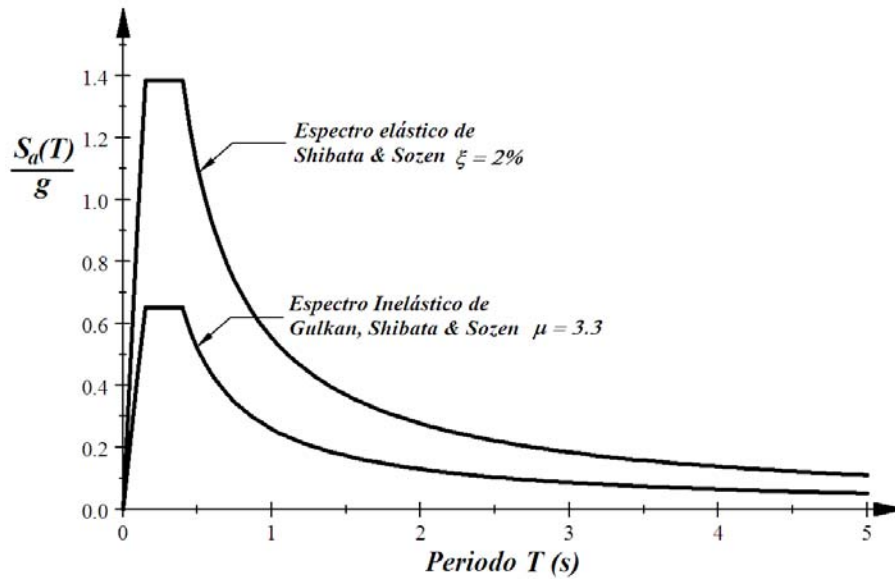
$$S_a(T, 0,11) = \frac{8}{17} S_a(T, \xi = 0,02) = \frac{8}{17} \begin{cases} 25A_{te}T, & 0 < T \leq 0,15 \text{ s} \\ 3,75A_{te}, & 0,15 \text{ s} < T \leq 0,4 \text{ s} \\ \frac{1,5A_{te}}{T}, & T > 0,4 \text{ s} \end{cases}$$

Con el valor de la aceleración del terreno  $A_{te} = 0,369$  g, se tiene la ecuación del espectro inelástico con  $\mu = 3,3$ :

$$\frac{S_a(T_s, 0,11)}{g} = \begin{cases} 4,34T_s, & 0 < T_s \leq 0,15 \text{ s} \\ 0,651, & 0,15 \text{ s} < T_s \leq 0,4 \text{ s} \\ \frac{0,26}{T_s}, & T_s > 0,4 \text{ s} \end{cases}$$

Los espectros resultantes son:

Figura 116. **Espectro inelástico Gulkan, Shibata y Sozen**



Fuente: elaboración propia.

Se insiste nuevamente, para leer el espectro inelástico es necesario utilizar el período de vibración correspondiente a la rigidez sustituta. Del ejemplo en vibración libre se intuye que la rigidez es proporcional al módulo a la flexión:

$$EI \propto k \quad \rightarrow \quad EI = Ck$$

Con la ecuación (7.4) se obtiene la relación:

$$(EI)_s = \frac{(EI)_r}{\mu} \quad \rightarrow \quad Ck_s = \frac{Ck_r}{\mu} \quad \rightarrow \quad k_s = \frac{k_r}{\mu} \quad \rightarrow \quad k_r = \mu k_s$$

El período esta dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T_r = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_r}} \quad \text{y} \quad T_s = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_s}}$$

Igualando la expresión  $2\pi\sqrt{m}$  y con el resultado  $k_r = \mu k_s$  se obtiene:

$$T_s\sqrt{k_s} = T_r\sqrt{k_r} \rightarrow T_s = T_r\sqrt{\frac{k_r}{k_s}} \equiv T_r\sqrt{\frac{\mu k_s}{k_s}} \rightarrow \boxed{T_s = T_r\sqrt{\mu}}$$

Que es una forma de obtener la ecuación (7.6), con  $\mu = 3,3$  el período sustituto es:

$$T_s = T_r\sqrt{3,3}$$

Para sistemas con un período de 0,5 s su aceleración es:

$$T_s = (0,5 \text{ s})\sqrt{3,3} \cong 0,908 \text{ s} \quad \text{si } T_s > 0,4 \text{ s} \Rightarrow S_a(T_s) = 0,26/T_s$$

$$S_a(0,908 \text{ s})/g = 0,26/0,908 \text{ s} \rightarrow S_a(0,908 \text{ s}) = 0,29 \text{ g}$$

## 7.8. Factores de reducción de resistencia

Es importante notar que por sí sola la ductilidad no se constituye en el factor de reducción; es el paso inicial para obtener el factor que reduce o desamplifica la respuesta elástica del sistema de un grado de libertad, para tomar en cuenta la incursión inelástica del sistema estructural.

### **7.8.1. Newmark y Veletsos (1960)**

Establecen la primera recomendación para los factores de reducción. Ellos indicaban la importancia de relacionar la deformación máxima de un sistema elastoplástico con aquel de un sistema elástico, bajo la premisa de tener un valor de rigidez elástico igual al valor de la rigidez inicial del sistema inelástico.

Lograron determinar que para el rango de periodos altos con valores mayores a 16,5 s (zona de frecuencias menores a 0,38 Hz) la máxima deformación del sistema inelástico y su sistema asociado elástico eran muy similares.

Este descubrimiento sentó las bases de la regla de igual deformación. De forma similar, notaron que para la zona de periodos bajos (frecuencias altas o moderadamente altas) los desplazamientos inelásticos eran significativamente superiores a sus contrapartes elásticas.

### **7.8.2. Newmark y Hall (1972)**

Utilizan como base teórica los resultados del trabajo de Newmark y Veletsos. Reducen el espectro elástico por factores diferentes para cada región espectral, de acuerdo con las consideraciones estudiadas en la sección 7.7.1: para períodos largos el sistema elástico y el sistema inelástico tienen el mismo desplazamiento total.

Para períodos intermedios los sistemas, elástico e inelástico absorben la misma energía total y para períodos cortos, ambos sistemas poseen la misma fuerza.

### 7.8.3. Riddell y Newmark (1979)

Determinan que el uso del sistema elastoplástico proporciona resultados conservadores para el espectro inelástico. Dentro de las formulaciones para el cálculo de los factores de reducción se encuentra incorporada la razón de amortiguamiento, como se detalla en 7.7.2.

### 7.8.4. Lai y Biggs (1980)

Definen sismos artificiales que tienen sus espectros de respuesta elásticos compatibles para sistemas elastoplásticos. Proponen una expresión lineal en términos logarítmicos para tres regiones espectrales, en donde  $a$  y  $b$  son valores de constantes que son función directa del rango de períodos y de los valores de ductilidades.

$$R = a + b \log T$$

### 7.8.5. Riddell, Hidalgo y Cruz (1989)

Los factores simplificados de reducción de resistencia fueron propuestos con base en los factores aproximados promedios de reducción de resistencia. La formulación consiste en dos tramos lineales, el primero de los cuales presenta valores variables del factor de reducción como función del valor del período esquina  $T^*$ , mientras el segundo, presenta un valor constante para el rango de períodos faltante.

$$R = \begin{cases} 1 + \frac{(R^* - 1)T}{T^*}, & 0 < T < T^* \\ R^*, & T > T^* \end{cases}$$

#### **7.8.6. Nassar y Krawinkler (1992)**

Definen factores de reducción de resistencia como el inicio del desarrollo de un procedimiento de diseño que utilice la capacidad de ductilidad del miembro y la respuesta estructural inelástica como la base del diseño en el estado límite de colapso.

#### **7.8.7. Miranda (1993)**

Los factores de reducción en roca se caracterizan por aumentar conforme se incrementa el valor de la razón de ductilidad, con una tasa de incremento que depende del período, y para una razón de ductilidad constante, los factores de reducción de resistencia exhiben una variación importante con cambios en el período, sobre todo en región de períodos cortos. Para períodos largos, los factores de reducción de resistencia son constantes e iguales al valor de la razón de ductilidad.

Debido a la ocurrencia de la mayor amplificación para suelo blando en valores de período cercanos al período predominante del sismo, se define el período predominante del sismo  $T_g$  como aquel en el cual la máxima energía de entrada de un sistema lineal elástico con una razón de amortiguamiento del 5% ocurre y es máximo en todo el rango de períodos.

El  $T_g$  también puede corresponder al período en el cual ocurre la máxima velocidad relativa, la cual es proporcional a la energía cinética relativa, y a su vez, es similar a la energía cinética absoluta para la vecindad del período predominante (*Uang & Bertero, 1990*).

Para depósito de suelo blando los factores de reducción de resistencia son mucho mayores que las razones de ductilidad para la cercanía al período  $T_g$ . Para sistemas con períodos menores o iguales a dos terceras partes del valor de  $T_g$ , el factor de reducción de resistencia es menor que el valor de la razón de ductilidad, mientras que para períodos mayores a 1,5 veces el valor de  $T_g$ , el factor de reducción de resistencia es similar al valor de la razón de ductilidad.

El factor  $\Phi$  fue calibrado con los datos obtenidos de los análisis de historias en el tiempo no lineales y es definido para cada tipo de suelo

$$\Phi_{roca} = 1 + \frac{1}{T(10 - \mu)} - \frac{1}{2T} \exp \left[ -\frac{3}{2} \left( \ln T - \frac{3}{5} \right)^2 \right]$$

$$\Phi_{firme} = 1 + \frac{1}{T(12 - \mu)} - \frac{2}{5T} \exp \left[ -2 \left( \ln T - \frac{1}{5} \right)^2 \right]$$

$$\Phi_{blando} = 1 + \frac{T_g}{3T} - \frac{3T_g}{4T} \exp \left[ -3 \left( \ln \frac{T}{T_g} - \frac{1}{4} \right)^2 \right]$$

### 7.8.8. Riddell (1993)

Existen dos formas de desarrollar espectros de resistencia inelásticos: La primera consiste en la reducción del espectro elástico por medio del uso de factores de reducción; la segunda, en la derivación directa del espectro inelástico a través de estudios estadísticos de espectros, obtenidos de análisis dinámicos no lineales de estructuras. Riddell contrasta los dos métodos (indirecto y directo) llegando a la conclusión de que el procedimiento directo conduce a resultados más concordantes con las mediciones observadas. Para ello define una función en términos de un número de coeficientes ( $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ ) que son determinados por análisis de regresión y que son función del suelo y de la razón de ductilidad.



### 7.8.9. Vidic, Fajfar y Fischinger (1994)

Proponen un espectro básico que defina la demanda sísmica en el diseño por medio de cuatro componentes: espectro de resistencia (niveles de sollicitación lateral), de desplazamiento (comportamiento inelástico), de energía de entrada (daño potencial) y de energía histerética (daño acumulativo).

### 7.8.10. Priestley (1995)

Basado en su procedimiento de diseño sísmico sobre desplazamientos, define una relación bilineal con un período esquina que representa el período predominante del sismo:

$$R_{\mu} = \begin{cases} 1 + \frac{(\mu - 1)T}{1.5T_g}, & T < 1.5T_g \\ \mu, & T > 1.5T_g \end{cases}$$

### 7.8.11. Ordaz y Rocha (1998)

El factor de reducción depende solamente del espectro de desplazamiento inelástico, sin necesidad de mencionar explícitamente al período de vibración. Se propone como forma básica una expresión que inicialmente se supone dependiente del factor de reducción de resistencia de la ductilidad, del espectro de velocidades relativas  $V(T)$  y del espectro de desplazamientos relativos  $D(T)$ , normalizados en relación con los valores máximos de velocidad y desplazamiento del terreno.

#### **7.8.12. Lee, Han y Oh (1999)**

Los modelos histeréticos (bilineal, deterioro de rigidez, deterioro de resistencia) presentan efectos que son independientes entre sí, a la hora de ser incluidos en conjunto. Para el modelo bilineal (con los parámetros de rigidez inicial, desplazamiento de fluencia y segunda pendiente) se establece una formulación que refleja la variación del factor de reducción con el valor de la segunda pendiente: a mayor valor de segunda pendiente, mayor valor de factor de reducción de resistencia.

#### **7.8.13. Tiwari y Gupta (2000)**

Para suelo firme (aluvión, intermedio, roca dura) desarrollan una relación cualitativa entre el factor de reducción de resistencia con las variables de la duración del movimiento ( $T_s$ ), del período de máxima amplificación del espectro de Fourier ( $T_g$ ), del espectro de Fourier ( $FS(T)$ ) y del valor de la aceleración máxima del terreno (PGA):  $R_\mu = 10^{\alpha(T)T_g} T_s^{\beta(T)} FS(T)/PGA$

Los valores de factor de reducción de resistencia bajos se asocian con sismos de larga duración, excepto para períodos medios.

#### **7.8.14. Manfredi (2001)**

El factor de reducción de resistencia es numéricamente igual a la razón de la fuerza elástica con la fuerza de fluencia para un nivel dado de razón de ductilidad. Se define un parámetro  $x = T/T_1$  (para  $T < T_1$ ) donde  $T$  es el período elástico y  $T_1$  es el período inicial del rango de períodos medios, igual a 1 Hz.

$$R_\mu = m S_a(T)/F_y$$

## 7.9. Selección de factores de reducción de resistencia

Existen diversos factores de reducción de resistencia por ductilidad, las normas deben analizar cada una de ellas para su adopción satisfactoria, según el lugar de aplicación; todo criterio para su selección debe cumplir las siguientes condiciones (Miranda y Bertero, 1994):

- Para el caso elástico el factor de reducción de resistencia debe ser igual a uno, ya que no existe incursión inelástica, y por lo tanto, no debe existir reducción alguna de la demanda de resistencia.
- La demanda de resistencia inelástica es la misma que la de resistencia elástica para aquellos sistemas con valores de períodos cercanos a cero, o sea sistemas rígidos. Por lo tanto, el factor de reducción de resistencia debe ser igual a uno.
- El desplazamiento máximo relativo tiende al valor del máximo desplazamiento del terreno para sistemas con valores de períodos muy grandes, o sea, sistemas flexibles. La demanda de resistencia inelástica es igual a la demanda de resistencia elástica dividida por la razón de ductilidad, lo que implica que el factor de reducción de resistencia debe tender al valor de la razón de ductilidad.
- Para períodos cercanos al período predominante del sismo, en sistemas cimentados sobre perfiles de suelo blando, los factores de reducción de resistencia son mayores que los valores de razón de ductilidad, esto debido al efecto de amplificación de la señal sísmica.
- El factor de reducción de resistencia debe ser dependiente del período.



## CONCLUSIONES

1. La rigidez de un elemento dado, depende de los apoyos, la conexión y el tipo y dirección de carga a la que vaya a someterse.
2. La frecuencia resonante es la máxima sollicitación a la que puede verse sometida una estructura en vibración y esta es  $\omega_e = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ .
3. En un impulso como un impacto, la fuerza que absorbe el amortiguamiento de la estructura es mínima.
4. La representación tripartita de Newmark es equivalente a un espectro de aceleraciones.
5. Para sistemas con periodos bajos menores a 0,1 s, la masa del sistema tiene aceleraciones aproximadamente iguales a la máxima del terreno; para periodos intermedios de 0,1 s a 3 s, velocidades aproximadas a la máxima del terreno y para periodos altos mayores a 3 s. desplazamientos aproximados a los máximos del terreno.
6. El espectro de diseño inelástico se obtiene a partir de la reducción del espectro de diseño elástico, por medio del uso de los factores de modificación o factores de reducción dependientes de la ductilidad.
7. En la gran mayoría de los casos, los resultados obtenidos para sistemas con relaciones fuerza-deformación elastoplástica, consistentemente conducen a valores conservadores de la máxima respuesta, comparados

con otros sistemas complejos como el de rigidez degradante; por lo tanto se pueden utilizar los valores para sistemas elastoplásticos en la gran mayoría de los casos prácticos.

8. En los sistemas inelásticos con periodos cortos, no es posible ejercer la ductilidad.
9. Por sí sola la ductilidad no se constituye en el factor de reducción, es el paso inicial para obtener el factor que reduce o desamplifica la respuesta elástica del sistema de un grado de libertad, para tomar en cuenta la incursión inelástica del sistema estructural.
10. Los espectros de diseño están calibrados en roca; para adaptarlos a otro emplazamiento deben considerarse, la magnitud del sismo, la distancia a la falla que lo causa, su duración y el efecto de las condiciones locales del suelo en el sitio de interés, en parámetros o coeficientes.
11. Cuando la estructura entra en el rango de inelasticidad baja su rigidez, aumentando su período de vibración.
12. La introducción del efecto inelástico se logra con el coeficiente de modificación de respuesta  $R$ , el cual en alguna medida corresponde a la capacidad de disipación de energía de la estructura como un todo.

## RECOMENDACIONES

1. Mientras una estructura tenga un grado alto de redundancia, más segura será; pero también más costosa y a veces no necesario, agregar mayor rigidez en las conexiones o apoyos, sólo si el análisis muestra que se necesita.
2. Debe verificarse si el sistema físicamente puede llegar a alcanzar la frecuencia resonante; es impráctico diseñar para esta si nunca llegara a alcanzarse.
3. Para un impacto se debe considerar la estructura sin amortiguamiento para propósitos de diseño, donde se presentan las ventajas de que el cálculo es simple y se tiene un rango conservador por las imprecisiones físicas y numéricas.
4. En el método de Newmark-Hall 1982, para que el espectro represente una banda adecuada de períodos, se recomienda que  $A_{te}D_{te}/(V_{te})^2$  se tome como 6,0.
5. No diseñar estructuras con periodos cortos para demanda de ductilidad porque no es posible ejercerla y las reducciones que se realicen a la resistencia pondrían en peligro la estabilidad del sistema, pues no se produciría una demanda de ductilidad compatible con la reducción de resistencia.

6. En un sitio cercano al epicentro, situado sobre suelo duro o roca, el valor máximo se presenta a bajo período, del orden de 0,3 s, por lo que el movimiento será más dañino para estructuras bajas y rígidas, que vibren con este período natural, se debe evitar su construcción.
  
7. En un sitio a larga distancia del epicentro, situado en suelo blando, el valor máximo se desplaza hacia mayores periodos, del orden de 1 s. El movimiento representado será especialmente dañino para estructuras altas y flexibles entre 10 y 15 niveles; con este período propio, evitar su construcción.



## BIBLIOGRAFÍA

1. BOLT, Bruce. *Earthquakes*. 3a ed. EUA: W. H. Freeman, 1993. 229 p.
2. CHOPRA, Anil K. *Dynamics of structures*. USA: Prentice Hall, 1995. 729 p.
3. CLOUGH, Ray; PENZIEN, Joseph. *Dynamics of structures*. 2a ed. USA: McGraw-Hill, 1993. 648 p.
4. GARCÍA, Luis. *Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico*. Colombia: Universidad de los Andes, 1998. 574 p.
5. GOYTIA, Ivan; VILLANUEVA, Rolando. *Ingeniería antisísmica*. Bolivia: Universidad Mayor de San Simón, 2001, 240 p.
6. JARAMILLO, Juan Diego. Espectros de diseño sísmico para la ciudad de Medellín. Colombia: Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras. Vol. 7, No. 1. 2002. 19 p.
7. NEWMARK, Nathan; ROSENBLUETH, Emilio. *Fundamentals of earthquake engineering*. USA: Prentice Hall, 1972. 640 p.
8. ORDAZ, M; MIRANDA, E; AVILÉS, J. *Propuesta de espectros de diseño por sismo para el DF*. México: 2000. Inédito.
9. PAZ, Mario. *Dinámica estructural teoría y cálculo*. España: Reverté, 1992. 648 p.

10. SARRIA, Alberto. *Ingeniería sísmica*. 2a ed. Colombia: ECOE Ediciones y Ediciones Uniandes, 1995. 569 p.
11. SCAWTHORN, Charles; CHEN, Wai-Fah. *Earthquake engineering handbook*. USA: CRC Press, 2003. 1523 p.
12. THOMSON, W. *Teoría de vibraciones y aplicaciones*. USA: Prentice-Hall, 1994. 506 p.